Jorge Luis Monroy Peralta

DERIVACIONES LÓGICAS DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE KURT GÖDEL

Asesor: Lic. David Ernesto Chacón Estrada

Universidad de San Carlos de Guatemala
FACULTAD DE HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Guatemala, octubre de 2017

Este estudio fue presentado por el autor como trabajo de tesis, requisito previo a su graduación de Licenciado en Filosofía.

Guatemala, octubre de 2017

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

Decidí realizar una investigación sobre las implicaciones que derivan del teorema de Incompletitud de Kurt Gödel, ya que es un campo que involucra el estudio de la lógica de primer orden. Kurt Gödel realizó trabajos en lógica de primer orden, matemática y filosofía. Su pensamiento ha tenido influencia en la lógica intuicionista posterior y la filosofía.

La lógica inicia con el presocrático Parménides cuando formula su principio de identidad, luego continúa con Aristóteles, al realizar éste último un análisis del lenguaje y crear la lógica formal.

En el Capítulo I se revisa la historia de la lógica. Se principia con la lógica antigua, luego la lógica medieval, la lógica moderna y por último la lógica matemática.

En el Capítulo II se revisan los antecedentes del primer Teorema de Incompletitud de Kurt Gödel y se describe dicho primer teorema.

En el Capítulo III se describen los campos en los que incursiona Kurt Gödel, especialmente el Racionalismo y el Realismo Platónico.

En el Capítulo IV se formulan las conclusiones y recomendaciones para el presente trabajo. En la formulación de la presente tesis se presentan brevemente los cambios que han ocurrido dentro del campo de la lógica a través del tiempo.

2. OBJETIVOS

2.1. GENERAL

2.1.1 Describir las derivaciones lógicas del primer teorema de incompletitud de Kurt Gödel.

2.2. ESPECÍFICOS

2.2.1 Describir brevemente la historia de la lógica desde Parménides a John Stuart Mill.

2.2.2 Describir los precursores de la lógica matemática como base para la lógica de primer orden de Gödel.

2.2.3 Describir brevemente el primer teorema de incompletitud de Gödel

3. JUSTIFICACIÓN

La importancia de este trabajo radica en describir cómo Kurt Gödel dedujo que era imposible englobar la aritmética con postulados y axiomas de la lógica; problema que había sido propuesto por David Hilbert y abordado por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead en su “Principia Mathematica”. Kurt Gödel demostró (mediante su teorema de incompletitud) que dado un sistema formal que utilice la aritmética de Peano, no puede tener ambas características de completitud y de consistencia. Además, que existen postulados que no se pueden probar o negar dentro del mismo sistema.

4. METODOLOGÍA

4.1. Descripción de los antecedentes de la lógica formal.

4.2. Descripción del teorema de incompletitud de Kurt Gödel.

4.3. Derivaciones lógicas posteriores a la formulación del teorema de incompletitud.

5. MARCO TEÓRICO

5.1. CAPÍTULO I. BREVE RESEÑA HISTÓRICA DE LA LÓGICA

5.1.1 DE PARMENIDES A JOHN STUART MILL

El camino que ha recorrido la lógica ha sido muy variado. Algunas de las bases de la lógica moderna fueron desarrolladas por pensadores griegos que existieron cinco siglos antes de nuestra era. Otros desarrollos se presentaron con el auge de la lógica matemática, y al conjugar estos avances se obtuvieron nuevos esquemas y herramientas de análisis lógico. Se presentaron varias paradojas que fueron analizadas en *Principia Matemática* por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead. Luego se obtuvieron nuevos axiomas que permitieron nuevos análisis.

En esta breve reseña histórica se pretende mostrar los avances más significativos que ha presentado la lógica. La finalidad es abordar el Teorema de Incompletitud de Kurt Gödel que presenta características lógicas muy especiales, que son el tema central de esta tesis.

LÓGICA ANTIGUA

Parménides, (540 ac-470 ac), pensador griego del siglo V antes de nuestra era que hace una distinción entre la vía de la opinión y la vía de la verdad. Considerada la verdad como “el ser”. “El ser es, el no ser no es”. Este enunciado es conocido como Principio de Identidad. Aunque se encuentra enunciado de forma ontológica, es el primer principio de la lógica. En lógica de primer orden, el principio de identidad se expresa como: $\forall x\ x=x$. El principio de no contradicción fue formulado también por Parménides al explicar su principio de identidad. Posteriormente será utilizado por Aristóteles en su lógica formal, así como el principio del tercero excluido. El principio de razón suficiente pertenece a la lógica moderna.[1] En contraste al pensamiento de Parménides va a surgir el pensamiento de Heráclito.

Heráclito, (544 ac-484 ac), filósofo quien consideró que toda la realidad está en constante devenir y cambio. En dicho cambio existe armonía debido al Logos. La ley del orden es el logos, que es de origen divino.

Zenón de Elea, (490 ac-430 ac), Aristóteles dio crédito a Zenón por lo que llamo reducción al absurdo (*ad absurdum*), permitiendo al otro admitir una imposibilidad o contradicción. Zenón estableció argumentos por refutación y utilizó este método para confrontar a sus adversarios.[2]
El mérito de Zenón es que divide el espacio en secuencias infinitas y considera el tiempo continuo, dando lugar a sus paradojas.

Platón, (427 ac-347 ac), alumno directo de Sócrates quien le formó en el uso de la Mayéutica o arte de la refutación. En sus obras, Platón utiliza un método conocido como Dialéctica (derivada del diálogo). Se contrastan diferentes posiciones hasta alcanzar el conocimiento que solamente es asequible al filósofo. Trata de conciliar el ser de Parménides con el devenir de Heráclito y concluye que existe un mundo de ideas o de formas perfectas. Asimismo, que existe una dialéctica ascendente que se encuentra liberada de los sentidos y lleva hasta la idea suprema del bien. Otra dialéctica descendente que parte de las ideas hacia el mundo sensible. Se ve en Platón una distinción entre lo general y lo particular, al concebir una totalidad englobada en las ideas del bien y de los individuos.[3]

---

[1] STANNARD, Jerry. *Parmenidean Logic* [Publicación periódica] // The Philosophical Review. - 08 de 02 de 1960. - pags. 526-533.

[2] BENNET, Deborah. *Logic Made Easy* [Libro]. - New York : W.W. Norton, 2004, pag. 32.

[3] ROSS, W.D. *Teoría de las ideas de Platón* [Sección de libro] // Teoría de las ideas en Platón. - Madrid : Cátedra, 1986, pags. 3-14.

“La posición platónica afirma que las verdades matemáticas son reales y existen, aunque las conozcamos o no… Desde este punto de vista la proposición “*La conjetura de Goldbach* se mantiene” puede ser cierta o falsa, aún cuando no pueda probarse. La mayoría de matemáticos son platónicos… Los platónicos lo ven de esta manera: La verdad eterna ha estado antes de que nosotros tratáramos de atraparla con la lógica”.[4]

Aristóteles, (384 ac-322 ac), inventor de la lógica formal o clásica. Trabajó mediante su teoría hilemórfica (de forma y materia), cuatro causas para explicar la realidad. La causa material, la causa formal, la causa eficiente y la causa final.

Con las obras de Aristóteles se trabajó un compendio llamado El órganon (herramienta), el cual comprende: 1. Las categorías 2. Las proposiciones 3. Los analíticos 4. Los tópicos y 5. Las refutaciones sofisticas.[5]

Proposición, una proposición es un discurso enunciativo que expresa un juicio y posee un significado que es verdadero o falso. La lógica se encarga de analizar la estructura y el valor de verdad de las proposiciones, así como su clasificación.[6]

Deducción lógica, es una forma de razonamiento donde se infiere una conclusión a partir de una o varias premisas. En la argumentación deductiva válida la conclusión debe ser verdadera si todas las premisas son verdaderas.[7]

---

[4] BORNAT, Richard. *Proof and Disproof in Formal Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2017, pag. 34.

[5] BOCHENSKI, Jozef. *Historia de la Lógica Formal* [Libro]. - Madrid : Gredos, 1985, pag. 11.

[6] GABBAY, Dov y WOODS, John. *Handbook of the History of Logic: Mediaeval and Renaissance Logic, Vol. 2* [Libro]. - Holland : Elsevier, 2008, pag. 161.

[7] BENNET, Deborah. Op cit., pag. 39.

Silogismo, la noción central del sistema lógico de Aristóteles es el silogismo. Un ejemplo clásico de silogismo es el siguiente:

Todos los hombres son mortales.

Todos los griegos son hombres.

Por lo tanto, todos los griegos son mortales.

La silogística, en los *Primeros Analíticos* se muestra la lógica aristotélica conocida como la silogística. La teoría ofrece criterios para evaluar la validez de ciertos tipos muy específicos de silogismos, los silogismos categóricos. Para definir lo que es un silogismo categórico, primero es necesario definir lo que es una proposición categórica. Una proposición es categórica si tiene alguna de las siguientes cuatro formas:

Todo S es P.

Ningún S es P.

Algunos S son P.

Algunos S no son P.

Aristóteles distingue cuatro relaciones que un predicado puede tener con el sujeto. Puede proporcionar su definición, su género, una propiedad única o una propiedad accidental. Estas son denominadas propiedades categóricas o categorías aristotélicas. Filósofos de la época moderna trabajarán posteriormente en las categorías epistemológicas.[8]

Cada proposición categórica contiene dos términos: un sujeto (S) y un predicado (P). Un silogismo categórico está compuesto por exactamente tres proposiciones categóricas (dos premisas y una conclusión), y ambas premisas comparten

[8] CORREIA, Manuel. *La actualidad de la lógica de Aristóteles* [Publicación periódica] // Revista de Filosofía, Vol. 62. – 2006, pags. 139-150.

exactamente un término (llamado el término medio), que además no está presente en la conclusión.[9]

Figuras, se llama figura a cada una de las posibles disposiciones en que pueden estar los tres términos de un silogismo. Las figuras quedan determinadas por la posición del término medio.
Existen cuatro figuras posibles (aunque Aristóteles sólo reconoció las tres primeras). La cuarta figura pertenece a Galeno.[10]

I	II	III	IV
M-P	P-M	M-P	P-M
S-M	S-M	M-S	M-S
S-P	S-P	S-P	S-P

Existen cuatro tipos de enunciados categóricos y cada silogismo está compuesto por tres enunciados, hay 4^3 combinaciones posibles o modos. Así, en la silogística hay 4^3 por 4 figuras, 256 modos posibles. En cada figura hay 6 modos válidos, de modo que hay 24 modos válidos en total.[11]

Otras aportaciones a la lógica, en el libro IV de la metafísica, Aristóteles trata con la noción de verdad y discute los principios de no contradicción y tercero excluido.[12]
Lógica Modal, en *De Interpretacione*, Aristóteles hace algunas observaciones y propuestas de lógica modal, así como una discusión acerca de la relación entre el tiempo y la necesidad. En lógica modal se considera que el predicado contiene un modo: de necesidad o posibilidad y de contingencia o imposibilidad. Aristóteles

[9] SPADE, Paul. *Thoughts, Words and Things*: *An Introduction to Late Mediaeval Logic and Semantic Theory* [Libro]. - Philadelphia : Philpapers, 2002, pags. 19-20.

[10] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 327.

[11] Ibid., pags. 165-166.

[12] BADESA, Calixto. *Resumen de Lógica Aristotélica* [Informe]. - Barcelona : Ariel, 2010, pag. 1.

también reconoció la existencia de los argumentos inductivos, en los cuales se va "de lo particular a lo universal", pero no los trató a profundidad.[13]

Interpretación de los escritos Aristotélicos, todas las obras de lógica fueron escritas en el período del Liceo, entre (335 y 322 antes de nuestra era).
Las categorías es un libro entre lógica y metafísica donde Aristóteles estudia los predicados. En *De Interpretatione*, Aristóteles estudia los enunciados.

Los Primeros Analíticos están dedicados al estudio de los silogismos o la lógica formal aristotélica. Los últimos 5 capítulos del segundo libro los dedica a estudiar los argumentos por inducción.

Los Segundos Analíticos es una obra de filosofía de la ciencia que contiene la teoría de la definición y la concepción aristotélica de la ciencia.

Los Tópicos son un manual de dialéctica. Los debates dialécticos ayudan a discernir entre lo verdadero y lo falso.

Las Refutaciones Sofísticas son un apéndice de *Los Tópicos* que trata de los diversos tipos de falacias. Aristóteles examina gran cantidad de argumentos falaces explicando en cada caso donde está la incorrección.[14]

Tipos de Enunciados, los términos singulares son aquellos que pueden desempeñar la función de sujeto, pero no de predicado. Los términos generales son los que pueden desempeñar tanto la función de sujeto como la de predicado.
Si a es un término singular, y S y P son términos generales. Según Aristóteles, los enunciados atributivos básicos son de alguno de los siguientes tipos:
Enunciados singulares: a es P (afirmación), a no es P (negación).

[13] BENNET, Deborah. Op cit., pags. 168-169.

[14] BADESA, Calixto. Op cit., pag. 1.

Enunciados indefinidos: S es P (afirmación), S no es P (negación).
Universal afirmativo (A): Todo S es P
Universal negativo (E): Ningún S es P
Particular afirmativo (I): Algún S es P
Particular negativo (O): No todo S es P (Algún S no es P)[15]

En la lógica aristotélica, todos los enunciados categóricos son considerados simples, es decir que no pueden ser analizados por otra estructura. La silogística aristotélica se circunscribe a los enunciados categóricos cuantificados.

Los cuatro enunciados categóricos cuantificados se pueden expresar de la forma: Asp (todo S es P), Isp (algún S es P), Esp (ningún S es P) y Osp (no todo S es P).

Las leyes básicas de la lógica aristotélica son las siguientes:
<u>Oposición</u>
Asp es verdadero si y sólo si Osp es falso. (Asp y Osp son contradictorios)
Esp es verdadero si y sólo si Isp es falso. (Esp e Isp son contradictorios).
Asp y Esp no pueden ser ambos verdaderos, pero sí ambos falsos. (Asp y Esp son contrarios).
Isp y Osp no pueden ser ambos falsos, pero sí ambos verdaderos. (Isp y Osp son sub contrarios, según la terminología medieval)
<u>Conversión</u>
Isp es lógicamente equivalente a Ips
Esp es lógicamente equivalente a Eps
Asp implica Ips
Esp implica Ops[16]

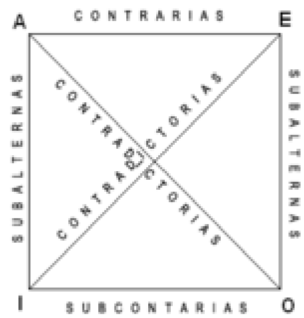
[15] ARISTÓTELES. *Órganon II* [Libro]. - Madrid : Gredos, 1993, pag. 29.
[16] BADESA, Calixto. Op cit., pags. 7-9.

En la Edad Media a las dos primeras leyes de conversión se les llamó “de conversión simple” y las dos últimas “de conversión per accidens”.

Los enunciados universales implican a los particulares correspondientes.

Asp implica Isp

Esp implica Osp[17]



Los lógicos posteriores a Aristóteles llamaron a los enunciados particulares subalternos de los universales correspondientes; esto es, Isp es subalterno de Asp y Osp es subalterno de Esp.

Con posteridad a Aristóteles las principales relaciones entre los enunciados categóricos se representaban mediante un diagrama que se llamó cuadrado de oposición.[18]

Euclides, (325 ac–265 ac), matemático griego, cuya obra “Elementos de Geometría”, es un tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

[17] Ibid., pag. 9.

[18] Ibid., pag. 4.

Axioma, en lógica y matemáticas es un principio básico que es asumido como verdadero sin recurrir a demostración alguna. El uso de axiomas para la resolución de problemas matemáticos empezó en la antigua Grecia, a partir del siglo V ac cuando Euclides lo utilizó en su Geometría Euclidiana. La lógica y las matemáticas puras empiezan con algunas proposiciones indemostrables de las que se derivan otras proposiciones (teoremas). Los axiomas de un sistema deben ser coherentes, evitando incurrir en contradicción. Deben ser independientes, ya que no deben derivarse de ningún otro y deben ser muy pocos en número.

Prueba por contradicción, el argumento por refutación puede probar solamente resultados negativos. Sin embargo, con la ayuda del doble negativo se puede probar toda clase de proposiciones afirmativas. La reducción al absurdo puede ser utilizada en pruebas asumiendo como falsa la proposición que se quiere probar. Una vez que hemos refutado la premisa por absurda, hemos probado que lo opuesto de lo que queremos probar es imposible. Ahora esto es llamada prueba indirecta o prueba por contradicción. Los estoicos utilizaban este método para validar las reglas de la lógica y Euclides empleaba esta técnica también.

Euclides utilizó este método de la prueba por contradicción para probar que existen un infinito número de números primos. Euclides alcanzó una contradicción en la prueba. Por la ley del tercero excluido, o hay un número finito de números primos o no lo hay. Euclides asumió que había un número finito y arribó a una contradicción. Llegando a la conclusión de que hay un número infinito de números primos.

Euclides utilizó la misma técnica para probar el teorema en geometría que los ángulos interiores son congruentes formados por una línea recta sobre líneas paralelas. Para probar esta proposición, comenzó asumiendo que los ángulos interiores que cruzan líneas paralelas no son congruentes (del mismo tamaño) y metodológicamente procedió lógicamente hasta que arribó a una contradicción.

Esta contradicción forzó a Euclides a concluir que la premisa inicial debía estar incorrecta y que los ángulos interiores eran congruentes. [19]

Aristóteles y los estoicos proveyeron el marco para la inferencia deductiva, armados con la ley del tercero excluido y la ley de no contradicción, nos legaron la base del sistema que permanece virtualmente sin cambio hasta este día.[20]

Teofrasto y Eudemo, (371 ac-287 ac), estos dos peripatéticos redefinieron la primera figura de Aristóteles que incluyó cada silogismo. Teofrasto reemplazó la contingencia doble de Aristóteles por una posibilidad que no dependiera de la necesidad.

Silogismo Hipotético,

Si algo es A, es B
Si algo es B, es C
Entonces si algo es A, es C
Y
Si algo es no B, es no A
Entonces si algo es A, es C[21]

Diodoro Crono y Filón de Megara, (405 ac-304 ac) consideraron una proposición compuesta, constituida de dos proposiciones conectadas por el condicional "si".
Un condicional es falso sí y solo sí su antecedente es verdadero y su consecuente es falso.

Lógica Modal, tanto Diodoro como Filón consideraron las cuatro modalidades:
1. Posibilidad 2. Imposibilidad 3. Necesidad y 4. No necesidad.
Las definiciones de Diodoro fueron:

[19] BENNET, Deborah. Op cit., pags. 33-34.
[20] Ibid., pag. 34.
[21] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 141.

La posibilidad en la cual es o será verdadero

La imposibilidad en la cual es falso y no será verdadero

La necesidad en la que es verdadero y no puede ser falso

La imposibilidad en la que o es falso o será falso[22]

Prior fue el fundador de la lógica del tiempo (también conocida como lógica temporal). Él quería analizar los argumentos de la lógica estoica de Diodoro Crono, quien había definido una proposición como posible, que fuera verdadera o que fuera a ser verdadera. Prior concibió la idea de usar un sistema lógico con operadores temporales análogos a esos de la lógica modal, e introdujo los conectivos:

F será el caso que

P ha sido el caso que

G será siempre el caso que

H ha sido siempre el caso que

Aquí F y P son modalidades del tipo diamante para G y H respectivamente. En el artículo "*La sintaxis de las distinciones de tiempo*", Prior llamó a esta lógica proposicional Cálculo PF.[23]

Crisipo de Solos, (280 ac–207 ac), trabajó en temas que van desde teoría del lenguaje, análisis de oraciones, expresiones singulares y plurales, tipos de predicados, proposiciones existenciales, conectivos oracionales, negaciones, disyunciones, condicionales, consecuencia lógica, formas de argumentación válidas, teoría de la deducción, lógica proposicional, lógica modal, lógica de

---

[22] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 513.

[23] COPELAND, Jack. *Arthur Prior* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 07 de 10 de 1996. - [Consultado el 08 de 04 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/prior/.

tiempos, lógica de suposiciones, lógica de imperativos, ambigüedad y lógica de las paradojas.[24]

Los estoicos en lugar de utilizar letras del alfabeto como variables, utilizaron números ordinales. En vez de hablar acerca de p y q (como hacemos hoy) o alfa y beta como Aristóteles, hablaron del primero y el segundo como variables proposicionales.

Crisipo es bien conocido por haber tomado cinco formas de inferencia proposicionales como indemostrables o básicas. Estas son:

1. Si la primera, entonces la segunda; pero la primera, entonces, la segunda (modus ponens)
2. Si la primera, entonces la segunda, pero no la segunda, entonces, no la primera (modus tollens)
3. Ninguna de las dos, ni la primera ni la segunda, pero la primera, entonces, no la segunda.
4. Cualquiera, la primera o la segunda, pero la primera, entonces, no la segunda. (disyunción exclusiva).
5. Cualquiera, la primera o la segunda, pero no la segunda, entonces la primera. (silogismo disyuntivo).

En base a estos cinco patrones de inferencia, Crisipo demostró y derivó otros patrones. En efecto parece que los Estoicos clamaron que estos cinco patrones eran completos ya que todas las formas válidas de inferencia pueden ser reducidas a ellas.[25]

[24] SPADE, Paul. Op Cit., pag. 25.

[25] Ibid., pags. 30-31.

Estoicismo, Juicio y raciocinio, (Epícteto, Séneca y Marco Aurelio), (Siglo II), los estoicos trabajaron en los dichos. Los dichos comprenden las interrogaciones, los imperativos, las inquisiciones, las hipótesis entre otros. Además, que la verdad es temporal y que los dichos pueden cambiar de valor de verdad. Esto los coloca en la "lógica de predicados". Asimismo, trabajaron con conectores lógicos como "y", o, "sí".

En esta época se introdujeron los conectivos "ahora" y "pero". La regla de inferencia utilizada entonces, era lo que hoy se conoce como antilogismo.[26]

El estoicismo fue la filosofía más influyente en el Imperio Romano. Su contribución más importante a la lógica consistió en acuñar el silogismo hipotético como un método de análisis.

Final de la lógica antigua, el trabajo de Teofrasto sobre el silogismo hipotético nunca fue muy influyente. Después de Crisipo no hubo ningún trabajo de lógica de importancia en Grecia.

Entre los autores que sirvieron para transmitir parte de la doctrina de la lógica antigua al latín de la edad media se encuentran: 1) Cicerón (106-43 ac), introdujo muchos de los términos griegos que se tradujeron al latín. 2) Apuleo, quien escribió *De Interpretatione* en latín. 3) Galeno (129 AD-199 AD), escribió una *Introducción a la lógica* que aún está disponible.[27]

A finales del segundo siglo y principios del tercero, encontramos a Sexto Empírico. Él escribió en griego y es la mejor fuente de información sobre la Lógica Estoica.

---

[26] BALTZLY, Dirk. *Stoicism* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 15 de 04 de 1996. - [Consultado el 07 de 10 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/stoicism/.

[27] SPADE, Paul. Op Cit., pags. 31-32.

Porfirio, el pupilo y biógrafo de Plotino, escribió un trabajo en griego llamado *Isagoge* (introducción), que era una introducción a las categorías de Aristóteles. Este trabajo tuvo una gran influencia en la Edad Media con respecto al problema de los universales.

Plotino, el fundador del Neoplatonismo, era hostil a muchos aspectos de la lógica Aristotélica, esta actitud no era compartida por Porfirio (232-305 AD), su editor y seguidor, quien incorporó los textos aristotélicos dentro del currículo neoplatónico. Porfirio desarrolló una teoría de diferentes objetos donde se aprecia que la posición platónica trata de lo suprasensible y la de Aristóteles de lo sensible.[28]

Otros lógicos que aportaron a la lógica antigua fueron: Marius Victorinus en el siglo IV. De sus obras sólo ha sobrevivido "*Sobre las definiciones*". Marius Victorinus influenció a San Agustín (354-430), y se atribuye la obra "*Dialéctica*" a él.[29]

LOGICA MEDIEVAL

Boecio, (480-524), filósofo y político del estado romano.

Boecio tradujo *Las Categorías* y *De Interpretatione* de Aristóteles y la *Isagoge* de Porfirio. Estos tres textos son los únicos originales de lógica griega que existen. Junto con los trabajos de Boecio se denominaron Lógica Vetus (Lógica vieja)[30]

Anicius Severinus Manlius Boethius era fluido en griego y en contacto con el mundo griego intelectual. La contribución de Boecio a la lógica se da como traductor, comentador y escritor de libros de texto.[31]

---

[28] Ibid, pag. 8.

[29] Ibid, pag. 4.

[30] Ibid., pag. 56.

[31] MARENBON, John. *Anicius Severinus Manlius Boethius* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 06 de 05 de 2005. - [Consultado el 16 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/boethius.

Boecio al traducir las obras del griego al latín fue cuidadoso en conservar el significado del original.[32] Esto fue sumamente valioso en la edad media cuando se retomó el estudio de la lógica.

Juan Escoto Eriúgena, (815-877), Eriúgena (quiere decir 'nacido en Irlanda'). Es el creador del primer gran sistema filosófico de la edad media.[33]

En su obra "*De Divisione Naturae*", rechaza la creencia cristiana de que el universo fuera creado de la nada. Eriúgena afirma que la razón no necesita ser sancionada por la autoridad; la razón es en sí misma la base de la autoridad.

La obra "*Periphyseon*" es donde Eriúgena desarrolla su visión lógica como un tratado de la naturaleza universal en formas diferentes creadas y no creadas.

Su obra se basa en las 10 categorías Aristotélicas que habían sido ya trabajadas por San Agustín.

El carácter de la lógica de Eriúgena es utilizar las Categorías Aristotélicas para construir su metafísica. Él puede ser el ejemplo de una lógica platónica en la edad media.[34]

Avicena, (Ibn-Sina) (980-1037). La filosofía de Avicena era una combinación de la filosofía de Aristóteles y del neoplatonismo. Escribió varias S*umma philosophiae.*

En lógica escribió:

1. *Eisagoge* (La *Isagoge* de Porfirio)

---

[32] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 7.

[33] MORAN, Dermot. *John Scottus Eriugena* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 28 de 08 de 2003. - [Consultado el 26 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/scottus-eriugena/

[34] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pags. 26-34.

2. *Categorías* (*Las categorías* de Aristóteles)
3. *De Interpretación* (*De Interpretatione* de Aristóteles)
4. *Silogismo* (*Los Analíticos Primeros* de Aristóteles)
5. *Demostración* (*Los Analíticos Posteriores* de Aristóteles)
6. *Dialéctica* (*Los Tópicos* de Aristóteles)
7. *Sofística* (*Las Refutaciones Sofísticas* de Aristóteles)
8. *Retórica* (*La Retórica* de Aristóteles)[35]

Pedro Abelardo, (1079-1142), filósofo y teólogo francés del siglo XII. Nació en Le Pallet (Bretaña). La principal tesis dialéctica de Abelardo es que la verdad debe alcanzarse sopesando con rigor todos los aspectos de una cuestión.[36]

Su principal obra en lógica es "*La Dialéctica*", que fue probablemente escrita por el año 1110. Según Abelardo, el estudio de la lógica se basaba en 3 autores, dos libros de Aristóteles, *Las categorías*, *De Interpretatione* y uno de Porfirio, el *Isagoge*, además de cuatro de Boecio: *De divisione*, *Los tópicos*, *Los silogismos categóricos* y *Los silogismos hipotéticos*.

Abelardo reaccionó en contra de las teorías del realismo extremo, negando que los conceptos universales tengan existencia independiente fuera de la mente. Según Abelardo, 'universal' es una palabra funcional que expresa la imagen combinada de asociaciones comunes de palabras dentro de la mente.

Para Abelardo los universales son categorías lógico-lingüísticas que relacionan el mundo mental con el mundo físico.

---

[35] GUTAS, Dimitri. *Ibn Sina o Avicena* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 15 de 09 de 2016. - [Consultado el 24 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/ibn-sina/.

[36] KING, Peter. *Peter Abelard* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 03 de 08 de 2004. - [Consultado el 28 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/abelard/.

Sufrió cantidad de calamidades por lo cual escribió la obra "*Historia Calamitatum*".[37]

Al-Ghazali, (1056-1111), su verdadero nombre era Abu Hamid Muhammad Al-Ghazali. Escribió un tratado que contenía lógica, física, metafísica y teología escrito en persa.[38]

Al-Ghazali hizo la distinción entre imaginación (imaginatio) y creencia (credulitas) en su "*Tractatus de lógica*". El tipo de conocimiento que es mediado por la imaginación llega a través de definiciones y descripciones y el tipo de conocimiento que es mediado por la creencia llega a través de argumentos. La división de la lógica que propone es:

1. Los términos y como dan significados (intellectiones)
2. Los conceptos y sus divisiones
3. Las proposiciones y su composición
4. Las pruebas que se subdividen en materiales y formales.
5. En este tiempo existía la controversia que la lógica era la ciencia del discurso (scientia sermocinalis) o que era la ciencia de la razón (scientia rationalis).[39]

Averroes, (Ibn-Rushd) (1126-1198), filósofo y teólogo islamista suní, introductor del pensamiento aristotélico en Occidente.

Averroes sitúa el origen del intelecto en la percepción sensible de los objetos individuales, lo que conlleva a la universalización. El proceso es sentir, imaginar y captar el universal.

[37] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pags. 73-83.

[38] GRIFFEL, Frank. *Al-Ghazali* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 14 de 08 de 2007. - [Consultado el 28 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/al-ghazali/.

[39] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 286.

Las obras importantes de Averroes fueron sus comentarios para la comprensión de textos difíciles de entender de Aristóteles. También trabajó en proposiciones modales.[40]

Guillermo de Ockham, (1287-1347), filósofo inglés y teólogo escolástico. A él se atribuye el principio de economía conocido como la Navaja de Ockham. Cuando dos o más explicaciones se ofrecen para un fenómeno, la explicación más simple es preferible; no deben multiplicarse las entidades sin necesidad.[41] Este principio es muy utilizado en la actualidad en la realización de investigaciones.

Para Ockham sólo los individuos existen y los universales son producto de la abstracción de la mente humana.

En la primera parte de la "*Suma Lógica*" Ockham trató del término y de su capacidad significativa y suposicional. La significación de los términos de primera y segunda intención y lo que suponen los términos en las proposiciones.[42]

En lógica, Ockham trabajó en lógica trivalente, en el que hay tres valores de verdad, Verdadero, Falso y otro indeterminado. La lógica trivalente fue formulada hasta 1920 por Lukasiewicz, Lewis y Sulski y su forma axiomática por Grigore Moisil.

La lógica trivalente de Lukasiewicz utiliza los conectores lógicos negación, conjunción, disyunción e implicación. De manera independiente Emil Post demostró que para una lógica trivalente no vale el principio del tercero excluido y que todos los conectivos de cualquier lógica trivalente pueden expresarse como combinación de la disyunción y la negación.[43]

---

[40] Ibid., pag. 293.

[41] BENNET, Deborah. Op cit., pags. 155.

[42] HAAPARANTA, Leila. *The Development of Modern Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2009, pag. 38.

[43] Lógica trivalente. [En línea] // Wikipedia. - [Consultado el 22 de 04 de 2017]. - Disponible en: https://es.m.wikipedia.org/wiki/logica_trivalente.

INTERREGIO (ENTRE LA LOGICA MEDIEVAL Y LA MODERNA)

El período entre la lógica escolástica medieval y la lógica matemática moderna se puede considerar que comenzó a mediados del siglo XV.

Valla, (1406-1457), Laurentius Valla era su nombre latino.

Valla no proporcionó definiciones de las figuras silogísticas ni modales, asumiendo que eran ya conocidas. Se concentró en las primeras dos figuras de los silogismos de Aristóteles sin considerar las cinco modales de Teofrasto y Eudemo. Para lograr esto tuvo que rechazar la subalternación, la conver*sión y la reducción al absurdo.*

En su obra, Valla atacó varias posiciones aristotélicas. Redujo el número de categorías de 10 a 3, criticó el cuadrado de oposición, y rechazó la tercera figura de la silogística. Clasificó la dialéctica como parte de la retórica.[44]

Melanchthon, (1497–1560), reformador religioso y filósofo alemán. Philip Schwarzerd, era su verdadero nombre.

La importancia de Felipe Melanchton es que realizó sumarios simplificados de la lógica aristotélica que fueron utilizados en Alemania. Publicado en 1520, su "*Compendiaria dialectices ratio*" se volvió muy popular. Melanchton es parte de la lógica humanística al igual que Rodolfo Agrícola, quien escribió "*De inventione dialectica libri tres*", publicado en 1515. Agrícola se enfocó en la invención utilizada en los tópicos para la argumentación.[45]

Petrus Ramus, (1515-1572), filósofo y matemático francés. Pierre de la Rameé, su verdadero nombre, nació en el distrito de Vermandois, en París.

---

[44] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 80-81.

[45] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pag. 625.

Los intentos de Ramus para reformar la ciencia de la lógica despertaron muchas hostilidades entre los partidarios del Aristotelismo, y cuando su polémico tratado "*Animadversiones in Dialecticam Aristotelis*" (Criticas a la dialéctica Aristotélica) apareció en 1543, fue atacado con dureza por miembros del profesorado de la Sorbona de París. Fue asesinado durante la masacre de la Noche de San Bartolomé. Los seguidores de Ramus, conocidos como Ramistas, constituyeron durante bastante tiempo un influyente grupo de filósofos.[46]

Lógica de Ramus, Ramus expuso un silogismo contraído (una versión de la tercera figura Aristotélica) y un silogismo explicativo (la síntesis de la segunda y primera figura Aristotélica). Escribió un tratado de lógica simplificada conocida como: "*Dialectique*" (1555).

La Dialectique contenía dos partes. La primera cubría los tópicos Aristotélicos y la segunda los juicios, una obra simplificada de los silogismos Aristotélicos.

Los textos de Ramus fueron utilizados juntamente con los de Melanchton en las universidades del centro de Europa para la enseñanza de la lógica.[47]

LOGICA EN EL MODERNISMO

Francis Bacon, (1561-1626), filósofo y estadista inglés, uno de los pioneros del pensamiento científico moderno.

En 1620 se publicó su "*Novum Organum*", en el cual trata de la Teoría de la Inducción y ataca al método silogístico.[48]

---

[46] SELLBERG, Erland. *Petrus Ramus* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 09 de 05 de 2006. - [Consultado el 19 de 05 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/ramus/.

[47] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pags. 627-628.

[48] KLEIN, Jürgen. *Francis Bacon* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 29 de 12 de 2003. - [Consultado el 20 de 03 de 2017]. Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/bacon/.

La lógica medieval se dividía en: lógica antiqua (lógica antigua), lógica vetus (lógica vieja), lógica nova (lógica nueva) y lógica moderna (lógica modernorum).

La lógica vetus estaba compuesta por *Las categorías* y *De interpretatione* de Aristóteles, el *Isagoge* de Porfirio y *Los comentarios* de Boecio.

La lógica nova incluyó *Los Analíticos Primeros*, *Los Tópicos*, *Las Refutaciones Sofísticas* y posteriormente fueron añadidos *Los Analíticos posteriores*. La Lógica Antiquorum comprendía todos los trabajos de la lógica vetus y la lógica nova.

La lógica modernorum incluía los trabajos que no tenían antecedentes dentro de la lógica antiquorum.

Se considera como el fundador de la lógica modernorum a Pedro de España. "*El Tractatus*" de Pedro de España era el más famoso e influyente texto de lógica del siglo XIV. Otro texto influyente fue "*La introducción a la lógica*" de William de Sherwood. Menos utilizados fueron los textos "*Summulae Dialectices*" de Roger Bacon y "*La Lógica*" de Lambert de Auxerre.

En el siglo XIII, la lógica era una herramienta o un arte con la que comenzaba toda ciencia. Todo estudio debía comenzar con la lógica.
Ninguno de estos libros contiene una discusión sobre silogística modal, solamente se encuentra una discusión de las reglas de conversión modal en los libros de Roger Bacon y de Lambert de Auxerre.[49]

Port-Royal, abadía femenina fundada en 1204, restaurada por la familia Arnauld a finales del siglo XVI en Francia.

Publicaron su Gramática general y razonada en 1660 y la lógica de Port Royal en 1662.

[49] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pags. 282-283.

La obra "*Lógica o el arte del pensamiento*", popularmente conocida como "*La lógica de Port Royal*" fue el libro de texto de lógica más importante posterior al período medieval hasta mediados del siglo XIX. Publicado anónimamente, se atribuye a Antoine Arnauld (1612 a 1694) y a Pierre Nicole (1625 a 1695).

Descartes tuvo mucha influencia en Antoine Arnauld y Pierre Nicole, quienes conocieron su trabajo en intuición, inferencia y método, ya que fue crítico de la silogística Aristotélica y contiene discusiones en la clarificación de los conceptos, falacias informales y probabilidad.

El aporte cartesiano es el de distinguir lo verdadero de lo falso.

La lógica de Port Royal fue organizada de acuerdo al *Órganon* Aristotélico, Las *Categorías* tratando con términos, *De Interpretatione* con proposiciones, *Los Primeros Analíticos* con argumentos y los *Analíticos Posteriores* y los *Tópicos* con el método. De esto resulta que la clasificación del trabajo de la lógica de Port Royal fue: Parte I: conteniendo reflexión en las ideas y como son concebidas, Parte II: reflexiones sobre los juicios, Parte III: sobre el razonamiento y Parte IV: sobre el método.[50]

Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646-1716), filósofo y matemático alemán, considerado como uno de los mayores intelectuales del siglo XVII. Nacido en Leipzig.[51]

Leibniz fue considerado un genio universal por sus contemporáneos y es considerado un pionero en el desarrollo de la lógica matemática.

Los primeros trabajos en lógica de Leibniz se hacen evidentes en su obra "*Dissertatio de Arte Combinatoria*", que se encuentra subdividida en 12 problemas

[50] GABBAY Dov y WOODS John. Op cit., pags. 675-678.

[51] LOOK, Brandon. *Gottfried Wilhelm Leibniz* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 22 de 12 de 2007. - [Consultado el 25 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/leibniz/.

de combinaciones y permutaciones. Su enfoque a la silogística consistió en la discusión de un lenguaje simbólico basado en una representación numérica de los conceptos.[52]

Leibniz agregó a la silogística aristotélica, singular (S) e indefinido (I), resultando cuatro cantidades: universal (U), particular (P) y las dos antes mencionadas. Además, Afirmativo (A) y Negativo (N). Así, las tres proposiciones de las que consta el silogismo (dos premisas y una conclusión), se tiene: (4^3por2^3)=512 por 4 figuras, obtenemos 2048 modos de figuras.

El método por el cual se excluyen los silogismos es mediante las siguientes cuatro reglas:

1. Nada sigue de puros particulares
2. Ninguna conclusión puede ser más fuerte que la premisa menor
3. Nada sigue de puros negativos y
4. La conclusión sigue a la calidad de la premisa menor.

Al aplicar estas reglas, Leibniz obtiene 88 modos válidos silogísticos. Leibniz reduce los silogismos válidos a 24, 19 clásicos y 5 nuevos que obtiene al aplicar la cuarta figura y subalternación a conclusiones universales.

Aplicando su cálculo de combinaciones, Leibniz dedujo utilizando la primera figura los modos válidos de la segunda y tercera figuras utilizando subalternación y los modos válidos de la cuarta figura utilizando conversión. De esta manera Leibniz completó la construcción de un sistema silogístico de carácter deductivo.[53]
Otro alcance en lógica de Leibniz en la obra "*De Arte Combinatoria*" es la construcción de un lenguaje simbólico en el que los números son utilizados para

[52] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 111-115.

[53] Ibid., pag. 102.

representar conceptos simples y sus combinaciones de acuerdo a clases. Leibniz utilizó fracciones para representar conceptos complejos, con el numerador indicando la posición del término correspondiente y el denominador indicando el número de clase. Esto sería de utilidad en la lógica inventiva, encontrando todos los posibles predicados para un sujeto dado, todos los posibles sujetos para un predicado dado y todos los posibles términos medios entre un sujeto y su predicado.

Leibniz no pretendía proporcionar una herramienta para el estudio del lenguaje sino construir un lenguaje simbólico que fuera más preciso y omitiera las ambigüedades propias del lenguaje.[54]

Monadología, Leibniz derivó este nombre del griego monas que significa unidad y de logos, tratado. Sería entonces el tratado de las mónadas o la ciencia de la unidad. Las monadas son los átomos espirituales de la realidad. No son átomos materiales porque la materia es divisible en partes. Las mónadas son unidades dinámicas con una fuerza interior. Existen mónadas que tienen conciencia, se perciben a sí mismas. Las mónadas son espejos indestructibles del universo. De esta visión Leibniz produce el mejor de los mundos.[55]

Immanuel Kant, (1724-1804), filósofo alemán, considerado por muchos como el pensador más influyente de la era moderna. Nacido en Königsberg (actual ciudad rusa de Kaliningrado) el 22 de abril de 1724.

Las Proposiciones, Kant diferenciaba los modos de pensar en proposiciones analíticas y sintéticas. Una proposición analítica es aquella en la que el predicado está contenido en el sujeto. Tales proposiciones son llamadas analíticas porque la

[54] Ibid., pag. 113.

[55] LEIBNIZ, Gottfried. *La Monadologia* [Libro]. - Santiago, Chile : ed. electrónica de www.philosophia.cl, 1713-1715, pag. 1-23.

verdad se descubre por el análisis del concepto en sí mismo. Las proposiciones sintéticas, en cambio, son aquellas a las que no se puede llegar por análisis puro. Todas las proposiciones comunes que resultan de la experiencia del mundo son sintéticas.[56]

Según Kant, las proposiciones pueden ser divididas también en otros dos tipos: empíricas (o a posteriori) y a priori. Las proposiciones empíricas dependen tan sólo de la percepción, pero las proposiciones a priori tienen una validez esencial y no se basan en tal percepción. La tesis sostenida por Kant en la "*Crítica de la razón pura*" consiste en que resulta posible formular juicios sintéticos a priori.[57]

Al explicar cómo es posible este tipo de juicios, consideraba los objetos del mundo material como incognoscibles en esencia; desde el punto de vista de la razón, sirven tan sólo como materia pura a partir de la cual se nutren las sensaciones. Los objetos, en sí mismos, no tienen existencia, y el espacio y el tiempo pertenecen a la realidad sólo como parte de la mente, como intuiciones.[58]

<u>Las Categorías</u>, Kant, dedujo que existen un número de conceptos a priori, llamados categorías. Dividió éstas en cuatro grupos: las relativas a la cantidad (que son unidad, pluralidad y totalidad), las relacionadas con la cualidad (que son realidad, negación y limitación), las que conciernen a la relación (que son sustancia-y-accidente, causa-y-efecto y reciprocidad) y las que tienen que ver con la modalidad (que son posibilidad, existencia y necesidad). Las intuiciones y las categorías se pueden emplear para hacer juicios sobre experiencias y percepciones pero, según Kant, no pueden aplicarse sobre ideas abstractas o conceptos cruciales como

---

[56] BORCHERT, Donald. *The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 09* [Libro]. - Detroit : Thomson Gale, 2006.

[57] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 143-146.

[58] JANIAK, Andrew. *Kant´s Views on Space and Time* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 10 de 10 de 2009. - [Consultado el 24 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/kant-spacetime/.

libertad y existencia sin que lleven a inconsecuencias en la forma de binomios de proposiciones contradictorias, o antinomias, en las que ambos elementos de cada par pueden ser probados como verdad.[59]

Las Antinomias, las antinomias parten de hechos naturales como el espacio, el tiempo o el movimiento. Una antinomia solo se presenta cuando son evidentes dos estados de cosas contradictorias o puede demostrarse válidamente a partir de premisas evidentes como verdaderas y falsas a la vez.[60]

Kant desarrolló cuatro antinomias basadas en cuatro categorías según el aspecto cuantitativo, cualitativo, relacional y modal.[61]

El método dialéctico, utilizado tanto por Hegel como por Marx, no fue sino el desarrollo del método de razonamiento articulado por antinomias aplicado por Kant.[62]

Intuiciones, Impresiones, Conceptos y Juicios, la estética trascendental se puede resumir de la siguiente forma:
Que las impresiones son las que ponen en marcha la mente humana. Que las impresiones son condición necesaria, pero no suficiente, para que se produzca el conocimiento sensible; hace falta el sujeto que conoce, y dos formas a priori de la sensibilidad: el espacio y el tiempo. El noúmeno, lo en-sí, hay que suponer que

[59] THOMASSON, Amie. *Categories* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 03 de 06 de 2004. - [Consultado el 29 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/categories/.

[60] SEIFERT, Josef. *¿Qué es una aporía?* [Publicación periódica] // International Academy of Philosophy. - 2011. - págs. 98-114.

[61] HIRSCHBERGER, Johannes. *Antinomias* [Sección de libro] // Historia de la Filosofía. Tomo II.. - Barcelona : Herder, 2000 .

[62] BORCHERT, Donald. Op cit., pags. 50.

existe, independientemente de que un sujeto lo conozca o no. Además, es causa de las impresiones que afectan nuestra sensibilidad. Cuando, gracias al espacio y al tiempo ordenamos las impresiones, se produce el conocimiento o representación sensible, es decir, podemos ver, oír, tocar; se ha realizado entonces la síntesis de aprehensión.

De esto Kant extrae dos conclusiones:

Existe un límite, entre lo que puede ser conocido de un modo objetivo y lo que no puede serlo, es decir, una demarcación clara entre ciencia y metafísica. Ese límite es la experiencia.

Los matemáticos pueden llegar a establecer verdades a priori sobre el espacio y aplicar esas verdades al mundo físico en la medida en que su ciencia tiene como objeto un espacio que es a priori.

El origen de todos nuestros conocimientos está en los sentidos. El espacio es la forma que aportamos para las representaciones externas. El tiempo es la forma pura que previamente aportamos tanto para lo externo como para lo interno.

Aparte de estas formas puras, la razón humana dispone de la facultad del entendimiento, con la utilización de las categorías.

Las intuiciones sensibles por sí mismas no engendran conocimiento. Las intuiciones sensibles constituyen la materia de conocimiento, en tanto se someten al entendimiento.[63]

---

[63] HANNA, Robert. *Kant´s Theory of Judgment* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 28 de 07 de 2004. - [Consultado el 18 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/kant-judgment/.

John Stuart Mill, (1806-1873), filósofo y economista británico, hijo de James Mill. Recibió de su padre una amplia y temprana formación.[64]

Mill trabajó un libro sobre lógica donde expone que conocemos las cosas por inferencia:

1. Cosas que sucedieron en nuestra ausencia
2. Eventos grabados en la historia y
3. Los teoremas de matemáticas.

Podemos inferir de:

1. Testimonio
2. Rastro de cosas pasadas
3. Las definiciones y
4. Axiomas de los libros de geometría.

Para Mill, la lógica no es la ciencia de la creencia sino la prueba de la evidencia. Mill luego se centra en los principios que rigen la lógica. La lógica no es lo mismo que el conocimiento aunque el campo de la lógica es co-extensivo con el del conocimiento. La lógica es el juez y evaluador de todas las investigaciones. En su Libro I, trata con nombres y proposiciones y se ocupa de la necesidad de empezar con un análisis del lenguaje. La lógica es una parte del arte del pensamiento y el lenguaje, es uno de los elementos principalmente utilizados, por lo que este instrumento es de suma importancia en la exposición de los resultados.[65]

---

[64] MACLEOD, Christopher. *John Stuart Mill* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 25 de 08 e 2016. - [Consultado el 23 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/mill/.

[65] MILL, John Stuart. *A System of Logic* [Libro]. - London : Theophania Publishing, 1843, pags. 1-8.

Para el estudio de las proposiciones hace uso de Aristóteles al considerar la división de universal y singular. Luego el análisis de concreto y abstracto. La tercera división es de connotativo y no connotativo. La cuarta división de positivo y negativo. Quinta división de relativo y no relativo. Mill también se refiere a los sentimientos o los estados de conciencia.[66]

Mill trabaja sobre los conceptos de noúmeno y fenómeno. A las categorías de Kant les llama atributos como de cantidad, calidad y relación. Divide las proposiciones en universales, particulares, indefinidas y singulares. Realiza un análisis de la teoría de la predicación de Hobbes. Luego escribe sobre la teoría de las definiciones.[67]

5.1.2 LÓGICA MATEMÁTICA

A mediados del siglo XIX, los matemáticos británicos George Boole y Augustus De Morgan abrieron un nuevo campo a la lógica, conocido hoy como lógica simbólica (o moderna), que más tarde fue desarrollada por el matemático alemán Gottlob Frege y además por los matemáticos británicos Bertrand Russell y Alfred North Whitehead en Principia Mathematica (3 vols., 1910-1913). El sistema lógico de Russell y Whitehead introduce símbolos para frases y para las conjunciones que las unen, como "o", "y", "si… entonces…". Cuenta con símbolos diferentes para el sujeto lógico y el predicado lógico de una frase; y adjudica símbolos para distinguir las clases, para los miembros de las clases y para las relaciones de la pertenencia a una clase y la inclusión en una clase.[68]

Tanto la rama clásica como la moderna implican métodos de lógica deductiva. La contribución más importante a la lógica inductiva fue la aportada por el filósofo británico John Stuart Mill, quien en "*Sistema de Lógica*" (1843) estructuró los

[66] Ibid., pags 9-65.

[67] Ibid., pags 66-73.

[68] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 5-7.

métodos de prueba que, según su interpretación, iban a caracterizar la ciencia empírica. Este estudio concluyó en el siglo XX, en el campo conocido como Filosofía de la ciencia. Muy relacionada con ésta se encuentra la rama de las matemáticas llamada teoría de la probabilidad.[69]

Tanto la lógica moderna como la clásica asumen que cualquier proposición bien elaborada puede ser o verdadera o falsa. En años recientes se han desarrollado sistemas de la denominada lógica combinatoria: una afirmación puede tener un valor distinto a verdadero o falso como un valor de probabilidad expresado como una fracción que oscila entre 0 y 1 o entre -1 y +1.

La obra de Frege "*Begriffsschrift*" dio nacimiento a la lógica moderna. En este libro se dieron muchos descubrimientos como la teoría de la cuantificación y el análisis del argumento como función.

Charles Peirce descubrió la lógica de relaciones en 1870. Esa lógica estaba inspirada por el álgebra de Boole y la teoría de las relaciones de De Morgan. Frege y Peirce ambos inventaron la notación de cuantificadores y la teoría de la cuantificación casi simultáneamente. Ambos eran filósofos y matemáticos que podían combinar ideas filosóficas con su pensamiento lógico.
Dependiendo de la forma de realizar los análisis, se puede considerar a la Lógica como matemática, si su base es axiomática (como Peano y Russell) o Lógica aritmética considerada como un cálculo (Boole, De Morgan, Peirce y Schröder).[70]

George Boole, (1815-1864), lógico y matemático británico, elaboró el álgebra de Boole. Fue un autodidacta. En 1854, escribió "*Investigación sobre las leyes del pensamiento*", en donde describe un sistema algebraico que más tarde se conoció

[69] MACLEOD, Christopher. *John Stuart Mill* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 25 de 08 de 2016. - [Consultado el 23 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/mill/.

[70] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 5-7.

como el álgebra de Boole. En él, las proposiciones lógicas se indican por símbolos y pueden relacionarse mediante operadores matemáticos abstractos que corresponden a las leyes de la lógica.[71]

En 1847, George Boole publicó su panfleto "*El análisis matemático de la lógica*". Boole dio mérito a sus predecesores, con la cuantificación del predicado entre el filósofo de Edimburgo, William Hamilton y el matemático de Londres Augustus de Morgan.[72]

El Sistema Lógico de Boole, en el sistema lógico de Boole, uno denota el Universo. Las letras mayúsculas representan a todos los miembros de una cierta clase. Las letras minúsculas son operadores.

De MORGAN, (1806-1871), al igual que Boole, De Morgan se concentró en trabajar la lógica en conexión con el álgebra.
Los símbolos utilizados por De Morgan en su artículo "Sobre el silogismo" para las proposiciones fueron:

P) Q	significa	Todo P es Q
P. Q	significa	Ningún P es Q
PQ	significa	Algún P es Q
P : Q	significa	Algún P es no Q

De Morgan utilizó este simbolismo para reconstruir la teoría del silogismo, que le sirvió como representación, no como cálculo.
De Morgan notó que la silogística era incapaz de lidiar con propiedades de relación como "Juan es más pequeño que Pedro", sus ideas sobre este tipo de relaciones pueden ser tomadas como su más importante contribución.[73]

---

[71] BURRIS, Stanley. *George Boole* [En línea] // Stanford Encyclopedia of hy. - 21 de 04 de 2010. - [Consultado el 22 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/boole/.

[72] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pag. 162.

[73] Ibid., pags. 169-170.

Giuseppe Peano, (1858-1932), matemático italiano, autor del primer ejemplo de fractal. Nació en Cuneo en 1858. Creó un sistema descriptivo que permitía enunciar cualquier proposición de lógica o de matemáticas sin recurrir al lenguaje. Expuso la 'Aritmética de Peano', una exposición axiomática y deductiva de la aritmética de los enteros naturales.

Peano consideró que la importancia de la lógica matemática radicaba en ser un lenguaje artificial con el cual se podría remover las ambigüedades del lenguaje natural, permitiendo un análisis preciso de la matemática.[74]

Se define un set de fórmulas que son conocidas como los axiomas de la aritmética de Peano.

1) Existe un número natural llamado cero (0)
2) Para cada número natural existe un único número natural, llamado su siguiente. (Si *n* es un número natural, el siguiente de *n* se anota: *sg* (*n*)).
3) Para todo número natural, su siguiente es distinto de cero.
4) Si dos números naturales cualesquiera son distintos, sus siguientes son distintos.
5) Dado un conjunto *A* de números naturales, si: 0 es elemento de *A*, y, siempre que *n* sea elemento de *A,* el siguiente de *n* es elemento de *A*, entonces *A* es el conjunto formado por todos los números naturales (que notaremos: *N*). (Axioma de Inducción Completa)

[74] PEANO, Giussepe. *Giuseppe Peano* [En línea] // famous-mathematicians.com. - 2012. - [Consultado el 22 de 07 de 2017]. - Disponible en: http://www.famous-mathematicians.com/giuseppe-peano/.

Gottlob Frege, (1848-1925), matemático y filósofo alemán, fue el fundador de la lógica matemática moderna. Nació en Wismar. Su obra "Notación conceptual" (1879) está considerada como la más importante de sus publicaciones, entre las que también destacan "*Fundamentos de la aritmética*" (1884) y "*Leyes básicas de la aritmética*" (2 volúmenes, 1893-1903).[75]

Frege se encargó de trabajar en la semántica para mostrar que algunos principios básicos de matemáticas son analíticos, en el sentido que las proposiciones son verdaderas en virtud de su significado. De esa forma se puede apreciar que los principios de aritmética de Peano son correctos.

De acuerdo a los logicistas, la verdad matemática es una especie de verdad lógica. Frege fue un realista en ontología, en el sentido que vio los números naturales como objetos lógicos.[76]

Bertrand Russell, (1872-1970), filósofo, matemático y escritor británico. Nació en Trelleck (Gales) el 18 de mayo de 1872. Colaboró durante ocho años con el filósofo y matemático británico Alfred North Whitehead en la elaboración de la obra "*Principia Mathematica*" (3 vols., 1910-1913). Russell y Whitehead demostraron que los números pueden ser definidos como clases de un tipo determinado, y en este proceso desarrollaron conceptos racionales y una notación que hizo de la lógica simbólica una especialización importante dentro del campo de la filosofía.[77]

---

75 ZALTA, Edward.. *Gottlob Frege* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 14 de 09 de 1995. - [Consultado el 27 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/frege/.

76 SHAPIRO, Stewart. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2007.

77 IRVINE, Andrew. *Bertrand Russell* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 07 de 12 de 1995. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/russell/.

En su siguiente gran obra, "*Los problemas de la filosofía*" (1912), Russell recurrió a la sociología, la psicología, la física y las matemáticas para refutar las doctrinas del Idealismo, que mantenía que todos los objetos y experiencias son fruto del intelecto.

Russell abandonó la lógica de Boole por la lógica matemática de Peano.

Peano realizó una distinción entre las oraciones Sócrates es mortal y Todos los hombres son mortales. La primera muestra una relación de miembro de una clase (Sócrates y mortal), mientras que la segunda indica una inclusión entre dos clases (Todos los hombres y mortales).[78]

Russell encontró en la aritmética de Peano la posibilidad de definición de conceptos matemáticos en términos de conceptos de lógica. Asimismo, que se presentan paradojas al trabajar con las funciones proposicionales.

Cantor ya se había dado cuenta que al tratar con los números cardinales en forma completa daba lugar a contradicciones.

Russell intentó resolver tres paradojas que se obtuvieron cuando se trató de definir las clases de las funciones proposicionales. Estas son: La teoría de las no clases, la teoría del zig-zag y la teoría de limitación de tamaño.

Poincaré se dio cuenta que la paradoja se presentaba porque los predicados formaban un círculo vicioso.

Poincaré criticó a Russell y Whitehead por la prueba de la inducción matemática. Ellos trabajaron entonces en la Teoría de la ramificación para contrarrestar las paradojas en las que caían con su trabajo.

[78] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 330-331.

Para evitar las paradojas, Russell adoptó el Principio del círculo vicioso, el cual implica que ninguna totalidad puede contener miembros definidos en términos de sí mismo. Esto sería utilizado posteriormente por Kurt Gödel para la demostración del Primer Teorema de Incompletitud.[79]

La Lógica de Principia Mathematica, el proyecto de Russell y Whitehead consistía en mostrar que toda la matemática podía ser desarrollada a través de definiciones apropiadas en un sistema de lógica previamente definido. Se debe distinguir entre el desarrollo de la aritmética, del análisis y de la teoría de conjuntos por un lado y por el otro en el desarrollo de la geometría.[80]

Resulta evidente que un número de principios problemáticos como los de infinitud, elección y reductibilidad fueron necesarios para reconstruir las matemáticas dentro de la lógica.[81]

Alfred North Whitehead, (1861-1947), matemático y metafísico británico, reconocido por su trabajo en Lógica Matemática y Filosofía de la Ciencia. Nacido en Ramsgate (Kent), el 15 de febrero de 1861.[82]

Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred Norbert Whitehead (1861-1947), realizaron la síntesis de toda la teoría de la inferencia y los tipos de inferencia empleados en la demostración de teoremas de la matemática anterior, en su obra "*Principia Mathematica*". Propusieron que la matemática se redujera a una rama de la lógica.

---

[79] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pags. 330-337.

[80] IRVINE, Andrew. *Principia Mathematica* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 21 de 05 de 1996. - [Consultado el 02 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/.

[81] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pag. 341.

[82] IRVINE, Andrew. *Alfred North Whitehead* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 21 de 05 de 1996. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/whitehead/.

Descubrieron algunas paradojas de la lógica cuantificacional de Gottlob Frege. Russell denominó a su filosofía con el nombre de "Filosofía Atomista" al hacer la distinción de las proposiciones en atómicas y moleculares, desarrollando así el trabajo del estoico Crisipo.

Los conceptos que en ella se exponían fueron utilizados con posterioridad por Ludwig Wittgenstein, Kurt Gödel, Alfred Tarski, Willard Van Orman Quine, así como en cibernética, informática y psicología cognitiva.

Charles Sanders Peirce, (1839-1914), filósofo y físico estadounidense que fue el fundador del Pragmatismo Americano. Nació el 10 de septiembre de 1839 en Cambridge, Massachusetts.

En 1867 se interesó por el sistema de lógica creado por el matemático británico George Boole, y trabajó hasta 1885 sobre la ampliación y transformación del álgebra de Boole.[83]

La distinción entre un individuo y un concepto no fue tomada en cuenta en lógica hasta los descubrimientos de Frege y Peirce.

Dentro de los trabajos de Frege se encuentran la teoría de la cuantificación y el análisis del argumento-función. Charles Peirce descubrió la lógica de relaciones en 1870. Esta lógica estaba inspirada en el álgebra de Boole y la teoría de las relaciones de De Morgan. El álgebra de Peirce era diferente de la de Boole, ya que Peirce introdujo signos que se referían a individuos además de signos que significaban relaciones. Introdujo los cuantificadores "todos" y "algunos". Frege y Peirce eran ambos filósofos y matemáticos y podían combinar sus ideas filosóficas con su pensamiento matemático.

[83] BURCH, *Robert. Charles Sanders Peirce* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 22 de 06 de 2001. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/peirce/.

Tanto Frege como Peirce inventaron una notación de cuantificadores y una teoría de la cuantificación casi simultáneamente, independientemente uno del otro. Por ello es que ambos pueden ser considerados como los fundadores de la lógica moderna.[84]

David Hilbert, (1862-1943), matemático y filósofo alemán. Nacido en Königsberg, al este de Prusia (hoy Kaliningrado, Rusia). Hilbert estudió y después enseñó en la universidad de su ciudad natal hasta 1895, cuando fue trasladado a la Universidad de Gotinga y la convirtió en un centro matemático de renombre mundial. Trabajó en muchos campos de las matemáticas, incluyendo la teoría de números y el cálculo de variaciones, pero sus más importantes contribuciones las hizo en el terreno de la geometría. En 1899 con su obra "*Fundamentos de la geometría*", reemplazó eficazmente la geometría euclidiana con un conjunto de 21 axiomas mucho más completos y abstractos, que tratan sobre puntos, líneas y planos y seis tipos de relaciones entre ellos.[85]

Al terminar el siglo Hilbert planteó 23 problemas matemáticos para su investigación. La mayor parte de ellos ya han sido resueltos. Trató también de establecer la coherencia fundamental de todas las matemáticas, tarea que en 1931 el lógico estadounidense Kurt Gödel demostró que era imposible de establecer.[86]

Hilbert enfatizó que la axiomatización de la geometría debía ser completa y tan simple como fuera posible. Hilbert especificó cuál era el conjunto de objetos de los que consistiría y las relaciones de consistencia entre ellos.

[84] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pag. 6.

[85] Ibid., pag. 320.

[86] Ibid., pag. 500.

Hilbert ya había aplicado su sistema axiomático a la aritmética de los números reales, utilizando axiomas que no fueran contradictorios entre ellos y utilizando un número finito de pasos lógicos que no condujeran a contradicciones.

Hilbert concluyó que no es posible agregar nuevos elementos a un sistema de puntos, líneas y planos de forma que el sistema generalizado forme una nueva geometría, es decir que no puede ser extendido más allá de los axiomas válidos.

Hilbert dedujo que los axiomas necesarios para garantizar que la geometría resultante fuera idéntica a la geometría cartesiana, se dividen en cinco grupos:
1. Axiomas de incidencia 2. Axiomas de orden 3. Axiomas de congruencia 4. Axiomas de paralelismo y 5. Axiomas de continuidad.[87]

Zermelo, (1871-1953), matemático alemán. Fue profesor en Zürich entre 1919 y 1916; desde 1946 hasta su muerte, fue profesor en la Universidad de Friburgo.

Basado en una fórmula de Bernstein, Zermelo demostró que cada conjunto puede ser ordenado si y solo si cada subconjunto no vacío tiene por lo menos el menor elemento.

Los trabajos de Zermelo dieron lugar a una controversia entre los filósofos de tendencia constructivista y Hadamard quien sugería que no era necesario construir ni definir el objeto matemático en cuestión.[88]

Zermelo propuso una solución evitando caer en la antinomia de Burali-Forti (Proveniente de la suposición de que la totalidad de los números ordinales forma un conjunto) y propuso siete axiomas.

[87] Ibid., pag. 325-326.

[88] Ibid., pag. 344.

Axioma I: Axioma de extensionalidad. Cada conjunto es determinado por sus elementos.

Axioma II: Axioma de conjuntos elementales.

Axioma III: Axioma de separación.

Axioma IV: Axioma del conjunto de potencia.

Axioma V: Axioma de la unión.

Axioma VI: Axioma de elección.

Axioma VII: Axioma de infinitud.[89]

La noción de definit de Zermelo fue clarificada por Weyl, quien propuso cinco principios basados en el trabajo de Pieri sobre las bases de la geometría.

Permutación de variables

Negación

Adición

Sustracción

Coordinación

Para Weyl, estos principios son suficientes para capturar todos los conceptos de geometría elemental.

Weyl expresó que sin una formulación precisa de los principios de la definición, la solución del problema del continuo no hubiera sido posible.

Skolem propuso las cinco operaciones básicas de la lógica matemática, las cuales son: conjunción, disyunción, negación, cuantificación universal y cuantificación existencial.

Fraenkel mostró que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo.

[89] Ibid., pag. 346.

Para 1930 todos los axiomas habían sido caracterizados y recibieron el nombre de la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con elección.

Los más importantes logros de la lógica algebraica son: la axiomatización del algebra de clases, la teoría de los relativos y la prueba de los primeros resultados del carácter meta lógico. Los orígenes del cálculo de clases se encuentran en los trabajos de Boole. De Morgan fue el primer lógico en reconocer la importancia de las relaciones en lógica, pero no desarrolló una teoría de las relaciones.[90]

Kurt Gödel, (1906-1978), matemático y lógico de origen austriaco. Nació en Brünn (hoy Brno, República Checa). Estudió en la Universidad de Viena y dio clases en esta institución desde 1933 a 1938. Emigró a los Estados Unidos en 1940 y se nacionalizó estadounidense en 1948. Fue miembro del Instituto para Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, hasta 1953, fecha en la que empezó a enseñar matemáticas en la Universidad de Princeton.

Gödel se dio a conocer con una obra, publicada en 1931, en la que enunció lo que se conoce como teorema de Gödel. Este principio establece que en cualquier sistema simbólico formal es posible construir una proposición que no se puede probar ni refutar en el mismo sistema. Gödel también escribió "*The Consistency of the Continuum Hypothesis*" (La consistencia de la hipótesis del continuo, 1940) y "*Rotating universes in general relativity theory*" (Los universos giratorios en la teoría de la relatividad general, 1950).[91]

[90] Ibid., pags. 349-352.

[91] KENNEDY, Juliette. *Kurt Gödel* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 13 de 02 de 2007. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/goedel/.

5.2. CAPÍTULO II: DESARROLLO DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

5.2.1. ANTECEDENTES DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

Existe una cantidad considerable de trabajo matemático previo a la formulación del Primer Teorema de Incompletitud de Gödel. Bertrand Russell conoció a Peano en el Congreso Internacional de Matemáticas en 1900 en París. Russell y Whitehead habían principiado a fundamentar la matemática en base a axiomas y reglas de inferencia lógicas. Optaron por utilizar la notación moderna de los axiomas de Peano en lugar del "*Begriffsschrift*" de Frege. Su obra "*Principia Mathematica*" en tres volúmenes y casi 2,000 páginas apareció entre 1910 y 1913. En el prefacio de esta obra, agradecen tanto a Frege como a Peano por haber sentado las bases lógicas y haber trabajado en la lógica de la aritmética. Los tópicos cubiertos en Principia Mathematica son:

Vol. I: Axiomas y reglas de inferencia para lógica de orden mayor, resultados elementales en clases y sus relaciones binarias, la definición de los números uno y dos, una discusión del Teorema de orden de Zermelo y del Axioma de elección, funciones de elección, El Teorema de Schröder-Bernstein, El cierre transitivo de una relación.

Vol. II: Números cardinales y su aritmética, números finitos, la aritmética de relaciones binarias, órdenes lineales, ordenes de Dedekind, puntos límite, funciones continuas.

Vol. III: Ordenamientos, equivalencia entre el Axioma de elección y el Axioma de orden, los naturales, ordenes densos, ordenes como los racionales, ordenes como los reales, los íntegros, racionales y reales, medidas, medida, módulo y cantidad.[92]

[92] IRVINE, Andrew. *Principia Mathematica* [En línea]. Op Cit.

Un cuarto volumen en geometría nunca fue publicado. Con el trabajo de *Principia Mathematica*, parecía claro el sueño de desarrollar toda la matemática con axiomas y reglas lógicas.

Así, para 1931, Gödel tenía a su disposición dos sistemas formales que pudieran abarcar toda la matemática. Principia Mathematica de Russell y Whitehead y el Sistema Axiomático de Zermelo-Fraenkel.[93]

Antes de mencionar el teorema de incompletitud de Kurt Gödel, es preciso realizar un glosario de términos que nos permitan comprender los procedimientos que se involucran en la aproximación que Gödel realizó para alcanzar sus conclusiones. Estos son: Sistema formal, consistencia, completitud, incompletitud, decidibilidad, recursividad.

Sistema formal, conjunto de signos y las correspondientes reglas de formación de fórmulas, divididas estas en dos clases: axiomas (puntos de partida) y teoremas (derivables, demostrables a partir de los primeros, mediante la aplicación de reglas de inferencia explícitamente formuladas).

Consistencia, un cálculo es consistente cuando no es contradictorio, esto es, cuando no se da el caso de que una de sus fórmulas y su negación sean demostrables en él. Si es consistente, el sistema formal no llevará a teoremas contradictorios entre sí.

Completitud, un cálculo es completo cuando cada una de sus fórmulas, o su negación, es demostrable en él. Por tanto, se puede demostrar que un cálculo es incompleto cuando no puede derivarse la negación o la afirmación de al menos una de sus fórmulas.[94]

---

[93] Ibid.

[94] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pag. 371.

Incompletitud, el primer teorema de incompletitud establece que, bajo ciertas hipótesis, una teoría formal no puede tener consistencia y completitud a la vez. La primera de ellas es que sea una teoría aritmética, es decir, que sus símbolos sirvan para describir los números naturales y sus operaciones y relaciones; y que sea capaz de demostrar algunas propiedades básicas sobre ellos.[95]

Decidibilidad, un cálculo es decidible cuando existe un procedimiento algorítmico (mecánico) mediante cuya aplicación (en un número finito de pasos) podemos determinar si cada una de sus fórmulas aceptables es o no demostrable en él (es decir, si es o no uno de sus teoremas).

Recursividad, significa que las reglas para manipular sus signos y fórmulas en las demostraciones han de poder ejecutarse mediante un algoritmo: una serie precisa de pasos sin ambigüedad que pueda llevarse a cabo en un tiempo finito, e incluso implementarse mediante un programa informático.[96]

5.2.2. PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

Cualquier teoría aritmética recursiva que sea consistente es incompleta.

El primer teorema de la incompletitud de Gödel demuestra que cualquier sistema que permita definir los números naturales es necesariamente incompleto: contiene afirmaciones que no se pueden demostrar ni refutar.[97]

---

[95] NATIELLO, Mario. *Los Fundamentos de la matematica y los teoremas de Gödel* [Informe]. - Suecia : Centre for Mathematical Sciences of Lund University, 2007.

[96] IMMERMAN, Neil. *Computability and Complexity* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 24 de 06 de 2004. - [Consultado el 10 de 10 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/computability/.

[97] DA SILVA, Ricardo. *Los Teoremas de Incompletitud de Gödel, Teoría de conjuntos y el programa de David Hilbert* [Publicación periódica] // Episteme, Vol. 34. - 2014. - págs. 19-40.

5.3. CAPÍTULO III: DERIVACIONES LÓGICAS DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

La visión filosófica de Gödel puede ser caracterizada desde dos puntos de vista, estos son: 1) El realismo, que consiste en la creencia que las matemáticas son una ciencia descriptiva, de la misma manera que lo son las ciencias empíricas. 2) El segundo punto con relación al Racionalismo filosófico de Leibniz, de carácter matemático, dado que las principales influencias filosóficas de Gödel fueron Leibniz, Kant y Husserl.

El realismo de Gödel llevó un desarrollo complejo a través del tiempo, en naturaleza y en forma ontológica. En sus primeros escritos Gödel conservó su rigor matemático y alrededor de 1959, fusionó su programa realístico con el método fenomenológico desarrollado por Husserl.[98]

5.3.1 EL RACIONALISMO DE GÖDEL

El Racionalismo de Gödel tiene sus orígenes en el pensamiento de Leibniz. Se parte de la idea en la cual el mundo que da origen a la experiencia inmanente es perfecto y bello, y por consiguiente racional y ordenado. La justificación de Gödel descansa en una generalización inductiva de la perfección y belleza de las matemáticas.

“El Racionalismo está conectado con el Platonismo porque está dirigido al aspecto conceptual en lugar del aspecto real del mundo. Si se utiliza evidencia inductiva, las matemáticas tienen esa forma de perfección. Se puede experimentar que el mundo conceptual es perfecto y que la realidad objetiva es bella, buena y perfecta”.[99]

---

[98] KENNEDY, Juliette. *Kurt Gödel* [En línea], Op cit.

[99] Ibid.

Aunque las bases de las creencias racionalistas de Gödel son metafísicas en naturaleza, sus aspiraciones fueron prácticas, ya que trató de desarrollar métodos exactos en filosofía para transformarla en una ciencia exacta.[100]

La formulación de la visión de Gödel puede encontrarse en un documento de catorce ítems listados por él en 1960, titulado “*Mi punto de vista filosófico*”. En este Racionalismo, dos aspectos son relevantes: 1. Que existen métodos racionalistas sistemáticos para la solución de todos los problemas. 2. Que la filosofía se torna cada vez más hacia un carácter científico.

La primera concepción de Gödel del Racionalismo se refiere al rigor matemático que incluye el tener una prueba genuina. Se puede evidenciar en la Conferencia de Gibbs después de una secuencia de argumentos en favor del Realismo. Gödel trabajando en la naturaleza de las matemáticas expuso: “Lo que puedo afirmar sería desaprobar el punto de vista nominalista, el cual considera las matemáticas como una convención sintáctica. Aún más, he comprobado algunos argumentos contra la visión general de que las matemáticas son nuestra propia invención. Existen, sin embargo, otras alternativas al Platonismo, en particular el Psicologismo y el Realismo Aristotélico. Estas teorías deberían ser descartadas una tras otra, y agotar todas las posibilidades. No estoy en la posición de hacer esto en este momento, sin embargo, me gustaría proporcionar algunas indicaciones sobre este tema...Tengo la impresión de que existe suficiente claridad de conceptos para conducir esta discusión con rigor matemático y que el resultado sería que la visión Platónica es la única sostenible”.[101]

Aunque en el tiempo de la conferencia de Gibbs, la analogía en la mente de Gödel entre el razonamiento filosófico y el matemático eran muy cercanos, la visión de

[100] Ibid.

[101] Ibid.

Gödel en períodos posteriores fue que los métodos necesarios no deberían ser matemáticos en naturaleza. Lo que era necesario era una ciencia informal de Análisis Conceptual.

En el análisis que Kennedy realiza sobre Gödel, menciona que la Filosofía es más general que la ciencia. La teoría de conceptos es más general que las matemáticas. La verdadera filosofía es precisa pero no especializada. Asimismo que Gödel creía que las matemáticas estaban confinadas a trabajar con lo extenso y que el Análisis Conceptual era la dirección a seguir.[102]

Gödel consideraba que una de las bases del análisis conceptual seria trabajar en encontrar los términos primitivos de los conceptos y sus relaciones.

Para Gödel, la Fenomenología no es el único abordaje que se puede utilizar para encontrar la lista de las categorías principales (ejemplo, causa, sustancia, acción) y sus interrelaciones, pero que es absolutamente necesaria su realización.

Gödel, lo mismo que Kant, concluyó que la filosofía como ciencia rigurosa no era realizable en un futuro cercano, concluyendo que: “El tiempo no es el factor principal, puede suceder en cualquier momento cuando la idea correcta aparezca...”[103]

5.3.2 EL REALISMO DE GÖDEL

La visión realista de Gödel fue formulada mayormente en el contexto del fundamento de las matemáticas y la teoría de conjuntos. De la lista que Gödel escribió en 1960, solamente dos puntos se refieren al realismo:

10. El materialismo es falso
12. Los conceptos tienen una existencia objetiva[104]

---

[102] Ibid.

[103] Ibid.

[104] Ibid.

Kennedy refiere que Gödel publicó su visión del Realismo por vez primera en 1944. Asimismo, que Gödel creía que las clases y los conceptos pueden ser concebidos como objetos reales. Las clases como una pluralidad de cosas, o como estructuras que contienen una pluralidad de cosas y los conceptos como las propiedades y relaciones que existen independientemente de las definiciones. Gödel realizó una comparación entre cuerpos físicos y conceptos, considerando que los conceptos son tan necesarios, para obtener un sistema satisfactorio matemático, como los cuerpos físicos son necesarios para obtener una teoría satisfactoria del sentido de percepción y no solamente como datos.

Kennedy continúa con la cronología de Gödel, al referirse éste al instante en el cual se realiza la percepción por medio de los sentidos. Los datos están tan ligados con las condiciones en las que son experimentadas, que no se puede lograr una correspondencia adecuada entre lo que se mide y lo que se obtiene de la medición.

En 1947 al exponer Gödel el problema del Continuo de Cantor expresó que en el caso de proposiciones significativas de las matemáticas, siempre existe una situación que debe dilucidarse con una respuesta de sí o no o verdadero-falso. Gödel trató de determinar el valor del continuo, así como los valores verdaderos del axioma ZFC (Zermelo-Frankael con elección). Gödel ofreció dos criterios para dilucidar: El primero involucraba el análisis conceptual. El segundo tenía que ver con el éxito del axioma, como un indicador en qué dirección mirar para la solución verdadera.[105]

Gödel se torna hacia la Fenomenología, Gödel notó que resulta difícil probar la existencia de los entes matemáticos, los cuales son sin causa, atemporales, fuera de la mente. Especialmente mediante pruebas matemáticas.

[105] Ibid.

Al examinar la Fenomenología de Husserl, Gödel notó que Husserl especificaba que el mundo está constituido en la conciencia. La conciencia implica tanto subjetividad como objetividad, lo cual ayudaría a zanjear el problema de contrastar la matemática con la realidad.[106]

El que Gödel se tornara hacia la Fenomenología quedó plasmado en un borrador de una conferencia titulado "*El moderno desarrollo del fundamento de las matemáticas a la luz de la Filosofía*".

Gödel al referirse a la Fenomenología, afirmó: "Existe hoy, el principio de una ciencia que posee un método sistemático para la clarificación de los significados, y esta es la Fenomenología fundada por Husserl. La clarificación de los significados consiste en centrarse en los conceptos, dirigiendo la atención hacia nuestros propios actos o hacia la voluntad en llevar a cabo dichos actos. Cabe recordar que la Fenomenología no es una ciencia de la misma manera que las otras ciencias. Es un procedimiento o técnica que debe producir un nuevo estado de conciencia en el cual se describen en detalle los conceptos básicos que son utilizados en nuestro pensamiento o alcanzar otros conceptos básicos que llegan a nosotros". Gödel agregó: "Creo que no existe razón para rechazar este procedimiento como sin esperanza... no existe razón para su rechazo sino existen razones a su favor."[107]

5.3.3 OTRAS DERIVACIONES

A partir de la demostración de los teoremas de incompletitud de Gödel, surgieron cinco ramas lógicas: 1. Teoría de conjuntos, 2. Teoría de modelos, 3. Teoría de pruebas, 4. Teoría de computabilidad y 5. Lógicas no clásicas.[108]

---

[106] Ibid.

[107] Ibid.

[108] HAAPARANTA, Leila. Op cit., pag. 474.

Los teoremas de Gödel aún se aplican, pero su teoría fue reemplazada por la matemática de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con elección (ZFC).[109]

Los resultados de Gödel de la improbabilidad de la consistencia de una teoría formal dentro de la teoría misma fueron seguidos por el trabajo de Tarski en la indefinibilidad de la verdad para un lenguaje formal dentro del mismo lenguaje. El trabajo de Tarski también, por primera vez, proporcionó una definición rigurosa en un metalenguaje, relativa a una interpretación que es necesaria para una proposición rigurosa del teorema de completitud de Gödel.[110]

Gödel utilizó en su trabajo las funciones primitivas recursivas, que incluyen muchas pero no todas las funciones que son efectivas en computación utilizando un sentido intuitivo. A su trabajo, siguieron dos caracterizaciones de clases efectivamente computables. La teoría de función recursiva de Alonzo Church y su discípulo S.C. Kleene, que demostró que no existe función computable efectiva que nos dirá si una fórmula es lógicamente válida. La otra fue el desarrollo de la máquina de Turing, desarrollada por Alan Turing, quien analizó la posibilidad de una computadora programable universal, una posibilidad que comenzó a ser realidad durante la segunda guerra mundial.[111]

Gödel contribuyó no sólo al desarrollo de la lógica matemática, sino también al estudio de lógicas no clásicas y modales, comúnmente llamadas Lógica Filosófica.

Gödel demostró la imposibilidad de la teoría de pruebas de establecer la consistencia de la matemática infinitesimal por medios finitos, pero esto dejó abierta la posibilidad de establecer la consistencia relativa a través de la interpretación de

[109] Ibid., pag. 352.

[110] Ibid., pag. 436.

[111] Ibid., pag. 489.

las teorías. Gödel contribuyo a este programa y a mediados de los años treinta, nuevos métodos fueron introducidos por Gerhard Gentzen (1909-1945).[112]

Análisis Descriptivo del teorema de incompletitud de Gödel, El hecho de que la completitud falla para el cálculo aritmético, significa que existen un sinfín de proposiciones que siendo verdaderas no se pueden derivar mediante reglas de inferencia del conjunto de axiomas. En la "Conferencia de Gibbs", Gödel llamó "matemática objetiva" a lo equivaldría a una realidad al estilo platónico donde se encuentran los objetos matemáticos con independencia del sujeto. Gödel consideró que el problema era inherente a los sistemas formales y no a la aritmética, es decir, la aritmética no se puede atrapar en un sistema. De esta manera Gödel demostró que el método axiomático tiene fuertes limitaciones: "un tratamiento axiomático de la teoría de los números no puede agotar el campo de la verdad aritmética."[113]

Para Gödel los formalistas confundían la noción de verdad con la de demostrabilidad y de hecho interpretaban la primera en función de la segunda. En 1930 el mismo Gödel demostró que, en principio, en el cálculo de lógica de primer orden se tiene que una fórmula es lógicamente verdadera si y sólo si es demostrable, pero este resultado no se extrapola a los sistemas formales recursivos para la aritmética, porque existen proposiciones que siendo verdaderas no son demostrables a partir del sistema lo que supone que el conjunto de las verdades aritméticas es mayor al conjunto de las fórmulas aritméticas demostrables. "Se derrumba así el ideal de axiomatización griego, en donde todo lo que era verdad era demostrable (inclusive en donde se creaba una identidad entre verdad y demostrabilidad) y se vuelve más a la idea aristotélica de que no todo es demostrable y no por ello deja de ser verdad".[114]

---

[112] BORCHERT, Donald. Op cit., pag. 739.

[113] DA SILVA, Ricardo. Op cit., pags. 19-40.

[114] BORCHERT, Donald. Op cit., pags. 119-120.

En el libro Después de Gödel, Platonismo y Racionalismo en matemática y lógica, Richard Tieszen, expone como se sientan las bases desde la perspectiva del Intuicionismo y de un Racionalismo Platónico acerca de las matemáticas y la lógica basados en los teoremas de Gödel.

Se trata de refutar la idea de Carnap de que la matemática es una sintaxis del lenguaje. Se expone como Gödel defiende al Platonismo Constitutivo en base al Realismo lógico, basado en Platón, asimismo, en el Idealismo Trascendental de Kant y en la Monadología de Leibniz, considerando el sentido del ser de los objetos lógicos y matemáticos como abstractos, independientes de la mente, no sensitivos, no espaciales, no temporales (omnitemporales) y sin causa. Además, muestra como el Racionalismo está ligado a la universalización y la generalización para la resolución de problemas haciendo uso de la razón. Se muestran analogías entre percepción sensible e intuición matemática, zanjeando el problema de la subjetividad humana y la objetividad matemática.[115]

[115] THIESZEN, Richard. *After Gödel* [Informe]. - Oxford : Oxford University Press, 2017.

5.4. CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.4.1 CONCLUSIONES

5.4.1.1 La lógica formal de Aristóteles dominó en la Filosofía por cerca de 2000 años. Fue hasta los trabajos de Gottfried Leibniz que se inició con una nueva aproximación a los enfoques lógicos de carácter matemático.

5.4.1.2 El verdadero desarrollo de la lógica matemática se inicia con George Boole. La notación utilizada para el desarrollo de la lógica matemática fue aportada tanto por George Boole como por Gottlob Frege.

5.4.1.3 El desarrollo axiomático de la lógica desarrollado por Peano, permitió a Kurt Gödel mediante su sistema de numeración deducir que en Lógica de 1er orden es imposible demostrar que dicho sistema sea consistente y completo. Además, que existen postulados que no se pueden probar o negar dentro del mismo sistema.

5.4.1.4 Kurt Gödel dio nuevo vigor al concepto de Intuicionismo, que a su vez se relaciona con el Platonismo. Para muchos matemáticos, las entidades matemáticas son reales y existen independientemente del pensamiento. Esto refleja que el mundo de las ideas de Platón se encuentra vigente desde esta visión.

5.4.1.5 Kurt Gödel fue influenciado por la Monadología de Leibniz y concluyó que las mónadas son las responsables de proveer las características especiales a los entes matemáticos como lo son: abstracción, independencia de la mente, no sensitivos, no espaciales, no temporales (omnitemporales) y sin causa.

5.4.1.6 Kurt Gödel consideró que la filosofía debía orientarse al *análisis conceptual* para lograr una mayor comprensión de la realidad.

Asimismo, que debía desarrollarse basada en la Fenomenología de Husserl, que permite un desarrollo de la conciencia necesario para abordar las cuestiones filosóficas.

5.4.1.7 Derivado de las demostraciones realizadas por Gödel, se puede concluir que un sistema lógico no puede expresar la Aritmética en su totalidad ni mucho menos las Matemáticas.

5.4.2 RECOMENDACIONES

5.4.2.1 Realizar estudios en Lógica Matemática. Es recomendable revisar la totalidad de Principia Mathematica, asimismo, la lógica de cada uno de los precursores en lógica matemática como Boole, Frege, De Morgan, Lukasiewicz, Peano, Fermelo. La investigación específica de cada uno de dichos pensadores nos permitiría avanzar en la comprensión de la lógica de primer orden y de la lógica intuicionista.

5.4.2.2 Promover dentro de los estudiantes del Departamento de Filosofía de la Facultad de Humanidades de la Universidad de San Carlos de Guatemala, el estudio de lógicas no formales, además de tópicos como el Logicismo y el Intuicionismo.

5.4.2.3 Promover la investigación de esquemas lógicos que ayuden a desarrollar nuevos enfoques para abordar la problemática y desafíos que enfrenta la Sociedad Guatemalteca.

6. BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. *Órganon II* [Libro]. - Madrid : Gredos, 1993.

BADESA, Calixto. *Resumen de Lógica Aristotélica* [Informe]. - Barcelona : Ariel, 2010.

BALTZLY, Dirk. *Stoicism* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 15 de 04 de 1996. - [Consultado el 07 de 10 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/stoicism/.

BENNET, Deborah. *Logic Made Easy* [Libro]. - New York : W.W. Norton, 2004.

BOCHENSKI, Jozef. *Historia de la Lógica Formal* [Libro]. - Madrid : Gredos, 1985.

BORCHERT, Donald. *The Encyclopedia of Philosophy, Vol. 09* [Libro]. - Detroit : Thomson Gale, 2006.

BORNAT, Richard. *Proof and Disproof in Formal Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2017.

BURCH, *Robert Charles Sanders Peirce* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 22 de 06 de 2001. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/peirce/.

BURRIS, Stanley. *George Boole* [En línea] // Stanford Encyclopedia of hy. - 21 de 04 de 2010. - [Consultado el 22 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/boole/.

COPELAND, Jack. *Arthur Prior* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 07 de 10 de 1996. - [Consultado el 08 de 04 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/prior/.

CORREIA, Manuel. *La actualidad de la lógica de Aristóteles* [Publicación periódica] // Revista de Filosofía, Vol. 62. - 2006. - págs. 139-150.

DA SILVA, Ricardo. *Los Teoremas de Incompletitud de Gödel, Teoría de conjuntos y el programa de David Hilbert* [Publicación periódica] // Episteme, Vol. 34. - 2014. - págs. 19-40.

GABBAY Dov y WOODS John. *Handbook of the History of Logic: Mediaeval and Renaissance Logic, Vol. 2* [Libro]. - Holland : Elsevier, 2008.

PEANO, Giussepe. *Giuseppe Peano* [En línea] // famous-mathematicians.com. - 2012. - [Consultado el 22 de 07 de 2017]. - Disponible en: http://www.famous-mathematicians.com/giuseppe-peano/.

GRIFFEL, Frank. *Al-Ghazali* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 14 de 08 de 2007. - [Consultado el 28 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/al-ghazali/.

GUTAS, Dimitri. *Ibn Sina o Avicena* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 15 de 09 de 2016. - [Consultado el 24 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/ibn-sina/.

HAAPARANTA, Leila. *The Development of Modern Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2009.

HANNA, Robert. *Kant´s Theory of Judgment* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 28 de 07 de 2004. - [Consultado el 18 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/kant-judgment/.

HIRSCHBERGER, Johannes. *Antinomias* [Sección de libro] // Historia de la Filosofía. Tomo II.. - Barcelona : Herder, 2000 .

IMMERMAN, Neil. *Computability and Complexity* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 24 de 06 de 2004. - [Consultado el 10 de 10 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/computability/.

IRVINE, Andrew. *Alfred North Whitehead* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 21 de 05 de 1996. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/whitehead/.

IRVINE, Andrew. *Bertrand Russell* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 07 de 12 de 1995. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/russell/.

IRVINE, Andrew. *Principia Mathematica* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 21 de 05 de 1996. - [Consultado el 02 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/.

JANIAK, Andrew. *Kant´s Views on Space and Time* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 10 de 10 de 2009. - [Consultado el 24 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/kant-spacetime/.

KENNEDY, Juliette. *Kurt Gödel* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 13 de 02 de 2007. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/goedel/.

KING, Peter. *Peter Abelard* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 03 de 08 de 2004. - [Consultado el 28 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/abelard/.

KLEIN, Jürgen. *Francis Bacon* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 29 de 12 de 2003. - [Consultado el 20 de 03 de 2017]. Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/bacon/.

LARUMBE, Gonzalo. *El teorema de Gödel* [En línea] // El Bucle Infinito. - 02 de 04 de 2007. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: elbucleinfinito.blogspot.com/2007/04/el-teorema-de-gdel-2.html?m=1.

LEIBNIZ, Gottfried. *La Monadologia* [Libro]. - Santiago, Chile : ed. electrónica de www.philosophia.cl, 1713-1715.

Lógica trivalente. [En línea] // Wikipedia. - [Consultado el 22 de 04 de 2017]. - Disponible en: https://es.m.wikipedia.org/wiki/logica_trivalente.

LOOK, Brandon. *Gottfried Wilhelm Leibniz* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 22 de 12 de 2007. - [Consultado el 25 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/leibniz/.

MACLEOD, Christopher. *John Stuart Mill* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 25 de 08 de 2016. - [Consultado el 23 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/mill/.

MARENBON, John. *Anicius Severinus Manlius Boethius* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 06 de 05 de 2005. - [Consultado el 16 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/boethius.

MILL, John Stuart. *A System of Logic* [Libro]. - London : Theophania Publishing, 1843.

MORAN, Dermot. *John Scottus Eriugena* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 28 de 08 de 2003. - [Consultado el 26 de 08 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/scottus-eriugena/.

NATIELLO, Mario. *Los Fundamentos de la matematica y los teoremas de Gödel* [Informe]. - Suecia : Centre for Mathematical Sciences of Lund University, 2007.

ROSS, W.D. *Teoría de las ideas de Platón* [Sección de libro] // Teoría de las ideas en Platón. - Madrid : Cátedra, 1986.

SEIFERT, Josef. *¿Qué es una aporía?* [Publicación periódica] // International Academy of Philosophy. - 2011. - págs. 98-114.

SELLBERG, Erland. *Petrus Ramus* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 09 de 05 de 2006. - [Consultado el 19 de 05 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/ramus/.

SHAPIRO, Stewart. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* [Libro]. - Oxford : Oxford University Press, 2007.

SPADE, Paul. *Thoughts, Words and Things*: *An Introduction to Late Mediaeval Logic and Semantic Theory* [Libro]. - Philadelphia : Philpapers, 2002.

STANNARD, Jerry. *Parmenidean Logic* [Publicación periódica] // The Philosophical Review. - 08 de 02 de 1960. - págs. 526-533.

THIESZEN, Richard. *After Gödel* [Informe]. - Oxford : Oxford University Press, 2017.

THOMASSON, Amie. *Categories* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 03 de 06 de 2004. - [Consultado el 29 de 07 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/categories/.

ZALTA, Edward.. *Gottlob Frege* [En línea] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. - 14 de 09 de 1995. - [Consultado el 27 de 06 de 2017]. - Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/frege/.

7. APENDICE

7.1 DESARROLLO DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE KURT GÖDEL

Existen cantidad de demostraciones del teorema de incompletitud de Gödel, unas son simplistas y no reflejan el recurso matemático utilizado por Gödel y otras resultan demasiado complejas y los teoremas previos no se visualizan, con lo cual resultan incomprensibles.

El objetivo principal es comprender el significado de la numeración de Gödel y como logra llevarnos hacia el Teorema de la Incompletitud.

Gonzalo Larumbe en el bucle infinito, logra el objetivo de representar un sistema de numeración lo bastante sencillo para comprender la hazaña de Gödel.

"El teorema de Gödel"

"Escribir una fórmula lógica es permutar una serie de signos en una serie de espacios, de forma que Gödel atribuye un número a cada signo y un número a cada espacio que ocupa el signo. Para los espacios o lugares que ocupan los signos, se utilizan los números primos. 2 para el primer lugar, 3 para el segundo, 5 para el tercero, etc. Para los signos números convencionales. Por ejemplo 59 para "f1", 3 para (, 15 para x1, 5 para). Así "f1" se codifica con el número 2^59. Que quiere decir "f1 en el primer lugar".[116]

Por ejemplo:

Codificar "f1(x1)"

[116] LARUMBE, Gonzalo. *El teorema de Gödel* [En línea] // El Bucle Infinito. - 02 de 04 de 2007. - [Consultado el 27 de 07 de 2017]. - Disponible en: elbucleinfinito.blogspot.com/2007/04/el-teorema-de-gdel-2.html?m=1.

f1 en el 1º lugar= 2^59

(en el 2º lugar= 3^3

x1 en el 3º lugar=5^15

) en el 4º lugar= 7^5

El número que surge de multiplicar (2^59 · 3^3 · 5^15 · 7^5) es el número de Gödel de la fórmula "f1(x1)".

Dado que los números resultantes son muy grandes, se entra en el campo de la metamatemática.

Al examinar la fórmula:

"a no es un teorema en el sistema de Gödel"

Entonces a no es demostrable en el sistema

Además, se puede construir una cadena que se refiera a sí misma.

Asimismo, se puede introducir el número de Gödel de una fórmula dentro de la propia fórmula.

De esta manera, se obtienen cuatro tipos de cadenas de signos y una de números:

1. Los teoremas
2. Las verdades
3. Las cadenas bien formadas
4. El resto de las cadenas de signos
5. Los números que no corresponden a números de Gödel

"Los teoremas, la clase más restringida, son aquellas verdades que han sido demostradas en el sistema. Además, hay proposiciones que son verdaderas pero que no son demostrables en el sistema. El conjunto de las verdades es más amplio que el de las verdades demostrables en el sistema".[117]

Se obtienen entonces cadenas que expresan un teorema demostrable, lo que se ejemplifica con la oración "2 + 2 = 4"; además, verdades no demostrables como

[117] Ibid.

“Esta afirmación no es demostrable en el sistema”, cadenas bien formadas pero que no son verdades y, por último, cadenas que no están bien formadas. Para ejemplificar esto último se pueden utilizar las frases “Llueve y no llueve” y “lluevxsdfghhjklñ”. La primera es falsa, pero la segunda, está mal formada.

Tenemos, pues, el conjunto de todas las cadenas, y dentro de él un conjunto más restringido, el de las cadenas bien formadas. Dentro del conjunto de las cadenas bien formadas tenemos el conjunto más restringido de las verdades, y dentro de éste el conjunto aún más restringido de las verdades demostrables en el sistema o Teoremas.

Por último hay números que no son números de Gödel”.[118]

Una demostración matemática es la presentada por Ricardo Da Silva en los Teoremas de Incompletitud de Gödel:

La Numeración de Gödel

Da Silva expresa: “De acuerdo a Hamilton en Lógica para matemáticos, se puede definir una función *g* sobre un conjunto de símbolos de un lenguaje de primer orden. Esta función tendrá como dominio un conjunto de símbolos y como conjunto de llegada a los números naturales”.

Definición de la función g:

“Dado un número, podemos saber si es o no el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, ejemplo: el número 578 es el número de Gödel de un símbolo del lenguaje, lo que hacemos es colocar el número en función de números primos. Esto se logra al dividir 587 entre 8. Esto nos da como resultado $(8 \cdot 73) + 3$, que es igual a $(8 \cdot 72) + 11$, y esto es igual a $(8 \cdot (2^3 \cdot 3^2)) + 11$, este número es la imagen que la función *g* le da al símbolo para función f^3_2. Ahora, no todo número natural representa un número de Gödel, por ejemplo: el número impar 333 dividido entre 8 es igual a

[118] Ibid.

(8 · 41) + 5, esto es igual a (8 · 40) + 13, pero si descomponemos 40, esto nos da (8 · (2^3 · 5)) + 13, y este número no es imagen de ningún símbolo del sistema”.[119]

Extensión de la función *g* para asignarle un número de Gödel a cualquier término y fórmula (fbf) del sistema:

“... Es importante señalar que el número de Gödel de un símbolo del sistema siempre será un número impar (el resultado de la suma de un número par con un número impar es siempre un número impar), mientras que el número de Gödel de una cadena de símbolos del sistema (fbf) es un número par. Para una cadena o sucesión de símbolos del sistema se tiene:”

Si U_1, …, U_k son símbolos primitivos del lenguaje, definimos:
$g(U_1, \ldots, U_k) = 2^{g(U_1)} \cdot 3^{g(U_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{g(U_k)}$, donde para cada i, 1≥ i ≤ k, P_i es el i-ésimo número primo.

Ejemplo:
(a) Al calcular el número de Gödel del siguiente término f11 (x1), se tiene:
$g(f^1_1(x_1)) = 2^{g(f1_1)} \cdot 3^{g(()} \cdot 5^{g(x1)} \cdot 7^{g())}$
$g(f^1_1(x_1)) = 2^{11+8 \cdot (2 \cdot 3)} \cdot 3^3 \cdot 5^{7+8 \cdot 1} \cdot 7^5$
$g(f^1_1(x_1)) = 2^{59} \cdot 3^3 \cdot 5^{15} \cdot 7^5$

Un número par que no resulta ser un número de Gödel es 1008, pues 1008= $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, y este número no es imagen ni de un **término**, ni de una **fórmula** y tampoco de un **símbolo primitivo**.

A las sucesiones finitas de fórmulas también se le puede asignar mediante la función *g* un número de Gödel, es decir, las derivaciones también tienen un número de Gödel. La extensión de *g* es la siguiente:

[119] DA SILVA, Ricardo. Op cit., pags. 28-40.

Sea S_1, S_2, …, S_r una sucesión finita de fórmulas entonces:
$g(S_1, S_2, …., S_r) = 2^{g(S_1)} \cdot 3^{g(S_2)} \cdot 5^{g(S_3)} \cdot … \cdot p_r^{g(S_r)}$, donde para cada i, $1 \geq i \leq r$, P_i es el i-ésimo número primo. (Da Silva, 2014 pág. 28-40)

"... La diferencia entre los números de Gödel de un símbolo, una fórmula y una secuencia de fórmulas puede resumirse de la siguiente manera:"

"…puede verse fácilmente que el número correspondiente a un símbolo no es nunca el correspondiente a una palabra, ya que el primero es impar y el segundo es par. Además, el número de una palabra no es nunca el número de una sucesión de palabras (el primero es tal que el exponente de 2 es impar, mientras que el exponente de 2 en el segundo es par)"[120]

"Por último es importante señalar que la propiedad inyectiva de la función *g* se preserva bajo sus dos extensiones. Es decir que a diferentes fórmulas le corresponde diferentes números de Gödel (lo mismo para el caso de secuencias de fórmulas). **Esto se debe al teorema fundamental de la aritmética según el cual la factorización de cualquier número entero en términos de potencias de factores primos es única**".[121]

<u>Algunas relaciones expresables en N</u>

Con la ayuda de la numeración de Gödel, se puede revisar una lista de relaciones sobre $\mathbb{N}$ que son recursivas y por ende son expresables en *N*, la lista es la siguiente:

Teorema:
a. Fbf(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una <u>fórmula</u> de *N*.
b. Prax(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de un <u>axioma propio</u> de *N*.

[120] Ibid.

[121] Ibid.

c. Demt(n) se verifica si y sólo si n es el número de Gödel de una demostración en *N*.
d. Dm(m, n) se verifica si y sólo si m es el número de Gödel de una demostración de la fórmula cuyo número de Gödel n.
e. W(m, n) se verifica si y sólo si **m** es el número de Gödel de una fórmula $A(x1)$, en la que aparece libre x1, y **n** es el número de Gödel de una demostración de $A(\mathbf{S}^{(m)}(\mathbf{0}))$ en *N*.[122] (Da Silva, 2014 págs. 28-40)

Articulación del primer teorema de incompletitud de Gödel

Antes de introducir el esquema de prueba del Teorema de Incompletitud de Gödel, es necesario dar una definición previa:

Definición: Un sistema de primer orden S con el mismo lenguaje que *N* es ω-consistente, si ninguna fórmula $A(x_1)$, en la que aparece libre x_1, se tiene que $\forall\neg x_1\, A(x_1)$ es un teorema de S, supuesto que $A(\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{0}))$ sea un teorema de S para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir:

Si $S \vdash A(\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{0}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $S \nvdash \neg\forall\, x1\, A(x1)$

De la definición de ω-consistencia se sigue lo siguiente:

Teorema: Sea **S** un sistema de primer orden con el mismo lenguaje que *N*, Si **S** es ω-consistente, entonces **S** es consistente.
La propiedad de consistencia no implica la propiedad de ω-consistencia.[123]

Acercamiento al primer teorema de incompletitud de Gödel

Enunciado del *Primer Teorema de incompletitud* (1931):

[122] Ibid.

[123] Ibid.

Si N es ω-consistente, entonces N es incompleto, es decir, existe una fórmula φ tal que $N \nvdash \varphi$ y $N \nvdash \neg\varphi$.

Demostración:

W(m, n) es expresable en N, de tal modo que existe una fórmula $W(x_1, x_2)$, en donde sólo x_1 y x_2 figuran como variables libres, de tal forma que:

(i) Si W(m, n) se verifica, entonces $N \vdash W(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$

(ii) Si W(m, n) no se verifica, entonces $N \vdash \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(m)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(n)}(\underline{\mathbf{0}}))$

Considerando la siguiente fórmula $\forall x_2 \neg W(x_1, x_2)$, siendo p el número de Gödel de dicha fórmula y considerando la fórmula obtenida al sustituir $\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}})$ por x_1, es decir, $\forall x_2 \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, denotando a esta última fórmula φ.

Se tiene para φ, que "$\forall n \in \mathbb{N}$, $W(p, n)$ no se verifica". Desarrollando lo último, se tiene que: $\forall n \in \mathbb{N}$, no es cierto que p sea el número de Gödel de una fórmula $A(x_1)$ en la que la variable x1 aparece libre, y que n sea el número de Gödel de una demostración de $A(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}))$ en N. Ahora bien, p es el número de Gödel de una fórmula en la que aparece libre x_1, esto es, la fórmula $\forall x_2 \neg W(x_1, x_2)$, y si se denota a dicha fórmula por $A(x_1)$, entonces $A(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}))$ es la fórmula φ. De tal manera se tiene que la interpretación de φ es equivalente a: $n \in \mathbb{N}$, n no es el número de Gödel de una demostración de la fórmula φ en N".

Si $N \vdash \varphi$, es decir que ocurre $N \vdash \forall x_2 \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, siendo q el número de Gödel de dicha **demostración**, entonces se tiene que W(p, q) se verifica. Se tiene que la relación **W** es recursiva y por tanto representable en N, se cumple entonces que $N \vdash W(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(q)}(\underline{\mathbf{0}}))$. Ahora bien, aplicando una eliminación del generalizador en $\forall x2 \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$, eliminando x_2 por q, se tiene que $N \vdash \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(p)}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(q)}(\underline{\mathbf{0}}))$, pero esto hace que N sea inconsistente, pues se está derivando una fórmula y su negación. Este hecho contradice la hipótesis de que N es ω-consistente y por tanto consistente. La suposición inicial es falsa y se tiene que $N \nvdash \varphi$.

Se tiene que W (p, q) no se verifica para ningún número natural *q*. Por lo que ocurre $N \vdash \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{p})}(\underline{\mathbf{0}}), \underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{q})}(\underline{\mathbf{0}}))$, para todo $q \in \mathbb{N}$. De esta manera por la ω-consistencia a del sistema *N* se tiene que $N \nvdash \neg\forall x_2 \neg W(\underline{\mathbf{S}}^{(\mathbf{p})}(\underline{\mathbf{0}}), x_2)$ y por lo tanto se tiene que $N \nvdash \neg\varphi$. Con lo que se prueba que partiendo de la hipótesis de que *N* es ω-consistente (y por ende consistente), se sigue que *N* es incompleto.[124]

[124] Ibid.