UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE ARQUITECTURA

FISICA

PARA ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA

TESIS

Presentada a la Junta Directiva de la Facultad de Arquitectura
de la Universidad de San Carlos de Guatemala

por:

HECTOR HUGO JIMENEZ MARTINEZ

al conferírsele el Título de:

ARQUITECTO

Guatemala, octubre de 1,990

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE ARQUITECTURA

DECANO	Arq. Francisco Chavarria S.
VOCAL 1o.	Arq. Marco Antonio Rivera
VOCAL 2o.	Arq. Hèctor Castro Monterroso
VOCAL 3o.	Arq. Delfina E. Maldonado
VOCAL 4o.	Prof. Juan Carlos Alvarado
VOCAL 5o.	Br. Carlos Roca Jerez
SECRETARIO	Arq. Sergio Veliz Rizzo

TRIBUNAL EXAMINADOR

DECANO EN FUNCIONES	Arq. Marco Antonio Rivera
EXAMINADOR	Arq. Francisco Mendez D.
EXAMINADOR	Arq. Julio Corea y Reyna
EXAMINADOR	Ing. Vicente Mazariegos
SECRETARIO	Arq. Sergio Veliz Rizzo

ASESOR	Lic. Oscar Castañeda T.

I N D I C E

CAPITULO 1
MEDICION Y SISTEMAS DE UNIDADES

La Física es una ciencia cuantitativa. En este sentido, es deseable que la mayoría de sus conceptos correspondan a objetos o relaciones reales, que se den en el mundo objetivo y que sean susceptibles de ser medidos. Con esto queremos decir que debe ser posible asociar números con las distintas cantidades físicas. En este capítulo, trataremos acerca de las medidas, sus patrones y los distintos sistemas de unidades que se utilizan actualmente.

1.1 MEDICION Y PATRONES DE MEDIDA

Para establecer un sistema de unidades en términos del cual se puedan expresar las medidas físicas se seleccionan primero unidades arbitrarias para un conjunto fundamental de cantidades físicas (por ejemplo: longitud, tiempo, y masa). y después se definen las unidades de otras cantidades físicas a partir de aquellas (por ejemplo, las unidades de velocidad son unidades de longitud/unidades de tiempo).

Se acostumbra tomar como cantidades fundamentales a la longitud, el tiempo y la masa, aunque se pueden tomar otros conjuntos de tres unidades como longitud, tiempo y fuerza etc.

Como patrón de longitud se pueden tomar la pulgada, la cuarta, el pié, el codo etc. Sin embargo estos patrones antropométricos varían de una región a otra y no poseen por lo tanto la universalidad e invariabilidad deseable en un patrón. Tomando esto último en consideración, se han definido los siguientes patrones.

<u>Longitud</u>: El metro (m) se definió originalmente con base a la distancia que existe del polo norte al ecuador. Esta distancia es de casi 10,000 kilómetros (km) ó 10^6m. Hasta hace poco el metro patrón fue la distancia que hay entre dos marcas sobre una aleación de platino-iridio, que hay en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en París, Francia. Actualmente, al metro patrón se le ha especificado en términos del número de longitudes de onda de la luz de una cierta línea espectral del isótopo kriptón 86. A la pulgada, en los Estados Unidos, se le define

como la longitud exactamente igual a 2.54 centimetros (cm). Tanto el metro como el centimetro pertenecen al sistema metrico decimal. Resulta sencillo dentro de este sistema la conversión de unidades. Basta con anteponer un prefijo que indica la potencia de 10 deseada (ver tabla 1.1).

Prefijo	Abreviatura	Potencia de 10
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	K	10^{3}
Hecta	H	10^{2}
Deca	D	10^{1}
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}

Prefijos en el sistema métrico decimal
y potencias de diez correpondientes
TABLA 1.1

<u>Tiempo</u>: Como patrón para definir la unidad básica de tiempo se toma el día solar medio correspondiente al año 1900. El patrón se toma como una fracción de este día y se denomina segundo (s). En la actualidad, se define el segundo como el lapso necesario para que ocurran 9.19263177 x 10^{9} vibraciones de radiación del átomo del cesio 133.

<u>Masa</u>: En el sistema métrico decimal se toma como patrón un cilindro particular de una aleación de platino-iridio que se conserva en Francia, denominado kilogramo (kg). Otro patrón de uso frecuente en Arquitectura es la libra (lb) que equivale a 0.4536 kg. La libra no es estrictamente una unidad de masa. Cuando se escribe 1 kg = 2.205 lb significa que un kilogramo es una masa que pesa 2.205 libras.

1.2 SISTEMAS DE UNIDADES:

Se utilizan comunmente tres sistemas de unidades: MKS (metro, kilogramo, segundo), CGS (centimetro, gramo, segundo) y el inglés (pié, libra, segundo). El sistema internacional de pesos y medidas (SI), establecido en un acuerdo de la conferencia general realizada en Francia, toma como punto de partida el sistema métrico decimal y abarca las siguientes unidades físicas: metro (M), kilogramo (K), segundo (S), ampere (A), kelvin (^{o}K), candela (Cd) y mol (MOL), correspondientes a longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente, temperatura, intensidad luminosa y cantidad de substancia, respectivamente. Abreviado, es el sistema MKSA^{o}KCdMOL. Las demás unidades físicas utilizadas se derivan de estas unidades básicas. Así, como se verá más adelante, la unidad de fuerza es el newton (Nt) que es igual a 1K-M/S^2.

1.3 CONVERSION DE UNIDADES

Para convertir unidades de un sistema a otro puede utilizarse la regla de tres simple con la siguiente tabla:

Cantidad	Sistema		
	MKS	CGS	INGLES
Longitud	1 m	100 cm	3.281 piés
Tiempo	1 s	1 s	1 s
Masa	1 kg	1000 g	6.852×10^{-2}sl
Fuerza	1 nt	10^5dn.	0.2248 lb.
Area	1 m^2	10^4cm^2	10.76 pie^2
Volumen	1 m^3	10^6cm^3	35.31 pie^3
Densidad	1kg/m^3	0.001g/cm^3	1.94×10^{-3}sl/p^3
Presión	1 nt/m^2	10 dn/cm^2	0.021 lb/p^2

Factores de conversión

TABLA 1.2

Las cantidades que aparecen en la tabla anterior y que no han sido definidas, serán estudiadas en los capítulos posteriores. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de los factores de conversión:

Ejemplo 1.-

Expresar $14m^3$ en el sistema Ingles.

$$14\ m^3 = 14m^3 \times 35.31\ p^3/m^3 = 494.34\ p^3$$

Ejemplo 2.-

Escribir 500 p en el sistema CGS.

1m -----3.281p $Xm = 500p \times 1m/3.281p = 152.39m$

Xm -----500p

Por lo tanto $500p = 152.39m = 152.39m \times 100\ cm/m$

$= 15{,}239\ cm$

Ejemplo 3.-

Convertir 150 Nt al sitema Inglés.

$$150\ Nt = 150\ Nt \times 0.2248\ lb/Nt = 33.72\ lb$$

Otros factores de conversión entre unidades que se utilzan frecuentemente se dan en la tabla 1.3.

1 milla	5280 p
1 pie	12 pulgadas
1 hora	60 minutos
1 min	60 s
1 radián	57.30 grados
1 grado	60 minutos de arco
1 minuto	60 segundos de arco
1 atmósfera	$1.013 \times 10^5\ Nt/m^2$
1 atmósfera	76 cm de Hg
1 m^3	1,000 litros
1 paja de agua	60 m^3

Otros factores de conversión

TABLA 1.3

1.4 HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

En toda ecuación que se escribe en Física las dimensionales o unidades de todos los términos aditivos en ambos lados de la ecuación deben ser iguales cuando se reducen a las unidades básicas en un sistema dado. Se pueden sumar, por ejemplo, metros con piés, o metros cúbicos con litros haciendo las respectivas conversiones, pero no podemos, evidentemente, sumar kilómetros con horas o minutos con gramos: una ecuación física debe ser homogenea dimensionalmente hablando.

El análisis dimensional es importante para verificar si una ecuación es válida. Con esto, se quiere decir que si la ecuación no es homogénea en todos sus términos, esta está mal planteada. Pero puede suceder que la ecuación sea dimensionalmente homogenea y , a pesar de esto, sea falsa. Por ejemplo, el area de un rectángulo de lados a y b está dada por la ecuación A = axb . La ecuación A = 2 axb es dimensionalmente correcta pero no es verdadera. Es, sin embargo, aconsejable realizar un análisis dimensional de las ecuaciones que se utilicen en el planteamiento de un problema para detectar posibles errores.

Ejemplo 1.-

Verificar la homogeneidad dimensional de la ecuación $v^2=2as$, donde v representa la velocidad de un cuerpo en m/s, a su aceleración en m/s^2 y s su desplazamiento en m.

$$(m/s)^2 = m^2/s^2 = m/s^2 \times m$$

Ejemplo 2.-

Verifique si la ecuación $s = 1/2\ at^2$, donde s y a representan el desplazamiento y la aceleración de un cuerpo y t el tiempo en s, es dimensionalmente correcta.

$$m = m \times s^2/s^2 = m/s^2 \times s^2$$

Ejemplo 3.-

Es correcta la ecuación F = p/V en donde F es la fuerza ejercida sobre la pared de un recipiente de volumen V que contiene un gas a presión p?

Las unidades, en el sistema MKS para las variables anteriores son:

F	Nt
p	Nt/m^2
V	m^3

Por lo tanto, las unidades de p/V son $(Nt/m^2)/m^3 = Nt/m$. Las unidades del lado izquierdo de la ecuación original (Nt) no son las mismas que las del lado derecho (Nt/m) y la ecuación no es correcta.

1.5 NOTA CURIOSA

"La copia del patrón internacional de masa que se encuentra en EEUU llamada kilogramo prototipo No. 20, está guardada en una cúpula de cristal en la Oficina Nacional de Normas (National Bureau of Standards) sólo se saca una vez al año para corroborar los valores de patrones terciarios. A partir de 1,889 el prototipo ha sido llevado a Francia dos veces para comparación con el kilogramo maestro (primario). Siempre que se saca de la cúpula se hace en presencia de dos personas, una para transportarlo con unas pinzas y la otra para atraparlo en caso de que la primera lo bote".(Física, Parte I, Resnick y Halliday, CECSA, 1980).

1.6 PRACTICA DE LABORATORIO: MEDIDAS Y UNIDADES DE MEDIDA

Objetivos: Familiarizarse con el equipo de laboratorio.

Adquirir destreza en la toma de medidas de distintas cantidades físicas.

Utilizar los factores de conversión de unidades.

Equipo:
Objetos cilíndricos.
50 cm de cuerda.
Regla graduada en milímetros.
Cuaderno o libro.
Dinamómetro.
10 esferas de vidrio (cincos)
Gotero.
Probeta graduada en mililitros (cc)
Recipiente con agua.

Procedimiento:

A. Determinación experimental de π:

1. Utilizando la regla graduada, mida el diámetro de uno de los objetos cilíndricos.
2. Con ayuda de la cuerda, mida la circunferencia de el mismo objeto.
3. Calcule π utilizando la relación π = cir/diámetro.
4. Repita el procedimiento tomando otros objetos y compare los resultados obtenidos.

B. Determinación del espesor de una hoja de papel:

1. Trate de medir el espesor de 1 hoja (dificil, verdad?).
2. Cuente 100 hojas, mida su espesor y determine el grosor de una hoja de papel en milimetros (sencillo!).
3. Exprese su respuesta en pulgadas, piés y metros.

C. Determinación del volumen de una gota de agua:

Utilizando un procedimiento similar al anterior y usando el gotero y la probeta graduada en cc, encuentre el volumen de una gota de agua. Exprese su resultado en pulgadas cúbicas, m^3 y litros.

D. Determinación del peso de un cinco:

Utilize la idea expresada en los literales anteriores para encontrar el peso de un cinco. De su resultado en dinas, newtons y libras.

1.7 EJERCICIOS

1. Una pizza de 5 pulgadas de diámetro cuesta Q8.00. Cuánto costará una pizza de 30 cm de diámetro?
2. Cierto clase de ladrillos viene en dos tamaños, ambos de la misma forma. El ladrillo grande es 50% más largo que el pequeño. Que tanto mas material hay en el ladrillo grande.
3. Efectue las siguientes conversiones:
   a) Un area de 5 kms^2 en $pies^2$.
   b) Una masa de 35 g en slugs.
   c) Tres atmósferas de presión en milimetros de Hg.
   d) Un dia solar medio en segundos.
   e) 3.9 kms en metros, pies y pulgadas.
4. Un automovil gasta un galón cada 30 km si viaja a 60 km/hora. Si hay 3800 g de gasolina en un gl, cuantos g se están consumiendo en un s.
5. Determine el volumen de una habitación de 3 mts por 4 mts por 2.70 mts y expréselo en pies cúbicos.
6. Determine el area de una plancha que mide 4 X 8 pies, en pulgadas cuadradas.

7. Determine la distancia que recorre la luz en un año, si la velocidad de la luz es 2.99 X 10^{8} mts/s.

8. La distancia entre la capital de Guatemala y la ciudad de Santa Cruz del Quiché es de 165 kms. Exprese esta distancia en pies.

9. Si la densidad del agua es 1 g/cc. Encuentre la densidad en el sistema inglés.

10. Supóngase que desconoce la conversión de millas a kms. Si le dan la distancia de Cuilapa al Puerto de San José, que es de 152 kms o 94 millas, encuentre la distancia en millas que separa los 114 kms de Guatemala a Likín.

11. Las siguientes medidas de longitud y masa, están dadas en el sistema MKS ; expréselas en el sistema inglés:

a) Radio de la tierra 6.4 X 10^{6}

b) Altura promedio de una persona 1.7 X 10^{0}.

c) Espesor promedio de una página de un libro 1 X 10^{-4}

d) Masa de un átomo de Uranio 4 X 10^{-26}

e) Masa promedio de una persona 5.9 X 10^{1}

f) Masa de la luna 7.4 X 10^{22}

12. La densidad del hierro es de 7.6 g/cm^3. Exprese esta densidad en kg/m^3.

13. Una varilla de hierro tiene un ϕ de 1/2" y una longitud de 12'. Encuentre la masa de la varilla en kg/m^3.

14. Un albañil necesita mezclar el concreto necesario para fundir una losa de 6 pulgadas de espesor, 6.2 pies de ancho y 10.5 pies de largo. Calcule el número de metros cúbicos que necesita.

CAPITULO 2

ESCALARES Y VECTORES

En Física fundamental, se trabaja con cantidades escalares y vectoriales. El estudiante está ya familiarizado con las cantidades escalares y las operaciones entre ellas. Las cantidades vectoriales, sumamente importantes tanto para los cursos de Física como para los cursos en la línea de Estructuras, requieren un tratamiento más detallado, como se verá en este capítulo.

2.1 DEFINICION DE CANTIDADES ESCALARES

Existen cantidades físicas que quedan completamente definidas dando un número y la dimensional correspondiente. Dichas cantidades son llamadas escalares. Como ejemplos de escalares se tienen los siguientes: tiempo, masa, distancia, densidad, presión etc. Así, se entiende perfectamente lo que se quiere decir con una masa de 3 kg, un tiempo de 4 s, una distancia de 25 km, una densidad de 1 gr/cm^3 o una presión de 30 lb/pl^2.

Las cantidades escalares se operan entre si de acuerdo al álgebra de los números reales, esto es, siguiendo las reglas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de esta álgebra. Naturalmente, sólo se pueden sumar o restar cantidades homogéneas. Para representar los escalares se utilizarán las letras estándar: a, b, c, x, y, A, R. etc.

2.2 VECTORES

La discusión de muchos problemas de Física se simplica enormente con la introducción del concepto de vector. Un vector se define geométricamente como una cantidad física caracterizada por su magnitud, su dirección y su sentido en el espacio y su dimensional. Para comprender lo que es un vector, suponga que usted se encuentra en un terreno realizando un trabajo de topografía. El cadenero está parado sobre un mojon y usted desea que se movilice hacia otro que se encuentra a 30 metros de distancia. Si usted no le da ninguna otra indicación el cadenero no sabrá hacia donde desplazarse. Por lo que debe indicarle en qué dirección y en qué sentido debe realizar su desplazamiento. La instrucción correcta seria: camine 30m en la dirección sur-norte, hacia el norte. El desplazamiento es un ejemplo de una cantidad vectorial. Otros ejemplos importantes en Física son: fuerza, velocidad, aceleración y posición.

La magnitud de un vector es su tamaño, su valor numérico. La dirección y sentido dan su orientación en el espacio.

Gráficamente, se representa un vector por una flecha, cuya longitud reproduce la magnitud del vector a una escala determinada y cuya dirección y sentido son los del vector representado. Para representar un vector utilizaremos letras en negrita. La misma letra en escritura estándar se usará para expresar la magnitud del vector. Esta magnitud también se escribe colocando al vector entre dos barras paralelas verticales: A = | A |.

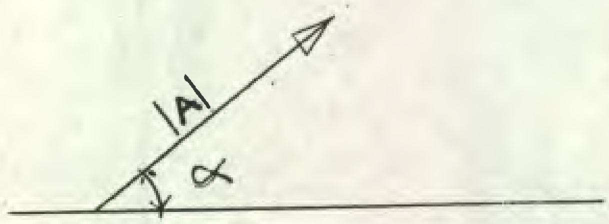


FIGURA 2.1

REPRESENTACION GRAFICA DE UN VECTOR

Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido; el concepto de vector no hace referencia a ningua localización particular como se muestra en la figura 2.2.

FIGURA 2.2

IGUALDAD DE VECTORES

2.3 REPRESENTACION DE UN VECTOR EN COORDENADAS CARTESIANAS Y EN COORDENADAS POLARES

Existen dos formas de representar de un vector en el plano: utilizando coordenadas rctangulares (o cartesianas) o utilizando coordenadas polares. En coordenadas rectangulares, $A = (A_x, A_y)$ -una pareja ordenada- en donde A_x y A_y son las proyecciones del vector **A**, sobre los ejes x y y.

En coordenadas (componentes) polares $A = A, \alpha^{\circ}$, en donde A es la magnitud del vector **A** y α es el ángulo formado entre el vector **A** y el sentido positivo del eje x:eje de las abscisas (eje + "x") [1].

Tomando en cuenta que dicho ángulo α es positivo si "gira" en sentido contrario a las agujas del reloj

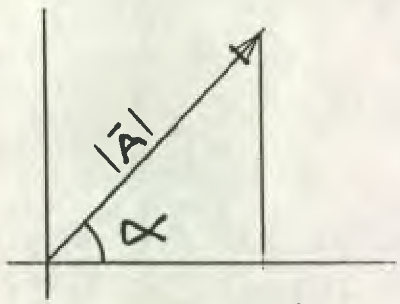


FIGURA 2.3

REPRESENTACION DE UN VECTOR (FORMA POLAR)

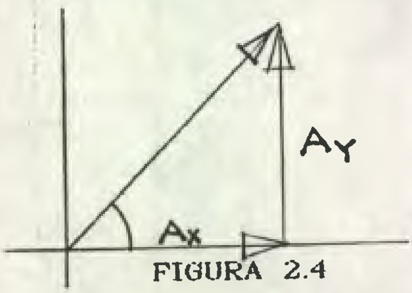


FIGURA 2.4

REPRESENTACION GRAFICA DE UN VECTOR (PAREJAS ORDENADAS)

[1] Las letras del alfabeto griego (α, β, γ...) nos servirán para la identificación del ángulo de intersección entre la línea de acción del vector con el eje de las abscisas, tomando como referencia el sentido positivo de las mismas (eje + "x"), para ángulos en triángulos, asi como para algunas constantes utilizadas a través de este texto.

Convenio: El ángulo del vector será positivo si "gira" en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Figuras que corresponde a un mismo vectoren forma polar y en parejas ordenadas respectivamente.

Para expresar la pareja ordenada a partir de la forma polar, se encuentran las componentes de vector A sobre el eje de coordenadas cartesianas:

$$A_x = A \cos \alpha$$

y $$A_y = A \text{ sen } \alpha$$

Siendo entonces (A_x, A_y) La pareja ordenada del vector A. Para encontrar la forma polar a partir de una pareja ordenada, se procede a encontrar la magnitud del vector y el ángulo que forma con el eje de referencia (eje "x" Positivo)

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

y $$\alpha = tg^{-1} A_y/A_x$$

NOTA: Como la función de la tangente inversa (tg^{-1})no es una función univaluada, es decir que, en este caso, el valor de la $tg^{-1}x$, tiene dos imágenes (respuestas) si tomamos por ejemplo:

$tg\ 53^\circ = 4/3$ y también $tg\ 53^\circ = -4/-3$

Por lo que es conveniente determinar el cuadrante donde se localiza el vector con un sencillo razonamiento y cual es su ángulo respecto al eje de referencia con operaciones de suma.

EJEMPLO 4

Trasladar de la notación polar el vector $A = 10, 60^\circ$ a la notación de parejas ordenadas:

$A_x = A \cos 60^\circ$

$A_x = 10 \times 0.5 \therefore A_x = 5$

y $A_y = A \text{ sen } 60^\circ$

$A_y = 10 \times 0.866 \therefore A_y = 8.66$

Por lo tanto $A = (5{,}8.66)$

EJEMPLO 5

Trasladar de la notación polar el vector $B = 20, 120^\circ$ a la notación de parejas ordenadas:

$B_x = B \cos 120^\circ$

$B_x = 20\ (-0.5) \therefore B_x = -10.00$

y $\quad B_y = B \text{ sen } 120^\circ$

$B_y = 20\ (0.866) \therefore B_y = 17.32$

Por lo tanto **B** = (-10.00, 17.32)

EJEMPLO 6

Trasladar el vector **C** = (6,8) de su notación de pareja ordenada a la notación polar:

$|C| = C = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$tg^{-1}\ 8/6 = 53^\circ.13$

Por lo tanto **C** = $10{,}53^\circ.13$

EJEMPLO 7

Trasladar el vector **D** = (3.5, -5.6)

$|D| = D = \sqrt{3.5^2 + (-5.6)^2} = 6.60$

$tg^{-1}\ -5.6/3.5 = 58^\circ$

Este vectorsegún esta dado por su pareja ordenada queda en el cuarto cuadrante y el resultado es un ángulo negativo ("gira" en el sentido de las agujas del reloj) por lo que, para encontrar su ángulo positivo ("gira" en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del eje "x" positivo) lo sumamos a 360°:

$360^\circ + (-58^\circ) = 302^\circ$ por lo tanto **D** = $6.60,\ 302^\circ$.

2.3 MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Definimos el producto de un escalar positivo e por un vector **A** como el vector e**A** cuya dirección y sentido son los mismos que los del vector **A** y cuya magnitud es e|**A**| = eA. Si el escalar e es negativo, definimos e**A** con magnitud |e**A**| en la misma dirección de **A** pero de sentido contrario. los siguientes ejemplos ilustran esta operación:

EJEMPLO 1

Sea el escalar e = 2 y,

Sea el vector **A** = 3, horizontal y hacia la derecha

Gráficamente **A** = 

Entonces e **A** = 6, horizontal y hacia la derecha.

Graficamente: 

EJEMPLO 2

Sea el escalar e = 2 y,

Sea el vector **B** = 4 horizontales y hacia la izquierda

Entoces e **B** = 8, horizontales y hacia la izquierda

Graficamente: 

EJEMPLO 3

Sea el escalar f = -1/2 y

Sea el vector **C** = 6, horizontal y hacia la derecha

Entonces f **C** = 3 unidades hacia la izquierda

Graficamente: 

Observaciones:

1. Como el escalar f es negativo el vector resultante de la anterior multiplicación, se encuentra en la misma dirección, pero en sentido contrario.

2. Multiplicar por un medio (1/2), es lo mismo que dividir entre dos.

2 5 ADICION DE VECTORES

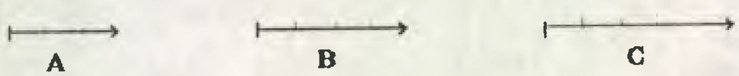
Para sumar (restar) dos o más vectores en una, dos o tres dimensiones se va colocando uno a continuación de otro, es decir, se une la punta del primer vector con la cola del segundo, la punta del segundo con la cola del tercero, hasta llegar a colocar el último vector. Finalmente se une el principio del primer vector con el final del último vector, este vector es el resultante R de la suma de vectores en el procedimiento de suma conocido como el método gráfico o geométrico.

METODO GRAFICO O GEOMETRICO

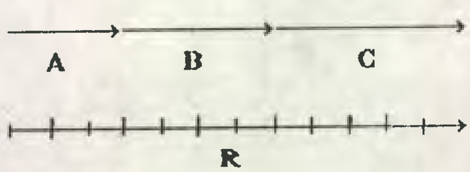
En una dimensión

Sean A, B y C tres vectores sobre una linea recta horizontal, cuyos valores son 3m, 4m y 5m respectivamente. Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

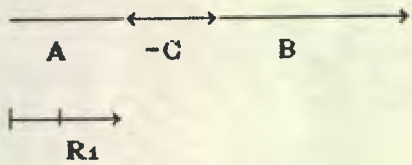
a) A+ B + C = R (R = Vector Resultante)



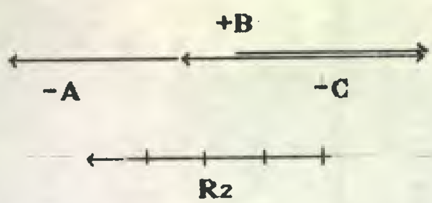
Entonces A + B + C :



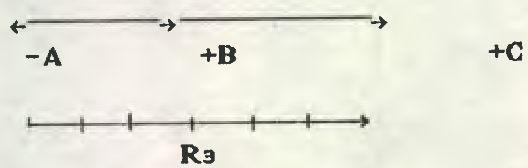
b) A + B - C = R_1 (R1 = Vector Resultante)



c) -A + B - C = R_2



d) -A + B + C = R_3



Observese que en una dirección, la suma (o resta) se efectúa como una sugma algebraica:

a) A + B + C = 3 + 4 + 5 = 12

b) A + B - C = 3 + 4 - 5 = 2

c) -A + B - C = -3 + 4 - 5 = -4

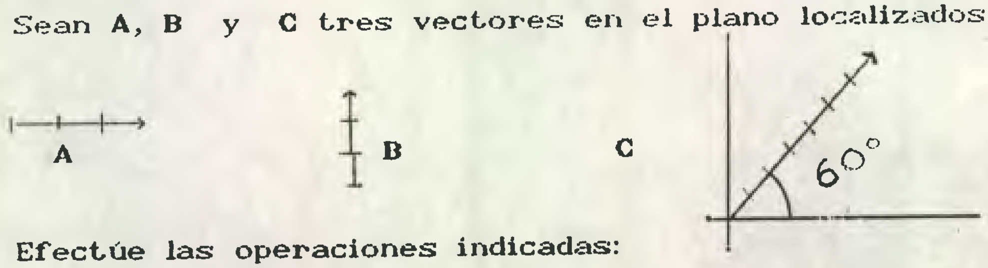
d) -A + B + C = -3 + 4 + 5 = 6

En igual forma se trabaja si la recta está vertical o inclinada. La asignación de la orientación -positiva (+) o negativa (-), es arbitraria y el signo delvector resultante dependera de esta asignación.

Adición de vectores en el plano

EJERCICIOS;

Sean A, B y C tres vectores en el plano localizados así:



Efectúe las operaciones indicadas:

a) $A + B = R_a$

b) $B + C = R_b$

c) $A + C = R_c$

d) $C - A = R_d$

e) $A + B + C = R_f$

f) $A - B - C = R_g$

Para dibujar los vectores que intervienen en la suma así como para hallar el vector resultante en este método, necesitamos de una escuadra, un escalímetro y un transportador. La utilización de estos instrumentos de dibujo técnico, así como la exactitud del resultado dificultan la aplicación de este método, pero es útil en la visualización, tanto del problema como de su solución.

CONMUTATIVIDAD Y ASOCIATIVIDAD

Nota: se puede demostrar fácilmente que, dados los vectores A, B, y C, se tiene que: $A + B = B + A$ y que: $A + (B + C) = (A + B) + C$. El primer resultado se conoce como la "propiedad conmutativa" y al segundo como la "propiedad asociativa" de la adición de vectores

Suma en tres direcciones

La suma de vectores en el espacio es una generalización de la suma de vectores en el plano: la parte final de cada vector que interviene en la suma se une con el inicio del otro vector y el vector resultante se traza desde el principio del primer vector, al final del último ó la suma de las componentes correspondientes de cada vector es igual a las componentes del vector resultante.

Adición de vectores Método Analítico

Un vector es una cantidad matemática que tiene tanto magnitud como dirección y sentido, en el que cada componente del vector resultante de la suma de dos o más vectores es igual a la suma de las componentes correspondientes de cada vector (pareja ordenada).

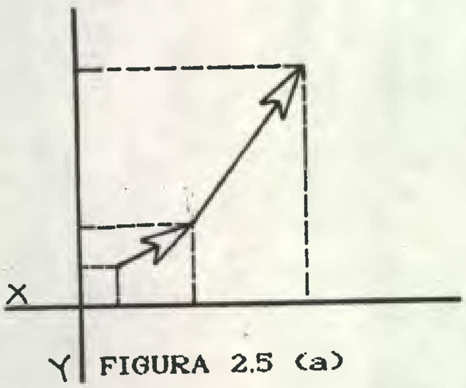


FIGURA 2.5 (a)

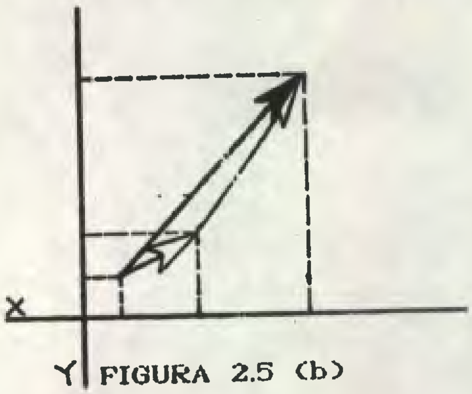


FIGURA 2.5 (b)

SUMA DE VECTORES EN EL PLANO

De las figuras 2.5 (a) y 2.5 (b), es claro que si: **R = A + B**, entonces:

$$R_x = A_x + B_x \quad y$$

$$R_y = A_y + B_y$$

Esto significa que, dados los vectores **A** y **B** en su forma polar,

A = A, α y

B = B, β podemos encontrar la magnitud R y el ángulo ϕ de la resultante **R = A + B** realizando los siguientes pasos:

Primer paso: Encontrar las componentes de los vectores **A** y **B** auxiliados por las funciones trigonométricas de Seno y Coseno.

$Ay = A \text{ sen}, \alpha$

$Ax = A \cos, \alpha$

$By = B \text{ sen}, B$

$Bx = B \cos, \beta$

Segundo paso: Se suman algebraicamente las componentes en cada eje, para obtener una componente resultante en el eje "x" (Rx) y una componente resultante en "y" (Ry).

Tercer paso: Se calcula su magnitud (aplicación del Teorema de Pitágoras) y su ángulo (aplicando la función inversa de la tg.)

Si tenemos la pareja ordenada (Rx, Ry), entonces:

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

$$tg^{-1}\ Rx/Ry = \phi \text{ (ángulo buscado)}$$

EJEMPLO 8

Sea $A = 9.44m$, $\alpha = 122^\circ$ y

$B = 6.71m$, $\beta = 63.43^\circ$

Encontrar A + B

EJEMPLO 9

Componentes rectángulares de A y B

$Ay = 9.44m\ (\text{seno } 122^\circ) = 8m$

$By = 6.71m\ (\text{seno } 63.43^\circ) = 6m$

Entonces $Ry = 14m$

$Ax = 9.44m\ (\text{coseno } 122^\circ) = -5m$

$Bx = 6.71m\ (\text{coseno } 63.43^\circ) = 3m$

Entonces $Rx = -2m$

$R = \sqrt{(-2m)^2 + (14m)^2} = 14.14m$ y

$\phi = tg^{-1}\ 14m/-2m = -82 + 180^\circ = 98^\circ$

EJEMPLO 10

Un automóvil sale hacia Escuintla (sur) y recorre 60km. Luego cruza hacia Cocales (Occidente) y recorre 50km. Posteriormente dobla hacia San Lucas Tolimán (norte) recorre finalmente 40km. Suponiendo las distancias como lineas rectas y sin pendientes, encuentre el vector desplazamiento de la Ciudad

Capital hacia San Lucas Tolimán.

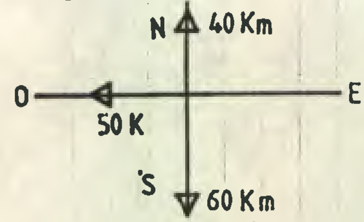


FIGURA 2.6

EJEMPLO 11

Método Analítico

$A = 60km \quad 270^{\circ}$

$B = 50km \quad 180^{\circ}$

$C = 40km \quad 90^{\circ}$

$A_x = 60km \cos 270^{\circ} = 0km$

$B_x = 50km \cos 180^{\circ} = -50km$

$C_x = 40km \cos 90^{\circ} = 0km$

$R_x = -50km$

$A_y = 60km \text{ sen } 270^{\circ} = -60km$

$B_y = 50km \text{ sen } 180^{\circ} = 0km$

$C_y = 40km \text{ sen } 90^{\circ} = 40km$

$R_y = -20km$

Entonces:

$$R = |R| = \sqrt{(-50km)^2 + (-20km)^2} = 53.85km$$

$$\alpha = tg^{-1}(-20km / -50km) = tg^{-1}(0.4) = 66.42^{\circ} - 180^{\circ} = 246.42^{\circ}$$

El auto se ha desplazado 53.85km en la dirección 66.42° del Occidente al Sur.

Este problema también lo podemos resolver por el método gráfico sobre papel milimetrado o con ayuda de un escalímetro, fijando una escala apropiada al tamaño de la hoja utilizada. Con el escalímetro podemos encontral la magnitud (longitud) del desplazamiento resultante y con el transportador el el ángulo de referencia.

EJEMPLO 11

Sobre un cuerpo actúan 4 fuerzas como se indica en la figura. Encuentre la fuerza equivalente (Resultante).

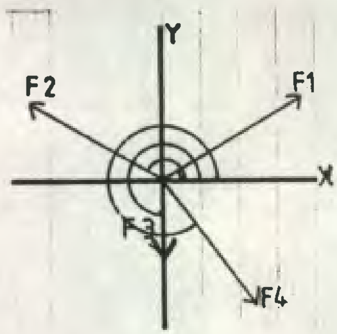


FIGURA 2.6

EJEMPLO 11

$|F1| = 40Nt, \quad 30^{\circ}$

$|F2| = 38Nt, \quad 120^{\circ}$

$|F3| = 20Nt, \quad 270^{\circ}$

$|F4| = 50Nt, \quad 307^{\circ}$

Componentes rectangulares de cada vector:

F1:

$F1_x$ = 40Nt cos 30 = 34.64Nt, $F1_y$ = 40Nt sen 30 = 20Nt

F2:

$F2_x$ = 38Nt cos 120 = -19Nt, $F2_y$ = 38Nt sen 120 = 32.9Nt

F3:

$F3_x$ = 20Nt cos 270 = 0Nt, $F3_y$ = 20Nt sen 270 = -20Nt

F4:

$F4_x$ = 50Nt cos 307 = 30Nt, $F4_y$ = 50Nt sen 307 = -39.99Nt

Sugerencia: Para operar ordenadamente haga una tabla como la siguiente:

		F_x	F_y
F1		34.64 Nt	20.00 Nt
F2		-19.00 Nt	32.90 Nt
F3		0.00 Nt	-20.00 Nt
F4		30.00 Nt	-39.93 Nt
FR	=	45.64 Nt	- 7.03 Nt

$|FR| = \sqrt{(45.64Nt)^2 + (-7.03Nt)^2} = 46.17$ Nt y

tg^{-1} (-7.03Nt / 45.64Nt) = $-8.75^\circ \therefore \phi = 360^\circ - 8.75^\circ = 351.25^\circ$

EJEMPLO 12

Para problemas en Topografía varía el convenio establecido anteriormente en relación al eje de referencia y al sentido positivo del ángulo. Así para el eje de referencia se utiliza el Norte (eje "y" positivo) y al ángulo (Azimut) se mide en el sentido de las agujas del reloj a partir del Norte.

Notación frecuentemente utilizada:

Estación (punto de partida) △

Punto o puntos observados ⊙

Las coordenadas parciales son las componentes cartesianas del desplazamiento entre 2 puntos observados, referidas al Norte (eje "y" positivo).

Las coordenadas totales se encuentran sumando sucesivamente los desplazamientos entre puntos observados, partiendo de la estación.

a) Sean:

Ptos. Observados		Dist. en m. entre ptos.	Azimut
1	2	20	32°25'
2	3	22	160°32'
3	4	32	232°12'

b) Las coordenadas son: (Eje de referencia Norte)

	PARCIALES		TOTALES	
	Y	X	Y	X
1:	-	-	-	-
2:	16.88	10.72	16.88	10.72
3:	-20.74	7.33	-3.86	18.05
4:	-19.61	-25.28	-23.47	-7.23

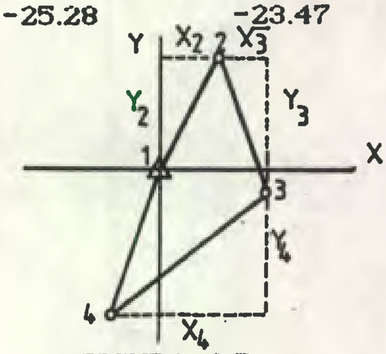


FIGURA 2.7

EJEMPLO 12

c) Calcular la distancia D entre el punto 4 y el punto 1

Coordenadas totales

	Y	X
1	0	0
4	-23.47	-7.23

$$D = \sqrt{(23.47)^2 + (7.23)^2} = 24.55m$$

d) Calcular el Azimut entre 4 y 1

Rumbo: tg^{-1} (7.23 / 23.47) = 17°7' (17.12°)

e) Ejercicios: Calcular

e-1 Distancia D y Azimut entre 3 y 1 y entre 1 y 3 e-2 Distancia D y Azimut entre 2 y 4 y entre 4 y 2

Como se puede observar, en los ejemplos anteriores, los vectores los utilizamos en una amplia gama de aplicaciones por lo que su manejo correcto es necesario para la solución de problemas en física y en otras desciplinas.

NOTA: Todo par de líneas generan un plano, haciéndolas concurrir en un punto y entre ambas se forma un ángulo de intersección. Por lo que el producto punto es la multiplicación de la magnitud del vector A por la magnitud del vector B por el coseno de dicho ángulo.

2.6 OTRAS OPERACIONES CON VECTORES

Es tambien , posible definir la multiplicación de un un vector por otro vector cuyo resultado es un escalar (producto punto):

Asi, si A y B son vectores, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cos (A\ B)$

En palabras: el producto punto es la multiplicación de la magnitud del vectorA por la magnitd del vector B por el coseno del ángulo entre los vectores.

Otra operación entre vectores es La Multiplicación de un vector por otro vector cuyo producto es un un vector (producto cruz (x))

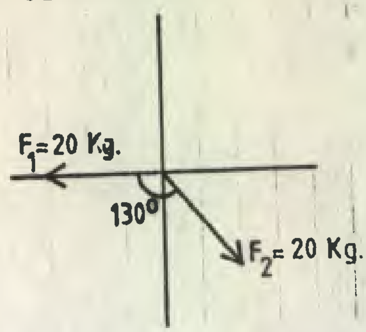
Si A yB son vectores, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |A| \times |B| \operatorname{Sen} (A.B)$; multiplicación de la magnitud del vector A por la magnitud del vector B por el seno formado entre ambos vectores.

NOTA: La dirección del nuevo vector será perpendicular al plano formado por los vectores A y B y el sentido lo veremos con amplitud en el capítulo de momentos.

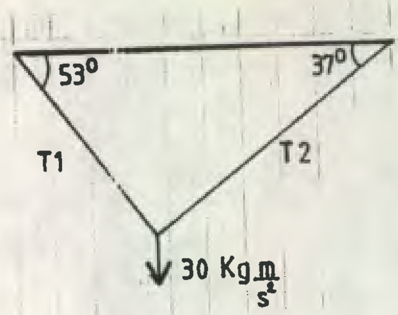
Ejercicios:

1) Entre el vector resultad de la suma de los vectores A, B y C si $|\mathbf{A}| = 21km\ 30^\circ$, $|\mathbf{B}| = 17km\ 140^\circ$ y $|\mathbf{C}| = 13km\ 280^\circ$
2) Si digo que he caminado 100m 60° al norte del este, encontrar cuánto he caminado al norte y cuánto al este.
3) Una escalera tiene 12 gradas completas con 35cm de huella y 15cm de contrahuella, cuánto nos desplazaremos al subirla completamente. (Magnitud y ángulo, suponiéndolo en el primer cuadrante)

4) En el siguiente diagrama encuentre la fuerza que mantiene el nudo en equilibrio, para que esto suceda la suma de la F1, F2 y F3 -que es buscada- debe ser cero (0), tanto en "x" como en "y".



5) Hallar el valor de las tensiones t1 y t2.



6) A x B, A x E, A . B

En donde:

A = (1.5, 1/2)

B = 0.3, 90°

E = -2

7) En un cuadrado de 200km de lado y cuya diagonal vale, por lo tanto, 280km, estan representados los vectores: A, B, C y D. Trace las siguientes operaciones vectoriales; si A esta horizontal, B vertical y C la diagonal en el cuatro cuadrante.

a) A + B

b) A - B

c) B + -A -C

8)Sume dos vectores coplanares de magnitud 30 y 40 de tal manera que el valor de la magnitud sea:

a) 70

b) 10

c) 50

9) En un cubo de 100cm de arista. Cuál es la magnitud de la distancia que une una esquina con la diametralmente opuesta?

10) En un plano inclinado de 5 mts. de base, 10 mts. de longitud y 6 mts. de altura, calcule el valor de la distancia por la que usted subiría con el menor esfuerzo.

CAPITULO 3

CENTRO DE MASA

El concepto de centro de masa (cm) y centro de gravedad (cg), son dos idealizaciones necesarias en el tratamiento y resolución de problemas, sobre todo en equilibrio y sus diferentes aplicaciones en arquitectura.

Cuando hablamos del traslado de una masa o sistema de masas, (una pelota, un automóvil, una gota de agua al caer) sabemos que se esta desplazando todo el sistema. Sin embargo, pueden y de hecho, ocurren otros tipos de movimientos internos dentro del sistema (la pelota rota, en un automóvil giran las llantas, el timón, suben y bajan los pistones y en la gota de agua existe movimiento de las particulas de oxigeno e hidrógeno que la forman).

La traslación del sistema como un todo puede describirse en función del punto donde se considera concentrada toda su masa. Este punto se denomina **centro de masa (cm)** del sistema. O sea, que se llama centro de masa **cm** al punto donde se considera concentrada toda la masa de un cuerpo o de un sistema de cuerpos.

Para localizar el centro de masa si se tiene un sistema de N particulas con masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ localizadas en los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), $(x_3,y_3), \ldots (x_n,y_n)$, el centro de masa del mismo está localizado en el punto **cm** cuyas coordenadas son:

$$X_{cm} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

$$Y_{cm} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}$$

para un sistema en un plano

Para un sistema de dos masas de igual valor unidas por una barra recta ideal (sin masa) su centro de masa se localiza en el centro de la barra:

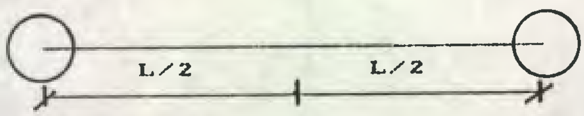


FIGURA 3.1

CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DE DOS MASAS IGUALES

O sea, que el centro de masa está localizado exactamente en el punto medio de la barra (L/2). Así también, una barra o viga cuya masa se encuentra homogéneamente distribuida de longitud L, tiene su centro de masa **cm** exactamente a la mitad de sus extremos, (sistemas en una dimensión). En una placa circular homogénea su centro de masa coincide con su centro geométrico y en un cubo formado por ocho masas puntuales de igual valor unidas por doce barras iguales en longitud (aristas) ocurre lo mismo que en una placa circular.

EJEMPLO 1

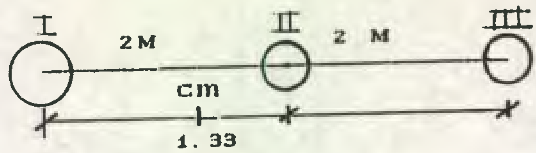


FIGURA 3.2

CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DADO

Encuentrar la posición del centro de **masa cm** de un sistema formado por tres esferas (masas puntuales) en donde $m_1 = 15$ kg, $m_2 = 10$ kg y $m_3 = 5$ kg, unidas por dos barras ideales de dos metros cada una que se encuentran sobre una recta horizontal.

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$X_{cm} = \frac{15kg \,.\, 0m + 10kg \,.\, 2m + 5kg \,.\, 4m}{15kg + 10kg + 5\ kg}$$

$$X_{cm} = \frac{40kgm}{30kg} = 1.33 \text{ metros del origen}$$

La ubicación del origen de coordenadas sobre el sistema es arbitrario.

EJEMPLO 2

Si se trabaja el problema anterior colocando el origen de las coordenadas sobre la masa puntual m_2, se tiene:

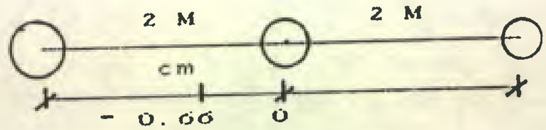


FIGURA 3.3

EJEMPLO 2

$$X_{cm} = \frac{15\ Kg\ (-2\ m) + 10\ Kg\ (\ 0\ m) + 5\ Kg\ (2\ m)}{15\ Kg + 10\ Kg + 5\ Kg}$$

$$\therefore \quad X_{cm} = \frac{-\ 20\ Kg\ m}{30\ Kg} = -\ 0.66$$

Entonces Xcm = - 0.66, posición del centro de masa al origen. Como se puede observar, el centro de masa del sistema está localizado en el mismo punto ó lugar del ejemplo anterior.

EJEMPLO 3

Unidas en línea recta por dos barras ideales de 6 y 4 metros se encuentran tres masas de m_1 = 10kg, m_2 = 20kg y m_3 = 30 kg. Encontrar la posición del centro de masa del sistema:.

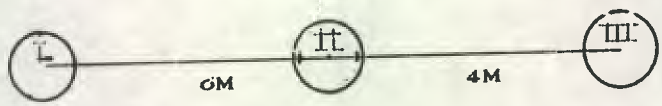


FIGURA 3.4

EJEMPLO 3

Colocamos el origen de las coordenadas exactamente sobre la masa puntual uno:

$$X_{CM} = \frac{10kg\ (0m) + 20kg\ (6m) + 30kg\ (10m)}{10kg + 20kg + 30\ kg} = \frac{420kg.m}{60kg} = 7m$$

Distancia del origen al centro de masa del sistema = 7m

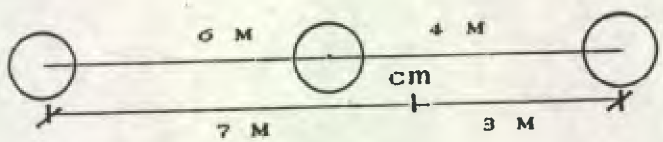


FIGURA 3.5

EJEMPLO 3

EJEMPLO 4

Tres masas puntuales de $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ y $m_3 = 6$ kg forman un triángulo equilátero unidas por barras ideales de 3 metros cada una como lo indica la figura. Encuentre su centro de masa.

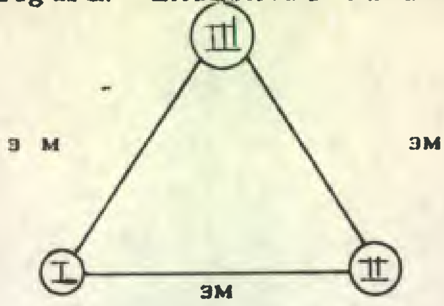


FIGURA 3.6

EJEMPLO 4

$$X_{cm} = \frac{2kg \times (0m) + 4kg \times (3m) + 6kg \times (1.5m)}{2kg + 4\ kg + 6\ kg}$$

$$X_{cm} = \frac{21kg\ .\ m}{12kg} = 1.75m$$

$$Y_{CM} = \frac{2kgy(0m) + 4kgy(om) + 6kgy(2.6m)}{2kg + 4kg + 6kg} = \frac{15.6kg.m}{12kg} = 1.3m$$

El centro de masa está entonces en el punto cm = (1.75m, 1.3m)

La distancia del origen de coordenadas cartesianas al centro de masa del sistema es:

$$d = \sqrt{X_{cm}^2 + Y_{cm}^2} = \sqrt{1.75^2 + 1.3^2} = 2.18m$$

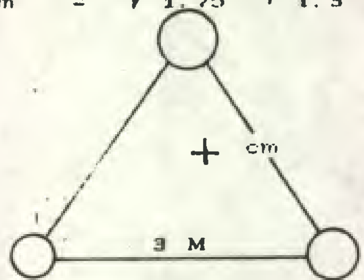


FIGURA 3.7

EJEMPLO 4

EJEMPLO 5

Encuentre el Centro de Masa del siguiente sistema, si:

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 9kg$ y $d = 7m$

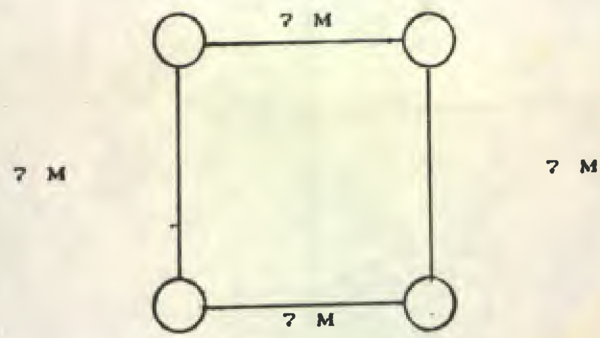


FIGURA 3.8

EJEMPLO 5

Como las masas y las distancias son iguales, el centro de masa deberá coincidir exactamente con el centro geométrico del sistema.

Centro de Masa CM en el eje "x", y "y":

$$CMx = \frac{9kgx(0m) + 9kgx(7m) + 9kgx(om) + 9kgx(7m)}{9kg(4)}$$

$$CMx = \frac{126kg \ . \ m}{36kg} = 3.5m$$

$$CMy = \frac{9kgy(7m)+9kgy(7m)+9kgy(0m)+9kgy(0m)}{9kg(4)} = \frac{126kg.m}{36kg} = 3.5m$$

Tal como previmos el CM del sistema, coincide con el Centro Geométrico de la figura:

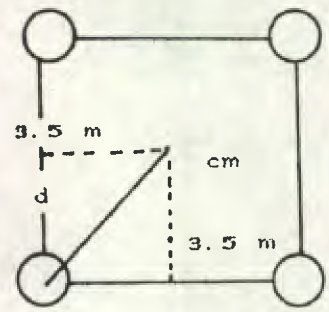


FIGURA 3.9

EJEMPLO 5

Distancia del origen al CM:

$$d = \sqrt{3.5^2 + 3.5^2} = 4.95 \text{ M}$$

EJEMPLO 6

Encuentre el Centro de Masa CM, si: $m_1 = 10gr$, $m_2 = 8gr$, $m_3 = 6\ gr$ y $m_4 = 4gr$ y la longitud de las varillas que unen las masas es de 4 cm.

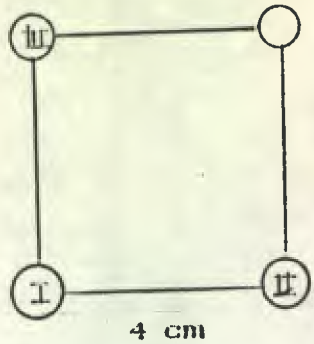


FIGURA 3.10

EJEMPLO 6

Entonces, para el eje "x":

$$CM_x = \frac{10gr(0cm)+8gr(4cm)+6gr(0cm)+4gr(4cm)}{10gr+8gr+6gr+4gr} = \frac{48gr\ .\ cm}{28gr}$$

$$CM_x = 1.71\ cm$$

Para el eje "y":

$$CM_Y = \frac{10gr(0cm)+8gr(0cm)+6gr(4cm)+4gr(4cm)}{10gr+8gr+6gr+4gr} = 1.07\ cm$$

Donde CM = (dx, dy) = (1.71cm. 1.07cm)

y la distancia del origen al centro de masa es:

$$d = 1.71^2 + 1.07^2 = 2.01\ cm$$

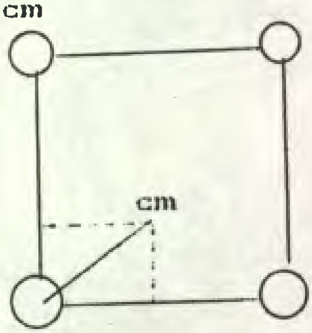


FIGURA 3.11

EJEMPLO 6

Muchos problemas en estructurasse trabajan con cargas (fuerzas) uniformemente distribuidas así: x kg/m lo que quiere decir que por cada metro se tiene una carga de x kg, por ejemplo: 8kg/m en 5m quiere decir que esta carga es de 8kg por cada metro, siendo la longitud de 5m, multiplicamos 8kg/m por 5m = 40kg que es la carga total distribuida uniformemente y cuyo CM queda exactamente a la mitad la longitud, (L/2) y se representa graficamente así:

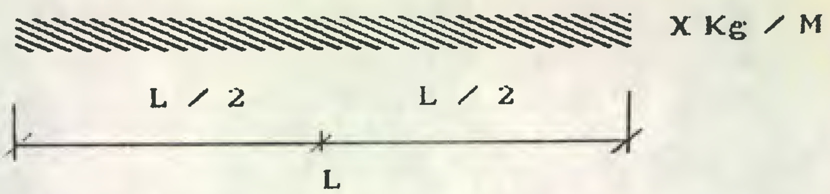


FIGURA 3.13

CARGAS UNIFORMENTE DISTRIBUIDAS

Se trabaja también con triángulos rectángulos, en donde la carga es equivalente a el área del mismo, pero el CM no coincide con la mitad de la longitud, sino que a L/3 a partir del ángulo recto.

Para los datos proporcionados en la figura 3.14 el centro de masa se localiza de la siguiente forma:

L/3, es decir carga $= \dfrac{b(h)}{2} = \dfrac{10kg/m(6m)}{2} =$ 30 kg

y el CM = 1/3(6m) = 2m

10 Kg/M

cde

6 M

FIGURA 3.14

CENTROIDE DE UN TRIANGULO RECTANGULO

CENTROIDES DE FIGURAS PLANAS REGULARES

"Y" En donde la cota en "y" es la carga /m y la cota en "x" es longitud, en "x" que está distribuida la carga.

	CUADRADO	RECTANGULO	TRIANGULO RECTANGULO
Carga	b(h)	b(h)	$\frac{b(h)}{2}$
CMx	b/2	b/2	b/3
CMy	h/2	h/2	h/3

	CIRCULO	SEMICIRCULO
Carga	(π) (Rx . Ry)	(π) (Rx . Ry)/2
CMx	R	R
CMy	R	4R/3(π) = 0.4244R

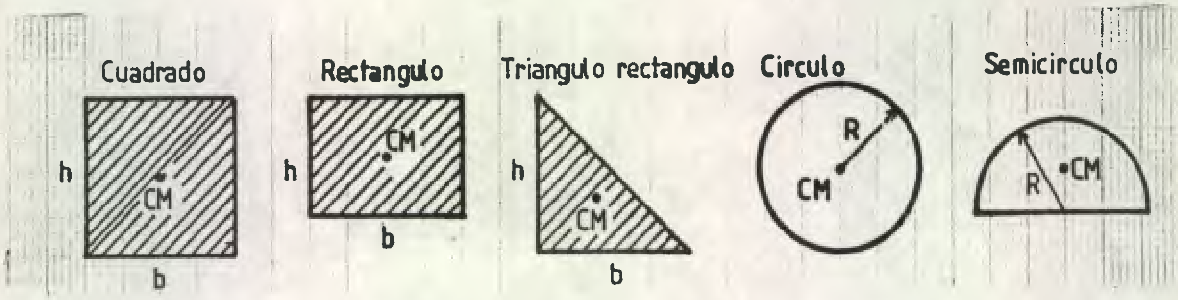


FIGURA 3.15

CENTROIDE DE FIGURAS PLANAS CON CARGA UNIFORMENTE DISTRIBUIDA

Nota: si se encuentra dentro de una placa homogenea una figura regular vaciada es decir, una figura regular que ha sido quitada de dicha placa homogenea, se procede a encontra su centro de masa pero su masa sera un número negativo.

Los centroides de las figuras planas se encuentran a travès del cálculo integral.

Un experimento sencillo:

Escoja una placa mas o menos homogenea de cualquier material compuesta por figuras regulares (triángulos rectángulos,cuadrado, rctangulos , circulos y semicirculos) y encuentre su centrode masa en forma analítica, posteriomente coloque una armella en el punto donde localizo su cm en la placa y observe si la placa no se inclina hacia ningun lado. (es posible que observe una pequeña desnivelación debido a que los materiales no son perfectamente homogeneo)

EJEMPLO 7

Encontrar el centro de gravedad de la siguiente figura:

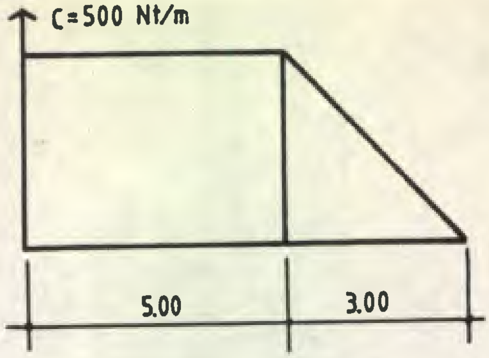


FIGURA 3.16

EJEMPLO 7

NOTA: es recomendable para la solución de este tipo de problemas hacer un cuadro como el siguiente:

	FIGURA	CARGA	DIST.EN X	CARGA DIST.
1	RECTANGULO	B.h	B / 2	2500x5/2 NT.M*
2	TRIANGULO	B.h/2	B / 3	750 x 6 NT.M
	TOTALES	3250NT		10750 NT.M

$$\text{DE DONDE: } Cg = \frac{\text{carga} \times \text{distancia}}{\text{carga}} = \frac{10750 \text{ nt m}}{3250 \text{ m}}$$

$\therefore$ Cg = 3.31 metros

* la distancia del centroide del triángulo al origen es:

(1/3) 3 + 5 = 6 m

EJECICIOS:

Las figuras siguientes encuentre su centro de gravedad:

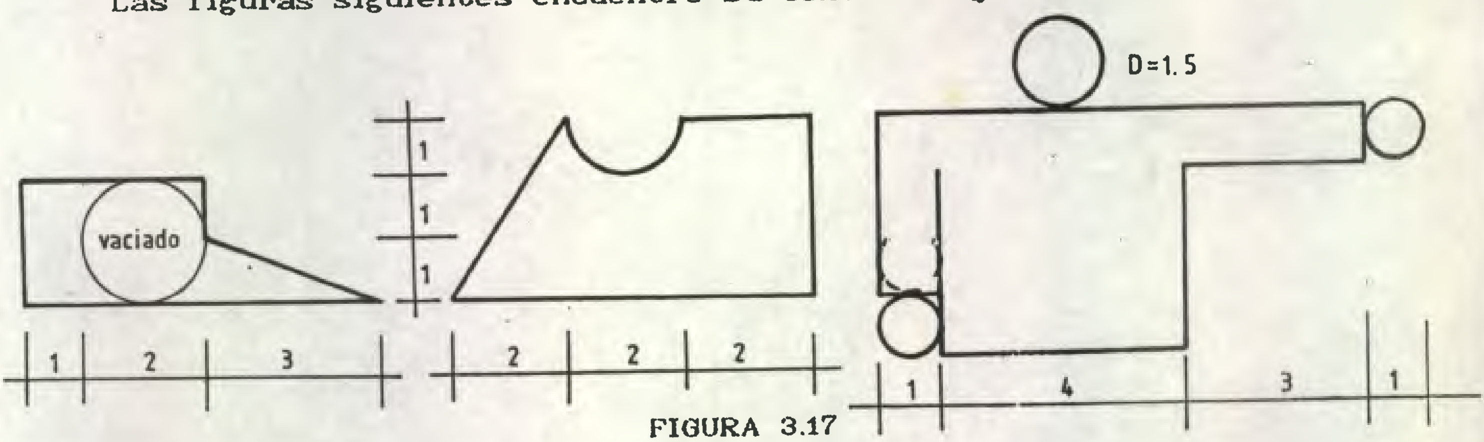


FIGURA 3.17

EJERCICIO 1

CAPITULO 4
EQUILIBRIO ESTATICO

Introducción:

Dentro de este libro introducimos el capítulo de EQUILIBRIO, por considerar la importancia del mismo dentro de la línea vertical de contenidos del área de estructuras dentro del pénsum de la Facultad de Arquitectura.

De nuestra actividad cotidiana hemos obtenido el conceptode dos términos utilizados en este capítulo: EQUILIBRIO y FUERZA.

Un partido de fútbol está equilibrado cuando ambos contendientes tienen igual número de goles. Dos partidos políticos con similar número de seguidores, estarán en equilibrio. Un individuo que camina sobre una cuerda floja sin caerse, será un equilibrista.

En igual manera utilizamos diariamente el término **fuerza**: Cuando halamos o empujamos un objeto, cuando estiramos o comprimimos alguna cosa, cuando giramos un cuerpo, etc., decimos que estamos "**haciendo**" (realizando) una fuerza.

En este capítulo, trabajaremos las fuerzas basándonos en el concepto intuitivo que se tiene de las mismas.

4.1 ALGUNOS TIPOS DE FUERZA Y SU CARACTER VECTORIAL

La definición precisa de fuerza, se dará en el capítulo 6 -DINAMICA-, pero sin embargo para la formulación y solución de problemas de equilibrio estático, nos interesa solamente establecer el carácter vectorial de las fuerzas y estudiar algunos tipos de fuerza que aparecen con frecuencia en este texto, tales como el peso, la normal, la fricción, la tensión y la compresión.

A.- Fuerzas y vectores:

Cuando se aplica una fuerza sobre cualquier objeto, el efecto que produce depende claramente del tamaño de la fuerza de la dirección, del sentido y el lugar en el que ésta se aplique; por lo tanto, las fuerzas son cantidades vectoriales y el tratamiento de las mismas se efectuarán con las operaciones vectoriales vistas en el capítulo segundo.

B.- Algunos tipos de fuerza:

Peso (w):

Cualquier objeto que este sobre la superficie terrestre es atraído hacia ésta por una fuerza llamada peso (que identificaremos como la letra W. El peso de una masa es la fuerza que la tierra ejerce sobre ella.

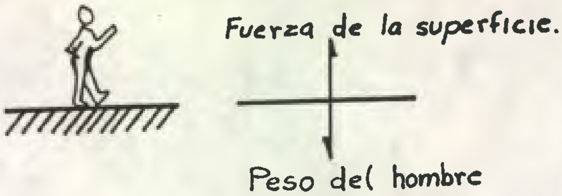


FIGURA 4.1

4.2 EL PESO DE UN CUERPO SOBRE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Normal (n) y fricción (f):

Toda superficie ejerce a fuerza sobre un objeto que descanza y/o es presionado sobre ella, esta fuerza puede descomponerse en dos componentes vectoriales: una perpendicular a la superficie, llamada fuerza normal (N), que impide que el objeto penetre en la misma y otra paralela a la superficie, llamada fuerza de fricción (f) que se opone al movimiento del objeto.

Ejemplo de un ladrillo que descansa sobre un tablón y sus fuerzas componentes f y N.

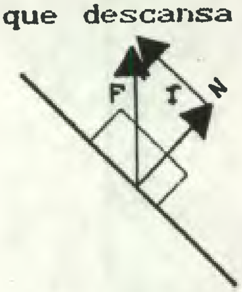


FIGURA 4.2

FUERZAS NORMAL Y DE FRICCION

Tensión y compresión:

La fuerza de tensión (T) aparece cuando un elemento es estirado o tensado -un cable, un hilo, una barra, etc.- (existiendo un incremento de su longitud inicial).

FIGURA 4.3

FUERZA DE TENSION

La fuerza de compresión (c) aparece cuando un elemento es presionado (existiendo una leve disminución de su longitud inicial una columna, secciones de una viga, algunos elementos de un joise o una tijera, etc.).

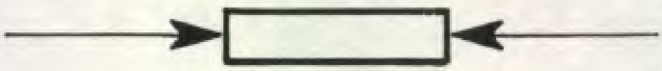


FIGURA 4.4

FUERZA DE COMPRESION

Todas estas fuerzas, y en general toda fuerza, convenientemente se miden en las siguientes unidades:

MKS(SI)----------------NEWTON----------------NT

Cgs--------------------DINA------------------DN

Ingles-----------------Libra-----------------Lb-f

Existen algunas otras unidades de medida de la fuerza, pero serán éstas las que aquí se utilizarán.

La relación de estas unidades con las unidades fundamentales en cada sistema se analizarán en el capítulo 6 y sus factores de conversión se encuentran en el capítulo 1.

¿Las fuerzas componentes (vectores), pueden considerarse como actuando individualmente sobre la partícula. Así en la solución de un problema de un plano inclinado que soporte la fuerza reacción F aplicada por el plano sobre el ladrillo es el mismo que el de las fuerzas N y f actuando conjuntamente. Si se quiere resolver una fuerza F en una suma de fuerzas componentes (vectores) en dos o tres direcciones perpendiculares, esto puede hacerse tomando las proyecciones perpendiculares de F en esas direcciones. Las magnitudes de los vectores componentes de F, a lo largo de un conjunto de direcciones perpendiculares, son exactamente los componentes ordinarios de F en esas direcciones en el sentido de cada eje.

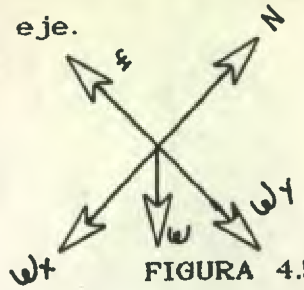


FIGURA 4.5

4.3 COMPONENTES DE LA FUERZA F

Aplicación de un conjunto de fuerzas

Si un conjunto de fuerzas $F_1, F_2, \ldots F_n$ actúa sobre una particula, la fuerza total F, resultará de la suma de los vectores de las fuerzas $F_1, F_2 \ldots F_n$:

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

Las fuerzas $F_1, F_2 \ldots F_n$ son frecuentemente referidas como fuerzas **componentes**, y F es llamada su **resultante**. El término componente es usado aquí, en un sentido más general que en la sección anterior en donde los componentes de un vector se definieron como las proyecciones de este sobre un conjunto de ejes coordinados. Ahora en este sentido un conjunto de vectores, cuya suma es F, nosotros usaremos el término (vector) **componente**. En general, a menos que se indique otra cosa, el término **componente** de un vector es F en una cierta dirección significaría la proyección perpendicular del vector F sobre la linea en esa dirección.

En este sentido, el componente de F no es un vector, pero si un número. Los componentes de F a lo largo de los ejes X_1 y Y, son los componentes en este sentido en las direcciones $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$. Si las fuerzas $F_1, F_2 \ldots F_n$, son dadas, la suma puede ser determinada gráficamente trazando un diagrama cuidadoso a escala de acuerdo a las definiciones anteriores.

La suma puede también determinarse analiticamente trazando un dibujo aproximado de la suma haciendo diagramas y usando trigonometría para calcular la magnitud y dirección del vector F.

La suma de vectores puede ser obtenida sumando separadamente los componentes de $F_1 \ldots F_n$ a lo largo de cualquier conjunto conveniente de ejes.

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny}$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{nz}$$

Cuando una suma de varios vectores desea obtenerse, esto es probablemente el método más rápido. Obviamente si un conjunto de vectores se adiciona, el cual contiene un grupo de vectores paralelos, simplifican adicionando primero los vectores paralelos (antes de intentar aplicar el método anterior).

Exactamente cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula adicionándose vectorialmente, asi la fuerza total o cualquier fuerza individual, actuando sobre una partícula puede resolverse de diferentes maneras, con la suma de vectores.

4.4 EQUILIBRIO DE FUERZAS

Muchas veces utilizamos el término **Equilibrio de fuerzas**. Para nuestro fin, el ejemplo de balanzas de platos es bastante ilustrativo: los dos objetos en ambos platillos deben quedar a igual nivel (o el indicador de la balanza debe marcar cero) para que el sistema esté en equilibrio de fuerzas, es decir, que los objetos que encuentran sobre los platos tengan igual peso.

Cuando una esfera pende de un hilo y se encuentra en reposo, desplazada de la vertical, es porque existe una fuerza que la mantiene en esa posición contrarestando la fuerza del peso así como la fuerza del hilo -tensión-

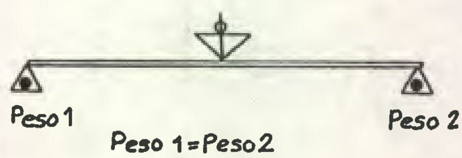


FIGURA 4.6

FUERZAS EN EQUILIBRIO ESTATICO

Generalizando, podemos decir que cuando un sistema esta en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él, se anulan entre sí.

Si un cuerpo está en equilibrio, la suma vectorial de todas las fuerzas (fuerza resultante) que actúan sobre él debe ser igual a cero.

4.5 PRIMERA CONDICION DE EQUILIBRIO

$$\Sigma F = 0 \quad ó \quad Fr = 0$$

Para que una fuerza resultante (vector) sea cero, todas sus componentes deben ser cero.

Si $F = 0$ entonces $F_x = 0$ $F_y = 0$ & $F_z = 0$

Nótese que las componentes de la fuerza resultante, son a su vez suma de fuerzas en cada eje, por lo tanto:

Si $\Sigma F = 0$ entonces $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ & $\Sigma F_z = 0$

Para los alcances del curso tomaremos sólo las fuerzas que se encuentran en el plano (coplanares) definido por los ejes "x" y "y".

EJEMPLO 1

Un sujeto de 150 lbf, se encuentra sobre una superficie. Encuentre la fuerza que la superficie ejerce sobre el individuo para que éste no se hunda, realizando un diagrama de cuerpo libre. (Diagramas de cuerpo libre no son más que la representación gráfica de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo).

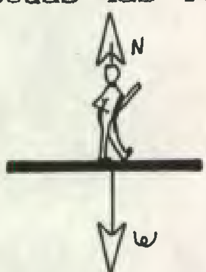


FIGURA 4.7

FUERZAS EN EQUILIBRIO

Para que el hombre no se hunda:

$$\Sigma F = 0$$

$$\Sigma F = F - P = 0$$

Entonces $F = P$ sustituyendo: $F = 150 lbf$

EJEMPLO 2

Un peso de 5000Nt se encuentra a mitad de una viga, cuyo peso es de 2000Nt, sujeta en cada extremo por un cable. Encontrar la tensión en cada cable.

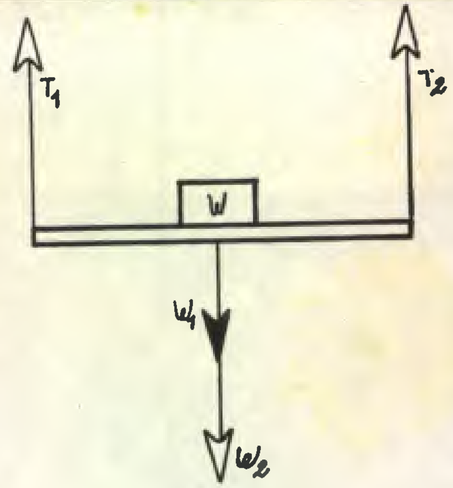


FIGURA 4.8

EJEMPLO 2

$\Sigma F = 0$ Entonces

$\Sigma F = T1 + T2 - W1 - W2 = 0$

o sea, $T1 + T2 = W1 + W2$

Como las condiciones presentadas por el sistema son de simetría, entonces:

$$T1 = T2 = T \text{ o sea}$$

$$2T = W1 + W2$$

$$2T = 5000Nt + 2000Nt \qquad \text{efectuando las operaciones:}$$

$$T = 7000Mt/2 = 3500Nt$$

$T = 3500Nt$ es la tensión soportada por cada cable

EJEMPLO 3

Encontrar la fuerza que sostiene la esfera de 25Nt (en equilibrio estático) a 30 grados de la vertical.

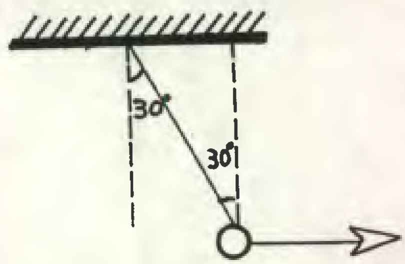
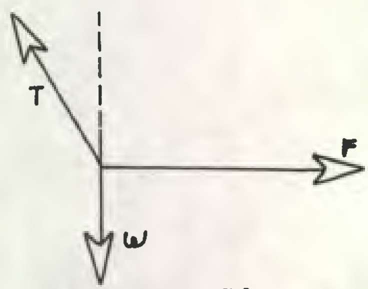


FIGURA 4.9



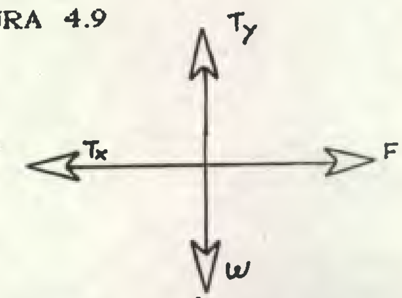


Diagrama de C.L. y componentes de la fuerzas en cada eje

En donde $T_x = T \text{ sen } 30^\circ$ y $T_y = T \cos 30^\circ$

y como $\Sigma F_y = 0$ entonces $T \cos 30 - W = 0$

$$\text{Entonces} \quad T = \frac{w}{\text{Cos } 30 \text{ grados}}$$

Y $\Sigma F_x = 0$ entonces $F - T \text{ sen } 30 = 0$ o sea $F = T \text{ sen } 30^\circ$

Substituyendo T nos queda:

$$F = \frac{w}{\text{Cos } 30 \text{ grados}} \text{ Sen } 30^\circ$$ substituyendo: $F = 14.43\text{Nt}$

EJEMPLO 4

Del siguiente sistema encuentre T1 y T2 si $W = 10^4\text{Nt}$.

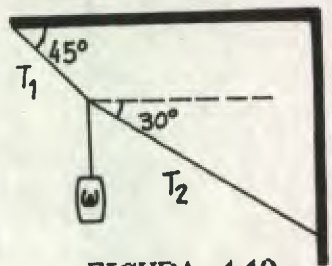


FIGURA 4.10

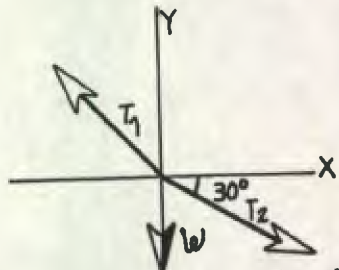


Diagrama de C.L. referido al eje de coordenadas

$\Sigma F = 0$ entonces $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ Descomponiendo:

$T1_y = T1_x = T1 \quad 0.707$ (sen o cos de 45°)

$T2_y = T2 \text{ sen } 30^\circ$ y $T2_x = T2 \cos 30^\circ$

como $\Sigma F_y = 0$ entonces $T1_y - T2_y - W = 0$

De donde $T1 \ 0.707 - T \ 0.5 - 10^4\text{Nt} = 0$ (ecuación 1).

y $\Sigma F_x = 0$

entonces $-T1_x + T2_x = 0$ de donde:

$-T1 \quad 0.707 + T2 \ 0.866 = 0$ (ecuación 2)

Sumando ecuaciones 1 y 2

$$\begin{array}{l} T1 \ 0.707 - T2 \ 0.5 - 10^4\text{Nt} = 0 \\ -T1 \ 0.707 - T2 \ 0.866 = 0 \\ \hline -T2 \ 0.366 - 10^4\text{Nt} = 0 \end{array}$$

$$\text{Entonces } T2 = \frac{10{,}000Nt}{0.366} = 27.322.40Nt$$

Y para T1 la ecuación 2 nos queda que:

$$T1 = \frac{T2 \quad 0.866}{0.707} = 33467.04\ Nt$$

No todas las veces las fuerzas que actúan están en equilibrio, aún cuando se anulen en cada eje, sino que dependerá del lugar en que se aplique la fuerza, por lo que la primera condición de equilibrio es necesaria pero no suficiente, como sucede en la ilustración:

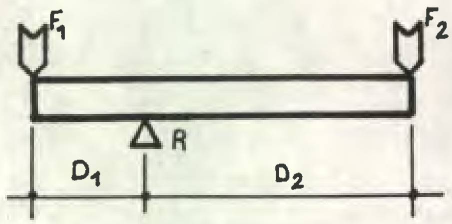


FIGURA 4.11

FUERZAS NO EQUILIBRADAS

Si suponemos que F1 = F2 y $\Sigma F = 0$ de donde

F1 + F2 - R = 0 entonces F1 + F2 = R

Aquí, aún cuando se cumple la primera condición de equilibrio, es evidente que el sistema no está en equilibrio estático, sino que tiende a girar (en el sentido de las agujas del reloj). Lo anterior no sucedería si $D_1 = D_2$ ya que también el puntoa que se aplica la fuerza es importante, para que el sistema esté en equilibrio. Para establecer tal condición, que debe cumplir un sistema como el anterior, hay que introducir un nuevo concepto en el cual se toman en cuenta dos factores: la fuerza F y el brazo (vector corrimiento del origen 0 al punto p de aplicación de la fuerza F) siendo éste el concepto de **momento** (M).

DEFINICION:

$$M = d \times F$$

Y su magnitud esta dada por

$$M = F \times d \times \text{sen ángulo}$$

Nótese que si la fuerza es perpendicular a la distancia el seno 90° = 1, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$M = F \times d$$

Y si la fuerza es paralela a la distancia el seno 0° = 0

entonces $M = F\ d\ (\text{seno } 0°) = 0$

Para que un cuerpo esté en equilibrio estático también debe cumplir con que la suma de todos los momentos debe ser cero:

SEGUNDA CONDICION DE EQUILIBRIO

$$\Sigma M = 0 \quad ó \quad MR = 0$$

Convenio:

El giro que una fuerza por la distancia le imprime a un sistema tiene únicamente dos sentidos:

FIGURA 4.13

CONVENIO PARA LA ASIGNACION DE SIGNO, SEGUN EL SENTIDO DE GIRO DEL MOMENTO RESULTANTE

EJEMPLO 5

Cuál debe ser el valor de la fuerza de reacción (R) y la distancia de ésta a la fuerza dos (F2), para que el sistema esté en equilibrio si F1 = 100Nt, F2 = 40NT y d1 = 2 mts.

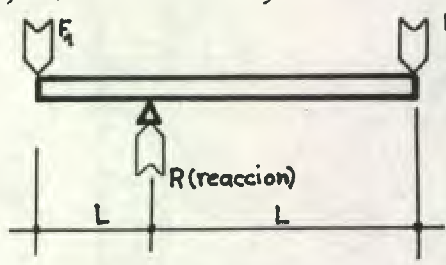


FIGURA 4.14

EJEMPLO 5

Para encontrar R utilizamos la primera condición de equilibrio:

$\Sigma F = 0$ siendo $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_x = 0$

entonces $\Sigma F_y = F1 + F2 - R = 0$ trasponiendo

$F1 + F2 = R$ substituyendo: $100N + 40Nt = R$

$$R = 140 \text{ Nt}$$

Para encontrar d2 utilizamos la segunda condición de equilibrio: $\Sigma M = 0$, para medir las distancias tomamos un punto como referencia, el cual es arbitrario y es necesario ubicarlo convenientemente.

Para el ejemplo tomaremos como punto de referencia a el punto donde se aplica la reacción R (ΣMo = Momento cero):

$\Sigma M = F1 \times d1 + Rdo + (-F2 \times d2) = 0$ como $do = 0$ entonces:

$F1d1 = F2d2 = 0$ entonces $F1d1 = F2d2$ o sea:

$$d2 = \frac{F1d1}{F2} = \frac{100\text{Nt} \times 2\text{M}}{40\text{Nt}} = 5\text{M}$$

EJEMPLO 6

Un andamio de 2500Nt de peso pende de dos cuerdas verticales separadas 3 metros con dos cargas de 3500Nt y 5000Nt colocadas en sus extremos, si el andamio mide 6m de longitud y las cuerdas están colocadas simétricamente, encuentre el valor de la tensión para cada una.

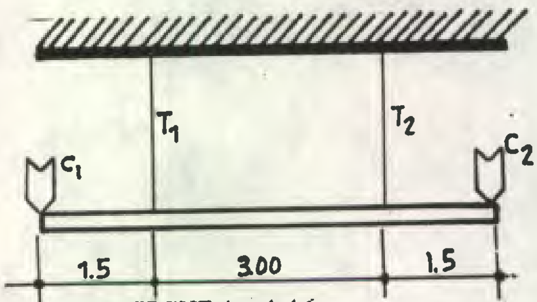


FIGURA 4.16

EJEMPLO 6

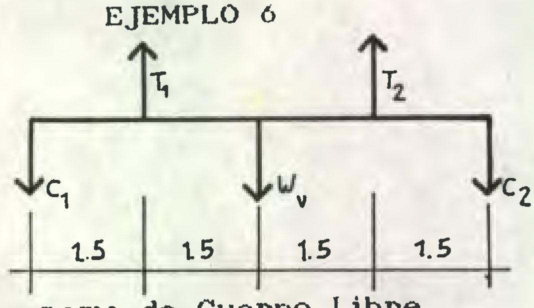


Diagrama de Cuerpo Libre

- Primera condición de equilibrio $\Sigma F = 0$

$\Sigma F_x = 0$ en este eje no existe ninguna fuerza

$\Sigma F_y = 0$

$T1 + T2 - C1 - W_x - C2 = 0$

En esta ecuación de primer grado aparecen dos incógnitas (T1 y T2), por lo que necesitamos de otra ecuación para poder encontrar los valores de dichas incógnitas.

-Segunda condición de equilibrio $\Sigma M = 0$

Tomemos la suma de Momentos en el punto donde pasa T1:

$\Sigma M_o = 0$

C_1 (1.5m) - W_v (1.5m) + T_2 (3m) - C_2 (4.5m) = 0

Trasponiendo términos:

$$T2 = \frac{W_v(1.5m) + C_2(4.5m) - C_1(1.5m)}{3m}$$

Substituyendo:

$$T2 = \frac{2500N \times 1.5m + 5000Nt \times 4.5m - 3500Nt \times 1.5m}{3m} = 7000Nt$$

Trasponiendo términos de la primera ecuación:

$T1 = C1 + W_y + C2 - T2$ sustituyendo:

T1 = 3500Nt + 2500Nt + 5000Nt - 7000Nt = 4000Nt

EJEMPLO 7

Una viga con carga uniformemente distribuida de 50Nt/m, está sujeta a una pared por un perro y suspendida por un cable con un peso de 200Nt en el extremo libre como lo indica la figura:

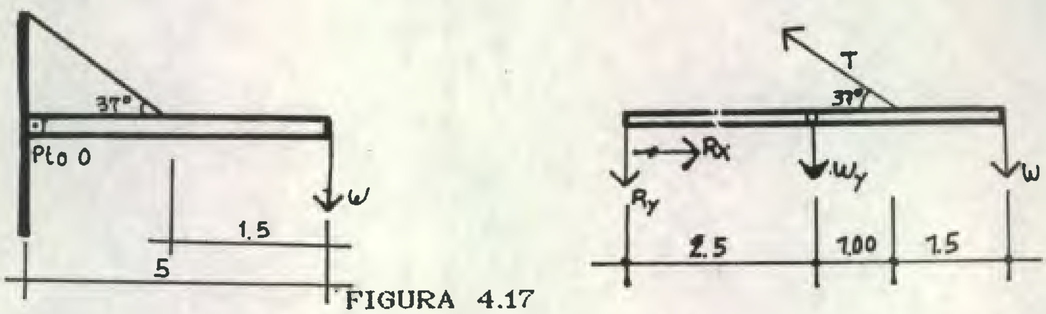


FIGURA 4.17

EJEMPLO 7

Encontrar la reacción en el punto "0" (compuesta por la reacción R_x y Ry).

NOTA: Regularmente utilizamos el punto de referencia ($\Sigma M = 0$) al punto donde se encuentran incógnitas para facilitar el resultado.

Primera condición de equilibrio: $\Sigma F = 0$

$\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$

$\Sigma F_x = R_x - T \cos 37^\circ = o$

entonces $R_x = T (0.8)$ ó $R_x = 0.8T$ (ecuación 1)

$\Sigma F_y = T \text{ sen } 37^\circ - W_y - W - R_y = 0$

entonces $T(0.6) - W_y - W = R_y$ ó

$R_y = T(0.6) - 250Nt - 200Nt$

$R_y = 0.6T - 450Nt$ (ecuación 2)

En las ecuaciones 1 y 2 tenemos tres incógnitas por lo que se hace necesaria una tercera ecuación. Utilizando la segunda condición de equilibrio tenemos:

$\Sigma M_o = 0$ como $R_y \times d_o = 0$ entonces

$-W \times 2.5m + T \text{ sen } 37^\circ \times 3.5m - W \times 5m = 0$

Trasponiendo:

$$T = \frac{W_v \times 2.5m + W \times 5m}{\text{Sen } 37^\circ \times 3.5}$$ substituyendo:

$$T = \frac{250Nt \times 2.5m + 200Nt \times 5m}{0.6 \times 3.5} = 773.80Nt$$

Substituyendo el valor de T en las ecuaciones 1 y 2, obtenemos los valores de R_x y R_y

$R_x = 0.8 \times 773.80Nt$

entonces $R_x = 619.04Nt$

$R_y = 0.6 \times 773.80Nt - 450Nt$

entonces $R_y = 14.28Nt$

EJEMPLO 8

Analizar la siguiente estructura para determinar el valor de las reacciones en cada uno de los apoyos utilizando las siguientes ecuaciones:

Sumatoria de $F_x = 0$

Sumatoria de $F_y = 0$

Sumatoria de $M = 0$

Esto determina si el lugar del apoyo soportará las cargas (fuerzas) a que estará sometida.

Ver FIGURA 4.18:

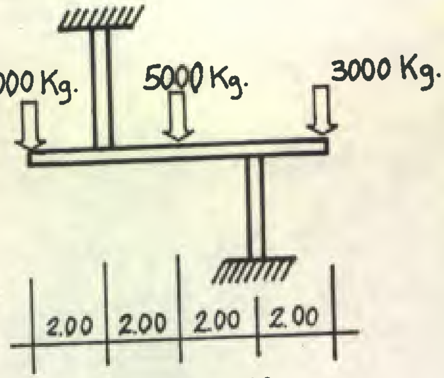


FIGURA 4.18

EJEMPLO 8

Todas las distancias están dadas en metros.

En la figura se muestra que la estructura está apoyada en un techo por un cable sometido a tensión en el punto "A" y en el suelo en el punto "D" por una columna, sometida a compresión, siendo así las reacciones:

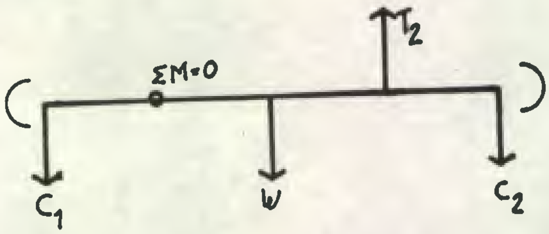


Diagrama de cuerpo libre (problema 8)

-Tensión: Las fuerzas se alejan del nudo afectado.

-Compresión: Las fuerzas llegan al nudo afectado.

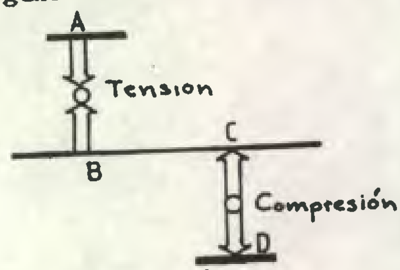


FIGURA 4.19

DIAGRAMAS DE TENSION Y COMPRESION

Por lo tanto:

En el cable: El techo deberá soportar una fuerza de igual magnitud, pero de sentido contrario, así:

FIGURA 4.20

TENSION EN EL TECHO

Y para la columna la reacción será:

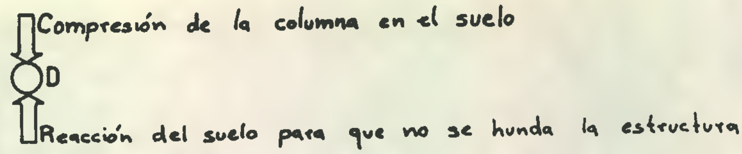


FIGURA 4.21

REACCION EN LA COLUMNA

Reacción del suelo para que no se hunda la estructura en el suelo.

Sabiendo esto procedemos al cálculo.

NOTA: Si asumida esta forma de distribución de cargas, sale uno o más valores negativos, significará que asumimos mal el tipo de fuerza debiendo cambiarlo.

Entonces:

Sumatoria de Fx = 0

Para este caso ninguna fuerza va en el sentido horizontal ni existe fuerza alguna que tenga componentes en dicha dirección.

Sumatoria de Fy = 0

De donde se conocen los valores de las cargas, pero no cuál es el valor en el cable y cuánto en la columna lo que significa que los valores de tensión y compresión deberán ser sumados, siendo el resultado igual al de la suma de cargas, así:

$T + C = 3000kgf + 5000kgf + 1000kgf$

$T + C = 9000kgf$

Para determinar cuál será el valor de "T" y "C" con exactitud se acude a la sumatoria de momentos en cualquiera de los nudos, estudiados así:

Sumatoria de momentos en "B":

$MB = 0$

$-3000kgf\ (2m) + 5000(2m) - comp.\ (4m) + 1000\ (6m)$

De donde:

$$comp. = \frac{-3000kgf(2m) + 5000kgf(2m) + 1000kgf(6m)}{4m} =$$

$$comp = \frac{10000kgf(m)}{4m} = 2500kgf$$

De donde resulta que, si utilizamos la sumatoria de fuerzas en "y" obtenemos el valor de la tensión "T"

T + C = 3000kgf + 5000kgf + 1000kgf

De donde:

T = 9000 - C

T = 9000 - 2500 = 6500kgf

EJEMPLO 9

Metodo de nudos

Determinar los tipos (tensión y/o compresión) y la magnitud de los miembros de la siguiente estructura (Joist):

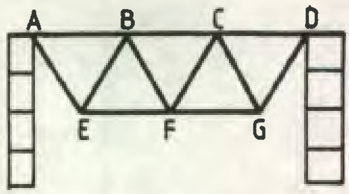


FIGURA 4.22

EJEMPLO 9

El ángulo interno entre miembros es de 60°, las cargas son de 5000Nt y se hallan en los nudos "B" y "C".

Para determinar en forma preliminar el tipo de carga a que está sometido un miembro de la estructura, se procede a imaginar qué ocurriría si éste faltara:

- Si la estructura se separa será tensión "T".
- Si se junta el esfuerzo será de compresión "C". FIGURA 4.23

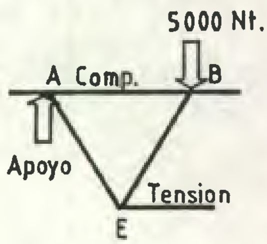


FIGURA 4.23

TENSIONES Y COMPRESIONES DE UN MIEMBRO DE LA ESTRUCTURA

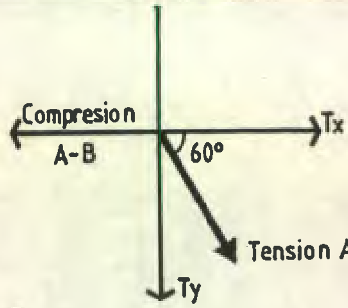


FIGURA 4.24

FUERZA SOBRE EL PLANO CARTESIANO

- Si se elimina A-Σ la estructura tiende a separarse, o sea, que el miembro A-Σ está a tensión.
- Si se elimina A-8 la estructura tiende a ocupar el lugar de A-B. $\Sigma F_y = 0$ de donde $+a - T_y = 0$

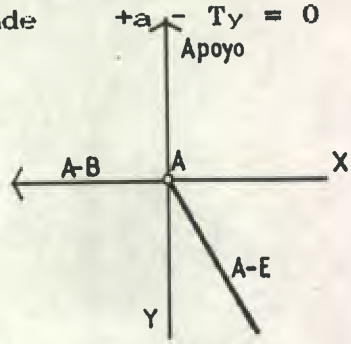


FIGURA 4.25

EL NUDO SOBRE EL PLANO CARTESIANO

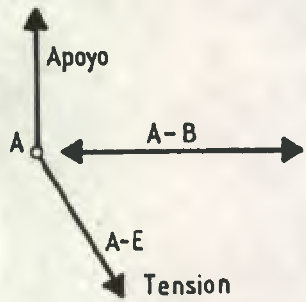


FIGURA 4.26

FUERZA RESULTANTE EN EL MIEMBRO A-B

Ya que la resultante tenderá a estar hacia donde se halla el miembro AB

Calculando la estructura

Se parte del principio que la estructura mostrada es simétrica, por lo que el valor de la fuerza en los apoyos, (nudos "A" y "D"), son la mitad de la carga total, o sean 10000Nt.

De donde:

Apoyo A = 5000Nt

Apoyo D = 5000Nt

Por el método de nudos, de donde:

$a = T_y$

$5000Nt = T_y$

Así el valor de la tensión "T" será:

$T_y = T$ (seno 60°)

Así obtenemos T:

$T = T_y/\text{sen } 60^\circ$

$T = 5000Nt\ (0.87) = 4330.13Nt$

Valor por el cual conocemos T_x, que será la fuerza inversa y de la compresión del miembro A-B, así:

$F_y = 0$

T_x = Comp A-B

De donde:

$T_x = T$ (cos 60°)

Así $T_x = 4330.13Nt\ (0.50) = 2165.07Nt$

o sea:

Comp. A-B = 2165.07Nt

Al conocer el valor de la magnitud, la dirección y sentido de A-Σ y A-B, podemos pasar al nudo "Σ".

Ya que aquí existen dos miembros desconocidos, pudiendo hallarse su magnitud a través de las ecuaciones de estática.

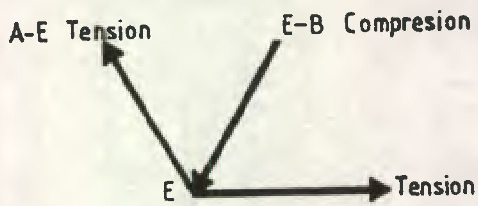


FIGURA 4.27

SUPOSICION DEL TIPO DE FUERZAS

En el plano Cartesiano quedará así:

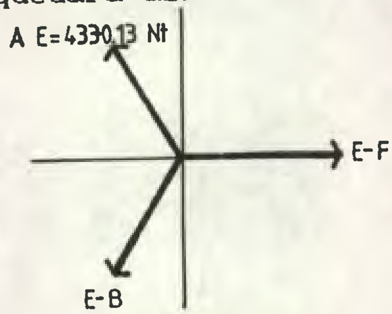


FIGURA 4.28

FUERZAS SOBRE PLANO CARTESIANO

Si se conoce el valor de la tensión $A-\Sigma = 4330.07Nt$

y de $A\Sigma y = 5000Nt$

Entonces: $F_x = 0$

$-A\Sigma_x - \Sigma B_x + \Sigma F = 0$

Si $A\Sigma_x$ según cálculo anterior: $A\Sigma_x = 2165.07Nt$

Por simetría: ΣB_x también será $= 2165.07Nt$

o sea:

$$F_x = 0$$

$$-A\Sigma_x - \Sigma B_x + \Sigma F = 0$$

de donde: $EF = 21.6507 + 2165.07 = 4334.13Nt$

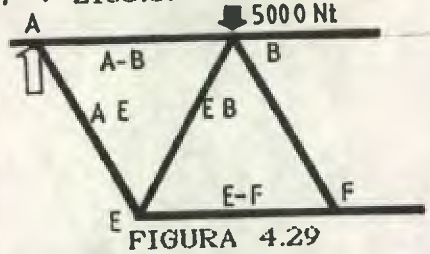


FIGURA 4.29

ANALISIS DE PARTE DEL JOIST

Quedando así hasta el nudo analizado:

AB ----- compresión = 2165.07Nt

$A\Sigma$ ----- tensión = 4330.13Nt

ΣB ----- compresión = 4330.13Nt

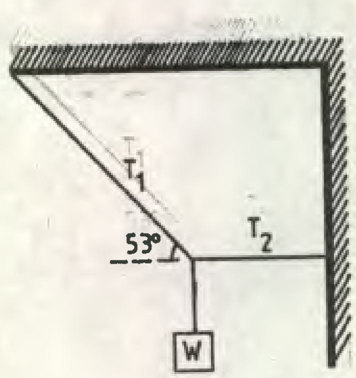
ΣF ----- tensión = 4330.13NT

Conocidos los valores anteriores, a través de los nudos "A" y "Σ", como ejercicios, realice el cálculo de los demás miembros de la estructura con los nudos "B" y "F", ya que el otro lado deberá ser igual por la simetría que existe.

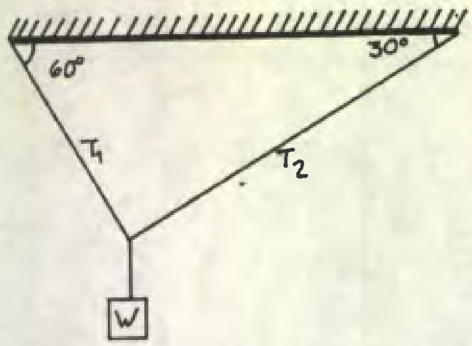
EJERCICIOS

De las siguientes figuras encuentre los datos que se solicitan:

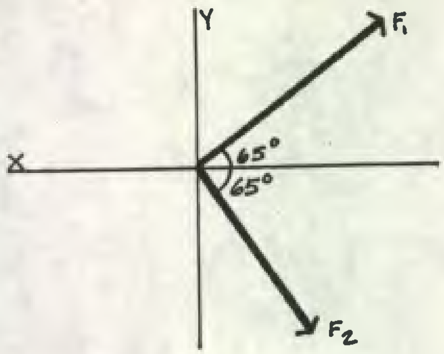
1) Determine T1 y T2, si W = 7300Nt



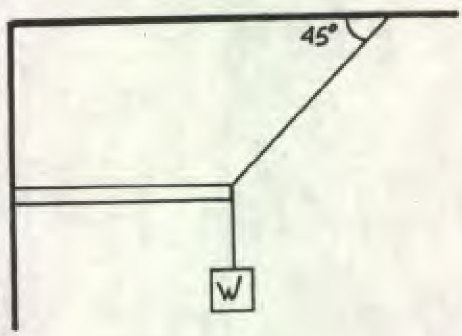
2) Determine T1 y T2, si W = 325Nt



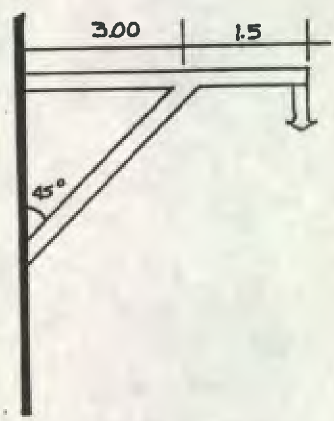
3) Si F1 = F2 = 100Nt, determine F3, para que ΣF = 0



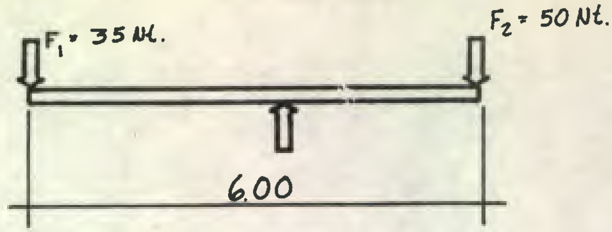
4) Determine la fuerza resultante en el perno de la viga, si ésta pesa 1525Nt, su longitud es de 2m y el peso en su extremo es de 2500Nt.



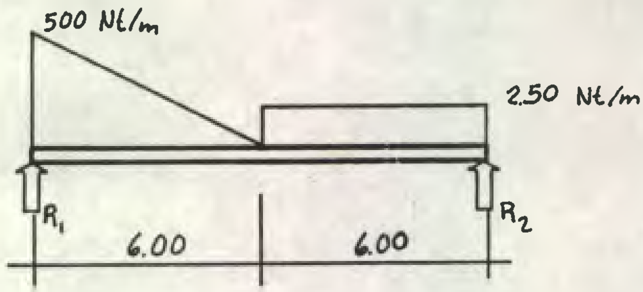
5) Determine las componentes (en "x" y "y") de la fuerza en el empotramiento de la viga horizontal y la carga soportada por la viga inclinada a 45 grados.



6) Para el siguiente sistema determine el valor de la longitud "X".



7) Encuentre el valor de las reacciones R1 y R2 de las cargas uniformemente distribuidas, mostradas en la siguiente figura:



CAPITULO 5

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (MU)
Y MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO (MUV)

Introducción

El movimiento de los cuerpos:

Desde los albores de la humanidad, el hombre ha estudiado el movimiento propio y el de los objetos que le rodean: **cosas y animales**. Desde su particular modo de concebir el mundo circundante, el hombre primitivo, lo trata de plasmar en pinturas realizadas sobre las paredes de cuevas que utiliza como habitáculo, o como lugar de ceremonias de carácter religioso, en vasijas de diferente uso, en altos y bajos relieves, o en figurillas de diferentes materiales: vividas: escenas de caza, movimientos migratorios de animales que utiliza para su sustento o que le son hostiles, sus propios movimientos nómadas, así como el "ir y venir" de cuerpos luminosos en la bóveda celeste le sirven de motivos.

Este último le sirve de base para relacionarlo con los cambios de las estaciones, dando origen a una de las ciencias más antiguas: la Astronomía.

Los antiguos griegos no dejaron, como profundos pensadores que fueron, de filosofar al respecto del **movimiento**. Sin embargo, muchos de sus razonamientos son ingenuos o simplemente erróneos, ya que pocas veces confrontaron a la práctica sus conclusiones y la experimentación se realizó pocas veces (creían que la misma era tarea inferior, por lo que era bueno sólo para los esclavos, quienes hacían las tareas manuales). El célebre Aristóteles de Estagira, especulaba que el reposo (movimiento cero) era el estado perfecto de los cuerpos, por lo que cuando se dotaba de movimiento a un objeto, éste invariablemente volvía a su estado natural de reposo. De este tipo de especulaciones se concluye que la tierra es el centro inmóvil del universo -teoría geocéntrica- teoría que domina durante dos milenios esta parte de la física sin avances significativos.

Son escasos los sabios del antiguo mundo Helénico, que realizan algún tipo de experimentación, de aplicación de sus principios. Tales de Mileto, Anaxágoras de Clazomene, Arquimides de Siracusa (aplicación práctica de principios geométricos, bases de la teoría del origen de las especies, más de 2.000 años antes de Charles Darwin, uso de principios hidrostáticos, respectivamente) comprobaron la validez de sus razonamientos a través de la experimentación, de la unidad de la teoría con la práctica.

Pero es el hombre prehistórico, quien comienza a relacionar distancias recorridas con tiempos utilizados, ocurrencia de fenómenos en tiempos transcurridos "lunas o soles" de distancia, inviernos vividos.

Es la velocidad, entonces, una de las primeras abstracciones de la mente humana: la RELACION de desplazamientos con tiempos.

El movimiento en este capítulo se circunscribe al movimiento de una partícula sobre una línea recta.

5.1- POSICION:

Cotidianamente ubicamos un objeto por su posición, señalando el lugar donde se encuentra: en el segundo nivel del edificio TI, en el sótano de la rectoría, dentro de "iglú", etc., pero esta es una forma inadecuada para los fines que persigue este capítulo;al estudiar el deplazamiento de una partícula de un punto a otro, se tendría que dar un nombre a cada punto, por lo que es más fácil poner sobre un eje graduado (línea recta) el desplazamiento de la partícula (automóvil, pelota, un objeto, etc.). Tomando el ejede las abscisas (eje X), entonces, dicha posición se da como un número -real- sobre dicha recta. Tomando como referencia el número cero, los números a la derecha del número cero nos señala la posición x, con un número positivo y los números a la izquierda del número cero nos señala la posición x con un número negativo.

EJEMPLO 1

Sea la recta x, un eje graduado y a y b dos posiciones de una partícula. tal como lo indica la figura 5.1

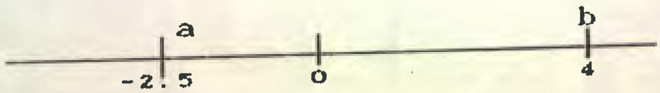


FIGURA 5.1

EJE X (RECTA DE LOS NUMEROS REALES)

Entonces la posición de la partícula en el punto a = -2.5 y la posición de la partícula en el punto b = 4, --la recta puede estar dada en centímetros, metros, kilómetros, pies, etc.-- por los que con un número, entoces, podemos ubicar la particula en la recta dada por el eje X

5.2- DESPLAZAMIENTO:

El desplazamiento es un cambio de posición. Así, refiriendonos a la figura 5.1, si una partícula se desplaza de a a b (hacia la derecha) obtendremos: un desplazamiento **positivo**: 6.5cm y si se desplaza de B a A (hacia la izquierda) entonces obtendremos un desplazamiento negativo; en ambos casos la distancia recorrida es la misma, por lo que debemos tener presente la diferencia entre desplazamiento (del punto A, al punto B positivo, del punto B al punto A negativo) y la distancia (simplementeuna longitud).

Por lo que se define el desplazamiento así:

Desplazamiento = $\Delta S = S_f - S_o$ en donde Δ (delta s) significa el cambio de posición; es decir que S_f y S_o localiza las posiciones final e inicial. También se puede utilizar como subíndice numerales quedando entonces, $\Delta S = S_2 - S_1$ ó $S_5 - S_4$, $S_8 - S_7$, etc., cuidando siempre de restarle a la posición final la posición inicial.

EJEMPLO 2

Un objeto se encuentra en la posición $s_o = 2$ m y se mueve hasta la posición $s_f = 8$ m. Determine el desplazamiento resultante de dicho moviento.

FIGURA 5.2

EJEMPLO 2

En donde el desplazamiento = $\Delta S = S_f - S_o$

$\Delta S = 8m - 2m = 6m$ (desplazamiento positivo)

EJEMPLO 3

FIGURA 5.3

EJEMPLO 3

En donde el desplazamiento $= \Delta S = S_f - S_o = 4m - (-3m) = 7m$ (desplazamiento positivo)

EJEMPLO 4

Si una partícula cambia de la posición $s_o = 5m$ a la posición $s_f = 3m$. Encontrar el desplazamiento resultante.

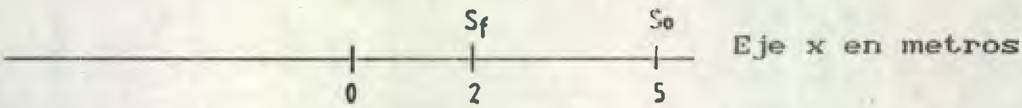


FIGURA 5.4

EJEMPLO 4

En donde el desplazamiento $\Delta S = S_1 - S_o = 3m - 5m = -2m$ (desplazamiento negativo)

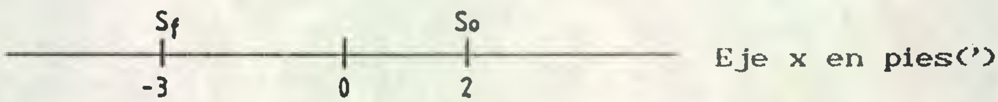


FIGURA 5.5

EJEMPLO 5

En donde el desplazamiento $= \Delta S = S_f - S_o = -3' - (+2') = -5'$ (desplazamiento negativo)

EJEMPLO 6

Una partícula se mueve en dos desplazamientos sucesivos de la siguiente forma: $\Delta S = s_2 - s_1 = 3 - (-2) = 5$ y $\Delta S'' = s_3 - s_2 = 1 - 3 = -2$. Encontrar el desplazamiento resultante.

FIGURA 5.6

EJEMPLO 6

En donde tenemos dos desplazamientos consecutivos

$\Delta S = S_2 - S_1 = 3 - (-2) = 5$ y $\Delta S' = S_3 - S_2 = 1 - 3 = -2$

El desplazamiento resultante (desplazamiento neto) de estos dos desplazamientos parciales es la suma algebraica de dichos desplazamientos por lo tanto $\Delta S + \Delta S' = 5-2 = 3m$; 3m es el cambio de posición desde S_1 (-2) a S_3(1) (desplazamiento positivo).

5.3 VELOCIDAD PROMEDIO

Llamaremos velocidad promedio ($\bar{v}$) al cociente de dividir el desplazamiento ΔS entre el tiempo que se tarda en efectuarlo: ΔT

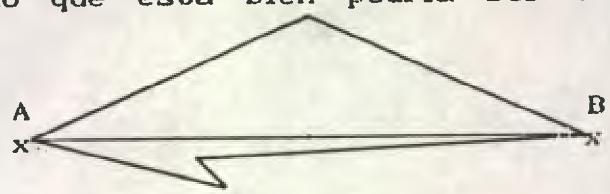
$$\text{Es decir } \bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta T} \quad \text{o} \quad \frac{S_f - S_o}{T_f - T_o} \qquad (5 - 1)$$

La velocidad es un nuevo vector que resulta de dividir el vector desplazamiento "s" dentro del escalar tiempo "t".

FIGURA 5.7

DESPLAZAMIENTO EN UN TIEMPO DADO

Nótese que el desplazamiento (o cambio de posición de A a B) no nos dice nada sobre la trayectoria recorrida entre los puntos A y B, por lo que ésta bien podría ser cualquiera de las que sigue.



S en metros

T en segundos

FIGURA 5.8

5.4 VELOCIDAD CONSTANTE

Movimiento rectilíneo uniforme

Si una partícula se desplaza en una dimensión -en una línea recta- y su cociente ΔS / ΔT es constante en todos los tramos de su trayectoria entonces tendremos un cuerpo cuyo movimiento es rectilíneo uniforme y diremos que su velocidad es constante, ya que no variará ni en dirección ni en magnitud por lo que podemos escribirla: $v = \Delta S / \Delta T$ en donde ΔS es el desplazamiento total dividido entre el tiempo total ΔT utilizado en el desplazamiento.

EJEMPLO 7

La figura muestra la posición S de un cuerpo que se mueve con velocidad constante, y el tiempo en el que el cuerpo pasa por dicha posición:

FIGURA 5.9

EJEMPLO 7

Si calculamos la velocidad promedio para cualquier intervalo de tiempo obtenemos siempre el valor constante $\bar{v}$= 2 m/s. Esto significa que la velocidad v del cuerpo es constante en la trayectoria.

Si un cuerpo se mueve con movimiento rectilineo uniforme, su velocidad v es constante e igual a Δs/Δt: v = ΔS / ΔT

Es claro entonces que elgráfico S vrs T (desplazamientovrs tiempo) es recto:

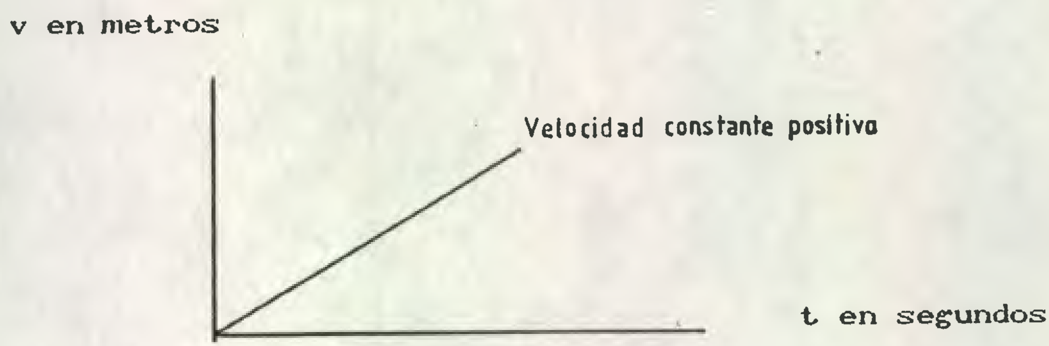


FIGURA 5.10

GRAFICA VELOCIDAD VRS. TIEMPO

Y que la pendiente del gráfico (ΔS/ΔT) da la velocidad del cuerpo en dado tiempo.

5.5 VELOCIDAD INSTANTANEA

La velocidad puede variar entre los tramos de una trayectoria (y de hecho así sucede a menudo) por lo que se hace necesario encontrar la velocidad en un -un instante-. Si nos desplazamos de la ciudad capital hacia Escuintla, (55km aproximadamente en dirección sur), y empleamos en el recorrido una hora, diremos que nuestra "velocidad" fue de 55 km/h hacia el sur: estamos tomando el desplazamiento resultante y lo dividimos entre el tiempo transcurrido.Pero esto obviamente no es cierto, para todos los puntos del trayecto: pueden existir dentro del mismo cambios de magnitud, movernos a velocidades mayores o menores o incluso deternos por cualquier motivo, etc. Por lo que la velocidad de 55 km/h hacia el sur no es constante.

Por lo que para encontrar la velocidad en un trayecto debemos tomar un tramo corto, lo que se hace en un tiempo relativamente corto: un minuto, un segundo, una décima de segundo o una fracción de tiempo más pequeña aún -un instante-. Así, definimos la velocidad instantánea como:

$$\bar{v}_i = \bar{v} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta T}$$

La velocidad instantánea $\bar{v}_i$, es el valor límite (lim) del desplazamiento (Delta S) dividido entre el tiempo transcurrido (Delta T) cuando este tiende a cero (T → 0) ó

$$\bar{\bar{v}}_i = \frac{dS}{dT}$$

En donde dS es un desplazamiento muy pequeño (diferencial de posición)y dT es un tiempo muy pequeño (diferencial de tiempo). La velocidad instantánea es la primera derivada de la posición respecto al tiempo.

Para los alcances del presente texto realizaremos el cálculo de los problemas algebraicamente, sin incluir el cálculo diferencial e integral.

Dimensional de la velocidad:

Ecuación 5.1:

$$[v] = \frac{S_f - S_o}{T_f - T_o} = \frac{S}{T} = \frac{\text{Unidad de Long}}{\text{Unidad de tiempo}}$$

O sea que podemos utilizar cualquier unidad de media de longitud: kilómetros, millas, pies, metros, etc., y cualquier unidad de medida de tiempo: años luz, años, días, horas, minutos, segundos, etc. Sin embargo, regularmente utilizaremos el sistema M.K.S. (ver capítulo 1), por lo que la velocidad regularmente se expresará en: m/s ó cm/s.

5.6 MOVIMIENTO UNIFORMENTE VARIADO O ACELERADO EN UNA DIMENSION

El movimiento uniformemente variado es aquel que experimenta un cambio de velocidad de una partícula en un determinado tiempo. En una dimensión, dicho lcambio de velocidad se da en la magnitud del vector velocidad, y en su sentido, no así en la dirección, lo que hace más sencillo el tratamiento. El cambio de velocidad dividido entre el cambio del tiempo en el que ocurre dicho cambio recibe el nombre de aceleración promedio (ver nota sobre velocidad promedio).

Ecuación 5.2:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ó \quad a = \frac{V_f - V_o}{T_f - T_o}$$

Si el cambio de velocidad dividido entre el cambio de tiempo, es constante en todos los tramos de una trayectoria entonces tendremos un movimiento uniformemente variado, o sea, con aceleración constante.

Y si iniciamos el conteo del tiempo en la velocidad inicial ($T_o = o$) (o tiempo empleado en el cambio de **velocidad**).

Ecuación 5.3:

$$a = \frac{V_f - V_o}{T}$$

Si la velocidad varía entre dos puntos y la aceleración es constante, podemos encontrar la velocidad media así:

$$v = \frac{V_f + V_o}{2} \quad \text{(semisuma de las velocidades)}$$

Y el desplazamiento así:

Ecuación 5.4:

$$\Delta S = \frac{V_f + V_o}{2} \; t$$

5.7 ACELERACION INSTANTANEA

En una trayectoria dada la aceleración puede variar y con un argumento análogo al de la velocidad instantánea podemos concluir que:

Ecuación 5.5:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Dimensional:

La dimensional de la aceleración, es la dimensional de la velocidad dividida entre la dimensional del tiempo.

$$[\,a\,] = \frac{[\,V\,]}{[\,T\,]} = \frac{[\text{ Unid. Long. / Unid. T }]}{[\text{ Unidad de tiempo }]} = \frac{\text{U. long}}{(\text{U.T.})^2}$$

Para el sistema MKS, la dimensional de a $= [\,a\,] = \frac{m}{s^2}$

y para el sistema CGS la dimensional de a $= [\,a\,] = \frac{cm}{s^2}$ y para

el sistema INGLES la dimensional de $[\,a\,] = \frac{pie}{s^2}$

Para encontrar otras ecuaciones que nos relacionen las variables de velocidad inicial (v_o), velocidad final (v_f), desplazamiento (ΔS) o simplemente S, tiempo (t) y aceleración (a) trabajaremos las ecuaciones 5.3 y 5.4.

De la ecuación 5.3 $a = \frac{V_f - V_o}{T}$ de donde: $V_f - V_o = aT$

Trasladando V_o, resulta de dicha ecuación:

Ecuación 5.5:

$$V_f = V_o + at$$

De la ecuación 5.4:

$$S = \frac{V_f + V_o}{2}\, T \qquad \text{Resulta} \qquad T = \frac{2S}{V_f + V_o}$$

Substituyéndola en la ecuación 5.5:

$$V_f = V_o + a \frac{2S}{V_f+V_o(V_f+V_o)} \quad \therefore \quad V_f - V_o = \frac{a2S}{}$$

$= (V_f - V_o)(V_f + V_o) = 2aS$ $[(n + m)(n - m)]$ dif de cuadrados

$= V_f^2 - V_o^2 = 2aS$ Dejando la V_f de un lado de la igualdad, la ecuación, queda:

Ecuación 5.6:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2aS$$

Ahora substituyendo la ecuación 5.5 en la ecuación 5.4:

$$S = \frac{[(V_o+aT) + V_o]T}{2} = S = \frac{(2V_o+aT)\ T}{2}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$S = \frac{2V_oT}{2} + \frac{aTT}{2} \quad \text{entonces}$$

Ecuación 5.7:

$$S = V_oT + 1/2\ aT^2$$

Resumiendo:

Para un movimiento uniformemente variado las ecuaciones a utilizar son:

Tabla 5.1

Ecuaciones de movimiento con aceleración constante

5.4 $\Delta S = \dfrac{V_f + V_o}{2}\ T$

5.5 $V_F = V_o + at$

5.6 $V_f^2 = V_o^2 + 2aS$

5.7 $S = V_ot + 1/2\ at^2$

Estas cuatro ecuaciones contienen los cinco elementos que varian en el movimiento uniformemente variado. Si las analizamos, veremos de la anterior tabla (5.1) que en la ecuación 5.4 no aparece la aceleración a, en la ecuación 5.5 no aparece el desplazamiento ΔS, en la ecuación 5.6 no aparece el tiempo T y en la ecuación 5.7 no aparece la velocidad final V_f (aceleración, desplazamiento, tiempo y velocidad final).

Por lo que todas incluyen la velocidad inicial y la misma se puede anular si el movimiento se inicia del reposo ($V_o = 0$).
Así mismo se puede anular V_f si el movimiento cesa ($V_f = 0$).

En varios problemas de cinemática se hace necesario desarrollar una fórmula para encontrar nuevos datos que incluídos en la ecuación correspondiente, nos proporcione la incógnita buscada.

En la siguiente gráfica tomamos como premisas de que el móvil parte del origen ($S_o = 0$), que el tiempo en S_o es $T_o = 0$ y que $T_f = T$.

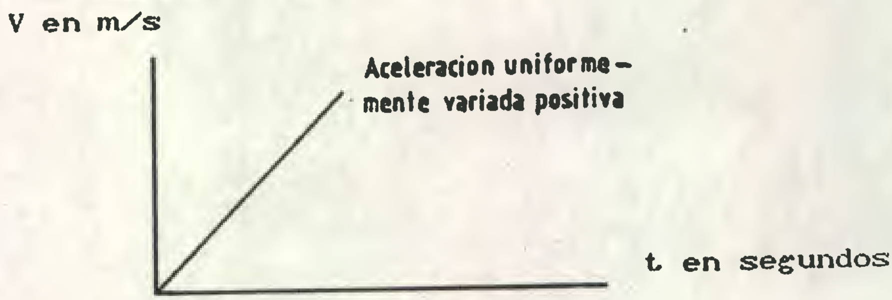


FIGURA 5.11

$$a = \frac{V_f}{t}$$ En donde la velocidad inicial $V_o = 0$ y el tiempo inicial $T_o = 0$

EJEMPLO 8

Un automóvil pasa, por un punto A a una velocidad de 10km/s y 12s más tarde, por un punto B a 70km/s. Encontrar la aceleración constante del automóvil, así como la distancia que recorre desde que partió del reposo hasta el punto A.

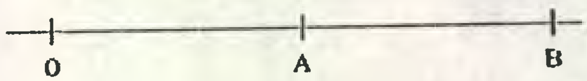


FIGURA 5.12

EJEMPLO 8

Analizamos las ecuaciones de la tabla 5.1 para determinar en cuál aparece la incógnita (a) y los datos del problema (V_f, V_o y T) siendo la ecuación 5.5 la que nos presenta los datos con los que contamos y la incógnita que buscamos:

$V_f = V_o + at$ $\qquad$ $V_f - V_o = at$ $\qquad$ transponiendo términos:

$$\frac{V_f - V_o}{T} = a = \frac{70km/s - 10m/s}{12\ s} = 5\ m/s^2$$

Para la segunda parte del problema contamos con los siguientes datos: V_o, V_f y Aceleración constante. Se necesita encontrar la incógnita S_o cuando pasa por el punto A.

Analizando la tabla 5.1 se ve que la única ecuación a utilizar es la 5.6 por lo que:

$V_f^2 = V_o^2 + 2aS =$ donde la $V_o = 0$

Entonces:

$$\frac{V_f^2}{2a} = S = \frac{(10m/s)^2}{2(5m/s^2)} = 10 \text{ metros}$$

El desplazamiento S al llegar al punto A y después de partir del reposo es de 10 metros.

EJEMPLO 9

Un móvil que lleva una velocidad de 15m/s recorre 30m antes de detenerse. Encontrar la aceleración que detuvo el movimiento. Utilizamos la ecuación 5.6:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2aS = \frac{V_f^2 - V_o^2}{2S} = a = \frac{0 - (15m/s)^2}{2(30m)} = \frac{-225(m/s)^2}{60m}$$

$a = -3.75\ m/s^2$ El signo negativo del valordelaaceleración nos indica que dicha aceleración va en sentido contrario a la velocidad inicial (desaceleración).

EJEMPLO 10

Un ciclista a velocidad constante de 5m/s pasa por un automóvil que esto en reposo, en ese instante el autor arranca con aceleración constante de $2m/s^2$. Encontrar la distancia y el tiempo en que el autor -llevando la misma dirección rectilínea del ciclista- lo rebasa.

NOTA: La distancia recorrida por ambos es la misma y el tiempo empleado es, así mismo, igual.

De donde S ciclista = S auto y T ciclista = T auto

Para el ciclista se tiene un movimiento rectilíneo uniforme por lo que la ecuación es v = s/t ó s = vt y para el autor el movimiento es rectilíneo uniformemente variado. La ecuación es $S = V_oT + 1/2aT^2$(se escoge la ecuación 5.7, porque relaciona los datos de desplazamiento y tiempo, con la ecuación anterior).

Como el desplazamiento del ciclista es igual al desplazamiento del auto, entonces:

$Sc = V.T$ y el S del auto $= Sau = 1/2\ a\ T^2$ eb donde $V_o = 0$

Igualando las dos ecuaciones:

$V_c(T_c) = 1/2(a)T^2$ y donde: $Tc = Tauto$ entonces:

$2\ (V_c)/a = T = 2(5m/s)/2m/s^2 = S$ segundos

Encontrando los desplazamiento:

$Sc = V_c\ (T) = Sm/s\ (Ss) = 25m$

De donde se observa que $Sc = Sauto$

EJERCICIOS:

Resuelva el problema anterior si el auto arranca 2 segundos después que el ciclista pasa a su lado. También resuélvalo si el auto arranca cuando el ciclista le lleva 10 metros de ventaja.

Sugerencia:

Haga diagramas de posición entre el auto y el ciclista para visualizar la relación de recorrido.

De la siguiente gráfica:

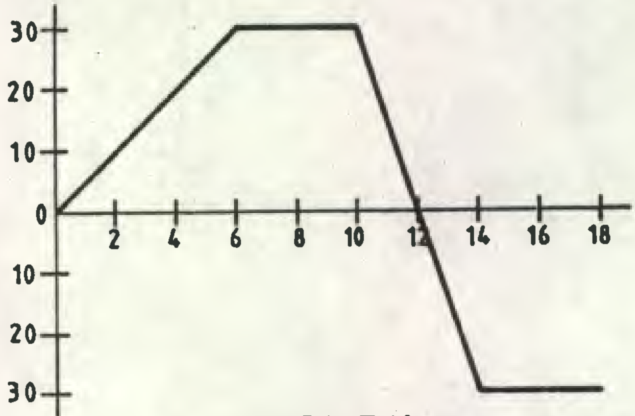


FIGURA 5.13

GRAFICA

Encontrar los siguientes datos:

5.1) Velocidad inicial.

5.2) Tiempo total.

5.3) Velocidad a los 8 segundos.

5.4) Velocidad final

5.5) Aceleración durante el tiempo **transcurrido** desde los 2 segundos hasta los 5 segundos.

5.6) Aceleración desde los 6 segundos hasta los 8 segundos.

5.7) Aceleración desde los 12 segundos hasta los 14 segundos.

5.8) El desplazamiento efectuado entre el sexto y el décimo segundo.

5.9) El desplazamiento efectuado entre el doceavo y el catorceavo segundo.

5.10)El desplazamiento total.

Respuestas:

(La ventaja de una gráfica como la presente, es el hecho de que algunas incógnitas se "leen" directamente de la gráfica). Como ejemplos de la ventaja mencionada en el paréntesis, podemos resolver los siguientes ejercicios:

5.1) Velocidad inicial = 0m/s

5.2) Tiempo total = 18 segundos

5.3) Velocidad a los 8 segundos = 30m/s. **Tiempos**cuando la velocidad vale cero = 0 y 12 segundos.

5.4) Velocidad final = -30m/s

Los siguientes incisos se encuentran con sencillas fórmulas geométricas.

La aceleración está dada por el valor de la tg (pendiente)de la curva entre los tiempos señalados (si el tiempo transcurrido tiende a cero [$T \longrightarrow 0$], estamos refiriéndonos a la aceleración instantánea).

5.5) Aceleración durante el tiempo transcurrido del segundo al quinto segundo.

$$tg1 = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}} = \frac{25m/s - 10m/s}{5\ seg.- 2\ seg.} = \frac{15m/s}{3\ seg.} = 5m/s^2$$

5.6) Aceleración del sexto al octavo segundo.

$$tg2 = \frac{30m/s - 30m/s}{8\ seg.- 6\ seg} = \frac{0m/s}{2\ seg} = 0m/s \text{ (si } a=0 \quad V=\text{constante)}$$

5.7) Aceleración del décimo al catorceavo segundo

$$tg3 = \frac{-30m/s - 30m/s}{14\ seg - 10\ seg} = \frac{-60\ m/s}{4\ seg} = -15m/s^2$$

(El signo negativo nos indica una desaceleración)

El desplazamiento efectuado durante un tiempo determinado es igual al valor del área bajo la curva.

5.8) El desplazamiento efectuado entre el sexto y el décimo segundo(el área bajo la curva es equivalente al desplazamiento)

S1 = Area 1 donde Area 1 = A_1 = b x h (rectángulo), así:

$$A_1 = (10s - 6s)\,(30m/s - 0m/s) = 4s\,(30m/s) = 120m$$

5.9) El desplazamiento efectuado entre el doceavo y el catorceavo segundo.

$$\text{Area 2} = A_2 = \frac{b \times h}{2} = \text{área de un triángulo, así:}$$

$$A_2 = \frac{(14s - 12s)\,(-30m/s - 0m/s)}{2} = \frac{2s(-3-m/s)}{2} = -30m$$

(El signo negativo nos indica un desplazamiento de retorno).

5.10) El desplazamiento total. Es la suma algebraica de todas las áreas bajo la curva de la gráfica V / T(o sea que no esmás que la suma de los avances menos los retornos del punto de partida).

NOTA:

Para encontrar dicho desplazamiento encontramos el área de cada figura regular simple (rectángulos, triángulos y/o cuadrados) siendo positivas las que se encuentren sobre el eje de las abscisas -eje x- y negativas las que se encuentren debajo de dicho eje.

S T = 90m

La ley de gravitación universal, enunciada por Sir Isaac Newton, tuvo sólidos pilares en Kepler, Copérnico y Galileo. Este último, con una actitud científica de observación y experimentación, realizó avances en este campo. Galileo afirmaba que dos objetos de distinta masa caen en igual tiempo una misma distancia (contra toda "lógica" que nos diría que un cuerpo de mayor masa cae más rápido que uno cuya masa es menor). Un sencillo ejemplo que confirma la validez de lo aseverado por

Galileo lo puede realizar usted de la siguiente forma.Tome una hoja de papel plana, déjela caer desde cierta altura, mida el tiempo de caida con un cronómetro, repita la observación con la misma hoja ahora estrujada y en forma de esfera compacta, note que el tiempo fue menor que el anterior, sin embargo, la masa de la hoja seguia siendo la misma.

Conclusión: Existe, en este caso, la resistencia del aire, que hace los tiempos diferentes; por lo que si eliminamos totalmente la resistencia del aire -en el vacio- una pluma caería con la misma velocidad que una esfera de plomo.

5.9 TIRO VERTICAL

- Con V_o igual a cero.
- Con V_o de igual orientación que la aceleración gravitacional.
- Con V_o con orientación contraria a la aceleración gravitacional.

El tiro vertical es un caso particular del movimiento uniformemente variado en el cual hay que tomar en cuenta el valor de la aceleración que experimenta cualquier cuerpo en las cercanías de la superficie terrestre, siendo el mismo $9.78 m/s^2$ --0 grados de latitud-- y en los polos de $9.83 m/s^2$ --90 grados de latitud-- a nivel del mar (por lo que varía también, con la altura sobre el nivel del mar). Es por estas variaciones y para facilitar el manejo aritmético que en algunas ocasiones se utiliza la aceleración gravitacional terrestre con el valor de $10 m/s^2$* ó $10^3 cm/s^2$ ó 32 p/s^2. Como constante que es, obviamente no se incluye dentro de los datos proporcionados en un problema dado.

- Caída libre es el caso de un objeto cuya velocidad inicial es cero y su única aceleración, es la gravitacional por lo que caerá verticalmente.
- Tiro vertical con velocidad inicial en la dirección y sentido de la gravedad, es el objeto que se lanza hacia abajo teniendo una velocidad mayor que cero.
- Tiro vertical con velocidad inicial en la misma dirección pero en el sentido contrario a la gravitación, es el que describe un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, y que debido a la aceleración gravitacional en el sentido contrario al

movimiento, lo regresa al punto de partida.

Para el primer caso los términos de las ecuaciones de cinemática que incluyen la velocidad inicial (V_o) serán cero; para el segundo la aceleración gravitacional será positiva y para el tercer caso la aceleración gravitacional será negativa. En dichas ecuaciones variará la literal de aceleración (a) por gravitación (g) y el de desplazamiento (s) por altura (h) quedando en esta forma.

5.8 $V_f = V_o + gT$

5.9 $V_f^2 = V_o^2 + 2gh$

5.10 $h = V_oT + 1/2gT^2$

EJEMPLO 11

Si un sujeto cae libremente de un edificio de 80 metros de altura encontrar:

a) El tiempo que tarda en caer.

b) El tiempo transcurrido a la mitad del recorrido

c) Su velocidad en el instante que toca el suelo.

Entonces, si cae libremente esto implica que su velocidad inicial (V_o) es cero, de donde si seleccionamos la ecuación 5.10 para el inciso a), obtendremos:

$$h = 1/2gT^2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad ó \quad \sqrt{\frac{h}{1/2\ (g)}} = T$$

De donde:

$$T = \sqrt{\frac{2(80m)}{10m/s^2}} \quad ó \quad \sqrt{\frac{80\ m}{1/2\ (10m/s^2)}} = 4\ seg$$

Para el inciso b) la misma ecuación (5.10):

$$T = \sqrt{\frac{2(40m)}{10m/s^2}} = 2.828\ segundos$$

Explique la diferencia de tiempos entre la primera y segunda mitad del recorrido.

Para el inciso c) la ecuación 5.8

$V_f = gT = 10m/s^2 \ (4s) = 40m/s$

Calcule esa velocidad en km/h

EJEMPLO 12

Si lanzamos un ladrillo desde esa misma altura con velocidad inicial de 10m/s en forma vertical y hacia abajo, encuentre:

a) La velocidad con que toca el suelo.

b) El tiempo en caer al suelo.

Para el inciso a) la ecuación 5.9:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2gh = V_f = \sqrt{V_o^2 + 2gh}$$

$$V_f = \sqrt{(10m/s)^2 + 2(10m/s^2)\ (80m)} = 41.23m/s$$

Para el inciso b) la ecuación 5.8:

$$V_f = V_o + gT \quad \text{de donde} \quad T = \frac{V_f - V_o}{g}$$

$$T = \frac{41.23m/s - 10m/s}{10m/s^2} = 3.12 \text{ segundos}$$

EJEMPLO 13

Que altura alcanza una esfera lanzada verticalmente y hacia arriba con velocidad de 40m/s y qué tiempo emplea en hacerlo.

Observaciones:

Un objeto lanzado verticalmente y hacia arriba va disminuyendo velocidad a medida que va subiendo, hasta que su velocidad es igual a cero, en ese instante alcanza su altura máxima (hm), entonces empieza su descenso o caída hasta retornar al punto de partida.

El tiempo que tarda en llegar a su altura máxima se llama tiempo de subida (T_s) y al que emplea en retornar a su punto de partida tiempo de bajada o caída (T_b); la suma de ambos se denomina tiempo de vuelo (T_v).

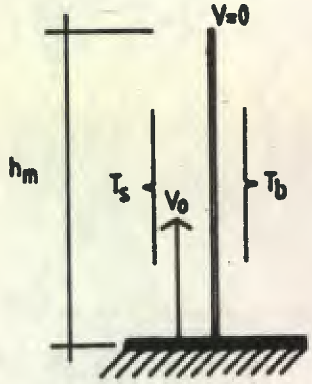


FIGURA 5.14

EJEMPLO DE TIRO VERTICAL

Para la altura máxima, la ecuación 5.9:

$V_f^2 = V_o^2 + 2\ (-g)h$ de donde $V_f^2 = V_o^2 - 2gh$

Como (h) es máxima, $V_f = 0$

$$V_o^2 = 2\ ghm \qquad hm = \frac{V_o^2}{2g} = \frac{(40m/s)^2}{2(10m/s^2)} = 80m$$

Para el tiempo de subida, ecuación 5.8:

$V_f = V_o + (-g)T = V_o - gt$ Como el tiempo es el empleado en llegar a su altura máxima, la velocidad final $V_f = 0$

$$0 = V_o - gTs = V_o = gTs \quad \text{ó} \quad Ts = \frac{V_o}{g}$$

$$Ts = \frac{40m/s}{10m/s^2} = 4 \text{ segundos}$$

Las condiciones de altura y tiempo fueron tomados del problema 5.4, por lo que, el tiempo de bajada o caída (Tb) y la velocidad final de bajada serán 4 segundos y 40 m/s respectivamente, si los comparamos con dichos problemas.

Estos son los principios generales de los problemas de tiro vertical.

EJEMPLO 14

Qué distancia separa dos gotas de agua que caen libremente desde una altura de 20 metros a intervalos de 0.5 segundos cuando la primera toca el suelo.

Llamaremos h1 y T1 a la altura y al tiempo de la primera gota, respectivamente, h2 y T2 a la altura y tiempo de la segunda

Entonces (ecuación 5.10):

$h = V_oT + 1/2gT^2$ $\qquad$ $h1 = 1/2gT^2$ $\quad$ $(V_o = 0)$

$$T1 = \sqrt{\frac{2h1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 20m}{10m/s^2}} = 2 \text{ segundos}$$

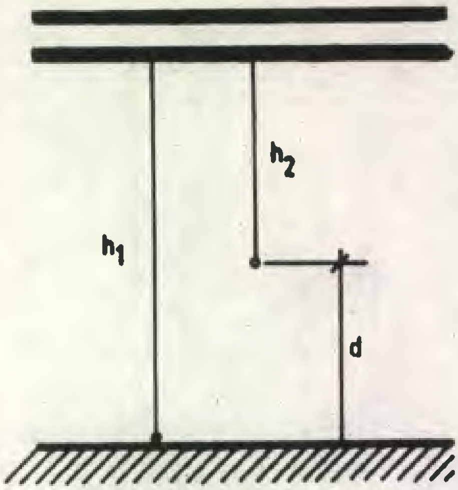


FIGURA 5.15

EJEMPLO 14

Como la segunda se desprendió libremente 0.5 seg. después:

$T2 = T1 - 0.5$ seg. $= 2$ seg $- 0.5$ seg entonces $T2 = 1.5$ seg.

$h2 = 1/2gT2^2 = 1/2\ (10m/s^2)\ (1.5\ seg)^2$ $\quad$ $h2 = 11.25$ metros

$d = h1 - h2 = 20m - 11.25m$ $\quad$ $d = 8.75$metros

Al igual que en los problemas que encuentros (ej. 10), hay que encontrar datos de un móvil y relacionarlos con el otro, para encontrar la respuesta.

EJEMPLO 15

Una esfera se lanza con velocidad vertical y hacia arriba, cayendo15cm abajo de donde fue lanzada. Encontrar, la velocidad inicial si el tiempo de vuelo es de tres segundos.

La única ecuación que nos resuelve la incógnita es la 5.10:

$$h = V_oT + 1/2gT^2 \quad \text{entonces} \quad \frac{h - 1/2gT^2}{T} = V_o$$

$$V_o = \frac{-15m - 1/2(-10m/2^2)\ (3seg^2)}{3\ seg} \qquad V_o = 10m/s^2$$

5.1 MOVIMIENTO EN UN PLANO VERTICAL - Tiro Parabólico -

Hasta este momento, el movimiento ha sido rectilineo, sin embargo una partícula puede desplazarse en el plano o en el espacio. Un caso particular de movimiento en el plano (2 dimensiones) es el llamado "tiro parabólico" .

Un cuerpo lanzado a una velocidad con un ángulo diferente de la vertical dy que este atraído por la aceleración gravitacional o una componente de estaforma en su trayectoria, una parábola. Este movimiento llamado parabólico se estudia como un movimiento uniforme en el eje x (horizontal), despreciando la resistencia ofrecida por el aire y un movimiento uniformemente variado en eje y, en el cual la aceleración sigue siendo la gravedad. Por ejemplo: Sea V_o la velocidad inicial y α el ángulo de tiro de un proyectil. Para encontrar su alcance (máximo desplazamiento en el eje x) el análisis es el siguiente:

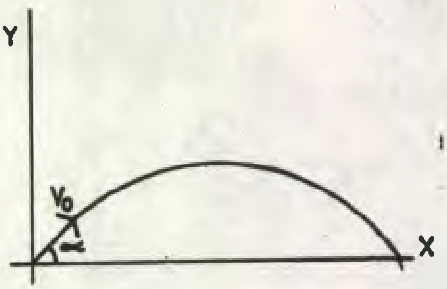


FIGURA 5.16

La velocidad como vector que es, la podemos descomponer en cualquier instante en sus componentes rectangulares V_x y V_y

Ecuación en el eje "x": MU

$S = V_xT$

Ecuaciones en el eje "y": MUV

$V_{fy} = V_{oy} + gTv$

$V_f^2y = V_o^2y + 2gh$

$h = V_{oy}Tv + 1/2gT^2$ en donde $g = -10m/s^2$

Los componentes V_{ox} y V_{oy} pueden calcularse en términos de la rapidez y el ángulo de lanzamiento:

$V_{ox} = V_o \cos \alpha$

$V_{oy} = V_o \operatorname{sen} \alpha$

Y el tiempo T es el mismo para las ecuaciones de movimiento en X y en Y.

Si el alcance máximo es "S_m" y $S_m = V_xT$ necesitaríamos el tiempo de vuelo T_v ya que V_x es un dato del problema, por lo que nos remitimos al eje "y" en donde:

$V_{fx} = V_{ox} + gT$

Si tomamos h máxima (hm), en el punto T entonces $V_{fy} = 0$ (ver observacines de tiro vertical) encontraremos el tiempo de subida: T_s:

$$0 = V_{oy} + gT_s$$

$$-gT_s = V_{oy} \quad \text{entonces } T_s = \frac{V_{oy}}{g} = \frac{V_o \text{ sen } (\alpha)}{-g}$$

Como el Tiempo de subida T_s es igual al tiempo de bajada T_b para este tipo de problemas, entonces:

$$T_v = 2T_s$$

Encontrado este dato lo substituimos en la ecuación de desplazamiento: $S_m = V_{ox}\, T_v$ y obtenemos el alcance máximo así:

$$S_m = \frac{2V_o^2 \cos\alpha \text{ sen } \alpha}{-9}$$

EJEMPLO 16

Un avión suelta un objeto cuando se encuentra a 2,000 metros del suelo y se mueve con velocidad de 40m/s, encontrar:

a) Tiempo que tarda en llegar al suelo (T_b).

b) Distancia horizontal recorrida por el objeto mientras estuvo en el aire (alcance).

c) Velocidad en el momento en que toca el suelo (V_f).

a) Tiempo de bajada o caída (T_b): el avión deja caer el objeto por lo que podemos decir que es caída libre: $V_{oy} = 0$

Para el eje y y vertical, por lo tanto:

$h = V_oT + 1.2gT^2$ entonces $h = 1/2gT_b^2$

$$T_b = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(2.000m)}{10m/s^2}} = 20 \text{ segundos}$$

b) El tiempo de bajada es exactamente el mismo tiempo que tarda en recorrer la distancia horizontal (alcance) siendo en este eje (si despreciamos la resistencia del aire) el movimiento uniforme (velocidad constante) por lo tanto la velocidad inicial del objeto en el eje x $-V_{ox}-$ será la misma que la del avión, por lo mismo:

$V_{ox} = S_x / T_b$ entonces $S_x = V_{ox}(T_b) = 40m/s(20s) = 800m$

Por lo tanto el alcance es de 800 metros.

c) La velocidad de choque con el suelo es el vector velocidad resultatne de las velocidades componentes en X y Y y la velocidad en el eje X es la misma en toda la trayectoria -MU- mientras que la velocidad en el eje Y hay que encontrarla: por ser un movimiento uniformemente variado MUV.

$V_{fy} = V_{oy} + gT$ como $V_{oy} = 0$ entonces $V_{fy} = gT$

$V_{fy} = 10m/s^2 (20s) = 200m/s$

Entonces $V_f = \sqrt{V_{fx}^2 + V_{fy}^2} = \sqrt{(40m/s)^2 + (200m/s)^2}$

$V_f = 203.96$ m/s

$$Tg\ \phi^{-1}\ \frac{200m/s}{40\ m/s} = 78.69^{\circ}$$

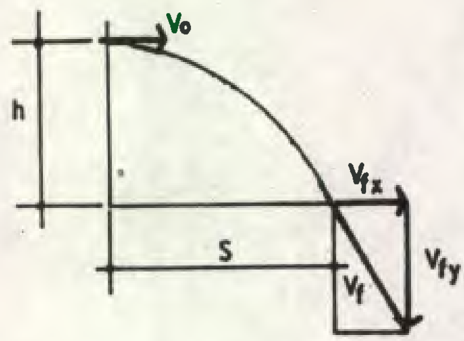


FIGURA 5.17

EJEMPLO 5.9

Ejercicios:

5.1) Dos móviles salen de un mismo punto con aceleración constante de $6/ms^2$. Cuál debe ser la velocidad inicial de uno para alcanzar al otro que partió del reposo 8 segundos antes, en una distancia de 40 metros.

5.2) Un autor arranca con aceleración constante de $3m/s^2$ durante 10 segundos al cabo de los cuales, continúa con velocidad constante durante 15 segundos para detenerse, finalmente, en 8 segundos. Si el recorrido es rectilíneo, encontrar el desplazamiento total. Realice la gráfica velocidad/tiempo y compare el área bajo la curva con el desplazamiento total.

5.3) Dos ciclistas parten con velocidades constantes de 7m/s y 9m/s en el mismo instante de dos puntos separados 120 metrosen linea recta. Encontrar el tiempo y la distancia que emplea cada uno hasta que se encuentran. Realice la gráfica desplazamiento/tiempo de cada uno y sume las áreas bajo la curva.

5.4) Dos registros de velocidad separados 10 cm. indican que una bala pasó por el primer punto con velocidad de 450m/s y por el segundo con 200m/s.Encuentre la distancia recorrida antes de detenerse suponiendo la aceleración constante.

5.5) Redacte un ejercicio con los datos que le proporciona la siguiente gráfica:

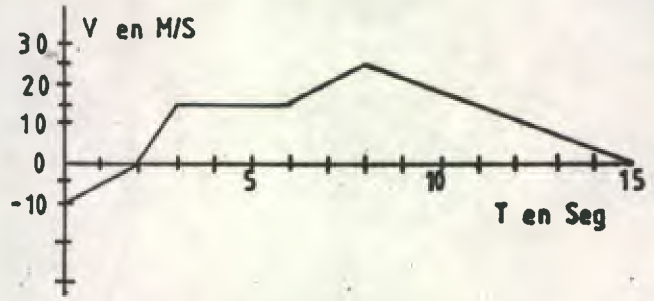


FIGURA 5.18

GRAFICA PROBLEMA 5.15

5.6) Un albañil lanza una pequeña piedra a un compañero de trabajo con una velocidad inicial de 5 m/s y con un ángulo de 32°golpeándolo, levemente, a la misma altura a que fue lanzada la piedra. Encontrar la distancia quesepara ambos albañiles.

5.7) Un auto se mueve a velocidad de 25 m/s y acelera uniformente, entre dos puntos a razón de 4 m/s^2 cual sera la velocidad cuando pasa por el segundo punto y cual la distancia recorrida entre ambos puntos así como, el tiempo transcurrido al cubrir la anterior distancia.

CAPITULO 6

DINAMICA

Introducción:

A través del estudio del capítulo anterior -Cinemática-, analizamos los cambios de velocidad que se dan durante determinado tiempo y a lo largo de un desplazamiento, dando como resultado la relación que llamamos aceleración. Sin embargo, no mencionamos qué es lo que determina esa variación de velocidad en el tiempo y en el espacio. Como ya se vio en el Capítulo 4 (Estática), tomamos de nuestra actividad cotidiana el concepto de FUERZA, utilizándola -como ya se señaló- con diferentes usos: Fuerza Sobrenatural, Fuerza Mayor, Fuerzas Ignoradas, etc., aunque muchas veces utilizamos intuitivamente el concepto físico de la fuerza: el Peso, la Tension, una fuerza mayor que otra, la dirección en que actúa una fuerza, etc.

6.1 SEGUNDA LEY DE NEWTON

De la misma forma, intuitiva, manejamos algunas relaciones como las siguientes:

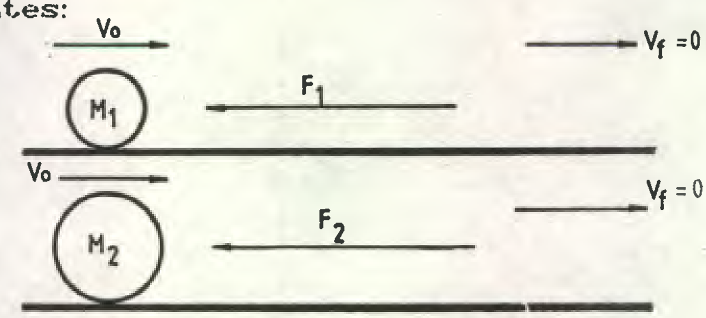


FIGURA 6.1

RELACION DE FUERZA CON MASAS SI LA ACELERACION A ES CONSTANTE

Si $m_1 < m_2$ entonces:

$$F1 < F2$$

o sea que, para imprimir la misma aceleración a dos masas diferentes, necesitamos dos fuerzas diferentes, (si $m_1 < m_2$ esto implica que $F_1 < F_2$)

$$F \propto m$$

De donde la fuerza es directamente proporcional a la masa si la aceleración a es constante.

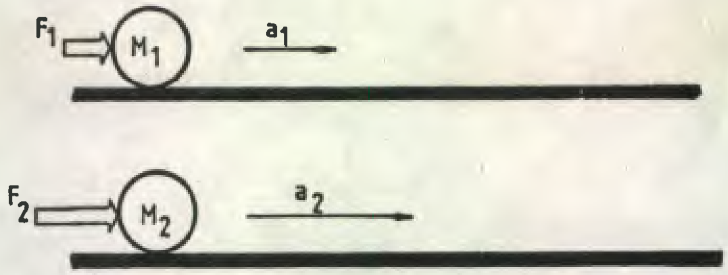


FIGURA 6.2

RELACION ENTRE FUERZA Y ACELERACION SI LA MASA M ES CONSTANTE

Si $F1 < F2$ entonces:

$$a1 < a2$$

Si y solo si, la masa M, es constante, o sea que:

$$F \propto a$$

(La fuerza tambien es directamente proporcional a la aceleración).

Es sencillo deducir que a mayor masa, necesitamos mayor fuerza para producir un cambio de velocidad en un tiempo dado, así como para imprimir mayor cambio de velocidad sobre una masa dada, también necesitamos más fuerza. De donde se infiere que masa y variación de velocidad en el tiempo -aceleración-, tienen una relación directa con la fuerza.

DEFINICION:

La suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de masas nos proporciona una aceleración resultante. Dicho en otra forma:

$$\Sigma F = Ma$$

en donde $\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$

y $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$

y a = aceleración resultante

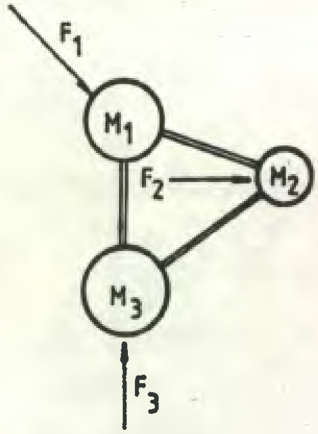


FIGURA 6.3

SISTEMA DE FUERZAS ACTUANDO SOBRE UN SISTEMA DE MASAS

Lo que equivale a:

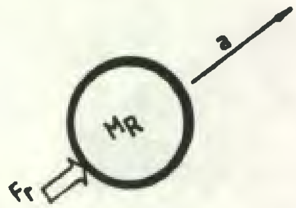


FIGURA 6.4

FUERZA NETA (ΣF) SOBRE UNA MASA EQUIVALENTE (ΣM)

Como la fuerza neta (ΣF) es un vector, producto de un escalar m (masa) por el vertor a (aceleración) ambos vectores tienen la misma dirección y sentido.

Simplificando, podemos escribir:

$F = m\ a$

Tomando como referencia el sistema de unidades metro - kilógramo-segundo (MKS), si un cuerpo cuya masa es de un kilogramo, acelera a razón de un m/s^2, diremos que se realiza una fuerza de un kg m/s^2.

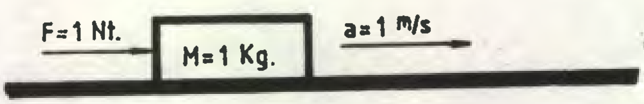


FIGURA 6.5

EL NEWTON

$F = 1kg \times 1m/s^2 = 1kg\ m/s^2 = 1$ Newton

UNIDADES DE FUERZA

MKS	$1kg\ m/s^2$	=	1 Newton (Nt)
CGS	$1g\ cm/s^2$	=	1 Dina (Dn)
Inglés	$1\ slug\ pie/s^2$	=	1 libra fuerza

EJEMPLO 1

Encuentre la fuerza que proporciona una aceleración de $5m/s^2$, a una masa de 7 kg, como lo indica la siguiente gráfica.

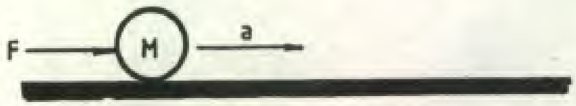


FIGURA 6.6

EJEMPLO 1

De la segunda Ley de Newton

$F = ma$ sustituimos

$F = 7kg \times 5m/s^2$

entonces: $F = 35kg\ m/s = 35$ Newton

Si observamos el ejemplo cotidiano de un albañil con una carretilla de mano, podemos darnos cuenta de los siguientes casos: si a la carretilla le incrementamos el número de ladrillos de un viaje a otro, el "esfuerzo" que realiza el albañil será mayor, caso contrario ocurriría si le disminuimos el núumero de ladrillos por viaje; así también, dos albañiles con carretillas con igual número de ladrillos, pero uno más "fuerte" que otro llevará más "rápido" la carretilla. O sea que existe una proporcionalidad directa entre la fuerza y la masa y entre la fuerza y el cambio de velocidades por tiempo -aceleración-.

PESO Y MASA

Newton también descubrió que la fuerza de atracción gravitacional entre dos masas (puntuales) m_1 y m_2, separadas una distancia r entre si, es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F \alpha = \frac{m_1 \; m_2}{r^2}$$

Años más tarde Henry Cavendish encontró el valor de la constante gravitación universal "G " quedando la ley de la siguiente forma:

$$F = G \frac{m_1 \; m_2}{r^2}$$

Esta ley, se cumple para las partículas fundamentales del átomo -atracción entre electrones, neutrones y protones- como para todos los cuerpos celeste estrellas (soles), planetas, satélites (lunas), aunque en el caso del átomo existen fuerzas electromagnéticas y nucleares que son de una intensidad mucho mayor que la de la fuerza gravitacional.

Si analizamos dicha ley veremos cadenas de atracción gravitacionalen todos los niveles: el sol atrae a los planetas; estos a su vez atraen a su(s) lunas, etc. Dicha atracción se manifiesta obviamente entre todas las masas que están sobre la tierra y ésta. Esta fuerza de atracción es la que hemos llamado con anterioridad PESO y según se infiere de la Ley de Gravitación este variará en función de su masa y su distancia a la superficie de la tierra, por lo que no es constante, como ocurre con la masa. (Una misma masa, pesa diferente en la cima de un volcán que a nivel del mar, o en la superficie terrestre que en la superficie lunar (esto ultimo por la diferencia de masas entre la tierra y la luna).

Diremos entonces que siendo el peso una fuerza lo escribiremos (por la segunda Ley de Newton) como peso (w) igual a masa (m) por la aceleración (a) = g $\therefore$ w = mg. Trasponiendo la masa nos queda: $w / m = g$

La aceleración al igual que el peso se ve afectada por la distancia a la superficie terrestre. Su valor, a 0 metros sobre el nivel del mar y sobre el Ecuador es de $-9.81 \; m/s^2$ enel sistema MKS, $10^3 cm/s^2$en el sistema CGS, y $-32 \; p/s^2$ en el sistema Inglés, y se le asigna la letra "g" (para efectos de cálculo aritmético, el valor de $10 \; m/s^2$ para el sistema MKS, es una buena aproximación). En problemas que involucran el movimiento de un cuerpo cerca de la superficie terrestre (algunos kilómetros) el valor de g puede tomarse como constante, ya que su variación es minima.

6.2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Con rigor al orden numérico de las tres leyes fundamentales de la dinámica de Newton, debiéramos iniciar con la primera, pero esta, es una consecuencia de la segunda, (ya que necesitamos del concepto de fuerza) por lo que la enunciamos después de ésta.

"Si un cuerpo esta en reposo y no existe ninguna fuerza externa que inicie su movimiento, este cuerpo permanecerá en reposo y si un cuerpo se mueve, con velocidad constante sobre una linea recta (MRU)no existe ninguna fuerza externa actuando sobre él, este seguirá a la misma velocidad constante".

6.3 Tercera Ley de Newton

Si un cuerpo A ejerce una fuerza F sobre un cuerpo B, entonces B ejerce una fuerza -F sobre A Las fuerzas entre cuerpos siempre se dan en pares ($\bar{F}$ y $-\bar{F}$). Es importante tener siempre presente que $\bar{F}$ actúa sobre un cuerpo (en este caso B) y $-\bar{F}$ sobre el otro cuerpo (en este caso A).

Como en el ejemplo del albañil y la carretilla aquel hace una fuerza para levantar del suelo, sus apoyos (patas), pero la carretilla también hace una fuerza sobre el albañil. A este par de fuerzas se les llama acción - reacción, indistintamente de cual es cual.

EJEMPLO 2

Cuál es el peso (la lectura de una báscula) de un hombre cuya masa es de 58kg que está en reposo.(el peso del Hombre seria la fuerza de acción actuando sobre la báscula, y la fuerza de la báscula -normal- que actua sobre el Hombre seria la reacción; de la misma magnitud y dirección, pero de sentido contrario, tal como se analiza al detalle despues de la solución del problema)

FIGURA 6.7

EJEMPLO 2 (a) y DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (b)

Como el hombre está en reposo, entonces:

Sumatoria de F = 0

N - w = 0 entonces N = w y como w = mg

En donde g = $10 m/s^2$

Entonces: w = 58kg ($10 m/s^2$) = 580 Nt = N (lectura)

NOTA: El peso es siempre vertical y hacia abajo.

La fuerza normal (N) es siempre perpendicular a la superficie que esta en contacto con la masa.

En este ejemplo podemos distinguir dos pares acción - reacción:

a) La tierra atrae al hombre con una fuerza w = mg, en donde m = masa del hombre (acción). El hombre atrae a la tierra con una fuerza igual y opuesta -w (reacción).

b) El hombre ejerce una fuerza w sobre el piso, hacia abajo (acción).El piso ejerce una fuerza N igual y opuesta sobre el hombre (reacción).

EJEMPLO 3

Un cuerpo de 5kg es halado por una cuerda con una fuerza de 35Nt. sobre una superficie horizontal lisa. Encontrar el valor de la fuerza normal N y el de la aceleración de dicho cuerpo.

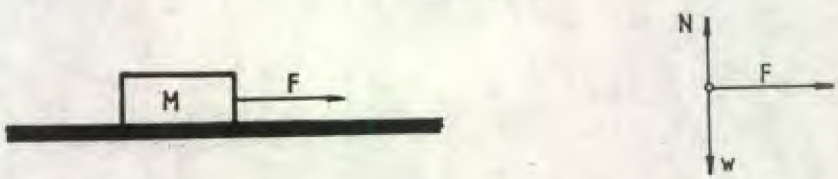


FIGURA 6.8

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Para éste, como muchos otros problemas, se trabaja en cada eje por separado.

Sumatoria de $F_y = 0$

Entonces: $N - w = 0$

Así: $N = w$

Ahora $w = mg$

Substituyendo $w = 5kg\ (10m/s^2) = 50Nt$

Entonces: $N = 50Nt$

Y la sumatoria de $F_x = ma$

(Las fuerzas transmitidas por cuerdas, hilos o cables, reciben el nombre de fuerzas de tensión tal como se vió en el capitulo 4).

Entonces: $T = ma$

Así: $T/m = a$

Substituyendo: $35Nt/5kg = a$ $\qquad a = 7m/s^2$

EJEMPLO 4

Cuál será la fuerza normal del piso sobre una persona dentro de un ascensor cuando:

a) Sube con una aceleración constante de $2m/s^2$.

b) Baja con una aceleración constante de igual valor.

c) Sube o baja con una velocidad constante.

La masa de la persona es $m = 48\ kg$

(Los incisos a y b se dan en los instantes en los que el ascensor empieza a subir o a bajar y al finalizar ambos movimientos y el inciso c), entre esos instantes. Recuerde experiencias sucedidas en esta situación.

FIGURA 6.9

a) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Sumatoria de $F = ma$

Entonces $N - w = ma$

Trasponiendo $N = ma + w$

Substituyendo: $M = 48kg(2m/s^2 + 49kg\ (10m/s^2)$

O sea: $N = 576Nt$

FIGURA 6.10

b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Sumatoria de $F = ma$

*Entonces $N - w = m\ (-a)$

Trasponiendo $N = w - ma$

Substituyendo $N = 48kg\ (10m/s^2) - 48kg\ (2m/s^2)$

O sea que $N = 384Nt$

*(La aceleración en este caso es negativa)

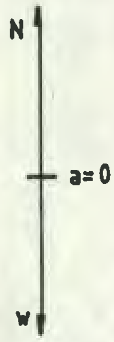


FIGURA 6.11

c) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Si V es constante entonces $a = 0$

Entonces sumatoria de $F = 0$

Por lo que $N - w = 0$

Trasponiendo $N = w$

Pero como $w = mg$

$w = 48kg\ (10m/s^2) = 480Nt$

Con los resultados de este ejemplo trate de explicar las sensaciones experimentadas en una situación similar.

EJEMPLO 5

Una masa (m_1) de 20kg se encuentra en una superficie horizontal sin fricción unidad por una cuerda, que pasa por una polea que actúa sólo para cambiar la dirección de la cuerda, a otra masa (m_2) que cuelga libremente.

Encontrar el valor de m_2 para que todo el sistema acelere a razón de 3.5 m/s.

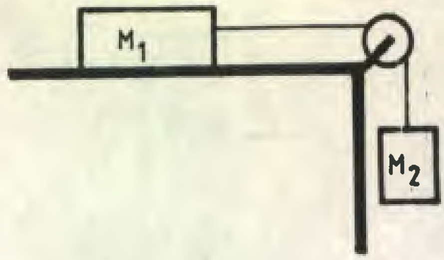


FIGURA 6.12

EJEMPLO 5

La masa dos hala a la masa uno y debido a su peso, acelera el sistema en el sentido de las agujas del reloj.

Para m_1:

Sumatoria de $F_y = 0$ entonces: $N - w_1 = 0$

Por lo tanto $N = w_1$

Sumatoria de $F_y = ma$ entonces: $T = m_1 a$

Substituyendo $T = 20kg \times 3.5 m/s^2 = 70Nt$

Esta tensión (T) será la misma a lo largo de toda la cuerda, por lo que para m_2:

Sumatoria de $F_y = m_2 a$

Entonces: $T - w_2 = m_2 (-a)$

Trasponiendo $T = w_2 = m_2 a$

Ahora como $w = mg$

Entonces: $T = m_2 g - m_2 a$

$T = m_2 (g - a)$

$$\frac{T}{g - a} = m_2$$

Substituyendo: $$\frac{70\ Nt}{10\ m/s^2 - 3.5\ m/s^2} = m_2$$

Entonces: $m_2 = 10.77kg$

EJEMPLO 6

De la siguiente figura encuentre la aceleración del sistema con los datos dado en la misma.

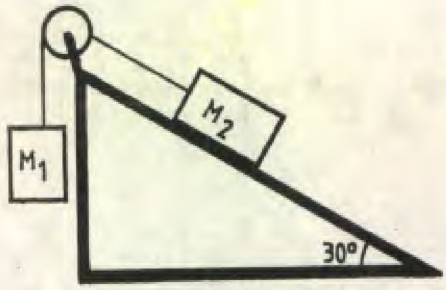


FIGURA 6.13

EJEMPLO 6

FIGURA 6.14

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRO PARA LA MASA 1

Sumatoria F = ma

Asignámosle al sistema, movimiento contrario al sentido en que se mueven las agujas del reloj.

Entonces: $w_1 - T = m_1\ a$ (Primera ecuación)

Esta ecuación es de primer grado con dos incógnitas, por lo que necesitamos una segunda ecuación.

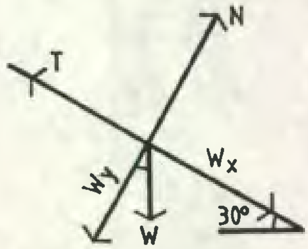


FIGURA 6.15

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA MASA 2

Descomponiendo el peso: a través de las funciones trigonemétricas de seno y coseno.

Sumatoria de $F_y = 0$

Entonces: $N - w_y = 0$

Ahora como $w_{1y} = w_2$ (coseno 37°)

Así $N = m_2g \cos 37°$

Sumatoria de $F_x = ma$

Tomando el sentido del movimiento asignado al sistema, tenemos:

$-w_x + T = m_2a$ ó

$-m_2g\,(\text{sen } 37°) + T = m_2a$ (Segunda ecuación)

En esta segunda ecuación aparecen las mismas incógnitas que en la primera: "T" que es la misma a lo largo de la cuerda y "a" que es común al sistema, por lo que sumando ambas:

$$m_1g - T = m_1a \qquad \text{(1a. ecuación)}$$

$$-m_2g\,(\text{sen } 37°) + T = m_2a \qquad \text{(2a. ecuación)}$$

$$m_1g - m_2g\,(\text{sen } 37°) = m_1a + m_2a \qquad \text{(3a. ecuación)}$$

Ecuación de primer grado con una incógnita, la aceleración.

Si sacamos de factor común la aceleración :

Entonces: $m_1g - m_2g\,(\text{sen } 37°) = (m_1 + m_2)\,a$

Trasponiendo: $\dfrac{m_1g - m_2g\,(\text{sen } 37°)}{m_1 + m_2} = a$

Sustituyendo $\dfrac{20kg(10m/s^2) - 10kg(10m/s^2)\,(0.60)}{20kg + 10k}$

Entonces: $a = 4.66 m/s^2$

Es sumamente importante trabajar las dimensionales de las magnitudes físicas dadas porque le dan consistencia al desarrollo de un problema y son fuente para detectar errores.

Hasta el momento hemos hablado desuperficies lisas, pero entre dos superficies en contacto siempre existe una fuerza que no permite que éstas se deslicen libremente (un invento útil para eliminar casi por completo esta fuerza, es el riel de viento). Dicha fuerza recibe el nombre de fricción y se opone siempre al movimiento . La fuerza de fricción estática, f_s, varia entre 0 y un valor máximo f_s^{max}: $0 \leq f_s \leq f_s^{max}$. La f_s^{max} es proporcional a la normal: $f_s^{max} = \mu_s N$. Por lo que para igualarla se introduce un coeficiente de fricción: llamado μ (letra griega m μ), que es estático si las superficies están en reposo y cinético en el caso contrario. Por lo que la fuerza de fricción (f) queda $f = \mu n$

EJEMPLO 7:

Encontrar la aceleración del siguiente sistema:

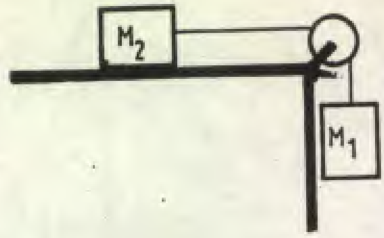


FIGURA 6.16

EJEMPLO 7

Si $m_1 = 10kg$

$m_2 = 15kg$

$\mu = 0.1$

Sumatoria de F_{m1}:

$w_1 - T = m_1 a$ (1a. ecuación)

Sumatoria $F_{m2y} = 0$

$N - w_2 = 0$

Entonces: $N = w_2$

Sumatoria $F_{m2x} = m_2 a$

$T - F = m_2 a$

Con $F = \mu N$ y $N = w_2$

Entonces: $T - \mu w_2 = m_2 a$

Sumando ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{array}{r} w_1 - T = m_1 a \\ T - \mu w_2 = m_2 a \\ \hline w_1 - \mu w_2 = m_1 a + m_2 a \end{array}$$

(factorizando)

$w_1 - \mu w_2 = (m_1 + m_2)\, a$ Trasponiendo

$$\frac{w_1 - \mu w_2}{m_1 + m_2} = a$$

substituyendo valores

$$\frac{15kg(10m/s^2) - 0.1 \times 10kg(10m/s^2)}{10kg + 5\ kg} = a$$

Entonces: $a = 5.6\ m/s^2$.

EJERCICIOS

6.1) Un bloque de masa de 18kg se mueve en una superficie horizontal con fricción, con una rapidez de 10m/s, y se detiene al cabo de 3 segundos debido al rozamiento . Encuentre el valor de la fuerza de fricción, en newtons, en DINAS y en Lbs-f.

6.2) Un cuerpo de masa 15 kg, se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración de $3m/s^2$, por la acción de una cuerda. Encuentre la fuerza, en newtons, que la cuerda hace sobre el cuerpo.

6.3) Si sobre un bloque de masa 20kg se aplican dos fuerzas: una de 150 N en la dirección 30°del Este al Norte y otra de 150 Nen la dirección 30° del Oeste al Norte. Encuentre el valor de la aceleración a en m/s^2.

6.4) Un cuerpo de 20kg resbala sobre un plano inclinado 30° con la horizontal y fricción. Cuál es el valor de la aceleración en m/s^2 si μ = 0.1.

6.5) Dos masas, una de 25kg y la otra de 15kg, cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea ideal, como se muestra en la figura. Si el sistema de masas parte del reposo, encuentre el valor de la aceleración a y de la tensión T de la cuerda que une las masas y la distancia recorrida por las masas en un tiempo de 3 segundos.

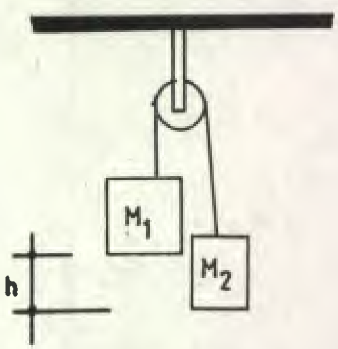


FIGURA 6.17

EJERCICIO 6.5

EJEMPLO 8

Del sistema mostrado en la siguiente figura, encontrar el valor de la aceleración del sistema y la tensión de las cuerdas que une ambas masas, con los siguientes datos:

m_1 = 12 Kg, m_2 = 8 Kg, $\alpha = 37^\circ$ y $\mu = 0.2$

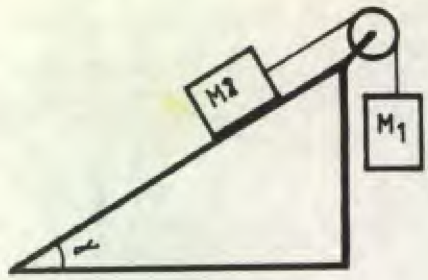


FIGURA 6.18

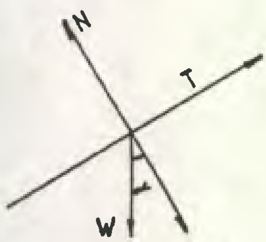
EJEMPLO 8

Diagrama de cuerpo libre para la masa m_1:

$\Sigma F = m \times a$

$w_1 - T = m_1 \times a$ Ecuación 1 (ec. de 1er grado, con dos incógnitas)

Diagrama de cuerpo libre para la m_2 y sus componentes:



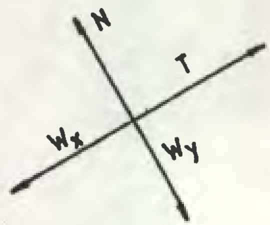


FIGURA 6.19

D. DE C. L. PARA LA M_2 (a) Y SUS COMPONENTES (b)

Componentes de la m_1 en el eje rotado de coordenadas cartesianas

$w_{2x} = w_2 \cdot \text{sen}\ \alpha$ y $w_{2y} = w_2 \cdot \cos \alpha$

$\Sigma F_x = m_2\ a$

$T - w_{2y} - f = m_2\ a$ Ecuación 2 (ec. de 1er. grado con dos incognitas, las cuales son las mismas de la ec. 1). Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{l} w_1 - t = m_1 a \\ \underline{t - w_{2x} - f = m_2 a} \\ w_1 - w_{2x} - f = (m_1 + m_2)\, a \end{array}$$

$$\frac{w_1 - m_{2x} - f}{m_1 + m_2} = a$$

substituyendo:

$m_1 g - m_2 g \,.\, \text{sen}\, \alpha - \mu\, m_2 \,.\, \cos \alpha$ por $w_1 - w_{2x} - f$

nos quedan los siguientes valores:

$$\frac{12\ Kg\ 10\ m/s - 8\ Kg\ 10\ m/s\ 0.6 - 0.2\ (8\ Kg)\ 10\ m/s\ 0.8}{12\ Kg + 8\ Kg}$$

Realizando las operaciones indicadas:

$a = 2.96\ m/s^2$

Para encontrar T utilizamos la ecuación 1:

$w_1 - T = m_1 a \quad \therefore\ T = w_1 - m_1 a$ substituyendo valores:

$T = 12\ Kg\ 10\ m/s^2 - 12\ Kg\ 2.96\ m/s^2$

$T = 84.48$ nt.

EJERCICIO 6.6

De la siguiente figura encuentre los valores para la aceleración del sistema asi como la tensión que une las masas.

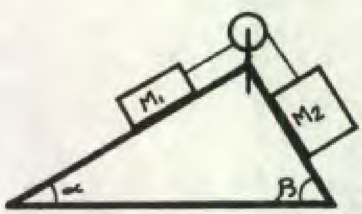


FIGURA 6.20

EJERCICIO 6.6

Datos: $m_1 = 25$ Kg, $m_2 = 15$ Kg, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ y el coeficiente de fricción cinètico entre las masas y la superficie es de 0.15 ($\mu k = 0.15$) .

INTRODUCCION

Para los cursos de física, asi como para toda la linea de estructuras en la carrera de arquitectura, es necesario dominar ampliamente las operaciones fundamentales del campo de los números reales, asi como operaciones de potenciación, trigometria, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, y ecuaciones simultaneas, para lo cual se ha introducido tres apendices con información basica sobre estos temas asi como el alfabeto Griego de necesario conocimiento en estos cusos

APENDICE 1

Operaciones de potenciación de base 10 (potencias sucesivas de base 10)

NOTA: la base 10 esta dada por la letra a y la potencia por las letras n y m (n y m). Asi, a^n significa, la base 10 elevada a la enesima potencia.

Multiplicación:

$$a^n (a^m) = a^{n+m}$$

División:

$$a^n / a^m = a^{n-m}$$

Potenciación:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Radicación:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$$

APENDICE 2

Trigonometría:

Funciones trigonometricas (relaciones entre los lados y los ángulos de un triangulo).

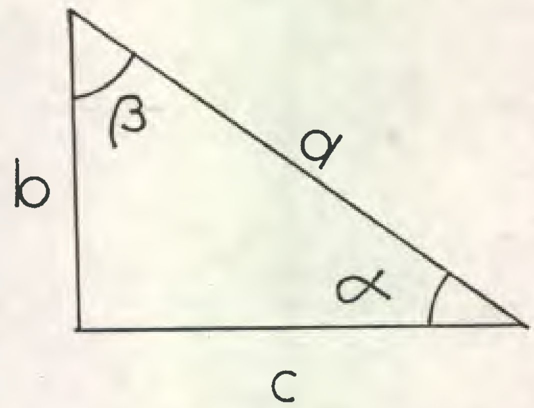


FIGURA APENDICE 2

Sean a, b y c los lados de un triángulo rectangulo (a=hipotenusa) y α y β los ángulos diferentes de 90^{o}, entonces se define:

Seno α = sen α = b/a

Coseno α = cos α = c/a

Tangente α = tg α = b/c

Seno β = sen β = c/a

Coseno β = cos β = b/a

Tangente β = tg β = c/b

De donde: sen α = cos β y

cos α = sen β.

Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$

Fórmula cuadrática:

Si tenemos una ecuación de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

APENDICE 3

ALFABETO GRIEGO

LETRA	MAYUSCULA	MINUSCULA
ALFA	A	α
BETA	B	β
GAMMA	Γ	γ
DELTA	Δ	δ
EPSILON	E	ε
ZETA	Z	ζ
ETA	H	η
THETA	Θ	θ
IOTA	I	ι
KAPPA	K	$\varkappa$
LAMBDA	Λ	λ
MU	M	μ
NU	N	ν
CSI	Ξ	x
OMICRON	O	o
PI	Π	π
RHO	P	ρ
SIGMA	Σ	σ
TAU	T	τ
IPSILON	Υ	υ
FI	Φ	ϕ
XI	X	χ
PSI	Ψ	ψ
OMEGA	Ω	ω

Vo.Bo.

Lic. Oscar Castañeda Taracena

ASESOR

Hèctor Hugo Jimènez Martinez

SUSTENTANTE

IMPRIMASE:

Arq. Francisco Chavarria Smeaton

DECANO