

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA



**APLICACIÓN DE UN MODELO DE PROBABILIDAD EN LA GESTIÓN DE UN
PORTAFOLIO DE INVERSIÓN COMPUESTO POR ACCIONES DE COMPAÑÍAS
COTIZADAS EN EL MERCADO BURSÁTIL**



AUTOR:

LIC. JUAN ESTEBAN BOESCHE ZUMETA

Guatemala, 24 de septiembre de 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA



**APLICACIÓN DE UN MODELO DE PROBABILIDAD EN LA GESTIÓN DE UN
PORTAFOLIO DE INVERSIÓN COMPUESTO POR ACCIONES DE COMPAÑÍAS
COTIZADAS EN EL MERCADO BURSÁTIL**

Informe final del trabajo profesional de graduación para la obtención del Grado de Maestro en Artes, con base en el "Instructivo para elaborar el Trabajo Profesional de Graduación para Optar al Grado Académico de Maestro en Artes", aprobado por Junta Directiva de la Facultad de Ciencias Económicas, el 15 de octubre de 2015, según Numeral 7.8 Punto SEPTIMO del Acta No. 26-2015 y ratificado por el Consejo Directivo del Sistema de Estudios de Postgrado de la Universidad de San Carlos de Guatemala, según Punto 4.2, subincisos 4.2.1 y 4.2.2 del Acta 14-2018 de fecha 14 de agosto de 2018.

AUTOR:

LIC. JUAN ESTEBAN BOESCHE ZUMETA

Guatemala, 24 de septiembre de 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

HONORABLE JUNTA DIRECTIVA

Decano:	Lic. Luis Antonio Suárez Roldán
Secretario:	Lic. Carlos Roberto Cabrera Morales
Vocal Primero:	Lic. Carlos Alberto Hernández Gálvez
Vocal Segundo:	MSc. Byron Giovanni Mejía Victorio
Vocal Tercero:	Vacante
Vocal Cuarto:	Br. CC. LL. Silvia María Oviedo Zacarías
Vocal Quinto:	P.C. Omar Oswaldo García Matzuy

TERNA QUE PRACTICÓ LA EVALUACIÓN DEL TRABAJO PROFESIONAL DE GRADUACIÓN

Coordinaro: MSc. Hugo Armando Mérida Pineda

Evaluador: Ph D. Silvia Rocío Quiroa Rabanales

Evaluador: MSc. Carlos Enrique Calderón Monroy

ACTA/EP No. **1361**

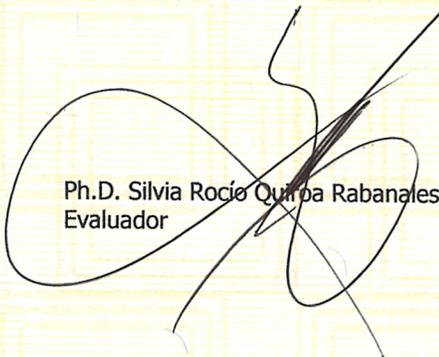
ACTA No. MAF-D-005-2020

De acuerdo al estado de emergencia nacional decretado por el Gobierno de la República de Guatemala y a las resoluciones del Consejo Superior Universitario, que obligaron a la suspensión de actividades académicas y administrativas presenciales en el campus central de la Universidad, ante tal situación la Escuela de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ciencias Económicas, debió incorporar tecnología virtual para atender la demanda de necesidades del sector estudiantil, en esta oportunidad nos reunimos de forma virtual los infrascritos miembros del Jurado Examinador, el **20 de septiembre de 2,020**, a las **12:00** para practicar la PRESENTACIÓN DEL TRABAJO PROFESIONAL DE GRADUACIÓN del Licenciado **Juan Esteban Boesche Zumeta**, carné No. **200321177**, estudiante de la Maestría en Administración Financiera de la Escuela de Estudios de Postgrado, como requisito para optar al grado de Maestro en Artes. El examen se realizó de acuerdo con el Instructivo para Elaborar el Trabajo Profesional de Graduación para optar al grado académico de Maestro en Artes, aprobado por la Junta Directiva de la Facultad de Ciencias Económicas, el 15 de octubre de 2015, según Numeral 7.8 Punto SÉPTIMO del Acta No. 26-2015 y ratificado por el Consejo Directivo del Sistema de Estudios de Postgrado -SEP- de la Universidad de San Carlos de Guatemala, según Punto 4.2, subincisos 4.2.1 y 4.2.2 del Acta 14-2018 de fecha 14 de agosto de 2018. Cada examinador evaluó de manera oral los elementos técnico-formales y de contenido científico profesional del informe final presentado por el sustentante, denominado **"APLICACIÓN DE MODELOS DE PROBABILIDAD PARA LA GESTIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN COMPUESTO POR ACCIONES DE COMPAÑÍAS COTIZADAS EN EL MERCADO INTERNACIONAL"**, dejando constancia de lo actuado en las hojas de factores de evaluación proporcionadas por la Escuela. El examen fue **APROBADO** con una nota promedio de **70** puntos, obtenida de las calificaciones asignadas por cada integrante del jurado examinador. El Tribunal hace las siguientes recomendaciones: **Que el sustentante incorpore las enmiendas señaladas dentro de los 5 días hábiles.**

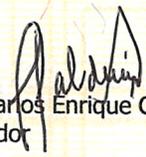
En fe de lo cual firmamos la presente acta en la Ciudad de Guatemala, a los 20 días del mes de septiembre del año dos mil veinte.



MSc. Hugo Armando Mérida Pineda
Coordinador



Ph.D. Silvia Rocío Quiroa Rabanales
Evaluador



MSc Carlos Enrique Calderón Monroy
Evaluador



Juan Esteban Boesche Zumeta
Postulante



**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**

ADENDUM

El infrascrito Presidente del Jurado Examinador CERTIFICA que el estudiante Juan Esteban Boesche Zumeta, incorporó los cambios y enmiendas sugeridas por cada miembro examinador del Jurado.

Guatemala, 16 de octubre de 2020.

(f) 

MSc. Hugo Armando Mérida Pineda
Coordinador

AGRADECIMIENTOS

En las líneas introductorias de su obra magna “Acción Humana”, al respecto de la teoría económica y la *praxis*, Ludwig von Mises acierta en advertir: “*no existe tal cosa como la perfección en cuanto a los conocimientos del hombre, como tampoco lo existe para cualquier otro tipo de conquista humana*”. Mises (1998) p. 7. Con nada más que admiración y respeto por el citado autor y su brillante obra; por el éxito y grado de excelencia, alcanzado en el informe a presentar en la próxima centena y media de páginas, me permito hacer mención especial de los siguientes agradecimientos:

A Dios:

Por concederme todo aquello de lo que un hombre pudiera precisar para considerarse feliz a plenitud: el amor de una familia, la compañía de amigos y compañeros de bien, un entorno lleno de inspiración, vida, salud, y sabiduría para en todo ello regocijarme.

A mi familia:

Por cuanto sin su incondicional apoyo durante toda mi existencia, desde el primero de mis días, hasta el presente; pocos o ninguno de mis anhelos se hubiesen acompañado de las condiciones necesarias para encauzarse, perseguirse, intentarse, y muchas veces fallar; pero suficientes, como en este caso, felizmente llegar a concluir con éxito.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala:

Que en su misión como formadora de profesionales, ha puesto al servicio de todos aquellos quienes con seriedad se lo propongan, todos los medios y herramientas necesarias para realizarse académicamente, en los diversos campos del saber.

A la Escuela de Estudios de Posgrado de CCEE:

Por la oportunidad de formarme en las competencias de mi área de especialidad, y en especial a la Licda Msc Silvia Barco, al Dr. Alfredo Subillaga, y al Lic. Msc. Jonny García; por sus valiosa asesoría y excelente atención en la realización del presente trabajo.

CONTENIDO:

	<i>Página</i>
RESUMEN	i
INTRODUCCIÓN	iii
1 ANTECEDENTES	1
1.1 Antecedentes del mercado de acciones	1
1.2 Antecedentes de la perspectiva teórica	5
1.3 Enfoque del Valor Firme	7
1.4 Enfoque de Expectativas	8
1.5 Teoría del Mercado Eficiente	10
1.6 Teoría del Ciclo Económico	12
2 MARCO TEÓRICO	14
2.1 Mercado de acciones	14
2.2 Teoría de Portafolio Moderno	16
2.3 Teoría de Probabilidades	17
2.4 Modelo de Probabilidad de Distribución Uniforme	20
2.5 Modelo de Probabilidad de Distribución Normal	22
2.6 Herramientas cuantitativas para la evaluación de acciones	26
2.6.1 Construcción de series históricas	26
2.6.2 Rendimiento de un periodo simple	28
2.6.3 Expectativa de rendimiento	31
2.6.4 Varianza y desviación estándar	33
2.6.5 Coeficiente de variación	34
2.6.6 Covarianza y coeficiente de correlación	35
2.6.7 Volatilidad de la acción	39
2.7 Herramientas cuantitativas para análisis de portafolio	41
2.7.1 Rendimiento esperado de un portafolio	42
2.7.2 Riesgo total de un portafolio	42
2.7.3 Metodología para matriz de covarianza y correlación	49

2.7.4	Perfil de riesgo del portafolio	52
2.7.5	Rendimiento ajustado al riesgo de portafolio	52
2.7.6	Volatilidad del portafolio	52
2.8	Herramientas cuantitativas para gestión de portafolio	53
2.8.1	Propuesta analítica para selección de activos	53
2.8.2	Colocación óptima de capital	57
2.8.3	Determinación de portafolio de riesgo mínimo	58
2.8.4	Determinación de portafolio de riesgo óptimo	61
2.8.5	Distribución normal para estimación de resultados	68
2.8.6	Rendimiento activo del portafolio	71
2.8.7	Valor absoluto en riesgo	74
2.8.8	Estimación paramétrica del valor absoluto en riesgo	75
2.8.9	VaR por simulación histórica y pesos decrecientes	77
2.8.10	Aplicación modelos de probabilidad para simulación Monte Carlo	85
3	METODOLOGÍA	89
3.1	Definición del problema	89
3.1.1	Especificación del problema, temas y subtemas	89
3.2	Objetivos: Objetivo general y Objetivos específicos	90
3.3	Delimitación del problema	91
3.3.1	Punto de vista	91
3.3.2	Unidad de análisis	91
3.3.3	Periodo histórico	91
3.3.4	Ámbito geográfico	91
3.3.5	Universo	92
3.3.6	Muestra	92
3.4	Diseño de investigación	92
3.4.1	Metodología de investigación	93
3.5	Resumen del proceso de investigación	93

3.5.1	Recolección de información de mercado	94
3.5.2	Organización y análisis de la información	94
3.5.3	Interpretación de resultados para toma de decisiones	94
3.6	Instrumentos y técnicas de investigación	94
4	PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	95
4.1	Resultados de la fase de evaluación de acciones	96
4.1.1	Comportamiento del mercado en el periodo evaluado	96
4.1.2	Resumen comparativo de herramientas cuantitativas	102
4.2	Resultados del análisis y gestión de portafolio	105
4.2.1	Selección de combinaciones de dos acciones	105
4.2.2	Determinación de colocación óptima de capital en acciones	109
4.2.3	Resumen comparativo de portafolios evaluados	112
4.2.4	Proyección de rendimiento para trimestre	117
4.3	Evaluación de desempeño del portafolio	119
4.3.1	Periodo de actividad y evaluación de desempeño	119
4.3.2	Resultados comparativos durante el periodo de actividad	120
4.3.3	Evolución de pesos componentes	123
4.3.4	Cumplimiento de expectativas y proyecciones realizadas	125
4.4	Consideraciones finales	128
	COCLUSIONES	131
	RECOMENDACIONES	133
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
	ANEXOS	140
	ÍNDECE DE TABLAS Y FIGURAS	164

RESUMEN

La incertidumbre presente en el comportamiento del mercado de acciones, supone dificultad para la toma de decisiones de inversión por parte del administrador financiero. En atención a tal dificultad, se planteó responder a la interrogante central sobre ¿cómo la aplicación de herramientas cuantitativas y modelos de probabilidad, incide en la toma de decisiones de inversión para la gestión de un portafolio compuesto por acciones, en función de maximizar el rendimiento ajustado al riesgo del capital invertido?

Para responder a dicha interrogante se formuló un objetivo central sobre: establecer una metodología que permita facilitar la toma de decisiones de inversión, para la gestión óptima de un portafolio compuesto por acciones. Para cubrir los aspectos principales de dicho objetivo, se formularon tres objetivos específicos: 1) definir los lineamientos para la integración del portafolio, 2) determinar el valor práctico de la aplicación del modelo propuesto, y 3) definir los factores que inciden en el éxito o fracaso del modelo. Para materializar tales objetivos, se planteó un diseño de investigación bajo un enfoque estrictamente cuantitativo, consistente de tres fases: recolección y organización de información, análisis de portafolio, y comparativo de resultados en el ejercicio.

En la primera de las tres fases mencionadas, se realizó la evaluación de 16 acciones por medio de la organización de series históricas para el periodo del 18 de abril del 2019, al 16 de abril del 2020. Posteriormente, con la información provista por las series históricas, se procedió al análisis de las combinaciones de acciones con mayor potencial de optimización, para lo cual se desarrolló una metodología propia identificada como Matriz de Adecuación; se determinó la distribución óptima de capital entre los dos activos seleccionados mediante una función de optimización basada en el rendimiento ajustado al riesgo, y se realizaron las proyecciones de rendimiento para un trimestre. Finalmente, se procedió al ejercicio del portafolio en el trimestre del 17 de abril al 17 de julio del año 2020, comparándose el desempeño del portafolio construido, tanto contra las estimaciones realizadas, como contra el desempeño del mercado y dos portafolios de control; uno de ellos integrado heurísticamente por las dos acciones que presentaron el mínimo riesgo, y el otro integrado en partes iguales por las 16 acciones evaluadas.

El portafolio que se determinó óptimo en la fase de análisis, se constituyó con las acciones de Barrick Gold Corporation (GOLD) en un 62%, y las acciones de Zoom Video Communications Inc (ZM) en un 38%; con lo que se determinó una expectativa de rendimiento diario de 0.3540% y una expectativa de rendimiento ajustado al riesgo de 15.18%; en ambos casos superiores a las alternativas evaluadas y al índice de mercado de referencia (S&P500). Mediante simulación Monte Carlo de 1,000 iteraciones, para cada día en la secuencia de 64 eventos aleatorios únicos e independientes, se proyectó una rentabilidad total de 26% para el horizonte de inversión de un trimestre (abril-junio).

El resultado de la evaluación de desempeño en la fase final del estudio fue concluyente: a la fecha de cierre, el 17 de julio del año en curso, se consiguió ubicarse en un rango aceptable respecto a la expectativa de rendimiento, superándola en 0.10% en promedio. Notablemente, se aproximó con precisión la estimación de rendimiento ajustado al riesgo proyectada de 15.18%, registrándose 15.80%. Si bien no se materializó el rendimiento activo esperado, es decir el exceso de rendimiento sobre el mercado, estimado en 0.35%, sí se obtuvo un desempeño superior diario, aventajándole en 0.14% puntos porcentuales. Se superó la rentabilidad total generada por el mercado, obteniéndose una rentabilidad de 29.97% en el trimestre de ejercicio, 14.79 puntos porcentuales por encima del índice de referencia. Se cumplió con la expectativa de rendimiento ajustado al riesgo del portafolio, obteniéndose en la práctica un 15.80%, frente al 15.18% estimado en el modelo analítico, lo que representó una precisión de 96% respecto al pronóstico. La proyección de rentabilidad, estimada mediante la aplicación de los modelos de probabilidad, probó ser lo bastante precisa, presentando una variación media de 6.39% en cada observación respecto a los valores pronosticados. Por lo anterior, el resumen de las conclusiones es, que se confirma el valor práctico de la aplicación de la metodología desarrollada, llamada Matriz de Adecuación, la cual, junto con las herramientas cuantitativas y modelos de probabilidad para la gestión óptima de un portafolio, aporta consistencia, objetividad y practicidad a la toma de decisiones de inversión.

Finalmente, se recomienda la continuidad de estudios estadísticos en diversos temas, como el análisis de correlación entre portafolios, para generalizar las conclusiones formuladas, y validar o cuestionar la aplicación de la metodología propuesta.

INTRODUCCIÓN

Muchas personas argumentan que el pequeño inversionista tiene escasamente alguna posibilidad frente a gestores de fondos institucionales, afincados en imponentes oficinas de los más conspicuos rascacielos de Manhattan, enlazados con “prime brokers” de los principales bancos en Wall Street –centro mundial de la industria financiera. Se afirma que las tecnologías modernas de las cuales se sirven los más vanguardistas fondos de inversión, tales como algoritmos computarizados de balanceo automático de portafolio, dejan fuera de competencia a modestos fondos sin el músculo financiero para acceder a tales innovaciones. Se esgrime que, ante la complejidad de los mercados actuales, y la existencia de prácticas delictivas en el uso de información privilegiada, aquellos aspirantes a invertir “insignificantes” sumas de capital propio, pueden hacer poco más que ser espectadores en la danza multimillonaria de un indiferente mercado cooptado. No obstante, a pesar de tan lúgubres aseveraciones, la historia ofrece una narrativa mucho más optimista para quienes hacen meticuloso manejo de sus inversiones, sean éstas de grande o pequeña cuantía. Han sido pues, en mayor medida, pequeños inversionistas más acuciosos quienes han superado con solvencia descabros bursátiles, como los ocurridos durante la ya lejana crisis financiera de 2008, que atestiguó el fatídico destino de colosales instituciones comprometidas por abrumadores niveles de apalancamiento, e instrumentos derivados tan complejos, que ni sus mejor remunerados analistas pudieron fielmente comprender.

Sí, los mercados financieros son organismos complejos, en virtud de que en ellos concurren las necesidades, percepciones, expectativas, sueños, fantasías –y sin duda hasta fechorías– de un sin número de participantes. El riesgo que posa la incertidumbre sobre quienes se aventuran a incursionar en ellos, sin la debida medida de entendimiento, es real e inminente –sin importar cómo pretendan algunos publicistas frecuentemente caricaturizarle. No obstante, sin pretender sabiduría absoluta en la materia, sino de hecho todo lo contrario, el presente trabajo de graduación, en la especialidad de maestría en administración financiera, pretende dotar al profesional de las finanzas, de un sólido entendimiento, si no del mercado y su casi arbitrario funcionamiento, cuando menos; de las herramientas cuantitativas aplicables para

afrontar la toma de decisiones respecto a oportunidades de inversión que puedan presentarse eventualmente a su alcance, desde una perspectiva objetiva fundamentada en criterios analíticos, que si bien no presentan garantía alguna de exactitud; categóricamente han de incrementar las probabilidades de éxito. En atención a ello, el informe aquí presentado, se compone de 4 capítulos, en los que se ha hecho el mejor esfuerzo por exponer de forma detallada y con el mayor rigor matemático posible, el proceso que permita responder a la interrogante fundamental que motivó el presente estudio: ¿Cómo la aplicación de herramientas cuantitativas y modelos de probabilidad, puede facilitar la toma de decisiones de inversión para la gestión óptima de un portafolio compuesto por acciones?

En el capítulo 1. Antecedentes; se reseña la historia y evolución del mercado de acciones, desde sus orígenes en el siglo XVI, hasta algunas de sus más notables caídas a la fecha. Para luego, conocer algo sobre los esfuerzos teóricos que se han realizado con el fin de explicar el comportamiento fluctuante de los precios.

En el capítulo 2. Marco Teórico; se realiza una exposición exhaustiva de las herramientas cuantitativas aplicables y la propuesta metodológica para atender el proceso de integración de portafolio, que posibilita seleccionar las combinaciones óptimas de dos acciones en términos de rendimiento ajustado al riesgo. Para luego, determinar la distribución óptima de capital, y finalmente, estimar los resultados de su implementación.

En el capítulo 3. Metodología de investigación; se describen los objetivos formales del trabajo y el diseño de la investigación para alcanzar sus fines.

Finalmente, en el capítulo 4. Presentación de Resultados; se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de las herramientas expuestas, obteniéndose un portafolio teóricamente óptimo; para finalmente, evaluar su desempeño mediante un análisis comparativo. Por último, se comunican las conclusiones formuladas, en las cuales se sugiere la virtud de las herramientas propuestas. Recomendándose, finalmente, la continuidad de estudios estadísticos para ampliar las posibilidades del modelo y generalizar, o bien cuestionar la validez de su aplicación en la práctica a mayor escala.

1. ANTECEDENTES

El ágil movimiento de capitales en una economía es de suma importancia para el desarrollo del aparato productivo doméstico, al propiciar el óptimo aprovechamiento de los factores de producción. Puesto de forma sencilla; una economía en la cual los emprendedores se hallan en la posibilidad de acceder al capital necesario para la financiación de sus presupuestos, de una forma oportuna y económicamente razonable, tiene mayores probabilidades de ampliar sus capacidades productivas y de innovación. Lo cual, puede traducirse en la generación de nuevas plazas de trabajo competitivamente remuneradas, a disposición de la fuerza laboral. Ello permitiendo, el mejoramiento en las condiciones de vida y el bienestar de la población en general.

Para que dicho ciclo virtuoso de movilidad del capital realmente llegue a tener lugar, es preciso que se presenten condiciones favorables en un entorno institucional que efectivamente lo propicie y estimule en primer lugar. Tal es el rol que juegan los mercados de capitales en la economía, y dentro de estos en particular, el mercado de acciones de cotización bursátil, el cual se describirá brevemente como parte de los antecedentes del sector objeto estudio. Seguidamente, se realiza una reseña de su comportamiento histórico y dinámica de precios, como parte de los antecedentes de la perspectiva teórica. Finalmente, se exploran los principales enfoques que han pretendido explicar la mecánica subyacente en la evolución de las cotizaciones y las diferentes perspectivas al respecto de ¿si es posible o no, anticiparles? –o cuando menos– entenderles con algún grado de propiedad. Todo ello ha de servir de base para el entendimiento de las herramientas de análisis luego expuestas en el capítulo siguiente.

1.1 Antecedentes del Mercado de Acciones de Cotización Bursátil:

Antes de conocer algo sobre la historia del mercado de acciones, y su evolución hasta la fecha, permítase iniciar esta exposición, arribando a una clara definición del concepto “mercado de acciones”, facilitando un entendimiento común al adentrarse paulatinamente en las líneas del presente trabajo. Para ello, se definen los dos componentes del objeto de estudio: el mercado, y las acciones:

En un sentido práctico, el mercado es aquella organización en la que concurren oferentes y demandantes de mercancías para su intercambio, mediante acuerdos de mutua aceptación entre participantes. El concepto de mercado se extiende a cualquier contexto en el cual compradores y vendedores, lleven a cabo transacciones de compra y venta, usualmente facilitadas por el uso del dinero. (Gitman, 2017)

Por su parte, las acciones –en el sentido financiero y empresarial– se refieren a unidades que representan la propiedad igualmente fraccionada en una compañía. Dichas unidades de propiedad, transfieren a su propietario derechos proporcionalmente fraccionados sobre el patrimonio y los beneficios generados por la compañía o corporación de que se trate, una vez cumplida la totalidad de los compromisos financieros adquiridos por la misma. (Basley & Brigham, 2008)

Las acciones de una compañía o corporación cotizada públicamente, pueden ser adquiridas por cualquier persona, confiriéndose a quien quiera que esta persona sea, los derechos que le corresponden, que son equivalentes a los de cualquiera otra de sus unidades fraccionarias. Lo anterior expresa el principio de fungibilidad de las acciones.

De acuerdo con lo anterior se construye la definición de mercado de acciones, como aquella organización que congrega a oferentes y demandantes, para la realización de operaciones de compra, venta y emisión de acciones, usualmente cotizadas dentro de una casa de intercambio o bolsa de valores.

Las principales bolsas de valores proporcionan al mercado una plataforma donde las empresas pueden obtener fondos a través de la emisión y venta de acciones para financiar sus proyectos de expansión, y donde los compradores de dichas acciones pueden fácilmente ponerlas a su vez a la venta en la medida que lo consideren conveniente, convirtiéndose así, ellos mismos, en vendedores en el mercado secundario.

En función de lo anterior, corresponde distinguir que las bolsas de valores dan soporte a la actividad del mercado de acciones, pero no constituyen el mercado en sí mismas, puesto que dichas instituciones negocian una variedad adicional de activos financieros; bonos, materias primas, divisas, y todos sus muy diversos instrumentos derivados.

Las bolsas de valores tienen el llamado a crear mercados transparentes y líquidos, que proporcionan a empresas e inversionistas alternativas de financiamiento e inversión, bajo condiciones de certeza y legitimidad para el cumplimiento de los términos de intercambio de las transacciones dentro de ellas llevadas a cabo. Propiciando también eficiencia en la distribución de fondos hacia los destinos más productivos y de mayores índices de rentabilidad, donde la competencia continua entre los participantes, determina y comunica el precio para cada uno de los valores negociados.

El origen del mercado de acciones comúnmente se asocia con la ciudad de Antwerp y la acaudalada familia de los Van der Buerze, en Países Bajos del siglo XVI; de allí el término acuñado que hace referencia a tales organizaciones como “Buerzen” –traducido al español como bolsas– refiriéndose a foros donde se lleva a cabo el intercambio de valores, o actividad bursátil. (CTI-INVEST, 2019)

La primera compañía cuyas acciones se negociaron públicamente fue la *East India Trade Company*, en lo que fue la vanguardia del comercio europeo con el lejano Oriente. El alto costo de emprender largas travesías marítimas y el riesgo al que se exponían los comerciantes, les motivó a emitir títulos que ofrecían a sus compradores participación en las riquezas a generarse de tener éxito la arriesgada empresa (Ferguson, 2008). De tal forma, se gestó el inicio del mercado de acciones, como un mecanismo de financiamiento de aventuras empresariales con particularmente alto nivel de incertidumbre. (Hur, 2016)

En la actualidad, los 6 principales países donde se distribuye el mercado de acciones mundial son: Estados Unidos de América (53%), Japón (8.4%), Reino Unido (5.5%), China (3.4%), Francia (3.3%) y Alemania (2.8%). La casa de intercambio o *bolsa de valores* más importante por volumen y capitalización de mercado es la Bolsa de Valores de Nueva York NYSE (New York Stock Exchange), con un valor de aproximadamente 24 billones de dólares en acciones cotizadas, superior a la suma de las 3 casas de bolsa que le siguen: NASDAQ, American Stock Exchange y Bolsa de Valores de Canadá. (Szmigiera, Stock Exchanges - Statistics & Facts, 2019)

La primera casa de intercambios, formalmente organizada con el propósito de negociar títulos de acciones de múltiples compañías, fue la Bolsa de Valores de Londres LSE, oficialmente establecida en el año de 1773. Sirviendo de escenario para la primera burbuja especulativa en el contexto bursátil, durante el auge del comercio transoceánico, colapsando con la falla de dividendos prometidos por la *South Seas Trading Company*. Lo que originó una precipitada caída en los valores, motivada por la pérdida de confianza generalizada, con el consiguiente desplome bursátil. (Beattie, 2020)

En el contexto anteriormente descrito, la Bolsa de Valores de Londres implementó una restricción a la emisión de nuevos títulos accionarios, que persistió hasta el año de 1825; período durante el cual el foco de actividad del mercado de capitales se trasladó al otro lado del atlántico, con el establecimiento de la primera casa de intercambio en el nuevo continente: la Bolsa de Valores de Filadelfia en 1790. Dos años más tarde (1792), comerciantes de títulos valores asociados firmaron el "*Button Wood Tree Agreement*" por medio del cual, constituyeron lo que 25 años después (1817), se daría a conocer como la Bolsa de Valores de Nueva York, que en pocos años llegaría a constituirse en el referente de facto de la industria financiera a nivel mundial. (Kenton, New York Stock Exchange (NYSE), 2020)

Actualmente, la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE), cotiza aproximadamente 2,800 compañías, con un volumen de comercio entre 2 y 6 millardos de acciones cada día en promedio (Balboa, 2019) cifra desproporcionada al número de compañías listadas en los principales índices de mercado: 30 en el Dow Jones, 500 en el S&P500 y 100 en el NASDAQ100, sin contar que muchas de ellas repiten en más de un índice.

Las tres compañías más antiguas listadas actualmente en la NYSE son: *Consolidated Edison Company*, constituida en 1823, bajo el nombre de *New York Gas Light Company*, que ofrecía originalmente el servicio de suministro de gas para iluminación y calefacción por medio de tuberías domiciliarias, listada públicamente en la Bolsa de Nueva York en 1824, expandiendo sus operaciones a la producción y suministro de energía eléctrica, por lo que finalmente, luego de más de cien años, adoptaría el nombre comercial de *Consolidated Edison Company*. 2) *Lloyd's*, compañía de seguros, cuyos orígenes se

remontan al establecimiento de una cafetería en Londres en el año de 1688, donde también se ofrecían seguros a los navíos de los comerciantes marítimos que por aquel entonces crecían en importancia. 3) IBM, o *International Business Machines*, la bien conocida compañía de computadores, fundada ya hace más de 100 años bajo el nombre original de *Computing Tabulating and Recording Company*, por el financiero Charles Ranlett Flint, el 16 de junio de 1911. (Brown, 2019)

1.2 Antecedentes de la perspectiva teórica:

Sin importar el mercado del que se trate, el mecanismo de operación es el mismo para todos. Oferentes y demandantes, o lo que es igual, vendedores y compradores, interactúan por medio de una subasta continua de doble entrada, con la consecuente determinación de un precio, al cual están dispuestos, unos a vender sus títulos y otros a adquirirlos. Así, el precio de cualquier título del que se trate –acciones en el caso a estudiar– fluctúa constantemente como resultado de las distintas decisiones de compra y venta que distintos vendedores y compradores están dispuestos a tomar durante las jornadas de negociación en la bolsa de valores. En el transcurso de una jornada se alcanzará un precio máximo y un precio mínimo, esto es; el precio más elevado al cual una transacción fue efectivamente ejecutada y viceversa. La brecha entre ambos, máximo y mínimo, es el rango del día. Tradicionalmente, en la mayoría de los mercados, la jornada de negociaciones se abre los días entre semana a las 9:00 horas y se cierra a las 16:00 horas. La primera transacción que se opere en una jornada marcará el precio de apertura, y la última transacción en ejecutarse durante la misma, marcará el precio de cierre. El mercado se dirá está al alza, si el precio al cierre es mayor que el precio de apertura, y a la baja si se presenta lo contrario. (Hayes, *How Does the Stock Market Work?*, 2020)

En consecuencia, de la actividad de precios anteriormente descrita, en el mercado pueden presentarse comportamientos sucesivos que sugieren una tendencia, la cual puede ser al alza; cuando se presentan un mayor número de jornadas alcistas en sucesión, o a la baja; cuando se presenta lo contrario. Existen también etapas transitorias

entre una y otra, caracterizadas por intermitencia en los precios, sin una tendencia claramente manifiesta. (Rhea, 2018)

Distintas aproximaciones teóricas pretenden explicar y anticipar el comportamiento anteriormente descrito, siendo posible agruparlas en dos categorías, a saber: la perspectiva del análisis fundamental y la perspectiva del análisis técnico. La primera centra su foco de atención en el valor intrínseco de las compañías, fruto de su desempeño financiero. La segunda atribuye un mayor grado de importancia a la identificación de patrones de comportamiento recurrentes y correlacionados en cuanto a la toma de decisiones de compra y venta, lo que moviliza el precio de las compañías, con cierta independencia de sus resultados financieros. (Malkiel, *A Random Walk Down Wall Street*, 2019)

Independientemente de la perspectiva teórica por medio de la cual se pretenda abordar el estudio del comportamiento de precios, derivado de la acción constante de las fuerzas de oferta y demanda en el mercado de acciones, vale la pena conocer algunos eventos que han demarcado la configuración de los criterios para la toma de decisiones de los agentes económicos en distintos momentos de la historia.

Posiblemente la primera experiencia de la que se tiene recuento, en torno al comportamiento del precio de títulos valores derivado de factores especulativos, es la famosa burbuja del tulipán, desencadenada en los países bajos de la primera mitad del siglo XVII. En aquellos años, el comercio de la delicada flor, se desarrolló principalmente por medio de “títulos” que acreditaban al comprador el derecho de poseer una determinada cantidad de tales flores luego de estas ser cultivadas por especialistas en la materia. El precio de los referidos títulos valores adquirió un vertiginoso comportamiento al alza, que motivó a cientos de acaudalados a depositar sus fortunas en este mercado, con la expectativa, no de poseer la flor, sino de multiplicar sus ganancias, al venderlas a precios muy por encima del costo de adquisición del título. Finalmente, la producción de tulipanes, alimentada por la especulación de su valor futuro, superó la demanda efectiva del ornamento una vez disponible en el mercado, y su valor colapsó repentinamente en el año de 1637, borrando de una pasada las fortunas y

expectativas de miles de holandeses muy acomodados de la época. En su auge, se conoce que hubo quienes incluso llegaron a vender sus granjas, castillos y otros inmuebles, con el propósito de adquirir una sola flor de tulipán. (Malkiel, *A Random Walk Down Wall Street*, 2019)

En la historia reciente, la caída de la bolsa de 1929, generó una pérdida de más del 50% del valor del índice industrial Dow Jones. El 20 de octubre de 1987, se registró la mayor pérdida de la historia en una sola sesión, perdiéndose 22% al cierre del mercado, puerta a una recuperación histórica durante la década de los 90 (Mishkin, 2016). En cuanto al precio instantáneo de las acciones y diversos instrumentos cotizados en bolsa, su determinación se remite a la concurrencia de las fuerzas de oferta y demanda. Sin embargo, el comportamiento de dicho precio, y la capacidad –o incapacidad– de anticiparsele, corresponde al argumento de valoración que para tales activos pretenda aplicarse. A continuación, se describen en breve y de manera preliminar, los principales enfoques que han pretendido explicar el comportamiento del precio de las acciones cotizadas en el mercado bursátil:

1.3 Enfoque de la Fundación Firme o Valor Intrínseco:

En el enfoque de fundación firme, se argumenta que cada instrumento de inversión, sea la acción de una compañía cotizada en bolsa o una propiedad inmueble, tiene su precio firmemente anclado a una noción de “valor intrínseco”, que puede ser determinado por el meticuloso análisis de sus condiciones presentes y futuros prospectos. (Malkiel, *A Random Walk Down Wall Street*, 2019)

En el lejano año de 1934, poco tiempo después de una de las muchas caídas de bolsa, sufridas en el periodo conocido como la Gran Depresión, Benjamin Graham y David Dodd, ambos profesores de la Escuela de Negocios de la Universidad de Columbia, publicaron una de las obras magnas del análisis fundamental: “*Security Analysis*”, fundamento filosófico de lo que se ha llamado “*value investing*”, proclamando que nada vale más de lo que se puede materialmente obtener de ello. John B. Williams, formalizó el concepto, años más tarde con la publicación de su tesis doctoral en la universidad de

Harvard y posteriormente el libro basada en la misma: “*The Theory of Investment Value*” (1938) introduciendo el concepto del valor presente de beneficios futuros, así popularizando el uso del concepto de flujos descontados (Myers, 2019).

El enfoque de la fundación firme propone que toda vez que un activo se encuentra en el mercado, por debajo o por encima de su valor intrínseco, una oportunidad de compra o bien de venta, se pone de manifiesto para los inversionistas, puesto que eventualmente dicha desviación tenderá a corregirse, aproximando nuevamente su precio al anclaje intrínseco de su valor. (Scherk, 2011)

En cuanto al ramo de las acciones cotizadas en bolsa, se diría que su valor está en función de la capacidad de la compañía de generar beneficios futuros y distribuirlos en forma de dividendos, expresando que cuanto mayores sean los dividendos distribuidos en el presente por una compañía y su tasa de crecimiento, mayores serán las valuaciones que dichas acciones puedan sostener en el mercado. Esta aproximación teórica, atribuye un gran valor a la capacidad de incrementar el nivel de utilidades a generar en periodos futuros, y del diferencial entre las tasas de crecimiento de distintas compañías, se infieren diferentes valuaciones atribuibles en el mercado. (Malkiel, A Random Walk Down Wall Street, 2019)

La metodología de aplicación del Enfoque de la Fundación Firme, se explica a detalle en el libro *Security Analysis* de Graham y Dodd, siendo su más notable discípulo el famoso Warren Buffett.

1.4 Enfoque de las Expectativas:

En contraposición al enfoque del valor firme, se plantea una aproximación que traslada la noción de valor a las percepciones psicológicas prevalentes en los participantes del mercado en un momento determinado. No sorprendentemente, a este enfoque se le conoce como enfoque de expectativas, o bien, puesto en jerga de la industria, la teoría de castillos en el aire.

Uno de los principales expositores del enfoque de expectativas o teoría de castillos en el aire, fue el famoso economista y también exitoso inversionista John Maynard Keynes (1936). Él se inclinó a creer que los inversionistas, aún aquellos de profesión, son guiados por factores psíquicos, que los inducen a construir “castillos en el aire” basados en percepciones generalizadas de optimismo (o pesimismo), visualizando a través de tales estados emocionales la actividad en el mercado.

Keynes dedicó un capítulo completo de su obra magna “Teoría General, del Empleo, el Interés y el Dinero”, al estudio del mercado bursátil y la importancia de las expectativas de los inversionistas. Dicha obra y el enfoque teórico propuesto fue la base que sustentó la política de estímulo económico implementada durante los años posteriores al colapso del mercado financiero de 1929 y la gran depresión que le sucedió. (Malkiel, A Random Walk Down Wall Street, 2019)

El argumento sostenido por Keynes, en el capítulo titulado –El Estado de las Expectativas de Largo Plazo– de su obra fundamental “Teoría General del Empleo, Interés y el Dinero” es, que no existe ninguna certeza en cuanto a las estimaciones de utilidades que las empresas puedan generar, ni mucho menos sobre las condiciones que pueden influenciar sobre los prospectos de pago y distribución de dividendos por parte de las mismas en el futuro. (Keynes, 2018)

Por tal razón, el referido autor sostiene, que la mayoría de los inversionistas están enteramente interesados, no en realizar pronósticos de rendimiento por la totalidad del ciclo de vida de las compañías, sino en anticiparse a cambios en el criterio convencional de valuación percibido a nivel de la industria y el público en general; que puedan suponer una modificación dentro del plazo más inmediato en el precio de los activos en el portafolio. (Malkiel, A Random Walk Down Wall Street, 2019)

En resumen, como su nombre lo advierte, el enfoque de las percepciones, o teoría de Castillos en el Aire, se fundamenta, no en criterios financieros para la explicación del comportamiento del precio de los activos cotizados en la bolsa; sino más bien, en factores enteramente psicológicos.

1.5 Teoría del Mercado Eficiente:

La teoría del mercado eficiente, aborda el comportamiento de precios desde una perspectiva mucho menos prometedora, al menos en lo que concierne a los intereses de un inversionista, planteando que el precio de cada activo negociado en el mercado, incorpora toda la información que hay por conocer al respecto de ello. De dicha premisa se arriba a la conclusión lógica de que es en efecto imposible para cualquiera anticiparse, al menos conscientemente, a los movimientos de precios de los activos negociados en el mercado de valores. (Malkiel, 2003)

El origen de esta aproximación teórica se remonta a principios del siglo XX, con el trabajo de tesis doctoral del matemático francés Louis Bachelier, titulado “La Teoría de la Especulación”. No obstante, fue hasta la década de los 60’s que se llegó a posicionar con solidez en el terreno de las finanzas bursátiles, gracias al advenimiento de las tecnologías de procesamiento de datos y la revisión comparativa del comportamiento histórico de grupos de cientos de acciones por medio del uso del computador. Dichos esfuerzos revelaron que el precio de la generalidad de las acciones e instrumentos financieros durante las series históricas analizadas, exhibió un comportamiento aleatorio en el corto y mediano plazo, siendo únicamente moderadamente previsible, en su conjunto, en horizontes mucho más extensos de tiempo. Tales conclusiones fueron formalizadas bajo el modelo conocido como “*The Random Walk*”, o caminata aleatoria, en el informe titulado “El Comportamiento del Precio de las Acciones” publicado en la edición 38 del *Journal of Business* (1965). La conclusión de que en presencia de un mercado eficiente, en cuyos precios se refleja la totalidad de información disponible por parte de los participantes, fue compartida por el economista Paul Samuelson, y expuesto en su trabajo titulado “*Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*” publicado en la edición 6 del *Industrial Management Review* de 1965. En la práctica, la teoría del mercado eficiente, se ha manifestado en tres niveles de aplicación, a saber: débil, semí-fuerte y fuerte. (Corporate Finance Institute, 2015)

La forma “débil”, hace referencia a la suposición de que toda la información disponible anteriormente fue ya reflejada en los precios históricamente observados, por

consiguiente, ningún comportamiento observado en series históricas tiene vigencia para condicionar comportamientos futuros, siendo los movimientos futuros únicamente motivados por salidas de información igualmente en el futuro, por lo tanto el comportamiento de los precios en el presente debe exhibir un comportamiento aleatorio en el corto plazo. Bajo esta asección se asume que en el corto plazo no es posible para los participantes en el mercado, aprovechar sistemáticamente ninguna divergencia instantánea del precio respecto su valor teórico de equilibrio. (Malkiel, 2019)

La aproximación en su forma débil respecto de la eficiencia en el mercado, concede que existe una relación positiva entre el desempeño pasado del largo plazo y el desempeño futuro en el largo plazo, todas las condiciones permaneciendo constantes. Es decir que el comportamiento observado en el pasado puede esperarse continúe observándose en el futuro. Este es el principio teórico de la aplicación de una estrategia de “momentum” o inercia, también deslindándose del mismo, la muy bien conocida Teoría de Dow, originada desde finales del siglo XIX por Charles Dow, fundador –ni más ni menos– del periódico financiero más conocido en el mundo entero *The Wall Street Journal*.

La forma “semí-fuerte”, hace referencia a la suposición de que toda información nueva va siendo incorporada al precio de las cotizaciones, tan rápidamente como esta va siendo disponible, de tal forma que se concluye que no es posible realizar beneficios sistemáticamente superiores a partir de dicha información. Esta aproximación teórica a la eficiencia del mercado no concede margen de beneficio para el análisis de series históricas, como tampoco para el análisis de factores fundamentales prospectivos, en el supuesto de que toda información es instantáneamente reflejada en un nuevo nivel de precios que incorpora dichas modificaciones en el contexto en el que se desenvuelven las compañías en el mercado. (Malkiel, 2019)

La forma “fuerte” finalmente hace referencia a la suposición de eficiencia total en la incorporación de información, tanto histórica como recientemente disponible, e incluso información aún no disponible –al menos públicamente (Malkiel, *The Efficient Market Hypothesis and Its Critics*, 2003). Dicha aproximación teórica a la eficiencia del mercado es en la práctica difícil de observar, principalmente por las barreras legales a la

transmisión de información confidencial dentro de la industria. Puesto que aun siendo el caso que tal información efectivamente llegue a ser filtrada, esta filtración no siempre se manifestará con inmediatez, y en la mayoría de los casos, los participantes no podrán actuar abiertamente a conveniencia. Así, para que la forma fuerte de la Teoría del Mercado Eficiente pueda ser observada, se requeriría en primer lugar de un estado universal de desobediencia a la ley. (Sulthan, 2019)

1.6 Teoría del Ciclo Económico:

La teoría del ciclo económico representa una aproximación desde un punto de vista agregado del comportamiento de la economía, y como parte de ello, explica parcialmente el comportamiento del precio de las acciones, y los ciclos de alza o baja generalizados.

La teoría del ciclo económico, en su afán por explicar las fuerzas que influyen en el comportamiento agregado de la economía, resulta explicando en un sentido amplio, las causas subyacentes al movimiento de los precios en el mercado. Por medio de esta teoría, se explica la relación entre crédito bancario, crecimiento económico, y distorsiones en la asignación de recursos financieros hacia ciertos rubros susceptibles de ser favorecidos por condiciones crediticias artificialmente bajas. Estas condiciones tienden a resultar en la formación de “burbujas” susceptibles de “pincharse” y colapsar; cuando las condiciones económicas artificiales que facilitaron su auge, no son más sostenibles. (Morgan, 1990)

Los principales exponentes de la teoría del ciclo económico son los economistas de la escuela austríaca; Friedrich Hayek y Ludwig Von Mises, entre otros, quienes argumentaron que fruto de la manipulación de la política monetaria y excesivo gasto de gobierno, se crean las condiciones para generar una expansión y abaratamiento artificial del crédito, y un incremento en los niveles de inversión. Sin embargo, al no estar dicho crédito e inversión, respaldado por un ahorro previo por parte de los agentes económicos, sino únicamente por la facilidad de endeudamiento y el incremento en el dinero circulante; se está reproduciendo un falso auge en la economía, que tarde o temprano

ha de hallarse, balanceándose sobre una pierna en la cuerda floja. (Hayes, Boom And Bust Cycle, 2020)

A pesar de que no pretende ser una teoría predictiva, sino explicativa, algunos economistas de la escuela austríaca ganaron renombre gracias a sus acertadas predicciones durante las crisis económicas y colapsos financieros más pronunciados. Entre ellos, destaca la acertada anticipación al colapso de la burbuja hipotecaria y subsiguiente recesión económica global de 2008, por parte de Peter Schiff. (Schiff P. D., 2007)

A continuación, en el Marco Teórico, corresponde una exposición rigurosa de todos los conceptos matemáticos y herramientas cuantitativas por medio de las cuales se pretende –en la medida de lo posible– navegar en las aguas de la incertidumbre del mercado, que como se mencionó anteriormente son, en el mejor de los casos, descriptibles como aguas turbulentas.

2. MARCO TEÓRICO

Como base teórica para el abordaje del presente esfuerzo investigativo, se dispone en primer lugar, de una selección breve del cuerpo de conceptos y categorías, que aportan los elementos necesarios para la comprensión del ramo financiero en estudio, en este caso: el mercado de acciones de cotización bursátil. En esta línea, se presentan los siguientes temas: el mercado de acciones, y la teoría de portafolio moderno.

Posteriormente, se procede a exponer los conceptos matemáticos y estadísticos que fundamentan el presente trabajo, en todo lo concerniente a la aplicación de herramientas cuantitativas y modelos probabilísticos para la gestión de portafolio de inversión. En función de lo anterior, se explica la aplicación de los siguientes temas estadísticos: teoría de probabilidad, distribución de probabilidad simple y distribución normal. Para finalmente, desarrollar detalladamente las herramientas cuantitativas a aplicar en tres fases, a saber: evaluación de acciones, análisis de portafolio, y gestión de portafolio.

2.1 El Mercado de acciones:

Dentro de los mercados de capitales confluyen solicitantes y oferentes de fondos de largo plazo, los primeros en búsqueda de financiamiento de presupuestos y los segundos en búsqueda de rendimientos sobre sus saldos dinerarios excedentes. La columna vertebral de dichos mercados está integrada por las diversas bolsas de valores que proporcionan un foro para las transacciones de los mencionados participantes. (Gitman, 2017)

El mercado de acciones de cotización bursátil, es aquella rama de los mercados de capital, en donde se negocian acciones de compañías cuya propiedad ha sido públicamente fraccionada. El papel fundamental de dichos mercados, es proporcionar las condiciones necesarias para la ágil movilidad de los capitales en una economía, a saber: certeza, transparencia y liquidez. (Basley & Brigham, 2008)

Certeza: se refiere al grado de confiabilidad que se tiene en que las transacciones se han de llevar a cabo, de acuerdo con las especificaciones remitidas por cada uno de los participantes, y que la identidad de cada uno de ellos es verificable. Es decir, que tanto

oferentes como demandantes, han de honrar las condiciones contractuales de la transacción que se encuentran por suscribir. Por ejemplo, que al vender una cantidad de acciones a un precio determinado, el vendedor ha de recibir exactamente la cantidad de dinero ofrecida por el comprador, en el plazo de tiempo establecido.

Transparencia: se refiere al suministro de información veraz y actualizada para la toma de decisiones de los agentes participantes al respecto de las transacciones a realizar. Es decir, que tanto para oferentes como para demandantes, las condiciones a las que ha de poder realizarse una transacción, sean plenamente conocidas. Por ejemplo, si un comprador está interesado en adquirir acciones de una compañía en particular, el precio de dichas acciones es visible en el mercado, y es perfectamente conocido, tanto para él, que desea comprarlas, como para quien desee vendérselas.

Liquidez: se refiere a la facilidad con que los participantes puedan llevar a cabo una transacción con la mayor velocidad posible y una mínima pérdida de valor por consecuencia de ella. Es decir, que tanto oferentes como demandantes, sean capaces de ejecutar transacciones con inmediatez y apego al precio vigente en el mercado. Por ejemplo, si un participante se ve en la necesidad o deseo de convertir alguno de los valores de su portafolio en dinero, que este sea capaz de vender dicho valor muy rápidamente y por un precio similar al precio de referencia vigente en el mercado.

En torno a la provisión de tales condiciones, se organizan las bolsas de valores en los más importantes centros financieros del mundo, convirtiéndose en la columna vertebral del mercado de capitales. Agilizando la movilidad de recursos financieros, que pasan de las cuentas de oferentes con saldos dinerarios excedentes, a la cuenta de solicitantes con necesidades de financiamiento. Dando así marcha al ciclo virtuoso de movilidad del capital. Existe, sin embargo, un precio –en el sentido literal de la palabra– que hay que pagar por tales virtudes: los elevados niveles de incertidumbre, que siempre y en todo momento debe estarse dispuesto a tolerar al tomar parte de la dinámica del mercado. Afortunadamente, existen herramientas que pueden hacer más amigable la travesía de quienes resuelvan embarcarse en tal aventura; las principales se describen en los próximos apartados.

2.2 Teoría de Portafolio Moderno:

Un viejo y conocido adagio popular advierte; que aquel que no está dispuesto a exponerse al infortunio de la desilusión, se priva a sí mismo de la posibilidad de obtener el gozo que el destino guarda para aquellos que con decidida audacia resuelven desafiarle. En pocas palabras –y más lapidariamente– “el que no arriesga no gana”.

La teoría financiera tiene su propia versión; afirmando que, para obtener mayores rendimientos, debe estarse dispuesto a asumir mayores riesgos. Pero, qué tal si un inversionista pudiera reducir el riesgo y ganar un mayor rendimiento, en la misma jugada.

Tal proposición revolucionó el estudio de las finanzas en 1952, cuando Harry Markowitz introdujo, como parte de su tesis doctoral en economía, las bases de lo que posteriormente, en una de las obras fundamentales para el estudio de las finanzas contemporáneas (Portfolio Selection, 1959), se formalizaría como Teoría de Portafolio Moderno. Markowitz fue laureado con el Premio Nobel de Economía (1990) por dicha contribución a la ciencia, indiscutiblemente reconocida como piedra angular en el desarrollo de la industria financiera a nivel mundial. (Malkiel, 2019)

El trabajo de Markowitz ha sido tan influyente, que inspiró desarrollos posteriores por parte de académicos tan prominentes como James Tobin, de la universidad de Yale, y William Sharpe de Stanford, ambos Premios Nobel por su parte, quienes prosiguieron a enriquecer la teoría de portafolio y extenderla en los círculos académicos de mayor prestigio. (Clark, 2013)

La teoría de portafolio moderno, introduce y desarrolla el principio operativo fundamental subyacente en la diversificación como estrategia para la reducción de riesgo: la correlación entre las variables. Es decir; la forma en la que el comportamiento en el rendimiento de un activo, se relaciona con el comportamiento en el rendimiento de otro. Si el comportamiento en el rendimiento de un activo, está estrechamente relacionado con el comportamiento de otro, ellos presentarán menor impacto en la reducción de riesgo al combinárselos en un portafolio. Por el contrario, si el comportamiento de un activo, está inversamente relacionado con el comportamiento de otro, entonces;

independientemente del riesgo específico de cada uno de ellos, presentarán un mayor potencial en la reducción de riesgo al combinárselos en un portafolio. (Malkiel, 2019)

2.3 Teoría de probabilidades:

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas que tiene por objeto estudiar los fenómenos aleatorios sujetos a procesos estocásticos. Hoy día Muchos problemas que anteriormente no podían ser analizados en términos matemáticos, pues intervienen elementos de incertidumbre y azar, que en definitiva constituyen variables imposibles de manipular o anticipar; resultan siendo planteados y estudiados en términos de probabilidades (Dolciani, Berman, & Wooton, 1976). Tal es, sin duda, el caso del comportamiento de los precios en el Mercado de Acciones.

Como se mencionó en las líneas introductorias de este trabajo, el comportamiento de las cotizaciones, es siempre cambiante y en definitiva impredecible. No importando qué tan profundo conocimiento de una industria o incluso de una compañía en particular se tenga, nunca, ninguna persona puede conocer el precio al cual se negociarán tales títulos a la apertura del mercado la mañana siguiente, ni tan siquiera al cierre del mercado la tarde del mismo día. Todo está, como se dijo introductoriamente, “en el terreno de las probabilidades”.

Los fenómenos aleatorios se contraponen a los fenómenos deterministas, los cuales son resultados únicos y previsibles de experimentos realizados bajo las mismas condiciones determinadas. Los fenómenos aleatorios, por el contrario, son aquellos que se obtienen de experimentos realizados, siempre bajo las mismas condiciones, pero siendo posible obtener como resultado un conjunto de alternativas (Evans & Rosenthal, 2009). Por ejemplo, el caso más simple de todos; el lanzamiento de una moneda al aire.

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto valor, a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Para conocer las probabilidades de intervalos, se realizan modelos que se ajustan en mayor medida según sea el caso de cada fenómeno observado en la naturaleza, mediante la organización de datos y

elaboración de distribuciones de probabilidad. En palabras del Inversionista Richard Dennis, el desafío al que se enfrenta más comúnmente un inversionista, es, el apartarse de sesgos emocionales y cognitivos, que lo orientan en la toma de decisiones con base en expectativas fundadas por lo general en experiencias pasadas, que nada tienen que ver con la probabilidad de que dichas experiencias se repliquen efectivamente en el futuro de la misma forma que se dieron en el pasado, sin importar cuantas veces efectivamente haya sucedido así. (Curtis, 2007)

La probabilidad de que ocurra un evento en particular dentro de un espacio de posibles resultados, se llama “probabilidad de éxito” –independientemente el resultado pueda ser considerado deseable o indeseable– y la probabilidad de que tal evento no ocurra, se le llama “probabilidad de fracaso” y se define como 1 menos la probabilidad de éxito. La suma total de la probabilidad de ocurrencia de todos los distintos resultados de un experimento debe siempre ser igual a 1.0 o 100%. (Dolciani, Berman, & Wooton, 1976)

La probabilidad de éxito es igual al número de resultados que satisfacen la condición establecida, dividida entre el número total de resultados posibles. Por ejemplo, la probabilidad de que, al lanzar una moneda al aire, ésta al caer muestre cara, es de $1 / 2$, es decir: existe un solo resultado que satisface la condición “cara” y existen dos posibles resultados “cara” y “escudo”; naturalmente corresponde a 0.50 o bien, expresado como un porcentaje: 50%. Naturalmente, la probabilidad de fracaso, sería igual a $1 - 0.50 = 0.50$. Nótese que la probabilidad de “cara”, tanto como la probabilidad de “escudo”, es igual a $\frac{1}{2}$ o 50%, y dado que son los únicos dos posibles resultados, la suma de probabilidad total $0.50 + 0.50 = 1.0$, es decir 100%. En este caso todos los posibles resultados del experimento, es decir el espacio muestra, o universo del experimento se conocen: es o “cara” o es “escudo”, y es un número finito determinado: 2. Supóngase ahora que se trata de un lanzamiento de dado con 6 caras; en este caso existe un conjunto finito de 6 resultados posibles, esto es el espacio muestra. Si se desea obtener un número mayor a 4, la probabilidad de éxito de tal evento, estaría representada por el número de resultados que satisfacen la condición, es decir el subconjunto formado por los dos posibles resultados mayores a 4: (5 y 6), de tal suerte; 2 resultados satisfactorios dividido 6 resultados posibles, igual a 0.33, o bien 33.33%.

Matemáticamente, sea “S” un espacio muestra de un experimento en el cual hay “N” resultados posibles, cada uno igualmente probable. Si un evento “A” es un subconjunto de “S”, tal que “A” contenga “h” elementos; entonces la probabilidad de que el evento “A” ocurra, se expresa : $P(A) = \frac{h}{N}$. (Dolciani, Berman, & Wooton, 1976)

Los ejemplos recién expuestos hacen referencia a lo que se define como variables aleatorias discretas, es decir aquellas variables que a partir de un experimento pueden adoptar un número finito conocido de resultados posibles. Se puede anotar que, una variable aleatoria discreta “X” es aquella que podría adoptar uno entre varios valores distintos “ x_i ” cuya probabilidad de ocurrencia es “ p_i ”. Por tanto: $P[X = x_i] = p_i$ donde, “ x_i ” pertenece al conjunto finito $\{x_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. (Miller, 2014)

En contraste a las variables aleatorias discretas, las variables aleatorias continuas son aquellas que pueden tomar cualquier valor dado un rango cualquiera de valores en el conjunto de los números reales (Evans & Rosenthal, 2009). Un buen ejemplo de una variable aleatoria continua es el rendimiento de una acción en el mercado de valores. Dado que el valor (precio) de una acción en el mercado un día cualquiera puede ser cualquier número real entre cero e infinito; entonces el rendimiento diario sobre tal activo puede ser cualquier número real mayor o igual a -1; es decir, cualquier valor en el rango de -1 a infinito, lo que supone un número infinito de posibles rendimientos. De hecho, aunque el rango dentro del cual se puede ubicar una variable aleatoria continua sea finito, el número de valores que puede esta adoptar, es infinito. Por tal razón, para una variable aleatoria continua, la probabilidad de que ocurra un valor en específico, cualquiera que sea este, es efectivamente igual a cero. (Miller, 2014)

Las variables aleatorias continuas, conviene interpretarse, en términos de probabilidad de ocurrencia, dentro de intervalos numéricos específicos, pertenecientes al universo de resultados posibles. Así entendiéndose, que lo que interesa, deja de ser el conocer la probabilidad de que la variable aleatoria “X” adopte un valor particular definido o un conjunto de valores únicos, y pasa a ser la probabilidad de que adopte cualquier valor dentro de un subconjunto –a su vez infinito– de valores posibles dentro de un intervalo determinado (Evans & Rosenthal). Por ejemplo, no es posible determinar la probabilidad

de que el rendimiento de una acción “X” en el mercado de valores sea exactamente de 1.0%, en cambio debe plantearse la probabilidad de que el rendimiento se ubique por encima de 1%, o bien por debajo de 1%, o incluso, que se ubique entre 0.99% y 1.01%.

La probabilidad de que la variable aleatoria continua “X”, adopte un valor cualquiera dentro de un intervalo definido por dos puntos límite, se expresa como: $P[r_i < X < r_j]$, siendo r_i y r_j cualquier rendimiento posible entre -1.0 y +infinito, y se estima por medio de integrar la función de densidad de probabilidad, del punto r_i a r_j . (Miller, 2014)

La función de densidad de probabilidad, también se identifica como la distribución de probabilidad, y convenientemente, existen modelos paramétricos que permiten resumir el comportamiento de una variable aleatoria por medio de una expresión matemática general. En contraparte, precisan asumir determinados supuestos, los cuales no necesariamente han de reflejar verazmente la realidad observada en los datos disponibles. A pesar de lo anterior, muchas veces la similitud es la suficiente como para poder extraer conclusiones generales a partir de su aplicación.

Existe una amplia gama de modelos paramétricos de distribución de probabilidad, que presentan sus propias virtudes al aplicárseles a diversas problemáticas; distribución uniforme, distribución de Bernoulli, distribución binomial, distribución de Poisson, distribución normal, distribución lognormal, distribución Chi Cuadrado, distribución T de Student, distribución F, distribución triangular, por mencionar sólo algunas. A continuación, se describen brevemente los modelos de distribución que fundamentan la metodología de aplicación para la gestión de un portafolio compuesto por acciones a desarrollar en el presente trabajo. A saber: distribución uniforme y distribución normal.

2.4 Modelo de probabilidad de distribución uniforme:

El modelo de distribución de probabilidad uniforme, o simplemente distribución uniforme (DU), es quizá el tipo más ilustrativo y cotidianamente observable en fenómenos de azar. Este modelo, sirve como punto de partida para el entendimiento de la aplicación de modelos más completos en el estudio de las finanzas, como el modelo de distribución normal que se presenta posteriormente.

El comportamiento de una variable aleatoria con distribución uniforme, se entiende perfectamente con ilustrar un sencillo ejemplo: supóngase que se pide a una persona que elija un número cualquiera del 1 al 10; probabilísticamente, todos los números existentes entre el 1 y el 10 inclusive, tienen la misma probabilidad de ser elegidos por el hipotético asistente. Esto es; la variable aleatoria “X” puede adoptar cualquier valor en el espacio muestra $\{1,10\}$ y cada uno de tales valores, tiene –al menos en teoría– la misma probabilidad de ser seleccionado.

La función de densidad de probabilidad para la distribución uniforme puede expresarse:

$$DU[b_1, b_2] = \begin{cases} c: b_1 \leq x \leq b_2 \\ 0: b_1 > x > b_2 \end{cases} ; \text{ lo que expresa que la densidad de probabilidad es}$$

constante, e igual a “c” entre los puntos b_1 y b_2 , y cero para cualquier otro valor fuera de tal rango. Si se asume que el rango de b_1 a b_2 está integrado por números enteros sucesivos, esto es; la variable aleatoria “X” es discreta, recordando que la suma de probabilidad de todos los posibles resultados es igual a 1, se puede deducir el valor de “c” por la ecuación $c = \frac{1}{b_2 - b_1}$, y por su parte la media, como: $\mu = \frac{1}{2}(b_2 + b_1)$. En pocas palabras, la media de “X” se define simplemente como el promedio entre el valor inicial y el final, y la probabilidad de cada valor entre ellos, es constante e igual a 1 dividido el número de valores. (Miller, 2014)

La definición anterior es útil al trasladarse al estudio de una variable aleatoria continua, entendiéndose que la probabilidad de que tal variable adopte un valor dentro de un rango de valores (a_1, a_2) dentro del espacio muestra $\{b_1, b_2\}$, es igual al área bajo la curva, y observando que el comportamiento de la función de densidad de probabilidad uniforme es una constante “c” del punto b_1 al punto b_2 y cero para todos los demás, es posible identificar que dicha función forma un rectángulo que se eleva sobre el eje de las abscisas desde el punto b_1 hasta el punto b_2 con una altura igual a “c” y un área igual a 1, de tal suerte que para conocer la probabilidad entre dos puntos cualesquiera (a_1, a_2) basta con operar como se procedería para encontrar el área de un rectángulo mediante la fórmula de base x altura, en cuyo caso la base estaría dada por $(a_2 - a_1)$ y la altura por “c”, que es igual a $c = \frac{1}{b_2 - b_1}$, así, la probabilidad de que una variable aleatoria

continua, con una distribución uniforme, adopte un valor dentro de dos puntos cualquiera dentro del espacio muestra, es igual a: $P(a_1, a_2) = (a_2 - a_1) * \frac{1}{b_2 - b_1}$; pudiendo sustituirse por a_2 simplemente por a y a_1 por b_1 para encontrar la probabilidad de que “X” sea menor que a o bien sustituir a_2 por b_2 para simbolizar la probabilidad de que “X” sea mayor que a ; siendo b_1 y b_2 los valores límite de la distribución. (Miller, 2014)

El entendimiento del modelo de distribución uniforme de probabilidad, es especialmente útil para asimilar la definición fundamental del área bajo la curva, como la probabilidad de que una variable aleatoria “X” se encuentre entre dos puntos del espacio muestra, o bien sea mayor o menor que un valor en particular, noción importantísima para la aplicación del modelo de probabilidad normal que se expone a continuación:

2.5 Modelo de probabilidad de distribución normal:

El modelo de distribución de probabilidad normal, o simplemente distribución normal, es sin lugar a dudas el modelo paramétrico más popular por su aplicabilidad a un sinnúmero de fenómenos en la naturaleza. En particular, el estudio de las finanzas, hace uso extensivo del modelo de probabilidad de distribución normal, por la facilidad de su aplicación basada en dos parámetros ampliamente familiares: la media y la desviación estándar, y su conveniencia para la generalización de conclusiones.

Comúnmente, se hace referencia a la distribución normal, como la campana de Gauss, en honor a Johannes Gauss, matemático alemán acreditado por el desarrollo primigenio del modelo, el cual describe con suavidad el contorno de una campana, cuyo punto más prominente al centro es la media, y se abre simétricamente hacia los extremos.

La forma descrita, obedece a su función de densidad de probabilidad, la cual representa una máxima concentración de probabilidad en torno al valor central, o media, que parte en dos mitades iguales la distribución, y a partir del cual disminuye gradualmente la probabilidad y se aplana hacia los valores más extremos, es decir, más alejados del valor central. Por lo anterior, dicho valor central en la distribución normal de probabilidad, representa tanto la media, como la mediana y la moda.

Para una variable aleatoria “X”, la función de densidad de probabilidad en la distribución de probabilidad normal, está dada por la siguiente fórmula (Miller, 2014):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} * \left[e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]$$

Donde, σ es la desviación estándar, y μ es la media, (π y e son las correspondientes constantes matemáticas). Por lo anterior se observa que el comportamiento de la distribución está dado por los dos parámetros mencionados anteriormente: media y desviación estándar.

En la práctica, afortunadamente, no suele ser necesario recurrir a la función de densidad de probabilidad expuesta, y basta con decir que una variable aleatoria cuyo comportamiento se asume adopta la forma de una distribución normal; es normalmente distribuida, con una media μ y una desviación estándar σ . lo cual se representa por convención por medio de la notación: $x \sim N(\mu, \sigma)$.

Una de las razones de la conveniencia de la distribución de probabilidad normal, es que cualquier combinación lineal de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, ha de resultar también en una distribución normal. Lo cual significa que, si el retorno de dos o más activos presenta una distribución normal, cualquier combinación de estos en un portafolio, resultará normalmente distribuido. (Alexander, 2008)

Adicionalmente, la distribución normal presenta la conveniencia de una versión estandarizada, que permite extraer conclusiones directamente de la aplicación de un procedimiento basado en sus dos parámetros, sin la necesidad de recurrir al procedimiento matemático de integración de la función de densidad de probabilidad para determinar el área bajo la curva. Lo cual, facilita enormemente el cómputo de probabilidades asociadas a diversos eventos sujetos de evaluación.

En su versión estandarizada, designada: distribución normal estándar, la media es igual a cero y la desviación estándar es igual a 1. Cualquier variable aleatoria normalmente

distribuida puede convertirse en una variable normal estándar, denotada como “z”, mediante la ecuación de transformación estándar (Alexander, 2008):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

El valor resultante, indicará el valor de la variable “x” en términos de a cuantas desviaciones estándar se encuentra alejado del valor central de la distribución o media μ . Indicándose, de acuerdo a su signo, si se encuentra a la derecha (+) o bien a la izquierda, es decir; si el signo es negativo, la variable “x” se encontrará “z” desviaciones estándar por debajo de la media, y de ser positivo, se encontrará “z” desviaciones estándar más allá de la media.

Dado que el modelo de probabilidad de distribución normal, es tan ampliamente utilizado en el estudio de las finanzas, se espera que todos los profesionales y académicos se encuentren por lo menos familiarizados con la concentración del área bajo la curva en las secciones de la campana con más / menos una, dos y tres desviaciones estándar a partir de la media, siendo respectivamente 68%, 95% y 99%. Esto significa que, en la sección de la curva marcada por el valor limítrofe que se encuentra a una desviación estándar de la media, hacia la derecha y la izquierda, se espera se hallen concentrados el 68% de los valores en la distribución; 95% en la sección delimitada por los valores limítrofes a 2 desviaciones estándar de la media, hacia la derecha e izquierda; y 99.9% en la sección cuyos valores limítrofes se encuentran a 3 desviaciones estándar de la media simétricamente. Naturalmente, desde el extremo izquierdo de la campana hasta la media, se encontrará acumulativamente el 50% de la probabilidad, y de la media hacia el extremo derecho, el 50% restante, sumando 1 entre las dos mitades. (Miller, 2014)

De lo anterior se infiere que las secciones descritas de la curva normal, dejan fuera el 32%, 5%, y 0.1% de los posibles resultados, partiéndose por la mitad y ubicándose respectivamente en los extremos negativo y positivo de la distribución, esto es: la sección definida por +/- 1 desviación estándar deja por fuera 16% del área total en el extremo izquierdo y el restante 16% al extremo derecho; la sección definida por +/- 2 desviaciones

estándar deja 2.5% en el extremo izquierdo y 2.5% en el extremo derecho; y la sección definida por ± 3 desviaciones estándar, 0.05% y 0.05% respectivamente.

Gracias a la popularidad y extensión del uso de la distribución normal, puede determinarse el área bajo la curva de virtualmente cualquier sección de la distribución, con el uso de una tabla de distribución de probabilidad normal estándar o su equivalente electrónico, mediante la aproximación del valor “z” equivalente a un valor “x” cualquiera, a partir del uso de la ecuación de transformación estándar y viceversa. Es decir; a partir de un valor “z” puede determinarse su correspondiente valor “x” para la variable aleatoria en la distribución normal resolviendo para “x”, toda vez se conozca la media μ y la desviación estándar σ . La notación sería $P(u_1 < x < u_2)$ dado que; $X \sim N(\mu, \sigma)$. Supóngase que $\mu = 10\%$ y $\sigma = 20\%$, y se desea encontrar la probabilidad de que “x” sea mayor que 0% y menor que 10%, se procede a plantear: $P(0 < x < 0.10)$ dado que; $X \sim N(0.10, 0.20)$.

Procediendo mediante transformación estándar para la variable “x” y los valores limítrofes del área bajo la curva que se desea conocer, se anota: $P(0 < x < 0.10) = P\left(\frac{0.0-0.1}{0.2} < z < \frac{0.1-0.1}{0.2}\right) = P(-0.5 < z < 0)$. Así, dado que las tablas de distribución de probabilidad y su equivalente en Excel (NORMSDIST) proporcionan el área bajo la curva acumulada hasta el valor “z”; se procede por diferencia: $P(-0.5 < z < 0) = P(z < 0) - P(z < -0.5)$. Por medio de la tabla de distribución normal estándar, o el uso de la función NORMDIST en Excel, se tiene que: $P(z < 0) = 0.5$ y $P(z < -0.5) = 0.30854$, por lo cual; $P(-0.5 < z < 0) = 0.50 - 0.3085 = 0.191462$. Así, la lectura es, que la probabilidad de que la variable aleatoria “x” normalmente distribuida con una media de 10% y desviación estándar de 20%, tiene una probabilidad de 19.15% de adoptar un valor entre 0% y 10%.

Como puede observarse, la suposición de que una variable aleatoria se distribuye normalmente, es indiscutiblemente conveniente, pues facilita enormemente la estimación de áreas bajo la curva representativas de probabilidad, para cualquier tramo mediante el uso de la versión estandarizada de la distribución. Adicionalmente, dado que cualquier combinación lineal de variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas,

resulta también, en una distribución normal; la adopción de supuestos de normalidad constituye los cimientos de una buena parte de modelos financieros que integran el comportamiento de múltiples variables. (Miller, 2014)

No obstante, la conveniencia del supuesto de normalidad, difícilmente el comportamiento observado de una variable puede apegarse con exactitud al modelo de distribución normal, principalmente en lo que respecta a simetría perfecta, y extremos aplanados. Esto es, en el modelo de probabilidad de distribución normal, el coeficiente de asimetría es igual a cero y el exceso de kurtosis es también igual a cero, dado que el coeficiente de kurtosis de una variable normalmente distribuida es igual a 3 (Alexander, 2008). El exceso de kurtosis se calcula como la diferencia en el coeficiente de kurtosis de la variable menos 3, lo cual supone un resultado de cero, en caso de normalidad (Alexander, 2008). Otras características si son más comúnmente observadas; forma acampanada con elevación máxima en torno a la media, uni-modal, e igualdad –o por lo menos aproximación a la igualdad– de la media, mediana y moda.

2.6 HERRAMIENTAS CUANTITATIVAS PARA LA EVALUACIÓN DE ACCIONES:

Se inicia esta sección, explicando la aplicación de las herramientas cuantitativas necesarias para llegar a conocer con propiedad, las características de cada una de las oportunidades de inversión, que han de ser posteriormente tomadas en cuenta, para la integración de un portafolio.

El punto de partida para la integración y gestión de un portafolio de inversión, es disponer de los insumos de información necesarios para sistematizar el proceso de toma de decisiones, con base en criterios objetivos, aplicables a las oportunidades de inversión que se presentan.

2.6.1 Construcción de series históricas:

La construcción de series históricas, se refiere al cómputo de los rendimientos diarios que las distintas alternativas de inversión han presentado en el pasado. Ante lo cual, surge la disyuntiva al respecto de cómo computar tales rendimientos diarios, pues como

se explicará a continuación en el punto 2.6.2, existe la posibilidad de aplicar el cálculo tradicional de rendimientos, o bien calcular rendimientos logarítmicos, cada uno de los cuales presenta sus particulares virtudes y complicaciones.

Para conformar una serie histórica debe definirse el plazo de tiempo que desea cubrirse. En el caso del mercado de acciones, diversos sitios de consulta de información financiera, ofrecen datos históricos detallados muy extensos, por lo que la disponibilidad de información –de precios en este caso– no supone ninguna dificultad. La importancia, sin embargo, es cubrir un periodo que, si bien sea lo suficientemente extenso como para ser estadísticamente significativo, no lo sea tanto como para incorporar condiciones económicas muy alejadas del contexto presente. En tal sentido, el ideal en cuanto a plazo de tiempo determinado, no existe y difícilmente puede llegarse a una convención indiscutible respecto al mismo.

En virtud de lo anterior, en el presente trabajo se toma el plazo de un año calendario para la construcción de series históricas, es decir aproximadamente 250 días de actividad bursátil. Este plazo se considera el necesario para exhibir el comportamiento de las tres fluctuaciones definidas por Charles Dow en la teoría que lleva su nombre, como: tendencia primaria, observable en periodos de por lo menos un año; tendencia secundaria, correcciones a la tendencia primaria, observables en periodos de 3 meses a 3 semanas; y fluctuaciones menores, volatilidad en periodos inferiores a 3 semanas, hasta días y fracciones de día. La referida Teoría de Dow, se remonta a más de 100 años de rigurosas comprobaciones históricas, y al día de hoy, fundamenta una diversidad de estrategias de inversión basadas exclusivamente en el análisis de tendencias, que se infieren a partir de tales fluctuaciones. (Rhea, 2018)

Dado el plazo de extensión de las series históricas, establecido para un año calendario, se disponen de 250 precios al cierre, por lo que se dispone de $n-1 = 249$ rendimientos diarios para cada acción evaluada. En este punto, es preciso mencionar la conveniencia de que se disponga de la misma cantidad de registros para todas las acciones a ser evaluadas, pues para el procedimiento de construcción de matrices de covarianza y correlación, que se abordará más adelante, tal disposición será necesaria.

2.6.2 Rendimiento de un periodo simple:

La dinámica de precios en el mercado de las acciones, proporciona rendimientos con base en el cambio observado en el precio de la acción en un periodo t respecto al precio de la misma acción en el periodo anterior t_{-1} . El periodo referido puede variar en extensión temporal; pudiendo ser de un año, un mes, una semana, un día, e incluso fracciones de día de acuerdo con la estrategia y horizonte de inversión. No obstante, por convención en la industria, usualmente se asume que la unidad de cómputo para el periodo de retorno es de un día, lo cual remite a definir el retorno de una acción, bajo el supuesto que dicha acción no reporta dividendos, como el cambio en el precio de cierre del día, en este caso t , respecto al día anterior t_{-1} . (Kapinski & Zastawniak, 2003)

Definición matemática del rendimiento de un periodo:

El rendimiento de una acción de un periodo diario expresado como $r_a(t, t_{-1})$, en adelante simplemente r_a se define matemáticamente mediante la muy familiar ecuación de cambio (Kapinski & Zastawniak, 2003):

$$r_a = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Donde P_t simboliza el precio de cierre de la acción en el periodo evaluado y P_{t-1} simboliza el precio de cierre de la acción en el periodo anterior.

De forma que se facilite el cálculo en Excel, puede re expresarse, con la misma simbología como:

$$r_a = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Puesto que se asume que en todo caso el precio de cualquier acción es siempre un número real positivo, el rendimiento obtenido de la ecuación, ha de ser en todo caso un número real, sin embargo, puede adoptar bien un signo positivo, o un signo negativo, en cuyo caso se entiende que el rendimiento puede ser positivo, es decir obtenerse una

ganancia diaria, o bien negativo, es decir obtenerse una pérdida diaria, derivado de la tenencia de la acción.

La ecuación de cambio presentada, representa lo que ha de llamarse con más precisión el rendimiento aritmético, simplemente referido como rendimiento –a secas– por su uso común. Más, existe alternativamente, una forma de definir el retorno para el mismo periodo por medio de una expresión logarítmica, obteniéndose, en todo caso un resultado distinto al aritmético, pero que por su ubiquidad en el estudio de las finanzas puede llegar a encontrarse frecuentemente en diversas literaturas, usualmente más avanzadas. A continuación, se describe la expresión matemática del rendimiento logarítmico y posteriormente se describen brevemente sus particularidades.

Definición matemática del rendimiento logarítmico de un periodo (Miller, 2014):

$$\log r_a = \ln(1 + r_a); \text{ donde } r_a = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

La expresión anterior es muy útil para pasar de rendimientos tradicionales a rendimientos logarítmicos, conforme resulte valioso para el trabajo de análisis matemático, sin embargo, la expresión suele simplificarse para la facilidad del trabajo en Excel a la siguiente forma:

$$\log r_a = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

En ambas expresiones $\log r_a$ denota el retorno logarítmico de la acción “a”, únicamente para distinguirlo en este apartado, de r_a que se entiende como el retorno “tradicional”, y no debe confundirse con el logaritmo base diez (usualmente escrito como log) de r_a que no tendría relación alguna. En la práctica no suele distinguirse, y es pericia del analista identificar si se trabajará con rendimientos tradicionales o bien logarítmicos desde un principio. En el desarrollo del presente trabajo, se trabajará con rendimientos tradicionales, y de emplearse los rendimientos logarítmicos, se indicará en su momento.

Eventualmente, si resulta conveniente –o necesario– puede aproximarse un rendimiento logarítmico por medio de una transformación del aritmético (Miller, 2014):

$$\log r_a = r_a - \frac{1}{2} * r_a^2$$

Las particularidades que hacen digno de análisis el uso de rendimientos logarítmicos son principalmente dos: la primera de ambas es que son aditivos en el tiempo. Esto representa que, a diferencia de un retorno tradicional, la suma de retornos logarítmicos de una sucesión de periodos, es igual al rendimiento logarítmico del último periodo con respecto al primero. Por ejemplo: supóngase que el precio de un activo durante 3 periodos consecutivos es de 200, 190 y 210, el rendimiento tradicional para el activo sería de: -5.00% y 10.53% para el segundo y tercer periodo respectivamente, la suma de ambos resultaría ser de 5.5263% y podría concluirse –equivocadamente– que tal es el rendimiento del referido activo del periodo 1 al periodo 3. Sin embargo, realizando el cálculo, se constataría que en realidad es solamente de 5.00%. Por el otro lado, el retorno logarítmico para el mismo activo sería respectivamente de -5.13% y 10.01%, la suma de ambos resultaría ser 4.8790%, lo cual equivaldría –en este caso efectivamente– a realizar el cálculo de rendimiento logarítmico del periodo 1 al periodo 3, siendo igual a 4.8790%. Tal es la propiedad aditiva en el tiempo de los rendimientos logarítmicos.

La segunda, resulta de su mayor adaptabilidad a la normalidad, descrita en el apartado del modelo de probabilidad de distribución normal, dicho modelo, sugiere que los valores que puede adoptar una variable aleatoria “X” en este caso, el rendimiento de un activo, van desde menos hasta más infinito, aunque tales valores, son efectivamente improbables, son teóricamente posibles. Bajo el criterio tradicional de rendimientos, dicha posibilidad teórica no se cumple, pues lo máximo que puede perder un activo es el 100% de su precio, y este es el valor mínimo de rendimiento, que la ecuación tradicional –de variación– podrá arrojar por definición. El cálculo de rendimientos logarítmicos puede arrojar –aunque difícilmente en la práctica– valores que van desde menos hasta más infinito, tal como –al menos teóricamente– se plantea en el modelo de distribución normal. (Elliott & Kopp, 2005)

No obstante las particulares virtudes descritas sobre los rendimientos logarítmicos, cabe mencionar que presentan dos inconvenientes en cuanto a su aplicación para la gestión de portafolios: 1) dado que pueden obtenerse valores desde (-) infinito hasta (+) infinito, rompen con el principio de responsabilidad limitada, que a pesar de resultar de un argumento más jurídico que matemático, igualmente está fundamentado en la exactitud de la disciplina, y 2) que a pesar de ser aditivos en el tiempo, no son aditivos por componentes de portafolio. Por ejemplo, supóngase que se tiene un portafolio que integra 2 activos “A” y “B”, el precio del activo “A” en el año 1 es de 50, y el del activo “B” de 100. Así, el valor del portafolio es de 150, lo que significa que el componente de “A” es 33.33% y el componente de “B” es 66.67%. Si los precios en el periodo 2 son de 45 y 110 respectivamente, el valor del portafolio sería ahora 155. Así, el rendimiento tradicional del portafolio sería de $155/150 - 1$ igual a 3.33%. El rendimiento tradicional por separado de cada activo es de -10% y 10% respectivamente. Así, la suma de rendimientos por componente $-10\% \times 33.33\% + 10\% \times 66.67\%$ es igual a 3.33% lo cual coincide con el rendimiento del portafolio. Al procederse mediante rendimientos logarítmicos alternativamente, el rendimiento del portafolio es de $\ln(155/150)$ igual a 3.28% y el rendimiento de cada activo por separado es de -10.54% y de 9.53% respectivamente, al sumar componentes se obtiene: $-10.54\% \times 33.33\% + 9.53\% \times 66.67\%$ igual a 2.84%, lo cual es muy distinto al rendimiento –también logarítmico– calculado para el portafolio de 3.28%. Por tal razón, salvo se indique lo contrario, en el capítulo cuarto sobre Discusión de Resultados, se hará uso primordialmente de rendimientos tradicionales, indicándose claramente cuándo y por qué se ha de pasar a utilizar rendimientos logarítmicos.

2.6.3 Expectativa de rendimiento:

El rendimiento esperado es el valor más probable que adopte la variable aleatoria “X” dada la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los resultados posibles, en todos los casos en adelante, el rendimiento de un activo. Así, el rendimiento esperado, se define como la expectativa matemática de la variable aleatoria rendimiento (r_a) y se escribe como $E[r_a]$ o simplemente $E[r]$, y se lee como el rendimiento esperado del activo “a”. (Kapinski & Zastawniak, 2003)

Definición matemática del Rendimiento Esperado (Kapinski & Zastawniak, 2003):

$$E[r] = \sum_{i=1}^n r_i * p_i$$

Donde: r_i es cada rendimiento probable y p_i es su correspondiente probabilidad de ocurrencia.

Recordando que la suma de probabilidad siempre y en todo momento debe ser igual a 1.0, considerando que en la práctica difícilmente puede tenerse una estimación *a priori* de cada uno de los posibles resultados y su correspondiente probabilidad de ocurrencia, se conviene en tomar el cálculo de rendimientos de un periodo para una serie de tiempo en la que se asume que cada uno de los registros tiene la misma probabilidad de ocurrir. Por lo cual, puede re expresarse la definición de rendimiento esperado, de forma semejante a la ecuación de un promedio o media. (Clark J. 2013)

Definición del rendimiento esperado, como media aritmética (Miller, 2014):

$$E[r] = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n r_i$$

Tal ecuación, indica que el rendimiento esperado de un activo es igual a la suma de todos los rendimientos de un periodo r_i , dividido entre el número total de observaciones disponibles en la serie n . (Miller, 2014)

Esta definición será la base de cálculo para el rendimiento esperado de cada una de las acciones evaluadas en el desarrollo del presente trabajo. El cual, de acuerdo al modelo de probabilidad de distribución normal, expuesto anteriormente, representa el valor central de la distribución, que se ha de interpretar como el resultado más probable. El referido resultado, coincide con el valor más frecuente (moda), y el valor limítrofe del percentil que deja por debajo de si un 50% de los datos en la distribución, y el restante 50% por arriba (mediana); por tanto, su caracterización como “rendimiento esperado” o expectativa de rendimiento $E[r]$.

2.6.4 Varianza y desviación estándar:

La desviación estándar se entiende como una medida de dispersión de los resultados posibles de una distribución, respecto a su valor central o media. Matemáticamente se define como la raíz cuadrada de la varianza, la cual, a su vez es propiamente definida como la expectativa de la diferencia entre la variable aleatoria y su media, al cuadrado. Definición matemática de la desviación estándar y varianza (Miller, 2014):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$$

donde σ denota la desviación estándar y σ^2 la varianza.

Como una expectativa, la varianza puede definirse como la suma de las diferencias de cada valor probable de la variable aleatoria y su media, multiplicado por su correspondiente probabilidad de ocurrencia, al cuadrado.

Definición matemática de la varianza como expectativa (Miller, 2014):

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 * p_i$$

Nuevamente, considerando que difícilmente se tendrá una estimación *a priori* de cada uno de los valores probables para la variable aleatoria y su correspondiente probabilidad, se puede re expresar la definición anterior, asumiendo que todas las n observaciones de rendimientos r_i calculados para una serie histórica, tienen la misma probabilidad de ocurrencia, y que a partir de ello se habrá arribado al cálculo de un Rendimiento Esperado $E[r]$. Así, la varianza del rendimiento de una acción se expresará:

Definición matemática de la Varianza del rendimiento de una acción (Clark, 2013):

$$\sigma^2 = E[(r_i - E[r])^2] = \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^n (r_i - E[r])^2$$

Nótese que en la expresión *ut supra*, se sustrae 1 al denominador de la fracción que multiplica la sumatoria de diferencias al cuadrado. Esto es porque se considera en todo caso, que la información contenida para el cálculo de los rendimientos en la serie histórica, por más larga que esta sea, no representa la totalidad de la información, sino es en efecto una estimación a partir de una muestra de la población y no el universo. Adicionalmente, se expresa en términos del rendimiento en cada observación r_i y el rendimiento esperado $E[r]$. Esta es la forma en la que se continuará anotando en el desarrollo del presente trabajo.

Dado que el rendimiento esperado de una inversión, es categóricamente la variable fundamental, en torno a la cual gira todo, a partir del análisis financiero; la desviación de dicha expectativa, es decir, la desviación estándar, que se define como la raíz cuadrada de la varianza; se considera la medida más apropiada para cuantificar científica y objetivamente el riesgo de una inversión, al medir la dispersión de resultados en torno un valor central esperado. (Clark, 2013)

Por lo anterior, al hablar del riesgo de una acción o inversión, en el desarrollo del presente trabajo, ha de hacerse referencia a la desviación estándar, salvo mención en los casos que amerite ser aclarado.

2.6.5 Coeficiente de variación:

El coeficiente de variación permite una interpretación contextual y comparativa de la anteriormente descrita desviación estándar, convirtiendo la variación o dispersión de resultados, descrita por dicho concepto, en un porcentaje de la media, en este caso el rendimiento esperado. Lo anterior, permite comparar uno a uno, el riesgo de distintos activos que pueden diferir ampliamente en términos de rendimiento esperado, y por tanto a pesar de presentar desviación estándar muy similares, ser en términos relativos al riesgo, uno muy distinto del otro. Dicho concepto aporta mayor certeza en cuanto a la determinación de activos dominantes, que de acuerdo a la Teoría de Utilidad que fundamenta a su vez la Teoría de Portafolio de Harry Markowitz, se entienden como

aquellos activos que presentan mayor rendimiento en relación a su nivel de riesgo, o bien menor riesgo en relación a su nivel de rendimiento. (Clark, 2013)

Expresión matemática del coeficiente de variación (Clark, 2013):

$$cv = \frac{\sigma}{E[r]}$$

El coeficiente de variación, no cuenta con una simbología estandarizada. En la ecuación, se identifica con la notación cv que es la forma en la que se identificará en el desarrollo del presente trabajo.

La interpretación más útil de su cálculo, es que informa sobre cuántas unidades de riesgo se asumen por cada unidad de rendimiento que se espera proporcione una inversión. Naturalmente, al invertir la fracción, se obtendrá la relación recíproca, es decir, cuántas unidades de rendimiento se espera obtener por cada unidad de riesgo que se asume. Esta última, es también una noción de gran importancia, como se verá en el desarrollo de los próximos apartados.

2.6.6 Covarianza y coeficiente de correlación:

El coeficiente de correlación expresa el grado en que el comportamiento de una variable está relacionado con el comportamiento de otra, y su valor va desde negativo 1, hasta positivo 1. Representando la unidad en el extremo positivo, una relación completa, es decir, el comportamiento de una variable es estrictamente la sombra del comportamiento de la otra, y la unidad en el extremo negativo representa todo lo contrario, es decir, el comportamiento de una variable es estrictamente el reflejo del comportamiento de la otra. Entiéndase una sombra como una proyección, es decir una relación directa; y el reflejo, como una refracción, es decir una relación inversa. En tanto el valor del coeficiente de correlación se aleje de la unidad, ya sea en el extremo positivo o negativo, se dirá que la relación entre las variables es más débil, siendo cero la representación de una relación inexistente, es decir, que el comportamiento de una es completamente indiferente al comportamiento de la otra.

Ahora bien, la anterior es una interpretación coloquial –cabe decirlo. Para definirle formalmente, al igual que la desviación estándar, el coeficiente de correlación debe entenderse como la contextualización de la definición de una magnitud que le precede, en este caso: la covarianza. En todo rigor, el coeficiente de correlación es una medida estandarizada de la covarianza (Evans & Rosenthal, 2009). Explícase a continuación qué es la covarianza en primer lugar, y posteriormente su estandarización.

La covarianza también es una medida de relación entre el comportamiento de dos variables, supóngase “X” y “Y”, y se define como la expectativa del producto de las diferencias, del valor de cada variable, respecto a su media. (Miller, 2014)

Definición matemática de la covarianza (Miller, 2014):

$$\sigma(x, y) = E[(x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)]$$

Donde μ_x denota la media de la variable “X” y correspondientemente μ_y denota la media de la variable “Y”.

Nótese que $\sigma(x, y)$ debe leerse como la covarianza entre “X” y “Y”, y no como una desviación estándar para alguna de ambas variables.

Como toda expectativa, puede expresarse como una suma ponderada por la probabilidad de ocurrencia de cada evento.

Definición matemática de covarianza como una expectativa (Evans & Rosenthal, 2009):

$$\sigma(x, y) = E[(x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y) * p_i$$

Nuevamente, asumiendo la dificultad de contar con estimaciones *a priori* de valores posibles y su correspondiente probabilidad, se retoma el supuesto de rendimientos calculados a partir de series históricas, en este caso para dos activos “a” y “b”. Así, en términos de rendimientos, se define la covarianza de la siguiente forma:

Definición matemática de la covarianza en términos de rendimientos históricos:

$$(5) \quad \sigma(a, b) = E[(r_a - E[r_a]) * (r_b - E[r_b])] = \frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^n (r_a - E[r_a]) * (r_b - E[r_b])$$

Nótese, que r_a y r_b representan los rendimientos para “a” y “b” en cada i -ésima observación. Por convención, se deduce uno a la cantidad de observaciones, al considerarse nuevamente, como una estimación a partir de una muestra y no la totalidad de la información existente.

Del análisis de signos de la expresión matemática de la covarianza, puede inferirse la dirección de la relación entre las dos variables, puesto que el resultado del producto de las diferencias puede tener signo negativo, si y sólo si, uno de ambos factores presenta signo negativo, lo cual representaría, que en la observación correspondiente, mientras que el rendimiento de una acción encontrase por arriba de su media (resultado de la diferencia = positivo), el rendimiento de la otra acción encontrase por debajo de su media (resultado de la diferencia = negativo); por lo que el producto de ambas diferencias habría de ser inequívocamente un valor de signo negativo. Por el contrario, si el resultado de ambas diferencias es de signo positivo –o ambos negativo– el resultado del producto de ellas sería inequívocamente un valor con signo positivo. Por tanto, si el resultado de la sumatoria total, presenta un signo negativo, se entendería que la suma está cargada hacia el resultado negativo del producto de las diferencias, lo que indicaría –al menos predominantemente– que mientras una variable se presenta por encima de su media, la otra se presenta por debajo de la suya, y viceversa. Ello sugeriría una relación inversa, es decir con signo negativo. Un resultado de la sumatoria total con signo positivo, indicaría todo lo contrario.

¿Qué tan estrecha es la relación, sea esta negativa o positiva? Tal es la pregunta que responde el coeficiente de correlación, como una medida “estandarizada” de la covarianza. Recordando la ecuación de transformación estándar (Alexander, 2008):

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Se tiene que, al aplicarse a los componentes de la expresión matemática de la covarianza, se obtiene la expectativa del producto de las variables estandarizadas:

$$E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} * p_i$$

Asumiendo nuevamente, que todas las observaciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia, y factorizando la expresión se obtiene:

$$E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y) * \frac{1}{\sigma_x * \sigma_y}$$

Por las propiedades del operador de sumatoria, puede extraerse el factor de la fracción que divide 1 entre el producto de las desviaciones estándar, pues es en todo caso, una constante en la expresión. Así:

$$E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \frac{1}{\sigma_x * \sigma_y} * \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)$$

Re expresando toda la expresión a la derecha de la ecuación, como una fracción:

$$E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \frac{\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)}{\sigma_x * \sigma_y}$$

Como resultado de la transformación estándar de las variables, el resultado habrá de ubicarse en todo caso entre -1 y +1, adquiriéndose así el valor interpretativo del coeficiente de correlación descrito al inicio. Finalmente entonces, se tiene la definición matemática para el coeficiente de correlación:

Definición matemática del coeficiente de correlación:

$$R(x, y) = E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \frac{\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) * (y_i - \mu_y)}{\sigma_x * \sigma_y}$$

Al notarse, que el denominador de la fracción a la derecha de la igualdad, representa exactamente la definición matemática de la covarianza, puede resumirse el coeficiente de correlación en términos de covarianza:

Definición matemática del coeficiente de correlación en términos de covarianza:

$$R(x, y) = E \left[\frac{(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} * \frac{(y_i - \mu_y)}{\sigma_y} \right] = \frac{\sigma(x, y)}{\sigma_x * \sigma_y}$$

Expresándole en términos del rendimiento de acciones “a” y “b”, como se ha convenido anteriormente se obtiene la definición más frecuentemente citada (Clark, 2013):

$$R(a, b) = \frac{\sigma(a, b)}{\sigma_a * \sigma_b}$$

Nótese que a partir del desarrollo final, puede arribarse convenientemente por despeje a la covarianza, partiendo del coeficiente de correlación y conociendo la desviación estándar, de cada una de las variables.

Esta última expresión será útil en la realización de algunos procedimientos de análisis, en los que se requiere pasar de covarianza a coeficiente de correlación y viceversa, en los capítulos posteriores del presente trabajo.

2.6.7 Volatilidad de la acción:

La volatilidad de la acción representa la sensibilidad del rendimiento de la acción a los movimientos del mercado, lo que pretende aproximar la respuesta en el rendimiento de una acción a las fluctuaciones en el mercado en su conjunto, y se interpreta como el riesgo específico de cada acción (Alexander, 2008). Por convención, en notación matemática se representa con el símbolo β_x y se lee como Beta de “x”. En el desarrollo del presente trabajo, se referirá, bien como el coeficiente Beta de la acción, o simplemente su volatilidad.

Para su medición se empleará una combinación de dos de los conceptos ya expuestos en puntos anteriores: la desviación estándar y el coeficiente de correlación entre dos variables. De forma tal, que relacionando la desviación estándar de la acción –su riesgo total– con la desviación estándar del índice representativo de mercado –S&P500 en el presente trabajo– se obtenga una razón porcentual del riesgo de la acción relativa al riesgo de mercado, la cual, al multiplicarse por el coeficiente de correlación entre ambas variables, indique: 1) la proporción efectiva en que dicha razón ha de presentarse en la acción, en respuesta a variaciones observadas en el índice de mercado, y 2) la dirección de dicha respuesta proporcional. Expresada en términos de coeficiente de correlación:

$$\beta_x = \frac{\sigma_X}{\sigma_M} * R(x, M)$$

Como se explicó en el punto anterior de la exposición del coeficiente de correlación, el valor de $R(x, M)$ puede ubicarse entre -1 y +1, de lo cual se deducen las siguientes conclusiones que ayudan a clarificar la interpretación del modelo: 1) si es $R(x, M) = 1$, la razón porcentual del riesgo de la acción y del mercado, se mantendrá en un 100% y en la misma dirección; lo cual quiere decir que la respuesta de la acción frente a variaciones en el mercado, se espera que sea igual a la razón de sus desviaciones estándar. Si por el contrario, $R(x, M) = -1$, la respuesta de la acción frente a variaciones en el mercado, será el 100% de la razón de sus desviaciones estándar, pero en este caso a la inversa. Sigue naturalmente, que al $R(x, M) = 0$, la respuesta de la acción ante variaciones en el mercado, será de cero, no importando la razón entre sus desviaciones estándar. Consecuentemente, se tiene que; en la medida que el valor absoluto del coeficiente de correlación entre la acción y el mercado sea más bajo, es decir más cercano a cero, la volatilidad de la acción será menor, sin importar la razón entre sus desviaciones estándar.

Adicionalmente, el valor del coeficiente beta, se interpreta como la porción del riesgo total de un activo, que no puede diversificarse, entendiéndose como su riesgo sistemático, originado por su vinculación con el comportamiento agregado del mercado. El modelo de valuación de activos de capital CAPM se basa en tal interpretación. (Malkiel, 2019)

2.7 HERRAMIENTAS CUANTITATIVAS PARA ANÁLISIS DE PORTAFOLIO

Esta sección se dedica a determinar la manera en que la integración de las acciones individuales, dan forma a un portafolio con características propias, potencialmente muy distintas a las de cualquiera de los activos en lo particular, dada la interacción matemática de los componentes a incorporar, cumpliendo con el viejo adagio que versa: “el todo es más que la suma de sus partes” –o menos quizá– como se verá más adelante.

Al arribar a este punto, cabe resaltar la importancia de haber agotado las herramientas anteriormente descritas para la evaluación de acciones individuales, al constituir dichas estimaciones, los “bloques de construcción” para el análisis de portafolio; que resulta de la aplicación de técnicas matemáticas a partir de la data ya organizada.

2.7.1 Estimación del rendimiento esperado de un portafolio:

La metodología para la estimación del rendimiento esperado de un portafolio es sencilla, toda vez, se disponga del rendimiento esperado de cada acción componente, y se pueda asumir razonablemente que la distribución de rendimientos de cada acción durante el periodo de análisis se asemeja a una distribución normal de probabilidad. En el desarrollo del presente trabajo se asume dicho supuesto para proceder, de acuerdo al criterio de estabilidad de una distribución normal, que afirma que cualquier combinación lineal de variables cuya distribución es normal, da por resultado también una distribución normal. (Alexander, 2008)

Por lo anterior el rendimiento esperado de un portafolio puede estimarse como la expectativa de la distribución resultante, que se expresa como una suma ponderada del momento central de sus componentes (Clark, 2013):

$$E[r_p] = \sum_{i=1}^N E[r_i] * w_i$$

Donde $E[r_p]$ denotará el rendimiento esperado del portafolio y w_x el peso o componente correspondiente a cada acción evaluada.

En la práctica el supuesto de normalidad en la distribución de rendimientos es ampliamente admitido, no obstante –cabe decirlo– matemáticamente difícilmente se satisface; principalmente por dos factores: datos extremos a ambos costados de la distribución *outliers*, e inclinación ligeramente hacia la izquierda o sesgo positivo. Para contrarrestar –o cuando menos– gestionar la existencia de dichas inconsistencias, más adelante se describirá la metodología a aplicar en el modelo de Valor en Riesgo.

2.7.2 Estimación del riesgo total de portafolio:

Al igual que el riesgo total de una acción, se definirá el riesgo del portafolio por la estimación de su desviación estándar. Sin embargo, a diferencia del retorno esperado del portafolio, cuya estimación se definió linealmente como la suma ponderada de los retornos esperados de cada acción; la desviación estándar, al no ser lineal –pues en efecto es la raíz cuadrada de la varianza– que es a su vez, es por definición no lineal, precisa un desarrollo matemático adicional.

Recuérdese, que la varianza se define como la expectativa de la diferencia entre la variable y su media, al cuadrado. Partiendo de tal definición, en términos del rendimiento de portafolio, se tiene la expresión siguiente (Francis & Donggheol, 2013)

$$\sigma_p^2 = E[(r_p - E[r_p])^2]$$

Reconociendo el rendimiento esperado del portafolio y cada una de sus observaciones como una combinación lineal de N acciones evaluadas. Se formula a continuación para un portafolio N = 2, es decir con la incorporación de dos acciones (a y b) cuyos pesos o componentes en el portafolio se denotan como: w_a y w_b , se expresa la expectativa en términos de sus componentes:

$$\sigma_p^2 = E[(w_a r_a + w_b r_b) - (w_a * E[r_a] + w_b * E[r_b])]^2$$

Operando paréntesis:

$$\sigma_p^2 = E[w_a r_a + w_b r_b - w_a * E[r_a] - w_b * E[r_b]]^2$$

Factorizando por agrupación al interior:

$$\sigma_P^2 = E[w_a(r_a - E[r_a]) + w_b(r_b - E[r_b])]^2$$

Operando el exponente como el producto notable de $(a + b)^2$:

$$\sigma_P^2 = E[w_a^2(r_a - E[r_a])^2 + w_b^2(r_b - E[r_b])^2 + 2 * w_a(r_a - E[r_a]) * w_b(r_b - E[r_b])]]$$

Aplicando la propiedad lineal del operador de expectativa:

$$\sigma_P^2 = E[w_a^2(r_a - E[r_a])^2] + E[w_b^2(r_b - E[r_b])^2] + E[2 * w_a(r_a - E[r_a]) * w_b(r_b - E[r_b])]$$

Entendiendo que w_a y w_b son números constantes cuales quiera, y como tal pueden extraerse del operador de expectativa como un factor común:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 * E[(r_a - E[r_a])^2] + w_b^2 * E[(r_b - E[r_b])^2] + 2w_a w_b * E[(r_a - E[r_a]) * (r_b - E[r_b])]$$

Donde las tres expectativas resultantes pueden claramente entenderse como la varianza de "a", la varianza de "b" y la covarianza de "a" y "b":

$$\sigma_a^2 = E[(r_a - E[r_a])^2]$$

$$\sigma_b^2 = E[(r_b - E[r_b])^2]$$

$$\sigma(a, b) = E[(r_a - E[r_a]) * (r_b - E[r_b])]$$

Así, finalmente puede definirse la varianza del portafolio en términos de la varianza de las acciones y la covarianza entre ellas:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma(a, b)$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$$

la desviación estándar del portafolio, es entonces simplemente igual a la raíz cuadrada de tal expresión.

Reconociendo que la estructura de la expresión final para la varianza del portafolio obedece al producto notable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, sigue que, de la incorporación de 3 acciones (a, b y c), la estructura de la expresión sería la del producto notable correspondiente: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Así la varianza del portafolio compuesto por (a, b, y c), se define en términos de sus componentes como:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + w_c^2 \sigma_c^2 + 2w_a w_b \sigma(a, b) + 2w_a w_c \sigma(a, c) + 2w_b w_c \sigma(b, c)$$

El mismo procedimiento ha de ser aplicable para la integración de 4 acciones, por expansión: $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$. Sin embargo, metodológicamente conviene aplicar un procedimiento de matrices dado el riesgo de omitir alguno de los sumandos accidentalmente.

A continuación, se describe la metodología aplicada por medio del uso de matrices para determinar la desviación estándar de portafolio compuesto por 3 acciones (a,b,c), siendo aplicable para cualquier valor de N. Algebra de Matrices tomado de: (Dolciani, Berman, & Wooton, 1976). Se parte de una matriz cuadrada de N = 3 acciones (a, b, c), donde cada una de las distintas combinaciones de filas y columnas representan todas las posibles parejas de acciones y sus respectivas covarianzas:

		w_a	w_b	w_c
		a	b	c
w_a	a	σ_a^2	$\sigma_{(a,b)}$	$\sigma_{(a,c)}$
w_b	b	$\sigma_{(b,a)}$	σ_b^2	$\sigma_{(b,c)}$
w_c	c	$\sigma_{(c,a)}$	$\sigma_{(c,b)}$	σ_c^2

Nótese, que la diagonal que parte en dos la matriz representa las combinaciones (a,a), (b,b) y (c,c), por lo que la covarianza de tal pareja formada por la misma acción, es igual a la varianza de cada una de ellas. Adicionalmente, se representa simbólicamente que a cada acción corresponde su peso componente en el portafolio (w_a, w_b, w_c), dichos componentes se anotan tanto en fila como en columna arriba y a la izquierda. De tal

suerte se tienen dos vectores de pesos componentes, que se aplicaran por multiplicación de matrices a la matriz de covarianzas.

Dado que dos matrices pueden multiplicarse, si y solo si, el número de filas de la segunda matriz es igual al número de columnas de la primera, el vector de componentes horizontal se transpone, para convertirse en un vector columna.

Ambos vectores que se multiplicarán se ubican a la derecha, y la matriz de covarianzas a la izquierda, para cumplir la condición de *sine qua non* para la multiplicación de matrices en el primer producto. Nótese a continuación, que el primer vector de componentes a operar tiene 3 filas, el mismo número de columnas que tiene la matriz de covarianzas.

$$\begin{vmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{(a,b)} & \sigma_{(a,c)} \\ \sigma_{(b,a)} & \sigma_b^2 & \sigma_{(b,c)} \\ \sigma_{(c,a)} & \sigma_{(c,b)} & \sigma_c^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{vmatrix}$$

El resultado de la primera multiplicación –la matriz de covarianzas por el primer vector de componentes– da como resultado una matriz con el mismo número de filas que la primera y el mismo número de columnas que la segunda, es decir una matriz de 3 filas y 1 columna. Recuérdese que en la multiplicación de matrices cada casilla de la matriz resultante, es la suma del producto de cada elemento de la enésima fila de la primera matriz, por cada producto de la enésima columna de la segunda matriz. Así, el producto de la primera multiplicación será una matriz de 3 filas y una columna, cuyos valores son simbolizados a continuación como v_1 , v_2 y v_3 :

$$\begin{vmatrix} \sigma_a^2 * w_a & + & \sigma_{(a,b)} * w_b & + & \sigma_{(a,c)} * w_c \\ \sigma_{(b,a)} * w_a & + & \sigma_b^2 * w_b & + & \sigma_{(b,c)} * w_c \\ \sigma_{(c,a)} * w_a & + & \sigma_{(c,b)} * w_b & + & \sigma_c^2 * w_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$$

Nótese, que a la izquierda se expone la secuencia operativa para hallar cada valor v_i , este procedimiento en notación matricial se conoce como producto punto. Así, el primer valor v_i que simboliza la primera fila y la primera columna de la matriz resultante, resulta de tomar la primera fila de la primera matriz, y la primera columna de la segunda matriz, multiplicar el primer elemento de fila por el primer elemento de columna, segundo elemento de fila por segundo elemento de columna, y tercer elemento de fila por tercer elemento de columna, y sumar los productos. El mismo procedimiento se realiza para obtener el valor v_2 , que corresponde a la segunda fila y primera columna de la matriz resultante, es decir, se toma la segunda fila de la primera matriz, la primera columna de la segunda matriz, y se opera el producto punto como recién descrito. Finalmente, el valor v_3 , que corresponde a la tercera fila y primera columna de la matriz resultante, resulta de tomar tercera fila de la primera matriz, primera columna de la segunda matriz, y operar nuevamente el producto punto.

A continuación, debe operarse la matriz resultante del primer producto, por el segundo vector de pesos componentes:

$$\begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{|c|} \hline w_a \\ \hline w_b \\ \hline w_c \\ \hline \end{array}$$

Nótese, sin embargo, que para operar dicho producto, debe cumplirse con la condición para multiplicación de matrices: que el número de filas de la segunda matriz sea igual al número de columnas de la primera matriz, para satisfacer tal condición, puede transponerse, bien el primer vector, o el segundo; no obstante, permítase identificar que al transponer el segundo vector, el resultado del producto sería una matriz con número de filas igual al de la primera y número de columnas igual al de la segunda, lo que resultaría en una matriz 3 x 3. Alternativamente, al transponer el primer vector, el resultado será un único valor, es decir una “matriz” de una fila y una columna:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 * w_a + v_2 * w_b + v_3 * w_c \end{vmatrix}$$

Permítase a continuación, sustituir v_1 , v_2 y v_3 por los sumandos que representan. La expresión resultante determinará finalmente la varianza del portafolio (a, b, c) con pesos componentes (w_a, w_b, w_c):

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = & (\sigma_a^2 * w_a + \sigma_{(a,b)} * w_b + \sigma_{(a,c)} * w_c) * w_a + \\ & (\sigma_{(b,a)} * w_a + \sigma_b^2 * w_b + \sigma_{(b,c)} * w_c) * w_b + \\ & (\sigma_{(c,a)} * w_a + \sigma_{(c,b)} * w_b + \sigma_c^2 * w_c) * w_c \end{aligned}$$

Operando los productos indicados:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = & \sigma_a^2 * w_a^2 + \sigma_{(a,b)} * w_b * w_a + \sigma_{(a,c)} * w_c * w_a + \\ & \sigma_{(b,a)} * w_a * w_b + \sigma_b^2 * w_b^2 + \sigma_{(b,c)} * w_c * w_b + \\ & \sigma_{(c,a)} * w_a * w_c + \sigma_{(c,b)} * w_b * w_c + \sigma_c^2 * w_c^2 \end{aligned}$$

Nótese, que por definición matemática, la covarianza entre “a” y “b”, es igual a la covarianza entre “b” y “a”, por lo cual, la expresión ha de reducirse:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = & \sigma_a^2 * w_a^2 + 2 * \sigma_{(a,b)} * w_a * w_b + 2 * \sigma_{(a,c)} * w_a * w_c + \\ & \sigma_b^2 * w_b^2 + 2 * \sigma_{(b,c)} * w_b * w_c + \\ & \sigma_c^2 * w_c^2 \end{aligned}$$

Reordenando los términos:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + w_c^2 \sigma_c^2 + 2w_a w_b \sigma(a, b) + 2w_a w_c \sigma(a, c) + 2w_b w_c \sigma(b, c)$$

El resultado es consistente con el procedimiento algebraico descrito inicialmente, por lo que ambos resultados se comprueban y han de ser indiferentemente aplicables.

Cabe resaltar, que si bien la exposición del procedimiento a aplicar por matrices, resultó exhaustiva, su aplicación por medio de Microsoft Excel, resulta categóricamente conveniente. En efecto, la matriz de covarianzas, que sirve de base para el cálculo de la varianza del portafolio, resulta conveniente desarrollarla también por matrices.

2.7.3 Metodología para matrices de covarianza y correlación:

Como primer punto es preciso integrar una matriz de rendimientos diarios. Esta matriz integrará en columnas cada una de las acciones a evaluar, incluyendo el índice de mercado, pues recuérdese que la covarianza de cada acción con él, es necesaria para estimar la volatilidad de la acción. La matriz de rendimientos diarios, será entonces, una matriz con filas igual a n observaciones, y columnas igual a N acciones.

		N Acciones:		
		a	b	c
n Observaciones	1	$r_{(a)_1}$	$r_{(b)_1}$	$r_{(c)_1}$
	2	$r_{(a)_2}$	$r_{(b)_2}$	$r_{(c)_2}$
	3	$r_{(a)_3}$	$r_{(b)_3}$	$r_{(c)_3}$
	n	$r_{(a)_n}$	$r_{(b)_n}$	$r_{(c)_n}$

A continuación, se creará una segunda matriz, con la misma cantidad de filas y columnas, cuyos elementos son los rendimientos esperados de cada acción, así todas las filas de la columna “a” registrarán el rendimiento esperado de la acción “a”, el resto de columnas, correspondientes a cada acción se integrará de la misma forma. Esta será la matriz de rendimientos esperados, que debe ser en todo momento del mismo orden ($n \times N$) que la matriz de rendimientos diarios. Posteriormente se procederá por sustracción de matrices, recordando que dos matrices pueden sumarse o restarse, si y sólo si, ambas son del mismo orden, es decir tienen el mismo número de filas y columnas. El resultado es una matriz del mismo orden ($n \times N$) donde cada elemento es simplemente el resultado de sustraer casilla por casilla el elemento de la primera matriz, menos el correspondiente elemento de la segunda matriz:

Rendimientos Diarios	Rendimientos Esperados	Rendimientos Diarios – Rendimientos Esperados
$\begin{vmatrix} r_{(a)_1} & r_{(b)_1} & r_{(c)_1} \\ r_{(a)_2} & r_{(b)_2} & r_{(c)_2} \\ r_{(a)_3} & r_{(b)_3} & r_{(c)_3} \\ r_{(a)_n} & r_{(b)_n} & r_{(c)_n} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} E[r_a] & E[r_b] & E[r_c] \\ E[r_a] & E[r_b] & E[r_c] \\ E[r_a] & E[r_b] & E[r_c] \\ E[r_a] & E[r_b] & E[r_c] \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} r_{(a)_1} - E[r_a] & r_{(b)_1} - E[r_b] & r_{(c)_1} - E[r_c] \\ r_{(a)_2} - E[r_a] & r_{(b)_2} - E[r_b] & r_{(c)_2} - E[r_c] \\ r_{(a)_3} - E[r_a] & r_{(b)_3} - E[r_b] & r_{(c)_3} - E[r_c] \\ r_{(a)_n} - E[r_a] & r_{(b)_n} - E[r_b] & r_{(c)_n} - E[r_c] \end{vmatrix}$

De acuerdo a la definición de covarianza corresponde realizar el producto de cada diferencia observada de una acción y su contraparte. Para lograr tal proeza en un solo paso, se procede por medio de la multiplicación de la matriz de diferencias, por su transpuesta. De tal suerte que se obtenga una matriz (N x N), es decir con un número de filas y columnas igual al número de acciones:

Matriz de Diferencias	Matriz de Diferencias Transpuesta
$\begin{vmatrix} r_{(a)_1} - E[r_a] & r_{(b)_1} - E[r_b] & r_{(c)_1} - E[r_c] \\ r_{(a)_2} - E[r_a] & r_{(b)_2} - E[r_b] & r_{(c)_2} - E[r_c] \\ r_{(a)_3} - E[r_a] & r_{(b)_3} - E[r_b] & r_{(c)_3} - E[r_c] \\ r_{(a)_n} - E[r_a] & r_{(b)_n} - E[r_b] & r_{(c)_n} - E[r_c] \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} r_{(a)_1} - E[r_a] & r_{(a)_2} - E[r_a] & r_{(a)_3} - E[r_a] & r_{(a)_n} - E[r_a] \\ r_{(b)_1} - E[r_b] & r_{(b)_2} - E[r_b] & r_{(b)_3} - E[r_b] & r_{(b)_n} - E[r_b] \\ r_{(c)_1} - E[r_c] & r_{(c)_2} - E[r_c] & r_{(c)_3} - E[r_c] & r_{(c)_n} - E[r_c] \end{vmatrix}$

El resultado será una matriz (N x N) con la covarianza intermedia $CI_{(x,y)}$ para cada pareja de acciones posible:

	a	b	c
a	$CI_{(a,a)}$	$CI_{(a,b)}$	$CI_{(a,c)}$
b	$CI_{(b,a)}$	$CI_{(b,b)}$	$CI_{(b,c)}$
c	$CI_{(c,a)}$	$CI_{(c,b)}$	$CI_{(c,c)}$

A continuación, resta únicamente dividir cada elemento en la matriz de covarianza Intermedia entre el número de observaciones n , esta no es una operación de matrices, sino únicamente una división elemento por elemento:

	a	b	c
a	$\frac{CI_{(a,a)}}{n}$	$\frac{CI_{(a,b)}}{n}$	$\frac{CI_{(a,c)}}{n}$
b	$\frac{CI_{(b,a)}}{n}$	$\frac{CI_{(b,b)}}{n}$	$\frac{CI_{(b,c)}}{n}$
c	$\frac{CI_{(c,a)}}{n}$	$\frac{CI_{(c,b)}}{n}$	$\frac{CI_{(c,c)}}{n}$

Recordando la definición matemática de la covarianza entre dos variables, puede notarse que el resultado en cada casilla es efectivamente la covarianza entre el par de acciones formado por el encabezado de fila y columna:

	a	b	c
a	σ_a^2	$\sigma_{(a,b)}$	$\sigma_{(a,c)}$
b	$\sigma_{(b,a)}$	σ_b^2	$\sigma_{(b,c)}$
c	$\sigma_{(c,a)}$	$\sigma_{(c,b)}$	σ_c^2

Disponiendo ya de la matriz de covarianzas, puede procederse por medio de dos pasos más, a resolverse la matriz de correlaciones.

Recordando que la correlación entre dos variables resulta del cociente entre la covarianza entre tales variables y el producto de sus desviaciones estándar; se procede a formar una matriz con el producto de todas las distintas parejas de desviaciones estándar. Tal matriz se formará por el producto de dos vectores, el primero vertical y el segundo horizontal, cuyos elementos son las desviaciones estándar de cada acción. La matriz resultante será una matriz (N x N), donde N nuevamente es igual al número de acciones evaluadas (a, b, c):

Vectores		Matriz Producto
Desviación Estándar		Desviaciones Estándar
$\begin{vmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \\ \sigma_c \end{vmatrix}$	x	$\begin{vmatrix} \sigma_a & \sigma_b & \sigma_c \\ \sigma_b \sigma_a & \sigma_b^2 & \sigma_b \sigma_c \\ \sigma_c \sigma_a & \sigma_c \sigma_b & \sigma_c^2 \end{vmatrix}$
	=	$\begin{vmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_a \sigma_b & \sigma_a \sigma_c \\ \sigma_b \sigma_a & \sigma_b^2 & \sigma_b \sigma_c \\ \sigma_c \sigma_a & \sigma_c \sigma_b & \sigma_c^2 \end{vmatrix}$

Al disponer de la matriz de desviaciones estándar, puede procederse a dividir elemento por elemento cada casilla de la matriz de covarianzas entre la casilla correspondiente de la matriz de producto de desviaciones estándar:

División			Matriz				
Casilla / Casilla			Correlaciones				
	a	b	c		a	b	c
a	$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2}$	$\frac{\sigma_{(a,b)}}{\sigma_a \sigma_b}$	$\frac{\sigma_{(a,c)}}{\sigma_a \sigma_c}$	a	1	$R_{(a,b)}$	$R_{(a,c)}$
b	$\frac{\sigma_{(b,a)}}{\sigma_b \sigma_a}$	$\frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2}$	$\frac{\sigma_{(b,c)}}{\sigma_b \sigma_c}$	b	$R_{(b,a)}$	1	$R_{(b,c)}$
c	$\frac{\sigma_{(c,a)}}{\sigma_c \sigma_a}$	$\frac{\sigma_{(c,b)}}{\sigma_c \sigma_b}$	$\frac{\sigma_c^2}{\sigma_c^2}$	c	$R_{(c,a)}$	$R_{(c,b)}$	1

La matriz de correlaciones resultante, debe presentar unos (1's) como resultado de la diagonal, pues la correlación de una variable consigo misma, es necesariamente igual a 1 en todos los casos. Observar tal resultado, sirve de comprobación del éxito del procedimiento ejecutado.

Fundamentos de Algebra de Matrices, tomados de: (Dolciani, et al. 1976. pp 551 - 579) y (Alexander C. 2008. pp 38 - 47).

2.7.4 Perfil de riesgo del portafolio:

El perfil de riesgo del portafolio se medirá e interpretará de igual forma que el perfil de riesgo de la acción, es decir, por medio del coeficiente de variación (Clark, 2013):

$$cv_P = \frac{\sigma_P}{E[r_P]}$$

2.7.5 Rendimiento ajustado al riesgo del portafolio:

El rendimiento ajustado al riesgo del portafolio se medirá e interpretará de la misma forma que el rendimiento ajustado al riesgo de la acción, por medio del recíproco del coeficiente de variación del portafolio:

$$RAR_P = \frac{E[r_P]}{\sigma_P}$$

2.7.6 Volatilidad del portafolio:

La volatilidad del portafolio se medirá e interpretará de igual forma que la volatilidad de la acción, por medio del coeficiente Beta del portafolio:

$$\beta_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} * R(P, M)$$

Nótese que, para determinar la volatilidad del portafolio, es decir su sensibilidad ante movimientos en el mercado, corresponde disponer del coeficiente de correlación entre el rendimiento del portafolio y el rendimiento del mercado, representado en este caso por el rendimiento en el índice de referencia S&P500. Para ello, ya conociendo los activos que integran el portafolio y sus pesos componentes –temas que se abordarán en la sección que comienza a la vuelta de esta página– se expondrá un procedimiento matemático simplificado, para inferir, a partir de dichos componentes, el coeficiente de correlación entre el portafolio y el rendimiento mercado. Por el momento, permítase definir alternativamente la volatilidad del portafolio como: $\beta_P = w_a\beta_a + w_b\beta_b \dots + w_x\beta_x$.

2.8 HERRAMIENTAS CUANTITATIVAS PARA GESTIÓN DE PORTAFOLIO

“Todo proceso de decisión, integra tres elementos en común, en primer lugar; caracterizar las alternativas, en segundo; delinear los criterios de decisión, y en tercero; seleccionar la opción óptima” –The Economic Theory of Choice– Alexander Carol (2018).

En la presente sección, se presenta detalladamente la propuesta metodológica a emplear para atender el tercer elemento del proceso de toma de decisiones, referido por Alexander Carol como “la decisión óptima”, es decir; la distribución óptima de capital en activos de un portafolio que maximice el beneficio esperado para el inversionista.

2.8.1 Propuesta analítica para la selección de activos:

Permítase anteceder el asunto de la distribución óptima, con la interrogante ¿sobre qué? El punto es: existe potencialmente un sin fin de alternativas para el destino de inversión; ¿puede acaso conocerse –o tan siquiera aproximarse a conocer– cuáles de dichas alternativas han de resultar más provechosas como destino de inversión y su posterior distribución óptima?

En atención a dicha dificultad, se presenta un esquema de autoría propia para la determinación de aquellas parejas de activos que presentan mayor potencial, en adelante referido como “coeficiente de adecuación”. El esquema está basado en dos criterios: 1) rendimiento esperado combinado de dos acciones, basado en la suma de los rendimientos esperados de cada activo y 2) potencial de reducción de riesgo, basado en el coeficiente de correlación entre las mismas dos acciones.

La implementación del esquema de la Matriz de Adecuación, tiene la finalidad de filtrar aquellas combinaciones de dos activos que han de presentar mayor beneficio potencial de constituirse en un portafolio de inversión. Partiendo de tal selección de activos, a la determinación de la colocación óptima de capital en cada uno de ellos.

Para la implementación de la Matriz de Adecuación, se organizan tres matrices: matriz de rendimientos combinados, matriz de correlación modificada, y matriz de coeficientes.

La matriz de rendimientos combinados tiene la finalidad de establecer cuál es el potencial de rendimiento de todas las posibles parejas de acciones, para lo cual se forma por N filas y N columnas, siendo N el número de acciones evaluadas, cada una de las casillas corresponde a la combinación de dos acciones, y el valor a computar en cada una de ellas es la suma de rendimientos esperados de cada una de las acciones combinadas.

Dado que dos matrices pueden sumarse, si y sólo si, ambas matrices son del mismo orden, precisa disponerse de una matriz, que registra en cada columna las acciones evaluadas y su correspondiente rendimiento esperado, con un número de filas igual N. A dicha matriz, se le suma su matriz transpuesta para obtener una matriz del mismo orden (N x N) que integra la suma de los rendimientos esperados de todas las posibles combinaciones de acciones en parejas:

Matriz de Rendimientos Esperados				Transpuesta Rendimientos Esperados		
a	b	c		a	b	c
$E[r_a]$	$E[r_b]$	$E[r_c]$		$E[r_a]$	$E[r_a]$	$E[r_a]$
$E[r_a]$	$E[r_b]$	$E[r_c]$	+	$E[r_b]$	$E[r_b]$	$E[r_b]$
$E[r_a]$	$E[r_b]$	$E[r_c]$		$E[r_c]$	$E[r_c]$	$E[r_c]$

Matriz de Rendimientos Combinados				
	a	b	c	
=	A	$E[r_a] + E[r_a]$	$E[r_a] + E[r_b]$	$E[r_a] + E[r_c]$
	B	$E[r_b] + E[r_a]$	$E[r_b] + E[r_b]$	$E[r_b] + E[r_c]$
	C	$E[r_c] + E[r_a]$	$E[r_c] + E[r_b]$	$E[r_c] + E[r_c]$

A continuación, se procede a construir una matriz de correlación modificada. Para ello, se parte de la matriz de correlación (N x N) que se realizó con anterioridad y simplemente se procede a sumar 1.0 a cada uno de los valores. Simbólicamente:

		Matriz Correlaciones						Matriz Unitaria (N x N)			
		a	b	c				1	1	1	
a		1	$R_{(a,b)}$	$R_{(a,c)}$				1	1	1	
b		$R_{(b,a)}$	1	$R_{(b,c)}$	+				1	1	1
c		$R_{(c,a)}$	$R_{(c,b)}$	1				1	1	1	

		Matriz Correlación Modificada		
		a	b	c
	a	2	$R_{(a,b)} + 1$	$R_{(a,c)} + 1$
=	b	$R_{(b,a)} + 1$	2	$R_{(b,c)} + 1$
	c	$R_{(c,a)} + 1$	$R_{(c,b)} + 1$	2

La matriz de correlación modificada resultante, contendrá necesariamente valores en el rango de CERO a 2, donde 2 representa una correlación perfecta entre variables, y CERO representa una correlación perfectamente inversa entre variables. El valor intermedio, en lugar de CERO, será aquí de 1, representando una correlación inexistente. Obsérvese que la matriz modificada debe presentar en todo caso valores de 2 en toda la diagonal que representa la correlación de una variable consigo misma. Esta matriz tiene la virtud de conservar interpretativamente la magnitud de la correlación entre dos

variables, más permite su aplicación en forma de cociente, al anular la afectación del signo positivo o negativo original.

Finalmente, se procede a realizar la división uno a uno de los valores en la matriz de rendimientos combinados entre su correspondiente valor de la matriz de correlación modificada. Cabe aclarar que esta no es una operación de división de matrices –pues de hecho dicha operación no existe como tal– sino es únicamente una división casilla por casilla como se muestra a continuación:

Matriz de Adecuación			
	a	b	c
a	$\frac{E[r_a] + E[r_a]}{2}$	$\frac{E[r_a] + E[r_b]}{R_{(a,b)} + 1}$	$\frac{E[r_a] + E[r_c]}{R_{(a,c)} + 1}$
b	$\frac{E[r_b] + E[r_a]}{R_{(b,a)} + 1}$	$\frac{E[r_b] + E[r_b]}{2}$	$\frac{E[r_b] + E[r_c]}{R_{(b,c)} + 1}$
c	$\frac{E[r_c] + E[r_a]}{R_{(c,a)} + 1}$	$\frac{E[r_c] + E[r_b]}{R_{(c,b)} + 1}$	$\frac{E[r_c] + E[r_c]}{2}$

Como resultado del cociente entre el rendimiento combinado y la correlación modificada, se obtiene finalmente lo que se introduce en el presente trabajo como Coeficiente de Adecuación. Dicho valor pretende capturar el potencial de rendimiento combinado de una pareja de activos A y B, como una razón del grado de relación entre ambos, tal que, aquellas combinaciones de acciones que presenten un mayor valor de rendimiento combinado, relativo a su correlación, puedan ser consideradas como más adecuadas para la formación de un portafolio, bajo el criterio de maximización de rendimiento ajustado al riesgo; es decir, que ofrezcan el mayor número de unidades de rendimiento, por cada unidad de riesgo asumido.

El Perfil de Adecuación propuesto, se constituye entonces en una metodología objetiva para la selección de las combinaciones de activos que presenten el mayor potencial de

eficiencia en la colocación de capital, basado en los conceptos anteriormente desarrollados al respecto del riesgo de un portafolio, el cual puede verse disminuido en la medida que la correlación entre sus activos sea más lejana a la unidad, sin dicha reducción de riesgo, afectar el rendimiento esperado del portafolio. (Clark, 2013)

El valor interpretativo del Perfil de Adecuación, radica en que, a pesar de que una combinación de acciones A y B pueda presentar un menor rendimiento combinado que una combinación A y C, si la correlación modificada entre los rendimientos de A y B es lo suficientemente baja, su valor relativo puede ser superior al de la combinación A y C dado que su correlación sea alta. De tal suerte, todas las posibles combinaciones de acciones representadas en la Matriz de Adecuación, podrán finalmente organizarse de mayor a menor para identificar la o las combinaciones de acciones más “adecuadas” para incorporar en un portafolio.

Nótese que, de no modificar el rango de valores del coeficiente de correlación entre las variables, de: $-1 \leq R \leq 1$, a: $0 \leq R_M \leq 2$, la referida relación de “adecuación” no sería posible, pues aquellos valores negativos de R, fallarían en proporcionar la dirección interpretativa, lo que resulta naturalmente indeseable, pues son precisamente las combinaciones de activos cuyos rendimientos se hallan inversamente correlacionados, los que presentan mayor potencial para la reducción de riesgo.

2.8.2 Colocación óptima de capital:

La colocación óptima de capital, se refiere simplemente a la proporción de cada activo sobre el total del portafolio, tal que, su integración maximice la utilidad del inversionista. En el presente trabajo se aborda la construcción de portafolios compuestos por una combinación de dos activos, sobre los cuales ha de distribuirse enteramente la totalidad del capital, es decir que la suma de ambos debe permanecer constante en 100% y la distribución en todo caso es positiva, es decir, las posiciones abiertas en cada activo son llamadas comúnmente posiciones largas. Dichas condicionantes previenen de lo que se denomina en terminología de la industria “ventas en corto”, que representarían valores negativos, y uso de apalancamientos, que representarían valores superiores a 100%.

Dos alternativas existen en cuanto a la determinación de la distribución óptima de capital: 1) la distribución de capital que minimiza el riesgo del portafolio y 2) la distribución de capital que optimiza el riesgo del portafolio. Ambas se atienden matemáticamente de acuerdo al mismo principio, pero la segunda resulta considerablemente más compleja que la primera. A continuación, se detalla el procedimiento de ambas, lógicamente principiando por la primera:

2.8.3 Determinación del portafolio de riesgo mínimo:

Para determinar la distribución óptima de capital en un portafolio compuesto por una combinación de dos activos; bajo la premisa de minimización de riesgo, es decir, llevar el riesgo del portafolio al mínimo posible; se parte de la definición de desviación estándar del portafolio, representativa de su riesgo (Francis & Donggheol, 2013):

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$$

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma(a, b)$$

Naturalmente minimizar la desviación estándar del portafolio, implica minimizar su varianza, así que se procede para esta última, escribiendo la expresión en términos únicamente del peso componente “a”: w_a , de tal suerte que el peso componente del “b” ha de ser en todo momento igual a: $1 - w_a$:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + (1 - w_a)^2 \sigma_b^2 + 2w_a(1 - w_a)\sigma_{ab}$$

Operando paréntesis se tiene:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + (1 + w_a^2 - 2w_a)\sigma_b^2 + 2w_a\sigma_{ab} - 2w_a^2\sigma_{ab}$$

Distribuyendo el producto indicado:

$$\sigma_P^2 = w_a^2 \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + w_a^2 \sigma_b^2 - 2w_a \sigma_b^2 + 2w_a \sigma_{ab} - 2w_a^2 \sigma_{ab}$$

La expresión anterior, define la varianza del portafolio en función del peso componente asignado al activo “a”. Obsérvese que el resto de términos en la expresión son simplemente los parámetros estadísticos ya previamente obtenidos (varianza y covarianza), por lo que en lo que al modelo atañe, pueden considerarse constantes. De tal suerte, se ha de optimizar el modelo en función de w_a .

Para optimizar el modelo –minimizar el riesgo en este caso– basta con hallar el punto mínimo de la función de varianza del portafolio; para lo cual se procede mediante la primera derivada de la función de varianza del portafolio en función de w_a obteniéndose:

$$\mathcal{D}[\sigma_p^2] = 2w_a\sigma_a^2 + 2w_a\sigma_b^2 - 2\sigma_b^2 + 2\sigma_{ab} - 4w_a\sigma_{ab}$$

A continuación, dado que por definición, se busca un punto en el que la pendiente de la función se convierte en cero, la primera derivada de la función se iguala a CERO y se resuelve para encontrar el valor de w_a en dicho punto.

$$2w_a\sigma_a^2 + 2w_a\sigma_b^2 - 2\sigma_b^2 + 2\sigma_{ab} - 4w_a\sigma_{ab} = 0$$

Dividiendo la igualdad entre 2, puede reducirse el coeficiente de los términos a la izquierda:

$$\begin{aligned} \frac{2w_a\sigma_a^2 + 2w_a\sigma_b^2 - 2\sigma_b^2 + 2\sigma_{ab} - 4w_a\sigma_{ab}}{2} &= \frac{0}{2} \\ &= w_a\sigma_a^2 + w_a\sigma_b^2 - \sigma_b^2 + \sigma_{ab} - 2w_a\sigma_{ab} = 0 \end{aligned}$$

Resulta conveniente agrupar y factorizar términos que contienen w_a :

$$w_a(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab}) = \sigma_b^2 - \sigma_{ab}$$

Finalmente se multiplica la igualdad por el factor $(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab})$ para despejar w_a :

$$w_a = \frac{\sigma_b^2 - \sigma_{ab}}{(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab})}$$

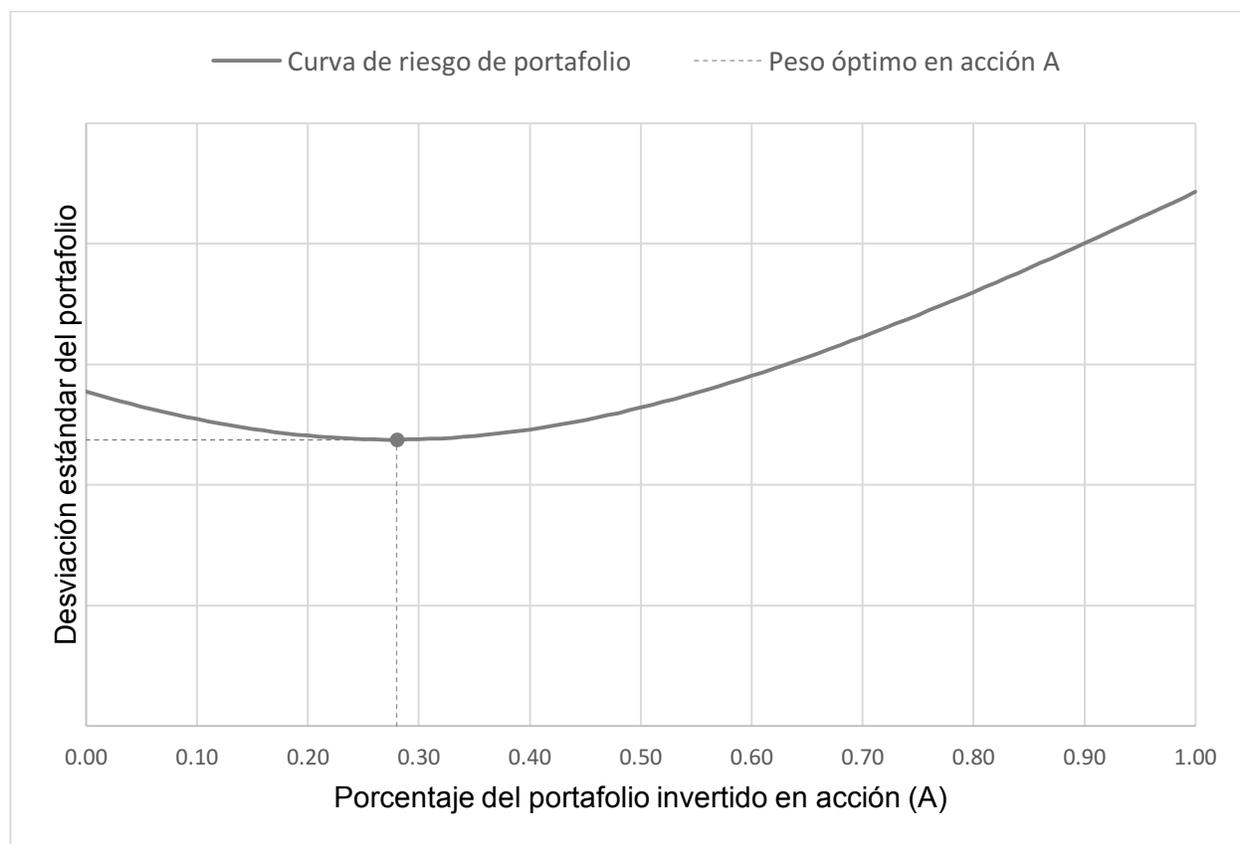
Sustituyendo valores en la ecuación, se resuelve el valor de w_a tal que, la varianza del portafolio integrado por las acciones A y B, sea la mínima posible.

El valor determinado del peso componente de la acción A; w_a , determina a su vez el valor del peso componente de la acción B; w_b , toda vez que $w_b = 1 - w_a$. tal que, se cumpla la condicionante $w_a + w_b = 1$.

Alexander (2008) sugiere que la representación gráfica de este punto, puede apreciarse en un espacio cartesiano donde el eje de las abscisas registra los distintos valores de w_a desde 0 hasta 1, tal que $w_b = 1 - w_a$, y el eje de las ordenadas representa el valor de la desviación estándar del portafolio resultante:

Figura 1.

Punto w_a para desviación estándar mínima en un portafolio donde $w_b = 1 - w_a$.



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

2.8.4 Determinación del portafolio de riesgo óptimo:

La distribución de capital bajo el criterio de optimización de riesgo, va más allá de obtener el mínimo riesgo posible; y en efecto procura aquella combinación que maximiza la eficiencia del riesgo, es decir, obtener el máximo rendimiento por unidad de riesgo.

Dicha visión es consistente con el principio de “dominancia” de Markowitz, que expresa que un activo es dominante si presenta el menor nivel de riesgo relativo al rendimiento ofrecido, o bien el mayor nivel de rendimiento relativo al riesgo asumido. (Clark, 2013)

Entendiendo que un portafolio, es en todo caso también un activo, corresponde determinar aquel portafolio que ofrece el máximo nivel de rendimiento, relativo al riesgo asumido, para poder compararlo con aquel que se limita a minimizar el riesgo al margen del rendimiento esperado.

La derivación de la función de distribución óptima de capital para un portafolio bajo el criterio de optimización de riesgo, se tratará matemáticamente a partir de la ecuación de rendimiento ajustado al riesgo:

$$RAR_p = \frac{E[r_p]}{\sigma_p}$$

Tan simple como parece, dicha definición presenta algunas complicaciones matemáticas, pues a diferencia de simplemente derivar únicamente una función, como en el caso del portafolio de riesgo mínimo, existen ahora dos funciones implícitas; una de las cuales –la desviación estándar– es una raíz cuadrada.

A continuación, se expresa la función completa a derivar, y se expone un procedimiento de autoría propia desarrollado para un portafolio integrado por dos acciones A y B, partiendo de la expresión de rendimiento ajustado al riesgo ampliada:

$$RAR_p = \frac{w_a E[r_a] + w_b E[r_b]}{\sqrt{w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab}}}$$

Para posibilitar una resolución más directa, se procede a eliminar la raíz cuadrada, y trabajar en el denominador con la definición de varianza. Esto necesariamente significa elevar al cuadrado toda la expresión:

$$RAR_p^2 = \left(\frac{w_a E[r_a] + w_b E[r_b]}{\sqrt{w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab}}} \right)^2$$

Operando el exponente se tiene:

$$RAR_p^2 = \frac{(w_a E[r_a] + w_b E[r_b])^2}{(\sqrt{w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab}})^2}$$

Operando los exponentes, se consigue eliminar la raíz cuadrada del denominador:

$$RAR_p^2 = \frac{w_a^2 E[r_a]^2 + w_b^2 E[r_b]^2 + 2w_a w_b E[r_a] E[r_b]}{w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab}}$$

Expresando toda la función en términos de w_a toda vez $w_b = 1 - w_a$, se tiene una expresión un tanto más extensa:

$$RAR_p^2 = \frac{w_a^2 E[r_a]^2 + (1 - w_a)^2 E[r_b]^2 + 2w_a(1 - w_a) E[r_a] E[r_b]}{w_a^2 \sigma_a^2 + (1 - w_a)^2 \sigma_b^2 + 2w_a(1 - w_a) \sigma_{ab}}$$

Operando sumas al cuadrado y productos indicados:

$$RAR_p^2 = \frac{w_a^2 E[r_a]^2 + (1 + w_a^2 - 2w_a) E[r_b]^2 + 2w_a E[r_a] E[r_b] - 2w_a^2 E[r_a] E[r_b]}{w_a^2 \sigma_a^2 + (1 + w_a^2 - 2w_a) \sigma_b^2 + 2w_a \sigma_{ab} - 2w_a^2 \sigma_{ab}}$$

Distribuyendo productos indicados:

$$= \frac{w_a^2 E[r_a]^2 + E[r_b]^2 + w_a^2 E[r_b]^2 - 2w_a E[r_b]^2 + 2w_a E[r_a] E[r_b] - 2w_a^2 E[r_a] E[r_b]}{w_a^2 \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + w_a^2 \sigma_b^2 - 2w_a \sigma_b^2 + 2w_a \sigma_{ab} - 2w_a^2 \sigma_{ab}}$$

Aunque resulte difícil de creer, esta será una expresión más conveniente para trabajar en el proceso a continuación: desarrollar primera derivada, igualar a cero y resolver w_a .

A continuación, se desarrolla la primera derivada de la función:

$$\mathcal{D}[RAR_p^2] = \frac{\mathcal{D}[U_x] * V_x - U_x * \mathcal{D}[V_x]}{V_x^2}$$

Donde:

$$U_x = w_a^2 E[r_a]^2 + E[r_b]^2 + w_a^2 E[r_b]^2 - 2 w_a E[r_b]^2 + 2 w_a E[r_a] E[r_b] - 2 w_a^2 E[r_a] E[r_b]$$

y

$$V_x = w_a^2 \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + w_a^2 \sigma_b^2 - 2 w_a \sigma_b^2 + 2 w_a \sigma_{ab} - 2 w_a^2 \sigma_{ab}$$

Conviene agrupar términos semejantes y factorizar U_x y V_x :

$$U_x = w_a^2 (E[r_a]^2 + E[r_b]^2 - 2 E[r_a] E[r_b]) + 2 w_a (E[r_a] E[r_b] - E[r_b]^2) + E[r_b]^2$$

$$V_x = w_a^2 (\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \sigma_{ab}) + 2 w_a (\sigma_{ab} - \sigma_b^2) + \sigma_b^2$$

Entendiendo los términos agrupados como la suma de valores ya conocidos, pues son el resultado de los cálculos previamente desarrollados en la fase de evaluación de acciones, tales agrupaciones de términos pueden interpretarse en el modelo como valores constantes en todo caso. Para simplificar la derivación de la función, simbólicamente se representarán mediante la siguiente notación:

$$\mathbf{K} \Rightarrow (E[r_a]^2 + E[r_b]^2 - 2 E[r_a] E[r_b])$$

$$\mathbf{Y} \Rightarrow (E[r_a] E[r_b] - E[r_b]^2)$$

$$\mathbf{F} \Rightarrow (\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \sigma_{ab})$$

$$\mathbf{G} \Rightarrow (\sigma_{ab} - \sigma_b^2)$$

De forma tal, las expresiones U_x y V_x se re expresaran:

$$U_x = w_a^2 \mathbf{K} + 2 w_a \mathbf{Y} + E[r_b]^2 \quad y \quad V_x = w_a^2 \mathbf{F} + 2 w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2$$

A continuación, para obtener la primera derivada de la función de rendimiento ajustado al riesgo del portafolio –al cuadrado– se deriva cada uno de sus componentes U_x y V_x :

$$\mathcal{D}[U_x] = \mathcal{D}[w_a^2 \mathbf{K} + 2 w_a \mathbf{Y} + E[r_b]^2]$$

$$\mathcal{D}[U_x] = 2 w_a \mathbf{K} + 2 \mathbf{Y}$$

y

$$\mathcal{D}[V_x] = \mathcal{D}[w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2]$$

$$\mathcal{D}[V_x] = 2 w_a \mathbf{F} + 2 \mathbf{G}$$

Por tanto la primera derivada del rendimiento ajustado al riesgo del portafolio $\mathcal{D}[RAR_p^2]$ se re expresa como:

$$\frac{(2 w_a \mathbf{K} + 2 \mathbf{Y})(w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2) - (w_a^2 \mathbf{K} + 2 w_a \mathbf{Y} + E[r_b]^2)(2 w_a \mathbf{F} + 2 \mathbf{G})}{(w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2)^2}$$

Operando cuidadosamente los productos indicados en el numerador:

$$\frac{(2w_a^3 \mathbf{K} \mathbf{F} + 4w_a^2 \mathbf{K} \mathbf{G} + 2w_a \sigma_b^2 \mathbf{K} + 2w_a^2 \mathbf{Y} \mathbf{F} + 4w_a \mathbf{Y} \mathbf{G} + 2\sigma_b^2 \mathbf{Y}) - (2w_a^3 \mathbf{K} \mathbf{F} + 2w_a^2 \mathbf{K} \mathbf{G} + 4w_a^2 \mathbf{Y} \mathbf{F} + 4w_a \mathbf{Y} \mathbf{G} + 2w_a E[r_b]^2 \mathbf{F} + 2E[r_b]^2 \mathbf{G})}{(w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2)^2}$$

Operando la resta indicada:

$$\frac{2w_a^3 \mathbf{K} \mathbf{F} + 4w_a^2 \mathbf{K} \mathbf{G} + 2w_a \sigma_b^2 \mathbf{K} + 2w_a^2 \mathbf{Y} \mathbf{F} + 4w_a \mathbf{Y} \mathbf{G} + 2\sigma_b^2 \mathbf{Y} - 2w_a^3 \mathbf{K} \mathbf{F} - 2w_a^2 \mathbf{K} \mathbf{G} - 4w_a^2 \mathbf{Y} \mathbf{F} - 4w_a \mathbf{Y} \mathbf{G} - 2w_a E[r_b]^2 \mathbf{F} - 2E[r_b]^2 \mathbf{G}}{(w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2)^2}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\frac{2w_a^2 \mathbf{K} \mathbf{G} - 2w_a^2 \mathbf{Y} \mathbf{F} + 2w_a \sigma_b^2 \mathbf{K} - 2w_a E[r_b]^2 \mathbf{F} - 2E[r_b]^2 \mathbf{G} + 2\sigma_b^2 \mathbf{Y}}{(w_a^2 \mathbf{F} + 2w_a \mathbf{G} + \sigma_b^2)^2}$$

Ahora conviene agrupar y factorizar nuevamente la expresión en el numerador:

$$\frac{2w_a^2(\mathbf{KG} - \mathbf{YF}) + 2w_a(\sigma_b^2\mathbf{K} - E[r_b]^2\mathbf{F}) + 2(\sigma_b^2\mathbf{Y} - 2E[r_b]^2\mathbf{G})}{(w_a^2\mathbf{F} + 2w_a\mathbf{G} + \sigma_b^2)^2}$$

Recuérdese que en orden de maximizar la función, se precisa igualar a cero la primera derivada y resolver para la variable w_a :

$$\frac{2w_a^2(\mathbf{KG} - \mathbf{YF}) + 2w_a(\sigma_b^2\mathbf{K} - E[r_b]^2\mathbf{F}) + 2(\sigma_b^2\mathbf{Y} - 2E[r_b]^2\mathbf{G})}{(w_a^2\mathbf{F} + 2w_a\mathbf{G} + \sigma_b^2)^2} = 0$$

Puesto que el número 2, es factor común, puede dividirse toda la igualdad y eliminarse, de tal forma que se simplifica la expresión:

$$\frac{w_a^2(\mathbf{KG} - \mathbf{YF}) + w_a(\sigma_b^2\mathbf{K} - E[r_b]^2\mathbf{F}) + (\sigma_b^2\mathbf{Y} - 2E[r_b]^2\mathbf{G})}{(w_a^2\mathbf{F} + 2w_a\mathbf{G} + \sigma_b^2)^2} = 0$$

Permítase ahora, expresar los términos agrupados en el numerador simbólicamente como $a, b, y c$ puesto que representan en todo caso operaciones de valores ya conocidos en el modelo, y como tal pueden –una vez más– entenderse como constantes:

$$a \Rightarrow (\mathbf{KG} - \mathbf{YF})$$

$$b \Rightarrow (\sigma_b^2\mathbf{K} - E[r_b]^2\mathbf{F})$$

$$c \Rightarrow (\sigma_b^2\mathbf{Y} - 2E[r_b]^2\mathbf{G})$$

De tal forma, puede re escribirse la función derivada simplemente como:

$$\frac{a w_a^2 + b w_a + c}{(w_a^2\mathbf{F} + 2w_a\mathbf{G} + \sigma_b^2)^2} = 0$$

Puede ahora observarse en el numerador, una función cuadrática muy familiar, presentada en su forma general $ax^2 + bx + c$, la cual puede resolverse fácilmente mediante la fórmula de solución cuadrática general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde los valores de $a, b, y c$ se definieron anteriormente como representativos de:

$$a \Rightarrow (KG - YF)$$

$$b \Rightarrow (\sigma_b^2 K - E[r_b]^2 F)$$

$$c \Rightarrow (\sigma_b^2 Y - 2E[r_b]^2 G)$$

Por lo cual, al sustituirlos en la fórmula general de solución cuadrática, proporcionarán los valores solución para w_a :

$$\frac{-(\sigma_b^2 K - E[r_b]^2 F) \pm \sqrt{(\sigma_b^2 K - E[r_b]^2 F)^2 - 4(KG - YF)(\sigma_b^2 Y - 2E[r_b]^2 G)}}{2(KG - YF)}$$

Nótese, que los valores solución de la aplicación anterior, representan los ceros de la función en el numerador de la primera derivada de la función de rendimiento ajustado al riesgo del portafolio –al cuadrado–:

$$\frac{w_a^2(KG - YF) + w_a(\sigma_b^2 K - E[r_b]^2 F) + (\sigma_b^2 Y - 2E[r_b]^2 G)}{(w_a^2 F + 2w_a G + \sigma_b^2)^2} = 0$$

Puesto que, basta convertir en cero la expresión en el numerador, para convertir en cero la expresión completa –pues el cociente de cero entre cualquier número es invariablemente igual a cero– la solución de la expresión en el numerador, representa por si sola, la solución de la expresión completa, sin importar el polinomio en el denominador de la misma, y representarán los valores de w_a que conviertan en un máximo la función de rendimiento ajustado al riesgo del portafolio.

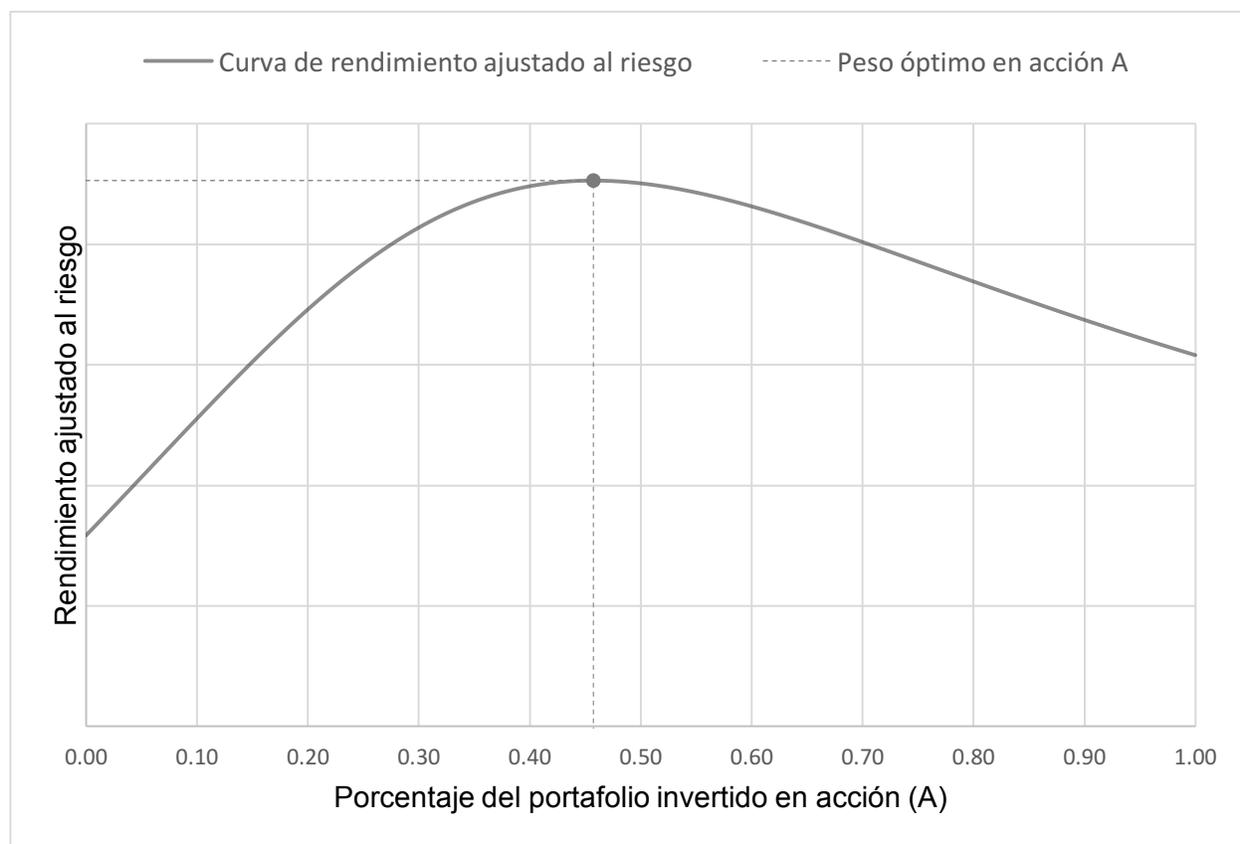
Finalmente, recuérdese se estableció la condición de que w_a y w_b sean valores positivos, por lo que, entre el conjunto solución ofrecido mediante el procedimiento descrito, ha de tomarse aquel valor cuyo signo sea positivo, encontrándose en todo caso

en el rango: $0 < w_a < 1$, tal que $w_a + w_b = 1$. De no cumplir dichas condiciones, la solución ha de considerarse no válida para efectos del modelo.

La representación gráfica de este punto, puede apreciarse en un espacio cartesiano donde el eje de las abscisas registra los distintos valores de w_a desde 0 hasta 1, tal que $w_b = 1 - w_a$, y donde el eje de las ordenadas representa ahora el valor del rendimiento ajustado al riesgo del portafolio resultante:

Figura 2.

Valor de w_a para rendimiento ajustado al riesgo máximo en un portafolio compuesto por A y B, donde: $w_b = 1 - w_a$



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

Este tipo de portafolio también es consistente con la premisa de aversión al riesgo, que expresa que un inversionista estará dispuesto a asumir mayores riesgos, toda vez sea correspondientemente recompensado con mayores rendimientos.

2.8.5 Modelo de distribución normal para estimación de resultados:

Hasta este punto se ha cubierto exhaustivamente la organización, generación y análisis de toda la información necesaria y suficiente para aplicar en un modelo de distribución de probabilidad que ha de proyectar los escenarios más probables para el futuro.

Resumiendo a grandes rasgos las herramientas cubiertas para el proceso de construcción del portafolio, se tiene que; en primer lugar, se presentó la organización de series históricas y definiciones para analizar el comportamiento las acciones en lo particular; en segundo lugar, se presentaron herramientas para analizar la interacción de las acciones al organizarse en un portafolio, y se desarrolló una metodología para la determinación de aquellas combinaciones con mejor adecuación para la integrar un portafolio óptimo; y en tercer lugar, se desarrollaron las técnicas matemáticas para determinar la distribución óptima de capital en los activos seleccionados para el portafolio, bien en función de minimizar el riesgo, o bien de optimizarlo.

A continuación, se procede a exponer la aplicación de los modelos de probabilidad para proyectar los comportamientos probables del portafolio. Para ello, se aplica el modelo de probabilidad de distribución normal y su transformación estándar, bajo el supuesto que, como resultado de combinar activos cuyos rendimientos se encuentran normalmente distribuidos, se obtiene un portafolio, cuya variable fundamental –el rendimiento– también se encuentra normalmente distribuida, en función de dos parámetros: retorno esperado y desviación estándar. (Van Der Wijst, 2013)

Se expone que el retorno del portafolio se encuentra normalmente distribuido, con una media $E[r_p]$ y desviación estándar σ_p , con una función de densidad de probabilidad $f(x)$:

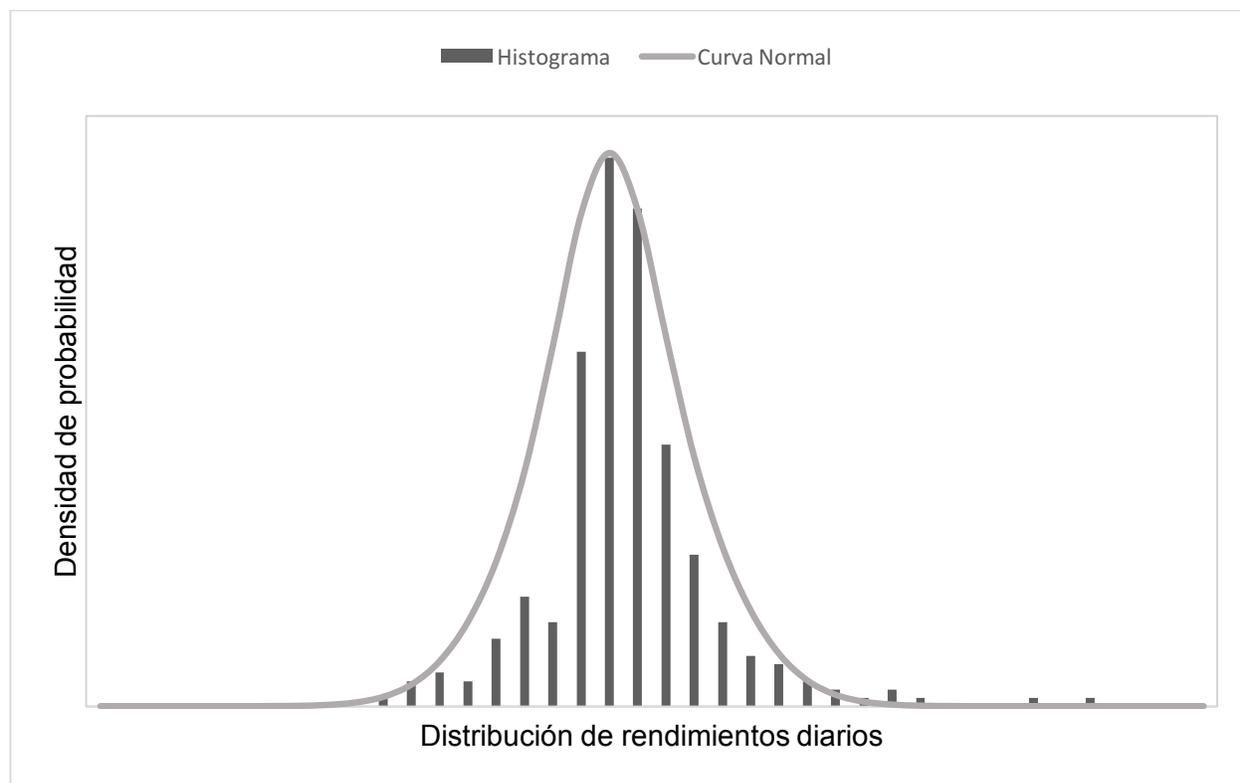
$$r_p \sim N(E[r_p], \sigma_p)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La función de densidad de probabilidad, permite aproximar el comportamiento “normal” de la variable, y compararle gráficamente con las observaciones históricas:

Figura 3.

Comparación de la curva de la función de densidad de probabilidad de la Distribución Normal, con base a los parámetros de rendimiento esperado y desviación estándar, sobre un histograma de frecuencias generado a partir del rendimiento histórico simulado de un portafolio hipotético.



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

La figura 3, expone una superposición de la curva de la función de densidad de probabilidad de la distribución normal, descrita por sus parámetros: rendimiento esperado y desviación estándar, y el histograma de frecuencias generado a partir de una serie histórica de rendimientos hipotéticos en barras. De tal forma, puede identificarse qué tanto se ajusta una distribución de rendimientos al supuesto de normalidad.

A partir de los parámetros que describen el comportamiento de la variable aleatoria bajo el supuesto de normalidad –en este caso el rendimiento– se procede a estimar la probabilidad de que dicha variable se encuentre en distintos tramos de interés.

Para conocer la probabilidad de que la variable aleatoria, declarada como el rendimiento de un día del portafolio, adopte un valor dentro de un tramo de interés, se procede a aplicar la transformación estándar de la variable en los puntos limítrofes del tramo (Alexander, 2008):

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad y \quad Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Donde, en este caso x_1 y x_2 representan los valores limítrofes del tramo de interés r_1 y r_2 ; y μ y σ los parámetros que describen la distribución de la variable: retorno esperado del portafolio $E[r_p]$ y desviación estándar del portafolio σ_p .

Posteriormente, procede a determinarse la probabilidad acumulada entre los valores correspondientes de la variable normal estandarizada Z . Simbólicamente:

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < Z < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

De tal suerte ha de estimarse la probabilidad de pérdida o bien la probabilidad de ganancia al cierre de un día, respectivamente como sigue (Alexander, 2008):

$$\text{Probabilidad de Ganancia: } P(r > 0) = P\left(Z > \frac{0 - E[r_p]}{\sigma_p}\right)$$

$$\text{Probabilidad de Pérdida: } P(r < 0) = P\left(Z < \frac{0 - E[r_p]}{\sigma_p}\right)$$

De la misma forma, se establecerá la probabilidad de obtener rendimientos sobre un mínimo requerido por el inversionista k_e o bien por debajo del mismo (Alexander, 2008):

$$\text{Probabilidad sobre mínimo requerido: } P(r > k_e) = P\left(Z > \frac{k_e - E[r_p]}{\sigma_p}\right)$$

$$\text{Probabilidad bajo mínimo requerido: } P(r < k_e) = P\left(Z < \frac{k_e - E[r_p]}{\sigma_p}\right)$$

2.8.6 Rendimiento activo del portafolio:

El rendimiento activo del portafolio de inversión se define sencillamente como la diferencia entre el rendimiento esperado del portafolio $E[r_p]$ y el rendimiento esperado del índice de mercado de referencia $E[r_M]$ –el S&P500 en el caso del presente trabajo. Este se entiende como un premio al riesgo por invertir en un portafolio gestionado, y es generado por la exposición selectiva a factores de rendimiento. (Elton, Gruber, Brown, & Goetzmann, 2014)

Los factores generadores de rendimiento activo, en el caso del presente trabajo, son específicamente la selección de activos y la distribución óptima de capital en el portafolio. Sin embargo, corresponde estimar la probabilidad de que, mediante dicha gestión, efectivamente logre superarse el rendimiento del índice de referencia. Esta será una más de las herramientas analíticas de gestión.

Para estimar dicha probabilidad, ha de aplicarse la propiedad estable del modelo de distribución de probabilidad normal, que expresa que la suma de variables normalmente distribuidas, resulta en una nueva variable normalmente distribuida. (Alexander, 2008)

Así, el rendimiento activo esperado del portafolio $E[\alpha]$ se define simplemente como:

$$E[\alpha] = E[r_p] - E[r_M]$$

Por tanto su varianza σ_α^2 estará dada por:

$$\sigma_\alpha^2 = E[\alpha_i - E[\alpha]]^2$$

Donde α_i es la diferencia en cada observación del rendimiento del portafolio r_p y el rendimiento del índice de mercado r_M .

De tal forma, puede escribirse la varianza del rendimiento activo, en términos de sus componentes:

$$\sigma_\alpha^2 = E[(r_p - r_M) - (E[r_p] - E[r_M])]^2$$

Operando el producto y extrayendo los términos del paréntesis:

$$\sigma_{\alpha}^2 = E[r_P - r_M - E[r_P] + E[r_M]]^2$$

Con el cuidado de respetar los signos correspondientes, puede reagruparse términos:

$$\sigma_{\alpha}^2 = E[(r_P - E[r_P]) - (r_M - E[r_M])]^2$$

Operando el exponente como una resta al cuadrado:

$$\sigma_{\alpha}^2 = E[(r_P - E[r_P])^2 + (r_M - E[r_M])^2 - 2(r_P - E[r_P])(r_M - E[r_M])]$$

Distribuyendo linealmente el operador de expectativa:

$$\sigma_{\alpha}^2 = E(r_P - E[r_P])^2 + E(r_M - E[r_M])^2 - 2E(r_P - E[r_P])(r_M - E[r_M])$$

Puede notarse la existencia de las definiciones familiares de varianza y covarianza:

$$\text{Varianza del Portafolio: } \sigma_P^2 = E(r_P - E[r_P])^2$$

$$\text{Varianza del Mercado: } \sigma_M^2 = E(r_M - E[r_M])^2$$

$$\text{Covarianza: } \sigma_{P,M} = E(r_P - E[r_P])(r_M - E[r_M])$$

Por tanto, la varianza del rendimiento activo puede expresarse como:

$$\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_P^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{P,M}$$

Finalmente, la probabilidad de que el portafolio genere un rendimiento superior al del mercado α conocida su desviación estándar, se estima como sigue (Alexander, 2008):

$$\text{Probabilidad rendimiento superior al mercado: } P(r_P - r_M > 0) = P\left(Z > \frac{0 - E[\alpha]}{\sigma_{\alpha}}\right)$$

Nótese que el punto crítico es definir correctamente la varianza del rendimiento activo σ_{α}^2 , para lo cual se precisa disponer de la covarianza $\sigma_{P,M}$ entre el rendimiento del

índice de mercado r_M y el rendimiento del portafolio r_P . El procedimiento a continuación, será de utilidad en la medición de tal relación, para la evaluación de cualquier portafolio formado por N acciones, a partir de la información ya construida:

Se partirá de la definición de volatilidad del portafolio, es decir su coeficiente beta β_P , como se recordará relaciona el riesgo del activo –en este caso el portafolio– con el riesgo del mercado, y se dimensiona en función de la correlación entre ambos:

$$\beta_P = R_{P,M} * \frac{\sigma_P}{\sigma_M}$$

De tal suerte, se procede simplemente a despejarse $R_{P,M}$ que es justamente la correlación entre el rendimiento del portafolio y el rendimiento del índice de mercado:

$$\beta_P * \frac{\sigma_M}{\sigma_P} = R_{P,M}$$

Ahora bien, la volatilidad del portafolio, también puede definirse por la suma ponderada de la volatilidad de cada uno de los activos integrados (Basley & Brigham, 2008):

$$\beta_P = \sum_{x=1}^N w_x * \beta_x$$

Por tanto, ha de re escribirse la expresión para la correlación del rendimiento de portafolio con el rendimiento de mercado $R_{P,M}$ como:

$$R_{P,M} = \frac{\sigma_M}{\sigma_P} * \sum_{x=1}^N w_x * \beta_x$$

Puesto que la volatilidad de cada activo, es decir su coeficiente beta β_x y el peso de cada activo en el portafolio w_x son valores ya conocidos, por los procedimientos descritos en los puntos 2.6.7 y 2.8.3 o 2.8.4 respectivamente, puede resolverse por completo para todas las variables sin ningún problema.

2.8.7 Valor absoluto en riesgo:

El valor absoluto en riesgo VaR, por sus siglas en inglés (Value at Risk) es una herramienta estándar en la industria financiera para la medición y gestión del riesgo, popularizada en la década de los 90's, con la idea de determinar el nivel de exposición de una posición en el mercado por parte de un activo o portafolio, con base a un criterio de seguridad que no desea ser excedido. (Kenton, Value at Risk (VaR), 2019)

Esto significa que la premisa del VaR, es establecer un umbral de probabilidad, usualmente del 5%, que sirve como valor límite del 5% de los peores resultados que pueden llegar a observarse, y la pérdida de capital que tales resultados representan del total de la inversión, dada una distribución normal para la variable aleatoria "rendimiento", o bien, a la inversa; determinar la probabilidad de que una pérdida máxima, definida como inaceptable para la unidad de tiempo analizada, pueda llegar a ocurrir. (Elliott & Kopp, 2005)

En su versión más simple, el desarrollo de la herramienta está vinculado al Modelo de Probabilidad de Distribución Normal, expuesto ampliamente con anterioridad. Basta decir que para su medición, se establece un tramo de probabilidad acumulada bajo la curva de distribución normal, por ejemplo 5%, lo cual significa que desea conocerse el valor de la variable aleatoria "X" que deja por fuera el 5% de todos los posibles resultados al lado izquierdo de la función de densidad de probabilidad. Conociendo previamente la media y la desviación estándar, puesto que el valor de "Z" que ubica el 5% de probabilidad acumulada es conocido (-1.64), o puede conocerse mediante una tabla de distribución normal para valores de "Z"; puede procederse a partir de la ecuación de transformación estándar, despejando el valor de "X": $Z * \sigma + \mu = x$ (Francis & Donggheol, 2013).

El análisis de valor absoluto en riesgo, debe considerarse como una herramienta de calibración continua, para la administración de umbrales de tolerancia al riesgo. En los puntos a continuación se abordará detenidamente su estimación paramétrica y técnicas más sofisticadas que pretenden atender las limitantes que el supuesto de normalidad impone a la evaluación de escenarios extremos de reducida ocurrencia.

2.8.8 Estimación paramétrica del valor absoluto en riesgo:

La estimación del valor absoluto en riesgo, como se mencionó en el punto anterior, representa el valor mínimo de la pérdida probable, dado un evento adverso de probabilidad definida, usualmente 5%.

El cálculo del valor absoluto en riesgo en el análisis de portafolio, se procede a definir como el valor limítrofe de la variable rendimiento r_p tal que, incluya el 5% de los peores resultados posibles, y deje por fuera el 95% restante. (Francis & Donggheol, 2013)

Para la determinación de dicho valor, se utiliza el modelo de probabilidad de distribución normal, y su transformación estándar; a partir de lo cual, simplemente se expresa el valor de r_p a partir de la transformación estándar (Clark, 2013):

$$Z = \frac{r_p - E[r_p]}{\sigma_p}$$

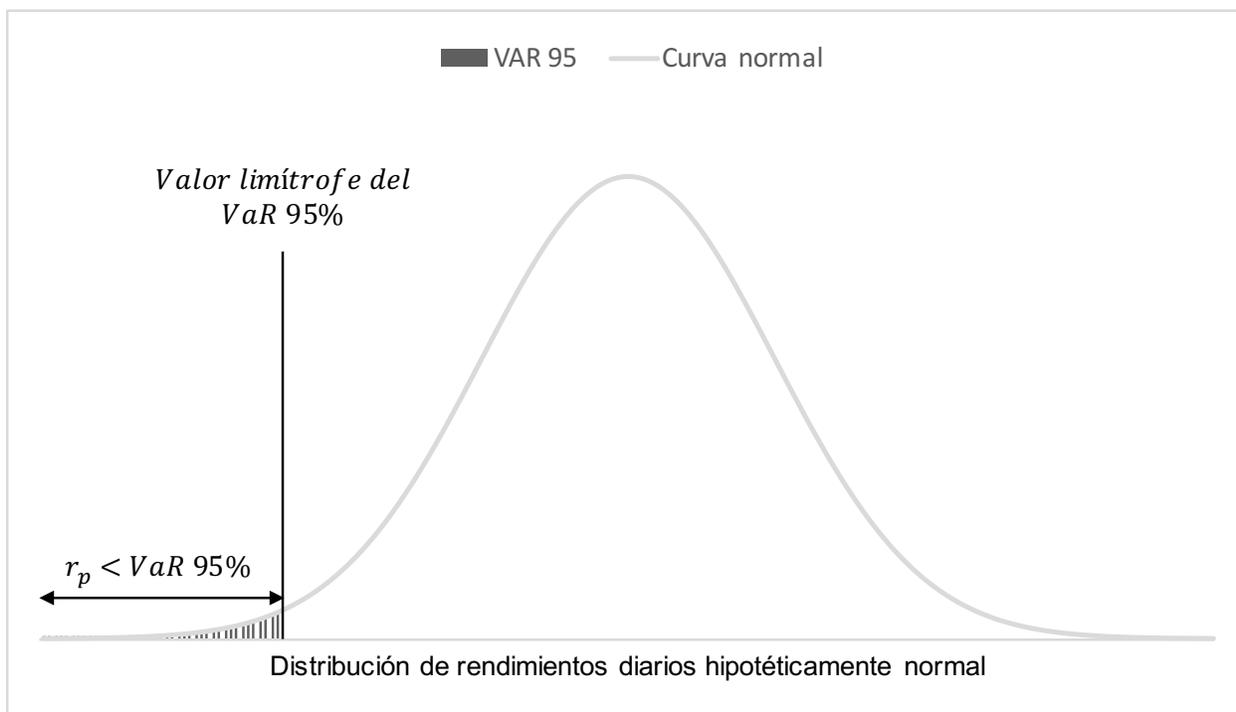
$$r_p = Z * \sigma_p + E[r_p]$$

Donde Z es fijado como el valor de la transformación estándar tal que abarque un 5% de la función de densidad de probabilidad normal, dicho valor corresponde a -1.6449, lo cual indica que el valor de la variable rendimiento r_p que separa el 5% de los peores resultados posibles se encuentra a 1.6449 desviaciones estándar σ_p por debajo de la media o rendimiento esperado $E[r_p]$. Resta únicamente aplicar dicho valor r_p sobre el capital total invertido en el portafolio, para conocer finalmente el valor monetario de la pérdida probable en el portafolio. Su enunciado es el valor absoluto en riesgo VaR del portafolio, con un 95% de confianza. Esta metodología de estimación se identifica como medición paramétrica, por la aplicación de los parámetros estadísticos para su cálculo.

Cabe distinguir, que dicho valor r_p –VaR 95%– representa únicamente el valor limítrofe del 5% de los peores resultados posibles, por tal razón debe entenderse como “el mejor resultado que puede ocurrir, si se presenta el peor escenario con el 5% de probabilidad”. (Elton, Gruber, Brown, & Goetzmann, 2014)

Figura 4.

Representación del Valor Absoluto en Riesgo –VaR 95%– como el valor límite de r_p que señala “el mejor resultado” en el tramo de la distribución con el 5% de los peores resultados.



Fuente: Elaboración propia.

La figura 4, ilustra que existen “peores” resultados al valor límite de $r_p = VaR 95\%$ que no se encuentran dimensionados en dicha medida de valor en riesgo, por lo que puede considerarse que tal forma de medición subestima la verdadera magnitud de la exposición asociada al nivel de probabilidad seleccionado (5%).

Por tal razón, aunque la metodología de cálculo expuesta si se utilizará para la comparación entre portafolios alternativos –por la practicidad de su cálculo– para un análisis más profundo del valor en riesgo del portafolio seleccionado, se aplicará una metodología alternativa mixta, basada en la simulación histórica, con pesos exponencialmente decrecientes de acuerdo a la antigüedad de las observaciones, EWMA por sus siglas en inglés *Exponentially Weighted Moving Averages* (Allen, Boudoukh, & Saunders, 2004). Como complemento a la exposición metodológica del presente capítulo se presenta a continuación dicha alternativa de cálculo.

2.8.9 VaR por simulación histórica y pesos decrecientes:

Como se anticipó recientemente, la estimación del Valor en Riesgo, mediante simulación histórica y pesos exponencialmente decrecientes, tiene por objeto dimensionar el verdadero valor en riesgo de un portafolio, especificado su nivel de probabilidad e intervalo de confianza. Con la particularidad adicional, de asignar un peso diferenciado a las observaciones de la variable r_p de acuerdo a la antigüedad de su ocurrencia, bajo la premisa de que son aquellas observaciones que por su reciente manifestación presentan mayor vigencia en la estimación de la exposición a pérdida para periodos futuros. (Allen, Boudoukh, & Saunders, 2004)

Para lograr una función que asigne un peso decreciente a cada observación de acuerdo a su antigüedad, se inicia por definir un parámetro inicial λ (*lambda*), cuyo valor es mayor que cero y menor que uno $0 < \lambda < 1$. Cada observación, ha de asignársele un peso de $(1 - \lambda)$ multiplicado por λ tantas veces como días transcurridos. De tal suerte, la primera observación tendrá un peso de $(1 - \lambda) * \lambda$, el segundo tendrá un peso de $(1 - \lambda) * \lambda^2$, el tercero de $(1 - \lambda) * \lambda^3$ y así sucesivamente hasta n . La expresión para asignación de pesos decrecientes por antigüedad, puede generalizarse como:

$$\text{Peso asignado a la } i\text{-ésima observación: } (1 - \lambda) * \lambda^{t-1}$$

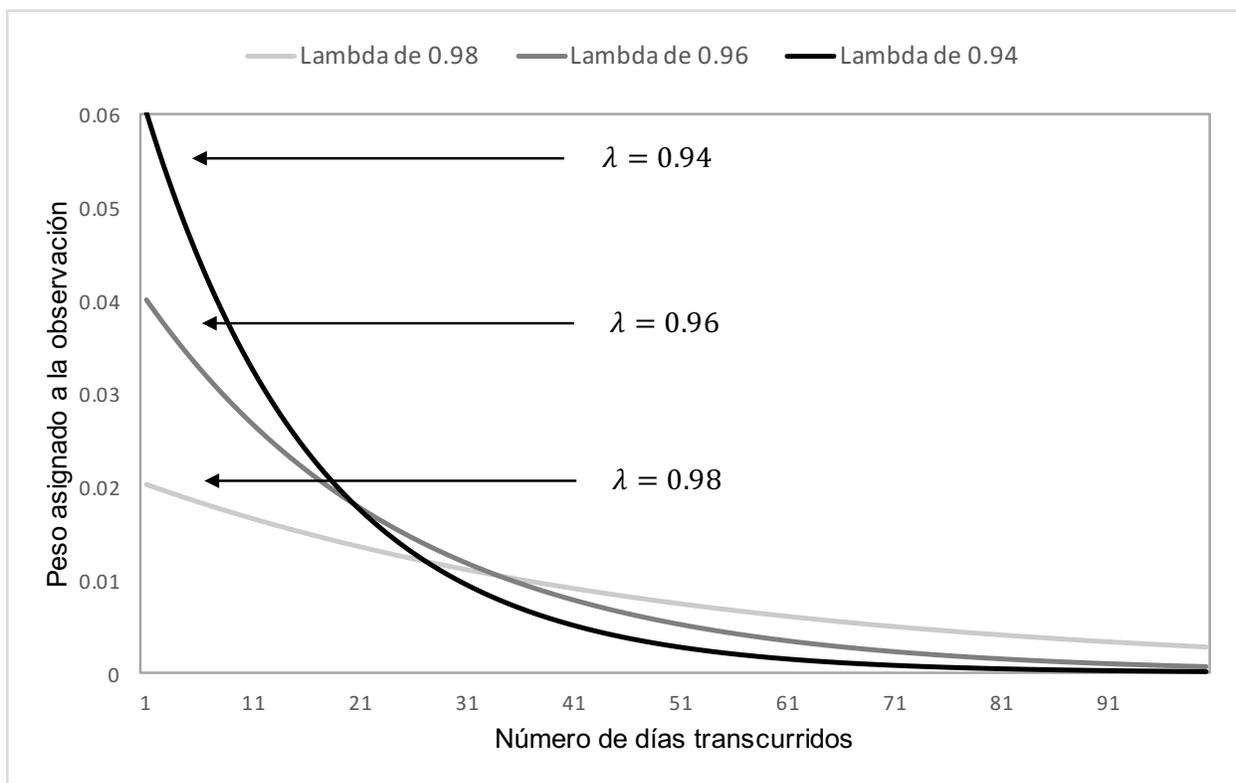
Nótese que dicha expresión corresponde a una serie infinita, por lo que la sumatoria de sus valores, para un periodo de n observaciones será menor a 1.0, toda vez que n sea un número finito. Para corregir tal discrepancia y cumplir con la convención de que la sumatoria total de los pesos asignados sea siempre igual a 1, es decir el 100%, la expresión se re expresa finalmente como sigue (Allen, Boudoukh, & Saunders, 2004):

$$\text{Peso asignado a la } i\text{-ésima observación: } \frac{(1 - \lambda) * \lambda^{t-1}}{(1 - \lambda^n)}$$

Tanto menor sea el valor del parámetro λ mayor será el peso asignado a observaciones recientes. Un valor $\lambda = 0.98$ puede considerarse adecuado para el presente análisis.

Figura 5.

Distribución de pesos exponencialmente decrecientes para tres distintos valores del parámetro inicial lambda λ : 0.94, 0.96, y 0.98. de acuerdo al número de días transcurridos de observación.



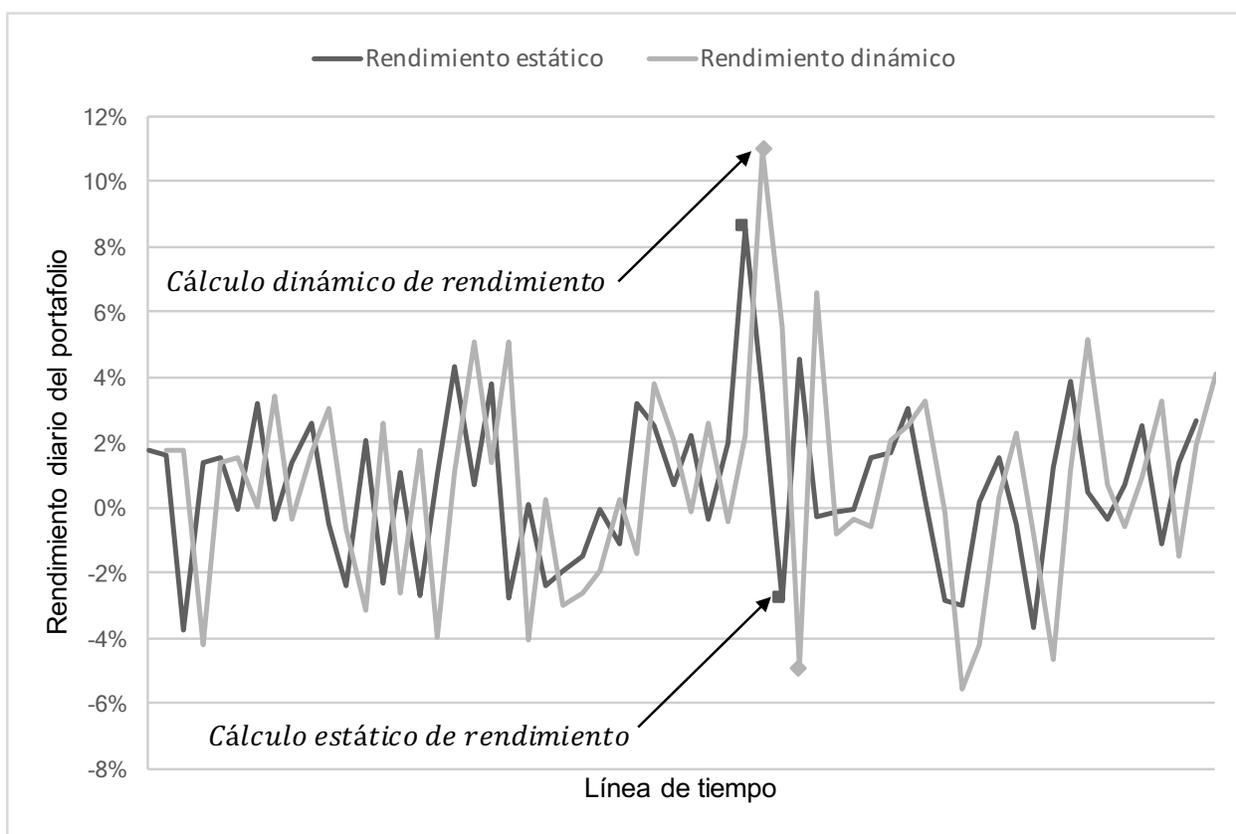
Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

En la figura 5, puede observarse que tanto mayor sea el valor del parámetro inicial lambda λ mayor será la distribución de peso sobre la totalidad de las observaciones en el periodo de análisis, es decir; un valor $\lambda = 0.98$ asigna un peso de 0.02 al valor del primer día transcurrido, y el 0.98 restante lo distribuye en el resto de observaciones en un ratio constante en función del número de días transcurridos. Menores valores de lambda λ son apropiados cuando se percibe que las condiciones de mercado son altamente cambiantes, por lo que desea desestimarse el peso de eventos ocurridos en observaciones más lejanas, y asignar la mayor cantidad de peso a eventos muy recientes. En el caso del presente trabajo se asignará un valor de $\lambda = 0.98$ para VaR. Este es el valor del parámetro usualmente fijado para mercados considerados eficientes. (Allen, Boudoukh, & Saunders, 2004)

A continuación, resta generar una simulación histórica de rendimientos del portafolio, para lo cual simplemente se fija una fecha de inicio y se aplican los pesos componentes de cada activo, con una pequeña complicación: el peso componente de cada uno de los activos ha de alterarse sobre el total del portafolio en la medida en que cada uno de ellos evolucione de acuerdo a sus propios rendimientos observados. A tal consideración se le identifica en el presente trabajo como el comportamiento dinámico del rendimiento del portafolio, y su comparación con el rendimiento estático se ilustra en la siguiente gráfica.

Figura 6.

Comparación gráfica del cálculo estático del rendimiento del portafolio, contra el cálculo dinámico del rendimiento del portafolio. con desfase de un día para distinguir entre ambas líneas.



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

En la figura 6 se evidencia que la medición estática del rendimiento diario de portafolio subestima la amplitud de las variaciones en el rendimiento del portafolio, motivadas por variaciones en el rendimiento de los activos incorporados, este es un problema que pocas veces –si no ninguna– se discute en la literatura financiera.

El cálculo del rendimiento estático toma los pesos componentes de los activos como constantes en el tiempo. En la práctica, sin embargo, dicha condición es sólo posible mediante la intervención continua en el portafolio, re balanceando al cierre de cada día el porcentaje de cada activo sobre el total del portafolio; desinvirtiendo en aquellos activos que, dado su particular comportamiento, incrementaron implícitamente su peso componente; e invirtiendo en aquellos activos que, dado su particular comportamiento vieron implícitamente reducido su peso componente sobre el total del portafolio.

Permítase clarificar con el uso de un ejemplo: supóngase un portafolio con una distribución 50 / 50 en activos A y B. Supóngase que al cierre del primer día el activo A presentó un rendimiento de 20% y el activo B presentó un rendimiento de 0%, el rendimiento observado en el portafolio sería de $0.50 \cdot 20\% + 0.50 \cdot 0\% = 10\%$, lo cual significa necesariamente que el valor del portafolio al cierre, es de 110%. En tales condiciones, el peso del activo A sobre el total del portafolio sería $0.50 \cdot (1 + 20\%) / 110\% = 55\%$ y el peso del activo B sería correspondientemente 45% (aproximando decimales). Por consiguiente, los rendimientos observados al cierre del próximo día, se aplicarían al nuevo peso componente de los activos A y B, es decir 55% y 45%, y no sobre sus pesos originales. Para balancear la distribución de capital, y mantener los pesos componentes constantes, precisaría desinvertirse 10% del valor sobre el activo A –NO 5%–, e invertirse 11% sobre el valor del activo B –NO 5%.

Dicha intervención continua, si bien posible en la práctica, resulta difícil de modelar, por lo que en el presente trabajo, se desarrolla una metodología de simulación histórica, basada en lo que aquí se denomina cálculo del rendimiento dinámico del portafolio K_p , tomando en cuenta la variación continua del peso componente de los activos, aplicando el rendimiento de cada observación sobre el peso resultante al cierre.

$$K_p = w_{a_{t-1}} * r_{a_t} + w_{b_{t-1}} * r_{b_t}$$

donde:

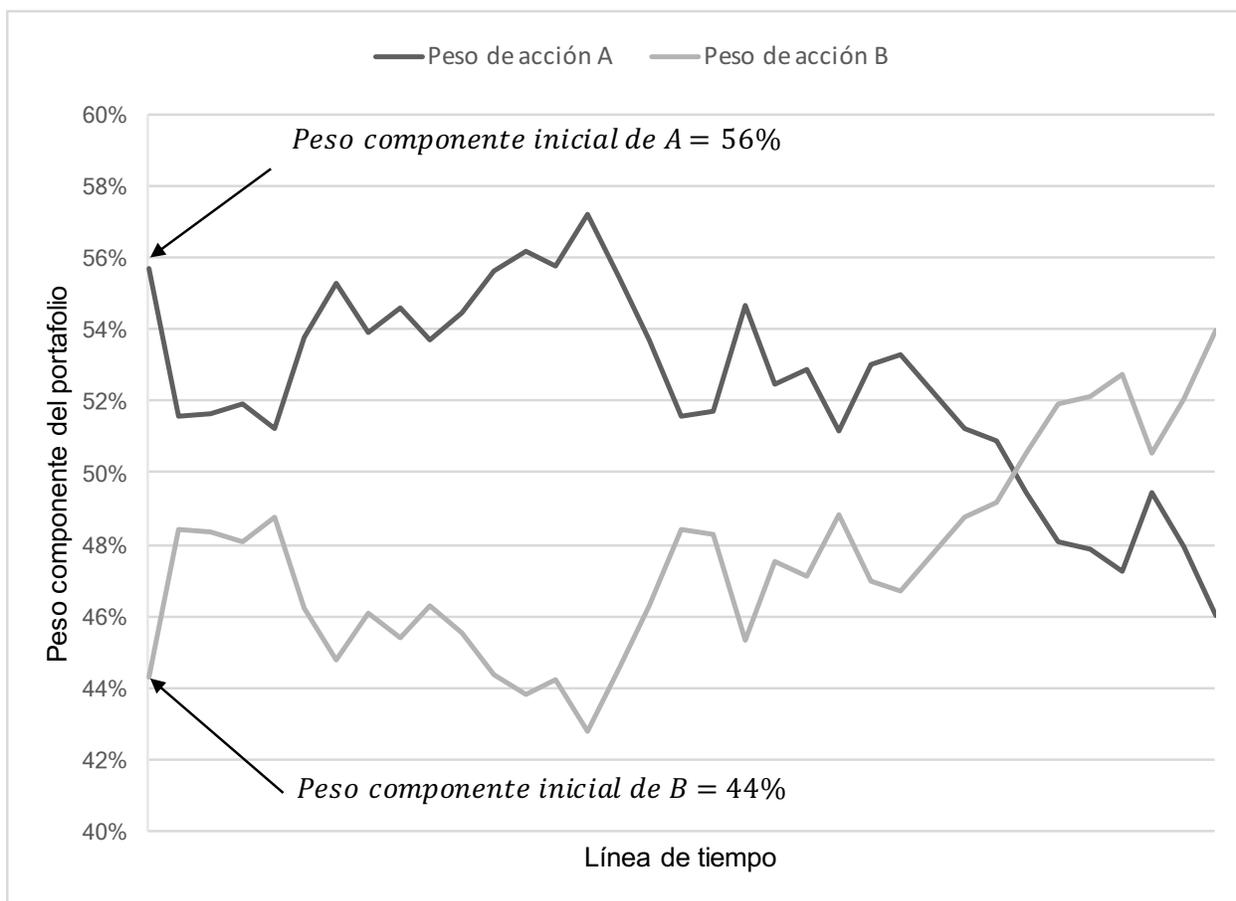
$$w_{a_{t-1}} = w_{a_{t-2}}(1 + r_{a_{t-1}}) \quad y \quad w_{b_{t-1}} = w_{b_{t-2}}(1 + r_{b_{t-1}})$$

excepto en la primera observación $t = 1$, en cuyo caso $w_{a_{t-1}}$ y $w_{b_{t-1}}$ son simplemente iguales a la distribución original w_a y w_b . De tal suerte la expresión matemática general se define para el rendimiento dinámico del portafolio K_p como:

$$K_p = \begin{cases} w_{a_{t-1}} * r_{a_t} + w_{b_{t-1}} * r_{b_t} & \text{para } t > 1 \\ w_a * r_a + w_b * r_b & \text{para } t = 1 \end{cases}$$

Figura 7.

Evolución del peso componente de activos A y B de acuerdo a su comportamiento particular.



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

La figura 7 ilustra el comportamiento dinámico del peso componente de cada activo en un portafolio, en función del comportamiento en el rendimiento de cada activo. En el caso de un portafolio compuesto por dos activos A y B, en cuyo caso, el peso componente de B, es necesariamente en todo momento $w_b = 1 - w_a$. el portafolio se balancea recíprocamente, es decir, aquello que pierde A en peso, lo gana B, y viceversa.

Aplicando la ecuación de rendimiento dinámico del portafolio K_p , partiendo del peso componente inicial de cada activo w_a y w_b para el periodo $t = 1$ y continuando con las subsiguientes observaciones de acuerdo a la evolución de dichos pesos mediante la ecuación: $w_{x_{t-1}} = w_{x_{t-2}}(1 + r_{x_{t-1}})$ para todas las observaciones $t > 1$; ha de obtenerse una serie histórica con el rendimiento del portafolio ajustado a la evolución del peso componente de sus respectivos activos.

A continuación, se asigna a cada observación su correspondiente peso por antigüedad, mediante la función basada en el parámetro *lambda* λ anteriormente expuesta.

Finalmente, procede ordenar la serie histórica del peor al mejor rendimiento K_p observado, tomando en cuenta los pesos asignados por antigüedad a cada observación, y se crea una columna adicional la cual ha de registrar la suma acumulada de pesos asociados a cada observación, representándose en tal columna acumulado de probabilidad, desde la peor hasta el mejor observación, debiendo sumar en total 100%.

El valor absoluto en riesgo a intervalo de 95% –VaR 95%– se ubicará localizando en la columna de probabilidad acumulada, la primera casilla en la que se superé el 5%. Si bien es cierto este método es considerablemente más trabajoso que el método paramétrico, tratándose de riesgo, y en particular de los valores extremos de la distribución, es un esfuerzo que bien vale la pena realizar. Recuérdese que el valor absoluto en riesgo, tiene la única finalidad de medir la pérdida posible, en el extremo de los peores resultados de la distribución, por tanto, de poca utilidad es realizar mediciones de éste, por medio de un modelo, que si bien es altamente confiable para medir tramos centrales de la distribución, por definición, es completamente inútil para su aplicación en los extremos, allí donde el VaR debiese centrar toda su atención. En palabras de Linda Allen, en una de las obras fundamentales para la gestión de riesgo –Understanding Market, Credit, and Operational Risk: The Value at Risk Approach– “el supuesto de normalidad en la medición del VaR, es sencillamente indefendible”.

A continuación, se ejemplifica una tabla con la integración de los datos necesarios para el computo del VaR por la metodología de simulación histórica recién descrita:

Tabla 1.

Guía de Simulación Histórica con Pesos Decrecientes para C-VaR 95%. $n = 100$, $\lambda = 0.98$

$t - i$	K_p	$w = 1/n$	$w = f(\lambda)$	$P(1/n)$	$Pf(\lambda)$
5	-8.0%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^4}{(1 + \lambda^{100})} = 2.13\%$	1%	2.13%
45	-6.5%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^{44}}{(1 + \lambda^{100})} = 0.95\%$	2%	3.07%
22	-4.5%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^{21}}{(1 + \lambda^{100})} = 1.51\%$	3%	4.58%
81	-3.5%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^{81}}{(1 + \lambda^{100})} = 0.46\%$	4%	5.04%
33	-2.5%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^{32}}{(1 + \lambda^{100})} = 1.21\%$	5%	6.25%
12	-2%	0.01	$\frac{(1 - \lambda)\lambda^{12}}{(1 + \lambda^{100})} = 1.85\%$	6%	8.10%

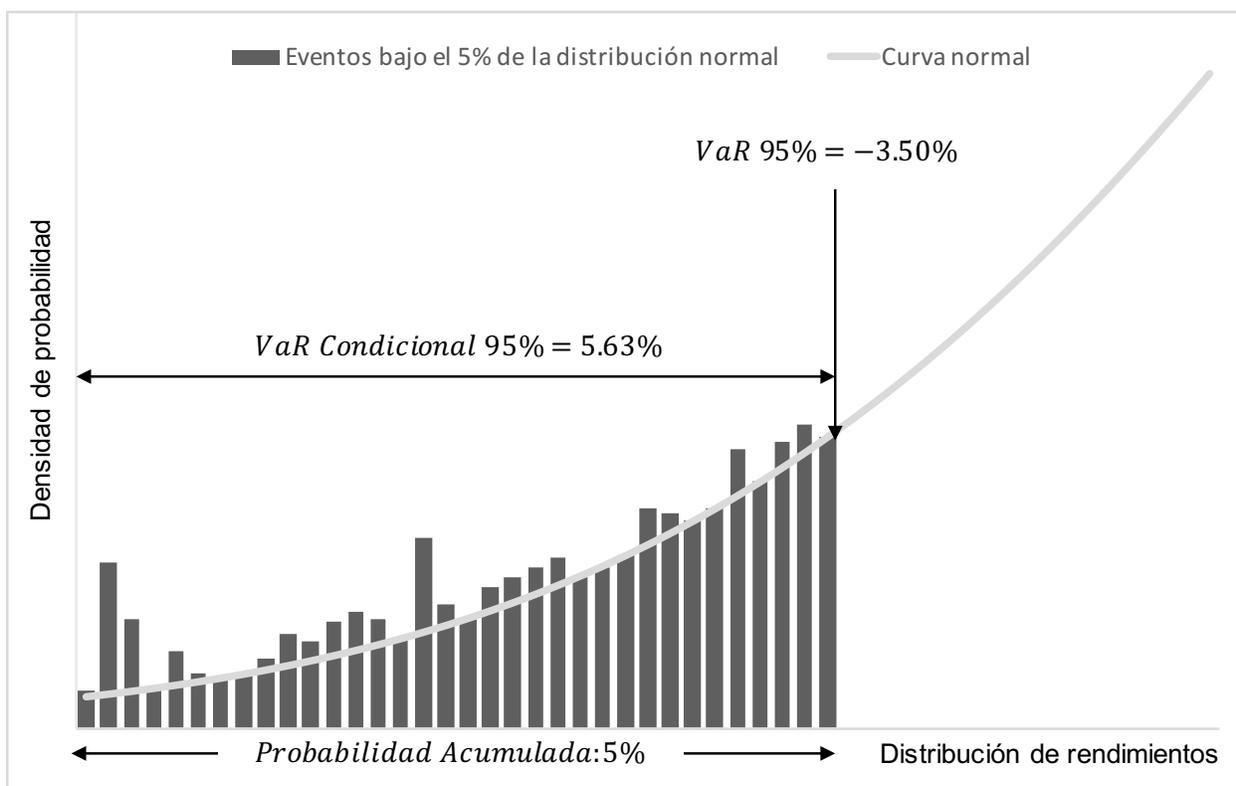
Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

La columna $t - i$ del cuadro 1, presenta la cantidad de días transcurridos a partir del momento t hasta cada observación. La columna K_p registra el rendimiento del portafolio de tal observación, como se indicó anteriormente, ordenados del peor resultado observado al mejor. Por brevedad, únicamente se ejemplifican los 6 peores resultados, de un total hipotético de 100 observaciones $n = 100$. La columna $w = 1/n$ simboliza el peso implícito de cada observación bajo la metodología tradicional, que es igual a un centésimo en este caso. En contraste, la columna $w = f(\lambda)$ registra el peso asignado por la función $f(\lambda)$ a cada observación, de acuerdo a su antigüedad. Las columnas $P(1/n)$ y $Pf(\lambda)$ registran la probabilidad acumulada de acuerdo al peso de cada observación. Como puede observarse, bajo la columna $Pf(\lambda)$ se alcanza el valor de 5% una observación antes. El valor de dicha observación, representa el valor de VaR 95%.

Una ventaja adicional de la metodología de simulación histórica para la medición del valor absoluto en riesgo, es que permite –fácilmente– incorporar una capa adicional de análisis: el valor en riesgo condicional o CVaR por sus siglas en inglés (Conditional Value at Risk), el cual resulta de promediar las pérdidas observadas en aquellas observaciones con los peores resultados hasta el valor limítrofe del nivel de probabilidad establecido (5% en el caso del ejemplo). De tal suerte, en lugar de limitarse a expresar el mejor resultado posible dentro del 5% del extremo con los peores resultados como se indicó anteriormente, se toman en cuenta todos aquellos resultados peores –y en efecto posibles– a la izquierda del valor limítrofe, expresándoles como un promedio. En el caso del hipotético tramo del peor 5% ejemplificado, el promedio sería de -5.63%, interpretándose que: de presentarse un 5% de los peores resultados posibles, la pérdida probable en el portafolio es del 5.63% de su valor, y no únicamente de 3.50%.

Figura 8.

Representación del Valor Absoluto en Riesgo –VaR 95%– como el valor limítrofe de r_p .



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

La figura 8 muestra un acercamiento al extremo que acumula el 5% de probabilidad, ejemplificando la observación de valores extremos, los cuales, como ya se indicó son puestos al margen desde la perspectiva estrictamente paramétrica de la estimación del VaR. Ante tal “miopía”, en el desarrollo del presente trabajo, se aplicará el cálculo del valor absoluto en riesgo condicional, mediante la metodología de simulación histórica y pesos exponencialmente decrecientes, al considerarse una herramienta más acorde al fin de su aplicación.

Cabe mencionar, que alternativamente a la recién expuesta metodología, existen modelos de probabilidad que se ajustan con mayor presteza al comportamiento de “colas anchas” más comúnmente encontrado en la distribución de rendimientos en los activos financieros, los principales: distribución de Weibull, distribución de Gumbell, y distribución de Fréchet; en general denominados Distribuciones Generalizadas de Valor Extremo – GEVD– por sus siglas en inglés (Generalized Extreme Value Distributions) (Alexander, 2008). Sin embargo, su exposición y estudio quedará pendiente para futuros académicos. Basta decir que el método híbrido de simulación histórica y pesos exponencialmente decrecientes, combinado con la condición de “condicionalidad” desarrollada en el presente trabajo, se adapta perfectamente a las particulares necesidades, como se conocerá en el próximo capítulo de Discusión de Resultados.

2.8.10 Aplicación de modelos de probabilidad para simulación Monte Carlo:

Como punto final de la presente exposición teórica, se describe la aplicación del modelo de probabilidad de distribución uniforme, y el modelo de distribución normal, explicados en los apartados 2.4 y 2.5, para la construcción de un proceso estocástico que simula el comportamiento del portafolio en un periodo futuro, y determinar el escenario más probable de rentabilidad, a partir de los parámetros estimados, luego de un número de iteraciones únicas e independiente.

Para el efecto, se declara como la variable aleatoria x el retorno diario del portafolio r_p y se asume que esta se halla normalmente distribuida, con una media $\mu = E[r_p]$ y desviación estándar $\sigma = \sigma_p$. Nótese que, a diferencia de la estimación del valor en

riesgo, que precisa la estimación de un evento particularmente adverso en el extremo de la distribución; en este caso, se desea estimar el evento con la máxima probabilidad de ocurrencia –por definición un valor central– en cuyo caso, dadas las características de la distribución empírica en el rendimiento de las acciones, el supuesto de normalidad es admisible y operante. En aquellos casos en los que el rendimiento de activos, exhiben comportamientos lejos de la normalidad, instrumentos derivados por ejemplo, un modelo de simulación histórico será preferible (Elton, Gruber, Brown, & Goetzmann, 2014)

El primer paso en el proceso estocástico, es la generación de una secuencia de rendimientos probables, correspondientes a cada día en el horizonte de proyección, donde el resultado de cada día es un evento único e independiente. Para ello, a partir del modelo de distribución de probabilidad uniforme, se genera un número aleatorio u en el intervalo $[0,1]$, para cada día, donde $DU[0,1] = \{ c: 0 \leq u \leq 1; 0: 0 > u > 1 \}$ lo cual significa, que u tiene una probabilidad constante de ocurrencia c en el intervalo de 0 a 1, y cero para cualquier otro valor (Alexander, 2008). Tal número se conoce como un número aleatorio estándar. En Microsoft Excel se genera mediante el comando $RAND()$.

A continuación, se interpreta cada uno de dichos valores u , como un porcentaje de probabilidad acumulada en la función de distribución de probabilidad normal estándar, cuyo inverso, ha de producir un valor z único e independiente para cada observación en la secuencia del periodo de simulación. (Alexander, 2008)

A partir de cada uno de los valores z resultantes en la secuencia generada, se obtiene el rendimiento probable del portafolio r_p correspondiente a la n -ésima observación dentro del periodo de simulación. Para ello, simplemente ha de resolverse para x en la ecuación de transformación estándar del modelo de distribución normal:

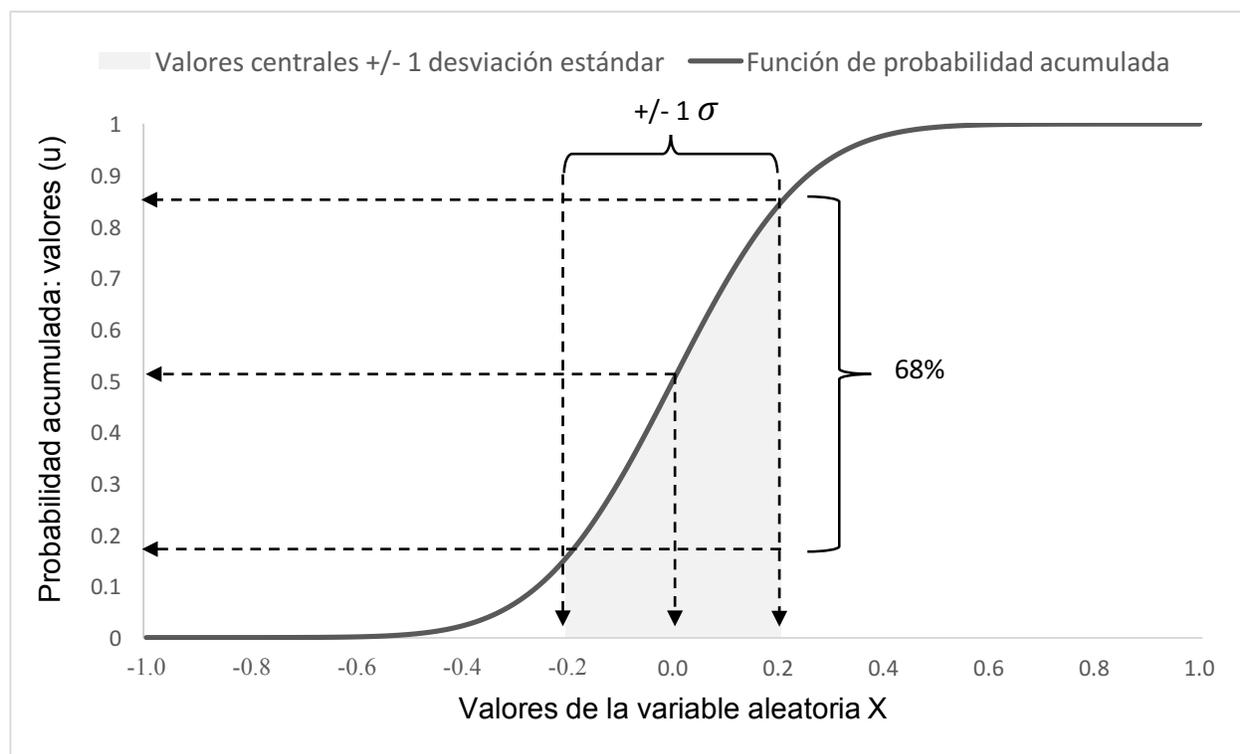
$$x = z * \sigma + \mu ; \text{ donde } x \Rightarrow r_p$$

Puesto que los parámetros de la distribución normal se han definido como: $\mu = E[r_p]$ y $\sigma = \sigma_p$; puede simularse el comportamiento del portafolio para cada día en el futuro, al convertir cada valor z de la secuencia en un rendimiento probable r_p .

Dado que: $r_p \sim N(\mu, \sigma)$ condicionalmente, la mayor parte de los valores generados, corresponderán a eventos en la sección central de la distribución (Alexander, 2008). En la siguiente gráfica se evidencia la naturaleza de dicho fenómeno:

Figura 9.

Representación de los valores u generados en el intervalo $[0,1]$ (desplegados en el eje vertical); y sus correspondientes valores x en función de la distribución de probabilidad acumulada normal. Para una variable aleatoria X ; con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 0.2$



Fuente: Elaboración propia. Datos ficticios.

La figura 9, muestra que; de acuerdo a la función de distribución acumulativa de probabilidad normal, aproximadamente el 68% de los valores generados, se concentrarán dentro del tramo definido por una desviación estándar sobre y por debajo de la media de la distribución. Sigue que, cada vez menos valores se irán encontrando en la medida que vaya alejándose de la referida sección central, considerándose estos; escenarios extremos con muy baja probabilidad de ocurrencia, y por tanto de marginal importancia para la estimación del escenario de máxima probabilidad.

Una vez generados los valores u para cada día en el horizonte de proyección, y transformados en los correspondientes rendimientos probables del portafolio r_p mediante la ecuación de transformación estándar del modelo de probabilidad de distribución normal; puede simularse la evolución del portafolio a lo largo del periodo, simplemente al componer cada hipotético resultado sobre el valor del portafolio en el periodo anterior, desde el primer hasta el último día en la secuencia. Así, el valor del portafolio V en cada periodo t estará en función del rendimiento r_p correspondiente a dicho periodo, compuesto sobre el valor del portafolio en el periodo anterior V_{t-1} expresado como:

$$V_t = V_{t-1} * (1 + r_p)$$

Finalmente, para aproximar el comportamiento más probable del portafolio, ha de replicarse el procedimiento de simulación por n iteraciones para cada uno de los días en la secuencia correspondiente al horizonte de proyección.

El escenario de máxima probabilidad, bajo el supuesto de normalidad, estará determinado por el valor central de la variable aleatoria x en este caso r_p estimado a partir del total de iteraciones generadas, para cada día en la secuencia. Así, obteniéndose una línea de proyección que presenta los valores que describen el comportamiento más probable del portafolio en el horizonte de proyección.

En el capítulo cuarto del presente Informe, se darán a conocer los resultados de la aplicación de las técnicas cuantitativas y herramientas matemáticas, estadísticas y probabilísticas anteriormente desarrolladas, realizándose un análisis comparativo del comportamiento y desempeño de un portafolio gestionado mediante tales herramientas, contra la evolución y desempeño del mercado en general, en el periodo correspondiente al trimestre de abril a julio del año en curso (2020); con el fin de responder a la pregunta fundamental que motiva el presente estudio: ¿Cómo la aplicación de herramientas cuantitativas y modelos de probabilidad, incide en la gestión óptima de un portafolio de inversión, compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional, en función de maximizar el retorno ajustado al riesgo del capital invertido?

3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se explica lo concerniente al andamiaje estructural del esfuerzo investigativo cuyos resultados se rinden en este informe. En función de lo cual, se procede, en primer lugar, a definir el problema de investigación, es decir, especificarle al grado que sea manejable y sus resultados medibles; estableciendo luego los objetivos, general y específicos, que han de dar respuesta a las interrogantes planteadas en la definición del problema. Seguidamente, se delimita el esfuerzo investigativo, en tiempo, espacio y unidad de análisis. Para finalmente, enunciar de manera descriptiva el diseño de investigación utilizado y las técnicas e instrumentos de análisis a las que se recurre para arribar a las conclusiones.

3.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA:

La incertidumbre presente en el comportamiento del precio de las acciones en el mercado bursátil, supone dificultades para la toma de decisiones de inversión por parte del administrador financiero, en función de la maximización del rendimiento esperado del capital a invertir, lo cual deriva en la necesidad de responder a tales dificultades desde una perspectiva técnica, fundamentada en criterios cuantitativos verificables.

3.1.1 Especificación del problema:

¿Cómo la aplicación de modelos estadísticos de probabilidad, incide en la toma de decisiones para la gestión de un portafolio de inversión, compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional, en función de maximizar el retorno esperado del capital invertido?

3.1.2 Subtemas:

¿Qué lineamientos deben tomarse en consideración para la integración de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en las principales bolsas de valores internacionales, basándose en la aplicación de modelos probabilísticos, para la estimación del rendimiento esperado?

¿En qué medida la aplicación de un modelo de probabilidad tiene valor práctico, para la estimación y maximización del rendimiento de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional?

¿Cuáles son y en qué consisten los principales factores que inciden en el éxito o fracaso del enfoque cuantitativo propuesto, para la estimación y maximización del rendimiento de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional?

En atención a las mencionadas interrogantes, a continuación, se plantean los objetivos que pretenden alcanzarse en el desarrollo del presente trabajo.

3.2 OBJETIVOS:

Como se ha expuesto anteriormente, el comportamiento del mercado de acciones es uno de los entornos financieros con mayor incertidumbre. En atención a lo cual, en el presente trabajo se plantean los siguientes objetivos que posibiliten una mejor comprensión del fenómeno estudiado y sirvan de guía para la adecuada toma de decisiones de inversión, como parte fundamental de las funciones del administrador financiero.

3.2.1 Objetivo general:

Establecer una metodología práctica para la aplicación de modelos estadísticos de probabilidad, para la toma de decisiones de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil, en función de maximizar el retorno esperado del capital invertido.

3.2.2 Objetivos específicos:

1. Definir los lineamientos a considerar para la integración de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en las principales bolsas de valores internacionales, basándose en la aplicación de modelos probabilísticos, para la estimación del rendimiento esperado.

2. Determinar en qué medida, la aplicación de un modelo de probabilidad, tiene valor práctico para la estimación y maximización del rendimiento de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional.
3. Definir los principales factores que inciden en el éxito o fracaso del enfoque de probabilidad propuesto, para la estimación y maximización del rendimiento de un portafolio de inversión compuesto por acciones de compañías cotizadas en el mercado bursátil internacional.

3.3 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA:

El tema de estudio se plantea dentro de las siguientes consideraciones temporales, y espaciales, académicas y técnicas:

3.3.1 Punto de vista:

El trabajo de investigación se llevará a cabo con un enfoque estrictamente cuantitativo.

3.3.2 Unidad de análisis:

Acciones de las compañías cotizadas en los principales índices del mercado bursátil internacional: DOW JONES, S&P 500 Y NASDAQ, y un portafolio de inversión compuesto acciones cotizadas en dichos mercados.

3.3.3 Período histórico:

Análisis del comportamiento durante el periodo comprendido entre los años 2019 y 2020. proyección de rendimientos esperados para el cierre del año 2020.

3.3.4 Ámbito geográfico:

El estudio se realizará para un ámbito geográfico Internacional, al no sujetarse el comportamiento de las variables objeto de estudio a una localización geográfica en particular.

3.3.5 Universo:

El universo se consideran las compañías cotizadas en los tres índices bursátiles más populares: DOW JONES compuesto por 30 compañías, S&P 500 compuesto por 500 compañías, y NASDAQ 100 compuesto por 100 compañías, para un total de 630 compañías aproximadamente, puesto que algunas compañías repiten en más de un índice, por ejemplo, Apple, Amazon y Alphabet forman parte del S&P500 y NASDAQ100.

3.3.6 Tamaño de la muestra:

16 acciones cotizadas, seleccionadas de forma arbitraria bajo criterio diversificación.

3.4 Diseño de investigación:

Para el desarrollo del presente trabajo y en función de sus objetivos, los cuales se resumen en: 1) Definir las herramientas matemáticas y modelos cuantitativos necesarias y la forma en que deben aplicarse para la integración de un portafolio, 2) determinar la medida en que aplicar de dichos modelos tiene valor en la práctica, y 3) identificar los factores que inciden en el éxito o fracaso del modelo desarrollado; se diseñó una investigación de tipo cuantitativa experimental. Es decir, que el presente es un estudio de naturaleza cuantitativa, que se realiza mediante el desarrollo, aplicación, y ajuste, de herramientas analíticas y modelos cuantitativos, a través de lo cual se pretende incidir deliberadamente en el comportamiento de las variables objeto de estudio, a saber, el rendimiento y el riesgo de un portafolio de acciones.

En aquellas investigaciones de tipo experimental, el investigador construye deliberadamente una situación a la que son expuestos los elementos objeto de estudio. Tal situación consiste en someter las variables investigadas a un tratamiento o estímulo, que bajo determinadas circunstancias habrá de producir un efecto, el cual será medido por el investigador (*Sampieri, 2010*). En el caso del presente trabajo, la construcción de tal situación corresponde a la estructuración de un portafolio de inversión, y su evolución, comportamiento y finalmente resultados, se evaluarán en el correspondiente sustrato: el desenvolvimiento del mercado.

3.4.1 Metodología de investigación:

La investigación se realizó tomando como base el método científico, en sus tres fases: Indagadora, Demostrativa y Expositiva, las cuales se describen a continuación:

Fase Indagadora: En esta fase inicial se llevará a cabo el proceso de recolección y análisis de información de fuentes acreditadas, con el fin de determinar la evolución del mercado de acciones, y particularmente las compañías evaluadas. Procediéndose a la organización sistemática de series históricas detalladas, las cuales han de servir como el principal insumo de información a partir de las cual aplicar las técnicas cuantitativas de análisis e implementar modelos de estimación.

Fase Demostrativa: En esta fase de investigación se procede a desarrollar los modelos y técnicas cuantitativas para la evaluación objetiva de las acciones que se presentan como alternativas para la integración en portafolio; aplicación de modelos de distribución de probabilidad, para la identificación de escenarios posibles de rendimiento esperado y valor en riesgo; compilándose, y analizándose la información obtenida, para su posterior interpretación y evaluación comparativa de los resultados obtenidos.

Fase Expositiva: La fase final de la investigación corresponde al análisis comparativo de los resultados obtenidos, generación de inferencias, y formulación de conclusiones y recomendaciones finales, en respuesta a las interrogantes y objetivos originalmente planteados.

3.5 Resumen del Proceso de Investigación:

En función de lo anterior y considerando el objetivo fundamental de la investigación que es: Establecer una metodología práctica para la aplicación de modelos estadísticos de probabilidad, para la integración y gestión de un portafolio de inversión, en función de maximizar el rendimiento ajustado al riesgo del capital invertido”; se aplicaron las siguientes etapas en el proceso de resolución del problema: recolección de información de mercado; organización y análisis de la información recolectada; e Interpretación de los resultados en el proceso de análisis para la toma de decisiones.

3.5.1 Recolección de información de mercado:

Se consultaron fuentes de información secundarias, consistentes en servicios acreditados de información de mercado como TradingView Tm y Yahoo Finance, para la extracción de series históricas de precios al cierre de cada día hábil, para las 16 acciones evaluadas y el índice de mercado. Dichos datos se almacenaron en hojas de cálculo para su posterior análisis en las siguientes etapas.

Se consultaron publicaciones financieras especializadas en cobertura del mercado financiero, como Bloomberg, Yahoo Finance, y MarketWatch, para mantener una posición informada al respecto de la actualidad en la actividad bursátil.

3.5.2 Organización y análisis de la información:

Los datos de precios recolectados, se organizaron en series históricas de rendimientos, a partir de las cuales, se procedió a aplicar las técnicas cuantitativas correspondientes a la evaluación de acciones y análisis de portafolio. Haciendo uso de matrices, cuadros comparativos, y gráficas de tendencia, para complementar la presentación del análisis.

3.5.3 Interpretación de resultados para la toma de decisiones:

Se hizo uso de matrices, cuadros comparativos y gráficas para la interpretación de los resultados obtenidos en el proceso de análisis, facilitándose así la toma de decisiones, en el proceso de integración y gestión de portafolio. Se desarrollaron los correspondientes procedimientos matemáticos para la selección de las acciones con mayor potencial de rendimiento ajustado al riesgo al combinarse en portafolio, y para la optimización de la función de rendimiento ajustado al riesgo de portafolio, entre otras.

3.6 Instrumentos y técnicas de investigación:

Como se describió en los puntos anteriores, los instrumentos y técnicas utilizadas, fueron recolección y organización de datos de precios al cierre, construcción de cuadros, matrices y gráficas electrónicas en hojas de cálculo de Microsoft Excel.

4. PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo, se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de las herramientas matemáticas, estadísticas y probabilísticas propuestas para la gestión óptima de un portafolio de inversiones desde una perspectiva estrictamente cuantitativa, tal como se presentaron en el Marco Teórico del presente trabajo en los puntos 2.6 sobre herramientas cuantitativas para la evaluación de acciones, 2.7 sobre herramientas cuantitativas para análisis de portafolio, y 2.8 sobre herramientas cuantitativas para gestión de portafolio. En función de lo anterior, los resultados obtenidos se presentan en tres secciones correspondientes, a saber: 4.1) Resultados en la Fase de Evaluación de Acciones, 4.2) Resultados en la Fase de Análisis de Portafolio, y Resultados en la Fase de Gestión de Portafolio. Finalmente, se cierra el capítulo con la presentación y análisis del desempeño logrado por el portafolio óptimo seleccionado, frente a dos portafolios alternativos evaluados y el desempeño del mercado, esto último en la sección 4.3) Evaluación de Desempeño del Portafolio.

El periodo de análisis se basó en las series históricas construidas a partir del 18 de abril del año 2019, al 16 de abril del año 2020, cubriendo un total de 251 días de actividad bursátil, que resultaron en 250 observaciones de rendimiento diario.

Las acciones evaluadas, corresponden a 16 compañías seleccionadas arbitrariamente con base a un criterio de diversificación, más el índice de mercado, como descrito en el capítulo 3 de Metodología, a saber: Domino's Pizza Inc, Starbucks Corporation, Coca-Cola Company, Costco Wholesale Corporation, Nike Inc, Lululemon Athletica Inc, Apple Inc, Microsoft Corporation, Amazon.com Inc, Alphabet Inc, Zoom Video Communications Inc, Netflix Inc, Barrick Gold Corporation, Global Markets Inc, The Procter & Gamble Company, e Interactive Brokers Group Inc. Como representativo de mercado, el índice Standard & Poors S&P500.

Posteriormente, la sección 4.3 correspondiente a la evaluación de desempeño, cubre un periodo que contiene 64 observaciones de rendimiento diario, que corren a partir del 17 de abril de 2020, al 17 de julio del mismo año, fecha a la que se computaron resultados.

4.1 RESULTADOS DE LA FASE DE EVALUACIÓN DE ACCIONES:

En la presente sección, se presentan los resultados de la aplicación de las herramientas cuantitativas propuestas en el punto 2.6 del Marco Teórico, correspondientes a la evaluación de acciones individuales, para las 16 acciones seleccionadas como muestra más el índice representativo de mercado. Principiando con una breve reseña del comportamiento observado del mercado en el periodo de análisis. Continuando luego, con el resumen comparativo de todas las métricas aplicadas y su análisis.

4.1.1 Comportamiento de las acciones y el mercado en el periodo evaluado:

El periodo comprendido desde el inicio de la evaluación, del jueves 18 de abril del año 2019 al jueves 16 de abril del año 2020, se caracterizó inicialmente por una sostenida tendencia primaria al alza, que incluso presentó records históricos en los tres principales índices de mercado a mediados del mes de febrero. Esta se vio abruptamente interrumpida por la debacle ocasionada por la expansión global de la pandemia del Coronavirus, cuyo impacto se manifestó indiscutiblemente, a principios del mes de marzo del año en 2020. Reportándose al cierre de la última semana del mes de febrero, las peores pérdidas semanales experimentadas en los mercados financieros desde la recesión económica del año 2008.

El lunes 9 de marzo, luego del desplome insólito del precio del petróleo, consecuencia de una guerra de precios entre la Organización de Países Productores de Petróleo y Rusia, el mercado de acciones en Nueva York, colocó una pérdida inédita en la apertura de 7% en todos los principales índices de referencia, ocasionando la puesta en escena de una medida descomunal de contención de daños, conocida como “circuit breaker” efectivamente suspendiendo la actividad bursátil inmediatamente para todos los valores cotizados en la Bolsa de Valores de Nueva York. Tal evento fue bautizado mediáticamente como el “lunes negro” (He, Duffy, & Horowitz, 2020). Tan solo tres días luego, el jueves 12, se presentó también teñido de luto, con una caída de 9% en los índices más representativos; hasta entonces la mayor pérdida diaria desde 1987.

A pesar de una leve recuperación de pérdidas, el viernes 13; durante la siguiente semana, los mercados cayeron nuevamente de manera estrepitosa, acumulando una caída de 12%. Para entonces, las pérdidas de doble dígito, a lo ancho del mercado, se tradujeron, en terminología de la industria, innegablemente en un *bear market*, es decir un mercado oficialmente a la baja.

La caída en picada desencadenó una respuesta sin precedentes de bancos centrales en todo el mundo. Notablemente la Reserva Federal, el banco central de EEUU, desplegó un masivo programa de expansión cuantitativa, anunciando incluso un programa de compra de deuda corporativa el 23 de marzo, en un esfuerzo descomunal por suministrar confianza y optimismo en los mercados financieros (Federal Reserve, 2020). El mercado efectivamente respondió a tales estímulos y comenzó una recuperación casi tan vertiginosa como su caída, mucha de la cual se presume alimentada por el capital vertido en el sistema por plataformas “populares” de inversión como Robinhood, entre otras.

La sostenibilidad del crecimiento experimentado puede –categóricamente– ponerse en tela de dudas. Peter Schiff, uno de los brillantes economistas que actualmente se aferran a las premisas de la Teoría del ciclo económico, expuesta en los antecedentes de este trabajo, y quien cobró gran prestigio al pronosticar con asombrosa exactitud el colapso del mercado inmobiliario y la crisis de las hipotecas *subprime* 2007-2008, sostiene que el súbito repunte de los mercados obedece a un estímulo artificial, y previene sobre los efectos devastadores que se avecinan. “Demasiadas personas se han enfocado en el alfiler que pinchó la burbuja, e ignoran lo más importante, que es la burbuja en sí misma” (Schiff P. , 2020). El 4 de junio, se reportó al cierre del mercado, que el primer índice en reclamar nuevas alturas, posterior al colapso del COVID-19, fue el índice altamente concentrado en tecnología NASDAQ100, cerrando a un nivel record de 9,741.97 puntos, liderado por acciones altamente especulativas que han detentado crecimientos de doble dígito como TESLA Inc (Winck, 2020). Wall Street apunta a nuevos records con la esperanza de que la FED continúe firmemente con el estímulo. (Wiltermuth & Sunny, 2020)

Peter Schiff, advierte que las condiciones artificialmente suministradas por la Reserva Federal, son el peor enemigo de una auténtica recuperación económica, y que sus

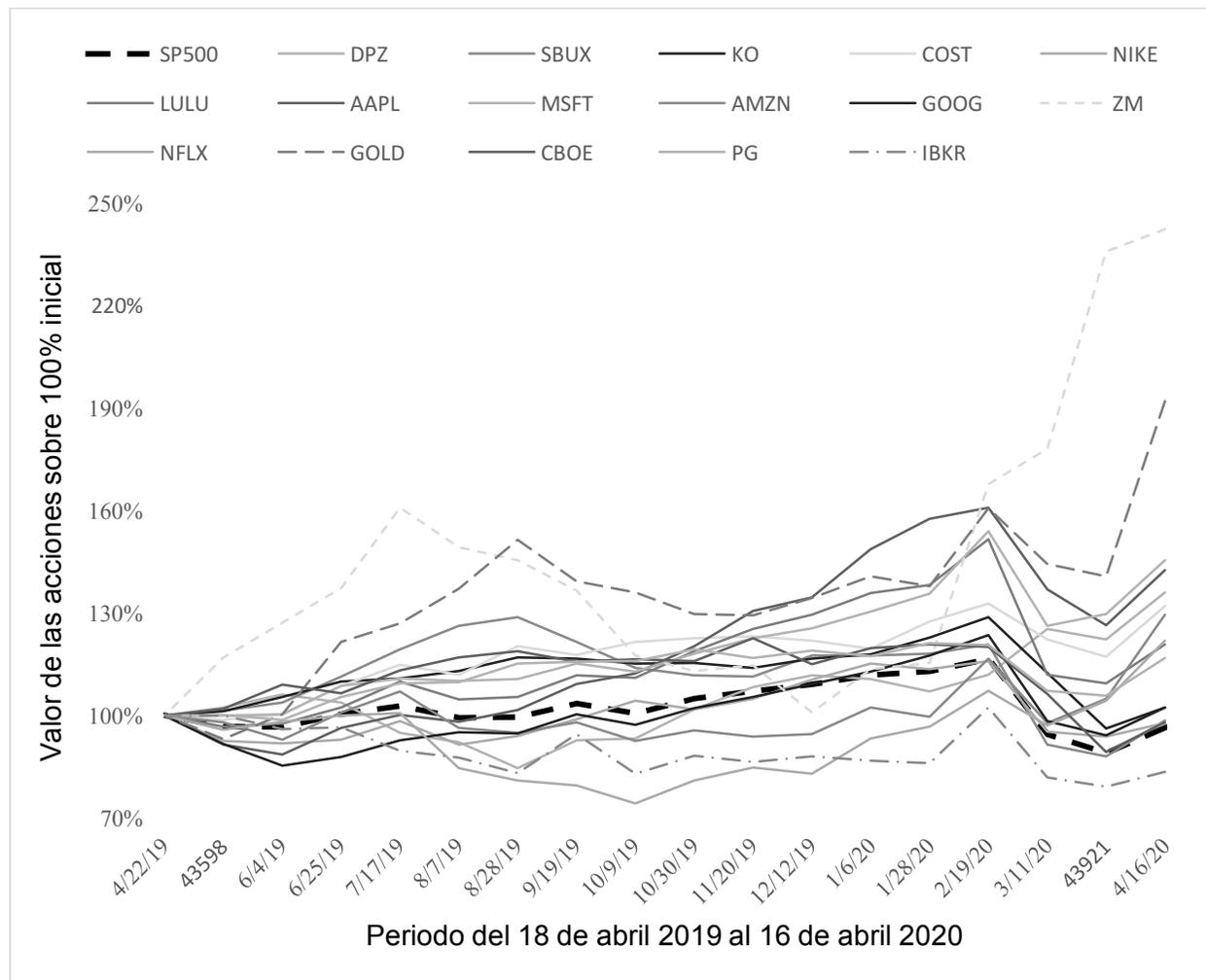
políticas no harán más que profundizar los problemas estructurales en el sistema financiero y en el sector real de la economía –el que produce bienes– argumentando que existe más que nunca un riesgo inminente, no solamente de experimentar una corrección severa en el mercado, sino destruir por completo la confianza en el sistema monetario basado en el dinero fiat, es decir, moneda sin respaldo real. (Schiffgold, 8 de abril 2008)

El fenómeno económico mundial de la pandemia del Coronavirus, y su impacto en los mercados financieros, no únicamente en el mercado de acciones, sino de hecho, extendiéndose –y con mayor dureza incluso– en los mercados tradicionalmente menos volátiles como el mercado de deuda, mercado de divisas, y mercado de materias primas; es en sí mismo, un tema de estudio con mucho más mérito de investigación que el desarrollado en el presente trabajo, por las implicaciones reales de su problemática en todas las esferas de la vida. Sin embargo, no pretendiendo restarle importancia alguna; en lo que respecta al esfuerzo académico aquí presentado, el estrés –o quizá mejor dicho trauma– experimentado en el mercado a finales del primer trimestre y durante todo el segundo trimestre del año en curso (2020), proporcionó una excelente oportunidad para evaluar el comportamiento de activos correlacionados y no correlacionados, ante condiciones categóricamente extremas de mercado, y evidenciar, en un contexto difícilmente replicable, la virtud de un portafolio construido a partir del análisis de la relación subyacente entre sus componentes, y la aplicabilidad de un modelo de estimación de resultados basado en el supuesto de distribución normal de la variable fundamental de análisis: el rendimiento esperado del portafolio.

En materia del comportamiento de las acciones evaluadas, durante el periodo de análisis se obtuvo; que distintas acciones siguieron de forma diferente los movimientos dictados por el índice de mercado representativo (S&P500). Algunas evidenciando a simple inspección un comportamiento estrechamente ligado al desempeño del mercado, entre ellas; Nike y Starbucks. Algunas otras, destacablemente presentaron comportamientos de apariencia contrarios –Zoom entre ellas– particularidad fácilmente observada desde la segunda quincena del mes de febrero (inicio de la debacle COVID), momento a partir del cual, se comienzan a separar notablemente de la tendencia del mercado. En la Figura 10, a continuación, se expone dicha inspección.

Figura 10.

Comportamiento de las 16 acciones evaluadas, y el índice de mercado, durante el periodo comprendido entre el 18 de abril del año 2019, al 16 de abril del año 2020. Observaciones quincenales de rendimiento, sobre el 100% de su valor en la fecha inicial.



Fuente: Elaboración propia. Datos públicamente accesibles en FINANCE.YAHOO.COM

Aunque difícilmente distinguible la línea de cada una de las acciones; en la gráfica se observa claramente que existen acciones como Zoom Video Communications ZM y Barrick Gold Corporation GOLD, que justo a partir de la segunda quincena de febrero, se despegaron de la tendencia genérica del mercado, ascendiendo vertiginosamente desde entonces; para registrar valuaciones máximas al cierre del periodo de evaluación referido. Como referencia, la línea de comportamiento del mercado se presenta discontinua en color negro y visiblemente más ancha. (*Actividad de precios en anexo 11*)

Por otro lado, se observan acciones que imitaron la caída estrepitosa del mercado con el advenimiento de la crisis COVID, revirtiendo violentamente sus tendencias alcistas precedentes, para luego, conforme el mismo mercado encontró su piso a finales del mes de marzo, comenzar a recuperar –aunque modestamente– algo del territorio cedido frente a la arremetida del virus. Entre ellas, Lululemon Athletica Inc. LULU, y KO.

En un tercer grupo, podría describirse el comportamiento de acciones que parecen no guardar demasiada relación con el comportamiento del mercado, fluctuando, con relativa independencia; entre ellas Amazon.com Inc. AMZN, y Alphabet Inc. GOOG.

La explicación del porqué de tales comportamientos, se halla en los fundamentos que motivan, bien el desempeño, o las expectativas de desempeño de las distintas compañías; aspectos fielmente cubiertos en el Enfoque de análisis fundamental, Enfoque de las expectativas, y Teoría del ciclo económico, descritos en el capítulo 1.

Por ejemplo, puede entenderse que Zoom Video Communications Inc. ZM, presente altas expectativas de desempeño futuro ante la evidente necesidad puesta abruptamente de manifiesto para virtualmente la totalidad de la población, de contar con una herramienta de conexión que les permita sostener una comunicación –dígase lo más semejante posible– al contacto cara a cara, de pronto imposible ante las disposiciones de distanciamiento social, y el instinto básico de supervivencia de cualquier ser humano. Por su parte compañías cuyo núcleo de negocios es la extracción de metales preciosos –específicamente oro– han de verse especialmente alentadas por una conspicua búsqueda de “activos refugio” en momentos de elevada incertidumbre; tal es el caso de Barrick Gold Corporation GOLD, por mencionar otro de los más evidentes.

En contraposición, las expectativas de desempeño futuro de compañías altamente dependientes de la disposición a gastar de los consumidores, muy probablemente resentirán duramente los efectos de una contracción de la demanda global. Tal pareciera ser el caso de Lululemon Athletica Inc. o Nike Inc. NKE. No obstante, sin pretender de ninguna manera restarle importancia alguna a dicho análisis, en efecto valioso; en muchas ocasiones, el conocimiento de las fuerzas motivadoras de desempeño en una

industria en particular, no se diga de grupos de industrias, resulta decididamente complejo de visualizar. De tal suerte, el análisis que aquí se presenta y sus resultados, se circunscribe a identificar el comportamiento observado de las variables y no a explicar desde un punto fundamental, el porqué del mismo.

En el siguiente punto, se presentan los resultados comparativos obtenidos de la aplicación de las herramientas cuantitativas descritas en el marco teórico, en el punto 2.6 correspondiente a la evaluación de acciones individuales, resumiéndose los resultados obtenidos en el cuadro número 3. Antes bien, en el cuadro 2 se muestra la simbología utilizada en adelante para referirse a cada una de las acciones evaluadas.

Tabla 2.

Simbología de cotización de las acciones evaluadas (TICKER SYMBOL).*

N.	COMPAÑÍA	TICKER
1.	Domin's Pizza Inc.	DPZ
2.	Starbucks Corporation.	SBUX
3.	Coca-Cola Company	KO
4.	Costco Wholesale Corporation.	COST
5.	Nike Inc.	NKE
6.	Lululemon Athletica Inc.	LULU
7.	Apple Inc.	AAPL
8.	Microsoft Corporation.	MSFT
9.	Amazon.com Inc.	AMZN
10.	Alphabet Inc.	GOOG
11.	Zoom Video Communications Inc.	ZM
12.	Netflix Inc.	NFLX
13.	Barrick Gold Corporation.	GOLD
14.	Global Markets Inc.	CBOE
15.	The Procter & Gamble Company.	PG
16.	Interactive Brokers Group Inc.	IBKR
17.	Índice Standard & Poors: S&P500	GSPC

*Selección arbitraria, bajo criterio de diversificación en industrias y correlación con el mercado.

Por brevedad, en las secciones siguientes se hará referencia a cada una de las acciones de las compañías evaluadas, mediante su símbolo de cotización (TICKER), como se presentan en el cuadro 2 arriba de estas líneas.

4.1.2 Resumen comparativo de herramientas cuantitativas:

A continuación, se resume el resultado de la aplicación de las herramientas cuantitativas desarrolladas del punto 2.6.1 a 2.6.7 del Marco Teórico, correspondientes al proceso de evaluación de acciones, para el periodo de análisis de un año, que abarcó desde el 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2020. En el anexo 11, 2 y 3 se presenta la serie histórica, la matriz de varianza-covarianza y matriz de correlación, respectivamente.

Tabla 3.

Resumen comparativo de acciones evaluadas. Periodo: 18/4/2019 a 16/4/2020. Valores diarios.

ACCIÓN:	Rendimiento Esperado	Desviación Estándar	Perfil de Riesgo CV.	Rendimiento Ajustado a Riesgo	Correlación con el Mercado	Volatilidad (Beta)	VaR 95%
SP500	0.0055%	2.0087%	366.08	0.0027	1.00	1.0000	-3.30%
DPZ	0.1580%	2.7173%	17.20	0.0581	0.35	0.4687	-4.31%
SBUX	0.0273%	2.5992%	95.27	0.0105	0.86	1.1079	-4.25%
KO	0.0284%	1.9479%	68.69	0.0146	0.79	0.7623	-3.18%
COST	0.1265%	1.7659%	13.96	0.0716	0.74	0.6467	-2.78%
NIKE	0.0189%	2.3681%	125.06	0.0080	0.83	0.9793	-3.88%
LULU	0.1163%	2.8151%	24.20	0.0413	0.73	1.0275	-4.51%
AAPL	0.1744%	2.5590%	14.67	0.0682	0.90	1.1413	-4.03%
MSFT	0.1808%	2.4886%	13.77	0.0726	0.92	1.1419	-3.91%
AMZN	0.1212%	1.9123%	15.78	0.0634	0.69	0.6600	-3.02%
GOOG	0.0342%	2.2603%	66.08	0.0151	0.83	0.9343	-3.68%
ZM	0.4463%	4.3195%	9.68	0.1033	-0.06	-0.1242	-6.66%
NFLX	0.1134%	2.6141%	23.05	0.0434	0.57	0.7466	-4.19%
GOLD	0.2983%	2.7422%	9.19	0.1088	0.22	0.2960	-4.21%
CBOE	0.0210%	2.4186%	114.95	0.0087	0.64	0.7646	-3.96%
PG	0.0830%	2.0603%	24.83	0.0403	0.74	0.7555	-3.31%
IBKR	-0.0346%	2.7597%	79.75	-0.0125	0.71	0.9809	-4.57%

Fuente: Elaboración propia. Con base en información histórica de FINANCE.YAHOO.COM

En la tabla 3, se presentan los resultados de la aplicación de las herramientas cuantitativas para la evaluación de acciones individuales, a partir de las series históricas construidas para cada una de las acciones, correspondientemente al periodo de análisis, lo cual, como se indicó en las líneas introductorias del presente capítulo, contiene un total

de 250 observaciones de rendimientos para el periodo simple de un día, calculados mediante la ecuación de rendimiento simple (2.6.2).

Como puede observarse de la inspección del cuadro 3, la acción que presenta el rendimiento esperado más elevado, es naturalmente ZM con 0.4463%. En contraste la acción que presenta el rendimiento mínimo, en este caso negativo, es IBKR, registrando un valor central de -0.035%. El mercado por su parte, representado por el índice S&P500, presenta una expectativa de rendimiento diario de 0.055%, muy inferior al máximo rendimiento esperado para ZM, pero aún en valores positivos, a pesar del embate del COVID descrito en el punto anterior. El promedio de las 16 acciones evaluadas es de 0.1196%, lo que supera, la expectativa del mercado en su conjunto en 0.1141%.

En cuanto al riesgo total de la acción, medido por la desviación estándar, la acción considerada más riesgosa, de acuerdo a esta métrica, es ninguna otra que ZM, con una desviación estándar de 4.3195%, de lo cual se tiene la lectura que el rendimiento de la acción de ZM en un periodo simple cualquiera, puede esperar ubicarse entre -3.87% y 4.77%, correspondiendo ambos valores a los límites inferior y superior de la suma y resta de una desviación estándar a su valor esperado, para un rango de 8.64 puntos porcentuales, considerablemente amplio al tratarse del periodo de un solo día. En contraposición, la acción con menor riesgo total percibido, y por tanto menor rango de variación esperado, fue COST, con una desviación estándar de 1.77%, lo cual sumado y restado a su rendimiento esperado de 0.1265%, resulta en un rango de variación esperado de 3.53 puntos porcentuales, considerablemente inferior al de la acción de ZM.

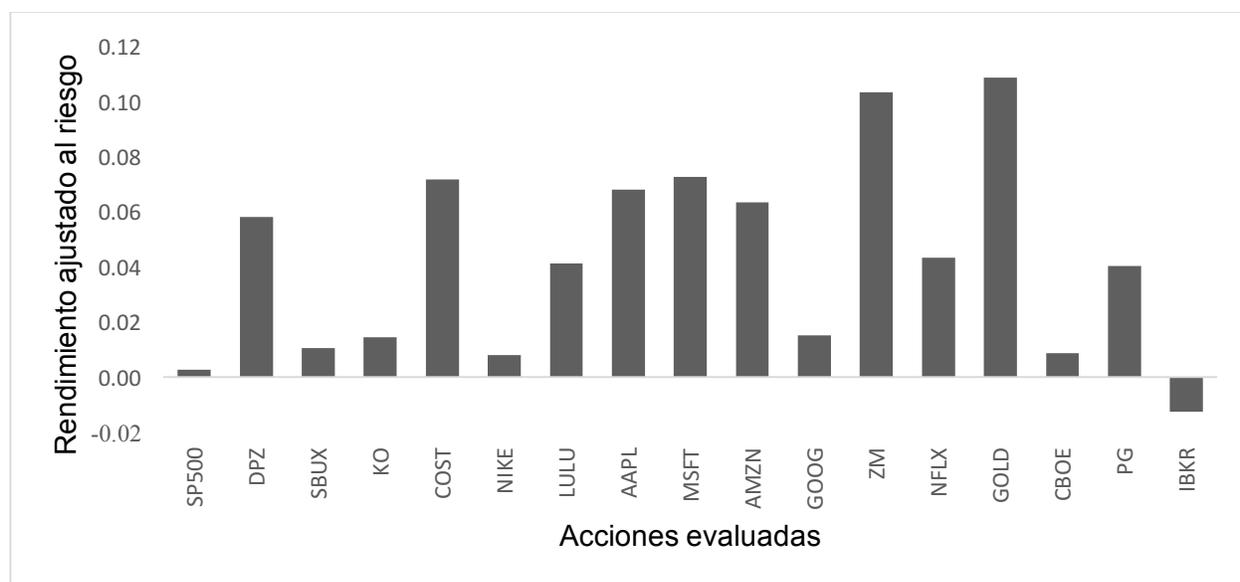
En cuanto a la volatilidad, medida por el coeficiente beta, se tiene que AAPL y MSFT presentan los mayores valores de la lista (1.14), esto representa que por cada 1% de variación en el mercado, las acciones de AAPL y MSFT se espera que respondan con una variación de 1.14%. Ello no resulta de extrañarse, al observar que son dichas acciones las que presentan a su vez, un mayor coeficiente de correlación con el mercado, con 0.9, lo que expresa una relación directa y casi perfecta. En contraposición, ZM presenta, no solo el menor coeficiente beta, sino de hecho un valor negativo (-0.12), lo que expone que su comportamiento tiende a ser contrario al del mercado.

Por último, en cuanto a la evaluación de acciones individuales, cabe mencionar el resultado del cálculo del rendimiento ajustado al riesgo, el cual, como se indicó en el punto 2.6.6 del marco teórico, corresponde al recíproco del coeficiente de variación, y como tal representa el número de unidades de rendimiento que se esperan por cada unidad de riesgo a asumir en el activo correspondiente. Como tal, esta es una de las métricas de comparación que más adelante se citarán para comparar los resultados obtenidos del portafolio integrado mediante las herramientas analíticas en la sección 2.8.

Las acciones con mayor expectativa de rendimiento ajustado al riesgo, son GOLD, ZM y MSFT, con 0.1088, 0.1033, y 0.0726 respectivamente, ello representa, que por ejemplo en el caso de GOLD, se espera obtener 0.1088 unidades de rendimiento por cada unidad de riesgo asumida, es decir una eficiencia de riesgo del 10.88%. Si bien tal cifra no suena para nada alentadora –a pesar de ser la mayor entre todo el conjunto– cabe recordar, que al tratarse de valores computados para el periodo de un día, no debe subestimarse su potencial. Como referencia, nótese que el rendimiento ajustado al riesgo esperado del mercado en su conjunto resulta ser de 0.0027, es decir que se tiene una expectativa de eficiencia del riesgo de 0.27%. En la gráfica 11, el comparativo se aprecia con elocuencia.

Figura 11.

Rendimiento ajustado al riesgo de cada acción evaluado, y el índice de mercado.



Fuente: Elaboración propia. Con base en información histórica de FINANCE.YAHOO.COM

4.2 RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y GESTIÓN DE PORTAFOLIO:

En esta sección, se presentan los resultados de la aplicación de las herramientas cuantitativas propuestas para el análisis y gestión de portafolio, explicadas exhaustivamente en los puntos 2.7 y 2.8 del Marco Teórico. La exposición, en esta oportunidad –al tratarse de resultados– se realiza en orden transpuesto al presentado en el despliegue teórico referido. Por tanto, se principia esta sección explicando lo concerniente a la selección de las combinaciones de activos con mayor potencial para integrarse en portafolio. Seguidamente, explícate la determinación de distribución óptima de capital. Luego, se presenta el análisis comparativo de las estimaciones de expectativas de su comportamiento, con base en las cuantificaciones realizadas. En la sección final del presente capítulo, se dan a conocer los resultados experimentados en el portafolio finalmente seleccionado, es decir su evaluación de desempeño.

4.2.1 Selección de combinaciones de dos acciones:

Como pudo observarse en la sección anterior, las distintas acciones evaluadas, presentan comportamientos que podrían ser caracterizados –heurísticamente– como contrarios a la tendencia del mercado, prosélitos a la tendencia del mercado, o bien, relativamente indiferentes. La medición del coeficiente beta, entendido como la volatilidad de la acción, proporciona un entendimiento cuantitativo de dicha intuición. Con la disposición de tal información, bien podrían formularse conclusiones al respecto de cuáles, entre las acciones evaluadas, rendirían de mejor forma, con base a un juicio de valor sobre el comportamiento futuro del mercado. Por ejemplo, bien pudiese formularse que, ante la expectativa de un mercado a la baja, la tenencia de acciones cuyo comportamiento se espera contrario al mercado, presenta una mejor oportunidad de rendimiento; siendo lo contrario, naturalmente válido por su parte.

El problema radica en que, con frecuencia, el mercado difícilmente presenta una tendencia claramente definida, o por lo menos previsiblemente sostenible, con la única certeza –tal como se presenta actualmente– que se experimentarían fluctuaciones trepidantes, es decir amplias al alza y a la baja. En tales condiciones, resulta

imprescindible, disponer de una herramienta suplementaria, que, en el mejor de los casos, valide un juicio a apriorístico del inversionista, o por el contrario, le someta a reconsideración.

En atención a dicha necesidad, se presentó en el punto 2.8.1 del capítulo 2, el desarrollo de una herramienta analítica, que relaciona la suma de rendimientos esperados de todas las posibles combinaciones de dos acciones (ver anexos 3 y 4), sobre el coeficiente de correlación + 1 correspondiente a cada combinación (ver anexo 5). De tal suerte, expresando el coeficiente de correlación en intervalo $[0,2]$, y obtener el cociente de la suma de rendimientos esperados, se determina un valor, que ha de variar en función de dos factores: el rendimiento combinado de ambas acciones, y su coeficiente de correlación modificado. El resultado se identifica como Coeficiente de Adecuación.

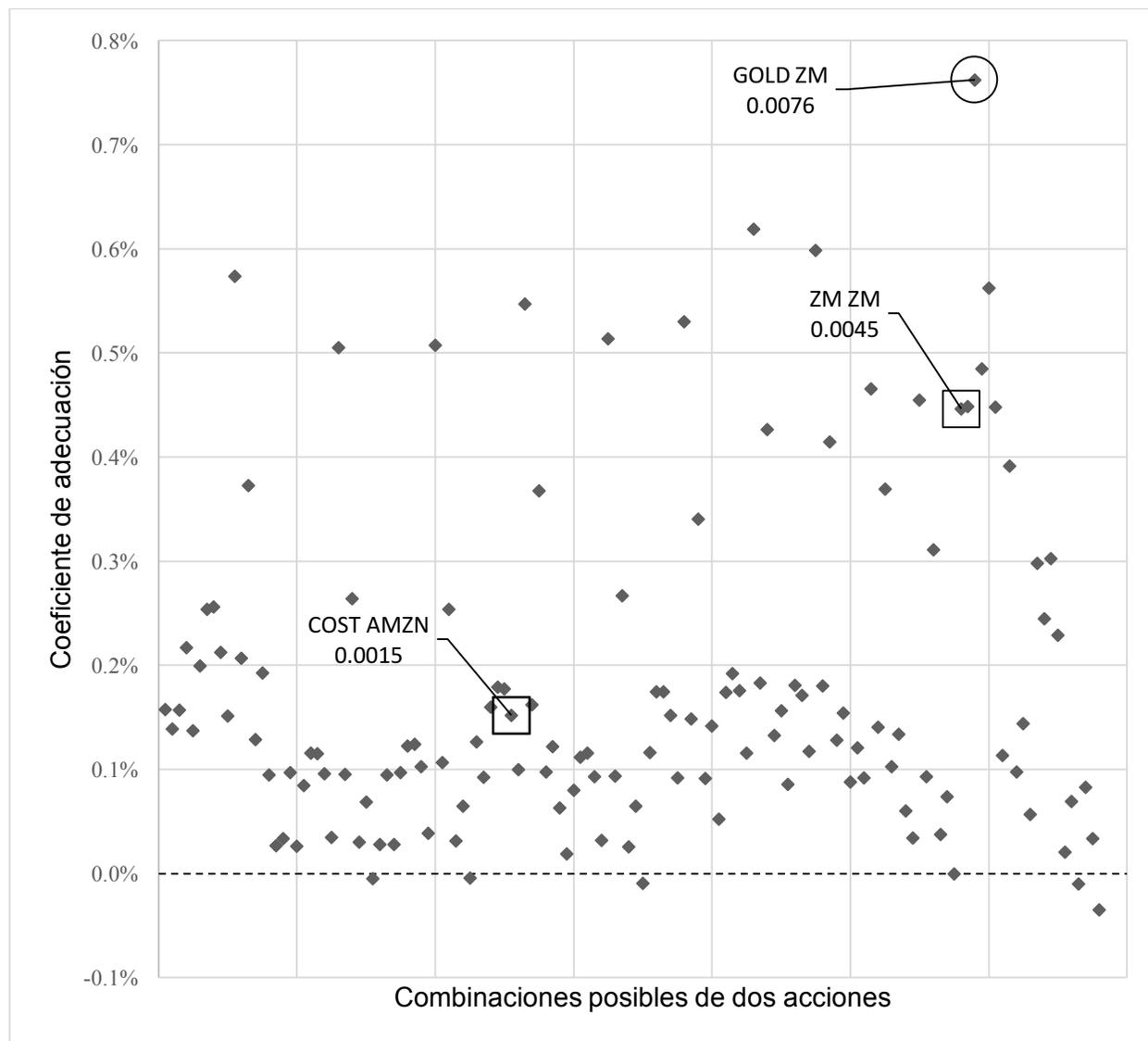
La interpretación del resultado obtenido mediante la aplicación de dicha herramienta, es que: de las 256 posibles combinaciones de dos activos, formadas a partir de 16 acciones evaluadas, aquellas que muestren el máximo valor, presentan teóricamente el mayor potencial para su integración en un portafolio, basado en el criterio de optimización del riesgo, es decir, maximizar el rendimiento esperado por cada unidad de riesgo asumido. Toda vez, que la estimación del riesgo total de un portafolio, como se expuso detalladamente en el punto 2.7.2 del capítulo 2, es una función inversa de la covarianza entre cada uno de sus componentes, de lo cual, naturalmente se entiende que el coeficiente de correlación, al no ser más, que la covarianza estandarizada entre las variables, es un valor subrogado a la misma y por tanto válido en la aproximación de las mismas conclusiones. Estudios comprensivos sobre la aplicación de esta herramienta en muestras más amplias e iteraciones numerosas, han de conducirse en futuras oportunidades para formalizar y posiblemente generalizar las conclusiones en cuanto a la efectividad la misma, como parte de la estrategia de inversión.

En la gráfica 11, que se presenta a continuación, se resume el resultado de la aplicación de la referida herramienta, cuyo desarrollo y procedimiento se muestra meticulosamente detallado en el punto 2.8.1 del Marco Teórico. La representación, muestra un plano cartesiano, donde cada uno de los puntos marcados representa una posible combinación

de activos (ver anexo 6), y su ubicación en el eje vertical, representa su valor. Como se indicó en líneas anteriores; a mayor valor, mayor es la interpretación de su potencial, por lo que aquel punto que destaque sobre el resto, representará la combinación de acciones con el máximo potencial de optimizar el riesgo de un portafolio integrado por ellas.

Figura 12.

Representación gráfica de la Matriz de Índice de Adecuación (Anexo 6).



Fuente: Elaboración propia. Ver Anexo 6 (Matriz de Adecuación para las 256 combinaciones).

El punto máximo, remarcado por un círculo, representa la combinación GOLD-ZM, con una lectura de 0.0076 de índice de adecuación, claramente superior al resto.

En la gráfica, intencionalmente se representó también el valor de aquellas combinaciones de la misma pareja, lo cual permite evidenciar la trascendencia del coeficiente de correlación, puesto que el coeficiente de correlación de una variable consigo misma ha de ser indefectiblemente igual a 1 –en este caso, equivalente a 2 por la adición de 1 al valor original– se obtiene que, a pesar de una acción en lo particular presentar la máxima expectativa de rendimiento entre todas –tal es el caso de ZM– al combinarse con una acción que quizá no ofrezca semejantes niveles de rendimiento, dicha combinación tendrá el potencial de superar incluso a la acción más aventajada en lo particular, en la medida que la correlación entre ambos activos combinados sea lo más cercana a cero, es decir –en la escala modificada– se encuentren inversamente correlacionados. Véase el punto señalado con un cuadrado correspondiente a la combinación de ZM-ZM, es decir un portafolio compuesto en un 100% por tal acción, y nótese que su valor se encuentra muy por debajo del valor máximo obtenido por la combinación GOLD-ZM.

Como referencia, también en la gráfica 12, se señala con un recuadro, el punto que representa la combinación de las dos acciones con menor riesgo total *i.e.* desviación estándar: COST-AMZN. Puede observarse que se encuentra muy por debajo de combinaciones con acciones mucho más riesgosas en lo particular, y solo rozando el límite superior de las combinaciones promedio.

Las combinaciones de acciones con mayor potencial, de acuerdo a la herramienta descrita, son: 1) GOLD-ZM con un coeficiente de adecuación de 0.0076. 2) AAPL-ZM; 0.0062. y 3) MSFT-ZM; 0.0060. Dado el comportamiento espectacular de ZM, en la historia reciente, es difícil apartarle de la composición de un portafolio basado en datos históricos. Cuánta gasolina le queda en el tanque a dicha acción, es una interrogante que no se pretende atender en el presente estudio.

Como conclusión del análisis, se seleccionó la combinación GOLD-ZM para integrar el Portafolio Bandera, el cual se analizó contra un portafolio alternativo compuesto por las acciones de mínimo riesgo individual: COST-AMZN, y un portafolio completamente diversificado, compuesto alícuotamente por las 16 acciones evaluadas. A continuación, se presentan las métricas comparativas de la integración de dichos portafolios.

4.2.2 Determinación de la colocación óptima de capital para dos acciones:

Una vez seleccionado el portafolio bandera, compuesto por acciones de GOLD y ZM, se procedió a determinar la distribución óptima de capital a asignar en ambos componentes, bajo el criterio de optimización de riesgo. Para atender dicha tarea, se procedió mediante la ecuación desarrollada de autoría propia, expuesta detalladamente en el punto 2.8.4 del Marco Teórico, con los resultados siguientes:

Ecuación de solución para determinar el peso componente de la acción A:

$$\frac{-(\sigma_b^2 \mathbf{K} - E[r_b]^2 \mathbf{F}) \pm \sqrt{(\sigma_b^2 \mathbf{K} - E[r_b]^2 \mathbf{F})^2 - 4(\mathbf{K}\mathbf{G} - \mathbf{Y}\mathbf{F})(\sigma_b^2 \mathbf{Y} - 2E[r_b]^2 \mathbf{G})}}{2(\mathbf{K}\mathbf{G} - \mathbf{Y}\mathbf{F})}$$

Donde los valores simbólicos \mathbf{K} , \mathbf{Y} , \mathbf{F} y \mathbf{G} , representan:

$$\mathbf{K} \Rightarrow (E[r_a]^2 + E[r_b]^2 - 2E[r_a]E[r_b])$$

$$\mathbf{Y} \Rightarrow (E[r_a]E[r_b] - E[r_b]^2)$$

$$\mathbf{F} \Rightarrow (\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab})$$

$$\mathbf{G} \Rightarrow (\sigma_{ab} - \sigma_b^2)$$

Sustituyendo los valores correspondientes, los cuales pueden ubicarse en el cuadro 3 y suscribiendo la acción A: como GOLD y la acción B: como ZM; se tiene que el peso componente a distribuir en GOLD para optimizar el rendimiento ajustado al riesgo del portafolio es de 62.32% del capital. Inmediatamente se deduce que el peso componente a asignar en ZM, es de 37.68% del capital.

Nótese que, de la solución de la expresión referida, se obtiene un valor alternativo de 3.01456, dicho valor, significaría invertir más del 100% del capital en la acción de GOLD, entiéndase posible mediante el uso de apalancamiento. Puesto que dicha condición se considera fuera del modelo, tal solución se descarta, y se procede únicamente con la que permite distribuir un 100% del capital en GOLD y ZM, estrictamente.

Solución numérica de la ecuación para determinar el peso componente de la acción A correspondiente a GOLD, en la determinación de la estructura óptima del portafolio:

Datos de entrada para solución:

$$GOLD = \text{Acción}(a): E[r_a] = 0.2983\%; \sigma_a^2 = 0.00075$$

$$ZM = \text{Acción}(b): E[r_b] = 0.4463\%; \sigma_b^2 = 0.00187$$

$$\sigma_{ab} = -0.0003$$

Operando los valores simbólicos K, Y, F y G:

$$K \Rightarrow (0.002983^2 + 0.004463^2 - 2 * 0.002983 * 0.004463) = 2.1919E^{-6}$$

$$Y \Rightarrow (0.002983 * 0.004463 - 0.004463^2) = -6.7076^{-6}$$

$$F \Rightarrow (0.00075 + 0.00187 - 2 * -0.0003) = 0.002673$$

$$G \Rightarrow (-0.0003 - 0.00187) = -0.00189$$

Sustituyendo valores en la ecuación desarrollada para w_a :

$$\frac{-(0.00187 * .1919E^{-6} - 0.004463^2 * 0.002673) \pm \sqrt{(0.00187 * 2.1919E^{-6} - 0.004463^2 * 0.002673)^2 - 4 (2.19^2 * -0.00189 - 6.71^2 * 0.002673)(0.00187 * -6.71^2 - 2 * 0.004463^2 * -0.00189)}}{2 * (2.19^2 * -0.00189 - (-6.71^2) * 0.002673)}$$

Los valores solución para w_a son: [0.6232, 3.01456]; se toma el valor que cumple con la condición de $0 < w_a < 1$ es decir $w_a = 0.62$. Puesto que se definió $w_b = 1 - w_a$; $w_b = 1 - 0.62 = 0.38$. De tal forma se definen los pesos óptimos del portafolio como:

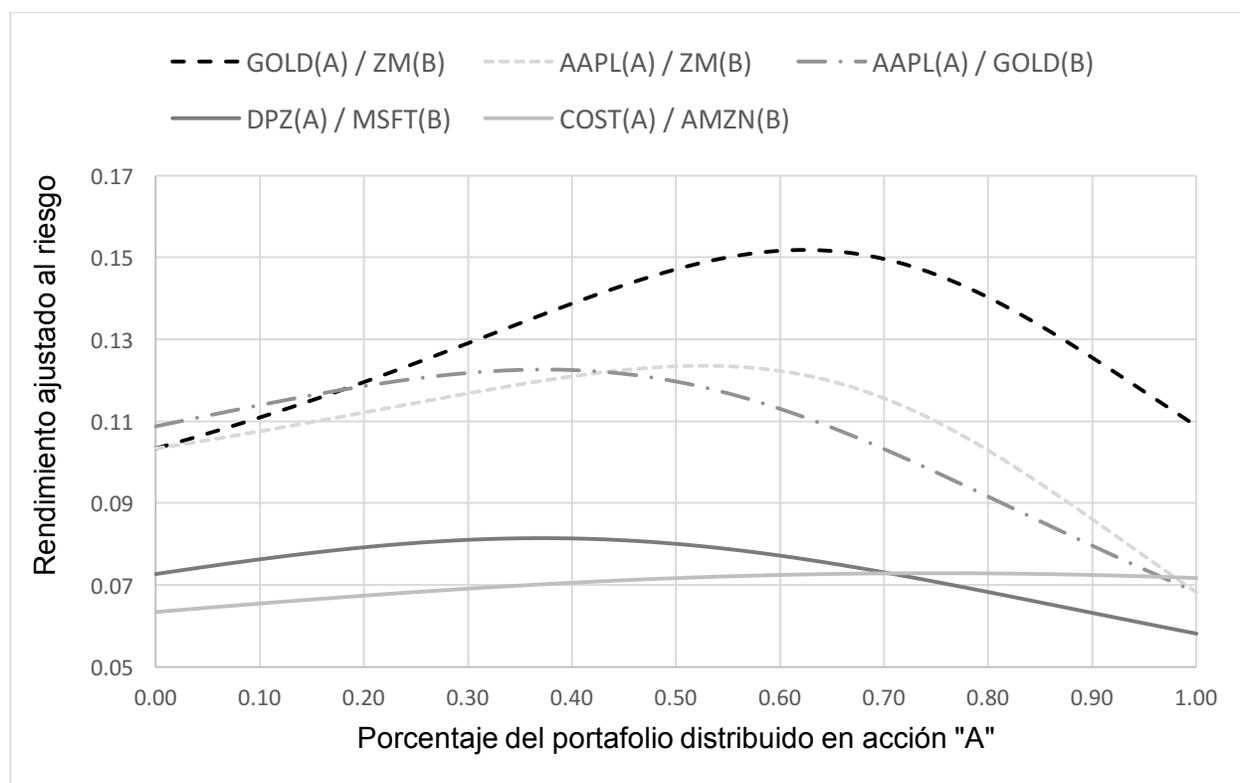
$$GOLD(A) = w_a = 0.62 \quad \text{y} \quad ZM(B) = w_b = 0.38$$

Aplicando el mismo procedimiento al portafolio alternativo compuesto por COST y AMZN, declarando COST como la acción A, y AMZN como la acción B, se tiene que el peso componente óptimo a distribuir en COST, es de 74.81%. correspondiéndose con un 25.19% asignado a AMZN. Nótese, que a pesar de que la acción designada como A, en ambos casos demandó la mayor proporción del capital distribuido, este hecho no tiene absolutamente nada que ver con la importancia, sino es únicamente notación simbólica.

A continuación, se presenta la gráfica 13, en la que puede observarse el rendimiento ajustado al riesgo resultante de las distintas combinaciones. El eje horizontal indica el porcentaje asignado a la acción A, comenzando desde un 0%, lo que significa necesariamente que un 100% es distribuido en la acción B, hasta llegar a la distribución del 100% en la acción A. La elevación de cada punto en la curva descrita, muestra el resultado obtenido en el rendimiento ajustado al riesgo de cada alternativa de asignación.

Figura 13.

Rendimiento ajustado al riesgo en función de la distribución de capital.



Fuente: Elaboración propia. Con base en estimaciones de rendimiento y desviación estándar.

4.2.3 Resumen comparativo de portafolios analizados:

En este punto se presentan los resultados de la aplicación de las herramientas cuantitativas expuestas en la sección 2.7 del Marco Teórico, correspondientes a estimación de rendimiento esperado de portafolio, riesgo total, rendimiento ajustado al riesgo, y volatilidad; así como las herramientas de gestión expuestas en los puntos 2.8.6 y 2.8.7 concernientes a la estimación de rendimiento activo, al valor absoluto en riesgo. Lo anterior, para los tres portafolios seleccionados para medición de desempeño: 1) el portafolio bandera, formado por GOLD y ZM, 2) el portafolio alternativo, formado por COST y AMZN, y 3) el portafolio completamente diversificado, formado por la distribución alícuota del capital en las 16 acciones evaluadas. El resumen de los resultados se expone en el siguiente cuadro comparativo:

Tabla 4.

Comparativo de portafolios evaluados:

PORTAFOLIO	1) BANDERA		2) ALTERNATIVO		3) DIVERSIFICADO	
CRITERIO DE INTEGRACIÓN:	Índice Adecuación Máximo (GOLD 62%, ZM 38%)		Acciones con Riesgo Mínimo (COST 75%, AMZN 25%)		Diversificación alícuota (16 ACCIONES)	
Rendimiento esperado	0.354%		0.125%		0.120%	
Desviación estándar:	2.33%		1.72%		1.66%	
Rendimiento ajustado a riesgo:	15.18%		7.28%		7.19%	
Coeficiente Beta:	0.14		0.65		0.77	
Rendimiento activo esperado:	0.35%		0.12%		0.11%	
Probabilidad de rendimiento activo:	54.80%		53.61%		55.85%	
VALOR EN RIESGO 95%	Simple	C-VaR	Simple	C-VaR	Simple	C-VaR
	-3.48%	-8.08%	-2.70%	-6.17%	-2.62%	-7.64%

Fuente: Elaboración propia. Parámetro Lambda para estimación de C-VaR: $\lambda = 0.98$

La tabla 4, Presenta el análisis comparativo de los tres portafolios evaluados, donde puede constatarse que el portafolio bandera, conformado por la combinación de acciones de GOLD y ZM, presenta, tanto la mayor expectativa de rendimiento, como el mayor rendimiento ajustado al riesgo; 0.35% y 15.18% respectivamente. Superando en ambas métricas, por más del doble de las dos alternativas evaluadas. El portafolio alternativo, compuesto por las acciones de menor riesgo en lo individual, registra una expectativa de 0.125% de rendimiento, y una eficiencia por unidad de riesgo de 7.18%, mientras que para el portafolio totalmente diversificado se espera un valor central de rendimiento en 0.120% y una eficiencia de riesgo de 7.19%, casi idéntico en ambas estimaciones al portafolio alternativo.

En cuanto al riesgo total de portafolio, expresado mediante la desviación estándar, se tiene que, consecuente con su elevada expectativa de rendimiento, la dispersión esperada de resultados, es también la más alta entre las tres alternativas evaluadas, con 2.33%. Confirmando la intuición quizá, el portafolio completamente diversificado, presenta la menor desviación estándar, con un valor de 1.66%, y ligeramente por encima de éste, se ubica el portafolio alternativo; con una variación estimada de 1.72%. No obstante, cabe resaltar que, el criterio de selección de activos y distribución de capital, no se basó en obtener un portafolio de riesgo mínimo, por tanto, el desarrollo de la función de optimización de riesgo, cuyos resultados se dieron a conocer en el punto anterior. De pretenderse en efecto, la minimización del riesgo, es decir efectivamente reducirlo a su mínimo posible, el procedimiento aplicable, corresponde a la mucho más sencilla y comúnmente conocida, minimización de la función de varianza del portafolio, procedimiento detalladamente explicado en el punto 2.8.3 del Marco Teórico.

Un importante aspecto a resaltar del cuadro comparativo de portafolios evaluados, es el rendimiento activo esperado del portafolio, este representa la expectativa que se tiene de superar el rendimiento esperado de invertir en el índice de mercado. En terminología especializada –por no decir jerga– de la industria, se refiere a dicha expectativa como ALPHA, y se entiende como el premio que se espera recibir por la gestión activa de un portafolio, en oposición a simplemente invertir en un índice compuesto, y en la práctica; ahorrarse los honorarios por gestión –frecuentemente elevados– de un especialista.

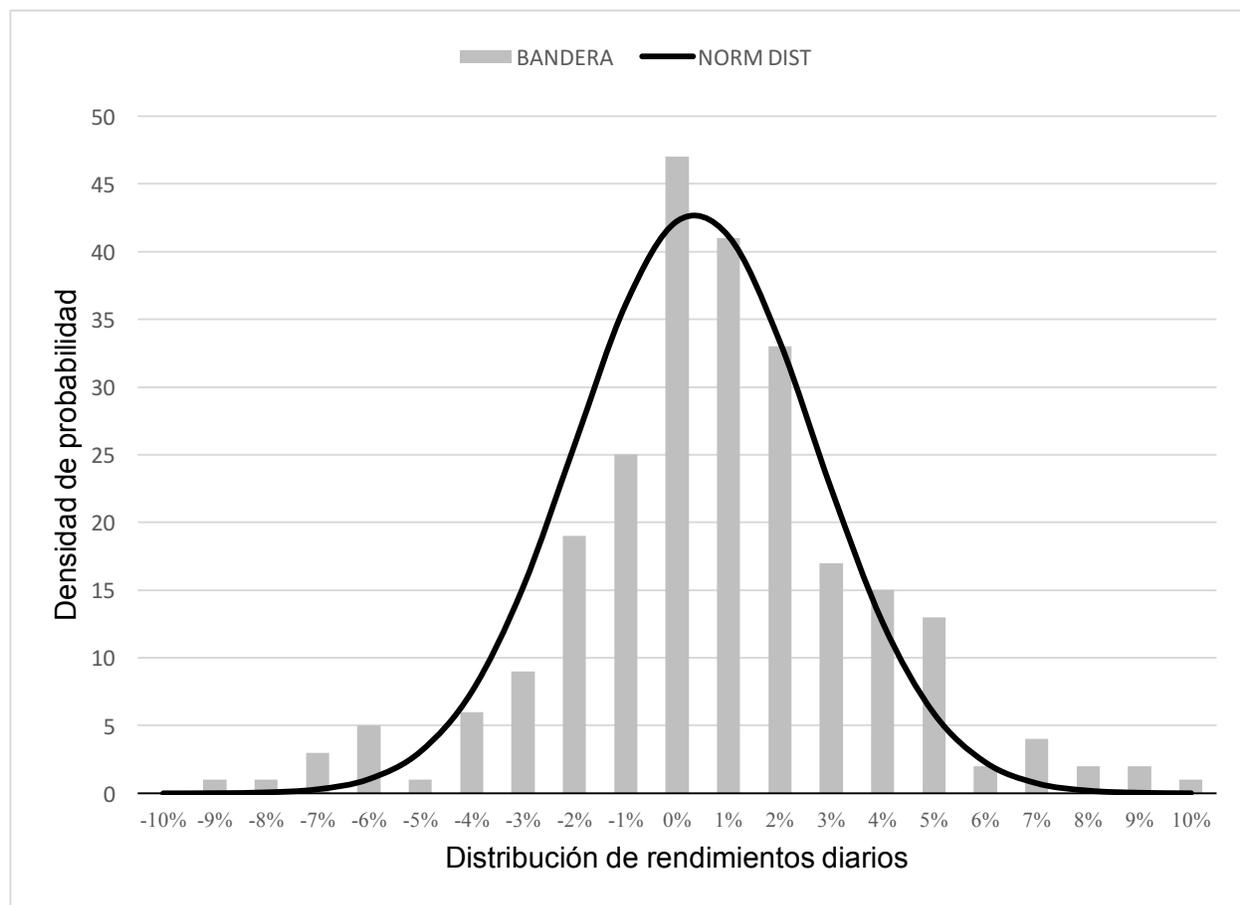
En cuanto a lo anterior, el portafolio bandera, se perfila nuevamente muy superior a las dos alternativas evaluadas, esperándose de él un rendimiento activo de 0.35%, casi exactamente el triple del rendimiento activo esperado del portafolio alternativo y el portafolio diversificado, con 0.12% y 0.11% respectivamente. La probabilidad de materializar dicha expectativa es similar en las tres alternativas, siendo superior al 50% en los tres casos: 54.80% para el portafolio bandera, 54.61% para el portafolio alternativo, y 55.85% para el portafolio diversificado.

A partir de las estimaciones de rendimiento activo y probabilidad de rendimiento activo, puede formularse una expectativa matemática para cada portafolio. Expresándola como el producto de ambos términos, se tiene que, para el portafolio bandera es de $0.35\% \times 54.80\% = 19.10\%$; para el portafolio alternativo es de $0.12\% \times 53.61\% = 6.42\%$; y para el portafolio diversificado es de $0.11\% \times 55.85\% = 6.38\%$. Esta cifra puede entenderse como una ventaja estadística “edge” considerablemente amplia del portafolio bandera sobre las alternativas evaluadas.

Finalmente, llegó el momento de discutir la estimación del valor absoluto en riesgo VaR, que, tal como se explicó en el punto 2.8.7 del Marco Teórico, se calculó por medio del método paramétrico simple, y por un método considerablemente superior, identificado como: Valor Absoluto en Riesgo Condicional por Simulación Histórica y Pesos Exponencialmente Decrecientes, abreviado C-VaR, –por la evidente conveniencia. Los resultados de cada método varían considerablemente durante periodos de análisis caracterizados por alta volatilidad en el mercado. El C-VaR pretende explorar “las colas de la distribución” identificando los peores resultados observados en una simulación histórica (ver anexo 8), y asignarles mayor peso a los eventos ocurridos con fecha reciente, que a aquellos más lejanos en la línea de tiempo. De tal suerte, como se observa en el último renglón del cuadro 4 –ya dos páginas atrás– el VaR 95% se estima considerablemente superior, mediante el modelo C-VaR en los tres casos. De acuerdo a tal metodología, la pérdida media esperada, dado un evento adverso con el 5% de probabilidad de ocurrencia, es de 8.08% para el portafolio bandera, 6.17% para el portafolio alternativo, y 7.64% para el portafolio diversificado. La importancia de considerar dicha medición, se evidencia en la gráfica 13, a continuación.

Figura 14.

Superposición de la función de distribución de probabilidad normal, sobre el histograma de frecuencias para la simulación histórica de rendimientos diarios del portafolio bandera, compuesto por GOLD 62% y ZM 38%. A partir del 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2020. Para un total de 250 observaciones diarias simuladas. (ver anexo 8)



Fuente: Elaboración propia. Con base a simulación histórica (18 de abril 2019 a 16 de abril 2020).

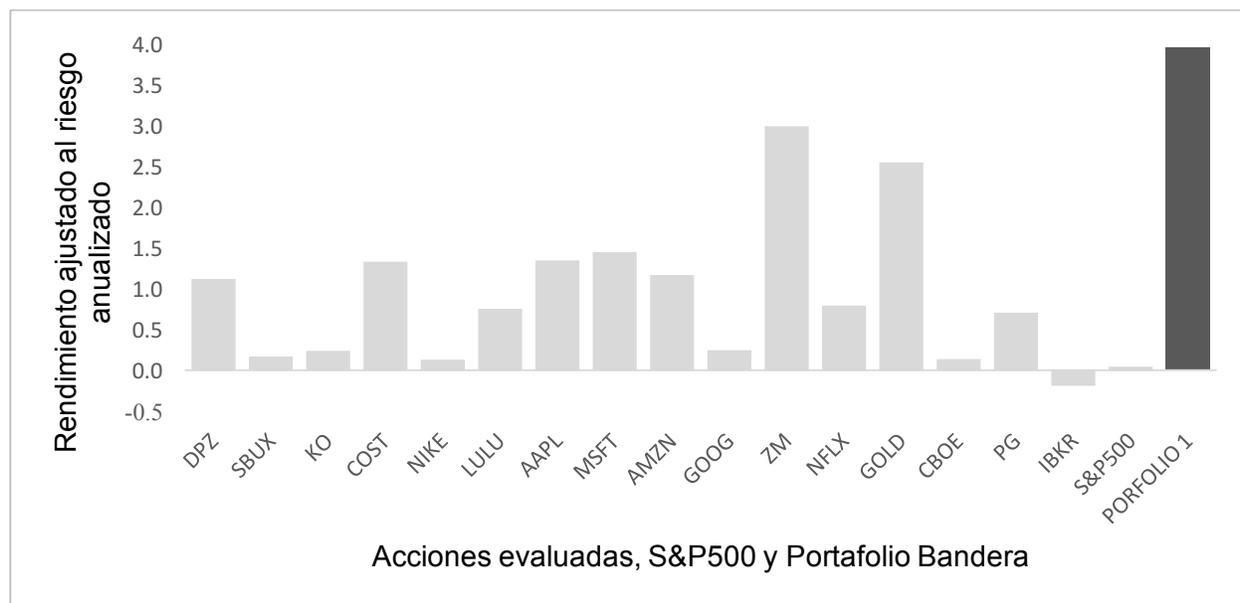
En la figura 14, se evidencia la existencia de acontecimientos en ambos extremos de la distribución, los cuales el supuesto de normalidad subestima por completo. Podría decirse que aquellos presentes en el extremo derecho no suponen preocupación alguna para el inversionista, si acaso gratas sorpresas para endulzar un día fortuito. Sin embargo, difícilmente puede decirse lo mismo de los acontecimientos en el extremo izquierdo. Es sobre tales acontecimientos adversos es que centra su atención la simulación histórica del VaR condicional, asegurándose de cuantificar aquellos eventos, que si bien muy poco frecuentes, su ocurrencia puede resultar estremecedora.

Como puede observarse, en la gráfica 14, los acontecimientos adversos en el extremo izquierdo de la distribución, son fielmente representados por la estimación de 8.08% de pérdida media esperada, dado un evento adverso con el 5% de probabilidad de ocurrencia en el periodo de análisis, rebasándose sobradamente el -3.48% estimado por el modelo paramétrico simple bajo el supuesto de normalidad en la distribución.

Finalmente, a continuación, se presenta una gráfica que ratifica la efectividad de las herramientas cuantitativas y modelos estadísticos aplicados, para la construcción del portafolio bandera, bajo el criterio de maximización de rendimiento ajustado al riesgo. Resta, como punto final de la presente sección, conocer el desempeño proyectado para dicho portafolio, mediante la generación de una simulación de rendimientos probables.

Figura 15.

Comparación de la expectativa de rendimiento ajustado al riesgo de acciones contra portafolio número 1: Bandera, compuesto por GOLD 68% y ZM 38%.



Fuente: Elaboración propia. Valores anualizados.

Como puede observarse, la expectativa de rendimiento del portafolio bandera, formado por GOLD y ZM, con distribución óptima de capital en un 62% y 38% respectivamente, con 15.18% no solamente supera a los portafolios evaluados como referencia, sino también supera a todas y cada una de las acciones individualmente.

4.2.4 Proyección de rendimiento para un trimestre:

La proyección de rentabilidad del portafolio bandera, para el trimestre a transcurrir desde el 17 de abril del año 2020, al 17 de julio del mismo año, se efectuó a partir de la generación de un proceso estocástico, que simula el comportamiento de la variable aleatoria, durante el horizonte de proyección, consistente en 64 observaciones al cierre.

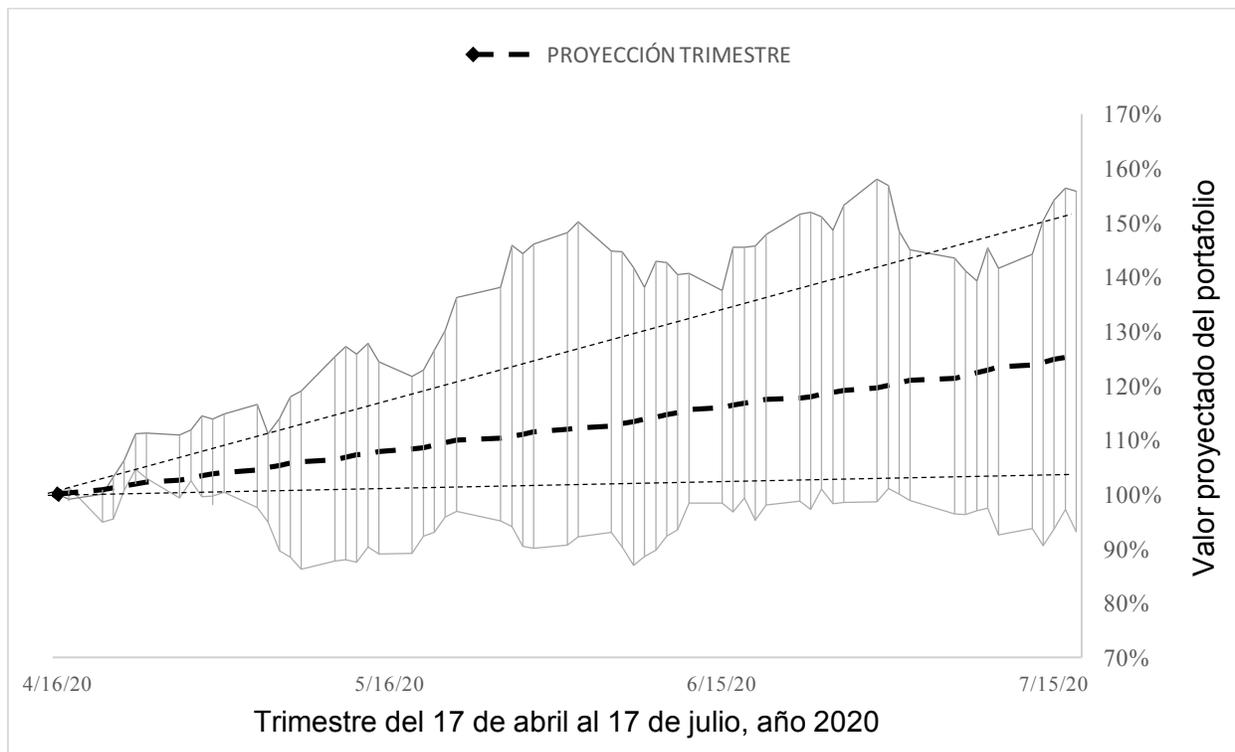
La aplicación del modelo de probabilidad de distribución uniforme, y el modelo de probabilidad de distribución normal, ambos detalladamente expuestos en los puntos 2.4 y 2.5 del Macro Teórico; se combinó para asegurarse de que la simulación generada produjera, resultados efectivamente aleatorios, pero conservase las características fundamentales del comportamiento esperado para el portafolio: expectativa de rendimiento, o rendimiento esperado, y expectativa de dispersión de rendimientos, o desviación estándar del portafolio *i.e.* el riesgo total del portafolio.

Al definir la variable aleatoria como el rendimiento de un periodo simple del portafolio; se generó una secuencia de 64 números aleatorios en el intervalo [0,1]. Tales números, cada uno con la misma probabilidad de ocurrencia, representan un porcentaje de probabilidad acumulada en la función de probabilidad de la distribución normal estándar, por lo que corresponde a cada uno de ellos un valor z único. Así, mediante la ecuación de transformación estándar ($x = z * \sigma_x + \mu_x$) los valores z resultantes de dicha secuencia, se “transformaron” en un valor representativo de una observación probable del rendimiento de cada día en el portafolio para el horizonte de proyección de 64 días. Dicho procedimiento, se efectuó en 1,000 iteraciones, así obteniéndose 1,000 escenarios probables para el trimestre proyectado, cada uno consistiendo de un resultado probable único e independiente para cada día.

El escenario más probable, se determinó mediante el promedio de las mil iteraciones para cada uno de los días *i.e.* la expectativa de rendimiento para cada uno de los 64 días simulados. El resultado de la integración de una secuencia con dichas expectativas, resultó en una rentabilidad proyectada de 26% al cierre del trimestre, con una desviación estándar de 23%.

Figura 16.

Proyección de rentabilidad del portafolio bandera para el trimestre abril – julio. Rentabilidad más probable: 26%. Desviación estándar 23%. Simulación de 1,000 iteraciones de rendimientos aleatorios independientes para cada periodo simple de un día, en el horizonte de proyección.



Fuente: Elaboración propia. Con base a simulación Montecarlo.

En la figura 16, se presenta el escenario más probable de rentabilidad generada por el portafolio bandera para el trimestre proyectado, identificándose con la línea discontinua en negrilla al centro, la expectativa de 26% de rentabilidad al cierre del trimestre, es decir, al día 65 correspondiente al 17 de julio de 2020. El área rayada en torno a la línea de expectativa central, corresponde a los distintos escenarios posibles dentro de una desviación estándar por encima y por debajo de dicha expectativa. Obteniéndose así, un pronóstico de rentabilidad para el trimestre en el rango de 3% a 49% con una máxima probabilidad en 26%, y un intervalo de confianza de 68.27%.

Resta únicamente, a continuación, conocer los resultados efectivamente observados, evaluar comparativamente el rendimiento del portafolio, y verificar si cumplió finalmente con las expectativas y proyecciones realizadas.

4.3 Evaluación de desempeño del portafolio:

Una de las mentes maestras en el dominio de las finanzas, pronunció una dura opinión respecto al inversionista que fiel a la sabiduría popular, aconseja la distribución del capital en la mayor diversidad posible, no solo de acciones, sino de toda clase de activos, sentenciando: “La diversificación amplia es únicamente un requerimiento para aquel inversionista que no entiende verdaderamente lo que está haciendo” –*Warren Buffet, tomado de FORBES.COM (Kaufman, 2018)*.

En efecto, en lo que finalmente consiste en la exposición y evaluación de desempeño del portafolio, estructurado mediante la aplicación de la amplia selección de herramientas cuantitativas descritas en el presente trabajo, se encuentra que un portafolio no precisa integrarse por el mayor número posible de acciones –como muchas veces es sugerido– sino que por el contrario, tan sólo dos acciones, seleccionadas con el rigor técnico en el proceso de evaluación, análisis y gestión, proporciona mayores probabilidades de éxito, en las –aún y a pesar de cualquier esfuerzo– inciertas y muchas veces truculentas aguas sobre las que debe navegarse en el mercado.

4.3.1 Periodo de actividad y evaluación de desempeño:

El periodo para la evaluación del desempeño del portafolio bandera, así como de los dos portafolios que se evaluaron como referencia, comprende desde el día viernes 17 de abril del año 2020, hasta el día 17 de julio del año 2020, completando exactamente 64 días efectivos de actividad bursátil. Sobra decir que las condiciones del mercado durante dicho periodo, han sido todo menos ordinarias, experimentándose aún en gran medida elevados niveles de incertidumbre ante el fenómeno mundial y crisis del COVID-19, cuyos efectos a nivel global, no han hecho más que acreditarse su mención en libros de historia, asegurando su estudio por parte de generaciones futuras. De hecho, como se describió en la sección inicial del presente capítulo, las reacciones sin precedentes que el fenómeno de la pandemia ha desencadenado a nivel global, son material inagotable de estudio. Sin embargo, desafortunadamente para el lector –afortunadamente para el autor– el informe aquí rendido, se limita a exponer el comportamiento del portafolio ajeno

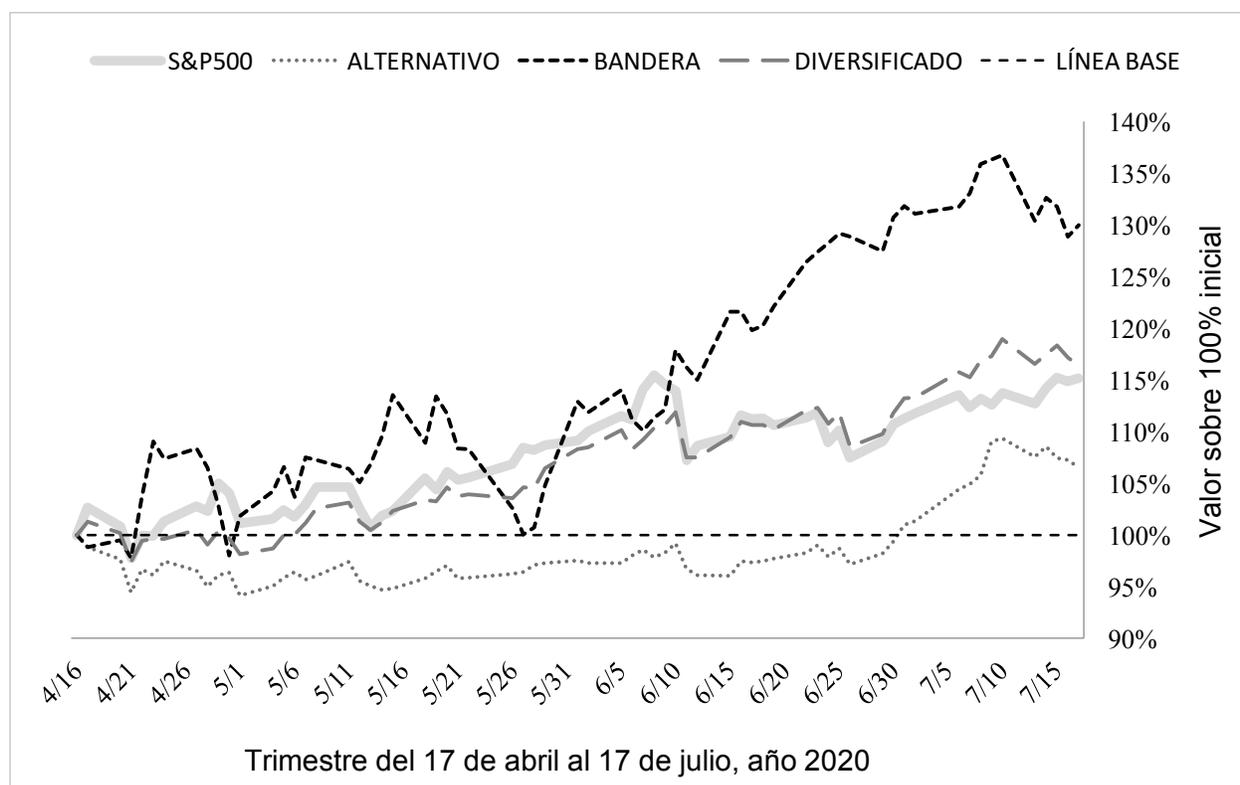
a cualquiera de los múltiples motivadores subyacentes de su éxito o fracaso en el entorno económico y financiero actual, considerándose en todo caso, variables exógenas al análisis que derivó en su construcción, reconociéndose las limitaciones derivado de ello.

4.3.2 Resultados comparativos obtenidos en el periodo de actividad:

Sin más preámbulo, se presenta a continuación la gráfica con el registro del comportamiento de los tres portafolios evaluados: Portafolio Bandera, compuesto por GOLD en un 68% y ZM en un 38%. Portafolio Alternativo, compuesto por COST en un 74.81% y AMZN en un 25.19%, y el Portafolio Diversificación Total, compuesto por todas las 16 acciones evaluadas con participación alícuota de 6.25%. (ver anexo 7)

Figura 17.

Evolución de portafolios en el periodo activo del 17 de abril al 17 de julio de 2020, sobre 100%



Fuente: Elaboración propia. Información de cotizaciones en FINANCE.YAHOO.COM

La simple observación de la figura 17, permite percatarse que el desempeño del portafolio estructurado mediante la aplicación de las herramientas cuantitativas, es superior.

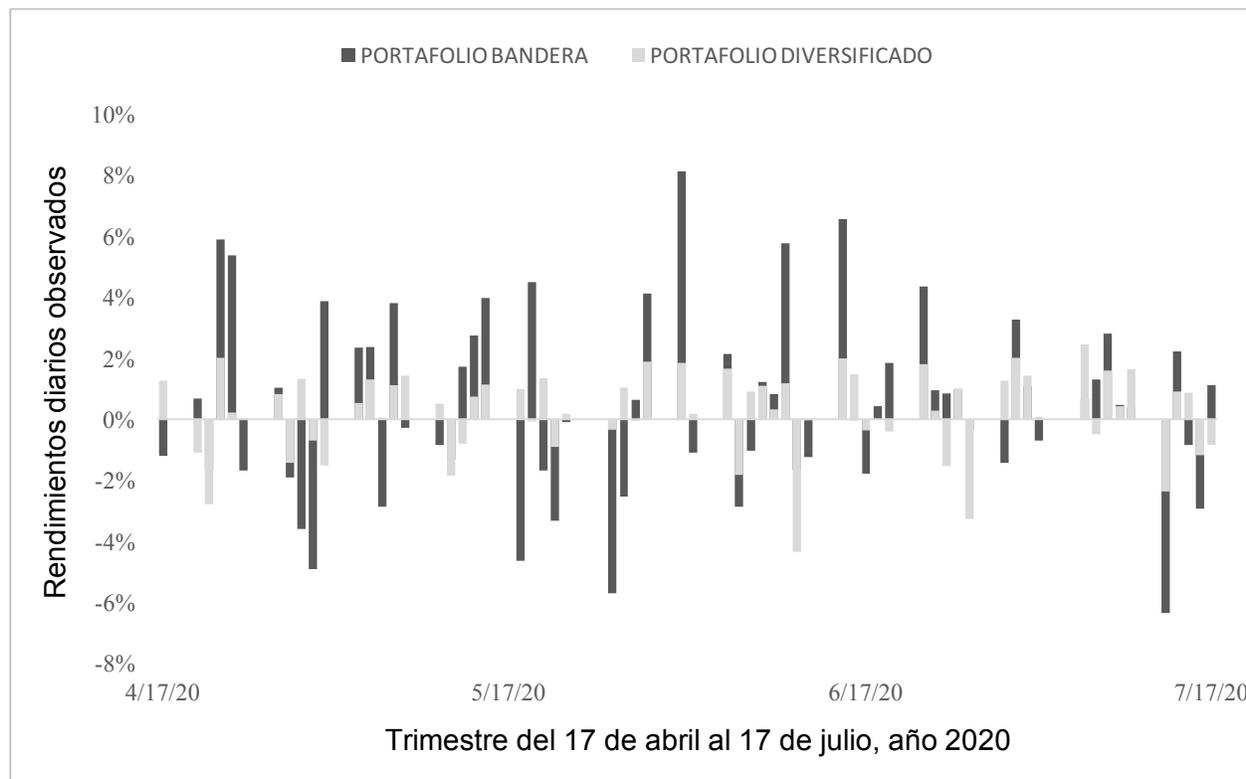
Materializando un rendimiento, a la fecha de 29.97%, el desempeño del portafolio bandera duplica el desempeño del mercado, representado por el índice S&P500, superándole en 15 puntos porcentuales. Respecto al portafolio alternativo, el diferencial de rendimiento, es aún más notables, pues este último ha presentado un desempeño inferior al del mercado, aunque cabe decirlo, considerablemente más estable en sus fluctuaciones. La prueba de fuego, estriba quizá en torno al portafolio completamente diversificado, el cual, como se esperaba, por su mayor grado de diversificación; ha imitado al mercado estrechamente, superándole en unos 150 puntos base, lo que se encuentra sin embargo; muy por debajo del desempeño del portafolio bandera, el cual, fiel a su insigne nombre, le aventaja sobradamente casi por el doble de rentabilidad.

En cuanto a la dispersión de sus resultados, es evidente que el portafolio bandera ha experimentado la mayor amplitud en las fluctuaciones, como se anticipaba, al ser de los tres, el portafolio con la mayor expectativa de riesgo total en la fase de análisis. Correspondientemente, como se mencionó *ut supra*, el portafolio alternativo, basado en las acciones de riesgo mínimo, experimentó fluctuaciones considerablemente menores, incluso más suaves que los movimientos experimentados por el mercado. Sobra decir, que el portafolio completamente diversificado, asemejó la amplitud de las fluctuaciones del mercado en gran medida.

Una particularidad apreciable en el comportamiento de los tres portafolios, es su vinculación con el comportamiento del mercado, en primer lugar se tiene, que el comportamiento exhibido por el portafolio bandera ha sido notablemente en tres ocasiones decididamente opuesto al del mercado, principalmente en la semana del 11 de mayo, y en la semana del 10 de junio, donde se experimentaron amplísimos movimientos divergentes. El resto del tiempo, aunque desvinculado quizá, su comportamiento puede decirse que sigue la misma tendencia general. Esto convalida el rol del coeficiente de correlación determinado durante la fase de análisis, habiéndose entonces obtenido un valor de 0.11, muy cercano a cero, y categóricamente, el menor de los tres portafolios analizados. En contraposición, nótese que el comportamiento del portafolio diversificado, con muy contadas excepciones, imitó el comportamiento del mercado, ello consecuente con el valor de 0.93 estimado de correlación.

Figura 18.

Pérdidas y ganancias diarias para el portafolio bandera y el portafolio diversificado.



Fuente: Elaboración propia. Información de cotizaciones en FINANCE.YAHOO.COM

La figura 18, muestra de forma elocuente, la comparación entre la magnitud de las pérdidas y ganancias diarias, experimentadas en el portafolio bandera, y el portafolio diversificado, donde los tramos oscuros de las barras representan el mayor rango de movimiento de cada observación diaria. Puede apreciarse que, si bien el portafolio bandera presenta excesos en las pérdidas diarias experimentadas, tales valores negativos se ven más que compensados con el exceso en las ganancias obtenidas en el resto de días. Los segmentos grises representan la magnitud mucho más reducida de las pérdidas y ganancias diarias experimentadas por el portafolio diversificado.

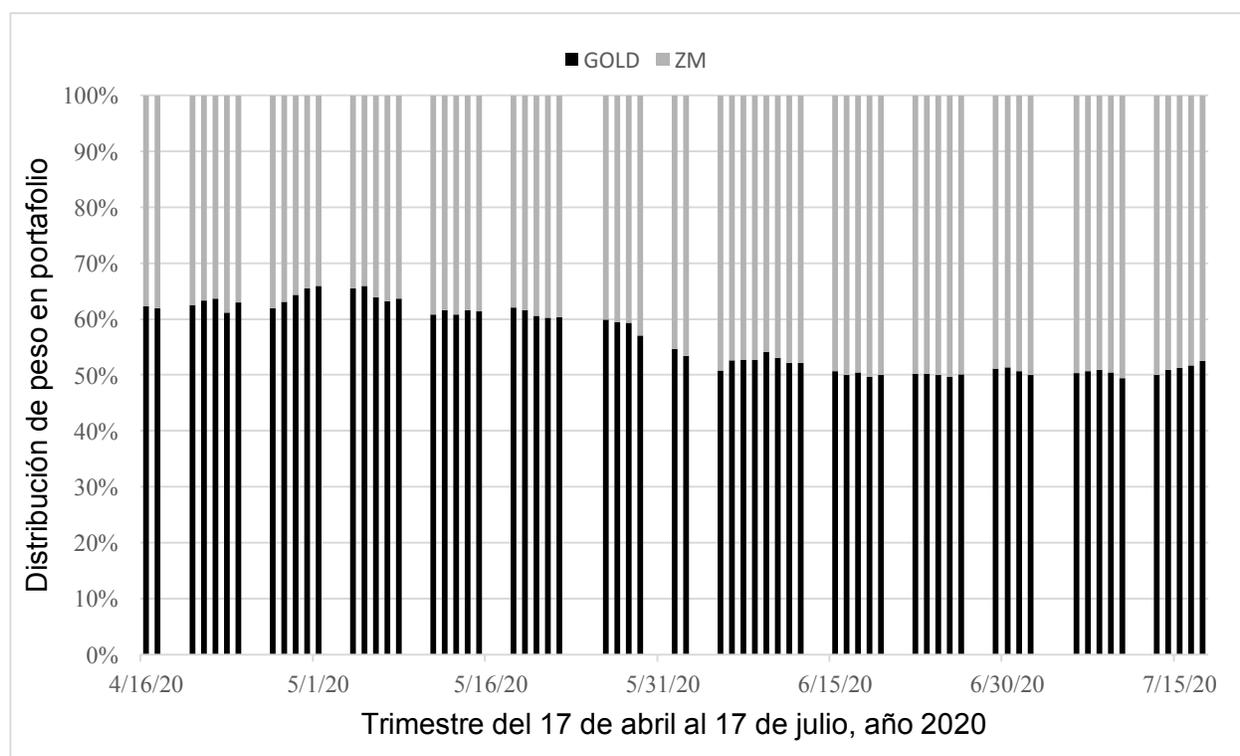
Nótese, que de acuerdo a la estimación de valor en riesgo condicional, realizada en la fase de análisis, se esperaba que con un 5% de probabilidad se presentaran pérdidas de 8.08% en el valor del portafolio, en el plazo de un año. Traducido a la fracción de año correspondiente al periodo activo presentado, se esperaría que 3 días de los 64 transcurridos, presentaran pérdidas en el rango máximo de 8%. Dicha aproximación

probó ser relativamente confiable, pues en ningún caso se rebasó dicho valor, más si, aproximándole justamente en 3 ocasiones: el reciente 13 de julio, con una pérdida de 6.35% la máxima pérdida experimentada durante el periodo, -5.71% observada el 26 de mayo, y -4.90% el 30 de abril; en las tres ocasiones, rebasándose el umbral de riesgo estimado por la metodología tradicional del VaR paramétrico de sólo 3.48%.

4.3.3 Evolución de pesos componentes:

Figura 19.

Evolución de pesos componente portafolio bandera. Valores iniciales: GOLD 62%, ZM 38%.



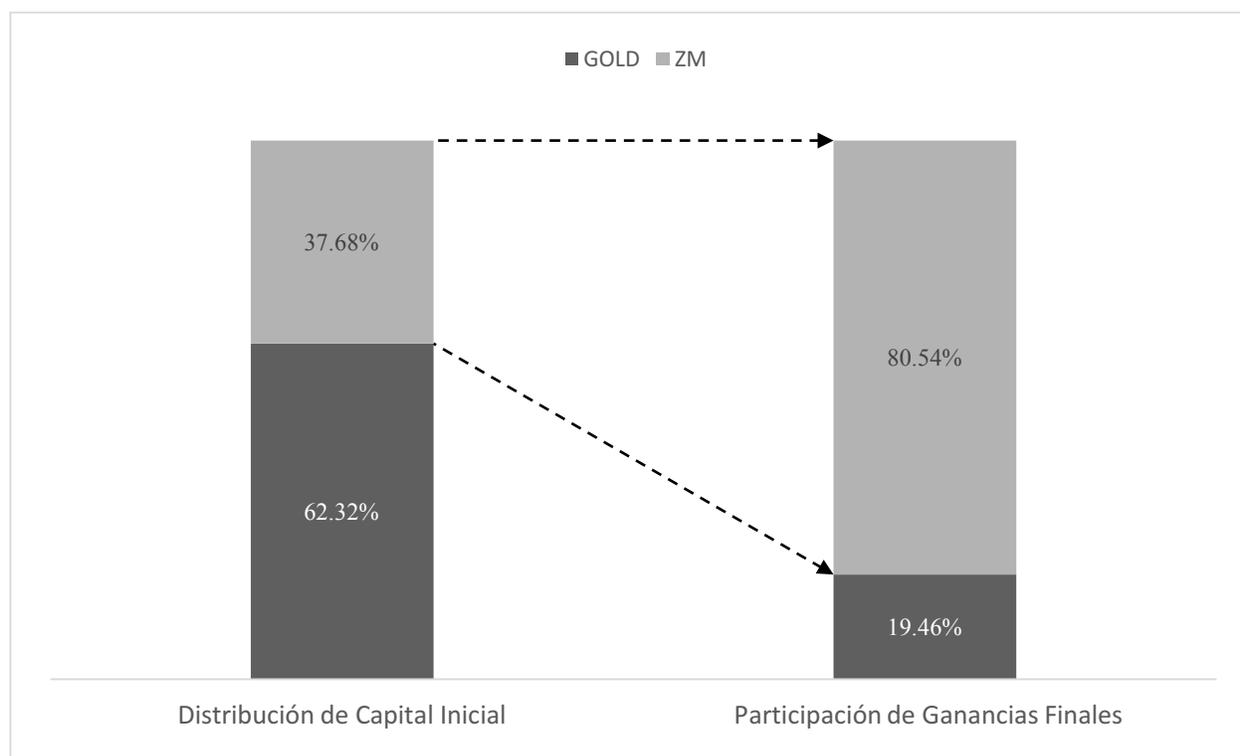
Fuente: Elaboración propia.

Aunque lo parece, la figura 19 no muestra un código de barras. Lo que muestra es la evolución de los pesos componentes desde sus respectivos valores iniciales a mediados de abril, hasta sus valores finales a mediados de julio. Lo que debe entenderse –que pocas veces se hace– es que el comportamiento independiente en el rendimiento de cada activo, en este caso GOLD y ZM, provoca que se modifique la estructura de composición del portafolio. El gráfico 17 muestra la participación de GOLD (barras

negras) y la participación de ZM (barras grises), sobre el 100% del portafolio en función del tiempo de actividad transcurrido. Nótese, que luego de haberse configurado los pesos componentes óptimos de GOLD y ZM, en 62% y 38% respectivamente; al final del periodo evaluado, la participación en el portafolio llegó a ser muy cercana al 50 / 50, resultado propiciado por el desempeño comparativamente superior de ZM respecto a GOLD. A continuación, se presenta la participación de cada uno de los activos en la generación de ganancias para el portafolio durante el periodo evaluado.

Figura 20.

Participación en la generación de utilidades de los activos en el portafolio, comparado con su respectiva distribución de capital inicial: GOLD 62%: 19.46% y ZM 38%: 80.54%.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 20, se presenta un comparativo de participación en la generación de ganancias del cada activo, contra la asignación inicial de capital. A pesar de haberse asignado un peso de 38% a las acciones de ZM, dicha posición generó el 80% de las ganancias en el portafolio, mientras que GOLD, con una asignación mayoritaria del 62% inicial, aportó únicamente un 20% de las ganancias para el portafolio. Fácilmente podría

caerse en la equivocación de pensar que el portafolio hubiese presentado un mejor desempeño de consolidarse en un 100% con acciones de ZM. No obstante, debe recordarse el papel crucial de la incorporación de GOLD, como un contrapeso fundamental para la reducción del riesgo en el portafolio, y por tanto, en la maximización del rendimiento ajustado al riesgo resultante de su combinación óptima, como se explicó en el punto 4.2.1 del presente capítulo (ver gráfica 13).

4.3.4 Cumplimiento de expectativas y proyecciones realizadas:

Para concluir, se presenta, un cuadro resumen que compara las estimaciones de rendimiento mediante las herramientas cuantitativas y modelo de probabilidad aplicado, con los valores observados en la práctica, al cierre de los 64 días de actividad evaluados.

Tabla 5.

Comparativo de resultados obtenidos por el portafolio, versus expectativa.

COMPARACIÓN:	ESTIMACIÓN	OBSERVADO	RESULTADO
Rendimiento esperado:	0.3540%	0.4683%	SUPERADO
Desviación estándar:	2.33%	2.96%	SEMEJANTE
Rendimiento ajustado a riesgo:	15.18%	15.82%	IGUALADO
Pérdida Máxima C-VaR 95%	-8.08%	6.35%	A SALVO
Rendimiento activo diario:	0.35%	0.23%	INFERIOR

Fuente: Elaboración propia. Con base en resultados obtenidos.

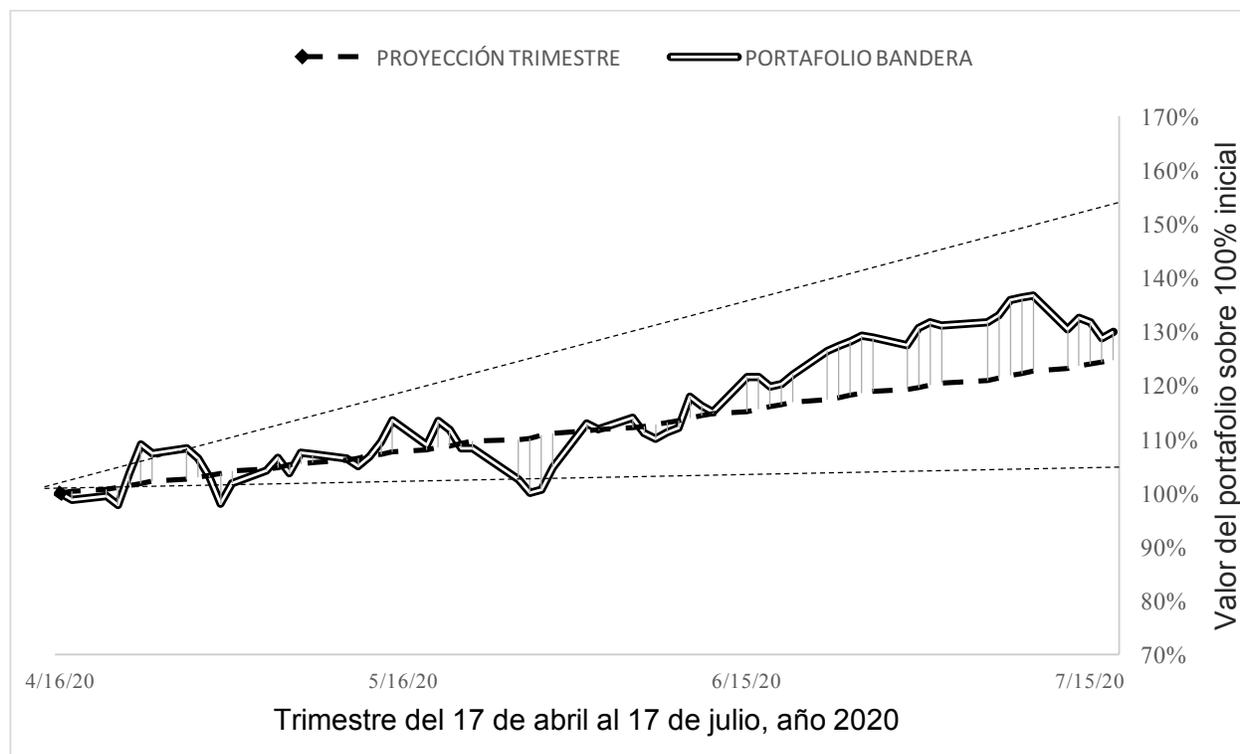
Destaca, de la comparación de resultados obtenidos contra las estimaciones realizadas, el haberse superado la expectativa de rendimiento en poco más de 0.10%, obteniéndose un rendimiento ajustado al riesgo, muy acorde a la estimación, e incluso ligeramente superior de 15.82%. En la única métrica que se obtuvo un resultado alejado del esperado, fue en el rendimiento activo esperado total, que se ubicó 0.12% rezagado, habiéndose estimado un rendimiento activo diario de 0.35%, y en cambio observándose un promedio de 0.23% de rendimiento diario en exceso del índice de mercado. Tal diferencia no resulta de un sub-desempeño del portafolio, sino de un sobre-desempeño del mercado, el cual observó una notable recuperación en el segundo trimestre del año, luego de cerrar el primer trimestre profundamente en territorio negativo.

La rentabilidad total generada por el portafolio, al cierre del trimestre evaluado, fue de 29.97%, ampliamente superior a la rentabilidad generada por el índice de mercado de 15.19%, resultando en un premio de 14.79% por la gestión activa del portafolio.

Finalmente, la comparación de la evolución del portafolio, contra la proyección realizada para el trimestre correspondiente, es elocuente en relatar la utilidad de los modelos de probabilidad aplicados, aproximando con alto grado de precisión el comportamiento futuro del portafolio, habiéndose cumplido con alcanzar la rentabilidad proyectada de 26%, superándola, con una ligera variación de 3.79% sobre el valor proyectado final, y una desviación media de 6.35% respecto a los valores pronosticados para el periodo de 64 observaciones. La siguiente gráfica –última del presente informe– exhibe la comparación del comportamiento observado del portafolio, contra la línea de pronóstico realizada, mediante el proceso de simulación descrito en el punto 4.2.4.

Figura 21.

Comparativo final de la proyección realizada, contra el comportamiento efectivamente observado del portafolio bandera, para el trimestre transcurrido del 17 de abril, al 17 de julio del año 2020.



Fuente: Elaboración propia. Con base en resultados obtenidos.

Como puede observarse en la figura 21, el comportamiento observado del portafolio durante el periodo de ejercicio de 64 días, del 17 de abril al 17 de julio del año 2020, fue consistente con la proyección efectuada mediante el proceso de simulación, basada en el modelo de probabilidad de distribución uniforme y distribución normal, obteniéndose, como ya se mencionó, un resultado muy cercano al valor proyectado para el cierre del trimestre. Nótese la forma en que la línea doble, que describe el comportamiento observado del portafolio, respeta en casi la totalidad de su recorrido, los límites trazados por las líneas punteadas representativas del intervalo de confianza de 68%, formado por la suma y resta de una desviación estándar a los valores centrales pronosticados, desviándose de la línea de proyección central, salvo en 4 ocasiones, siempre por dentro de tales límites, para concurrir finalmente, muy cerca de la estimación final de rentabilidad de 26%, superándose en aproximadamente 4 puntos porcentuales, representando un 16% de variación respecto al valor proyectado.

Resta, nada más que resumir los resultados expuestos en el presente informe, como satisfactorios, en cuanto a la aplicación de las herramientas cuantitativas y modelos de probabilidad, para la gestión óptima de un portafolio de inversión, materializándose las expectativas de maximización de rendimiento ajustado al riesgo, y proyecciones de rentabilidad, durante el trimestre de ejercicio. Se destacan a continuación, los hitos alcanzados consecuencia de la metodología aplicada:

Se superó el rendimiento del mercado, obteniéndose una rentabilidad de 29.97% en el trimestre de ejercicio; 14.79% superior al índice de referencia, que produjo una rentabilidad de 15.19% durante el mismo periodo. Se cumplió con la expectativa de rendimiento ajustado al riesgo del portafolio, obteniéndose en la práctica un 15.80%, frente al 15.18% estimado en el modelo analítico. La proyección de rentabilidad, estimada mediante la aplicación de los modelos de probabilidad, probó ser lo bastante precisa, desviándose únicamente en un 16% del resultado final, y presentando una variación media de 6.39% de cada observación respecto a los valores pronosticados.

A continuación, se presentan las consideraciones finales respecto a los principales resultados obtenidos, en función de los objetivos que guiaron la realización del trabajo.

4.4 Consideraciones finales:

Las decisiones del administrador financiero en materia de inversión, rara vez –si no ninguna– se toman bajo condiciones de auténtica y verdadera certeza. Quizá la única premisa de la que pueda aventurarse a decir tal cosa, es; que aquellos quienes con negligencia descarten la información disponible, en favor de su caprichosa intuición, háyanse expuestos, no solo a cometer un error –de lo cual nadie puede librarse– sino con más peso y responsabilidad; no poder llegar a justificarlo.

En función de lo anterior, y coronando el objetivo general establecido como hilo conductor del trabajo, correspondiente a: establecer una metodología práctica que permita la aplicación de modelos estadísticos de probabilidad, para la gestión de un portafolio de inversión en acciones, orientado a maximizar el rendimiento ajustado al riesgo del capital invertido; se extrae lo siguiente:

Luego de disponer de los insumos analíticos obtenidos mediante las herramientas cuantitativas para la evaluación de acciones individuales; el desarrollo de la Matriz de Adecuación, cuyo fundamento teórico y aplicación se introdujo en el apartado 2.8.1 del Marco Teórico, y cuyos resultados empíricos se presentaron en el punto 4.2.1; constituye una metodología práctica, que se inserta como una pieza fundamental en el proceso de toma de decisiones para la gestión de un portafolio orientado a la maximización del rendimiento ajustado al riesgo.

El aporte de tal metodología consiste en identificar y seleccionar aquellas combinaciones de acciones con máximo potencial, tanto para la maximización del rendimiento esperado, como para la reducción del riesgo total del portafolio, bajo un criterio objetivo basado en las propiedades matemáticas subyacentes en la formación de expectativas de rendimiento y riesgo de un portafolio, que son fundamentalmente: 1) el rendimiento esperado de sus componentes y 2) el grado de correlación existente entre ellos. Solo luego de lo anterior, ha de cobrar pleno sentido, la determinación de pesos óptimos para la distribución de capital en los activos seleccionados, y las consiguientes estimaciones de rentabilidad y riesgo del portafolio resultante.

En cuanto a los lineamientos a considerar para la integración de un portafolio de inversión compuesto por acciones; basándose en la aplicación de la metodología práctica establecida, identificada tentativamente como Matriz de Adecuación; se extraen los siguientes razonamientos:

Puesto que el rendimiento esperado de un portafolio, se define como la suma ponderada del rendimiento de cada uno de sus componentes, sin involucrar en dicho cálculo su riesgo –medido por la desviación estándar– se tiene que; aquellas acciones que presenten el mayor rendimiento esperado, naturalmente presentan el mayor potencial para la maximización del rendimiento esperado del portafolio.

Dado un grupo de acciones con rendimiento esperado similar, y riesgo total similar, aquellas acciones cuyos rendimientos se relacionen menos entre sí, es decir que observen un menor coeficiente de correlación; representarán las combinaciones con máximo potencial de retribuir un mayor número de unidades de rendimiento por cada unidad de riesgo total, al combinarse en un portafolio.

A razón de lo anterior; puesto que, al sumar una unidad al coeficiente de correlación ($R+1$: coeficiente de correlación modificado), se obtiene un valor en el intervalo $[0,2]$ para todas las posibles combinaciones de acciones existentes; al obtener el cociente entre la suma de rendimientos esperados de todas las parejas y su correspondiente coeficiente de correlación modificado ($R+1$), se obtendrá un resultado cuyo valor será mayor, tanto menor sea la correlación entre las variables y mayor sea la suma de su rendimiento esperado; presumiéndose superiores aquellas combinaciones de acciones con mayores valores del “coeficiente de adecuación”, sobre aquellas con menores valores.

Respecto al valor práctico de la aplicación de modelos de probabilidad, para la estimación del rendimiento a obtener del portafolio; se determinó que la precisión de la proyección de rentabilidad para el trimestre de ejercicio del portafolio bandera, realizada mediante la combinación del modelo de probabilidad de distribución uniforme y el modelo de probabilidad de distribución normal, tuvo una exactitud cercana al 84%; obteniéndose una rentabilidad total de 29.97% al cierre, frente al escenario más probable proyectado

de 26%. En cuanto al rendimiento ajustado al riesgo, se obtuvo una relación de 15.82% frente al valor estimado de 15.18%, representando una precisión cercana al 96%. De lo anterior se concluye que la aplicación de los modelos probabilidad implementados, sobre la base metodológica de la Matriz de Adecuación, tiene un alto valor práctico en el proceso de gestión de portafolio, ofreciendo la posibilidad de realizar estimaciones razonables, que aportan objetividad en la toma de decisiones.

Por último, sobre los principales factores que inciden en el éxito o fracaso del enfoque cuantitativo aplicado; debe asegurarse en primer lugar, que la expectativa de rendimiento, desviación estándar, y covarianza de las acciones evaluadas, sean estimadas a partir de series históricas con suficientes observaciones, de tal forma que permitan capturar la forma en que el rendimiento de una acción se relaciona con el de otra en la generalidad de ocasiones.

En segundo lugar, existe un elemento inseparable del criterio experto del analista, el cual corresponde al grado de similitud que el periodo histórico analizado, se espera que presente frente al periodo proyectado, y puesto que, el futuro es, en todo caso, impredecible; en materia de la estimación de escenarios adversos extremos –entiéndase valor absoluto en riesgo– es de cardinal importancia la implementación del modelo condicional de simulación histórica y pesos exponencialmente decrecientes, descrita en el punto 2.8.9 del Marco Teórico; cuyos resultados, como se presentó en el cuadro 5, resultaron mucho más aproximados a la realidad observada en el trimestre de ejercicio, habiéndose estimado con un 5% de probabilidad, la posibilidad de incurrir en una pérdida diaria de 8.08% del valor del portafolio, lo cual reflejó de mejor forma la máxima pérdida diaria observada en el periodo de 6.35%, misma que transgredió con creces la estimación simple de 3.48% realizada mediante el modelo paramétrico.

Con el análisis expresado *ut supra*, el presente informe de resultados, se da por terminado, para pasar, finalmente; a las conclusiones que sintetizan el logro de los objetivos de investigación trazados inicialmente.

CONCLUSIONES

1. En cuanto al objetivo general sobre establecer una metodología práctica de aplicación, se concluye que: la Matriz de Adecuación constituye una herramienta central en el proceso sistemático para la toma de decisiones de inversión permitiendo seleccionar aquellas combinaciones de dos acciones superiores en términos de rendimiento ajustado al riesgo esperado para la integración de un portafolio, bajo un criterio matemático y por tanto objetivo y verificable.
2. Respecto a definir los lineamientos para la selección de acciones e integración del portafolio, se concluye que: aquellas combinaciones de acciones que presenten mayor “coeficiente de adecuación” serán potencialmente superiores en términos de rendimiento ajustado al riesgo, y por tanto preferibles para la integración en un portafolio, con miras a maximizar el rendimiento esperado por unidad de riesgo, teniendo en cuenta que la metodología desarrollada para establecer el coeficiente de adecuación de todas las parejas posibles de acciones, toma en cuenta los dos principales componentes en la formación de expectativas de rendimiento y riesgo de un portafolio: el rendimiento esperado de cada uno de los activos y el coeficiente de correlación entre ambos, siendo en todo caso, preferibles aquellas combinaciones de acciones con mayores rendimientos esperados y menores coeficientes de correlación.
3. Sobre el valor práctico de la aplicación de los modelos cuantitativos propuestos, se concluye que: la aplicación del modelo de probabilidad uniforme y el modelo de probabilidad normal, es de alto valor para la estimación de rendimientos y proyección de resultados; obteniéndose mediante el proceso de simulación de Montecarlo, un escenario de máxima probabilidad con una precisión final de 84% en rentabilidad total generada, y 96% en rendimiento ajustado a riesgo para el trimestre de ejercicio. Adicionalmente, la rentabilidad generada del portafolio bandera de 29.95%, superó en 15 puntos porcentuales al mercado, en 14 puntos porcentuales al portafolio completamente diversificado, y en 23 puntos porcentuales al portafolio conservador, lo que confirma el valor práctico de la metodología propuesta.

4. En torno a los factores más importantes que inciden en el éxito o fracaso de la metodología, se concluye que: contar con series históricas con suficientes observaciones para generar inferencia, pero con la vigencia necesaria para reflejar el comportamiento actual de las variables, son los factores primordiales para el éxito de los modelos y herramientas propuestas. En el caso concreto del trabajo desarrollado, la integración fue a partir de una serie de 250 observaciones, correspondientes a un año completo de actividad bursátil, para la proyección de un trimestre de horizonte de inversión, correspondiente a 64 días. Extender las proyecciones más allá de dicho plazo, sería considerablemente riesgoso, teniendo en cuenta las cambiantes condiciones del mercado. En el caso especial de la estimación de escenarios extremos correspondientes al intervalo de 95% del valor en riesgo, el factor de éxito más importante es asignar un peso exponencialmente decreciente a las observaciones históricas de acuerdo a su antigüedad, de forma tal que se conserve una mayor ponderación sobre los acontecimientos adversos ocurridos recientemente. La realidad observada, que presentó una pérdida máxima diaria de 6.35%, fue concluyente al evidenciar que las estimaciones realizadas mediante la metodología sugerida de pesos exponencialmente decrecientes, fue mucho más cercana a la realidad, al haberse estimado una pérdida probable en un escenario extremo con el 5% de probabilidad de 8.08% frente a una estimación de únicamente 3.48% mediante el método paramétrico simple, la cual claramente subestimó la pérdida probable.
5. Finalmente, puede darse respuesta con propiedad a la interrogante central que motivó la realización del presente trabajo, sobre ¿cómo la aplicación de modelos estadísticos y de probabilidad incide en la toma de decisiones para la gestión de un portafolio? afirmándose que: si bien la metodología de Matriz de Adecuación, las estimaciones de rendimiento mediante el modelo de optimización cuadrática, y las proyecciones de resultados a partir del proceso estocástico de simulación Montecarlo, no pueden en ningún momento presentarse como soluciones determinísticas a un problema probabilístico, positivamente aportan consistencia, objetividad y practicidad al proceso de toma de decisiones de inversión en un entorno pleno de incertidumbre como lo es el mercado bursátil de acciones.

RECOMENDACIONES

- 1) Lo metodología práctica propuesta y los modelos de optimización aplicados, se limitan por el momento a la elección entre combinaciones de dos acciones para la integración de un portafolio óptimo, lo cual, aunque matemáticamente suficiente, para minimizar el riesgo y optimizar el rendimiento; es incuestionablemente restrictivo para la gestión de portafolios que se distribuyan en un mayor número de acciones, como es requerido usualmente por estatutos de firmas de inversión en la práctica. Se recomienda realizar estudios que amplíen al respecto una estructura de correlación multi-variables, para ampliar la aplicabilidad de la metodología propuesta a portafolios que integren un mayor número de activos, y permitir tomar decisiones de inversión sobre una base más amplia de acciones de considerarse conveniente o necesario.
- 2) Las conclusiones formuladas respecto a los lineamientos para la selección de combinaciones de acciones y su integración en portafolio, mediante la metodología desarrollada, llamada Matriz de Adecuación, se circunscriben a los resultados del ejercicio presentado. Para generalizar estadísticamente su validez en la práctica, se recomienda la conducción de estudios estadísticos, que permitan confirmar la existencia de una correlación lo suficientemente alta entre los valores del llamado coeficiente de adecuación obtenido para cada posible combinación de dos acciones, y su desempeño en el mercado, para validar o bien refutar la premisa de selección sugerida.
- 3) El valor práctico de los modelos de selección, optimización y estimación pudo constatarse al observarse altos niveles de precisión respecto a las proyecciones realizadas, y habiéndose superado en desempeño a *benchmarks* seleccionados. No obstante, se recomienda realizar estudios adicionales a nivel de *backtesting*, basados en la simulación histórica de un número significativo de N iteraciones para aportar una suerte de validación previa antes de implementar en la práctica las decisiones de inversión sugeridas por el modelo analítico.

- 4) Como se mencionó, los factores más importantes para el éxito de los modelos propuestos, son disponer de la suficiente información histórica, en número de observaciones y vigencia actual. En cuanto a este punto, se recomienda conservar un ojo atento sobre el desenvolvimiento del entorno económico que, en casos extremos, puede precipitar al mercado por completo a niveles de correlación cercanos a la unidad, revertir abruptamente una tendencia anticipada, y modificar la estructura de correlación bajo la cual habrían de haberse formulado los criterios de selección de portafolio. Para ello, es recomendable que una vez implementado el portafolio, se continúe monitoreando la evolución diaria de las variables, principalmente los coeficientes de correlación, y rendimientos esperados diarios, que podrían desencajarse de los parámetros originales y ameritar un rebalanceo del portafolio, o bien una terminación anticipada de la estrategia.

- 5) Se recomienda realizar estudios adicionales, que profundicen sobre la vinculación del comportamiento del portafolio, con variables exógenas predictivas como las tasas de interés de política monetaria, curva de rendimiento de los instrumentos de renta fija, expectativas de crecimiento económico, inflación esperada, entre muchas otras variables de tipo macroeconómica, para incorporar el efecto del macro-entorno en el desempeño esperado de una estrategia de inversión, principalmente ante momentos de coyuntura como el experimentado durante la actual turbulencia económica desencadenada por la crisis sanitaria del COVID-19. Un excelente punto de partida para ganar entendimiento de tales variables, es la obra de Frederic Mishkin titulada: "The Economics of Money, Banking, and Financial Markets" (2016).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis: Quantitative Methods in Finance* (Vol. 1). New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
2. Allen, L., Boudoukh, J., & Saunders, A. (2004). *Understanding Market, Credit, And Operational Risk: The Value At Risk Approach*. Massachusetts, Estados Unidos: Blackwell Publishing Ltd.
3. Balboa, E. (9 de octubre de 2019). *This Day in Market History: Fewer Than 1 Million Shares Trade On The NYSE*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de FINANCE.YAHOO.COM: <https://finance.yahoo.com/news/day-market-history-fewer-1-110000456.html>
4. Basley, S., & Brigham, E. F. (2008). *Essentials of Managerial Finance* (14va Edición ed.). Estados Unidos.
5. Beattie, A. (5 de abril de 2020). *The Birth of Stock Exchanges*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com: <https://www.investopedia.com/articles/07/stock-exchange-history.asp>
6. Brown, R. (25 de junio de 2019). *5 of the World's Oldest Companies Listed Publicly*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com: <https://www.investopedia.com/financial-edge/0711/5-of-the-worlds-oldest-companies.aspx>
7. Clark, J. (2013). *Modern Portfolio Theory, Foundations and Analysis*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
8. Corporate Finance Institute. (2015). *Efficient Markets Hypothesis*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de CorporateFinanceInstitute.com: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/trading-investing/efficient-markets-hypothesis/>

9. CTI-INVEST. (2019). *History of the Stock Market*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de cti-invest.ch: <http://www.cti-invest.ch/stock-market/>
10. Curtis, F. M. (2007). *Way of the Turtle*. New York, Estados Unidos: McGraw-Hill.
11. Dolciani, Berman, & Wooton. (1976). *Algebra Moderna: Estructura y Método* (9 Edición ed.). México: Publicaciones Cultural S.A.
12. Elliott, R. J., & Kopp, E. P. (2005). *Mathematics of Financial Markets* (2da Edición ed.). New York, Estados Unidos: Springer Science+Business Media Inc.
13. Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2014). *Modern Portfolio Theory And Investment Analysis* (9 Edición ed.). Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
14. Evans, M. J., & Rosenthal, J. S. (2009). *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty* (2da Edición ed.). (W. H. Freeman, Ed.) Toronto, Canada: University of Toronto.
15. Federal Reserve. (23 de marzo de 2020). *Federal Reserve Announces Extensive New Measures to Support the Economy*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Federalreserve.gov: <https://www.federalreserve.gov/newsevents/pressreleases/monetary20200323b.htm>
16. Ferguson, N. (2008). *The Ascent of Money*. New York, Estados Unidos: The Penguin Group (USA) Inc.
17. Francis, F. C., & Donggheol, K. (2013). *Modern Portfolio Theory New Developments*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
18. Gitman, L. J. (2017). *Principios de Administración Financiera* (14va Edición ed.). México: Pearson Educación.

19. Hayes, A. (13 de abril de 2020). *Boom And Bust Cycle*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com:
<https://www.investopedia.com/terms/b/boom-and-bust-cycle.asp>
20. Hayes, A. (13 de julio de 2020). *How Does the Stock Market Work?* Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com:
<https://www.investopedia.com/articles/investing/082614/how-stock-market-works.asp>
21. He, L., Duffy, C., & Horowitz, J. (9 de marzo de 2020). *U.S. Stocks Halted After Falling 7%. Global Stocks Plunge as Oil Crashes and Coronavirus fear spreads*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de CNN BUSINESS:
<https://edition.cnn.com/2020/03/08/investing/stock-dow-futures-coronavirus/index.html>
22. Hur, J. (8 de octubre de 2016). *History of the Stock Market*. Recuperado el 23 de abril de 2020, de BEBUSINESSSED.COM:
<https://bebusinesssed.com/history/history-of-the-stock-market/>
23. Kapinski, M., & Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Estados Unidos: Springer-Verlag London Limited.
24. Kaufman, K. (24 de julio de 2018). *Here's Why Warren Buffett And Other Great Investors Don't Diversify*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Forbes:
<https://www.forbes.com/sites/karlkaufman/2018/07/24/heres-why-warren-buffett-and-other-great-investors-dont-diversify/#3c7997624795>
25. Kenton, W. (18 de abril de 2019). *Value at Risk (VaR)*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com:
<https://www.investopedia.com/terms/v/var.asp>
26. Kenton, W. (21 de julio de 2020). *New York Stock Exchange (NYSE)*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com:
<https://www.investopedia.com/terms/n/nyse.asp>

27. Keynes, J. M. (2018). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. United Kingdom: Springer International Publishing.
28. Malkiel, B. G. (2003). *The Efficient Market Hypothesis and Its Critics* (CEPS Working Paper No. 91 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University.
29. Malkiel, B. G. (2019). *A Random Walk Down Wall Street* (12va edición ed.). New York, Estados Unidos: W. W. Norton & Company.
30. Miller, M. B. (2014). *Mathematics and Statistics for Financial Risk Management* (2da Edición ed.). New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
31. Mishkin, F. S. (2016). *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets* (11va edición ed.). New York, Estados Unidos: Pearson Education Limited.
32. Morgan, M. S. (1990). *The History of Econometric Ideas* (Edición digital año 2003 ed.). London, England: Cambridge University Press.
33. Myers, D. (2019 de junio de 2019). *Benjamin Graham's Timeless Investment Principles*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Investopedia.com: <https://www.investopedia.com/articles/investing/082614/how-stock-market-works.asp>
34. Rhea, R. (2018). *The Dow Theory: More Than 100 Years of Practical Guidance to Stock Investors*. Hammond, Indiana, Estados Unidos: Horizon Publishing Company.
35. Scherk, A. (2011). *Manual de Análisis Fundamental* (5ta Edición ed.). Madrid, España: Critería Caixa Corp.
36. Schiff, P. (8 de abril de 2020). *Peter Schiff: People Are Still Too Focused on the Pin and Not the Bubble*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Schiff Gold: <https://schiffgold.com/interviews/peter-schiff-people-are-still-too-focused-on-the-pin-and-not-the-bubble/>

37. Schiff, P. D. (2007). *Crash Proof: How to Profit From the Coming Economic Collapse* (1ra Edición ed.). New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
38. Sulthan, A. (2019). *Three forms of Efficient Market Hypothesis*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Sar Publisher: <https://www.sarpublisher.com/three-forms-of-efficient-market-hypothesis/>
39. Szmigiera, M. (6 de junio de 2019). *Stock Exchanges - Statistics & Facts*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de STATISTA.COM: <https://www.statista.com/topics/1009/global-stock-exchanges/>
40. Szmigiera, M. (20 de mayo de 2020). *Largest stock exchange operators worldwide as of Mar 2020 by market capitalization of listed companies*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Statista.com: <https://www.statista.com/statistics/270126/largest-stock-exchange-operators-by-market-capitalization-of-listed-companies/>
41. Van Der Wijst, N. (2013). *Finance: A Quantitative Introduction*. New York, Estados Unidos: Cambridge University Press.
42. Wiltermuth, J., & Sunny, O. (8 de junio de 2020). *Nasdaq Closes at All-time High, Dow Less Than 7% off Record, as Wall Street Looks for Fed to Keep Support Intact*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de MarketWatch: <https://www.marketwatch.com/story/dow-futures-rise-as-stock-market-aims-to-add-to-rally-headed-into-fed-week-2020-06-08>
43. Winck, B. (4 de junio de 2020). *Tech-heavy Nasdaq 100 Becomes First Major US Stock Index to Reach Record Highs After Coronavirus Plunge*. Recuperado el 23 de septiembre de 2020, de Business Insider: <https://markets.businessinsider.com/news/stocks/nasdaq-100-index-intraday-record-erases-stock-market-coronavirus-losses-2020-6-1029282191#>

ANEXOS

Anexo 1.

Matriz de covarianzas para las 16 acciones evaluadas y S&P500 (Factor 10,000)

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
SP500	4.0	1.9	4.5	3.1	2.6	4.0	4.1	4.6	4.6	2.7	3.8	-0.5	3.0	1.2	3.1	3.0	4.0
DPZ	1.9	7.4	2.3	1.0	1.5	1.9	2.9	2.1	2.2	1.6	1.7	0.6	2.2	1.7	2.6	1.4	2.2
SBUX	4.5	2.3	6.8	3.2	2.7	4.7	5.1	4.9	5.2	2.7	4.5	-0.7	3.2	1.6	3.6	3.2	4.7
KO	3.1	1.0	3.2	3.8	2.2	3.1	2.7	3.3	3.3	1.7	2.6	-0.5	1.7	1.5	2.7	2.8	2.7
COST	2.6	1.5	2.7	2.2	3.1	2.4	2.6	3.1	3.2	2.1	2.4	0.4	2.2	0.8	2.2	2.6	2.2
NIKE	4.0	1.9	4.7	3.1	2.4	5.6	4.6	4.4	4.3	2.3	3.5	-1.0	2.5	1.2	3.1	2.8	4.4
LULU	4.1	2.9	5.1	2.7	2.6	4.6	7.9	4.8	4.9	3.0	4.1	0.7	4.0	1.7	3.4	2.3	4.3
AAPL	4.6	2.1	4.9	3.3	3.1	4.4	4.8	6.5	5.4	3.3	4.6	0.0	3.8	0.8	2.9	3.4	4.4
MSFT	4.6	2.2	5.2	3.3	3.2	4.3	4.9	5.4	6.2	3.6	4.7	0.5	4.1	1.1	3.4	3.6	4.5
AMZN	2.7	1.6	2.7	1.7	2.1	2.3	3.0	3.3	3.6	3.7	3.0	1.8	3.3	0.7	1.8	2.1	2.3
GOOG	3.8	1.7	4.5	2.6	2.4	3.5	4.1	4.6	4.7	3.0	5.1	0.6	3.5	0.4	2.5	2.7	3.7
ZM	-0.5	0.6	-0.7	-0.5	0.4	-1.0	0.7	0.0	0.5	1.8	0.6	18.7	2.8	-0.3	-0.4	-0.5	-1.0
NFLX	3.0	2.2	3.2	1.7	2.2	2.5	4.0	3.8	4.1	3.3	3.5	2.8	6.8	0.4	2.4	2.0	2.7
GOLD	1.2	1.7	1.6	1.5	0.8	1.2	1.7	0.8	1.1	0.7	0.4	-0.3	0.4	7.5	2.0	1.5	1.2
CBOE	3.1	2.6	3.6	2.7	2.2	3.1	3.4	2.9	3.4	1.8	2.5	-0.4	2.4	2.0	5.8	2.5	2.9
PG	3.0	1.4	3.2	2.8	2.6	2.8	2.3	3.4	3.6	2.1	2.7	-0.5	2.0	1.5	2.5	4.2	2.5
IBKR	4.0	2.2	4.7	2.7	2.2	4.4	4.3	4.4	4.5	2.3	3.7	-1.0	2.7	1.2	2.9	2.5	7.6

Anexo 2.

Matriz de coeficientes de correlación para las 16 acciones evaluadas y S&P500

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
SP500	1.00	0.35	0.86	0.79	0.74	0.83	0.73	0.90	0.92	0.69	0.83	-0.06	0.57	0.22	0.64	0.74	0.71
DPZ	0.35	1.00	0.33	0.18	0.31	0.29	0.37	0.31	0.32	0.31	0.27	0.05	0.31	0.22	0.39	0.25	0.30
SBUX	0.86	0.33	1.00	0.64	0.58	0.76	0.70	0.74	0.80	0.54	0.76	-0.06	0.48	0.23	0.58	0.60	0.66
KO	0.79	0.18	0.64	1.00	0.63	0.67	0.49	0.66	0.68	0.46	0.60	-0.07	0.33	0.29	0.57	0.71	0.50
COST	0.74	0.31	0.58	0.63	1.00	0.56	0.52	0.68	0.73	0.63	0.61	0.05	0.48	0.16	0.51	0.71	0.45
NIKE	0.83	0.29	0.76	0.67	0.56	1.00	0.68	0.73	0.73	0.51	0.66	-0.09	0.41	0.19	0.54	0.57	0.67
LULU	0.73	0.37	0.70	0.49	0.52	0.68	1.00	0.66	0.70	0.56	0.64	0.06	0.54	0.22	0.50	0.40	0.55
AAPL	0.90	0.31	0.74	0.66	0.68	0.73	0.66	1.00	0.85	0.68	0.80	0.00	0.57	0.11	0.47	0.64	0.63
MSFT	0.92	0.32	0.80	0.68	0.73	0.73	0.70	0.85	1.00	0.76	0.83	0.05	0.63	0.16	0.57	0.71	0.65
AMZN	0.69	0.31	0.54	0.46	0.63	0.51	0.56	0.68	0.76	1.00	0.69	0.22	0.67	0.14	0.38	0.53	0.43
GOOG	0.83	0.27	0.76	0.60	0.61	0.66	0.64	0.80	0.83	0.69	1.00	0.06	0.59	0.07	0.46	0.58	0.59
ZM	-0.06	0.05	-0.06	-0.07	0.05	-0.09	0.06	0.00	0.05	0.22	0.06	1.00	0.25	-0.02	-0.04	-0.06	-0.08
NFLX	0.57	0.31	0.48	0.33	0.48	0.41	0.54	0.57	0.63	0.67	0.59	0.25	1.00	0.05	0.37	0.36	0.38
GOLD	0.22	0.22	0.23	0.29	0.16	0.19	0.22	0.11	0.16	0.14	0.07	-0.02	0.05	1.00	0.30	0.26	0.15
CBOE	0.64	0.39	0.58	0.57	0.51	0.54	0.50	0.47	0.57	0.38	0.46	-0.04	0.37	0.30	1.00	0.49	0.43
PG	0.74	0.25	0.60	0.71	0.71	0.57	0.40	0.64	0.71	0.53	0.58	-0.06	0.36	0.26	0.49	1.00	0.44
IBKR	0.71	0.30	0.66	0.50	0.45	0.67	0.55	0.63	0.65	0.43	0.59	-0.08	0.38	0.15	0.43	0.44	1.00

Anexo 3.

Matriz de rendimientos esperados diarios (n=m) para las 16 acciones y S&P500. (Factor 10,000)

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
1	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
2	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
3	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
4	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
5	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
6	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
7	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
8	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
9	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
10	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
11	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
12	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
13	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
14	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
15	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
16	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46
17	0.55	15.80	2.73	2.84	12.65	1.89	11.63	17.44	18.08	12.12	3.42	44.63	11.34	29.83	2.10	8.30	-3.46

Anexo 4.

Matriz de rendimientos esperados combinados diarios para las 16 acciones y S&P500: Suma de Matriz de rendimientos esperados diarios (n=m) + su transpuesta. (Factor 10,000)

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
SP500	1.10	16.35	3.28	3.38	13.20	2.44	12.18	17.99	18.62	12.66	3.97	45.18	11.89	30.37	2.65	8.85	-2.91
DPZ	16.35	31.60	18.53	18.64	28.45	17.69	27.43	33.24	33.88	27.91	19.22	60.43	27.14	45.62	17.90	24.10	12.34
SBUX	3.28	18.53	5.46	5.56	15.38	4.62	14.36	20.17	20.80	14.84	6.15	47.36	14.07	32.55	4.83	11.03	-0.73
KO	3.38	18.64	5.56	5.67	15.49	4.73	14.47	20.28	20.91	14.95	6.26	47.47	14.18	32.66	4.94	11.13	-0.62
COST	13.20	28.45	15.38	15.49	25.30	14.54	24.28	30.09	30.73	24.76	16.07	57.28	23.99	42.48	14.75	20.95	9.19
NIKE	2.44	17.69	4.62	4.73	14.54	3.79	13.53	19.33	19.97	14.01	5.31	46.52	13.24	31.72	4.00	10.19	-1.57
LULU	12.18	27.43	14.36	14.47	24.28	13.53	23.27	29.07	29.71	23.75	15.06	56.27	22.98	41.46	13.74	19.93	8.17
AAPL	17.99	33.24	20.17	20.28	30.09	19.33	29.07	34.88	35.52	29.56	20.86	62.07	28.78	47.27	19.54	25.74	13.98
MSFT	18.62	33.88	20.80	20.91	30.73	19.97	29.71	35.52	36.15	30.19	21.50	62.71	29.42	47.90	20.18	26.37	14.62
AMZN	12.66	27.91	14.84	14.95	24.76	14.01	23.75	29.56	30.19	24.23	15.54	56.75	23.46	41.94	14.22	20.41	8.65
GOOG	3.97	19.22	6.15	6.26	16.07	5.31	15.06	20.86	21.50	15.54	6.84	48.05	14.76	33.25	5.52	11.72	-0.04
ZM	45.18	60.43	47.36	47.47	57.28	46.52	56.27	62.07	62.71	56.75	48.05	89.26	55.97	74.46	46.73	52.93	41.17
NFLX	11.89	27.14	14.07	14.18	23.99	13.24	22.98	28.78	29.42	23.46	14.76	55.97	22.68	41.17	13.45	19.64	7.88
GOLD	30.37	45.62	32.55	32.66	42.48	31.72	41.46	47.27	47.90	41.94	33.25	74.46	41.17	59.65	31.93	38.12	26.37
CBOE	2.65	17.90	4.83	4.94	14.75	4.00	13.74	19.54	20.18	14.22	5.52	46.73	13.45	31.93	4.21	10.40	-1.36
PG	8.85	24.10	11.03	11.13	20.95	10.19	19.93	25.74	26.37	20.41	11.72	52.93	19.64	38.12	10.40	16.59	4.84
IBKR	-2.91	12.34	-0.73	-0.62	9.19	-1.57	8.17	13.98	14.62	8.65	-0.04	41.17	7.88	26.37	-1.36	4.84	-6.92

Anexo 5.

Matriz de coeficientes de correlación modificados (valor original + 1.0); (valores de 0 a 2).

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
SP500	2.00	1.35	1.86	1.79	1.74	1.83	1.73	1.90	1.92	1.69	1.83	0.94	1.57	1.22	1.64	1.74	1.71
DPZ	1.35	2.00	1.33	1.18	1.31	1.29	1.37	1.31	1.32	1.31	1.27	1.05	1.31	1.22	1.39	1.25	1.30
SBUX	1.86	1.33	2.00	1.64	1.58	1.76	1.70	1.74	1.80	1.54	1.76	0.94	1.48	1.23	1.58	1.60	1.66
KO	1.79	1.18	1.64	2.00	1.63	1.67	1.49	1.66	1.68	1.46	1.60	0.93	1.33	1.29	1.57	1.71	1.50
COST	1.74	1.31	1.58	1.63	2.00	1.56	1.52	1.68	1.73	1.63	1.61	1.05	1.48	1.16	1.51	1.71	1.45
NIKE	1.83	1.29	1.76	1.67	1.56	2.00	1.68	1.73	1.73	1.51	1.66	0.91	1.41	1.19	1.54	1.57	1.67
LULU	1.73	1.37	1.70	1.49	1.52	1.68	2.00	1.66	1.70	1.56	1.64	1.06	1.54	1.22	1.50	1.40	1.55
AAPL	1.90	1.31	1.74	1.66	1.68	1.73	1.66	2.00	1.85	1.68	1.80	1.00	1.57	1.11	1.47	1.64	1.63
MSFT	1.92	1.32	1.80	1.68	1.73	1.73	1.70	1.85	2.00	1.76	1.83	1.05	1.63	1.16	1.57	1.71	1.65
AMZN	1.69	1.31	1.54	1.46	1.63	1.51	1.56	1.68	1.76	2.00	1.69	1.22	1.67	1.14	1.38	1.53	1.43
GOOG	1.83	1.27	1.76	1.60	1.61	1.66	1.64	1.80	1.83	1.69	2.00	1.06	1.59	1.07	1.46	1.58	1.59
ZM	0.94	1.05	0.94	0.93	1.05	0.91	1.06	1.00	1.05	1.22	1.06	2.00	1.25	0.98	0.96	0.94	0.92
NFLX	1.57	1.31	1.48	1.33	1.48	1.41	1.54	1.57	1.63	1.67	1.59	1.25	2.00	1.05	1.37	1.36	1.38
GOLD	1.22	1.22	1.23	1.29	1.16	1.19	1.22	1.11	1.16	1.14	1.07	0.98	1.05	2.00	1.30	1.26	1.15
CBOE	1.64	1.39	1.58	1.57	1.51	1.54	1.50	1.47	1.57	1.38	1.46	0.96	1.37	1.30	2.00	1.49	1.43
PG	1.74	1.25	1.60	1.71	1.71	1.57	1.40	1.64	1.71	1.53	1.58	0.94	1.36	1.26	1.49	2.00	1.44
IBKR	1.71	1.30	1.66	1.50	1.45	1.67	1.55	1.63	1.65	1.43	1.59	0.92	1.38	1.15	1.43	1.44	2.00

Anexo 6.

Matriz de índice de adecuación para las 16 acciones y S&P500. (Factor 10,000)

	SP500	DPZ	SBUX	KO	COST	NIKE	LULU	AAPL	MSFT	AMZN	GOOG	ZM	NFLX	GOLD	CBOE	PG	IBKR
SP500	0.55	12.14	1.77	1.89	7.60	1.33	7.03	9.49	9.69	7.48	2.17	47.95	7.56	24.96	1.62	5.09	-1.70
DPZ	12.14	15.80	13.94	15.75	21.73	13.74	19.99	25.39	25.61	21.27	15.14	57.36	20.72	37.31	12.88	19.29	9.50
SBUX	1.77	13.94	2.73	3.40	9.71	2.63	8.46	11.60	11.54	9.62	3.49	50.52	9.53	26.44	3.07	6.88	-0.44
KO	1.89	15.75	3.40	2.84	9.49	2.84	9.73	12.24	12.44	10.27	3.91	50.77	10.66	25.37	3.15	6.52	-0.42
COST	7.60	21.73	9.71	9.49	12.65	9.29	15.99	17.94	17.75	15.20	9.98	54.71	16.25	36.77	9.79	12.23	6.35
NIKE	1.33	13.74	2.63	2.84	9.29	1.89	8.03	11.17	11.57	9.31	3.20	51.37	9.40	26.69	2.59	6.50	-0.94
LULU	7.03	19.99	8.46	9.73	15.99	8.03	11.63	17.47	17.46	15.19	9.20	53.01	14.89	34.07	9.13	14.19	5.27
AAPL	9.49	25.39	11.60	12.24	17.94	11.17	17.47	17.44	19.21	17.57	11.61	61.87	18.34	42.65	13.30	15.67	8.58
MSFT	9.69	25.61	11.54	12.44	17.75	11.57	17.46	19.21	18.08	17.13	11.76	59.85	18.06	41.44	12.86	15.45	8.83
AMZN	7.48	21.27	9.62	10.27	15.20	9.31	15.19	17.57	17.13	12.12	9.20	46.54	14.08	36.93	10.27	13.38	6.06
GOOG	2.17	15.14	3.49	3.91	9.98	3.20	9.20	11.61	11.76	9.20	3.42	45.48	9.31	31.11	3.78	7.43	-0.03
ZM	47.95	57.36	50.52	50.77	54.71	51.37	53.01	61.87	59.85	46.54	45.48	44.63	44.87	76.23	48.50	56.26	44.82
NFLX	7.56	20.72	9.53	10.66	16.25	9.40	14.89	18.34	18.06	14.08	9.31	44.87	11.34	39.13	9.80	14.41	5.71
GOLD	24.96	37.31	26.44	25.37	36.77	26.69	34.07	42.65	41.44	36.93	31.11	76.23	39.13	29.83	24.47	30.28	22.88
CBOE	1.62	12.88	3.07	3.15	9.79	2.59	9.13	13.30	12.86	10.27	3.78	48.50	9.80	24.47	2.10	6.97	-0.95
PG	5.09	19.29	6.88	6.52	12.23	6.50	14.19	15.67	15.45	13.38	7.43	56.26	14.41	30.28	6.97	8.30	3.36
IBKR	-1.70	9.50	-0.44	-0.42	6.35	-0.94	5.27	8.58	8.83	6.06	-0.03	44.82	5.71	22.88	-0.95	3.36	-3.46

Anexo 7 (parte 1):

Actividad de precios al cierre para el periodo activo: de julio 17 a julio 2, año 2020

DATE:	7/17/20	7/16/20	7/15/20	7/14/20	7/13/20	7/10/20	7/9/20	7/8/20	7/7/20	7/6/20	7/2/20
SP500	3,224.73	3,215.57	3,226.56	3,197.52	3,155.22	3,185.04	3,152.05	3,169.94	3,145.32	3,179.72	3,130.01
DPZ	390.22	407.52	413.68	402.30	401.38	398.31	385.50	384.14	381.14	385.00	374.09
SBUX	74.16	74.39	75.61	72.73	72.65	74.29	73.57	74.14	74.25	75.44	73.78
KO	46.82	46.15	46.40	45.87	45.25	45.15	43.91	45.07	45.21	45.23	44.88
COST	324.79	326.27	326.70	328.00	322.92	326.23	325.54	316.32	316.23	311.49	305.74
NIKE	96.28	97.26	98.54	96.76	96.46	97.99	96.99	98.84	97.07	99.95	98.43
LULU	316.83	313.08	312.51	308.32	305.15	314.39	315.08	309.88	306.74	314.35	304.77
AAPL	385.31	386.09	390.90	388.23	381.91	383.68	383.01	381.37	372.69	373.85	364.11
MSFT	202.88	203.92	208.04	208.35	207.07	213.67	214.32	212.83	208.25	210.70	206.26
AMZN	2,961.97	2,999.90	3,008.87	3,084.00	3,104.00	3,200.00	3,182.63	3,081.11	3,000.12	3,057.04	2,890.30
GOOG	1,515.55	1,518.00	1,513.64	1,520.58	1,511.34	1,541.74	1,510.99	1,496.00	1,485.18	1,495.70	1,464.70
ZM	246.54	248.54	256.22	260.01	260.30	275.87	269.52	266.32	262.10	261.00	261.74
NFLX	492.99	527.39	523.26	524.88	525.50	548.73	507.76	502.78	493.16	493.81	476.89
GOLD	27.34	26.69	27.09	27.05	26.13	27.11	27.59	27.72	27.02	26.61	26.27
CBOE	92.66	92.91	94.04	90.61	91.49	91.55	90.19	93.01	93.71	95.00	95.09
PG	125.63	124.76	124.50	125.09	124.05	123.89	122.48	122.89	122.22	121.63	120.88
IBKR	51.37	51.93	53.22	51.05	49.58	49.23	48.85	48.70	46.87	45.03	43.01

Actividad de precios al cierre para el periodo activo: de julio 1 a junio 17, año 2020

DATE:	7/1/20	6/30/20	6/29/20	6/26/20	6/25/20	6/24/20	6/23/20	6/22/20	6/19/20	6/18/20	6/17/20
SP500	3,115.86	3,100.29	3,053.24	3,009.05	3,083.76	3,050.33	3,131.29	3,117.86	3,097.74	3,115.34	3,113.49
DPZ	375.71	369.44	369.17	365.81	373.70	375.48	377.55	384.63	378.41	375.55	380.67
SBUX	74.03	73.59	73.48	71.57	73.85	73.64	75.49	75.40	75.40	76.31	77.10
KO	44.82	44.68	44.36	43.57	44.93	44.65	45.64	45.74	46.82	46.99	46.58
COST	304.75	303.21	301.59	296.65	300.53	298.02	301.29	300.45	299.90	299.57	299.61
NIKE	97.40	98.05	95.87	93.67	101.40	100.08	101.92	99.51	95.78	98.45	99.21
LULU	308.62	312.01	294.35	289.53	295.13	295.22	301.16	304.69	297.38	302.98	303.69
AAPL	364.11	364.80	361.78	353.63	364.84	360.06	366.53	358.87	349.72	351.73	351.59
MSFT	204.70	203.51	198.44	196.33	200.34	197.84	201.91	200.57	195.15	196.32	194.24
AMZN	2,878.70	2,758.82	2,680.38	2,692.87	2,754.58	2,734.40	2,764.41	2,713.82	2,675.01	2,653.98	2,640.98
GOOG	1,438.04	1,413.61	1,394.97	1,359.90	1,441.33	1,431.97	1,464.41	1,451.86	1,431.72	1,435.96	1,451.12
ZM	259.13	253.54	248.56	256.80	259.51	255.90	252.81	251.27	243.48	241.57	236.76
NFLX	485.64	455.04	447.24	443.40	465.91	457.85	466.26	468.04	453.72	449.87	447.77
GOLD	26.81	26.94	26.13	25.87	25.73	25.71	25.68	25.45	24.49	23.94	24.25
CBOE	96.46	93.28	92.81	91.51	95.09	93.76	95.76	100.05	98.75	100.25	101.04
PG	119.98	119.57	117.66	115.23	117.89	116.42	117.73	117.75	118.92	119.28	117.93
IBKR	42.25	41.77	41.33	40.23	41.96	40.98	42.00	41.29	41.56	42.32	42.40

Anexo 7 (parte 3):Actividad de precios al cierre para el periodo activo: *de junio 16 a junio 2, año 2020*

DATE:	6/16/20	6/15/20	6/12/20	6/11/20	6/10/20	6/9/20	6/8/20	6/7/20	6/6/20	6/5/20	6/2/20
SP500	3,124.74	3,066.59	3,041.31	3,002.10	3,190.14	3,207.18	3,232.39	3,193.93	3,112.35	3,122.87	3,080.82
DPZ	374.86	377.92	378.15	382.79	392.32	382.22	375.82	376.41	382.78	390.14	384.86
SBUX	77.84	76.96	76.38	72.57	79.01	82.37	83.56	82.14	78.74	79.58	77.78
KO	46.77	46.30	45.60	45.54	48.62	49.00	49.85	49.09	47.92	47.90	46.90
COST	301.36	297.18	298.70	300.83	307.33	305.55	307.19	312.04	310.75	306.64	307.09
NIKE	99.04	97.84	96.43	95.17	102.12	102.63	104.29	102.71	101.28	104.11	100.74
LULU	310.61	303.05	296.36	308.12	323.25	316.40	315.30	319.78	317.42	323.74	312.30
AAPL	352.08	342.99	338.80	335.90	352.84	343.99	333.46	331.50	322.32	325.12	323.34
MSFT	193.57	188.94	187.74	186.27	196.84	189.80	188.36	187.20	182.92	185.36	184.91
AMZN	2,615.27	2,572.68	2,545.02	2,557.96	2,647.45	2,600.86	2,524.06	2,483.00	2,460.60	2,478.40	2,472.41
GOOG	1,442.72	1,419.85	1,413.18	1,403.84	1,465.85	1,456.16	1,446.61	1,438.39	1,412.18	1,436.38	1,439.22
ZM	242.56	239.02	219.52	222.07	221.02	205.43	209.83	207.60	210.35	223.87	208.08
NFLX	436.13	425.50	418.07	425.56	434.48	434.05	419.49	419.60	414.33	421.97	427.31
GOLD	24.38	24.74	24.07	24.31	25.08	24.33	23.56	23.29	23.43	23.22	23.95
CBOE	101.45	101.10	99.90	97.00	101.37	103.05	103.43	97.84	101.03	104.00	102.68
PG	118.13	116.69	115.62	116.26	119.23	118.34	119.05	118.33	116.05	118.53	118.06
IBKR	43.26	42.45	41.54	41.25	42.31	44.13	45.05	43.48	43.45	43.92	42.90

Actividad de precios al cierre para el periodo activo: *de junio 1 a mayo 15, año 2020*

DATE:	6/1/20	5/29/20	5/28/20	5/27/20	5/26/20	5/22/20	5/21/20	5/20/20	5/19/20	5/18/20	5/15/20
SP500	3,055.73	3,044.31	3,029.73	3,036.13	2,991.77	2,955.45	2,948.51	2,971.61	2,922.94	2,953.91	2,863.70
DPZ	383.58	385.84	365.55	373.97	360.16	372.10	375.24	377.24	370.01	364.50	376.04
SBUX	78.32	77.99	78.54	78.60	77.76	77.62	78.05	77.76	75.86	76.23	74.16
KO	46.99	46.68	47.09	46.73	46.09	45.03	45.17	45.89	44.54	44.97	43.26
COST	308.29	308.47	309.56	306.01	304.80	302.43	301.97	304.91	304.63	302.76	299.21
NIKE	99.54	98.58	98.21	99.62	96.38	93.52	94.03	92.72	91.28	90.81	86.77
LULU	308.69	300.10	284.42	281.50	281.41	276.73	267.53	258.38	251.41	255.65	247.09
AAPL	321.85	317.94	318.25	318.11	316.73	318.89	316.85	319.23	313.14	314.96	307.71
MSFT	182.83	183.25	181.40	181.81	181.57	183.51	183.43	185.66	183.12	184.40	182.65
AMZN	2,471.04	2,442.37	2,401.10	2,410.39	2,421.86	2,436.88	2,446.74	2,497.94	2,449.33	2,426.26	2,409.78
GOOG	1,431.82	1,428.92	1,416.73	1,417.84	1,417.02	1,410.42	1,402.80	1,406.72	1,373.48	1,383.94	1,373.19
ZM	204.15	179.48	163.55	161.97	164.00	171.06	172.03	175.48	173.68	164.69	174.83
NFLX	425.92	419.73	413.44	419.89	414.77	429.32	436.25	447.67	451.04	452.58	454.19
GOLD	24.78	24.00	23.95	23.85	24.66	26.24	26.18	27.17	28.02	27.12	27.96
CBOE	105.08	106.46	102.63	102.30	101.06	98.96	97.64	100.14	98.59	102.40	99.53
PG	117.25	115.92	116.06	113.89	112.03	112.60	111.62	113.28	112.44	116.21	114.61
IBKR	42.69	42.35	42.76	43.40	40.44	38.73	38.87	39.10	38.36	39.01	37.15

Anexo 7 (parte 5):Actividad de precios al cierre para el periodo activo: *de mayo 14 a abril 30, año 2020*

DATE:	5/14/20	5/13/20	5/12/20	5/11/20	5/8/20	5/7/20	5/6/20	5/5/20	5/4/20	5/1/20	4/30/20
SP500	2,852.50	2,820.00	2,870.12	2,930.19	2,929.80	2,881.19	2,848.42	2,868.44	2,842.74	2,830.71	2,912.43
DPZ	376.01	384.96	377.94	377.49	369.11	367.17	372.30	371.46	359.10	357.30	361.93
SBUX	74.19	73.62	74.35	75.87	77.87	76.00	72.96	72.90	71.89	73.79	76.73
KO	43.70	43.94	44.82	45.54	46.11	44.60	44.75	45.40	45.14	45.60	45.89
COST	299.74	302.14	304.84	310.33	305.94	305.00	308.89	307.92	304.49	301.92	303.00
NIKE	86.33	85.81	88.04	90.70	90.46	88.56	88.44	87.20	85.75	85.54	87.18
LULU	237.57	229.39	242.60	245.62	237.99	225.99	223.18	218.21	218.69	218.69	223.48
AAPL	309.54	307.65	311.41	315.01	310.13	303.74	300.63	297.56	293.16	289.07	293.80
MSFT	180.03	179.25	182.00	186.22	184.68	183.60	182.54	180.76	178.84	174.57	179.21
AMZN	2,388.85	2,367.92	2,356.95	2,409.00	2,379.61	2,367.61	2,351.26	2,317.80	2,315.99	2,286.04	2,474.00
GOOG	1,356.13	1,349.33	1,375.74	1,403.26	1,388.37	1,372.56	1,347.30	1,351.11	1,326.80	1,320.61	1,348.66
ZM	167.91	167.14	161.04	166.48	155.40	157.80	149.59	144.82	143.44	138.56	135.17
NFLX	441.95	438.27	431.82	440.52	435.55	436.53	434.26	424.68	424.15	418.27	419.85
GOLD	27.06	26.04	25.96	25.94	27.39	27.26	26.56	28.19	27.38	26.93	25.72
CBOE	98.99	97.72	97.56	99.53	99.91	99.46	97.48	98.94	94.45	94.01	99.38
PG	113.81	113.92	114.55	115.31	115.95	112.17	113.10	116.01	115.77	116.82	117.87
IBKR	37.59	37.03	38.52	40.14	41.13	40.47	40.17	40.26	40.59	41.03	41.00

Actividad de precios al cierre para el periodo activo: *de abril 29 a abril 16, año 2020*

DATE:	4/29/20	4/28/20	4/27/20	4/24/20	4/23/20	4/22/20	4/21/20	4/20/20	4/17/20	4/16/20	Inicio
SP500	2,939.51	2,863.39	2,878.48	2,836.74	2,797.80	2,799.31	2,736.56	2,823.16	2,874.56	2,799.55	
DPZ	362.01	356.01	362.03	367.29	369.64	383.75	365.22	370.48	362.97	360.47	
SBUX	76.86	78.69	77.74	75.58	75.15	77.45	72.72	75.32	77.10	73.51	
KO	47.12	46.74	46.78	45.43	45.07	45.68	45.38	46.53	48.06	47.10	
COST	306.39	304.25	308.08	310.55	305.40	309.42	301.33	312.08	317.92	321.56	
NIKE	88.07	88.80	89.37	88.37	87.35	88.77	85.20	87.90	89.91	86.30	
LULU	232.43	224.47	226.89	214.55	211.64	212.09	206.72	218.59	225.86	209.19	
AAPL	287.73	278.58	283.17	282.97	275.03	276.10	268.37	276.93	282.80	286.69	
MSFT	177.43	169.81	174.05	175.55	171.42	173.52	167.82	175.06	178.60	177.04	
AMZN	2,372.71	2,314.08	2,376.00	2,410.22	2,399.45	2,363.49	2,328.12	2,393.61	2,375.00	2,408.19	
GOOG	1,341.48	1,233.67	1,275.88	1,279.31	1,276.31	1,263.21	1,216.34	1,266.61	1,283.25	1,263.47	
ZM	146.48	156.72	164.60	158.80	169.09	150.25	143.27	148.99	150.06	150.26	
NFLX	411.89	403.83	421.38	424.99	426.70	421.42	433.83	437.49	422.96	439.17	
GOLD	26.55	26.96	26.93	27.10	26.74	26.48	24.82	24.92	24.54	25.00	
CBOE	99.32	98.50	97.14	96.52	99.05	100.20	100.39	102.96	102.00	97.94	
PG	117.08	116.89	117.45	118.78	119.40	118.61	118.89	119.80	123.86	120.70	
IBKR	41.65	39.51	40.12	38.62	39.21	39.39	43.19	44.37	45.93	45.52	

Anexo 8.

Valores en el 10% de peores resultados observados para simulación histórica del Portafolio Bandera: GOLD 32% - ZM 68%, Periodo de simulación del 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2010, para un total de 250 observaciones de rendimientos simples de un día.

i-esimo peor resultado	Fecha	Días de antigüedad	Rendimiento observado	Peso en función de antigüedad	Probabilidad acumulada
<u>1</u>	<u>3/12/20</u>	<u>25</u>	<u>-9.6424%</u>	<u>1.2395%</u>	<u>1.2395%</u>
<u>2</u>	<u>2/28/20</u>	<u>34</u>	<u>-8.7359%</u>	<u>1.0334%</u>	<u>2.2729%</u>
<u>3</u>	<u>3/31/20</u>	<u>12</u>	<u>-7.5333%</u>	<u>1.6118%</u>	<u>3.8847%</u>
<u>4</u>	<u>9/5/19</u>	<u>155</u>	<u>-7.4783%</u>	<u>0.0897%</u>	<u>3.9744%</u>
<u>5</u>	<u>3/13/20</u>	<u>24</u>	<u>-7.0043%</u>	<u>1.2648%</u>	<u>5.2392%</u>
6	9/6/19	154	-6.9360%	0.0915%	5.3307%
7	4/7/20	7	-6.7327%	1.7831%	7.1138%
8	3/9/20	28	-6.5660%	1.1666%	8.2804%
9	9/9/19	153	-6.2882%	0.0934%	8.3738%
10	3/6/20	29	-6.1550%	1.1433%	9.5170%
11	12/6/19	90	-5.4986%	0.3334%	9.8504%
12	7/1/19	201	-4.8626%	0.0354%	9.8858%
13	4/2/20	10	-4.4689%	1.6782%	11.5641%
14	3/18/20	21	-4.1309%	1.3438%	12.9079%
15	10/11/19	129	-4.1068%	0.1516%	13.0595%
16	3/11/20	26	-4.0672%	1.2147%	14.2742%
17	9/27/19	139	-4.0083%	0.1239%	14.3981%
18	6/11/19	215	-3.8596%	0.0267%	14.4248%
19	6/25/19	205	-3.7496%	0.0327%	14.4574%
20	6/24/19	206	-3.6932%	0.0320%	14.4894%
21	7/31/19	180	-3.5357%	0.0541%	14.5435%
22	3/10/20	27	-3.4834%	1.1904%	15.7340%
23	4/24/19	248	-3.4302%	0.0137%	15.7477%
24	10/22/19	122	-3.3811%	0.1747%	15.9223%
25	5/20/19	230	-3.3210%	0.0197%	15.9420%

Observaciones ordenadas del peor rendimiento observado. Los valores tomados para la estimación del VaR Condicional, corresponden a todos aquellos cuya probabilidad acumulada sume el 5% (valores subrayados). Peso asignado a cada observación por antigüedad, en función del parámetro $\lambda = 0.98$ de acuerdo a la función de asignación exponencialmente decreciente (2.8.9).

Anexo 9.

Valores en el 10% de peores resultados observados para simulación histórica del Portafolio Alternativo: COST 75% - AMZN 25%, Periodo de simulación del 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2010, para un total de 250 observaciones de rendimientos simples de un día.

i-esimo peor resultado	Fecha	Días de antigüedad	Rendimiento observado	Peso en función de antigüedad	Probabilidad acumulada
<u>1</u>	<u>3/12/20</u>	<u>25</u>	<u>-7.3515%</u>	<u>1.2395%</u>	<u>1.2395%</u>
<u>2</u>	<u>3/16/20</u>	<u>23</u>	<u>-7.1603%</u>	<u>1.2906%</u>	<u>2.5301%</u>
<u>3</u>	<u>2/27/20</u>	<u>35</u>	<u>-5.1471%</u>	<u>1.0128%</u>	<u>3.5429%</u>
<u>4</u>	<u>3/20/20</u>	<u>19</u>	<u>-5.0171%</u>	<u>1.3992%</u>	<u>4.9421%</u>
5	3/11/20	26	-4.6367%	1.2147%	6.1568%
6	3/9/20	28	-4.2345%	1.1666%	7.3234%
7	2/24/20	38	-3.7314%	0.9532%	8.2766%
8	2/28/20	34	-3.6901%	1.0334%	9.3101%
9	8/14/19	170	-3.3054%	0.0662%	9.3763%
10	3/27/20	14	-3.1974%	1.5480%	10.9242%
11	2/25/20	37	-3.1821%	0.9727%	11.8969%
12	8/5/19	177	-3.0445%	0.0575%	11.9544%
13	3/3/20	32	-2.5772%	1.0760%	13.0304%
14	8/23/19	163	-2.5483%	0.0763%	13.1067%
15	5/13/19	235	-2.4670%	0.0178%	13.1245%
16	3/5/20	30	-2.2305%	1.1204%	14.2449%
17	3/31/20	12	-2.0323%	1.6118%	15.8567%
18	3/25/20	16	-1.9874%	1.4867%	17.3434%
19	5/29/19	224	-1.9483%	0.0222%	17.3656%
20	9/11/19	151	-1.8968%	0.0972%	17.4628%
21	4/9/20	5	-1.8338%	1.8566%	19.3195%
22	12/13/19	85	-1.6683%	0.3688%	19.6883%
23	3/6/20	29	-1.6680%	1.1433%	20.8316%
24	5/7/19	239	-1.6324%	0.0164%	20.8480%
25	7/31/19	180	-1.6106%	0.0541%	20.9021%

Observaciones ordenadas del peor rendimiento observado. Los valores tomados para la estimación del VaR Condicional, corresponden a todos aquellos cuya probabilidad acumulada sume el 5% (valores subrayados). Peso asignado a cada observación por antigüedad, en función del parámetro $\lambda = 0.98$ de acuerdo a la función de asignación exponencialmente decreciente (2.8.9).

Anexo 10.

Valores en el 10% de peores resultados observados para simulación histórica del Portafolio Diversificado: alícuota 6.25%, Periodo de simulación del 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2010, para un total de 250 observaciones de rendimientos simples de un día.

i-esimo peor resultado	Fecha	Días de antigüedad	Rendimiento observado	Peso en función de antigüedad	Probabilidad acumulada
<u>1</u>	<u>3/16/20</u>	<u>23</u>	<u>-9.7578%</u>	<u>1.2906%</u>	<u>1.2906%</u>
<u>2</u>	<u>3/12/20</u>	<u>25</u>	<u>-9.5258%</u>	<u>1.2395%</u>	<u>2.5301%</u>
<u>3</u>	<u>3/9/20</u>	<u>28</u>	<u>-6.2638%</u>	<u>1.1666%</u>	<u>3.6967%</u>
<u>4</u>	<u>2/27/20</u>	<u>35</u>	<u>-4.9997%</u>	<u>1.0128%</u>	<u>4.7095%</u>
5	3/11/20	26	-4.8787%	1.2147%	5.9242%
6	3/18/20	21	-3.1038%	1.3438%	7.2680%
7	3/20/20	19	-3.0408%	1.3992%	8.6672%
8	2/24/20	38	-2.9412%	0.9532%	9.6204%
9	4/1/20	11	-2.8307%	1.6447%	11.2651%
10	3/31/20	12	-2.7171%	1.6118%	12.8769%
11	5/13/19	235	-2.6876%	0.0178%	12.8947%
12	8/5/19	177	-2.5523%	0.0575%	12.9522%
13	8/14/19	170	-2.4004%	0.0662%	13.0184%
14	3/5/20	30	-2.2433%	1.1204%	14.1389%
15	2/25/20	37	-2.2365%	0.9727%	15.1115%
16	2/28/20	34	-2.2033%	1.0334%	16.1449%
17	3/6/20	29	-2.1825%	1.1433%	17.2882%
18	8/23/19	163	-2.1762%	0.0763%	17.3645%
19	4/7/20	7	-1.9777%	1.7831%	19.1476%
20	1/27/20	57	-1.8778%	0.6494%	19.7970%
21	5/7/19	239	-1.8694%	0.0164%	19.8134%
22	2/21/20	39	-1.8252%	0.9341%	20.7475%
23	10/2/19	136	-1.8071%	0.1316%	20.8792%
24	3/3/20	32	-1.7983%	1.0760%	21.9552%
25	9/9/19	153	-1.5555%	0.0934%	22.0486%

Observaciones ordenadas del peor rendimiento observado. Los valores tomados para la estimación del VaR Condicional, corresponden a todos aquellos cuya probabilidad acumulada sume el 5% (valores subrayados). Peso asignado a cada observación por antigüedad, en función del parámetro $\lambda = 0.98$ de acuerdo a la función de asignación exponencialmente decreciente (2.8.9).

Anexo 11 (parte 1)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de abril 15 a marzo 31, año 2020

DATE:	4/15/20	4/14/20	4/13/20	4/9/20	4/8/20	4/7/20	4/6/20	4/3/20	4/2/20	4/1/20	3/31/20
SP500	2,783.36	2,846.06	2,761.63	2,789.82	2,749.98	2,659.41	2,663.68	2,488.65	2,526.90	2,470.50	2,584.59
DPZ	354.62	358.26	355.14	343.64	343.83	333.96	338.52	328.23	333.45	333.77	324.07
SBUX	72.55	73.67	71.76	73.88	71.57	68.71	67.79	63.05	65.00	62.62	65.74
KO	47.61	48.92	46.93	49.00	47.82	46.51	46.67	43.83	43.95	42.12	44.25
COST	310.27	314.14	299.62	300.01	305.97	303.63	305.12	288.65	291.48	286.78	285.13
NIKE	85.04	87.47	84.46	86.79	85.30	84.16	84.63	78.86	80.14	79.23	82.74
LULU	207.95	205.18	199.27	203.51	196.01	194.92	194.95	181.25	185.49	183.50	189.55
AAPL	284.43	287.05	273.25	267.99	266.07	259.43	262.47	241.41	244.93	240.91	254.29
MSFT	171.88	173.70	165.51	165.14	165.13	163.49	165.27	153.83	155.26	152.11	157.71
AMZN	2,307.68	2,283.32	2,168.87	2,042.76	2,043.00	2,011.60	1,997.59	1,906.59	1,918.83	1,907.70	1,949.72
GOOG	1,262.47	1,269.23	1,217.56	1,211.45	1,210.28	1,186.51	1,186.92	1,097.88	1,120.84	1,105.62	1,162.81
ZM	151.56	141.89	135.92	124.51	117.81	113.75	122.94	128.20	121.93	137.00	146.12
NFLX	426.75	413.55	396.72	370.72	371.12	372.28	379.96	361.76	370.08	364.08	375.50
GOLD	24.47	24.43	24.37	22.51	20.41	20.31	20.55	19.95	19.85	18.87	18.32
CBOE	98.09	100.51	93.31	93.42	95.70	93.50	94.89	89.62	92.37	88.18	89.25
PG	120.42	120.16	115.18	113.90	114.34	112.02	117.03	114.32	113.64	108.61	109.27
IBKR	44.74	45.32	44.49	45.53	45.20	43.96	45.25	42.69	44.44	43.25	43.17

Serie Histórica de Precios al Cierre: de marzo 30 a marzo 16, año 2020

DATE:	3/30/20	3/27/20	3/26/20	3/25/20	3/24/20	3/23/20	3/20/20	3/19/20	3/18/20	3/17/20	3/16/20
SP500	2,626.65	2,541.47	2,630.07	2,475.56	2,447.33	2,237.40	2,304.92	2,409.39	2,398.10	2,529.19	2,386.13
DPZ	346.75	338.74	338.51	321.45	343.56	323.87	299.95	323.14	290.00	298.74	286.32
SBUX	67.86	66.34	69.90	65.81	64.88	56.55	58.03	61.41	56.33	58.98	58.59
KO	45.00	42.81	44.29	41.61	39.45	37.56	38.30	41.83	44.85	47.18	45.26
COST	291.12	284.33	292.30	280.86	284.94	285.53	290.42	305.22	307.50	306.99	283.18
NIKE	85.38	83.23	84.30	79.01	72.33	62.80	67.45	70.34	68.04	69.84	66.79
LULU	193.94	188.84	200.80	193.62	192.74	172.30	165.01	154.86	140.36	144.88	138.98
AAPL	254.81	247.74	258.44	245.52	246.88	224.37	229.24	244.78	246.67	252.86	242.21
MSFT	160.23	149.70	156.11	146.92	148.34	135.98	137.35	142.71	140.40	146.57	135.42
AMZN	1,963.95	1,900.10	1,955.49	1,885.84	1,940.10	1,902.83	1,846.09	1,880.93	1,830.00	1,807.84	1,689.15
GOOG	1,146.82	1,110.71	1,161.75	1,102.49	1,134.46	1,056.62	1,072.32	1,115.29	1,096.80	1,119.80	1,084.33
ZM	150.88	151.70	141.15	138.11	135.18	159.56	130.55	123.77	118.71	111.10	107.86
NFLX	370.96	357.12	362.99	342.39	357.32	360.27	332.83	332.03	315.47	319.75	298.84
GOLD	19.29	19.24	19.58	19.11	19.50	16.93	15.88	16.08	15.88	17.71	16.33
CBOE	93.03	90.89	90.82	80.00	78.15	76.54	79.69	82.91	75.85	88.54	82.70
PG	114.24	109.44	106.67	100.25	102.59	97.05	101.75	110.10	116.67	117.46	107.78
IBKR	42.20	41.42	43.12	43.49	40.74	35.28	37.90	40.67	38.24	42.66	39.91

Anexo 11 (parte 2)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de marzo 13 a febrero 28, año 2020

DATE:	3/13/20	3/12/20	3/11/20	3/10/20	3/9/20	3/6/20	3/5/20	3/4/20	3/3/20	3/2/20	2/28/20
SP500	2,711.02	2,480.64	2,741.38	2,882.23	2,746.56	2,972.37	3,023.94	3,130.12	3,003.37	3,090.23	2,954.22
DPZ	316.63	317.11	331.88	343.14	335.88	335.62	332.25	341.09	338.67	346.71	338.66
SBUX	69.92	62.10	68.30	74.87	70.83	75.34	76.19	79.67	78.60	82.38	78.43
KO	48.47	46.75	51.76	53.19	51.41	54.78	56.25	58.41	55.57	55.43	53.02
COST	302.27	279.85	297.43	309.40	301.98	311.34	315.76	320.74	302.73	309.14	281.14
NIKE	75.58	74.20	84.00	88.30	84.11	88.36	90.58	93.79	90.93	92.68	89.38
LULU	176.75	169.13	193.74	204.12	199.77	218.55	221.19	231.62	227.13	228.90	217.41
AAPL	277.97	248.23	275.43	285.34	266.17	289.03	292.92	302.74	289.32	298.81	273.36
MSFT	158.83	139.06	153.63	160.92	150.62	161.57	166.27	170.55	164.51	172.79	162.01
AMZN	1,785.00	1,676.61	1,820.86	1,891.82	1,800.61	1,901.09	1,924.03	1,975.83	1,908.99	1,953.95	1,883.75
GOOG	1,219.73	1,114.91	1,215.41	1,280.39	1,215.56	1,298.41	1,319.04	1,386.52	1,341.39	1,389.11	1,339.33
ZM	107.47	109.47	110.30	108.49	113.75	114.32	125.00	116.80	117.47	113.11	105.00
NFLX	336.30	315.25	349.92	364.13	346.49	368.97	372.78	383.79	368.77	381.05	369.03
GOLD	15.67	16.88	18.79	19.87	19.93	21.23	21.16	20.55	20.62	19.86	19.04
CBOE	94.80	93.47	106.35	110.90	111.77	116.77	115.95	118.59	117.21	118.18	114.00
PG	113.31	101.17	110.85	119.75	115.29	120.85	120.82	123.68	117.39	118.77	112.48
IBKR	44.12	41.43	44.66	46.66	43.91	48.00	48.23	50.59	51.66	54.23	51.10

Serie Histórica de Precios al Cierre: de febrero 27 a febrero 12, año 2020

DATE:	2/27/20	2/26/20	2/25/20	2/24/20	2/21/20	2/20/20	2/19/20	2/18/20	2/14/20	2/13/20	2/12/20
SP500	2,978.76	3,116.39	3,128.21	3,225.89	3,337.75	3,373.23	3,386.15	3,370.29	3,380.16	3,373.94	3,379.45
DPZ	347.04	365.81	367.80	362.16	371.09	372.29	296.40	295.09	290.92	285.36	280.37
SBUX	78.29	80.67	82.19	84.52	87.36	88.60	90.14	89.23	89.28	89.93	88.57
KO	54.45	57.10	57.32	58.14	59.61	59.20	59.25	59.01	59.43	59.09	58.89
COST	293.13	305.69	304.87	313.62	321.95	324.08	323.02	322.05	318.31	318.20	315.12
NIKE	88.31	91.75	92.64	95.64	99.97	102.25	102.18	101.72	103.25	103.08	102.72
LULU	220.70	238.56	238.81	246.21	255.90	263.68	262.51	259.23	254.41	253.86	253.94
AAPL	273.52	292.65	288.08	298.18	313.05	320.30	323.62	319.00	324.95	324.87	327.20
MSFT	158.18	170.17	168.07	170.89	178.59	184.42	187.28	186.72	184.85	183.21	184.21
AMZN	1,884.30	1,979.59	1,972.74	2,009.29	2,095.97	2,153.10	2,170.22	2,155.67	2,134.87	2,149.87	2,160.00
GOOG	1,318.09	1,393.18	1,388.45	1,421.59	1,485.11	1,518.15	1,526.69	1,519.67	1,520.74	1,514.66	1,518.27
ZM	113.55	106.88	107.08	105.01	101.76	105.29	103.93	96.39	90.95	89.86	88.28
NFLX	371.71	379.24	360.09	368.70	380.07	386.00	386.19	387.78	380.40	381.40	380.01
GOLD	19.78	21.02	21.18	21.96	21.37	20.70	20.93	20.51	19.65	18.87	18.35
CBOE	120.87	123.44	121.74	121.63	122.25	122.47	120.08	123.17	125.26	123.90	123.16
PG	112.75	119.36	120.63	122.48	125.86	125.74	124.61	124.04	125.30	124.13	122.63
IBKR	51.64	53.96	52.18	53.85	54.94	56.89	55.77	54.72	55.04	55.17	55.10

Anexo 11 (parte 3)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de febrero 11 a enero 28, año 2020

DATE:	2/11/20	2/10/20	2/7/20	2/6/20	2/5/20	2/4/20	2/3/20	1/31/20	1/30/20	1/29/20	1/28/20
SP500	3,357.75	3,352.09	3,327.71	3,345.78	3,334.69	3,297.59	3,248.92	3,225.52	3,283.66	3,273.40	3,276.24
DPZ	275.10	274.21	274.86	278.75	277.36	272.76	270.12	281.09	281.74	284.80	283.51
SBUX	87.51	87.53	86.42	86.15	87.56	87.97	85.61	84.44	85.44	86.32	88.19
KO	59.07	59.23	58.68	58.48	58.34	58.33	58.07	57.89	58.35	56.51	56.51
COST	310.68	313.79	313.63	310.61	308.30	304.26	301.36	304.88	308.82	308.93	310.20
NIKE	99.74	99.74	99.16	99.99	100.26	101.10	99.00	96.03	97.92	99.56	100.13
LULU	251.58	248.54	243.51	243.78	243.90	247.99	246.37	239.39	243.77	243.66	239.35
AAPL	319.61	321.55	320.03	324.44	320.69	318.10	307.93	308.78	323.10	323.57	316.94
MSFT	183.94	188.19	183.39	183.13	179.41	179.63	173.90	169.77	172.31	167.58	165.01
AMZN	2,150.80	2,133.91	2,079.28	2,050.23	2,039.87	2,049.67	2,004.20	2,008.72	1,870.68	1,858.00	1,853.25
GOOG	1,508.79	1,508.68	1,479.23	1,476.23	1,448.23	1,447.07	1,485.94	1,434.23	1,455.84	1,458.63	1,452.56
ZM	88.68	89.67	88.64	87.26	86.99	85.79	87.66	76.30	74.54	73.58	71.51
NFLX	373.69	371.07	366.77	366.95	369.67	369.01	358.00	345.09	347.74	343.16	348.52
GOLD	18.38	18.37	18.13	18.29	17.96	17.96	18.22	18.46	18.38	18.31	17.94
CBOE	122.94	123.32	122.18	127.55	123.40	122.11	123.49	122.85	122.81	121.14	120.84
PG	123.34	125.33	125.24	126.30	125.97	124.83	124.28	123.79	125.12	124.23	125.20
IBKR	55.14	53.35	51.65	51.63	52.04	53.26	51.08	46.91	48.49	47.86	46.86

Serie Histórica de Precios al Cierre: de enero 27 a enero 10, año 2020

DATE:	1/27/20	1/24/20	1/23/20	1/22/20	1/21/20	1/17/20	1/16/20	1/15/20	1/14/20	1/13/20	1/10/20
SP500	3,243.63	3,295.47	3,325.54	3,321.75	3,320.79	3,329.62	3,316.81	3,289.29	3,283.15	3,288.13	3,265.35
DPZ	282.23	284.43	287.34	285.24	284.44	285.80	286.69	287.89	284.45	283.33	288.41
SBUX	88.32	91.60	93.32	92.10	92.10	93.19	92.15	91.12	90.57	90.66	89.74
KO	56.98	57.18	57.33	57.11	56.67	56.44	56.33	56.21	55.51	55.64	55.05
COST	308.80	309.86	312.22	311.23	312.60	304.04	302.39	300.19	299.12	299.24	296.61
NIKE	99.96	101.75	102.73	104.20	104.29	104.24	103.08	102.51	102.64	101.88	100.62
LULU	236.74	240.35	243.06	244.30	242.52	241.25	243.71	243.49	243.77	245.18	234.84
AAPL	308.22	317.56	318.47	316.95	315.82	317.98	314.49	310.60	311.94	316.21	309.60
MSFT	161.84	164.59	166.27	165.25	166.05	166.64	165.72	162.74	161.69	162.84	160.90
AMZN	1,828.34	1,861.64	1,884.58	1,887.46	1,892.00	1,864.72	1,877.94	1,862.02	1,869.44	1,891.30	1,883.16
GOOG	1,433.90	1,466.71	1,486.65	1,485.95	1,484.40	1,480.39	1,451.70	1,439.20	1,430.88	1,439.23	1,429.73
ZM	70.44	73.00	74.47	75.54	76.73	75.56	76.11	76.94	73.16	74.03	73.09
NFLX	342.88	353.16	349.60	326.00	338.11	339.67	338.62	339.07	338.69	338.92	329.05
GOLD	18.56	18.65	18.37	18.23	18.29	17.89	18.03	17.84	17.50	17.39	17.79
CBOE	119.37	119.45	119.26	118.37	117.04	116.18	117.18	116.52	115.15	114.75	115.51
PG	124.86	124.31	124.16	124.73	124.52	124.83	124.50	124.39	123.13	123.32	122.42
IBKR	46.86	47.56	48.15	49.10	50.74	50.06	49.70	48.47	48.95	48.95	48.43

Anexo 11 (parte 4)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de enero 9, 2020 a diciembre 24, 2019

DATE:	1/9/20	1/8/20	1/7/20	1/6/20	1/3/20	1/2/20	12/31/19	12/30/19	12/27/19	12/26/19	12/24/19
SP500	3,274.70	3,253.05	3,237.18	3,246.28	3,234.85	3,257.85	3,230.78	3,221.29	3,240.02	3,239.91	3,223.38
DPZ	288.22	289.88	291.17	293.26	293.98	292.71	293.09	292.56	291.62	291.55	288.96
SBUX	90.11	88.47	87.45	87.72	88.42	88.94	87.51	87.03	87.72	87.67	88.11
KO	54.86	53.88	53.78	54.19	54.21	54.51	54.87	54.79	54.87	54.54	54.23
COST	298.79	294.07	290.74	291.20	291.12	290.88	293.30	294.52	293.49	295.11	293.61
NIKE	101.20	101.27	101.50	101.55	101.64	101.92	101.03	100.52	101.29	100.43	99.86
LULU	235.90	237.27	233.70	235.43	232.64	233.42	231.67	230.83	230.02	231.17	229.03
AAPL	308.90	302.47	297.68	299.09	296.73	299.64	292.95	290.83	289.11	289.22	283.60
MSFT	161.65	159.65	157.15	158.60	158.19	160.18	157.27	157.16	158.53	158.24	156.95
AMZN	1,901.05	1,891.97	1,906.86	1,902.88	1,874.97	1,898.01	1,847.84	1,846.89	1,869.80	1,868.77	1,789.21
GOOG	1,419.83	1,404.32	1,393.34	1,394.21	1,360.66	1,367.37	1,337.02	1,336.14	1,351.89	1,360.40	1,343.56
ZM	72.62	72.55	71.90	70.32	67.28	68.72	68.04	66.79	66.64	67.45	66.46
NFLX	335.66	339.26	330.75	335.83	325.90	329.81	323.57	323.31	329.09	332.63	333.20
GOLD	17.54	17.76	18.41	18.33	18.51	18.43	18.53	18.55	18.31	18.30	18.25
CBOE	115.67	116.66	117.87	119.83	120.97	119.17	119.64	118.90	118.49	118.70	118.62
PG	122.30	120.98	120.47	121.22	121.05	121.87	123.34	122.92	124.52	123.66	123.66
IBKR	48.52	47.99	47.08	47.34	47.13	47.71	46.53	46.48	47.05	47.19	46.61

Serie Histórica de Precios al Cierre: de diciembre 23 a diciembre 9, año 2019

DATE:	12/23/19	12/20/19	12/19/19	12/18/19	12/17/19	12/16/19	12/13/19	12/12/19	12/11/19	12/10/19	12/9/19
SP500	3,224.01	3,221.22	3,205.37	3,191.14	3,192.52	3,191.45	3,168.80	3,168.57	3,141.63	3,132.52	3,135.96
DPZ	287.59	291.32	291.32	283.65	291.07	291.46	294.24	295.95	292.28	283.94	285.07
SBUX	87.82	88.05	88.11	87.58	87.72	88.37	88.26	87.80	86.19	85.64	85.88
KO	54.43	54.49	53.85	53.44	53.95	53.95	53.95	53.67	53.48	53.30	53.60
COST	292.69	294.21	293.09	291.26	294.93	292.88	291.26	296.71	294.68	295.16	294.54
NIKE	99.76	99.68	100.87	100.29	99.37	98.54	97.50	97.45	96.91	96.74	96.36
LULU	228.13	230.29	224.13	224.31	222.98	225.35	223.55	224.47	233.19	229.65	230.88
AAPL	283.33	278.78	279.36	279.08	279.75	279.20	274.50	270.82	270.13	267.84	266.29
MSFT	156.98	156.98	155.29	153.95	154.27	155.11	154.11	152.82	151.29	150.72	150.95
AMZN	1,793.00	1,786.50	1,792.28	1,784.03	1,790.66	1,769.21	1,760.94	1,760.33	1,748.72	1,739.21	1,749.51
GOOG	1,348.84	1,349.59	1,356.04	1,352.62	1,355.12	1,361.17	1,347.83	1,350.27	1,345.02	1,344.66	1,343.56
ZM	66.15	66.93	68.18	67.60	66.17	66.35	63.54	62.49	63.52	64.57	65.94
NFLX	333.10	336.90	332.22	320.80	315.48	304.21	298.50	298.44	298.93	293.12	302.50
GOLD	17.70	17.39	17.65	17.87	17.33	17.36	17.52	17.50	17.56	17.08	16.79
CBOE	117.95	118.67	117.21	116.08	116.36	116.74	115.16	115.08	115.36	115.32	119.30
PG	123.34	123.79	123.36	122.46	123.74	123.99	123.90	123.01	123.10	122.72	123.31
IBKR	46.87	47.21	47.30	46.90	46.83	46.55	46.77	48.00	46.66	46.37	46.18

Anexo 11 (parte 5)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de diciembre 6 a noviembre 21, año 2019

DATE:	12/6/19	12/5/19	12/4/19	12/3/19	12/2/19	11/29/19	11/27/19	11/26/19	11/25/19	11/22/19	11/21/19
SP500	3,145.91	3,117.43	3,112.76	3,093.20	3,113.87	3,140.98	3,153.63	3,140.52	3,133.64	3,110.29	3,103.54
DPZ	285.27	285.56	284.70	282.80	292.71	292.96	293.99	287.82	291.67	284.46	282.76
SBUX	85.92	84.06	85.00	84.43	84.18	85.03	85.37	84.17	83.36	82.63	81.92
KO	53.95	53.72	53.82	53.33	53.28	52.94	53.08	53.04	52.37	52.18	52.11
COST	294.33	292.48	295.90	295.05	296.76	299.18	300.13	300.61	298.42	298.68	299.64
NIKE	96.73	95.52	93.46	92.20	93.30	93.23	93.64	92.83	92.40	92.84	91.67
LULU	229.38	230.79	225.58	223.19	225.53	225.69	228.83	222.84	222.16	219.90	216.74
AAPL	270.07	264.95	261.12	258.84	263.53	266.62	267.21	263.66	265.74	261.16	261.39
MSFT	151.34	149.52	149.44	148.90	149.14	150.97	151.91	151.62	150.82	149.18	149.07
AMZN	1,751.60	1,740.48	1,760.69	1,769.96	1,781.60	1,800.80	1,818.51	1,796.94	1,773.84	1,745.72	1,734.71
GOOG	1,340.62	1,328.13	1,320.54	1,295.28	1,289.92	1,304.96	1,312.99	1,313.55	1,306.69	1,295.34	1,301.35
ZM	62.74	69.67	69.96	70.02	68.93	74.50	74.08	75.16	74.55	73.16	69.92
NFLX	307.35	302.86	304.32	306.16	309.99	314.66	315.93	312.49	315.55	310.48	311.69
GOLD	16.83	17.10	16.97	17.22	16.83	16.74	16.59	16.70	16.28	16.34	16.49
CBOE	120.23	119.51	119.88	119.71	118.93	118.55	118.09	119.17	123.03	123.04	122.43
PG	122.64	123.06	122.97	121.41	121.19	120.54	120.24	120.73	119.00	118.79	118.84
IBKR	47.11	47.48	47.15	46.15	46.74	48.33	49.15	48.75	49.20	47.75	46.65

Serie Histórica de Precios al Cierre: de noviembre 20 a noviembre 6, año 2019

DATE:	11/20/19	11/19/19	11/18/19	11/15/19	11/14/19	11/13/19	11/12/19	11/11/19	11/8/19	11/7/19	11/6/19
SP500	3,108.46	3,120.18	3,122.03	3,120.46	3,096.63	3,094.04	3,091.84	3,087.01	3,093.08	3,085.18	3,076.78
DPZ	286.93	284.44	283.31	280.13	277.39	278.13	276.61	279.41	279.38	281.39	276.56
SBUX	83.21	83.27	83.63	83.82	83.99	83.55	82.93	81.64	80.99	81.16	82.19
KO	52.37	52.23	52.18	51.82	51.79	51.57	50.88	51.01	51.37	51.45	51.95
COST	299.94	301.60	303.90	303.02	303.95	302.26	299.87	300.21	301.98	304.57	300.94
NIKE	92.55	93.11	93.67	92.54	90.78	90.80	89.02	89.57	89.33	89.92	89.00
LULU	217.04	216.88	218.46	215.91	213.22	211.11	207.81	207.19	204.13	202.82	200.74
AAPL	262.57	265.66	266.47	265.13	262.02	263.84	261.34	261.58	259.52	258.82	255.86
MSFT	149.21	149.47	149.42	149.05	147.16	146.41	146.17	145.22	145.07	143.38	143.18
AMZN	1,745.53	1,752.79	1,752.53	1,739.49	1,754.60	1,753.11	1,778.00	1,771.65	1,785.88	1,788.20	1,795.77
GOOG	1,303.05	1,315.46	1,320.70	1,334.87	1,311.46	1,298.00	1,298.80	1,299.19	1,311.37	1,308.86	1,291.80
ZM	70.99	69.64	70.08	70.01	67.74	68.01	68.00	68.39	69.85	66.81	66.83
NFLX	305.16	302.60	302.57	295.03	289.62	283.11	292.01	294.18	291.57	289.57	288.59
GOLD	16.83	16.89	16.73	16.42	16.51	16.51	16.29	16.23	16.22	16.21	16.74
CBOE	122.60	121.78	119.76	118.79	116.83	116.71	115.20	114.42	114.21	114.72	113.78
PG	120.76	119.90	120.37	119.03	118.99	119.14	117.78	117.84	118.20	118.13	118.82
IBKR	47.06	46.70	45.76	46.32	46.44	46.34	46.09	45.72	46.78	46.37	45.77

Anexo 11 (parte 6)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de noviembre 5 a octubre 22, año 2019

DATE:	11/5/19	11/4/19	11/1/19	10/31/19	10/30/19	10/29/19	10/28/19	10/25/19	10/24/19	10/23/19	10/22/19
SP500	3,074.62	3,078.27	3,066.91	3,037.56	3,046.77	3,036.89	3,039.42	3,022.55	3,010.29	3,004.52	2,995.99
DPZ	275.05	268.06	268.03	270.38	269.67	261.98	268.23	270.51	262.40	254.83	257.76
SBUX	81.10	81.58	82.41	83.75	83.38	83.32	82.80	82.58	82.38	81.95	82.66
KO	51.58	52.29	53.04	53.56	53.07	52.55	52.71	52.89	53.73	53.76	52.99
COST	298.55	296.20	295.47	296.48	298.56	294.60	297.66	295.23	295.78	296.05	298.69
NIKE	89.40	89.38	88.70	89.07	89.71	88.80	90.36	90.43	91.01	91.82	95.09
LULU	194.34	196.48	200.69	204.27	205.85	205.58	205.97	208.00	206.84	205.46	204.40
AAPL	255.75	256.12	254.45	247.43	241.96	241.99	247.72	245.26	242.28	241.88	238.68
MSFT	143.58	143.67	142.84	142.49	143.73	141.96	143.31	139.87	139.09	136.40	135.54
AMZN	1,801.71	1,804.66	1,791.44	1,776.66	1,779.99	1,762.71	1,777.08	1,761.33	1,780.78	1,762.17	1,765.73
GOOG	1,292.03	1,291.37	1,273.74	1,260.11	1,261.29	1,262.62	1,290.00	1,265.13	1,260.99	1,259.13	1,242.80
ZM	66.89	70.12	70.39	69.89	70.00	65.49	66.56	63.45	64.52	62.06	62.00
NFLX	288.03	292.86	286.81	287.41	291.45	281.21	281.86	276.82	271.50	271.27	266.69
GOLD	16.39	16.49	16.85	17.20	16.89	16.61	16.57	17.04	17.01	16.42	16.45
CBOE	114.58	112.85	114.18	114.47	115.96	113.17	112.56	113.43	115.02	113.36	114.01
PG	117.41	117.58	122.32	122.95	123.38	122.06	121.94	121.71	123.23	121.46	120.65
IBKR	46.14	46.26	46.81	47.38	48.11	47.88	47.50	46.34	45.44	45.07	45.74

Serie Histórica de Precios al Cierre: de octubre 21 a octubre 7, año 2019

DATE:	10/21/19	10/18/19	10/17/19	10/16/19	10/15/19	10/14/19	10/11/19	10/10/19	10/9/19	10/8/19	10/7/19
SP500	3,006.72	2,986.20	2,997.95	2,989.69	2,995.68	2,966.15	2,970.27	2,938.13	2,919.40	2,893.06	2,938.79
DPZ	256.35	254.54	255.28	254.79	254.57	251.05	256.62	253.61	247.06	252.33	241.11
SBUX	84.53	85.20	85.46	85.88	85.62	85.79	85.53	85.14	85.03	84.10	85.03
KO	53.36	53.90	52.93	52.63	52.65	52.44	52.44	52.80	52.97	52.72	53.01
COST	299.80	301.57	301.11	297.51	297.12	296.25	296.33	295.87	295.63	290.64	292.16
NIKE	95.70	95.58	95.05	94.37	94.28	94.37	93.38	92.50	92.02	91.26	92.67
LULU	205.28	207.11	204.96	203.08	203.89	203.04	201.62	198.13	192.16	191.37	191.66
AAPL	239.22	235.14	234.02	233.12	234.06	234.61	234.95	228.86	225.81	223.20	225.84
MSFT	137.58	136.57	138.84	139.55	140.71	138.70	138.83	138.25	137.40	134.84	136.28
AMZN	1,785.66	1,757.51	1,787.48	1,777.43	1,767.38	1,736.43	1,731.92	1,720.26	1,721.99	1,705.51	1,732.66
GOOG	1,246.15	1,245.49	1,253.07	1,243.64	1,243.01	1,217.14	1,215.45	1,208.67	1,202.31	1,189.13	1,207.68
ZM	65.77	66.08	67.03	67.69	71.11	70.80	71.35	71.01	72.86	73.59	76.99
NFLX	278.05	275.30	293.35	286.28	284.25	285.53	282.93	280.48	267.53	270.72	274.46
GOLD	16.67	17.03	16.93	16.78	16.51	16.94	16.84	17.74	17.70	17.89	17.46
CBOE	114.59	116.08	115.77	114.80	114.37	114.50	114.92	116.39	116.46	115.80	117.56
PG	117.59	116.00	115.17	115.33	115.00	117.80	118.82	119.65	119.69	118.66	120.54
IBKR	45.00	44.82	45.58	45.92	47.26	46.86	47.73	47.13	45.27	47.40	47.40

Anexo 11 (parte 7)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de octubre 4 a septiembre 20, año 2019

DATE:	10/4/19	10/3/19	10/2/19	10/1/19	9/30/19	9/27/19	9/26/19	9/25/19	9/24/19	9/23/19	9/20/19
SP500	2,952.01	2,910.63	2,887.61	2,940.25	2,976.74	2,961.79	2,977.62	2,984.87	2,966.60	2,991.78	2,992.07
DPZ	241.03	242.24	240.65	244.65	243.48	239.37	238.37	240.35	241.86	245.14	246.49
SBUX	85.10	83.86	83.51	85.68	87.57	87.52	88.94	89.48	89.06	89.94	89.21
KO	53.66	52.98	52.23	53.77	53.57	53.44	53.52	53.30	53.43	53.27	53.05
COST	290.43	287.77	283.89	282.72	286.88	284.73	287.03	287.28	286.68	286.34	285.14
NIKE	92.57	91.73	91.00	91.79	93.42	91.82	91.68	90.32	86.71	87.22	86.22
LULU	193.12	190.15	189.13	192.69	192.53	189.72	191.54	193.02	193.85	195.18	189.30
AAPL	225.79	219.64	217.79	223.39	222.77	217.65	218.71	219.85	216.51	217.55	216.56
MSFT	137.28	135.45	133.83	136.23	138.18	136.89	138.69	138.51	136.54	138.29	138.59
AMZN	1,739.65	1,724.42	1,713.23	1,735.65	1,735.91	1,725.45	1,739.84	1,768.33	1,741.61	1,785.30	1,794.16
GOOG	1,209.00	1,187.83	1,176.63	1,205.10	1,219.00	1,225.09	1,241.39	1,246.52	1,218.76	1,234.03	1,229.93
ZM	76.53	76.83	73.85	75.81	76.20	76.04	79.75	79.60	80.02	82.62	82.63
NFLX	272.79	268.15	268.03	269.58	267.62	263.08	263.31	264.75	254.59	265.92	270.75
GOLD	17.59	17.10	17.21	17.06	17.17	17.57	17.93	18.01	18.64	18.43	18.26
CBOE	115.60	115.48	112.14	114.90	114.24	114.76	117.08	117.24	117.54	115.24	114.88
PG	121.67	119.46	118.81	121.53	122.05	122.23	121.98	120.71	121.29	120.91	119.95
IBKR	47.40	46.71	47.13	48.53	53.57	53.18	51.31	51.53	50.19	51.84	51.95

Serie Histórica de Precios al Cierre: de septiembre 19 a septiembre 5, año 2019

DATE:	9/19/19	9/18/19	9/17/19	9/16/19	9/13/19	9/12/19	9/11/19	9/10/19	9/9/19	9/6/19	9/5/19
SP500	3,006.79	3,006.73	3,005.70	2,997.96	3,007.39	3,009.57	3,000.93	2,979.39	2,978.43	2,978.71	2,976.00
DPZ	245.89	243.88	242.43	243.68	243.93	245.67	247.31	241.83	237.49	235.65	243.08
SBUX	90.68	90.09	89.88	88.56	89.61	91.18	90.11	89.48	93.26	94.82	94.64
KO	53.65	53.36	53.37	53.09	53.39	53.83	53.50	53.14	53.26	53.95	53.84
COST	286.60	291.18	290.17	287.46	290.65	288.65	289.45	295.73	297.72	302.46	295.70
NIKE	87.23	87.61	87.12	86.80	86.85	87.20	86.28	86.36	88.19	88.21	87.95
LULU	193.61	195.36	195.47	193.70	195.18	198.73	196.41	193.26	194.39	203.14	188.41
AAPL	219.78	221.58	219.52	218.72	217.58	221.90	222.39	215.54	213.02	212.12	212.14
MSFT	140.21	137.67	136.55	135.50	136.48	136.68	135.29	135.25	136.68	138.25	139.19
AMZN	1,821.50	1,817.46	1,822.55	1,807.84	1,839.34	1,843.55	1,822.99	1,820.55	1,831.35	1,833.51	1,840.72
GOOG	1,238.71	1,232.41	1,229.15	1,231.30	1,239.56	1,234.25	1,220.17	1,206.00	1,204.41	1,204.93	1,211.38
ZM	84.62	84.55	84.64	80.67	78.85	81.53	80.71	80.35	78.65	85.41	92.69
NFLX	286.60	291.56	298.60	294.29	294.15	288.86	288.27	287.99	294.34	290.17	293.25
GOLD	18.13	17.48	17.85	16.94	17.07	16.97	17.18	17.09	17.25	17.70	18.23
CBOE	115.76	114.98	112.81	110.35	110.41	114.38	114.32	114.55	118.00	118.00	118.51
PG	119.61	119.13	118.89	117.50	119.83	120.47	119.00	117.63	119.88	120.57	120.46
IBKR	51.56	51.50	51.79	51.97	51.54	51.15	50.69	49.36	48.78	48.81	48.02

Anexo 11 (parte 8)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de septiembre 4 a agosto 20, año 2019

DATE:	9/4/19	9/3/19	8/30/19	8/29/19	8/28/19	8/27/19	8/26/19	8/23/19	8/22/19	8/21/19	8/20/19
SP500	2,937.78	2,906.27	2,926.46	2,924.58	2,887.94	2,869.16	2,878.38	2,847.11	2,922.95	2,924.43	2,900.51
DPZ	237.35	225.25	225.22	223.65	224.23	220.86	226.06	224.53	230.19	229.86	230.77
SBUX	95.19	95.84	95.63	96.76	96.14	95.17	95.57	93.79	95.56	95.40	94.71
KO	54.48	54.02	53.76	53.77	53.83	53.45	53.28	52.49	53.23	52.85	52.63
COST	294.86	290.80	293.50	295.30	292.59	290.49	276.66	272.24	278.11	273.90	271.21
NIKE	85.89	84.22	84.05	84.70	82.82	81.38	81.60	79.80	82.65	82.08	79.89
LULU	180.70	179.54	184.67	186.06	182.70	180.11	182.35	180.03	183.97	183.33	179.67
AAPL	208.07	204.60	207.62	207.89	204.43	203.07	205.38	201.56	211.32	211.50	209.23
MSFT	136.79	135.21	137.02	137.28	134.73	134.91	134.62	132.58	136.94	137.94	136.42
AMZN	1,800.62	1,789.84	1,776.29	1,786.40	1,764.25	1,761.83	1,768.87	1,749.62	1,804.66	1,823.54	1,801.38
GOOG	1,181.41	1,168.39	1,188.10	1,192.85	1,171.02	1,167.84	1,168.89	1,151.29	1,189.53	1,191.25	1,182.69
ZM	93.53	92.46	91.67	90.87	90.16	91.73	91.76	91.63	93.88	93.01	91.41
NFLX	291.52	289.29	293.75	296.78	291.77	291.03	294.98	291.44	296.93	297.81	298.99
GOLD	19.69	19.24	19.20	19.10	19.72	19.55	19.02	18.92	18.53	18.43	18.48
CBOE	118.48	118.39	118.46	118.24	118.90	119.00	119.63	118.79	118.83	118.11	118.39
PG	120.90	119.08	117.97	118.91	119.12	118.29	117.08	115.12	117.18	116.96	116.67
IBKR	47.11	47.13	47.02	45.86	45.28	44.87	44.42	45.22	46.41	46.58	46.55

Serie Histórica de Precios al Cierre: de agosto 19 a agosto 5, año 2019

DATE:	8/19/19	8/16/19	8/15/19	8/14/19	8/13/19	8/12/19	8/9/19	8/8/19	8/7/19	8/6/19	8/5/19
SP500	2,923.65	2,888.68	2,847.60	2,840.60	2,926.32	2,882.70	2,918.65	2,938.09	2,883.98	2,881.77	2,844.74
DPZ	230.36	233.27	231.22	234.51	238.88	238.29	246.06	244.99	243.98	240.78	238.01
SBUX	95.73	95.59	94.61	94.01	95.70	94.00	95.38	95.35	94.31	94.07	92.45
KO	53.42	53.15	52.62	51.76	52.26	51.97	52.18	52.45	51.95	51.06	50.45
COST	273.83	272.33	269.76	266.42	274.47	269.56	272.17	273.02	272.53	267.57	263.39
NIKE	80.49	79.64	78.88	80.39	82.66	81.00	81.33	82.34	80.64	80.66	78.34
LULU	178.67	177.83	175.44	174.68	179.59	178.82	182.82	186.35	181.36	179.63	174.46
AAPL	209.22	205.39	200.66	201.66	207.85	199.41	199.91	201.57	197.23	195.20	191.58
MSFT	137.56	135.30	132.86	133.16	137.30	134.51	136.41	137.58	134.01	133.42	130.97
AMZN	1,816.12	1,792.57	1,776.12	1,762.96	1,824.34	1,784.92	1,807.58	1,832.89	1,793.40	1,787.83	1,765.13
GOOG	1,198.45	1,177.60	1,167.26	1,164.29	1,197.27	1,174.71	1,188.01	1,204.80	1,173.99	1,169.95	1,152.32
ZM	93.17	92.53	90.64	92.65	95.45	92.16	94.20	95.77	92.45	90.43	89.69
NFLX	309.38	302.80	295.76	299.11	312.28	310.83	308.93	315.90	304.29	310.10	307.63
GOLD	17.90	18.18	18.18	17.98	17.91	17.76	17.94	17.99	17.85	17.37	17.39
CBOE	119.26	120.30	120.79	118.35	119.65	118.32	117.96	117.81	116.97	117.43	113.75
PG	117.98	116.94	115.19	113.62	115.05	113.85	114.59	115.24	113.35	112.14	110.96
IBKR	47.44	46.58	45.35	45.25	46.31	45.68	47.43	48.28	47.81	48.55	48.69

Anexo 11 (parte 9)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de agosto 2 a julio 19, año 2019

DATE:	8/2/19	8/1/19	7/31/19	7/30/19	7/29/19	7/26/19	7/25/19	7/24/19	7/23/19	7/22/19	7/19/19
SP500	2,932.05	2,953.56	2,980.38	3,013.18	3,020.97	3,025.86	3,003.67	3,019.56	3,005.47	2,985.03	2,976.61
DPZ	243.00	244.07	242.78	245.78	250.67	257.21	258.81	260.33	255.87	253.57	256.09
SBUX	94.24	94.11	93.43	95.36	96.71	97.79	89.77	89.44	88.91	89.71	89.10
KO	51.12	50.82	51.41	52.47	52.74	52.91	51.84	52.53	53.07	50.03	50.20
COST	270.74	272.79	273.85	277.69	278.32	279.55	277.99	279.01	278.29	278.36	279.69
NIKE	80.50	82.46	85.35	86.51	86.93	86.85	86.59	86.01	86.01	85.29	85.86
LULU	178.93	185.45	191.09	191.77	192.09	190.61	191.21	192.21	189.07	187.75	187.94
AAPL	202.16	206.53	211.10	206.88	207.77	205.85	205.13	206.77	206.94	205.33	200.74
MSFT	135.61	136.76	134.99	139.03	139.70	140.01	138.87	139.40	137.98	137.13	135.34
AMZN	1,823.24	1,855.32	1,866.78	1,898.53	1,912.45	1,943.05	1,973.82	2,000.81	1,994.49	1,985.63	1,964.52
GOOG	1,193.99	1,209.01	1,216.68	1,225.14	1,239.41	1,250.41	1,132.12	1,137.81	1,146.21	1,138.07	1,130.10
ZM	93.66	95.10	95.51	95.49	96.47	102.20	97.11	95.94	97.39	96.67	93.38
NFLX	318.83	319.50	322.99	325.93	332.70	335.78	326.46	317.94	307.30	310.62	315.10
GOLD	16.72	16.76	16.08	16.82	17.02	16.87	16.85	17.16	17.10	17.15	17.02
CBOE	115.45	114.05	108.34	109.58	109.47	110.17	110.23	110.66	113.75	113.51	113.89
PG	114.26	114.54	115.83	118.15	113.82	112.58	110.65	110.49	111.71	113.14	112.85
IBKR	49.94	50.75	51.06	50.78	50.25	50.48	49.91	49.68	49.90	49.12	49.36

Serie Histórica de Precios al Cierre: de julio 18 a julio 3, año 2019

DATE:	7/18/19	7/17/19	7/16/19	7/15/19	7/12/19	7/11/19	7/10/19	7/9/19	7/8/19	7/5/19	7/3/19
SP500	2,995.11	2,984.42	3,004.04	3,014.30	3,013.77	2,999.91	2,993.07	2,979.63	2,975.95	2,990.41	2,995.82
DPZ	250.87	251.20	244.78	267.99	280.09	275.65	273.38	278.00	275.23	276.27	278.95
SBUX	90.28	89.05	88.88	88.96	88.57	87.88	87.20	86.07	86.27	86.62	86.62
KO	50.82	50.97	50.93	50.92	50.91	50.83	50.62	50.39	50.79	50.90	50.89
COST	281.08	279.74	278.84	278.77	277.63	274.75	269.67	268.22	267.66	266.52	267.40
NIKE	86.75	86.81	87.90	88.77	88.41	87.59	86.75	87.34	87.78	86.13	85.52
LULU	189.39	190.38	190.18	189.17	189.52	183.07	183.87	186.05	186.80	183.21	183.99
AAPL	203.78	201.50	202.64	203.34	201.45	199.91	201.38	199.40	198.20	202.37	202.55
MSFT	135.14	134.99	135.79	137.59	137.59	137.10	136.55	135.18	135.67	135.77	136.17
AMZN	1,977.90	1,992.03	2,009.90	2,020.99	2,011.00	2,001.07	2,017.41	1,988.30	1,952.32	1,942.91	1,939.00
GOOG	1,146.33	1,146.35	1,153.58	1,150.34	1,144.90	1,144.21	1,140.48	1,124.83	1,116.35	1,131.59	1,121.58
ZM	95.19	99.73	97.10	99.80	93.30	91.40	92.72	90.93	90.76	91.88	90.45
NFLX	325.21	362.44	365.99	366.60	373.25	379.50	381.00	379.93	376.16	380.55	381.72
GOLD	17.03	16.52	15.93	16.16	16.32	16.21	16.33	15.87	15.68	15.62	15.70
CBOE	113.52	113.19	113.07	113.06	113.05	112.00	110.71	110.00	109.64	109.42	109.03
PG	113.27	113.03	112.98	112.58	112.11	111.51	110.90	110.08	111.19	110.31	111.22
IBKR	49.81	48.91	50.12	50.89	52.02	52.71	52.40	53.53	52.73	54.68	53.55

Anexo 11 (parte 10)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de julio 2 a junio 18, año 2019

DATE:	7/2/19	7/1/19	6/28/19	6/27/19	6/26/19	6/25/19	6/24/19	6/21/19	6/20/19	6/19/19	6/18/19
SP500	2,973.01	2,964.33	2,941.76	2,924.92	2,913.78	2,917.38	2,945.35	2,950.46	2,954.18	2,926.46	2,917.75
DPZ	271.85	269.16	276.29	275.95	273.90	275.16	272.41	278.33	279.80	278.67	280.33
SBUX	84.37	83.42	82.71	82.45	82.27	83.13	82.53	82.70	83.56	82.69	81.81
KO	50.77	50.40	49.74	49.90	49.93	50.56	50.72	50.35	50.46	49.93	49.47
COST	263.75	261.85	262.55	263.86	262.70	264.64	265.05	264.41	265.62	261.96	261.04
NIKE	84.29	84.73	83.28	83.00	81.90	81.97	83.83	85.07	84.56	82.89	83.63
LULU	180.86	179.95	180.21	180.11	177.31	177.26	182.64	181.87	186.50	187.10	188.03
AAPL	200.88	199.71	196.12	197.92	197.98	193.79	196.77	196.97	197.64	196.07	196.64
MSFT	135.30	134.40	132.70	132.89	132.67	132.18	136.48	135.68	135.66	134.41	133.89
AMZN	1,934.31	1,922.19	1,893.63	1,904.28	1,897.83	1,878.27	1,913.90	1,911.30	1,918.19	1,908.79	1,901.37
GOOG	1,111.25	1,097.95	1,080.91	1,076.01	1,079.80	1,086.35	1,115.52	1,121.88	1,111.42	1,102.33	1,103.60
ZM	85.13	86.86	88.79	90.27	86.33	85.03	89.41	100.47	102.30	102.39	99.64
NFLX	375.43	374.60	367.32	370.02	362.20	360.30	371.04	369.21	365.21	363.52	357.12
GOLD	15.41	14.82	15.59	15.52	15.68	15.83	16.06	15.42	15.13	14.32	14.21
CBOE	107.51	105.76	102.71	105.12	104.91	106.55	106.40	105.50	106.13	105.30	105.40
PG	108.68	107.72	106.90	107.03	106.98	108.92	109.51	108.41	108.94	107.65	106.85
IBKR	52.70	53.51	53.99	52.80	52.15	52.66	52.28	53.08	54.56	54.49	54.98

Serie Histórica de Precios al Cierre: de junio 17 a junio 3, año 2019

DATE:	6/17/19	6/14/19	6/13/19	6/12/19	6/11/19	6/10/19	6/7/19	6/6/19	6/5/19	6/4/19	6/3/19
SP500	2,889.67	2,886.98	2,891.64	2,879.84	2,885.72	2,886.73	2,873.34	2,843.49	2,826.15	2,803.27	2,744.45
DPZ	279.98	278.64	279.28	279.34	277.49	279.97	284.29	284.29	282.65	281.32	273.88
SBUX	81.91	83.12	82.24	81.82	81.27	80.84	81.38	80.31	78.89	77.47	75.20
KO	49.69	50.12	49.94	50.05	49.75	49.80	49.91	49.82	49.22	48.46	48.44
COST	259.74	258.47	258.03	255.57	255.45	255.19	254.35	249.59	246.36	244.02	239.51
NIKE	81.46	82.78	82.95	81.98	82.60	81.93	82.75	81.80	82.06	80.97	77.34
LULU	183.34	176.71	174.52	170.89	171.63	171.35	172.49	170.38	173.52	169.00	163.87
AAPL	192.12	190.98	192.38	192.42	193.03	190.82	188.42	183.53	180.88	178.00	171.72
MSFT	131.60	131.20	131.08	130.25	130.86	131.35	130.16	126.62	124.65	122.00	118.71
AMZN	1,886.03	1,869.67	1,870.30	1,855.32	1,863.70	1,860.63	1,804.03	1,754.36	1,738.50	1,729.56	1,692.69
GOOG	1,092.50	1,085.35	1,088.77	1,077.03	1,078.72	1,080.38	1,066.04	1,044.34	1,042.22	1,053.05	1,036.23
ZM	98.11	100.29	100.95	102.77	94.87	102.00	94.05	79.43	78.04	78.74	75.90
NFLX	350.62	339.73	343.43	345.56	351.27	352.01	360.87	357.13	355.73	353.40	336.63
GOLD	13.99	13.74	13.70	13.58	13.40	13.30	13.39	13.36	13.08	13.06	12.94
CBOE	105.76	106.79	106.31	106.75	107.07	110.15	110.32	110.09	109.94	108.97	108.17
PG	108.21	108.41	108.13	106.93	106.64	105.99	106.04	104.69	104.05	102.06	101.20
IBKR	54.65	54.90	54.33	53.05	54.28	54.40	54.36	54.01	52.47	52.33	50.26

Anexo 11 (parte 11)

Serie Histórica de Precios al Cierre: de mayo 31 a mayo 16, año 2019

DATE:	5/31/19	5/30/19	5/29/19	5/28/19	5/24/19	5/23/19	5/22/19	5/21/19	5/20/19	5/17/19	5/16/19
SP500	2,752.06	2,788.86	2,783.02	2,802.39	2,826.06	2,822.24	2,856.27	2,864.36	2,840.23	2,859.53	2,876.32
DPZ	276.86	274.66	275.11	278.08	279.94	282.62	281.75	282.28	282.17	278.60	275.22
SBUX	75.05	75.15	74.28	74.69	75.13	75.39	76.22	76.50	75.64	77.86	77.85
KO	47.62	47.74	47.12	47.59	48.08	48.32	48.12	47.11	47.35	47.69	48.06
COST	238.03	239.98	239.13	244.72	245.70	246.92	247.90	248.31	247.29	246.74	245.84
NIKE	76.53	78.41	78.03	80.33	81.28	81.76	82.31	82.75	81.97	83.67	83.38
LULU	165.59	163.85	161.59	173.55	172.72	170.20	175.72	176.53	174.15	173.00	176.80
AAPL	173.47	176.67	175.76	176.60	177.34	178.02	181.11	184.90	181.42	187.28	188.35
MSFT	122.52	124.55	123.76	124.97	125.05	124.99	126.47	125.71	125.03	126.87	127.72
AMZN	1,775.07	1,816.32	1,819.19	1,836.43	1,823.28	1,815.48	1,859.68	1,857.52	1,858.97	1,869.00	1,907.57
GOOG	1,103.63	1,117.95	1,116.46	1,134.15	1,133.47	1,140.77	1,151.42	1,149.63	1,138.85	1,162.30	1,178.98
ZM	79.73	80.42	75.77	77.77	76.25	78.76	82.43	85.44	84.67	89.98	83.40
NFLX	343.28	351.85	349.19	355.06	354.39	352.21	359.73	354.27	348.11	354.45	359.31
GOLD	12.28	11.66	11.58	11.57	11.78	11.79	11.77	11.94	12.02	12.04	12.00
CBOE	107.58	105.66	106.01	104.26	105.70	104.97	106.53	106.08	106.38	104.55	104.02
PG	100.33	102.69	101.58	101.84	104.02	104.08	104.04	103.70	104.64	104.76	105.40
IBKR	50.60	52.18	52.00	52.74	53.15	53.55	53.79	53.63	53.66	55.11	55.43

Serie Histórica de Precios al Cierre: de mayo 15 a mayo 1, año 2019

DATE:	5/15/19	5/14/19	5/13/19	5/10/19	5/9/19	5/8/19	5/7/19	5/6/19	5/3/19	5/2/19	5/1/19
SP500	2,850.96	2,834.41	2,811.87	2,881.40	2,870.72	2,879.42	2,884.05	2,932.47	2,945.64	2,917.52	2,923.73
DPZ	274.06	270.28	271.29	275.74	279.50	280.48	274.77	279.36	277.11	271.73	268.90
SBUX	76.72	76.03	75.66	77.37	76.86	77.01	76.57	76.66	76.65	76.08	76.13
KO	47.67	47.19	46.57	46.71	45.94	46.38	46.52	46.98	47.22	46.90	47.10
COST	243.09	241.16	240.36	245.42	241.90	239.13	237.98	242.00	242.38	240.47	239.38
NIKE	83.11	82.78	81.65	83.05	82.09	81.89	81.66	82.68	84.78	84.36	84.98
LULU	172.88	170.68	167.57	173.68	173.71	175.17	173.98	177.69	178.64	176.55	175.67
AAPL	189.18	186.94	184.03	195.38	198.13	200.28	200.24	205.79	209.01	206.45	207.80
MSFT	124.83	123.10	121.74	125.47	123.86	123.87	123.88	126.48	127.22	124.56	126.21
AMZN	1,871.15	1,840.12	1,822.68	1,889.98	1,899.87	1,917.77	1,921.00	1,950.55	1,962.46	1,900.82	1,911.52
GOOG	1,164.21	1,120.44	1,132.03	1,164.27	1,162.38	1,166.27	1,174.10	1,189.39	1,185.40	1,162.61	1,168.08
ZM	79.76	73.14	72.54	79.63	75.21	77.68	73.33	78.24	79.18	75.50	72.76
NFLX	354.99	345.61	345.26	361.04	362.75	364.37	370.46	378.67	385.03	379.06	378.81
GOLD	12.32	12.28	12.13	11.82	12.19	12.39	12.53	12.42	12.41	12.33	12.41
CBOE	102.66	103.84	101.93	102.21	102.39	101.43	100.59	101.86	99.80	98.73	99.86
PG	104.02	102.95	103.45	103.35	101.63	102.44	102.07	103.03	103.42	102.91	102.30
IBKR	53.93	54.93	54.53	56.14	55.65	55.97	56.62	58.21	56.38	55.58	54.95

Anexo 11 (parte 12)*Serie Histórica de Precios al Cierre: de abril 30 a abril 18, año 2019*

DATE:	4/30/19	4/29/19	4/26/19	4/25/19	4/24/19	4/23/19	4/22/19	4/18/19	
SP500	2,945.83	2,943.03	2,939.88	2,926.17	2,927.25	2,933.68	2,907.97	2,905.03	Inicio
DPZ	268.03	266.33	270.85	273.84	280.74	267.65	263.49	265.08	
SBUX	76.29	75.53	76.06	75.73	75.02	74.63	74.05	74.70	
KO	47.55	46.93	46.78	46.37	46.50	46.73	45.94	46.02	
COST	243.29	242.05	241.59	243.35	245.69	243.34	241.19	243.56	
NIKE	86.89	87.32	87.37	86.62	87.45	86.50	86.43	88.25	
LULU	176.35	177.50	177.09	177.29	178.27	176.78	173.02	173.31	
AAPL	198.08	201.97	201.66	202.63	204.48	204.80	201.89	201.23	
MSFT	128.89	128.08	128.19	127.46	123.38	123.80	122.14	121.76	
AMZN	1,926.52	1,938.43	1,950.63	1,902.25	1,901.75	1,923.77	1,887.31	1,861.69	
GOOG	1,188.48	1,287.58	1,272.18	1,263.45	1,256.00	1,264.55	1,248.84	1,236.37	
ZM	72.47	68.17	66.22	65.00	63.20	69.00	65.70	62.00	
NFLX	370.54	371.83	374.85	368.33	374.23	381.89	377.34	360.35	
GOLD	12.53	12.48	12.81	12.65	12.64	12.62	12.78	13.03	
CBOE	100.42	99.82	100.36	100.55	100.16	99.94	99.89	100.07	
PG	103.81	102.15	103.21	100.69	101.09	100.57	103.35	103.39	
IBKR	53.93	54.36	53.87	54.27	53.93	54.67	54.53	54.56	

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1:	Guía de Simulación Histórica con Pesos Decrecientes para C-VaR 95%.	83
Tabla 2:	Simbología de cotización de las acciones evaluadas.	101
Tabla 3:	Resumen comparativo de acciones evaluadas. Periodo: 18/4/2019 a 16/4/2020. Valores diarios.	102
Tabla 4:	Comparativo de portafolios evaluados.	112
Tabla 5:	Comparativo de resultados obtenidos por el portafolio, versus expectativa.	125

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1:	Punto w_a para desviación estándar mínima en un portafolio donde $w_b = 1 - w_a$.	60
Figura 2:	Valor de w_a para rendimiento ajustado al riesgo máximo en un portafolio compuesto por A y B. $w_b = 1 - w_a$	67
Figura 3:	Comparación de la curva de la función de densidad de probabilidad de la Distribución Normal, sobre histograma de frecuencias de rendimientos históricos de un portafolio.	69
Figura 4:	Representación del Valor Absoluto en Riesgo –VaR 95%– como el valor limítrofe de r_p que señala “el mejor resultado” en el tramo de la distribución con el 5% de los peores resultados.	76
Figura 5:	Distribución de pesos exponencialmente decrecientes para tres distintos valores del parámetro inicial lambda λ : 0.94, 0.96, y 0.98. de acuerdo al número de días transcurridos de observación.	78

Figura 6:	Comparación gráfica del cálculo estático del rendimiento del portafolio, contra el cálculo dinámico del rendimiento del portafolio. con desfase de un día para distinguir entre ambas líneas.	79
Figura 7:	Evolución del peso componente de activos A y B de acuerdo a su comportamiento particular.	81
Figura 8:	Representación del Valor Absoluto en Riesgo –VaR 95%– como el valor limítrofe de r_p .	84
Figura 9:	Representación de los valores u generados en el intervalo $[0,1]$ (desplegados en el eje vertical); y sus correspondientes valores x en función de la distribución de probabilidad acumulada normal. Para una variable aleatoria X ; con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 0.2$	87
Figura 10:	Comportamiento de las 16 acciones evaluadas, y el índice de mercado, durante el periodo comprendido entre el 18 de abril del año 2019, al 16 de abril del año 2020. Observaciones quincenales de rendimiento, sobre el 100% de su valor en la fecha inicial.	99
Figura 11:	Rendimiento ajustado al riesgo de cada acción evaluado, y el índice de mercado.	104
Figura 12:	Representación gráfica de la Matriz de Índice de Adecuación (Matriz completa en Anexo 6).	107
Figura 13:	Rendimiento ajustado al riesgo en función de la distribución de capital. (parejas de acciones) Peso en la acción A de (A,B) en el eje horizontal, rendimiento ajustado al riesgo en eje vertical.	111

- Figura 14: Superposición de la función de distribución de probabilidad normal, sobre el histograma de frecuencias para la simulación histórica de rendimientos diarios del portafolio bandera, compuesto por GOLD 62% y ZM 38%. A partir del 18 de abril del año 2019 al 16 de abril del año 2020. Para un total de 250 observaciones diarias simuladas. 115
- Figura 15: Comparación de la expectativa de rendimiento ajustado al riesgo de acciones contra portafolio número 1: Bandera, compuesto por GOLD 68% y ZM 38%. 116
- Figura 16: Proyección de rentabilidad del portafolio bandera para el trimestre abril – julio. Rentabilidad más probable: 26%. Desviación estándar 23%. Simulación de 1,000 iteraciones de rendimientos aleatorios independientes para cada periodo simple de un día, en el horizonte de proyección. 118
- Figura 17: Evolución de portafolios en el periodo activo del 17 de abril al 17 de julio de 2020, sobre 100% . 120
- Figura 18: Pérdidas y ganancias diarias para el portafolio bandera y el portafolio diversificado. 122
- Figura 19: Evolución de pesos componente portafolio bandera. Valores iniciales: GOLD 62%, ZM 38%. 123
- Figura 20: Participación en la generación de utilidades de los activos en el portafolio, comparado con su respectiva distribución de capital inicial: GOLD 62%: 19.46% y ZM 38%: 80.54%. 124
- Figura 21: Comparativo final de la proyección realizada, contra el comportamiento efectivamente observado del portafolio bandera, para el trimestre transcurrido del 17 de abril, al 17 de julio del año 2020. 126

