Carlos Augusto Morales Santacruz

LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA

Asesor: Dr. Eduardo José Blandón Ruiz

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Humanidades
Departamento de Postgrado
Maestría en Investigación

Guatemala, Febrero de 2008

La presente investigación fue presentada por el autor, como requisito previo a optar el Grado Académico de Maestría en Investigación

Esta tesis es dedicada a:

mi linda esposa Luvia Estela,

mi hija Luvia Gabriela que es la niña de mis ojos,

mi bebé que nacerá en noviembre o diciembre del 2008

ÍNDICE

CAPITULO TRES

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación está formado básicamente por dos partes. La primera parte es una investigación de naturaleza bibliográfica sobre los elementos esenciales a considerar en los métodos de demostración usuales en matemáticas, empezando por una breve descripción histórica del origen y desarrollo de la matemática como ciencia deductiva y posteriormente elementos metateóricos pertenecientes a la metamatemática como son los sistemas axiomáticos formales estudiados exclusivamente en su dimensión sintáctica, sin interpretación, en otras palabras, la exclusión de la dimensión semántica.

En la segunda parte se tiene una selección y construcción de demostraciones en matemáticas de un nivel adecuado para la mayoría de lectores intentando mostrar la belleza y poder de la matemática deductiva. Algunas de las demostraciones en esta segunda parte son construidas por el autor, mientras que otras son demostraciones clásicas que aparecen en la literatura usual.

Las demostraciones realizadas pertenecen a diferentes tópicos realmente atractivos de la matemática como: Cálculo, Aritmética, Teoría de conjuntos, entre otros. Pero no solamente es una exposición formal de las demostraciones sino que es una exposición en un lenguaje asequible, mostrando cuando corresponda, procesos heurísticos que conducen a la formulación de conjeturas matemáticas transformables en teoremas y su relación con otros tópicos matemáticos que generalmente son de un nivel superior.

Es la matemática la ciencia deductiva por excelencia y no es aceptada una conjetura como verdadera hasta que es construida formalmente su demostración. El matemático profesional demuestra con naturalidad y facilidad, un proceso que fuera de la comunidad de matemáticos se podría considerar innecesario o excesivamente complicado y no plenamente comprensible debido a varios factores, como por ejemplo: notación matemática, contenido y nivel matemático, condensación de la secuencia de proposiciones y resultados, lenguaje y metalenguaje matemático empleado, **desconocimiento o no especificación del método de demostración empleado**, entre otros.

Para demostrar una proposición se necesita básicamente un conjunto de hipótesis, definiciones, transformación de fórmulas que son reglas de inferencia o deducción de naturaleza sintáctica, y otros resultados demostrados con anterioridad o que son considerados axiomáticamente verdaderos.

Los matemáticos en la redacción final de una demostración, por razones absolutamente válidas generalmente no hacen referencia a todos los elementos previos involucrados en la construcción de una conjetura demostrable, como por ejemplo la heurística o algunos procesos inductivos e intuitivos. El príncipe de los matemáticos Karl Gauss afirmaba respecto de sus demostraciones *"cuando se construye un edificio no se dejan los andamios"*, teniéndose como consecuencia que algunas demostraciones podrían resultar hasta cierto grado artificiosas.

Esta obra no solamente es una recopilación de los métodos de demostración, su principal propósito es mostrar una descripción adecuada de los fundamentos de los métodos de demostración clásicos en matemáticas proveyendo ejemplos de los mismos en demostraciones de diferente nivel matemático con explicaciones de sus componentes teóricas (matemática) y metateóricas (metamatemática).

Al estudiar la matemática es indispensable conocer las partes esenciales de su historia, por lo que en el capitulo uno se tiene una descripción histórica de los fundamentos de la matemática, específicamente como se desarrollo el concepto de sistema axiomático formal a lo largo de más de 2000 años, iniciando en la antigua Grecia hasta la actualidad considerando exclusivamente, sin una masa de detalles innecesarios, los puntos sobresalientes en beneficio de la naturaleza de un trabajo de esta categoría.

En el capitulo dos se estudian la matemática como ciencia deductiva con énfasis en los sistemas axiomáticos formales, se tiene su definición formal y se dan importantes ejemplos de teorías metamatemáticas axiomatizadas en su carácter sintáctico como son la lógica proposicional y la lógica de primer orden que constituyen el fundamento lógico de una inmensa parte de teorías matemáticas precisamente las llamadas teorías de primer orden.

Los métodos de demostración son tratados en el capitulo tres donde se construyen ejemplos adecuados didácticamente para la comprensión de los esquemas o métodos de demostración. Algunas demostraciones son clásicas y la mayoría son realizadas o redescubiertas por el autor.

Los métodos de demostración estudiados son: Método directo, Método de demostración por reducción al absurdo, método de demostración por contrapositiva y el método de demostración por el principio de inducción matemática. No es una selección exhaustiva de los métodos de demostración, puesto que existen otros métodos que no son estudiados aquí, como por ejemplo el principio de inducción matemático transfinito.

Finalmente se tienen expectativas y conclusiones de la teoría expuesta, así como también algunos elementos en el ámbito guatemalteco relacionados con este trabajo. Son mencionadas aquí las líneas de investigación, es decir, la extensión, relación o aplicación de esta investigación en áreas científicas de diferente naturaleza

CAPITULO UNO

HISTORIA DE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

1.1 ORÍGENES DE LAS MATEMÁTICAS

Antes del año 600 a.C., existieron culturas ciertamente desarrolladas siendo previas a la cultura Griega asentadas en el antiguo Egipto y Mesopotamia donde existía indudablemente una matemática significativamente desarrollada como se observa en antiguos papiros egipcios y en cientos de tablillas de arcilla babilónicas que contienen, entre otros temas: noción de número entero, manejo de números fraccionarios, abundantes ideas de aritmética, álgebra, proporciones, fórmulas geométricas de área y volumen.

Esta magnifica matemática "empírica" en el sentido estricto de que no aparece ninguna demostración o deducción matemática general, fue aplicada ampliamente por ambas culturas en diversidad de campos como: economía, agricultura, astronomía, ingeniería, arquitectura así como en la construcción de templos y pirámides.

A pesar del carácter puramente empírico de las matemáticas egipcias y babilónicas no son totalmente descartados sus encadenamientos lógicos mínimos realizados de una forma no enteramente consciente[1] y sus conocimientos de alguna aplicación general como sucedió con el famoso teorema de Pitágoras[2].

[1] Bourbaki, N., *Elementos de historia de las matemáticas*. página 14
[2] Crespo, C., R. *El papel de las argumentaciones en matemáticas en el discurso escolar*. página 45

Ni babilonios ni egipcios se interesaron especialmente por demostrar, fundamentar o generalizar sistemáticamente sus conocimientos matemáticos que cultivaron durante siglos, sólo se interesaban por la resolución de problemas prácticos, mientras que en la Grecia clásica en el periodo de 600 a.C. hasta 300 a.C. aproximadamente, los griegos centran su intereses en la razón humana, en su aplicación y poder, con los griegos, la razón empieza a reemplazar a leyendas y mitos como explicación del universo y transciende como facultad distintiva del ser humano, en palabras de Aristóteles de Estagira: *Así para el hombre es la vida de acuerdo con la razón, ya que ésta es la que lo hace hombre.*

Los griegos fundamentando sus conocimientos en la razón perfeccionaron ciertas disciplinas y crearon otras completamente nuevas como por ejemplo: Filosofía, ciencias puras, ciencias aplicadas, instituciones políticas, formas literarias y escritos históricos. La meditación filosófica y científica juntamente con la pasión por la vida pública eran parte esencial del alma de la cultura griega.

Específicamente en matemáticas, los griegos conociendo plenamente la matemática egipcia y también babilónica no desarrollan el mismo empirismo sino que desarrollan la abstracción, generalización, sistematización y argumentación, constituyéndose en los fundadores de las matemáticas en sentido estricto. Indudablemente la matemática como ciencia es creada en la Grecia clásica.

1.2 HISTORIA DE LOS MÉTODOS DEDUCTIVOS EN MATEMÁTICAS

En general, es aceptado por la comunidad de matemáticos, filósofos e historiadores entre otros especialistas, que los griegos revolucionaron la naturaleza de la matemática al crear el método deductivo o método axiomático.

En el siglo IV a.C. surgiendo de la praxis de la academia platónica, se tiene la monumental obra de Aristóteles, discípulo de Platón, que consiste en la primera construcción de los fundamentos de la Lógica como la ciencia formal del razonamiento, el propio filosofo consciente de la magnitud de su obra, escribe en sus *Tópicos*:

Mas de la presente doctrina no había hasta ahora algo elaborado ya y otra parte todavía sin elaborar, sino que hasta el presente no existía en absoluto nada de ella[3]*.*

Por otra parte y casi al mismo tiempo pero en forma completamente diferente entre los siglos IV y III a.C., los filósofos Megáricos y Estoicos entre los que sobresale Crisipo de Solos, definen por primera vez los elementos de la lógica proposicional como los conectivos lógicos y formas de razonamientos que tienen la forma de argumentos como el Modus Ponens, asentados como los “indemostrables” .

En efecto, antes de la lógica aristotélica no se conoce una teoría elaborada de las reglas y leyes lógicas aunque se tuviese y aplicase una estructura lógica implícita en las deducciones y argumentaciones correctas de matemáticos y filósofos griegos antecesores de Aristóteles. El mismo Aristóteles menciona al matemático y filosofo griego Zenón de Elea discípulo de Parménides como el “fundador de la Dialéctica”, obviamente Zenón no podía enunciar sus famosas paradojas sin conocimiento de algunos principios lógicos. A Zenón se le atribuye la invención del método de demostración indirecto llamado *reducción al absurdo* en el siglo V a.C. al contrastar una hipótesis con otra y demostrar indirectamente la verdad de una de ellas por la obtención de una contradicción. En general, los matemáticos griegos razonaban de modo perfectamente correcto antes de Aristóteles; de hecho, su trabajo era el modelo tradicional de razonamiento correcto.

[3] Bochénski, I.M., *Historia de la lógica formal.* pagina 41

Entre las leyes o principios fundamentales formulados por Aristóteles se tienen:

- Principio de no contradicción: una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa

- Principio del tercero excluido: toda proposición es verdadera o es falsa.

Ambos principios constituyen el fundamento lógico de los métodos de demostración indirectos. La teoría de la demostración o razonamiento científico aparece en la obra aristotélica intitulada *Segundos analíticos* donde se desarrolla el método axiomático o método deductivo, afirmando que es el método sobre todo adecuado para la matemática. En los *Primeros analíticos* Aristóteles realiza el análisis formal del razonamiento o silogismo[4].

Es precisamente el geómetra griego Euclides de Alejandría, que recopilando las ideas y conocimiento matemático de su época, aplica magistralmente la lógica aristotélica en su monumental obra intitulada *Elementos* donde muestra por primera vez a la matemática como la ciencia deductiva por excelencia en el siglo III a.C.

El valor esencial de la obra de Euclides es su rigurosa deducción sistematizada mostrando componentes de una ciencia demostrativa como: ***definiciones*** de conceptos, ***principios generales o axiomas*** que son nociones comunes y ***postulados*** que son reglas técnicas de construcción geométrica entre las que se encuentra el famoso Quinto postulado de Euclides.

[4] Garrido, M., Lógica simbólica. página 502

Una de las demostraciones clásicas por reducción al absurdo más bellas[5] de la matemática mencionada varias veces por Aristóteles es: $\sqrt{2}$ es irracional, apareciendo en algunas versiones de los *Elementos* de Euclides como proposición 117 del libro X y es atribuida por algunos autores a la escuela pitagórica constituyéndose como un teorema de teoría de números.

Naturalmente que los *Elementos* de Euclides poseen limitaciones de diferente naturaleza y han recibido serias objeciones clásicas al respecto pero indudablemente forman el primer sistema axiomático formal de matemáticas y han servido como un modelo para el trabajo de generaciones de matemáticos, dominando la enseñanza de las matemáticas por más de 2000 años.

1.3 DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA DEDUCTIVA

Cuando se estudia el desarrollo de los métodos deductivos es estrictamente necesario considerar la historia y desarrollo de la lógica como una parte esencial de los fundamentos de la matemática. Iniciando con la lógica clásica o también llamada lógica tradicional formulada por Aristóteles, ésta se mantuvo en esencia, casi sin modificaciones, durante siglos y los "silogismos" que son principios lógicos básicos aristotélicos fueron empleados y enseñados desde la Edad Media hasta principios del siglo XX como parte del *trivium (gramática, retórica y dialéctica)*. Como afirmaba Kant en 1787

"*desde Aristóteles no ha tenido que dar un paso atrás ni tampoco hasta ahora ha podido dar un paso adelante. Así pues, según toda apariencia hallase conclusa y perfecta*"[6]

---

[5] Bourbaki, N., *Elementos de historia de las matemáticas*. página 14

[6] Bochénski, I.M., *Historia de la lógica formal.* pagina 15

Pero 50 años después fue desarrollada una teoría matemática revolucionaria iniciada por George Boole y otros, al crear versiones algebraicas de la lógica debido a las evidentes limitaciones de la lógica tradicional, posteriormente Gottlob Frege en 1879 desarrolla la lógica cuantificada construyendo los cimientos de la lógica moderna aunque el lógico matemático y filósofo Bertrand Russell mostraba que su sistema era inconsistente, es decir, dotado de contradicción.

En 1901 cuando el logicista B. Russell trata de deducir la matemática de la lógica descubre la *paradoja de Russell,* que provocó una crisis en los fundamentos de la matemática quedando resuelta a inicios del siglo XX **con la lógica de primer orden que constituye en la actualidad uno de los principales fundamentos de las matemáticas modernas.**

Las limitaciones de la lógica de primer orden debido a su gran poder, fueron descubiertas alrededor de 1930 por Kurt Gödel, Alan Turing y Alonzo Church, entre otros, siendo Kurt Gödel quien construyo un sistema deductivo completo y correcto de la lógica de primer orden. Alfred Tarski dota a la lógica de primer orden de una semántica formal y a partir de 1934 Gerhard Gentzen y otros desarrollaron la teoría de la prueba o de la demostración como también la deducción natural, desde entonces la lógica de primer orden toma su forma actual.

Subordinando la lógica al lenguaje matemático, es decir la matematizacion de la lógica modernamente se nombra como “lógica simbólica” o “lógica matemática” desde 1904. En la actualidad la lógica matemática cumple una importante función en diferentes áreas, especialmente en ciencias de la computación.

Las lógicas no clásicas se obtienen excluyendo el principio aristotélico del tercero excluido y se han construido a partir de 1920-1921 por obra de Jan Lukasiewicz y Emil Post, entre otros.

1.3.1 ESCUELAS FILOSÓFICAS

Con el descubrimiento de la *paradoja de Russell* en 1901 se produce una crisis de los fundamentos de las matemáticas provocando diversas polémicas entre matemáticos, lógicos, filósofos y lingüistas teniendo como consecuencia la creación de las tres corrientes filosóficas[7] contemporáneas de las matemáticas: Intuicionismo, Logicismo y Formalismo, descritas así:

Intuicionismo

El intuicionismo afirma que la matemática se fundamenta en ciertas intuiciones fundamentales y conceptualmente se origina con Kant. Hablar de intuicionismo es hablar de constructivismo, puesto que en esta corriente filosófica la matemática se genera a través de métodos constructivos finitos. En el intuicionismo se excluye el principio aristotélico del tercero excluido por lo que la negación de una proposición sea falsa no significa que la proposición sea verdadera por lo que las demostraciones por reducción al absurdo son rechazadas. El máximo exponente del intuicionismo fue el matemático holandés Brouwer

Logicismo

Se origina al final del siglo XIX con Dedekind y Frege buscando básicamente la fundamentacion del análisis en la aritmética y por ende en la lógica. Los logicistas fueron dirigidos por Russell y Whitehead considerando a la matemática como una

[7] Bochénski, I.M., *Historia de la lógica formal.* páginas 301 a 307

rama de la lógica. Con los logicistas la matemática pierde su autonomía puesto que el programa de Russell pretendía reconstruir toda la matemática clásica a partir de una base puramente lógica, de modo que todas las definiciones matemáticas, reglas de inferencia y sustitución puedan ser reducidas a sus contrapartes lógicas. El programa de Russell es expuesto en su obra Principia Matemática (1910-1913)

Formalismo

El famoso matemático D. Hilbert funda la corriente filosófica del formalismo a inicios del siglo XX al perfeccionar las ideas subyacentes en la axiomática de los Elementos de Euclides, para el formalismo, la matemática es un conjunto de sistemas formales constituido por su propia lógica, axiomas, teoremas, definiciones y reglas de inferencia. Hilbert creó una disciplina llamada metamatemática y pretendía en su programa expuesto en 1900 demostrar que en la matemática no hay contradicciones, es decir, que es consistente y que la matemática es completa, es decir, cualquier proposición válida es generada.

En el formalismo la matemática no es reductible ni posterior a la lógica. El ambicioso programa de Hilbert finalizo de una forma inesperada con el trascendental teorema de incompletitud de Kurt Gödel en 1930 que da una respuesta negativa al programa de Hilbert.

Hilbert define una demostración de la siguiente forma:

> ***Una demostración consiste en una sucesión de formulas que, o bien son axiomas, o bien son teoremas, o se han obtenido de éstas mediante inferencias admisibles.***

En el formalismo las demostraciones son realizadas y fundamentadas en aspectos puramente sintácticos excluyendo la intuición y el empirismo completamente, de tal manera que los objetos matemáticos solamente son términos de un lenguaje formal.

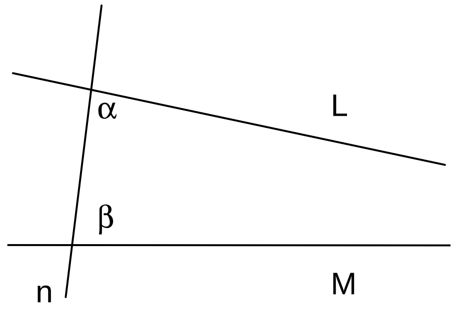
Debido a la exclusión de las componentes intuitiva y semántica en los sistemas axiomáticos en el formalismo fue posible realizar demostraciones a través de computadoras dando origen a la deducción automática. Por primera vez, utilizando computadoras, en el año 1976 los matemáticos K. Appel y W. Haken demostraron asistidos por computadoras el famoso teorema de los cuatro colores. Después de esta demostración se ha desarrollado ampliamente la deducción automática utilizando algunas versiones generalizadas de la Deducción natural de Gentzen.

Como un punto critico en el desarrollo de la matemática como ciencia deductiva se tiene la concepción de las geometrías no euclidianas descrita en la siguiente sección.

1.3.2 GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

En la enormemente influyente y dominante geometría clásica de Euclides se consideran postulados y axiomas, que son verdades absolutas intuitivamente evidentes y se aceptan sin necesidad de demostración. El postulado famosísimo en la geometría Euclidiana es el Quinto Postulado enunciado asi por Euclides:

Si dos rectas M y L se encuentran con otra recta n, de modo que la suma de los ángulos α y β sea menor de 180^{o}, entonces las rectas M y L se encontrarán en el lado de la recta n donde estén los ángulos α y β.



Las concepciones establecidas en los *Elementos* de Euclides en matemáticas, permanecieron intactas durante siglos, si bien algunos de los más brillantes matemáticos intentaron demostrar el Quinto Postulado de Euclides sin éxito, arribándose a un punto critico en el siglo XIX con la creación de las geometrías no euclidianas donde el Quinto Postulado es sustituido por otros, modificándose el concepto de sistema deductivo y consecuentemente las deducciones y argumentaciones matemáticas. Un postulado ya no tendría que ser exclusivamente evidente en la construcción de teorías matemáticas.

Con las geometrías no euclidianas la verdad en matemáticas dejo de ser absoluta, una propiedad matemática es verdadera en una teoría matemática y es falsa en otra, por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triangulo es 180^{o} que es un resultado verdadero de la geometría euclidiana, y falso en las geometrías no euclidianas. La geometría euclidiana dejo de ser la única geometría *verdadera* que podía explicar el universo.

Los matemáticos Nicolai Lobachevsky (1793-1856), Janos Bolyai (1802-1860) y Georg Riemann (1826-1866) son considerados los creadores de las geometrías no euclidianas que posteriormente tuvieron importantes e interesantes aplicaciones como por ejemplo en la teoría de la relatividad de Einstein.

CAPITULO DOS

LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA DEDUCTIVA

2.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Una ciencia es un conjunto de conocimientos obtenidos mediante la observación y el razonamiento, sistemáticamente estructurados y de los que se deducen principios y leyes generales. Por definición, siendo la matemática la ciencia de las abstracciones y la ciencia deductiva por excelencia es estrictamente necesario estudiar los principios y métodos utilizados sistemáticamente en la construcción de teorías matemáticas para comprender su naturaleza, un objetivo imprescindible en el contexto de la metamatemática.

Se define a la metamatemática como la teoría lógica formal de las pruebas o demostraciones matemáticas, entre los elementos de la metamatemática considerados esenciales en esta obra se tiene los sistemas axiomáticos formales dando mayor importancia a las reglas de inferencia del sistema que son esenciales en la demostración de teoremas.

Se tiene un razonamiento o argumento deductivo en la construcción del conocimiento en matemáticas, que la diferencia notablemente de otras ciencias en las cuales se realiza un razonamiento generalmente de tipo inductivo, a continuación una descripción del concepto de argumento.

2.2 ARGUMENTOS DEDUCTIVOS

Los argumentos inductivos constituyen de alguna forma el fundamento de teorías o ciencias de naturaleza inductiva y son estudiados por la lógica inductiva mientras que los argumentos deductivos constituyen el fundamento de las ciencias deductivas como eminentemente es la matemática.

El propósito fundamental de la lógica formal es precisamente el estudio de los argumentos deductivos que son llamados en esta obra simplemente "argumentos". Un argumento es un conjunto de proposiciones de tal manera que uno de ellos que es llamado "conclusión" se deduce de los otros que son llamados "hipótesis" o "premisas", por lo que a cada inferencia o deducción posible le corresponde un argumento.

Existen dos clases de argumentos, los argumentos válidos, correctos o bien construidos y los argumentos inválidos, incorrectos o mal construidos. Un argumento se dice que es válido cuando no es posible que sus hipótesis sean verdaderas y su conclusión falsa, es decir que en un argumento válido la verdad de las hipótesis es incompatible con la falsedad de la conclusión, todo lo que se requiere para la validez es que *si* las hipótesis fuesen verdaderas entonces la conclusión tendría que ser verdadera.

La validez de un argumento no garantiza la verdad de su conclusión puesto que se tienen argumentos validos con hipótesis falsas y conclusión falsa pero la falsedad de la conclusión de un argumento garantiza que el argumento es o bien inválido o que alguna de sus hipótesis es falsa.

La única combinación de valores de verdad que no puede darse en un argumento válido es que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa, mientras que en los argumentos inválidos se tienen todas las combinaciones de valores de verdad de donde la validez de un argumento no depende simplemente de los valores de verdad de las hipótesis y la conclusión. La validez de un argumento no garantiza que cualquiera de las premisas sea de hecho verdadera ni da información alguna acerca del valor de verdad de la conclusión en el caso en que alguna hipótesis sea falsa.

En la construcción de una demostración de algún enunciado o proposición se emplea un método que básicamente es un esquema lógico argumentativo válido perteneciente a los fundamentos de la matemática que es una área perteneciente a la metamatemática, es decir que en un argumento valido se deduce lógicamente una proposición verdadera llamada conclusión de un conjunto de proposiciones verdaderas llamadas hipótesis y la validez lógica del mismo radica en que cuando las hipótesis son verdaderas entonces la conclusión también lo será.

2.3 SISTEMAS AXIOMÁTICOS FORMALES

Por las leyes que gobiernan la aritmética elemental es verdadero que 23 + 2 = 25 en otro contexto o universo resulta también verdadero que 23 + 2 = 1 puesto que en ese contexto no existe un objeto llamado “25” y no es un contexto desconocido para el lector, de hecho es cotidiano, puesto que cuando son las 23 horas y se decide estudiar otras 2 horas se tiene que 23 más 2 será igual a la 1 de la noche. Formalmente a esta teoría se le conoce en matemáticas con el nombre de los enteros módulo 24.

La diferencia fundamental es básicamente las definiciones, los símbolos con su significado, y las leyes, que son componentes elementales de sistemas axiomáticos o sistemas deductivos, que gobiernan en esos universos, los matemáticos crean universos matemáticos con sus leyes en un proceso que generalmente es perfectible y gradual.

La teoría de la prueba o teoría de la demostración es una parte de la metamatemática que estudia los fundamentos de la matemática, de tal manera que el estudio o investigación metamatemática de un tópico de la matemática generalmente se realiza sobre la base de un sistema axiomático formal correspondiente a ese tópico en particular.

Como se ha mencionado, los primeros sistemas axiomáticos en la historia se tienen en la Antigua Grecia con Aristóteles en lógica y Euclides en geometría. El concepto moderno de sistema axiomático se debe a la concepción y elaboración de los sistemas axiomáticos perfeccionados en los escritos de pensadores de primera categoría como: Frege, Peano, Hilbert, Russell, Lukasiewicz, ente otros.

Un sistema axiomático S es denotado por: S=(A, F, X, R), donde sus componentes[8] en su naturaleza puramente sintáctica son:

- Alfabeto o vocabulario: un conjunto de símbolos lingüísticos a utilizar en S, denotado por A.

- Un conjunto de axiomas que constituyen las fórmulas primitivas del sistema, son fórmulas válidas por definición y se denotan por X

[8] Garrido, Manuel. Lógica simbólica, página 287

- Un conjunto de reglas de formación de fórmulas, es decir, las reglas de sintaxis del sistema que permiten construir fórmulas bien formadas, son denotadas por F

- Un conjunto finito de reglas de inferencia o deducción en S que determinan las transformaciones de las fórmulas en S, se denota por R

De acuerdo a la definición de sistema axiomático es esencial en esta obra una definición de demostración:

Una demostración o prueba en un sistema axiomático es una secuencia finita de fórmulas bien formados donde cada uno de ellos es o bien un axioma o una fórmula obtenida como consecuencia de algunas de las reglas de deducción. El último enunciado de una demostración es llamado teorema o también fórmula derivada[9].

Los axiomas serán teoremas por definición, si **p** es un teorema se escribirá de la siguiente forma: ⊢ **p**

2.4 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS FORMALES

Una de las principales tareas de la metateoría de la metamatemática es considerar las propiedades de un sistema axiomático, especialmente se consideran las siguientes:

[9] Garrido, Manuel. Lógica simbólica, página 287

Se dice que el sistema axiomático S es *consistente* o que tiene la propiedad de consistencia si está exento de contradicción. Es decir que no se obtiene ni se obtendrá una conclusión contradictoria en S.

El sistema axiomático S es llamado *completo* si para cualquier fórmula E de S se tiene que por lo menos una de las siguientes dos afirmaciones se cumple: E es un teorema en S o no-E es un teorema en S. Es decir que el sistema axiomático S es lo suficientemente potente suministrando todas las conclusiones correspondientes o esperadas en S.

El sistema axiomático S es *decidible* si existe un procedimiento estándar, generalmente un algoritmo, que permite decidir si una fórmula es deducible, es decir, demostrable.

Finalizada la construcción sintáctica del sistema axiomático, corresponde la interpretación del mismo que es la parte semántica de los sistemas axiomáticos. En el siglo XX los formalistas exageraron la parte sintáctica de los sistemas axiomáticos con un decaimiento de la parte semántica, puesto que los símbolos eran carentes de alguna interpretación.

Entre los magníficos ejemplos de sistemas axiomáticos en matemáticas sobresalen los brillantes sistemas axiomáticos modernos de la teoría de conjuntos entre los que se tienen: Teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF), Teoría de Von Neumann, Bernays, Gödel y Ackermann (NBG).

También como ejemplos sobresalientes se tienen los siguientes sistemas axiomáticos de la lógica de proposicional y cuantificacional de primer orden:

2.5 AXIOMATIZACIÓN DE LA LOGICA PROPOSICIONAL

Los fundamentos lógicos de los métodos de demostración en matemáticas suelen ser considerados como axiomas en el desarrollo de una teoría matemática al considerar a la lógica como una rama de la matemática, siendo su pleno reconocimiento y aplicación fundamentales en el razonamiento, argumentación y demostración matemáticas. Para conocer la parte sintáctica de la lógica de primer orden, se expone un sistema axiomático que el autor considera conveniente. El sistema axiomático expuesto se origino en 1934 con Hilbert y es perfeccionado por Kleene en 1952 apareciendo en la obra clásica “Introducción a la metamatemática”

Existen diferentes sistemas axiomáticos de la lógica elemental o de primer orden como los diseñados por: Whitehead-Russell (1910) Hilbert-Bernays (1934) Lukasiewicz (1929), Church (1956). Debido a su amplia aceptación entre lógicos, matemáticos y filósofos se ha seleccionado como un magnifico ejemplo, el sistema axiomático de Kleene.

2.5.1 SISTEMA AXIOMÁTICO DE KLEENE

El sistema axiomático de Stephen C. Kleene de la lógica proposicional denotado por K=(A, F, X, R) se define así

A: el alfabeto está formado por:

- Los símbolos p, q, r, s ,…, p_1, p_2, p_3, … de proposiciones atómicas
- los símbolos lógicos de conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- los símbolos de agrupación: (,)

F: el conjunto de las fórmulas bien construidas denotado por (fbc) se define recursivamente así:

- toda proposición atómica es una fbc.
- Si P y Q son fbc entonces $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$[10] son fbc.

Toda fbc se obtiene de las fórmulas anteriores

X: El conjunto de axiomas es:

K1: $\vdash P\rightarrow(Q\rightarrow P)$

K2: $\vdash (P\rightarrow Q) \rightarrow((P\rightarrow(Q\rightarrow R)) \rightarrow(P\rightarrow R))$

K3: $\vdash P\rightarrow(Q\rightarrow P\wedge Q)$

K4: $\vdash P\wedge Q\rightarrow P$ $\vdash P\wedge Q\rightarrow Q$

K5: $\vdash P \rightarrow P\vee Q$ $\vdash Q \rightarrow P\vee Q$

K6: $\vdash (P \rightarrow R) \rightarrow((Q\rightarrow R) \rightarrow(P\vee Q\rightarrow R))$

K7: $\vdash (P\rightarrow Q) \rightarrow((P\rightarrow\neg Q) \rightarrow\neg P)$

K8: $\vdash \neg \neg P \rightarrow P$

[10] La fórmula bien construida $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$ será escrita así: $P\leftrightarrow Q$

R: la única regla de deducción o de inferencia es la regla clásica llamada MODUS PONENS abreviada como (MP)

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash P \\ \vdash P \rightarrow Q\end{array}}{\vdash Q}$$

El sistema de Kleene está construido es su dimensión sintáctica y la interpretación del sistema de Kleene corresponde a la teoría de la lógica proposicional, labor que no se realiza en esta obra debido a su carácter elemental y a la importancia de las reglas de demostración sobre la parte propiamente semántica del sistema formal.

El sistema axiomático de Kleene de la lógica proposicional con algunas modificaciones se transforma en un sistema axiomático de la lógica de primer orden utilizada como fundamento en los métodos de demostración en matemáticas. La modificación del alfabeto A es omitida y solamente se dirá que se agregan los cuantificadores universal y existencial como símbolos lógicos denotados respectivamente como $\forall$, $\exists$.

Las modificaciones correspondientes exclusivamente a las reglas de inferencia y símbolos lógicos son:

Axiomas del cálculo de predicados:

K9: $\forall x\ A(x) \rightarrow A\ (t)$

K10: $A\ (t) \rightarrow \exists x A(x)$

Reglas de inferencia:

$$\frac{\vdash A(x)\rightarrow C}{\vdash \exists x A(x)\rightarrow C} \qquad \frac{\vdash C\rightarrow A(x)}{\vdash C\rightarrow \forall x A(x)}$$

El sistema axiomático de Kleene de la lógica proposicional tiene las propiedades de completitud, consistencia y decidibilidad, mientras que el sistema axiomático de Kleene de la lógica de primer orden solamente posee las propiedades de completitud y consistencia. Solamente para mostrar como se obtiene un teorema en el sistema axiomático de Kleene se tiene la siguiente demostración paso por paso:

Demuestre que la fórmula A se deduce de la fórmula A, es decir $\vdash A\rightarrow A$

1) El axioma K1 es: $\vdash P\rightarrow(Q\rightarrow P)$, sustituyendo P por A y Q por A se tiene:

$$\vdash A\rightarrow(A\rightarrow A)$$

2) El axioma K2 es: $\vdash (P\rightarrow Q) \rightarrow((P\rightarrow(Q\rightarrow R)) \rightarrow(P\rightarrow R))$ sustituyendo P por A, Q por $(A\rightarrow A)$ y R por A se tiene:

$$(A\rightarrow(A\rightarrow A)) \rightarrow((A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A)) \rightarrow(A\rightarrow A))$$

3) Aplicando la regla modus ponens a las proposiciones de 1) y 2) se tiene:

$$(A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A)) \rightarrow(A\rightarrow A)$$

4) Utilizando de nuevo A1 con Q dado por $A\rightarrow A$ se tiene:

$$A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A)$$

5) Aplicando Modus Ponens a las proposiciones de los pasos 3) y 4) se tiene:

$$A\rightarrow A$$

Cada teorema obtenido facilita la demostración de otros teoremas construyéndose así el cuerpo deductivo de la lógica de primer orden. Dando precisamente mayor importancia a las reglas de inferencia se tiene un sistema axiomático equivalente llamado Deducción natural de Gentzen

2.5.2 DEDUCCIÓN NATURAL DE GENTZEN

Después de exhibir un primer ejemplo de sistema axiomático en su dimensión sintáctica de la lógica de primer orden se observa que es sencillo, elegante y poderoso, sirviendo de fundamento a una amplia gama de teorías matemáticas incluyendo, por ejemplo, a la teoría de conjuntos. Ahora se dará mayor énfasis a las reglas de deducción construidas por G. Gentzen en 1934 en su tesis doctoral.

En el Sistema deductivo de Gentzen G=(A, F, X, R) los conjuntos A y F se definen de forma similar como en el sistema de Kleene mientras que el conjunto de axiomas X es vacío. Se presta atención especial al conjunto R formado por las reglas de deducción:

REGLAS DE DEDUCCION NATURAL

Las siguientes reglas básicas de deducción natural y sus generalizaciones son ampliamente expuestas en obras clásicas de deducción natural.[11]

Introducción de la conjunción ($\mathbf{I}\wedge$): De la afirmación de dos fórmulas se deduce su conjunción, en forma simbólica se escribe así:

[11] J.M. Anderson y H. W. Johnstone, "Natural deduction" Wadsworth Publ., California, 1962
M. Garrido "Lógica simbólica" editorial tecnos, España 2003

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \end{array}$$

Eliminación de la conjunción ($\mathbf{E} \wedge$): De la conjunción de dos fórmulas se deduce las dos fórmulas, simbólicamente:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} \end{array}$$

Introducción de la disyunción ($\mathbf{I} \vee$): La disyunción de dos fórmulas se deduce de cada una de ellas, simbólicamente:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \end{array}$$

Eliminación de la disyunción (E$\vee$): consiste en que dada una disyunción $A \vee B$ y si de A se deduce C como también de B se deduce C entonces se deduce C. La regla E$\vee$ es el fundamento de la famosa regla de inferencia llamada *dilema.* En forma simbólica:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathrm{M} \\ \mathbf{C} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{B} \\ \mathrm{M} \\ \mathbf{C} \end{array}\right. \\ \hline \mathbf{C} \end{array}$$

Introducción del negador ($\mathbf{I}\neg$): Una fórmula es rechazada o inadmisible cuando dé lugar a una contradicción. La estructura de la regla $\mathbf{I}\neg$ es:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\wedge\neg\mathbf{B}\end{array}}{\neg\,\mathbf{A}}$$

La regla $\mathbf{I}\neg$ es utilizada como un principio en la demostración indirecta *reducción al absurdo.*

Eliminación del negador ($\mathbf{E}\neg$): Negar doblemente una fórmula es afirmarla, simbólicamente:

$$\frac{\neg\neg\,\mathbf{A}}{\mathbf{A}}$$

Eliminación de la implicación ($\mathbf{E}\rightarrow$): De una implicación y su antecedente se deduce el consecuente. La regla $\mathbf{E}\rightarrow$ no es otra que el famoso *Modus Ponens* y es conocida también con el nombre de *regla de separación.* Su estructura es:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}\\ \mathbf{A}\end{array}}{\mathbf{B}}$$

Introducción de la implicación ($\mathbf{I}\rightarrow$): Si de una fórmula A se deduce una fórmula B entonces se deduce A→B. La regla $\mathbf{I}\rightarrow$ también es llamada *Teorema de deducción,* su estructura es:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \vdots\\ \mathbf{B}\end{array}}{\mathbf{A \to B}}$$

Introducción del cuantificador universal ($\mathbf{I}\forall$):Al seleccionar un elemento arbitrario α en un conjunto D llamado dominio y obteniendo la fórmula P(α) como una afirmación entonces P(x) es verdadera para todo x perteneciente a D, simbólicamente:

$$\frac{\mathbf{P(\alpha)}}{\forall \mathbf{x P (x)}}$$

Eliminación del cuantificador universal ($\mathbf{E}\forall$): De una generalización se deduce un caso particular suprimiendo el cuantificador universal, la estructura es:

$$\frac{\forall \mathbf{x P (x)}}{\mathbf{P (\alpha)}}$$

Introducción del cuantificador existencial($\mathbf{I}\exists$): dada una fórmula con un parámetro α se admite otra fórmula que precede de la primera al cambiar el parámetro por una variable individual antecediendo el cuantificador existencial. En forma simbólica:

$$\frac{\mathbf{P (\alpha)}}{\exists \mathbf{x P (x)}}$$

Eliminación del cuantificador existencial ($\mathbf{E}\exists$): De la existencia e identificación de un individuo se deduce una fórmula. En forma simbólica:

$$
\begin{array}{c}
\exists x P(x) \\
P(\alpha) \\
\mathrm{M} \\
A \\
\hline
A
\end{array}
$$

Después de la descripción del sistema axiomático G, se tiene un ejemplo de demostración: Demuestre que

$$
\begin{array}{c}
P \to Q \\
\neg Q \\
\hline
\neg P
\end{array}
$$

Demostración: Básicamente es una demostración por reducción al absurdo al añadir como hipótesis P y aplicar la regla $\mathbf{I}\neg$,

1) $P \to Q$	hipótesis
2) $\neg Q$	hipótesis
3) P	hipótesis
4) Q	pasos 1) y 3) y regla $\mathbf{E}\to$
5) $\neg Q \wedge Q$	pasos 2) y 4) y regla $\mathbf{I}\wedge$
6) $\neg P$	pasos 3) a 5) y regla $\mathbf{I}\neg$

Recordando que se utilizan esquemas de argumentos válidos en los métodos de demostración usuales en matemáticas definitivamente no es posible estudiar los métodos de demostración en matemáticas sino se posee por lo menos una idea general de las reglas de deducción expuestas aquí, puesto que también serán empleadas en todas las demostraciones en el siguiente capitulo.

CAPITULO TRES

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

En matemáticas no se acepta una proposición como verdadera hasta que se construye su demostración formal, aunque la proposición sea válida para un número finito de casos no significa que sea válida para todo el universo, por ejemplo la conjetura de Goldbach se ha verificado utilizando computadoras para millones de casos pero a pesar de ello no se acepta como verdadera.

Un método de demostración es un esquema argumentativo válido con fundamento lógico no perteneciente en si a la matemática sino como elemento propio de una metateoría. La validez de la argumentación radica en la veracidad de las hipótesis consideradas para deducir una conclusión.

Los métodos de demostración estudiados aquí son:

- Método directo de demostración
- Métodos indirecto de demostración
  - por reducción al absurdo
  - por contrapositiva[12]
- Método de Inducción matemática[13]

[12] También llamado demostración por contrareciproca.

3.2 MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN

En el método de demostración directa se tiene como hipótesis verdaderas las proposiciones H_1 y H_2 y… y H_n procediendo a la deducción de que la conclusión Q es verdadera a través de un proceso lógico deductivo, es decir como una cadena de implicaciones lógicas. El esquema de demostración en el método directo es de la forma:

Si H_1 y H_2 y **…** y H_n entonces Q

en forma simbólica:

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow Q$$

El método de demostración directo tiene como fundamento lógico la regla de inferencia clásica o esquema argumentativo válido llamado: Modus Ponens

$$[\, P \wedge (P \rightarrow Q)\,] \rightarrow Q \qquad \text{Modus Ponens}$$

que significa: si la hipótesis **P** es verdadera y la hipótesis **P** implica la conclusión **Q** entonces la conclusión **Q** es verdadera.

Para una mejor comprensión del esquema de demostración directa se tiene algunos ejemplos donde se identifica cada elemento en la demostración.

[13] Es el método clásico de demostración por inducción matemática que se diferencia del método de inducción transfinito. El lector interesado puede consultar la obra de Paul R. Halmos "Teoría intuitiva de los conjuntos" páginas 71 y 100

Proposición 1.0

Demuestre que si las funciones f(x) y g(x) son derivables en x = b entonces la función f(x)g(x) es derivable en x = b

Demostración:

Se identifican las hipótesis y la conclusión:

H_1: f(x) es derivable en x = b

H_2: g(x) es derivable en x = b

Q: f(x)g(x) es derivable en x = b

Después de identificar las hipótesis y la conclusión, se tiene una pregunta fundamental que aparece constantemente en diferentes niveles académicos ¿Cómo iniciar la secuencia de la demostración? La respuesta se encuentra precisamente en la conclusión " f(x).g(x) es derivable en x= b" por lo que un inicio correcto es considerar la derivada del producto f(x).g(x) en x = b, por definición:

$$(f(b)g(b))' = \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x - b} \qquad (1)$$

¿Cómo se puede reescribir el cociente expresado en (1) de tal manera que sean aplicables las hipótesis H_1 y H_2?

La respuesta se encuentra en que $f'(x)$ y $g'(x)$ son de la forma:

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \qquad g'(b) = \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \qquad (2)$$

que sugieren estudiar una relación entre los numeradores de (1) y (2). Básicamente se suma y resta un término adecuado al numerador en (1) que permita extraer factor común para que aparezcan los numeradores de (2), seleccionando el término: **f(x)g(b),** se tiene:

$$(f(b)g(b))' = \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) + f(x)g(b) - f(x)g(b) - f(b)g(b)}{x - b}$$

extrayendo factor común:

$$(f(b)g(b))' = \lim_{x \to b} \frac{f(x)(g(x) - g(b)) + g(b)(f(x) - f(b))}{x - b}$$

dividiendo ambos sumandos en el numerador por el denominador:

$$(f(b)g(b))' = \lim_{x \to b} \left[\frac{f(x)(g(x) - g(b))}{x - b} + \frac{g(b)(f(x) - f(b))}{x - b} \right]$$

evaluando el límite de una suma que es igual a la suma de los límites

$$(f(b)g(b))' = \lim_{x \to b} \frac{f(x)(g(x) - g(b))}{x - b} + \lim_{x \to b} \frac{g(b)(f(x) - f(b))}{x - b}$$

evaluando

$$(f(b)g(b))' = f(b)g'(b) + g(b)f'(b)$$

Queda formalmente demostrada la proposición 1.0

Se construye la demostración formal de la siguiente proposición perteneciente al análisis de variable real y posteriormente se relaciona con elementos de algebra lineal como es el concepto fundamental de *producto interno.*

Proposición 1.1: Para cualquier **r** y **s** reales, $\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0$ si y sólo si **r**=0 y **s**=0

La proposición 1.1 escrita en un lenguaje matemático formal es:

$$\forall\ \mathbf{r,s} \in \mathrm{R},\ (\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}=0 \text{ y } \mathbf{s}=0)$$

que contiene el cuantificador universal propio de la lógica de primer orden y denotado por $\forall$ de tal manera que es necesario aplicar la regla de inferencia de deducción natural llamada *introducción del cuantificador universal* que tiene la forma:

$$\frac{H\alpha\beta \leftrightarrow Q\alpha\beta}{\forall x,y\ Hxy \leftrightarrow Qxy}$$

que significa que se tiene que seleccionar individuos cualesquiera o elementos arbitrarios en R denotados por "α" y "β" reduciendo la inferencia a la lógica de conectores en la proposición $H\alpha\beta \Leftrightarrow Q\alpha\beta$ que demuestra la veracidad de la conclusión en la lógica cuantificacional de primer orden.

En la demostraciones que contienen "si y sólo si" se utiliza la equivalencia lógica siguiente: $[(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P})] \leftrightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})$ que significa: Si P es hipótesis entonces se obtiene la conclusión Q y si Q es hipótesis entonces se obtiene la conclusión P.

En una demostración con bicondicional generalmente una de las implicaciones es más fácil de demostrar que la otra. Para mayor claridad en la demostración de cada implicación sean las proposiciones:

P: $\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0$

Q: **r**=0 y **s**=0

Demostración de la implicación ($P \rightarrow Q$)

Sean α, β cualesquiera números reales y supongamos que $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ entonces cada una de las siguientes proposiciones es verdadera

Proposición	razón
1) $\alpha^2 + \beta^2 = 0$	por hipótesis
2) $\alpha^2 - (-1)\beta^2 = 0$	ley de signos
3) $\alpha^2 - i^2\beta^2 = 0$	$i^2 = -1$ donde $i = \sqrt{-1}$
4) $(\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta) = 0$	diferencia de cuadrados
5) $\alpha - i\beta = 0 \vee \alpha + i\beta = 0$	Si $xy=0$ entonces $x=0 \vee y = 0$
6) $\alpha - i\beta = 0 + i0$	por paso 5) y escritura de cero como número complejo
7) $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$	igualdad de números complejos y paso 6)
8) $\alpha + i\beta = 0 + i0$	por paso 5) y escritura de cero como número complejo
9) $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$	por paso 8)
10) $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$	por proposiciones 7) y 9)

Para mayor claridad, se hace notar que en la proposición 5) se aplica una de las reglas de inferencia llamadas *dilemas,* en la deducción natural *eliminación de la disyunción* ($E\vee$)

$$\begin{array}{c} H_1 \vee H_2 \\ H_1 \rightarrow Q \\ \underline{H_2 \rightarrow Q} \\ Q \end{array}$$

Demostración de la implicación ($Q \rightarrow P$):

Si $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$ entonces $\alpha^2 + \beta^2 = 0^2 + 0^2 = 0$

Queda demostrada formalmente la proposición 1.1

La relación que guarda la proposición 1.1 en algebra lineal corresponde a la definición de producto interno en R^2 así: $\mathbf{x \cdot y = (x_1,x_2)(y_1,y_2) = x_1y_1+x_2y_2}$ siendo uno de los axiomas que satisface: el producto interno de una pareja ordenada **v=(r,s)** consigo misma es igual a cero si y sólo si **(r,s) = (0,0).** Que en forma simbólica se escribe así:

$$\mathbf{v \cdot v = 0 \leftrightarrow v = (0,0)}$$

que en términos de componentes se expresa así:

$$\forall\ \mathbf{r,s} \in R,\ (\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0 \leftrightarrow \mathbf{r}=0 \text{ y } \mathbf{s}=0)$$

justamente la proposición 1.1

3.3 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN INDIRECTOS

El método de demostración directa no siempre es aplicable debido a la naturaleza de las proposiciones a demostrar, por lo que es necesario realizar una demostración indirecta las cuales son ampliamente usadas en matemáticas, a continuación algunos de los métodos usuales de demostración indirecta.

3.3.1 METODO DE DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO

Se atribuye al filósofo griego Zenón de Elea, alrededor del siglo V a.C., la invención del método de reducción al absurdo que utilizaba en sus argumentos y en sus famosas paradojas, desde entonces es un método ampliamente aplicado en matemáticas.

El procedimiento general para demostrar indirectamente por reducción al absurdo una proposición de la forma $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \leftrightarrow Q$ consiste en:

R1) Negar la conclusión Q utilizando las leyes de la lógica, la negación de Q es denota por $\neg Q$ que se lee "no Q"

R2) El conjunto de hipótesis ahora es de la forma $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg Q$, es decir que $\neg Q$ **se añade** como una hipótesis

R3) Del conjunto de hipótesis enunciadas en R2) obtener una contradicción evidente, una contradicción es una proposición que siempre es falsa y es denotada por C, en forma simbólica:
$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \boldsymbol{\neg Q} \rightarrow C$, es decir que el conjunto de hipótesis $\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg Q\}$ es inconsistente o contradictorio.

R4) entonces Q es verdadera por la obtención de una contradicción al suponer verdadera la negación de Q

Aristóteles fundamento lógicamente la demostración por reducción al absurdo en dos principios: principio de no contradicción $\neg(p \wedge \neg q)$ considerada ley suprema de la lógica según Kant y Aristóteles, que significa que una proposición no es verdadera y falsa simultáneamente y el principio del tercero excluido $(p \vee \neg p)$ que significa que una proposición es verdadera o falsa. Si no son aceptados los principios anteriores, el método de reducción al absurdo carece de fundamento lógico.

El fundamento lógico del método de reducción al absurdo es la equivalencia lógica llamada precisamente reducción al absurdo:

$$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow[(P \wedge\neg Q)\rightarrow C]$$

donde P es de la forma $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge\neg Q$ y C denota una contradicción

Cuando solamente se afirma una proposición Q sin ninguna hipótesis, como por ejemplo: π es transcendental, entonces la veracidad de Q se obtiene de la regla de inferencia:

$$(\neg Q\rightarrow C)\rightarrow Q$$

Las siguientes demostraciones ilustran el método de reducción al absurdo.

Proposición 1.2

Demuestre que para todo entero n, si n^2 es par entonces n es par

Demostración:

De nuevo aparece el cuantificador universal $\forall$ que se elimina por la regla de eliminación del cuantificador universal reduciéndose la demostración de la lógica de primer orden a la lógica proposicional como se explico en la proposición 1.1

Seleccionando un entero arbitrario n e identificando hipótesis y conclusión se tiene:

Hipótesis H_1: n^2 es par	Conclusión: Q: n es par
	Negación de la conclusión $\neg$Q: n es impar

Ahora, el conjunto de hipótesis es H_1 y $\neg$Q: n^2 es par y n es impar

¿Cómo se inicia la secuencia de la demostración? La respuesta no es única como veremos en esta demostración pero una guía general es la generación de una contradicción. Para tal fin, consideremos la suma de n^2 y n en el siguiente proceso lógico deductivo:

Proposición	Razón
1) n^2 es par	hipótesis
2) n es impar	hipótesis
3) n^2+n es impar	la suma de un par e impar es impar
4) $n^2+n=n(n+1)$	distributividad
5) n+1 es par	por proposición 2)
6) n(n+1) es par	por proposición 5)
7) n^2+n es par	por proposiciones 4) y 6)
8) n^2+n es impar y n^2+n es par	por proposiciones 3) y 7)

Se ha obtenido una evidente contradicción en la proposición 8) por lo tanto la negación de Q no es verdadera: n es impar y se acepta la veracidad de Q: n es par. Queda formalmente demostrada la proposición 1.2.

En matemáticas existen diferentes demostraciones para una proposición, por lo que se construye otra demostración de la proposición 1.2

Proposición	Razón
1) n^2 es par	hipótesis
2) n es impar	hipótesis
3) $n^2–1$ es impar	por proposición 1)

4) $n^2-1=(n+1)(n-1)$	diferencia de cuadrados
5) $n+1$ y $n-1$ son pares	por proposición 2)
6) $n^2-1=(n+1)(n-1)$ es par	por proposición 5)
7) n^2-1 es impar y n^2-1 es par	por proposiciones 3) y 6)

Proposición 1.3

Demuestre que $\sqrt{2}$ no es racional

La conclusión Q es: $\sqrt{2}$ no es racional siendo su negación $\neg Q$: $\sqrt{2}$ es racional que es considerada como hipótesis.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, existen enteros $\beta \neq 0$ y α primos relativos tales que $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$, es decir, $\sqrt{2}\,\beta=\alpha$. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación $\sqrt{2}\,\beta=\alpha$ obtenemos que $2\beta^2=\alpha^2$ de donde se tiene que α^2 es par y por proposición 1.2 se tiene que α es par, por lo que existe un entero k tal que $\alpha=2k$, sustituyendo en la ecuación $2\beta^2=\alpha^2$ se tiene que $2\beta^2= (2k)^2$ que al simplificar queda $\beta^2=2k^2$ de tal manera que β^2 es par y por proposición 1.2 β es par. La contradicción que se obtiene es que β y α son primos relativos, es decir que su máximo común divisor es 1 y por otra parte, β y α son divisibles por 2 porque ambos son pares. Ante esta evidente contradicción se tiene que la negación de Q es falsa por lo que Q es verdadera.

Utilizando el método de reducción al absurdo la demostración de la proposición 1.3 fue realizada por Euclides hace más de 2000 años!

Para finalizar la exposición del método de reducción al absurdo, consideremos la paradoja de Russell descubierta por B. Russell a inicios del siglo XX que causo una crisis en los fundamentos de las matemáticas que fue resuelto posteriormente alrededor de 1920.

Proposición 1.4

Sea A cualquier conjunto. Se define el conjunto B como: $B = \{x \in A : x \notin x\}$ es decir que B es el conjunto de los elementos pertenecientes al conjunto A que no pertenecen a sí mismos. Por definición de B es conveniente escribir:

$$\text{Si } \beta \in B \text{ entonces } \beta \in A \text{ y } \beta \notin \beta \qquad (B_1)$$

$$\text{Si } \beta \in A \text{ y } \beta \notin \beta \text{ entonces } \beta \in B \qquad (B_2)$$

la pregunta esencial es: B es un elemento de A?

Supongamos que la proposición $\neg Q$: $B \in A$ es verdadera, entonces se tienen dos casos:

H_1: B pertenece a B o H_2 :B no pertenece a B.

Para H_1: Si $B \in B$ por la proposición B_1 se tiene que $B \in A$ y $B \notin B$ obteniendo la contradicción $B \in B$ y $B \notin B$.

Para H_2: Si $B \notin B$ y $B \in A$ por proposición B_2 se obtiene que $B \in B$, obteniendo la contradicción $B \notin B$ y $B \in B$.

En conclusión $\neg Q$: $B \in A$ es falsa, es decir, Q: $B \notin A$ es verdadera. En otras palabras, para cualquier conjunto arbitrario A existe algo llamado B tal que $B \notin A$, es decir: No existe algo que contenga a todo!

La demostración de la proposición 1.4 es un razonamiento realizado en teorías antiguas de conjuntos previas a su axiomatización.

3.3.2 METODO DE DEMOSTRACION POR CONTRAPOSITIVA

El método de demostración por contrapositiva es un método indirecto que tiene como fundamento la equivalencia lógica

$$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$$

Para realizar una demostración por contrapositiva se toma como hipótesis la negación de la conclusión escrita como $\neg Q$ para obtener como conclusión la negación de la hipótesis escrita como $\neg P$. El esquema argumentativo de la deducción por contrapositiva es de la forma:

$$\begin{array}{c} \neg Q \\ \underline{\neg Q\rightarrow\neg P} \\ \neg P \end{array}$$

Se ilustra claramente este procedimiento en las siguientes demostraciones.

La **Proposición 1.2** es: para todo entero n, si n^2 es par entonces n es par. Demuestre la proposición 1.2 por contrapositiva.

Demostración:

Se observa que la implicación: si n^2 es par entonces n es par, con hipótesis P: n^2 es par y conclusión Q: n es par, es equivalente a la implicación: si n es impar entonces n^2 es impar con hipótesis $\neg Q$: n es impar, y conclusión $\neg P$: n^2 es impar

Recordando que el inicio de la demostración por contrapositiva es la hipótesis $\neg Q$: n es impar, se tiene el siguiente proceso lógico deductivo formal:

Proposición	Razón
1) n es impar	por hipótesis
2) $n=2k+1$	por proposición 1)
3) $n^2=(2k+1)^2$	elevando al cuadrado ambos lados de la proposición 2)
4) $n^2= 4k^2+4k+1$	algebra elemental y proposición 3)
5) $n^2= 2(2k^2+2k)+1$	algebra elemental y proposición 4)
6) n^2 es impar	por proposición 5)

Hemos obtenido como conclusión $\neg P$: n^2 es impar. Queda demostrada formalmente la proposición 1.2 por contrapositiva

Una demostración más por contrapositiva: Demuestre una implicación de la **Proposición 1.1**: Para cualquier **r** y **s** reales, si $\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0$ entonces $\mathbf{r}=0$ y $\mathbf{s}=0$

Demostración:

La conclusión de la proposición 1.1 es Q: $\mathbf{r}=0$ y $\mathbf{s}=0$ y su negación que es la hipótesis en la demostración por contrapositiva es $\neg Q$: $\mathbf{r}\neq 0$ o $\mathbf{s}\neq 0$ sirve para obtener la negación de P: $\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2 = 0$ que es $\neg P$: $\mathbf{r^2+s^2}\neq 0$

Sin perdida de generalidad se supone que $\mathbf{r}\neq 0$ puesto que la demostración para $\mathbf{s}\neq 0$ es idéntica.

Si $\mathbf{r}\neq 0$ entonces $\mathbf{r^2}>0$ entonces $\mathbf{r^2+s^2}\geq \mathbf{r}^2>0$ de donde $\mathbf{r^2+s^2}\neq 0$.

Para construir otra demostración por contrapositiva se demuestra la inyectividad de una función por definición en la

Proposición 1.5

Demuestre que la función F(x) = 5x+16 definida en el conjunto de números reales sobre sí mismo es una función inyectiva.

Demostración

Una función es inyectiva o uno a uno si transforma elementos diferentes en el dominio A de la función f en elementos diferentes en el codominio de f. En notación simbólica:

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow f(\alpha) \neq f(\beta)$$

que tiene como contrapositiva a:

$$f(\alpha)=f(\beta) \Rightarrow \alpha=\beta$$

Supongamos entonces que F (α)=F (β), por definición de F(x) se tiene:

$$5\alpha+16=5\beta+16$$

simplificando se obtiene. $\alpha=\beta$.

3.4 METODO DE DEMOSTRACION POR EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

El principio de inducción matemática es un principio universalmente válido en matemáticas y es fundamentalmente uno de los axiomas de los números naturales construidos por el matemático italiano G. Peano a finales del siglo XIX, insistimos en que es un axioma que formalmente pertenece a la lógica de segunda clase al cuantificar propiedades de números naturales, sin embargo, por un tratamiento de letra predicativa como un parámetro se considera al principio de inducción matemática como un axioma en la lógica de primer orden.

Las demostraciones por el principio de inducción matemática se consideran indirectas. El principio de inducción matemática es utilizado para demostrar la veracidad de proposiciones p(n) donde n es un número natural mayor que un valor inicial n_0, el principio de inducción matemática consiste en:

i) inicialmente se verifica que la proposición p(n) es verdadera para $n=n_0$, es decir p (n_0) es verdadera.
ii) Se enuncia la hipótesis de inducción: p (k) es verdadera para el número natural k.
iii) Usando la hipótesis de inducción enunciada en (ii) y otras proposiciones verdaderas demostradas anteriormente se demuestra que p (k+1) es verdadera.
iv) La conclusión consiste en que p(n) es verdadera para todo $n \geq n_0$

En forma simbólica el principio de inducción matemática se escribe así:

$$[p(n_0) \wedge [\forall k > n_0 [p(k) \rightarrow p(k+1)]]] \rightarrow \forall k > n_0 \, p(n)$$

A continuación un ejemplo didáctico de la aplicación del principio de inducción matemática que contiene la construcción de la proposición p(n) a través de procesos heurísticos previos a su demostración formal.

Supongamos que queremos calcular la siguiente suma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + n^2$$

se pueden usar diferentes métodos para determinar la solución por ejemplo: reescritura o teoría elemental de relaciones de recurrencia. Utilizaremos el reconocimiento de patrones algebraicos y numéricos como una forma de descubrir o redescubrir una conjetura y después será demostrada formalmente por inducción matemática.

Reconocimiento de patrones algebraicos y numéricos: consideremos los siguientes cocientes para descubrir si aparece un patrón numérico:

$$\frac{1^2}{1}=\frac{1}{1}=\frac{3}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2}{1+2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4}=\frac{30}{10}=\frac{9}{3}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{1+2+3+4+5}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$$

observando que el denominador es 3 y que el numerador se obtiene al multiplicar por 2 el último sumando en el denominador más 1, por ejemplo, en la última ecuación se tiene: (2)(5)+1=11 Este breve y elemental reconocimiento numérico permite realizar la siguiente conjetura:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{1+2+3+4+5+...+n}=\frac{2n+1}{3}$$

despejando la suma

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{1+2+3+4+5+...+n}=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+4+5+...+n)$$

aplicando la fórmula: $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ demostrada de diferentes formas[14]

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+4+5+...+n)$$

simplificando $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

La fórmula anterior tiene la categoría de una conjetura y aunque sea verdadera para un número finito de casos no significa que sea verdadera para todo el universo, es decir, par todo número natural mayor que 1, es aquí donde la matemática como ciencia deductiva difiere de las llamadas ciencias inductivas. Ahora se realiza la demostración formal por el principio de inducción matemática.

Se demuestra que $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para n ≥1

[14] Artículo del Autor publicado en la Revista del departamento de matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, Octubre 2004 páginas 11 a 16

primer paso: Se verifica que la proposición es válida para el valor inicial $n_0=1$, en efecto: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$ es verdadera.

segundo paso: Se enuncia la hipótesis de inducción en términos del número natural k, es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tercer paso: utilizando la hipótesis de inducción y otros resultados demostrados anteriormente se demuestra que la proposición es verdadera para el sucesor de k que es k+1, sugiriendo considerar la suma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 + (k+1)^2$ que se manipula algebraicamente justificando cada paso:

por asociatividad: a+b+c= (a+b)+c se tiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + (k+1)^2$$

por hipótesis de inducción

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

por distributividad: ab+ac=a(b+c)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

por definición de suma de fracciones

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}\right]$$

por distributividad y reducción de términos semejantes:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\ \frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$

por factorización de trinomios

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\ \frac{(k+2)(2k+3)}{6}$$

reescribiendo en términos de k+1

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

de donde se tiene que la proposición es válida para k+1.

cuarto paso: La conclusión es: **p(n):**

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \textbf{para } n \geq 1$$

La proposición **p(n)** demostrada por el principio de inducción matemática en el ejemplo anterior es utilizada en el cálculo integral como una fórmula elemental para la evaluación de integrales definidas por limites de sumas de Riemann.

Después de una exposición adecuadas de los métodos comúnmente utilizados en matemáticas se tiene el siguiente capitulo referente a conclusiones y posibles líneas de investigación en el futuro como también una breve descripción de la relación de esta obra con el contexto nacional.

CONCLUSIÓN

En esta obra se tiene una exposición sintáctica de elementos metamatemáticos enmarcados en la contemporánea Teoría de la demostración o también llamada Teoría de la prueba establecida en el siglo XX como la magnifica culminación de un proceso mostrado en la parte histórica de la obra.

Para apreciar y descubrir la naturaleza y poder de la matemática se ha mostrado en esta obra una selección adecuada de demostraciones utilizando los esquemas o métodos de demostración donde la mayoría fueron realizadas por el autor pero también se tiene bellísimas demostraciones matemáticas clásicas.

No solamente se construyeron las demostraciones con el rigor matemático necesario por excelencia, sino también se da una relación explicita de la conclusión obtenida con otros tópicos matemáticos que generalmente son de un nivel superior.

Es valiosísimo desde diferentes puntos de vista, la exposición en esta obra de la componente heurística en algunas demostraciones intentando mostrar cuando corresponda, todo el proceso relacionado con el descubrimiento, construcción y demostración de una conjetura.

Así es como se construye el conocimiento matemático, los resultados nuevos dependerán de los resultados anteriores, es decir que para demostrar una proposición se necesitan considerar proposiciones verdaderas como axiomas o teoremas que son verdades matemáticas demostrables. Pero al modificar los axiomas pertenecientes a un sistema axiomático formal se tendrá como consecuencia la construcción de otras teorías con otras leyes donde el concepto de verdad no es absoluto, teniendo como ejemplo sobresaliente la modificación del Quinto postulado de Euclides para dar origen a las geometrías no Euclidianas como se muestra en la parte axiomática de esta obra.

Solamente una advertencia al respecto, la matemática no solamente consiste en la deducción formal sino que es una ciencia donde también se tienen procesos creativos en el descubrimiento o redescubrimiento de conjeturas.

Los sistemas axiomáticos perfeccionados en el siglo XX inciden actualmente en la expansión de la matemática siendo el método usado por excelencia. Pero los sistemas axiomáticos no son exclusivos de la matemática sino que se pueden aplicar en áreas tan diversas como por ejemplo en economía y en la genética, teniéndose como consecuencia un análisis lógico posiblemente inductivo y metodológico de las hipótesis y teoría correspondientes.

Constituye un desafío actual la axiomatización de teorías científicas alcanzando avances significativos en áreas insospechadas ajenas o subordinadas a las matemáticas.

El curriculum nacional base editado por el Ministerio de Educación de Guatemala dicta directrices oficiales en educación, específicamente en el área de matemáticas de la escuela secundaria, que es una componente del nivel medio del sistema educativo nacional, se tiene que la demostración en matemáticas constituye un propósito fundamental según los lineamientos generales del Ministerio de Educación de Guatemala:

… orientar el desarrollo del pensamiento analítico y reflexivo, mediante la integración de la búsqueda de patrones y relaciones; la interpretación y el uso de un lenguaje particular, simbólico, abstracto; el estudio y representación de figuras; la argumentación lógica y ***la demostración****; …son propósitos del área de matemáticas.* (curriculum nacional base, año 2007, página 166)

En ese mismo nivel educativo se estudian fundamentos de lógica formal en su dimensión puramente semántica como son: valor de verdad, proposiciones simples, conectivos lógicos, proposiciones compuestas, tablas de verdad, tautológica, contradicción, contingencia, tablas de verdad, cuantificadores, proposiciones abiertas y demostraciones.

Se tiene definido como *contenido procedimental* el estudio de la geometría euclidiana como una formulación axiomática que básicamente es un ejemplo sobresaliente de sistema axiomático formal.

En los apuntes metodológicos del curriculum nacional base se afirma:

"…Se considera importante propiciar el razonamiento aplicado en demostraciones en conjuntos de objetos ideales bien definidos que se rigen por axiomas, conduciendo a los y las estudiantes a desarrollar altos niveles de comprensión y abstracción." (Curriculum nacional base, año 2007, página 184)

De aquí la importancia del desarrollo del razonamiento correcto es decir, la argumentación válida y sus relaciones con otras áreas que se tendrían que desarrollar sistemáticamente a lo largo de todo el nivel medio nacional previo a la educación superior donde puede ser formalizado completamente de acuerdo a perfiles profesionales actualizados.

En la investigación documental el autor ha descubierto que las publicaciones a nivel nacional relacionadas con el tema "Métodos de demostración en matemática" son realmente escasas, proveyendo esta obra una complementación de ese vacío. El tema de los métodos de demostración es amplísimo y puede ser investigado y estudiado desde diferentes perspectivas como las siguientes:

Complementar esta investigación con investigaciones sobre otros métodos de demostración en matemáticas que no son utilizados o conocidos ampliamente como por ejemplo el método de inducción matemática transfinito

Realizar investigaciones acerca de la generalización de los sistemas axiomáticos formales en su dimensión sintáctica y posteriormente semántica.

Realizar investigaciones sobre la aplicación de los sistemas axiomáticos generalizados en áreas propias y ajenas de las matemáticas como por ejemplo la deducción natural empleada en la deducción automática.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bochénski, I. M. (1966) Historia de la lógica formal. Madrid: Gredos.

[2]Crespo, C. R. (2005) El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo. Tesis de maestría en ciencias en matemática educativa. México: Cinvestav

[3]Copi, I. (1987) Lógica Simbólica. México: CECSA.

[4] Ferrater Mora, J.; Leblanc H. (1992) Lógica matemática. México: Fondo de Cultura Económica.

[5]Garrido, M. (2003) Lógica simbólica. Madrid: Tecnos
.

[6]Halmos, P. R. (1967) Teoría intuitiva de los conjuntos. México: CECSA.

[7]Hilbert, D.; Ackermann. (1962) Elementos de lógica teórica. Madrid: Tecnos.

[8]Kleene S. K. (1974) Introducción a la metamatemática. Madrid: Tecnos.

[9]Kline, M. (2004) Matemáticas para los estudiantes de Humanidades. México: Fondo de Cultura Económica.

[10]Mates., Benson. (1987) Lógica matemática elemental. Madrid: Tecnos.

[11]Ministerio de Educación (2007) Curriculum Nacional Base (CNB) Guatemala.

[12]Morales S., C., (2004) Demostración por inducción matemática. Revista del departamento de matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la USAC.

[13]Nidditch, P. H. (1983) El desarrollo de la lógica matemática. Madrid: Cátedra.

[14]Russell. B. (1988) Introducción a la filosófica matemática. España: Paidos.

[15]Tarski, A. (1951) Introducción a la lógica y a la metodología de la ciencias deductivas. Buenos Aires-México: Espasa-Calpe.