HELEN ROCÍO RAMÍREZ LUCAS

# EL PLANTEAMIENTO CRÍTICO DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Asesor: M.A. Eduardo José Blandón Ruiz

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Humanidades
Departamento de Post Grado
Maestría en Docencia Universitaria
con Especialización en Evaluación Educativa

Guatemala, febrero de 2008

*"Este trabajo de tesis fue presentado por la autora como requisito previo a optar el grado de Maestra en Docencia Universitaria con Especialización en Evaluación Educativa"*

ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

A nuestro alrededor, el mundo toma forma. Partiendo por nosotros mismos, las moléculas de los elementos de nuestro planeta se reúnen en estructuras para dar origen a materiales, a espacios, a paisajes, a la vida. El mundo, tal como lo conocemos, existe porque existen las formas. Y nosotros, los seres humanos, también hemos aprendido a ver el mundo a través de sus formas. La capacidad del ser humano de mirar más allá e intentar descubrir formas en la naturaleza o en las cosas que ve, ha sido muy provechosa para la ciencia y la matemática.

Se desarrollan cinco diferentes capítulos, en el primero se describe la historia de la geometría, la constitución de la geometría a través del tiempo, como un conocimiento organizado para generar una ciencia.

Se reconoce generalmente que la geometría como ciencia fue originada y desarrollada por los griegos, entre las contribuciones más importantes a su desarrollo se cuentan las de los matemáticos Pitágoras y Euclides. Pero los primeros geómetras, probablemente de Egipto, Sumeria y Babilonia, observaron la realidad que los rodeaba, desarrollando conocimiento que les permitiera realizar efectivamente sus tareas, tal vez muy relacionadas con la arquitectura, de dar forma a construcciones humanas.

En el segundo capítulo se profundiza en la geometría euclidiana. Los griegos añadieron y sistematizaron el conocimiento empírico, con la recopilación realizada por Euclides (365-300 a.C.), en su libro “Los Elementos”. En los XIII capítulos de su obra, escribió sobre rectas, círculos, proporciones, magnitudes, figuras semejantes, números, y geometría plana y del espacio, recopilando los fundamentos de la matemática de su época. Estos principios reciben el nombre de Geometría Euclidiana. Así como los aportes a la geometría después de Euclides.

En el tercer capítulo, se hace un planteamiento crítico de la geometría euclidiana, basada en la controversia del quinto postulado, la independencia del mismo y algunas formulaciones equivalentes.

En el cuarto capítulo, con la controversia del quinto postulado, se generan nuevas geometrías, conocidas como geometrías no euclidianas, y las diferentes clases de geometrías.

Tan importante fue el trabajo de Euclides, que su obra marcaría el estándar que rigió la enseñanza y el rigor matemático por más de 2000 años. Recién a principios del siglo XVIII, los matemáticos dieron los primeros pasos para construir una geometría no euclidiana.

Con la importancia de la geometría en la educación, el quinto capítulo, analiza la geometría en el sistema educativo de Guatemala, los contenidos básicos sobre geometría en el nivel primario según el Ministerio de Educación. Se describen los límites y obstáculos en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría antes del nivel superior, y en el nivel superior. Siendo la geometría una rama importante de la matemática, ésta debe ser enseñada en forma natural, como lo natural del medio que rodea al ser humano.

Por obra de Euclides, la geometría fue considerada a través de los años como la rama más completa de la matemática, y se estimaba que su forma de deducción ofrecía el mejor método para lograr el verdadero conocimiento, y, a parte de la religión, el conocimiento más alto.

La geometría en la matemática, es el intento de obtener ideas interesantes sobre sus propiedades y relaciones, y de organizar en sistemas de razonamientos las doctrinas inspiradas en tales descubrimientos.

La matemática es la libre invención de la mente, limitada tan sólo por los posibles y deseables usos en ciencia natural y por las reglas de la lógica por las que toda persona de buen sentido ha de guiarse, sea o no de su agrado.

# 1. HISTORIA DE LA GEOMETRÍA EN LA ANTIGÜEDAD

## 1.1 La geometría griega antes de Euclides

Es razonable pensar que los primeros orígenes de la geometría se encuentran en los primeros orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba, aún de manera inconsciente, los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento, informal e intuitivo, a la geometría.

Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco ciertos conocimientos geométricos de carácter muy práctico. Estos son esencialmente algunas fórmulas, o mejor dicho algoritmos expresados en forma de “receta”, para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica, pues se pretendía con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones.

Siempre se ha dicho que los egipcios tenían una alta formación matemática, y se ha llegado a insinuar que tuvieran un acervo de conocimientos secretos o que se hubieran perdido con el paso de los tiempos. Estas hipótesis nunca han sido confirmadas, y los documentos existentes tienden a echarlas por tierra.

La historia nos hace pensar que el conocimiento que esta civilización, así como los de las culturas mesopotámicas, tuviera sobre geometría pasó íntegramente a la cultura griega a través de Thales, los pitagóricos y esencialmente de Euclides.

Geometría se deriva de la palabra griega “eletqia” que significa medida de la tierra. La palabra fue usada por el historiador griego Herodoto en el siglo V a.C. en su gran épica sobre las guerras persas en donde escribe que en el antiguo Egipto fue usada "geometría" para las necesidades de los agrimensores egipcios para redistribuir las tierras del Valle del Nilo después de cada periódica crecida.

Posteriormente, Thales de Mileto, quien permaneció en Egipto una larga temporada de su vida, aprendiendo de los sacerdotes y escribas egipcios todo lo referente a sus conocimientos en general, y estos quedaron asombrados cuando fue capaz de medir la altura de la Pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar, iniciando una geometría demostrativa.

Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la lógica como leyes del razonamiento[1].

[1] Hansen, V.L., Geometry in Nature, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Mass., U.S.A., 1993.

La geometría griega fue la primera en ser formal. Parte de los conocimientos concretos y prácticos de las civilizaciones egipcia y mesopotámicas, y da un paso de abstracción al considerar los objetos como entes ideales, un cuadrado cualquiera, en lugar de una pared cuadrada concreta, un círculo en lugar del ojo de un pozo, entre otros, que pueden ser manipulados mentalmente, con la sola ayuda de la regla y el compás.

Aparece por primera vez la demostración como justificación de la veracidad de un conocimiento, aunque en un primer momento fueran más justificaciones intuitivas que verdaderas demostraciones formales.  Con su estudio sobre la semejanza de triángulos, Pitágoras, con su inmortal proposición sobre la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo, contribuyen a la consolidación de la geometría.

La figura de Pitágoras y de la secta por él creada, los pitagóricos, tiene un papel central, pues eleva a la categoría del elemento primigenio el concepto de número, filosofía que da forma más explícita o más implícita, siempre ha estado dentro de la Matemática y de la Física, arrastrando a la geometría al centro de su doctrina, en este momento inicial de la historia de la Matemática aún no hay una distinción clara entre geometría y aritmética, y asienta definitivamente el concepto de demostración, éste ya sí coincide con el concepto de demostración formal, como única vía de establecimiento de la verdad en geometría.

Desde aquel período temprano debemos, sin embargo, señalar en particular a Eudoxio (alrededor del 391- 338 a.C.), quien es conocido por una teoría de las proporciones y el llamado método de exhaustión, aportaciones que hicieron posible determinar áreas y volúmenes rigurosamente.

Esta actitud permitió, aún fuera de la secta la medición de la tierra por Eratóstenes, así como la medición de la distancia a la luna, y la invención de la palanca por Arquímedes, varios siglos después.

En el seno de la secta de los pitagóricos surge la primera crisis de la Matemática: la aparición de los inconmensurables, pero esta crisis es de carácter más aritmético que geométrico.

Surge entonces un pequeño problema a nivel lógico, que consiste en lo siguiente: una demostración parte de una o varias hipótesis para obtener un resultado denominado tesis. La veracidad de la tesis dependerá de la validez del razonamiento con el que se ha extraído, esto será estudiado por Aristóteles al crear la Lógica, y de la veracidad de las hipótesis.

Y Platón con su teoría de lugares geométricos, no hacen más que ratificar la unión de la geometría con la experimentación.

Euclides, vinculado al Museo de Alejandría y a su Biblioteca, zanja la cuestión al proponer un sistema de estudio en el que se da por sentado la veracidad de ciertas proposiciones por ser intuitivamente claras, y deducir de ellas todos los demás resultados.

En el siglo III a. de J.C., durante el reinado del faraón helenista Tolomeo I quien, deseando modernizar los tratados de geometría existentes, encomendó a Euclides escribir una compilación o refundición completa de los conocimientos geométricos.

Euclides sistematizó todos los conocimientos geométricos hasta esa época en “Los Elementos”, y Arquímedes estableció la relación entre la longitud de la circunferencia y el radio de la misma, así como el cálculo de las áreas y volúmenes de los cuerpos esféricos, pudiéndosele considerar como el precursor del cálculo infinitesimal gracias al uso del método de exhaustividad para el cálculo de las áreas y volúmenes.

Euclides escribe sus célebres “Elementos”, modelo de sistema axiomático-deductivo, libro que representa la suma global de los conocimientos geométricos adquiridos hasta esa época, parte de verdades intuitivas que debemos aceptar, este ha sido durante muchos siglos el eje del estudio de las Matemáticas.

Euclides, usando un razonamiento deductivo parte de conceptos básicos primarios no demostrables tales como punto, recta, plano y espacio, que son el punto de partida de sus definiciones, axiomas y postulados.

Demuestra teoremas y a su vez, éstos servirán para demostrar otros teoremas. Crea nuevos conocimientos a partir de otros ya existentes por medio de cadenas deductivas de razonamiento lógico.

# 2. LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

## 2.1 Axiomas en la geometría euclidiana

La presentación tradicional de la geometría euclidiana se hace en un formato axiomático. A partir de ellos, y mediante razonamientos lógicos que no hagan contradecir un axioma con otro, constituye toda una teoría.

Un sistema axiomático es aquel que, a partir de un cierto número de postulados que se asumen verdaderos, conocidos como axiomas, y a través de operaciones lógicas, genera nuevos postulados cuyo valor de verdad es también positivo.

Todo se reduce a partir de cinco axiomas y cinco postulados, cuya verdad se considera evidente. Es importante conocer que un axioma, es un principio o propiedad que se admite como cierta por ser evidente; son proposiciones, o afirmaciones, que relacionan conceptos. Excepto el punto, la recta y el plano, todo otro concepto que se enuncie debe ser definido en función de los primeros; y a partir del cual se deduce todo lo demás.

Axiomas básicos:

- Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
- Si cantidades iguales se suman a cantidades iguales, las sumas son iguales.
- Si cantidades iguales se restan de cantidades iguales, las diferencias son iguales.
- Dos figuras que coinciden son iguales entre sí.
- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Se distinguen cuatro grupos de axiomas, aunque a veces se incluye un quinto grupo con un solo axioma de paralelismo, que son:

- Existencia e incidencia, son aquellos que aseguran las condiciones de existencia de los puntos, rectas y planos, además indican cómo inciden unos conceptos en los otros. Existen infinitos puntos, planos, y rectas. Para determinar una recta, son necesarios solo dos puntos; para determinar un plano son necesarios tres.
- Ordenación, estos axiomas ayudan a que la recta quede determinada como lo que se conoce.
    - Axioma de Ordenación: dados tres puntos, uno está entre los otros dos. Asegura que todo segmento sea divisible. Si se selecciona un punto cualquiera en una recta el resto de los puntos de la recta quedan divididos en dos clases, los que están de un lado y los que están del otro.

- Axioma de Pascho: dado un triángulo y una recta que no pasa por sus vértices, o la recta es externa al triángulo, o pasa por dos de los lados.

  Este axioma garantiza que una recta divide a los puntos del plano en dos categorías, los que están de un lado se considera un movimiento. Sólo existe un movimiento que transforma una semirrecta en otra y un semiplano determinado por la misma en otro determinado por la otra.

- Congruencia, se definen los conceptos de segmento (una recta y dos puntos sobre ella), ángulo (un punto y un par de semirrectas que parten de él). Con ello se postula la existencia de una relación de congruencia, que es el equivalente axiomático a los movimientos. Básicamente dados dos segmentos o dos ángulos, aceptamos que existe algún método que nos permite decir si son congruentes o no.

  Sea cual sea el método, se exigen los siguientes postulados: todo segmento es congruente consigo mismo; si un segmento es congruente con uno dado, el dado es congruente con el primero; si dos segmentos son congruentes con un tercero son congruentes entre ellos; dados dos segmentos formando un ángulo, congruentes con otros dos que forman un ángulo congruente, al unir los extremos sueltos para formar dos triángulos, los tres lados y los tres ángulos serán congruentes, se postula que un triángulo queda definido por dos lados y un ángulo.

- Continuidad
    - Axioma de Arquímedes: se impone que un segmento pueda dividirse en dos indefinidamente.
    - Axioma de la plenitud: se impone que el conjunto de puntos de una línea no puede ser ampliado mediante cierres, límites de sucesiones.

Se puede ver que en los anteriores axiomas todo es aceptable, excepto el detalle que no se definió la semirrecta, el semiplano y el movimiento, lo cual, por simplicidad se ha omitido.

## 2.2 Euclides y "Los Postulados"

Como se mencionó, los conceptos básicos primarios punto, recta, plano y espacio no se definen sino que se captan a través de los sentidos. Puede darse modelos físicos para cada uno de ellos.

Por ejemplo:

- Un punto puede estar representado por la huella que deja sobre un papel, la presión de la punta de un alfiler o por una estrella en el firmamento.
- Una recta está sugerida por un hilo a plomo.

- Un plano está sugerido por la superficie de un lago quieto o bien por la superficie de un espejo.
- El espacio euclidiano puede considerarse constituido por todos los puntos existentes, o sea, el espacio en que nos movemos.
- La geometría euclidiana puede dividirse en geometría plana y en geometría del espacio o estereometría.
    - La plana estudia las figuras contenidas en un plano.
    - La del espacio estudia figuras que no están contenidas en un mismo plano.

Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y sólo una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de forma continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio. Se obtiene de una experimentación con un compás.
4. Todos los ángulos rectos son iguales. Es tal vez menos obvio y más abstracto, pero se deduce de la experiencia de medir ángulos con un transportados, donde la suma de ángulos suplementarios es 180, tal que ángulos suplementarios son congruentes entre sí. Esta noción se refiere a la "superposición" de figuras y es geométrica en su carácter.

5. Si una recta al cortar a otras dos, forma ángulos internos menores a un ángulo recto, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos. Este es diferente porque no se pude verificar empíricamente si dos rectas se corta, ya que solo podemos trazar segmentos y no las rectas completas. Podemos extender los segmentos cada vez más lejos para ver si se cortan en algún punto, pero no se pueden extender infinitamente.

Este último postulado, que es conocido como el postulado de las paralelas, puede expresarse en forma equivalente: "Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela".

Este postulado parece menos obvio que los otros cuatro, y muchos geómetras han intentado deducirlo o demostrarlo a partir de los otros cuatro y de los cinco axiomas, sin conseguirlo. "Los Elementos" de Euclides tuvieron una influencia enorme sobre los matemáticos árabes y occidentales, prácticamente hasta nuestros días.

Al construirse la geometría hiperbólica se demostró que esto no era posible ya que en este tipo de espacios, se demuestra que el quinto postulado es falso mientras el resto se sostiene. También se notó que el conjunto de axiomas escogido por Euclides es incompleto.

Euclides utiliza hechos no demostrados ni postulados en sus teoremas[2] desde el primero, aunque son cosas tan sutiles que pasaron inadvertidas durante mucho tiempo.

Para que el sistema de Euclides fuera completo habría que añadir al menos dos postulados más:

- Dos circunferencias separadas menos de 2R se cortan en dos puntos (Euclides lo utiliza en su primera construcción)
- Dos triángulos con dos lados iguales y su ángulo igual son iguales (equivale al concepto de movimiento, que Euclides usa para su teorema cuarto sin definir explícitamente)

## 2.3 Euclides y "Los Elementos"

"Los Elementos" es una verdadera reflexión teórica de y sobre matemáticas, consta de 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas, no aparecen números; además, escribió sobre música y óptica, tiene una obra titulada "Sofismas" que, dice Proclo, sirve para ejercitar la inteligencia.

[2] Hansen, V.L., The Magic World of Geometry - I. The Isoperimetric Problem, Elemente der Mathematic 49, (2), 61-65, (1994).

Se cuenta que Ptolomeo preguntó a Euclides si no hay una manera más simple de aprender geometría que estudiar “Los Elementos”, a lo que el autor respondió “No existe un camino real hacia la Geometría”. Con este juego de palabras, Euclides le vino a decir al rey que no existen privilegios en la geometría.

En otra ocasión, uno de sus estudiantes preguntó a Euclides qué ganaba con lo que había aprendido de la Geometría: el maestro ordenó a su esclavo que le entregase una moneda a aquel estudiante, para que “ganara” algo con lo que aprendía de Geometría, dando a entender que aquel muchacho no había entendido nada de la grandeza de la geometría y de lo desinteresado de ésta.

La geometría es parte de la riqueza de la matemática, y “Los Elementos”, en trece volúmenes, son la esencia de la geometría, a los que posteriormente se añadieron dos más, atribuidos a Hipsicles de Alejandría.

Esta obra de Euclides es importante, no por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que está constituida. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época[3].

[3] Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.

"Los Elementos" ha tenido más de 1000 ediciones desde su primera publicación, en imprenta en 1482. Se puede afirmar, que Euclides es el matemático más leído en la historia, "Los Elementos" consta de XIII libros sobre geometría y aritmética:

- El libro I de "Los Elementos" trata sobre rectas paralelas, perpendiculares, y las propiedades de los lados y ángulos de los triángulos, incluye postulados.
- El II desarrolla el álgebra geométrica.
- El III estudia las propiedades del círculo y de la circunferencia.
- El IV los polígonos regulares inscritos y circunscritos.
- El V la teoría de las proporciones de Eudoxio, apliable tanto a las cantidades conmensurables, racionales, como las inconmensurables, irracionales.
- En el VI aplica dicha teoría a la semejanza de triángulos y otros problemas, es una aplicación de la teoría a la geometría plana.
- Los libros VII, VIII, y IX están dedicados a la aritmética, tratan de la teoría de los números, se discuten relaciones como: números primos, (Euclides prueba ya en un teorema que no hay una cantidad finita de números primos), mínimo común múltiplo, progresiones geométricas, etc.
- El X libro trata de los segmentos irracionales, es decir, de aquellos que pueden representarse por raíz cuadrada.
- A partir de este libro se enfoca en la Geometría Espacial. El XI estudia la perpendicularidad y el paralelismo de rectas y planos, ángulos diedros y poliedros, etc.

- El XII aplica el método exhaustivo de Eudoxio a diversos problemas geométricos, como la equivalencia de pirámides y la semejanza de conos y cilindros, la medida de los círculos, esferas, etc.
- El XIII estudia los poliedros regulares.

La obra de Euclides no es totalmente original, pues muchos de sus libros están basados en geómetras anteriores. Sin embargo, sistematizó todos los conocimientos de su época, ordenó las enseñanzas a su manera y demostró los teoremas requeridos por su nueva ordenación lógica, basada en el método axiomático.

### 2.4 La geometría después de Euclides

Euclides casi cierra definitivamente la geometría griega, y por extensión la del mundo antiguo y medieval, a excepción de las figuras de Arquímedes y Apolonio.

Arquímedes estudió ampliamente las secciones cónicas, introduciendo en la geometría las primeras curvas que no eran ni rectas ni circunferencias, aparte de su famoso cálculo del volumen de la esfera, basado en los del cilindro y el cono[4].

[4] Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.

Se llegó a la segunda cumbre en la geometría clásica griega alrededor de los 200 a.C. con el trabajo sobre las secciones cónicas de Apolonio desde un interés puramente matemático, las secciones cónicas han evolucionado hasta su utilidad en muchos y varios contextos.

### 2.4.1 La geometría en la Edad Media

Durante los siguientes siglos la Matemática comienza nuevos caminos, Álgebra y Trigonometría, de la mano de indios y árabes, y la Geometría apenas tiene nuevas aportaciones, excepto algunos teoremas de carácter más bien anecdótico.

En Occidente, a pesar de que la geometría es una de las siete artes liberales, encuadrada concretamente en el “Quadrivium”, las escuelas y universidades se limitan a enseñar “Los Elementos”, y no hay aportaciones, excepto tal vez en la investigación sobre la disputa del quinto postulado.

Si bien no se llegó a dilucidar en este período si era o no independiente de los otros cuatro, sí se llegaron a dar nuevas formulaciones equivalentes de este postulado.

### 2.4.2 La geometría en la Edad Moderna

La Geometría Proyectiva, es en el Renacimiento[5] cuando las nuevas necesidades de representación del arte y de la técnica empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos instrumentos que les permitan representar la realidad.

Aquí se enmarca la figura del matemático y arquitecto Luca Pacioli, de Leonardo da Vinci, de Alberto Durero, de Leone Battista Alberti, de Piero della Francesca, por citar algunos.

Todos ellos, al descubrir la perspectiva y la sección crean la necesidad de sentar las bases formales en la que se asiente la nueva forma de Geometría que ésta implica: la Geometría Proyectiva, cuyos principios fundamentales aparecen de la mano de Desargues en el siglo XVII.

Esta nueva geometría de Desargues fue estudiada ampliamente ya por Pascal, o por de la Hire, pero debido al interés suscitado por la Geometría Castesiana y sus métodos, no alcanzó tanta difusión como merecía hasta la llegada a principios de Gaspard Monge en primer lugar y sobretodo de Poncelet.

[5] Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.

La Geometría Cartesiana, pero es sin duda la aparición de esta geometría lo que marca la geometría en la Edad Moderna. Descartes propone un nuevo método de resolver problemas geométricos, y por extensión, de investigar en geometría.

Lo decisivo para la historia del pensamiento fue que los matemáticos de las épocas posteriores asumieron los postulados y los axiomas como verdades incuestionables. Y como los teoremas y proposiciones de esa geometría eran derivados de los axiomas y postulados, la Geometría Euclidiana describía el mundo, durante más de dos mil años.

Sin embargo, aunque nadie dudaba de su verdad, el quinto postulado no parecía ser tan autoevidente como los demás.

La Geometría Moderna[6] es una gama de interacciones con las otras principales técnicas matemáticas[7]: Análisis, Álgebra, todas las Topologías, el Análisis Matemático, inclusive las Estadísticas.

[6] Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.
[7] Hildebrandt, S. & Tromba, A., Mathematics and Optimal Form, Scientific Amer. Library, W.H. Freeman and Co, 1985.

### 2.4.3 La geometría en la Edad Contemporánea

Gauss devuelve el carácter geométrico que impregna parte del Análisis Matemático, fundamentalmente con dos contribuciones: el nacimiento de la Variable Compleja y de la Geometría Diferencial.

Pero no son las únicas contribuciones al campo de la geometría. En su adolescencia se vio dividido entre dedicarse a la Filosofía o a la Matemática. A los 17 años descubrió la manera de construir el polígono regular de 17 lados, y la condición necesaria y suficiente para que un polígono regular pueda construirse, esto determinó su vocación.

En su primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, de las cinco que realizó a lo largo de su carrera, sentó las bases del Análisis de Variable Compleja, usando por primera vez descripción geométrica de los números complejos como vectores fijos del plano.

Aunque no es propiamente obra suya, pues la Variable Compleja está desarrollada fundamentalmente por Cauchy, sí es el primero en abordarla seriamente, y sobre todo le da una interpretación geométrica que marcará el desarrollo de esta rama.

La principal contribución de Gauss a la geometría es la creación de la Geometría Diferencial, retomando las ideas que sobre las relaciones entre el Análisis Matemático y la Geometría había hasta entonces y desarrollándolas ampliamente.

Partiendo de la base de que la Geometría estudia el espacio, las curvas y las superficies, establece la noción fundamental de curvatura de una superficie, y con la definición de geodésica, demuestra que si se tienen dos puntos sobre una superficie, el camino más corto entre esos dos puntos sin salirnos de la superficie es un segmento de geodésima.

Concepto análogo sobre la superficie de la recta en el plano, existen superficies en las que los triángulos formados por las geodésimas miden más de la medida de dos ángulos rectos, en otras menos.

Estas consideraciones llevaron a Gauss a considerar la posibilidad de crear geometrías no euclidianas, pero consideró que la mentalidad de la época no estaba preparada para un resultado de tal magnitud, y nunca publicó esos resultados. Sólo vieron la luz cuando Bolyai publicó su geometría no euclidiana, y comprobó que la comunidad científica general aceptaba el resultado[8].

[8] Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.

Así que, por un lado, Gauss fue el primero en crear una geometría no euclidiana, y por otro fue el creador de la geometría diferencial y precursor de la Variable Compleja.

# 3. EL PLANTEAMIENTO CRITÍCO DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

La geometría griega es incapaz de resolver tres famosos problemas que heredarán los matemáticos posteriores. Es importante observar que los tres problemas deben ser resueltos utilizando únicamente la regla y el compás, únicos instrumentos, además del papel y el lápiz, por supuesto, válidos en la geometría de Euclides.

Además de los tres problemas, la disputa de si el quinto postulado era o no un tema, de si se podía o no deducir de los otros cuatro, también se considera uno de los problemas clásicos de la geometría griega. Estos tres problemas son:

- La duplicación del cubo
- La trisección del ángulo
- La cuadratura del círculo

Algunos afirman que Gauss fue el primero en considerar la posibilidad de que la geometría del universo en que vivimos no fuera la euclidiana. Sabiendo que en la geometría hiperbólica la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos, se dice que subió a la cima de tres montañas con un teodolito, aunque la precisión de los instrumentos no fue suficiente para decidir la cuestión con tal experimento.

Sin embargo, otros afirman que cuando escribió que trataba de corregir los efectos de posibles curvaturas se refería a corregir el efecto de la curvatura terrestre, en los estudios cartográficos que estaban realizando[9].

A propuesta de Gauss, la disertación de Riemann versó sobre la hipótesis de la geometría. En su tesis, Riemann considera las posibles geometrías que infinitesimalmente, en regiones muy pequeñas, sean euclidianas, cuyo estudio es la llama Geometría Riemanniana[10].

Introduce el tensor de curvatura y demuestra que su anulación caracteriza a la geometría euclidiana, al menos localmente. Basándose en la idea y resultado de Riemann, hacia 1920 Einstein aborda, en su Teoría de la Relatividad general, la cuestión de la estructura geométrica del Universo.

En ella muestra cómo la geometría del espacio-tiempo tiene curvatura, que es precisamente el campo gravitatorio, y cómo, bajo la acción de la gravedad, los cuerpos, siguen las líneas rectas, geodésicas, de tal geometría.

[9] Hansen, V.L., The Magic World of Geometry - I. The Isoperimetric Problem, Elemente der Mathematic 49, (2), 61-65, (1994).

[10] Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.

Además, la ecuación de Einstein afirma que para cada observador la curvatura media del espacio coincide, salvo un factor constante, con la densidad de masa observada, dando cumplimiento así a la fantástica visión de Gauss: que la geometría desentrañada por los griegos es la estructura infinitesimal del espacio, y que estructura geométrica global tiene curvatura.

## 3.1 La controversia sobre el quinto postulado

En “Los Elementos” de Euclides hay un postulado que provocó la curiosidad de los matemáticos, llamado el postulado de las paralelas: "En el plano, dada una línea y un punto fuera de esta línea, existe exactamente una línea que pasa por ese punto que no interseca a la línea dada." Esta formulación es debida a Playfair en 1795 y es la más conocida de muchas formulaciones equivalentes.

En la actualidad la geometría utiliza métodos distintos al sintético, establecer una serie de axiomas y deducir de ellos las propiedades geométricas del objeto a estudiar, que han sido sustituidos por métodos topológicos, analíticos y algebraicos.

Cuando se estudia un espacio ya no resulta “interesante” saber si cumple o no, el quinto postulado de Euclides, aunque normalmente es un resultado que se obtiene fácilmente cómo consecuencia del estudio de otras propiedades más interesantes, en la actualidad, como es la de calcular el tensor curvatura del espacio en cuestión, indirectamente esto nos confirmará o no si el espacio cumple con el quinto postulado.

La cuestión sobre el quinto postulado ha quedado relegado a un problema histórico que ha contribuido enormemente al desarrollo de la geometría, pero que actualmente parece que ya no puede seguir contribuyendo en ese sentido, y es tomado como una cuestión secundaria en el estudio de la geometría de un espacio.

Alrededor de 1830 explotó la bomba, cuando el matemático Ruso Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) en 1829 y el matemático Húngaro János Bolyai (1802-1860) en 1832 publicaron independientemente que ellos habían podido construir geometría que satisficieron todos los postulados de la geometría euclidiana excepto por el postulado de las paralelas. Por lo que este postulado se ganó el estatus de un axioma que caracteriza a la geometría euclidiana.

De hecho, el gran matemático Alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) obtuvo resultados similares en 1816 pero mantuvo sus hallazgos en privado temiendo ser ridiculizado pues éstos se desviaban fuertemente del pensamiento filosófico de aquellos tiempos.

En una memoria de 1887, el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) describió un modelo concreto de una geometría No-Euclidiana en dos dimensiones, el plano hiperbólico; este modelo es conocido ahora como el disco de Poincaré[11].

Los puntos en el modelo de Poincaré del plano hiperbólico son los puntos dentro de un círculo, y las líneas son aquellos arcos circulares que se intersecan ortogonalmente con la frontera del círculo.

Se puede dotar al plano hiperbólico con una medida de longitud, de tal manera que ciertas distancias que resultan constantes en geometría Euclidiana, resultan infinitas cuando nos aproximamos a la frontera del círculo y son medidas por la distancia hiperbólica. Los ángulos son medidos por sus valores como ángulos Euclidianos.

Para la mentalidad contemporánea resulta difícil entender que se considerara polémico el quinto postulado.  Esto es así porque el enunciado que ha polularizado hasta sustituir al enunciado original es el de Tolomeo, “Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela”. Pero, aunque es equivalente, el enunciado original es el que dice: “Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectas, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectas.

[11] Hansen, V.L., The dawn of non-Euclidean geometry, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28,(1997).

El nacimiento de las geometría No-Euclidianas levantó la pregunta sobre cuál de las geometrías describe de la mejor manera posible el mundo físico. Debido a esto se inició uno de los períodos dorados en la interacción entre las matemáticas y la física, misma que en los inicios del siglo pasado guió hacia el desarrollo de la teoría de relatividad de Einstein, es posible presentar la construcción del plano hiperbólico en el nivel del nivel medio.

La presentación contiene muchos de las valiosas construcciones de la geometría euclidiana clásica tomando como punto de partida la construcción de inversiones sobre un círculo.

Este es un episodio muy importante de la historia de la geometría y proporciona una buena oportunidad para repensar el rol de los postulados de la geometría euclidiana pues contiene los dramas y sorpresas que pudieran esperarse en la presentación de una pieza de matemáticas. Seguramente al menos todos los profesores de matemáticas debieran saber sobre esto.

Es fácil emprender y estudiar los mosaicos del plano hiperbólico y probar que puede ser cubierto con n-ágonos regulares idénticos para todo entero. Este es un hecho sorprendente, en claro y agudo contraste con la geometría Euclidiana, donde sólo se puede cubrir el plano Euclidiano con n-ágonos regulares idénticos para n = 3, 4, 6.

## 3.2 Algunas formulaciones equivalentes del quinto postulado

- La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de las medidas de dos ángulos rectos. Elementos I. Proposición ya conocida en tiempos de Aristóteles.
- Las rectas paralelas son equidistantes, atribuido a Posidonio.
- Todos los puntos equidistantes de una línea recta, situados a un lado determinado de ella, constituyen una línea recta, Clavio (1574).
- Dos rectas paralelas guardan entre sí una distancia finita, Proclo.
- Las rectas no equidistantes convergen en una dirección y divergen en la opuesta, Thabit Qurra.
- Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela, Tolomeo. Ésta es, sin duda, la formulación más conocida del postulado. Tanto es así que es muy frecuente encontrar libros en los que se dice que es éste el quito postulado de Euclides.
- Sobre una recta finita siempre se puede construir un triángulo semejante a un triángulo dado, Wallis (1663).
- Existe un par de triángulos no congruentes, pero semejantes, Saccheri (1733).
- En todo cuadrilátero que contenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto, Clairaut (1741).
- Si “k” es un entero cualquiera, existe siempre un triángulo cuya área es mayor que “k”, Gauss (1799)

- Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos, Legendre (1824).
- Existe un triángulo en el cual la suma de sus tres ángulos vale dos rectos, Legendre.
- No hay patrón métrico absoluto de longitud, Gauss (1816)
- Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia, Bolyai.
- Dos rectas paralelas entre sí, están a distancia finita, Proclo.
- Existen dos triángulos no congruentes, con los ángulos de uno respectivamente iguales a los ángulos de otro, Laplace.

### 3.3 La independencia del quinto postulado

Unos veintidós siglos después de que se escribieran “Los Elementos”, por fin se llega a una conclusión: el quinto postulado es independiente de los otros cuatro. Y se llega a esta respuesta mediante un camino sorprendente.

La prueba de la independencia del quinto postulado lleva implícita la posibilidad de que existan geometrías en los que no se cumple este postulado. Desde el punto de vista lógico no hay contradicción ninguna en suponer que por un punto exterior a una recta puedan pasar más de una paralela a la recta, o incluso ninguna.

Parece difícil comprender esta afirmación, puesto que la experiencia común sabemos que, excepto errores de dibujo, el quinto postulado es cierto.  Para comprenderlo se debe hacer un esfuerzo de abstracción por intentar olvidar el significado intuitivo de qué es una recta y acudir únicamente a las definiciones de Euclides.

Según Euclides una línea es una longitud sin anchura (definición 2), una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella (definición 4), una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura (definición 5), una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ellas (definición 7), son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prologadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos (definición 23) y postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera (postulado 1).

De todas formas, dado que es más sencillo para el propósito, se considerará la definición dada por Arquímides den “Sobre la esfera y el cilindro”; la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos.

Ahora bien, excepto porque tenemos una noción de recta y de plano que nos permiten comprobar que esas nociones encajan en las definiciones dadas, estas son demasiado difusas desde el punto de vista lógico como para considerar que no puedan ser válidas otras interpretaciones.

Si se considera una superficie esférica y se le da la denominación de plano, encaja perfectamente en las definiciones de plano.  En este caso, una recta debería ser, el trozo de circunferencia máxima, es decir, una circunferencia que pasa por dos puntos diametralmente opuestos de la superficie esférica, que pasa por dos puntos dados.  En tal situación, por un punto exterior a una recta no pasaría ninguna recta paralela a la dada.

# 4. APARICIÓN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

El sentido de las geometrías no euclidianas solamente se puede captar si se entiende la evolución de las matemáticas. En particular el papel que jugaron y juegan esos términos que solemos llamar postulados o axiomas.

Kant fue el primero en concebir la posibilidad de una geometría diferente de la geometría clásica desarrollada por los griegos y expuesta por Euclides en la obra "Los Elementos", considera espacios de más de tres dimensiones y afirma:

"Una ciencia de todas estas posibles clases de espacio sería sin duda la empresa más elevada que un entendimiento finito podría acometer en el campo de la Geometría… Si es posible que existan extensiones con otras dimensiones, también es muy probable que Dios las haya traído a la existencia, porque Sus obras tienen toda la magnitud y variedad de que son capaces"[12].

[12] Carnaval Matemático, p.282

Esas posibles geometrías que Kant entrevé son las que se conocen como geometrías euclidianas de dimensión mayor que 3. Por otra parte, ya desde la antigüedad se consideró que el quinto postulado del libro de Euclides no era tan evidente como los otros cuatro, pues, al afirmas que ciertas rectas se cortarán al prolongarlas indefinidamente, habla de lo que ocurre en regiones infinitamente lejanas del Cosmos de las que no se tiene experiencia alguna.

Posiblemente Inmanuel Kant no conoció a Gerolamo Saccheri, un jesuita italiano nacido en 1667 que inventó, sin saberlo una geometría diferente a la de Euclides.

Pocos años después de la muerte de Newton, en 1733, cuando Kant era apenas un niño de 9 años, Saccheri llegaba al final de su vida publicando en Mildn un libro titulado “Euclides libre de todo defecto”.

El objetivo de Saccheri era todo lo contrario de lo que logró, se proponía fortalecer la geometría euclidiana tratando de reducir al absurdo las posibilidades de desarrollos geométricos alternativos. Los teoremas desarrollados por Saccheri son consistentes, carentes de contradicción y por ende, legítimos teoremas matemáticos.

En el siglo XIX se da conclusión al problema de la independencia del quinto postulado. Lo hacen de manera independiente Bolyai y Lobathcevsky, aunque Gauss ya había resuelto el problema con anterioridad, pero no había publicado sus resultados y la paternidad del descubrimiento fue para los otros dos geómetras.

La idea es muy simple: en Matemática no está permitido llegar a una contradicción, es decir, obtener un resultado que sea exactamente la negación de otro resultado. No puede obtenerse que partiendo de las mismas hipótesis sea cierto, a la vez, que: dos rectas se corten y que esas dos mismas rectas no se corten, por ejemplo. Se llegaría a la conclusión de que alguna de las hipótesis ha de ser falsa.

La idea que dio solución al problema es: si el quinto postulado depende de los otros cuatro, es que no nos hace falta incluirlo entre nuestras hipótesis, postulados. Así que en el desarrollo de la teoría, tarde o temprano, aparecerá en forma de teorema.

Ahora bien, si eliminamos dicho postulado y le añadimos su negación, de ser cierto que el postulado quinto depende de los otros, llegaremos a demostrarlo, y con ello tendremos que tanto una proposición, el quinto postulado, como su contraria, la negación del quinto postulado que ahora lo constituye, son ciertas.

Habremos pues llegado a una contradicción, algo que no es admisible. Alguna de las hipótesis tiene que ser falsa, y esta ha de ser la nueva que se ha introducido, pues es la única que choca contra nuestra intuición, las demás se sabe que son ciertas porque ya lo eran en la geometría de Euclides.

En contra de lo que pudiera pensarse, con este método no se llegó a contradicción alguna. Es más, se llegó a demostrar que las geometrías así obtenidas por Bolyai y por Lobatchevsky eran consistentes, no contenían contradicción lógica ninguna. Además hay diferentes formas de negar el quinto postulado, por un punto exterior a una recta no pasa una única recta paralela a la misma, y así diferentes geometrías no euclídeas, por ejemplo: si decimos que no pasa ninguna recta, se obtiene la geometría esférica, y si se dice que pasan infinitas se obtiene la geometría hiperbólica, la de Lobatchevsky.

La primera persona que desarrolló de manera consciente una geometría no euclidiana, como una nueva geometría, fue el matemático ruso Nicolai Ivanovic Lobatchevski, que en 1829 publicó un artículo que desplegaba una nueva geometría, siguiendo la misma dirección que había trabajado Saccheri un siglo antes, afirmando la pluralidad de paralelas por un punto exterior a una recta.

Casi simultáneamente, en 1832, pero independiente, Janos Bolyai escribió un apéndice al libro de su padre, Wolfgang Farkas Bolyai, con el título de “La ciencia absoluta del espacio”.

A esta geometría se le conoce como hiperbólica o geometría Bolyai-Lobatchevski en honor a los dos pioneros, pero en los 30 años del siglo XIX estos trabajos no tuvieron ninguna repercusión. Bolyai no volvió a escribir sobre el tema, en cambio el ruso siguió insistiendo el resto de su vida.

Esta convicción quedó confirmada a finales del siglo, cuando Beltrami demostró que la geometría hiperbólica coincide con la geometría intrínseca de cierta superficie y Klein dio la interpretación proyectiva de la geometría hiperbólica.

Ambos resultados prueban que la geometría hiperbólica es tan consistente como la geometría euclidiana, es decir, si la geometría hiperbólica lleva a alguna contradicción, entonces la geometría euclidiana también.

Félix Klein es la otra gran pieza clave de la geometría en siglo XIX. En 1871 descubrió que la geometría euclidiana y las no euclidianas pueden considerarse como casos particulares de la geometría de una superficie proyectiva con una sección cónica adjunta, y que la geometría euclidiana es consistente si y sólo si lo son las geometrías no euclidianas.

Con esto se da fin a la controversia de si las geometrías no euclidianas tienen sentido o no, aunque el asunto coleará aún unos años ante el excepticismo de ciertos elementos que considerarán erróneo el argumento de Klein.

Pero el aporte más importante a la geometría es su Programa de Erlangen, donde da una nueva definición de geometría. Ante la aparición de las nuevas geometrías no euclidianas, parece lógico preguntarse qué es la geometría, máxime cuando la propia idea de la geometría euclidiana se había visto modificada desde la irrupción de los métodos algebraicos y analíticos.

Empieza a no estar tan claro que la geometría sea el estudio de puntos, líneas (rectas o curvas) y superficies, puesto que el propio Análisis Matemático, sobretodo en el estudio de Ecuaciones Diferenciales, parece que también estudia tales objetos.

Por otra parte, los métodos analíticos y algebraicos también son aplicables a las geometrías no euclidianas y a la geometría euclidiana, por otro lado, la distinción entre el método sintético, el algebraico y el analítico.

## 4.1 Aplicaciones de la geometría no euclidiana

Los creadores de la geometría no euclidiana de la primera mitad del siglo XIX, a pesar de su obra capital, parecieran alejarse del concepto platónico que preside “Los Elementos” de Euclides, y vuelven a considerar la geometría como una ciencia destinada a medir las cosas de la tierra.

Se reconoce que el esfuerzo de Euclides por evitar el uso del quinto postulado y construir la geometría con independencia del mismo justifica la muy repetida frase de que Euclides fue el primer geómetra no euclidiano, o que la geometría no euclidiana nació negando su paternidad.

Al vislumbrar la posibilidad de geometrías distintas de la euclidiana, en lugar de adquirir el convencimiento de que el quinto postulado es indemostrable, y en consecuencia, existen otras geometrías igualmente verdaderas.

Mostraron una constante preocupación por averiguar experimentalmente, cuál era la verdadera geometría, la válida para la naturaleza.

¿Por qué los animales, los insectos, las plantas, los minerales, adoptan la forma que tienen? No todas las causas son explicables por la ciencia. Algunas preguntas sobre la forma han obtenido respuesta.

Por ejemplo, ¿por qué hay mamíferos de todos los tamaños, pero los insectos siempre son pequeños? Porque los insectos, pese a ser los seres vivos más exitosos de la Tierra, tienen en la forma de su organismo una limitante para su crecimiento. Su esqueleto externo, su sistema circulatorio abierto, las características de sus sistemas nervioso y respiratorio, no le permiten a su estructura sobrevivir con un mayor tamaño.

En cambio, los mamíferos contamos con un "diseño" interno más eficaz al momento de definir nuestros tamaños, los cuales no dependen ya de las formas de nuestros sistemas.

Sin embargo, hay otras preguntas que no han encontrado respuesta. ¿Por qué abundan en la naturaleza los espirales, o las formas pentagonales? Son interrogantes que plantean problemas no resueltos a los científicos, pese a que algunos han dado importantes pasos para su solución.

El naturalista, biólogo y matemático escocés D'Arcy Thompson (1860-1948) publicó en 1917 el libro "Sobre el Crecimiento y la Forma". En él, planteó que las formas de los seres vivos y de algunos fenómenos se deben a aspectos físicos de los procesos biológicos: las fuerzas que intervienen en ellos, y las propiedades físicas de la materia en cuestión.

De acuerdo a la teoría de Thompson, las fuerzas físicas son las que forman directamente a los organismos, y los ideales de la geometría euclidiana, predominan en las formas naturales, simplemente porque las "leyes naturales" favorecen la simplicidad como una óptima representación de esas fuerzas. Las formas ideales de la geometría ofrecen soluciones eficaces a problemas morfológicos. Así, el espiral que se repite en moluscos, cuernos de mamíferos y semillas de flores, es la manera más eficaz de agrupar, manteniendo la misma forma a medida que el tamaño aumenta.

Bien podemos decir entonces que las formas naturales no son caprichosas, sino, que buscan también la eficiencia. Las estrategias evolutivas favorecidas por las especies, se han basado en la adopción o preferencia de algunas formas funcionales: ciertas formas son más eficaces que otras para algunas funciones.

Descripciones no euclidianas del mundo físico, utilizadas en la teoría de la relatividad y en las investigaciones sobre fenómenos ópticos y sobre la propagación de ondas, se revelaron bastante adecuadas. Las nuevas geometrías colaboraron así mismo en la interpretación de modelos representativos de conceptos abstractos muy utilizados hoy en física y otras áreas de la ciencia.

Actualmente las geometrías no euclidianas aparecen vinculadas a trabajos de investigación concernientes a los más diversos campos de interés de la matemática, su utilidad es muy destacada en el estudio de variedades, superficies tridimensionales.

## 4.2 Clases de geometrías

Cada sistema axiomático determina una matemática, si se agrega mayor cantidad de axiomas, todos los teoremas válidos en la primera geometría valen también para la segunda, la que tiene los axiomas de la primera y otros más.

El conjunto forma un sistema del cual no se podría distraer o modificar una parte sin comprometer el todo. Así, los griegos razonaron con toda la exactitud posible en las matemáticas y dejaron al ser humano modelos del arte de demostrar. Con ellos, la geometría dejó de ser un colección de recetas prácticas, o cuando más, de enunciados empíricos, para llegar a ser una ciencia racional.

De ahí el papel pedagógico privilegiado que desde entonces no ha dejado de reconocérsele. Si se la hace estudiar a los niños, es menos para enseñar algunas verdades que para disciplinar el espíritu, considerando que su práctica da y desarrolla el hábito de razonamiento riguroso.

Los axiomas hasta aquí enunciados se encuentran en todas las geometrías, a pesar de que no siempre enunciados en la misma forma. A esta geometría se le llama geometría absoluta o geometría neutral.

Teniendo en cuenta más axiomas se obtienen otras geometrías, en las cuales todo lo mencionado anteriormente es válido. Si damos por cierto el axioma del paralelismo de Euclides, obtenemos la geometría euclidiana también conocida como geometría plana.

Agregando a estos los axiomas relativos al espacio, obtenemos:

- La geometría espacial, estos últimos no son más que extensiones de los axiomas relativos al plano.
- La geometría descriptiva, en la que se encarga de que los problemas posibilitar la resolución de los problemas de la geometría del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano.

Todos estos sistemas axiomáticos permiten definir segmentos y compararlos. Esto permite a su vez definir un patrón de medida y asignar una medida a los segmentos. Se llaman por tanto geometrías métricas. Existen sistemas de axiomas donde esto no es posible y se dice que son una geometría de incidencia.

Utilizando otros axiomas de paralelismo, distintos que el de Euclides, se obtienen las geometrías no euclidianas.

Finalmente, incluyendo un axioma que considere la existencia de los puntos del infinito obtenemos la geometría proyectiva.

Si bien las matemáticas no son reducibles a puras deducciones lógicas con base en axiomas, nadie puede negar que estos asuntos han sido y serán importantes para todas las dimensiones de las matemáticas. Y, por lo tanto, para su aprendizaje y enseñanza.

# 5. LA GEOMETRIA EN EL SISTEMA EDUCATIVO DE GUATEMALA

La matemática se ha desarrollado a través de milenios y tiene su origen en la necesidad de especificar cantidades y medir figuras, se caracteriza como un medio para describir los problemas del mundo real, descansa en la interacción entre lo concreto y lo abstracto. Las figuras como círculos, triángulos, cuadrados y espirales han sido formas presentes en la teoría matemática, en la naturaleza y en las construcciones humanas, es por ello la importancia del estudio y enseñanza de la misma.

La constitución de la geometría por Euclides, en un sistema de razonamientos a partir de unos principios fijos, que suponían verdaderos sin el soporte del razonamiento. Con ello la geometría experimento un cambio, y de no ser más que una masa de enunciados dispersos pasó a convertirse en un cuerpo unido de conocimientos, en que todas las partes guardaban mutua conexión.

Por obra de Euclides, la geometría fue considerada a través de los años como la rama más completa de la matemática, y se estimaba que su forma de deducción ofrecía el mejor método para lograr el verdadero conocimiento, y, parte de la religión, el conocimiento más alto[13].

[13] Senior Martínez, Jorge Enrique; Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia; Vol. 2; Fags. 45-63; 2001

## 5.1 Educación antes del nivel superior

La enseñanza de la geometría Euclidiana es importante desde los primeros grados del sistema educativo. Los niños debieran ser estimulados a estudiar figuras geométricas simples y explorar sus propiedades, de una forma apropiada no memorística.

En los primeros grados, la geometría euclidiana, debiera ser principalmente informal y explicativa, dejando su sistematización para grados posteriores. Más aún, en los grados posteriores, el estilo de enseñanza no debiera estar restringido al estilo sugerido por Euclides en “Los Elementos”.

En muchos países han desaparecido del programa las construcciones con regla y compás[14], no obstante ser una manera muy buena de aprender a analizar una situación como el primer paso, en un proceso matemático.

En el pasado se ha puesto en claro que ésta es una buena manera de crear interés por las matemáticas entre los niños dotados. Hacer una construcción elaborada es tanto creativo como inventivo.

[14] Revista Didáctica de las Matemáticas; estudio realizado por tres profesores del Instituto Superior Pedagógico “Conrado Benítez García”, Cuba, 2006

Si se quieren producir pequeños programas en la computadora para dibujar las figuras geométricas se requiere saber cómo construirlas. Lo importante de estas construcciones pudiera nuevamente resultar central el uso de la computadora como una herramienta para la enseñanza de la geometría elemental.

Nociones tales como semejanza, congruencia y simetría son fundamentales, para una gran cantidad de argumentos y aplicaciones matemáticas y debieran ser estudiados con cierto detalle. En niveles avanzados de estudio, tales nociones pertenecen a la geometría transformacional.

Los lados concreto y abstracto de la geometría no debieran ser formalizados y teorizados pero debieran ser experimentados durante la enseñanza y debieran ser desarrollados gradualmente en los alumnos. Al final, debiera emerger la diferencia entre una figura concreta y una forma abstracta. Las pruebas son útiles cuando actúan como explicaciones o revelan hechos sorprendentes que no pueden ser establecidos sólo por la "experimentación".

Se debe buscar pruebas que actuaran como explicaciones, algunas veces esto puede ser difícil. También se sabe que lo que es un hecho sorprendente para un niño puede no serlo para otro, considerando inteligencias múltiples, intereses distintos y bases no homogéneas en el proceso enseñanza-aprendizaje. Pero aún así, hay algunos hechos que son sorprendentes casi para cualquiera.

En el Boletín “Las matemáticas en la enseñanza media”, con el interés de conocer los factores que afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje, se presento el siguiente resumen con tres preguntas claves[15]:

1. ¿Porqué aspectos considera usted que la enseñanza de la geometría en el nivel medio o diversificado, resulta complicada? La geometría en los niveles previos al superior, resulta más complicada debido a:
    - No se le dedica el tiempo necesario.
    - En la matemática, el docente se centra en los temas de números y operaciones, sin desarrollar en el estudiante la habilidad y el conocimiento básico de la geometría.
    - Los libros de textos contemplan a la geometría como uno de los últimos conceptos.

2. ¿Cuáles son los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de la geometría en la matemática?
    - Una inadecuada utilización del libro de texto
    - Utilizar la historia como recurso
    - Relación de la geometría con las otras ramas de la matemática.
    - Interdisciplinaridad

[16] Boletín “Las matemáticas en la enseñanza media” No. 38; 2006; www.matemáticaparatodos.com

3. ¿Imparte usted matemática y/o geometría?, ¿Porqué?

El 40% de las personas que impartes matemática, no han estudiado pedagogía, y el 35% que sí ha estudiado pedagogía e imparte matemática, no le gusta esa materia, y el argumento de mayor dominio: "*Porque no me gusta la matemática, estudie para magisterio*"

Es bien sabido que los profesores tienden a reproducir en su profesión los mismos modelos que ellos experimentaron cuando fueron estudiantes, a pesar de que posteriormente han sido expuestos a diferentes puntos de vista. ¿Cómo es entonces posible motivar la necesidad de cambios en la perspectiva de enseñanza de la geometría, tanto del punto de vista de los contenidos como el metodológico?

Cualquier tópico en geometría puede ser localizado entre los extremos de una aproximación "intuitiva" y una aproximación "formal" o "axiomática" [16]. Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas.

[16] Mendía Alarcón, Oscar Herbert; Matemáticas y Modelos; Facultad de Ingeniería –USAC-

Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos en estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos geométricos.

Para poder transmitir geometría el docente debe de conocer lo que es geometría, una adecuada capacitación y actualización, con las metodologías y estrategias de enseñanza-aprendizaje, contribuyen a una adecuada educación.

Una de las componentes esenciales de un proceso eficiente de enseñanza - aprendizaje, es la buena preparación de los profesores, en lo que concierne tanto a competencias disciplinares y educativas, epistemológicas, tecnológicas y aspectos sociales.

Una tarea fundamental que se plantea la pedagogía moderna consiste en solucionar la contradicción existente entre el volumen creciente de la información didáctica y científica que deben asimilar los estudiantes de una parte, y la duración limitada, de los períodos de aprendizaje, con los requerimientos de masificación en la enseñanza y el nivel de calidad a alcanzar en la formación de graduados, por la otra.

Una de las vías más racionales en la eliminación de esta contradicción radica en, la intensificación del proceso docente-educativo, elevando su eficiencia y calidad mediante la aplicación de medios y métodos que promuevan las actividades cognoscitivas y creadoras de los estudiantes.

Se puede utilizar la tecnología de apoyo para el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría elemental, utilizando la computadora para dibujar figuras geométricas. Si se quieren producir pequeños programas en la computadora para dibujar figuras geométricas se requiere saber cómo construirlas.

El sistema educativo afecta la enseñanza[17] de las geometrías, encerrado en tres causas básicas: opción ideológica, ignorancia y omisión consciente.

Dentro de la opción ideológica se considera la política educativa del Estado, que es la que determina cuáles son los temas relevantes y cuáles ni siquiera deben ser considerados, cristalizándolos en los distintos diseños curriculares a través de los denominados contenidos mínimos o contenidos básicos comunes,

Decisiones personales del docente, cuando la ideología del docente determina cuáles son los temas que él no tratara con los alumnos. Cada vez que un tema se presenta como controversia, el camino elegido es la omisión.

[17] Prado, Ana María, corresponsal; El Progreso (Cerigua); La Hora, Lunes 20 enero 2003

La ignorancia, el maestro no enseña porque no lo sabe. El maestro estudia magisterio en su mayor porcentaje porque "no hay matemática", o por lo menos es la carrera que menos matemática tiene en su red curricular.

Y la omisión consciente, por razones pedagógicas, psicológicas o didácticas que obligan a ciertas omisiones, en función del escaso tiempo entre otras circunstancias. Todo lo anterior ha contribuido a una educación deficiente en las diferentes geometrías.

El sistema educativo de Guatemala, contiene la enseñanza-aprendizaje de la geometría euclidiana desde el nivel primario[18], profundizando estos conocimientos en el nivel básico y diversificado, para poder tener una base sólida para la educación superior sobre las diferentes geometrías.

En primero primaria, se busca ampliar la experiencia personal a través de la exploración y conocimiento de figuras y cuerpos geométricos. Se busca establecer la diferencia entre líneas rectas y curvas, y entre figuras abiertas y cerradas, asociar formas y cuerpos geométricos con objetos reales e identificar y describir triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos.

[18] Currículum Nacional Base, para la formación inicial de docentes de nivel primario; Dirección de Calidad y Desarrollo Educativo DICADE; Guatemala, Guatemala; consultado en mayo 2007; disponible en www.mineduc.gob.gt

Segundo primaria, el propósito es comprender el concepto de las figuras geométricas, a través del descubrimiento de los elementos que las forman. Por medio de: trazar segmentos de rectas horizontales, verticales o inclinados, identificar y describir figuras y cuerpos geométricos, identificar rectángulos y cuadrados y trazar cuadriláteros y triángulos.

En tercero primaria, busca que se comprendan conceptos básicos relacionados con sólidos geométricos y figuras geométricas planas. Comprender el concepto de ángulos y su clasificación, y profundizar conocimientos sobre triángulos.

En cuarto primaria, se consolidan los conocimientos de: ángulos, triángulos, líneas, cuadriláteros, y se inicia con áreas. En quinto primaria, se repasan: ángulos, perímetro y área, el círculo, polígonos y se inicia los sólidos geométricos y área de polígonos. Polígonos y círculos, sólidos geométricos, área y volumen de sólidos, son los temas a impartir en sexto primaria.

El Ministerio de Educación ha estado implementando en los últimos años mejoras al sistema educativo, prueba de ello, son las evaluaciones que se hicieron en el año 2006 para verificar el nivel de los docentes en el nivel primario y básico.

Y considerando que la educación es uno de los factores decisivos para el progreso de los pueblos y una herramienta para la paz y la armonía social, desde los acuerdos de paz se inicio una evaluación al sistema educativo guatemalteco. Pero, según un estudio realizado por la Fundación Centroamericana de Desarrollo (Funcede), la investigación[19], que fue presentada recientemente en el municipio de Guastatoya, cuyo contenido se relaciona con la realidad de El Progreso, Izabal, Zacapa y Chiquimula, indica que la información educativa que se difunde en Guatemala, generalmente desagrega al departamental, lo que no permite apreciar lo que sucede en cada uno de los municipios y sus comunidades, en donde se desarrollan las enseñanzas.

Según el documento, la Reforma Educativa que se impulsa en este país a partir de los Acuerdos de Paz, conlleva transformaciones profundas en el sistema educativo nacional, en donde la participación de las comunidades y de los gobiernos municipales es trascendental para lograr los cambios esperados.

Agrega que los indicadores educativos de Guatemala se comparan desfavorablemente con el resto de América Latina[20], por lo que existe consenso en la sociedad en cuanto a la importancia que tiene la educación para el progreso de los guatemaltecos.

[19] Prado, Ana María, corresponsal; El Progreso (Cerigua); La Hora, Lunes 20 enero 2003

[20] Prado, Ana María, corresponsal; El Progreso (Cerigua); La Hora, Lunes 20 enero 2003

Finalmente, indica que los esfuerzos que se hacen para mejorar la enseñanza, son insuficientes, por lo que se requiere trabajos adicionales para lograr revertir una situación de rezago, bajo la premisa de que la educación es una tarea de todos y es una obligación social.

## 5.2 Educación superior

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática aparece una de las debilidades el estudio de la geometría del espacio, limitado entre otros aspectos por la motivación en el aprendizaje de esta materia.

Por otra parte, el uso de los ordenadores personales en la enseñanza se hace cada vez más necesario vinculado al creciente auge de las nuevas tecnologías.

Por otra parte, se tiene que la geometría, rama de la matemática que está presente en casi la totalidad de los diseños curriculares del sistema educativo de Guatemala[21], se inserta en el quehacer diario de las personas, la utilización de los medios de enseñanza es una herramienta cuyo uso se hace necesario para la explicación de varios contenidos, particularmente los que corresponden a la geometría del espacio, cuyos cuerpos tridimensionales sufren ciertas deformaciones al transferirlos al plano; constituyendo este uno de los aspectos más engorrosos para el estudiante, según la experiencia profesional.

Los ordenadores también pueden ser usados para obtener un entendimiento más profundo de las estructuras geométricas gracias al software especialmente diseñado para fines didácticos.

[21] Artículo “Estándares Educativos” consultado el 05 julio 2007, disponible en ww.minieduc.edu.gt

Los ejemplos incluyen la posibilidad de simular las construcciones tradicionales con regla y compás, o la posibilidad de mover los elementos básicos de una configuración sobre la pantalla mientras se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes, lo cual puede conducir a una representación dinámica de objetos geométricos y favorecer la identificación de sus invariantes. Es ampliamente aceptada la importancia de la visualización en la comprensión de los conceptos matemáticos y de ahí el interés de desarrollar cada vez mejores herramientas gráficas.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría a nivel superior es interesante la realización de movimientos y giros para la comprensión de ciertas propiedades que se cumplen en las figuras planas y espaciales, con el uso del ordenador se logran estos como de manera real, los que en su mayoría no pueden realizarse con esa rapidez y rigurosidad en el cuaderno o en la pizarra. Además los trazados e imágenes se presentan con una limpieza extraordinaria, con exactitud y precisión atendiendo a los diferentes grosores de línea a utilizar.

En la geometría, a nivel superior, el desarrollo de la imaginación espacial es determinante en la comprensión, asimilación y solidez de los conocimientos, Internet es un buen entrenador para la imaginación a través de la abstracción en las representaciones que se confeccionan o que ya están diseñadas.

A nivel superior, todas las deficiencias de la educación anterior, hacen presencia y generan limitaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante tiene formada la idea de que la matemática es difícil, incluso es el estudiante el que elige una carrera que no tenga mucho que ver con matemática.

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, en Matemática Básica 1, se imparte una unidad exclusivamente para geometría, como reforzamiento de los conocimientos básicos que el estudiante debe tener. No por ello, la geometría se queda olvidada en el desarrollo de los demás cursos.

Y el porcentaje de aprobación[22] de esa unidad no supera ni el 10% del total de estudiantes de Matemática Básica 1 (véase ANEXO II), y son estudiantes que han aprobado un examen de admisión, en este resumen estadístico se presenta el número de estudiantes asignados en el curso, número de estudiantes que se examinaron para el parcial que se enfoca en geometría, y el porcentaje de aprobación, entre otros.

Si se sabe que los estudiantes que aprobaron el examen de admisión tienen dificultades con la geometría, se podría inferir que los estudiantes que no aprobaron el examen de admisión, tienen un menor nivel de matemática, y por supuesto esto conlleva en parte la geometría.

[22] Resumen estadístico, Matemática Básica 1; Depto. Matemática; Fac. Ingeniería USAC; 2007

Es importante que se continúen las reformas en el sistema educativo, para evitar o reducir al máximo las deficiencias del proceso enseñanza-aprendizaje y de esta manera poder garantizar profesionales de calidad, y por lo tanto recurso humano en beneficio del aumento de la productividad de nuestro país.

La motivación en el estudiante es un factor importante, desde los primeros años, el trabajo de un docente es más complejo que el de un médico, ya que el médico realizar una mala práctica y su paciente deja de existir, pero un docente, realiza una práctica inadecuada y marca al ser humano de por vida y probablemente esto repercute en generaciones futura si el estudiante decide dedicarse a la docencia.

# CONCLUSIÓN

La geometría como un marco de trabajo para la descripción y medida de las figuras fue desarrollada empíricamente en muchas culturas hace varios miles de años. La geometría como una ciencia que compila una colección de proposiciones abstractas acerca de formas ideales y pruebas de estas proposiciones, fue fundada alrededor de los 600 años a.C. en la cultura griega por Thales, quién de acuerdo a la leyenda propuso varios teoremas en geometría.

En primer lugar la geometría clásica griega ha sobrevivido a través de los famosos trece libros escritos por Euclides alrededor de 300 a.C. conocidos como “Los Elementos” de Euclides. En estos libros el conocimiento matemático, en particular el geométrico, es resumido por los griegos en el tiempo de Euclides y fue sistematizado de tal manera que su exposición, desde entonces, puso un sello a los escritos matemáticos.

La geometría euclidiana es aquella que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. En ocasiones los matemáticos usan el término para englobar geometrías de dimensiones superiores con propiedades similares. Sin embargo, con frecuencia, geometría euclidiana es sinónimo de geometría plana.

Las formas ideales de la geometría ofrecen soluciones eficaces a problemas morfológicos. Así, el espiral que se repite en moluscos, cuernos de mamíferos y semillas de flores, es la manera más eficaz de agrupar, manteniendo la misma forma a medida que el tamaño aumenta. Entonces, las formas naturales no son caprichosas, sino que buscan también la eficiencia. Las estrategias evolutivas favorecidas por las especies, se han basado en la adopción o preferencia de algunas forman funcionales, ciertas formas son más eficaces que otras para algunas funciones.

La geometría es la matemática que estudia idealizaciones del espacio: los puntos, las rectas, los planos y otros elementos conceptos derivados de ellos, como polígonos o poliedros. Y se utiliza para solucionar problemas concretos en el mundo visible y es la justificación teórica de varios instrumentos.

En el sistema educativo de Guatemala se tienen consideradas las enseñanzas de la geometría desde la primaria, aunque el tiempo es un factor limitante en el desarrollo de dicho conocimiento, así como la empatía de los docentes a la matemática.

La mayoría de los estudiantes de magisterio no tienen bases sólidas de la matemática, en ciertos casos de la geometría, lo que impide poder transmitir dicho conocimiento a las nuevas generaciones.

La geometría en el sistema educativo de Guatemala, necesita fortalecimiento, de hecho es urgente aplicar medidas inmediatas en todo el sistema educativo, para reducir y/o eliminar las deficiencias existentes en el proceso enseñanza-aprendizaje para proporcionarle a todo estudiante la misma oportunidad en el nivel superior, debe de existir homogeneidad en la educación, para que nuestros futuros profesionales puedan desempeñarse en cualquier ámbito y país.

El papel del docente en el sistema educativo de Guatemala, es importante, si hace falta preparación es necesario buscar ayuda, como docentes hay que aprender a desaprender malos hábitos y conductas, para poder aprender en forma constructiva y lograr sistematizar el proceso enseñanza-aprendizaje. Si un docente no domina la materia de nada sirve que imparta diez veces el mismo tema, de igual manera el estudiante no logrará conceptualizar, así como un erudito sin dominio didáctico.

La educación contribuye al desarrollo de un pueblo, el docente debe velar por una educación de calidad, y de esta manera contribuir al desarrollo de nuestro país, de lo contrario, cuál sería el papel del educador.

# BIBLIOGRAFÍA


1. Artículo "Estándares Educativos" consultado el 05 julio 2007, disponible en ww.minieduc.edu.gt
2. Boletín "Las matemáticas en la enseñanza media" No. 38; 2006; www.matemáticaparatodos.com
3. Currículum Nacional Base, para la formación inicial de docentes de nivel primario; Dirección de Calidad y Desarrollo Educativo DICADE; Guatemala, Guatemala; consultado en mayo 2007; disponible en www.mineduc.gob.gt
4. Hansen, V.L., Geometry in Nature, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Mass., U.S.A., 1993.
5. Hansen, V.L., The Magic World of Geometry - I. The Isoperimetric Problem, Elemente der Mathematic 49, (2), 61-65, (1994).
6. Hansen, V.L., The dawn of non-Euclidean geometry, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28, (1), 3-23, (1997). 1985.
7. Imposibility Theorems, Scientific American, January 2000, p.80
8. Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.
9. Matemáticas e imaginación, pp.74 y ss
10. Men of mathematics, pp.31-32; Vidas paralelas, tomo 2, p.85.

11. Mendía Alarcón, Oscar Herbert; Matemáticas y Modelos; Facultad de Ingeniería –USAC-
12. Programa del curso de Matemática Básica 1 y Matemática Intermedia II; Departamento de Matemática; Facultad de Ingeniería USAC; primer semestre 2007
13. Prado, Ana María, corresponsal; El Progreso (Cerigua); La Hora, Lunes 20 enero 2003
14. Resumen estadístico, segundo examen parcial de Matemática Básica 1; Depto. de Matemática; Fac. de Ingeniería USAC; primer semestre 2007
15. Revista Didáctica de las Matemáticas; estudio realizado por tres profesores del Instituto Superior Pedagógico “Conrado Benítez García”, Cuba, 2006
16. Senior Martínez, Jorge Enrique; Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia; Vol. 2; Fags. 45-63; 2001
17. Stillwell, J., Mathematics and Its History, Springer, 1989.

ANEXO

# *RESUMEN ESTADISTICO*

## *MATEMATICA BASICA I*

### *PRIMER SEMESTRE 2007*

| | |
|---|---|
| Inscritos | 2020 |

| | |
|---|---|
| Examinados | **1743** |
| Aprobados | **169** |
| Reprobados | **1574** |
| Ausentes | **277** |
| **% Apro/exam** | **9.7** |
| % Repro/exam | **90.3** |
| % Apro/ ins | **8.37** |
| % Repro/ ins | **77.92** |
| % Aus/ ins | **13.71** |