UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

# ENERGIA APLICADA A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE DINAMICA

TESIS

PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA, POR

LUIS ANTONIO GONZALEZ Y GONZALEZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

NOVIEMBRE 1958

JUNTA DIRECTIVA

DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

| | |
|---|---|
| DECANO | ING. JORGE ARIAS B. |
| VOCAL 1º. | ING. ROBERTO ZEPEDA A. |
| VOCAL 2º. | ING. MAURICIO CASTILLO C. |
| VOCAL 3º. | ING. OTTO E. BECKER M. |
| VOCAL 4º. | BR. CARLOS SOLARES B. |
| VOCAL 5º. | BR. ADRIÁN JUÁREZ L. |
| SECRETARIO | ING. ROLÁND CASTILLO C. |

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL
EXAMEN GENERAL PRIVADO:

ING. JORGE EROMENGER
ING. ROBERTO ZEPEDA A.
ING. MAURICIO CASTILLO C.
ING. ERNESTO ROSALES
ING. HUMBERTO OLIVERO H.

DEDICO ESTE ACTO

A MI BISABUELA:

FRANCISCA GARRIDO V. DE SAGASTUME

A LA MEMORIA DE MIS ABUELOS.

A MIS TÍAS:

MERCEDES V. DE LA HOZ
MARÍA S. V. DE GONZÁLEZ

A MIS PADRES:

ANTONIO GONZÁLEZ GUERRA
ROSA G. DE GONZÁLEZ

A MI ESPOSA:

ESTHELA PALMA DE GONZÁLEZ

A MIS HIJOS:

LUIS DE JESÚS
ESTHELA DE MARÍA

A MIS HERMANOS.

A TODOS MIS PROFESORES.

A LA FACULTAD DE INGENIERÍA.-

Para el Ing. Dr.
Roberto Nájera Farfán,
con todo el aprecio y
cariño de su amigo.
Antonio González
Nov/16/58

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

CUMPLIENDO CON LO ESTIPULADO EN LAS LEYES UNIVERSITARIAS, SOMETO A CONSIDERACIÓN VUESTRA MI TRABAJO DE TESIS TITULADO:

ENERGIA APLICADA A LA RESOLUCION DE
PROBLEMAS DE DINAMICA

TEMA QUE ME FUÉ ASIGNADO POR LA JUNTA DIRECTIVA DE ESTA FACULTAD DE INGENIERÍA.-

## I) INTRODUCCIÓN

VEMOS DESBORDARSE EL CAUDALOSO RÍO ARRASTRANDO TODO CUANTO A SU PASO SE OPONE; VEMOS AL VIENTO HURACANADO CAUSAR GRAVES DAÑOS A EDIFICIOS, DESTRUIR PLANTACIONES ...; VEMOS AL PODER DEL AGUA MOVER POTENTES TURBINAS GENERADORAS DE ELECTRICIDAD; A DIARIO VEMOS INFINIDAD DE VEHÍCULOS TRANSPORTANDO OBJETOS Y PERSONAS POR AIRE, POR AGUA, POR TIERRA; A OTROS CONSTRUYENDO CARRETERAS, ARANDO LA TIERRA; TRANSFORMANDO LA MATERIA PRIMA EN SUBSTANCIAS O CUERPOS DE VITAL IMPORTANCIA. OÍMOS HABLAR DE LA BOMBA ATÓMICA, DE LOS PODERES EXPANSIVOS DE LA PÓLVORA Y DE UN SINNÚMERO DE FENÓMENOS REALIZADOS POR LA NATURALEZA O POR EL HOMBRE, EN SU DIARIO TRAJÍN POR VIVIR O QUIEN SABE SI POR MORIR. SI, TODO ESTO QUE VEMOS Y OTROS FENÓMENOS QUE NO VEMOS, SON LA CLARA EXPRESIÓN DE LA ENERGÍA. LA ENERGÍA ES PUES UNA CONSECUENCIA DE LA NATURALEZA, DE LA VIDA; DESECHARLA SERÍA MORIR. EL CONCEPTO DE ENERGÍA, ES INDUDABLEMENTE EL MÁS IMPORTANTE DE CUANTOS CONCEPTOS HAYA CREADO EL HOMBRE. EN ÉL ENCONTRAMOS LAS RAZONES DE LA FUERZA (POTENTE ARMA QUE DOMINARÁ ETERNAMENTE NUESTRO MUNDO PARA SU BIEN O PARA SU MAL). LA ENERGÍA ES MÁS: NOS ENSEÑA EL RUMBO DE LOS PROCESOS NATURALES; NOS DICE CON LÓGICA AL ALCANCE DE UN NIÑO, LA POSIBILIDAD O IMPOSIBILIDAD DE REALIZARSE UN FENÓMENO, NOS DICE ASÍ: "DE LA NADA NO SALE NADA". AHORA BIEN, EL HOMBRE NO HA SIDO, NI ES, NI SERÁ, UN SIMPLE OBSERVADOR DE LA NATURALEZA; EL HOMBRE ES CONTINUAMENTE UNA CRIATURA INQUIETA, INSATISFECHA DE LO QUE HACE, INVESTIGA, DESCUBRE; EL HOMBRE

VIVE ROBANDO ENERGÍA A LA NATURALEZA, VIVE ACLARANDO LO OBSCURO. Y ASÍ LO VEMOS FORMULAR TEORÍAS, AHONDARLAS APLICANDO MATEMÁTICAS, ESTABLECER LAS FÓRMULAS QUE LAS RIGEN Y DETERMINAR SUS LÍMITES, Y NO ES RARO ENCONTRARSE CON FÓRMULAS TAN SUBLIMES Y GENIALES COMO ESTA: "LA ENERGIA DE LA MATERIA ES IGUAL A LA MASA POR EL CUADRADO DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ", FÓRMULA QUE DEBEMOS AL NO MENOS GENIAL SABIO DE NUESTRO SIGLO XX ALBERTO EINSTEIN. PLANK, BASADO EN LAS TEORÍAS DE LA RELATIVIDAD, HA ESTABLECIDO QUE UN GRAMO DE MATERIA ES CAPÁZ DE PROPORCIONAR 20,000,000,000 (VEINTE MIL MILLONES) DE CALORÍAS. CON ÉSTO PODEMOS DARNOS CUENTA EXACTA QUE LOS CUERPOS QUE FORMAN PARTE DEL UNIVERSO SON VERDADEROS DEPÓSITOS DE ENERGÍA, POR EL SOLO HECHO DE EXÍSTIR COMO TALES, PUES LA CANTIDAD DE ENERGÍA QUE CONTIENEN DEPENDE DE SU ESTADO FÍSICO, DE SU VOLUMEN Y DE SU TEMPERATURA. AHONDEMOS MÁS EN SU IMPORTANCIA, VEAMOS ESTE INTERESANTE EJEMPLO DE ENERGÍA QUÍMICA POTENCIAL, TRANSFORMADA EN ENERGIA CALORÍFICA: SI MEZCLAMOS UN KILOGRAMO DE HIDRÓGENO CON OCHO KILOGRAMOS DE OXÍGENO, OBSERVAMOS QUE SE UNEN ENTRE SÍ FORMANDO UN NUEVO CUERPO QUE ES EL AGUA, EN CANTIDAD DE NUEVE KILOGRAMOS CON UN DESPRENDIMIENTO DE CALOR EXTRAORDINARIO. ESTA ENERGÍA ES VERDADERAMENTE ENORME, PUES EQUIVALE A 34,000 CALORÍAS, Y COMO UNA CALORÍA EQUIVALE A 427 KILOGRÁMETROS, REPRESENTA EL TRABAJO REALIZADO PARA ELEVAR A UN METRO DE ALTURA UN PESO DE 34,000 x 427 = 14.518,000 KILOS. PERO HE AQUÍ LA VIRTUD ESPECIAL DE LA ENERGÍA, Y ES QUE SU VALOR ES CONSTANTE EN EL UNIVERSO AL IGUAL QUE LA CONSERVACIÓN DE LA MATERIA, Y ESTA CIRCUNSTANCIA ES VITAL-

MENTE IMPORTANTE. HAY TANTA ENERGÍA HOY COMO HACE MIL AÑOS, COMO HABRÁ EN TODO EL FUTURO. HOY LA FÍSICA CREE SIN TITUBEOS EN ESTE PRINCIPIO FUNDAMENTAL, ES UN DOGMA DE FÉ. NO SE DEJA COMPROBAR, A NO SER QUE TOMEMOS COMO COMPROBACIÓN EL QUE MUCHAS CABEZAS PRIVILEGIADAS SE HAYAN BATIDO EN VANO DURANTE SIGLOS CON EL PERPETUUM MOBILE.

CON LO ANTERIOR CREO HABER DEJADO UNA IDEA CLARA SOBRE EL TÓPICO QUE PREOCUPA EN EL TEMA DE MI TESIS. ESTOY SEGURO QUE EL PRINCIPIO EXPUESTO ES SENCILLO, SIENDO POR ESO QUE LO HE ELEGIDO COMO PUNTO DE PARTIDA EN EL ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE MUCHÍSIMOS PROBLEMAS DE "DINAMICA". A LO LARGO DE ALGUNOS AÑOS, HE TENIDO OPORTUNIDAD DE RELACIONARME CON ESTUDIANTES EN CARACTER DE PROFESOR, Y ESTO ME HA PERMITIDO ENTERARME DE LAS DIFICULTADES CON QUE SE TROPIEZA CORRIENTEMENTE EN EL ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS FÍSICOS, ENTRE ELLOS PROBLEMAS DE DINÁMICA: "LOS FAMOSOS CARRITOS; LOS FAMOSOS PROBLEMAS DE ENERGÍA DE ROTACIÓN; ETC." Y ES PRECISAMENTE CON EL FIN DE FACILITAR LA COMPRENSIÓN DE ESTOS CAPÍTULOS, QUE HE ESCOGIDO EL PRESENTE TEMA DE TÉSIS.

ESPERO QUE MI HUMILDE LABOR BRINDE LOS FRUTOS DESEADOS. SI ASÍ FUERA ME SENTIRÉ SATISFECHO DE HABER COLABORADO Y CUMPLIDO CON MI DEBER.

II) ENERGIA:

A) DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN.

B) EVALUACIÓN.

C) PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

A) SE DEFINE LA ENERGÍA COMO LA CAPACIDAD DE UN CUERPO PARA DESARROLLAR TRABAJO, ENTENDIÉNDOSE POR TRABAJO TOTAL, LA RESULTANTE DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO EN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO, MULTIPLICADA POR EL ESPACIO DESPLAZADO POR DICHO CUERPO EN ESA DIRECCIÓN. LA ENERGÍA ES UNA MAGNITUD ESCALAR, ESTO QUIERE DECIR QUE SU VALOR CARECE DE SENTIDO Y DIRECCIÓN. POR LO TANTO LA ENERGÍA TOTAL DE UN CUERPO, ES LA SUMA ARITMÉTICA DE SUS ENERGÍAS PARCIALES.

PUEDE LA ENERGÍA CLASIFICARSE COMO SIGUE:

MECANICA:
- ENERGÍA POTENCIAL, (DE POSICIÓN O DE CONFIGURACIÓN)
- Y
- ENERGÍA CINÉTICA O DE MOVIMIENTO:
  - TRASLACIÓN
  - Y
  - ROTACIÓN

NO MECANICA:
- EL CALOR O ENERGÍA TÉRMICA
- ENERGÍA QUÍMICA
- ENERGÍA ELÉCTRICA, ETC.

ES DE NOTARSE QUE CUALQUIERA DE LAS LLAMADAS FORMAS ESPECIALES (NO MECÁNICA)

DE LA ENERGÍA, PUEDEN CONVERTIRSE EN CIRCUNSTANCIAS FAVORABLES EN ENERGÍA MECÁNICA (POTENCIAL - CINÉTICA) Y HAY SUFICIENTES PRUEBAS QUE INDICAN QUE TODA LA ENERGÍA ES EN DEFINITIVA ENERGÍA MECÁNICA. ASÍ, SEGÚN ESTE PUNTO DE VISTA, LA ENERGÍA CALORÍFICA DE UN CUERPO PODRÍA DETERMINARSE COMO ENERGÍA CINÉTICA, SI SE CONOCIERAN LOS MOVIMIENTOS DE LAS DIFERENTES PARTÍCULAS QUE LO FORMAN (TAL ES EL CASO DE LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES, QUE EXPLICA SATISFACTORIAMENTE LAS RAZONES DE LOS CAMBIOS DE PRESIÓN, VOLUMEN Y TEMPERATURA DE LOS GASES).

SI PARA ALARGAR UN RESORTE SE CONSUME UN DETERMINADO TRABAJO "W", EL MUELLE YA TENSO TIENE A CAUSA DE LA POSICIÓN ANORMAL DE LAS MOLÉCULAS, UNA ENERGÍA POTENCIAL QUE EN EL CASO DE UN MATERIAL PERFECTAMENTE ELÁSTICO, DEVUELVE ÍNTEGRAMENTE EL TRABAJO "W", Y SI ESTA CONDICIÓN NO SE PRODUCE, EL TRABAJO DEVUELTO ES MENOR QUE "W"; CONSUMIÉNDOSE LA DIFERENCIA EN VENCER EL ROZAMIENTO INTERNO ENTRE LAS MOLÉCULAS. EN IGUAL FORMA EL VAPOR DE AGUA A PRESIÓN TIENE A CAUSA DE LA DISPOSICIÓN O CONFIGURACIÓN DE SUS MOLÉCULAS, UNA ENERGÍA QUE BIEN PODRÍAMOS CONSIDERARLA COMO POTENCIAL; SI LA EXPANSIÓN TIENE LUGAR EN EL CILINDRO DE UNA MÁQUINA DE VAPOR, LA ENERGÍA POTENCIAL SIRVE PARA PRODUCIR EL DESPLAZAMIENTO DEL ÉMBOLO, ES DECIR, PARA VENCER LAS RESISTENCIAS QUE SE OPONEN A SU MOVIMIENTO, DESARROLLANDO ASÍ TRABAJO MECÁNICO. SI POR EL CONTRARIO EL VAPOR SE EXPANSIONA LIBREMENTE, SIN ENCONTRAR RESISTENCIA A TRAVÉS DE LA TOBERA; POR EJEMPLO, SU ENERGÍA POTENCIAL SE CONVIERTE ÍNTEGRA-

MENTE EN CINÉTICA.

LA ENERGÍA QUÍMICA, SERÍA OTRO CASO QUE PODRÍA CLASIFICARSE COMO ENERGÍA POTENCIAL (ENERGÍA MECÁNICA). ESTA ENERGÍA RADICA EN EL AGRUPAMIENTO ATÓMICO DE LAS MOLÉCULAS DE LOS CUERPOS. SI POR EJEMPLO EL AGUA SE DESCOMPONE ELECTROLÍTICAMENTE EN HIDRÓGENO Y OXÍGENO, PUEDE INTERPRETARSE ESTE FENÓMENO COMO LA DISOCIACIÓN DE LAS MOLÉCULAS DEL AGUA EN ÁTOMOS DE HIDRÓGENO Y OXÍGENO. ESTA DISOCIACIÓN EXIGE UN GASTO DE ENERGÍA ELÉCTRICA CUYO VALOR SE ENCUENTRA, AL ESTADO POTENCIAL, EN LA ENERGÍA QUÍMICA, O AFINIDAD QUE TIENDE A COMBINAR EL HIDRÓGENO Y OXÍGENO QUE LA CORRIENTE SEPARÓ; ASÍ CUANDO EL HIDRÓGENO, ARDE EN ATMÓSFERA DE OXÍGENO PRODUCIENDO AGUA, AQUELLA ENERGÍA POTENCIAL PASA AL ESTADO CINÉTICO PRODUCIENDO CALOR.

EN TODO PROCESO QUÍMICO, ES DECIR EN TODA ALTERACIÓN O MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MOLÉCULA DE UN CUERPO; SE GANA O PIERDE ENERGÍA QUÍMICA A COSTA DE PERDER O GANAR RESPECTIVAMENTE OTRA FORMA DE ENERGÍA (CALOR, ELECTRICIDAD, ETC.)

## B) ENERGÍA POTENCIAL (EVALUACIÓN)

LAS CONSIDERACIONES QUE A CONTINUACIÓN SE HACEN, ASÍ COMO LA DEFINICIÓN QUE APARECE ATIENDE ESTRÍCTAMENTE A CONCEPTOS EN EL CAMPO GRAVITACIONAL, ES DECIR A CONCEPTOS CORRIENTES DADOS POR LA MECANICA. DEFÍNESE LA ENERGÍA POTENCIAL DE UN CUERPO, COMO LA CAPACIDAD DEL MISMO PARA REALIZAR TRABAJO EN VIRTUD DE LA

POSICIÓN (DISTANCIA), QUE GUARDE CON RESPECTO A CIERTOS PLANOS DE REFERENCIA CONVENCIONAL Y LÓGICAMENTE DISPUESTOS, Y DE LAS FUERZAS QUE SOBRE EL MISMO ACTÚEN.

LOS PLANOS DE REFERENCIA DEBEN TOMARSE ASÍ:

1) EN FORMA GENERAL; DEBEN CONSIDERARSE DOS PLANOS DE REFERENCIA: UNO HORIZONTAL Y OTRO VERTICAL. EL PLANO HORIZONTAL DE REFERENCIA SIRVE PARA EVALUAR LA ENERGÍA POTENCIAL DE TODAS Y CADA UNA DE LAS FUERZAS O PROYECCIÓN DE FUERZAS VERTICALES (INCLUSIVE PESOS); Y EL PLANO VERTICAL DE REFERENCIA SIRVE PARA EVALUAR LA ENERGÍA POTENCIAL DE TODAS AQUELLAS FUERZAS O PROYECCIÓN DE FUERZAS HORIZONTALES QUE ACTÚEN SOBRE LOS CUERPOS. LA ENERGÍA POTENCIAL TOTAL SERÁ LA SUMA ALGEBRÁICA DE LOS PRODUCTOS PARCIALES DE FUERZAS O PROYECCIÓN DE FUERZAS POR DISTANCIAS AL PLANO CORRESPONDIENTE.

2) EN FORMA PARTICULAR, Y PARA EL CASO DE CUANDO SOBRE UN CUERPO O CUERPOS ACTÚE UNA SOLA FUERZA O RESULTANTE ACTIVA, (ENTIÉNDESE POR FUERZA O RESULTANTE ACTIVA A TODA FUERZA QUE ACTÚA SOBRE UN CUERPO O CUERPOS EN LA DIRECCIÓN EN QUE TIENDE A PRODUCIRSE O SE PRODUCE EL MOVIMIENTO), DEBERÁ TOMARSE UN PLANO DE REFERENCIA PERPENDICULAR A LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO, QUE SERVIRÁ PARA EVALUAR LA ENERGÍA POTENCIAL EN VIRTUD DE LA FUERZA O RESULTANTE ACTIVA; Y OTRO PLANO HORIZONTAL PARA EVALUAR LA ENERGÍA POTENCIAL EN VIRTUD DE LOS PESOS DE LOS CUERPOS

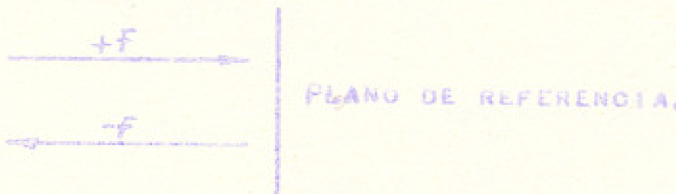
DEL SISTEMA CONSIDERADO. EN TODO CASO LA ENERGÍA POTENCIAL ES LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS PRODUCTOS: FUERZAS POR DISTANCIAS A LOS PLANOS DE REFERENCIA RESPECTIVOS.

## LAS FUERZAS DEBEN CONSIDERARSE ASÍ:

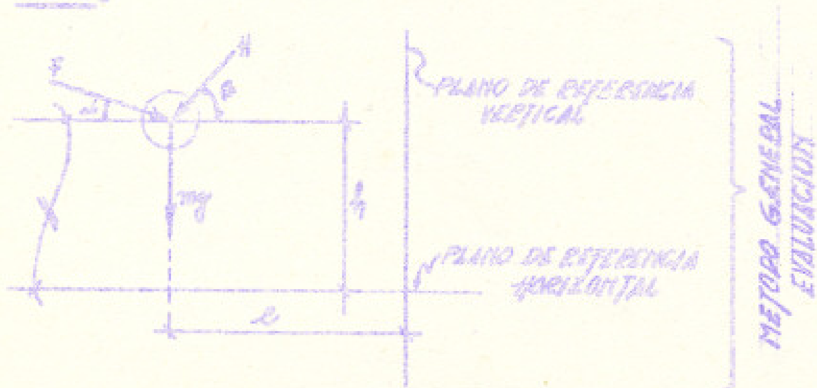
LAS FUERZAS SE CONSIDERAN CON LOS SIGUIENTES SIGNOS:

+ CUANDO SU SENTIDO BUSQUE AL PLANO DE REFERENCIA CORRESPONDIENTE.

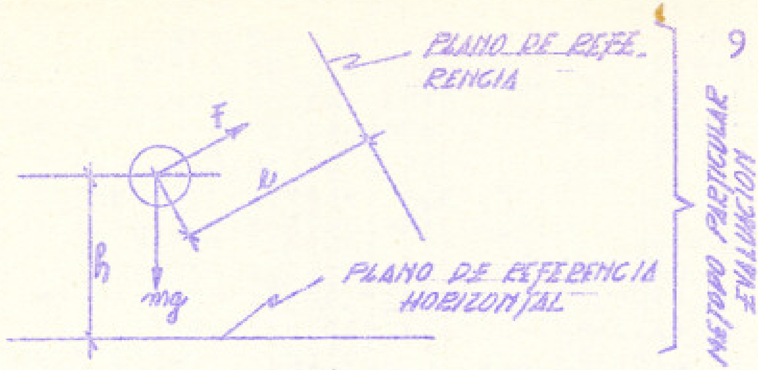
− CUANDO SU SENTIDO NO BUSQUE AL PLANO DE REFERENCIA, ES DECIR CUANDO EL VECTOR SE DIRIJA HACIA AFUERA DEL PLANO DE REFERENCIA ASÍ:




## EJEMPLOS DE EVALUACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL:




$$E.\,Pot = (F \operatorname{sen}\alpha + mg + H \operatorname{sen}\beta)\,h + (F\cos\alpha - H\cos\beta)\,e$$




$E.Pot = Fe + mgh$

## B) ENERGÍA CINÉTICA (EVALUACIÓN)

EL CONCEPTO DE ENERGÍA CINÉTICA SE LO DEBEMOS A GOTTFRIED W. LEIBNITZ, A -- QUIEN DEBEMOS TAMBIÉN JUNTO CON NEWTON - LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL; -- AUNQUE ÉL EMPLEÓ EL NOMBRE DE VIS VIVA O FUERZA VIVA PARA DESIGNARLA; ACTUALMENTE ESTE NOMBRE SE HALLA EN DESUSO. LEIBNITZ, MEDÍA LA FUERZA VIVA POR EL PRODUCTO $MV^2$. FUÉ CORILIUS EL QUE PROPUSO EN 1835 COMO MÁS CONVENIENTE PARA MEDIR LA FUERZA VI-VA: "$1/2MV^2$" QUE ES LA EXPRESIÓN USUAL EN LA ACTUALIDAD. EL NOMBRE DE FUERZA - VIVA, FUÉ SUBSTITUIDO POR EL DE "ENERGÍA", EN EL AÑO 1807 POR PROPUESTA DEL FÍSICO INGLÉS THOMAS YOUNG; PERO POSTERIORMENTE AL ADVERTIRSE QUE LA ENERGÍA PODÍA TENER OTRAS FORMAS QUE LA DEBIDA A MOVIMIENTO, ENTONCES SE LE DESIGNÓ CON EL NOMBRE DE ACTUAL Y DE DINÁMICA, PARA FINALMENTE -- QUEDAR CON EL NOMBRE DE ENERGÍA CINÉTICA, PROPUESTO EN 1853 POR LORD KELVIN.

DEFÍNESE ESTA ENERGÍA COMO LA CAPACIDAD DE UN CUERPO PARA REALIZAR TRABAJO EN -- VIRTUD DE SU VELOCIDAD. ESTA ENERGÍA SE CONSIDERA DIVIDIDA EN DOS, ASÍ: ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN Y ENERGÍA CINÉTI-

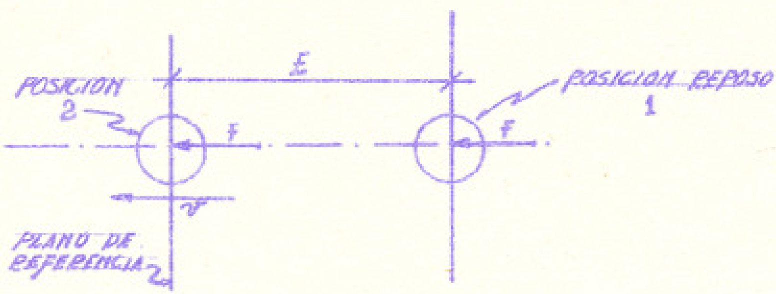
CA DE ROTACIÓN. LA ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN, ES LA ENERGÍA DE UN CUERPO - EN VIRTUD DEL TRASLADO DE SU CENTRO DE - MASA, (CENTRO DE GRAVEDAD) CON UNA VELO- CIDAD DADA EN UNA TRAYECTORIA CIRCULAR O RECTILINEA; PERO DEBEMOS TENER PRESENTE QUE AL CALCULAR ESTA ENERGÍA NO SE ESTÁ CONSIDERANDO NINGÚN GIRO DEL CUERPO, ES DECIR QUE SI EL CENTRO DE GRAVEDAD RECO- RRIERA UNA TRAYECTORIA CIRCULAR, LAS POSI CIONES DE ESE CUERPO EN "A" COMO EN "B" O "C" (VER FIGURA), SERÍAN LAS MISMAS - ASÍ:


UN HOMBRE QUE RECORRIERA UNA TRAYEC TORIA CIRCULAR PERO MANTENIENDO UNA O- RIENTACIÓN FIJA ASÍ COMO LO ES AL IR SEN TADO EN UNA RUEDA DE CHICAGO, SE CONSIDE RARÍA COMO UN CUERPO AFECTADO POR UN MO- VIMIENTO DE TRASLACIÓN.

LA ENERGÍA DE ROTACIÓN DE UN CUERPO, ES LA CAPACIDAD DEL MISMO PARA REALIZAR TRABAJO EN VIRTUD DEL MOVIMIENTO DE TRAS LACIÓN DE LAS MASAS DE LAS PARTÍCULAS - COMPONENTES EN TRAYECTORIAS CIRCULARES - QUE TIENEN POR CENTRO, EL CENTRO DE GRA- VEDAD DEL CUERPO. ASÍ PARA DETERMINAR - LA ENERGÍA DE ROTACIÓN DE UN CUERPO, BAS TARÁ CONSIDERARLO FORMADO POR MASAS ELE- MENTALES, TRASLADÁNDOSE EN TRAYECTORIAS CIRCULARES CON VELOCIDADES VARIABLES, SE GÚN LA DISTANCIA A QUE SE ENCUENTREN DEL

CENTRO DE GRAVEDAD (VELOCIDADES TANGENCIALES).

PASAREMOS AHORA A LA DETERMINACIÓN DE LAS FÓRMULAS PARA LA EVALUACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN Y CINÉTICA DE ROTACIÓN. CONSIDEREMOS UN CUERPO "A" (VER FIGURA) EN REPOSO E INICIALMENTE AFECTADO POR UNA FUERZA "F", (QUE SE CONSIDERA APLICADA EN EL CENTRO DE GRAVEDAD) Y A UNA DISTANCIA "E" DE UN PLANO DE REFERENCIA, TENEMOS:




ES EVIDENTE QUE TODA LA ENERGÍA POTENCIAL EXISTENTE EN LA POSICIÓN (1) SE HABRÁ ANULADO AL TRASLADARSE EL CUERPO A LA POSICIÓN (2); PERO EN ESTA POSICIÓN EL CUERPO TENDRÁ UNA ENERGÍA EN VIRTUD DE SU VELOCIDAD ADQUIRIDA AL TRASLADARSE EL ESPACIO (E) AFECTADO POR LA FUERZA "F" (MOVIMIENTO VARIADA UNIFORMEMENTE).

DE DONDE PODEMOS DECIR QUE:

<u>ENERGÍA POTENCIAL (1) = ENERGÍA CINÉTICA (2)</u>

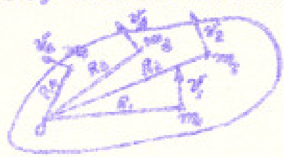
F.E = ENERGÍA CINÉTICA

$$E = \frac{v^2}{2a} \text{ (Mov. variado)}$$

$$\frac{Fv^2}{2a} = E.C. \quad ; F = ma \text{ (dinámica)}$$

$$\frac{ma\,v^2}{2a} = E.C. \quad \therefore \quad \underline{E.C. = \frac{1}{2} m v^2}$$

PARA LA DETERMINACIÓN DEL VALOR DE LA ENERGÍA DE ROTACIÓN, CONSIDEREMOS UN CUERPO (VER FIGURA):



FORMADO POR UNA SERIE DE PARTÍCULAS DE MASAS ELEMENTALES: $M_1$, $M_2$, $M_3$ ....; Y SITUADAS A UNA DISTANCIA $R_1$, $R_2$, $R_3$ ...; RESPECTIVAMENTE. SABEMOS QUE LA ENERGÍA DE ROTACIÓN DE UN CUERPO ES LA SUMA DE LAS ENERGÍAS DE TRASLACIÓN DE LAS PARTÍCULAS COMPONENTES, Y SABEMOS TAMBIÉN QUE LA ENERGÍA DE TRASLACIÓN ES IGUAL A $1/2MV^2$; POR LO TANTO TENEMOS: E. ROTACIÓN $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \ldots$ AL GIRAR EL CUERPO RÍGIDO CON RESPECTO A SU CENTRO DE GRAVEDAD, ES EVIDENTE QUE LOS RADIOS QUE UNEN A CADA UNA DE ESTAS PARTÍCULAS ELEMENTALES SE DESPLAZARÁN IGUAL ÁNGULO; LO QUE EQUIVALE A DECIR QUE SUS VELOCIDADES ANGULARES SON IGUALES; NO ASÍ SUS VELOCIDADES TANGENCIALES CUYO VALOR LO RIGE LA EXPRESIÓN ($\omega R$), SIENDO ($\omega$) LA VELOCIDAD ANGULAR DEL CUERPO AL GIRAR, Y (R) LA DISTANCIA A QUE SE ENCUENTRA DICHA PARTÍCULA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO QUE GIRA. POR LO TANTO LA ENERGÍA DE ROTACIÓN DE CADA PARTÍCULA ELEMENTAL, SERÁ POR LO ANTERIOR $= 1/2M\omega^2R^2$ ES DECIR QUE AL SUMAR O INTEGRAR ESTA EXPRESIÓN CORRESPONDIENTE A LA ENERGÍA DE TRASLACIÓN DE CADA UNA DE LAS

PARTÍCULAS COMPONENTES DEL CUERPO, TENDREMOS ESTO: E. ROTACIÓN = $1/2\ w^2 \Sigma Mr^2$.

EL VALOR $\Sigma Mr^2$ ES CONOCIDO CON EL NOMBRE DE INERCIA (I) DE MASA, MÁS CORRIENTEMENTE INERCIA, NOMBRE DADO POR EULER. EL VALOR DE LA INERCIA SE CALCULA POR CÁLCULO INTEGRAL O POR MÉTODOS EXPERIMENTALES; MÁS ADELANTE HABLAREMOS DETENIDAMENTE DE ESTE TEMA. POR LO TANTO Y PARA RESUMIR TENEMOS:

ENERGIA DE ROTACION = 1/2 INERCIA X VELOCIDAD ANGULAR AL CUADRADO.-

## c) PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

ESTE PRINCIPIO FUNDAMENTAL EN LA FÍSICA MODERNA, LLAMADO PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA Y TAMBIÉN DE LA EQUIVALENCIA DE LAS DISTINTAS FORMAS DE LA ENERGÍA, FUÉ ENUNCIADO EN EL AÑO DE 1842 POR EL MÉDICO ALEMÁN JULIO ROBERTO MEYER, Y PRECISADO POR HELMOLTZ EN 1847 EN SU LIBRO "CONSERVACION DE LA FUERZA". ESTE PRINCIPIO SE ENUNCIA ASÍ: LA SUMA DE TODAS LAS ENERGIAS SEAN CUALES FUEREN, PERMANECE CONSTANTE, IMPERECEDERA E INDEPENDIENTE DE LAS VARIACIONES DE CUALQUIER CLASE QUE PUEDA TENER UN SISTEMA DETERMINADO: ESTO DICHO EN OTRAS PALABRAS QUIERE DECIR QUE NUNCA PODRÁ ENCONTRARSE PÉRDIDA O AUMENTO DE ENERGÍA.

NUMEROSOS EXPERIMENTOS SE REALIZARON PARA PODER LLEGAR A ESTABLECER ESTE PRINCIPIO FUNDAMENTAL; ASÍ EL FÍSICO INGLÉS JOULE, DETERMINÓ EN 1850 DESPUÉS DE CÉLE

BRES Y CLÁSICAS EXPERIENCIAS EL EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR; DE AQUELLAS EXPERIENCIAS SACÓ EN CONCLUSIÓN QUE PARA ELEVAR UN KILOGRAMO DE AGUA UN GRADO DE TEMPERATURA, SE NECESITABA REALIZAR UN TRABAJO DE 425 KILOGRÁMETROS. JOULE, COLOCABA UNA RUEDA DE PALETAS EN UN VASO CALORIMÉTRICO LLENO DE AGUA Y LA PONÍA EN MOVIMIENTO AGITADO POR MEDIO DE UN PESO; LA AGITACIÓN PRODUCIDA POR LAS PALETAS CALENTABA EL AGUA. EL TRABAJO EMPLEADO EN DICHO PROCESO Y EL CALOR OBTENIDO SE MEDÍAN CON FACILIDAD. HIRN, DETERMINABA EL CALDEO PRODUCIDO POR EL MARTILLEO DE UNA PIEZA DE PLOMO; TAMBIÉN DETERMINÓ EL TRABAJO QUE EFECTUABA UNA MÁQUINA DE VAPOR POR EL CONSUMO DE UNA CANTIDAD CONOCIDA DE CALOR. DE ESTOS EXPERIMENTOS Y MUCHOS OTROS REALIZADOS POSTERIORMENTE, SE LLEGÓ A VALORES DEL EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR COMPRENDIDOS ENTRE 424 Y 429 KILOGRÁMETROS (UNIDAD DE TRABAJO). MEYER, DETERMINÓ ANALÍTICAMENTE EL VALOR DEL EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR, CONSIDERANDO UN GAS ENCERRADO EN UN CILINDRO, DILATÁNDOSE ISOBÁRICAMENTE, Y REALIZANDO ESTE GAS UN TRABAJO AL DESPLAZAR EL SUPUESTO ÉMBOLO, VENCIENDO LA RESISTENCIA DE LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA; DE ESTE ANÁLISIS OBTUVO UN VALOR DE 424 KILOGRÁMETROS POR CALORIA GRANDE; EN LA ACTUALIDAD ESTÁ ADOPTADO EL VALOR DE 427 KGM/CALORÍA.

EINSTEIN, ESTABLECIÓ YA ANTES DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN FUNDAMENTAL: TODA ENERGIA, CUALQUIERA QUE SEA LA FORMA O INDUMENTO EN QUE SE NOS PRESENTE, TIENE UNA MASA

DETERMINADA. Esto equivale a decir: ENERGÍA Y MASA SON LA MISMA COSA. Lo que llamamos masa no es más que una nueva forma de la Energía. La igualdad esencial entre masa y Energía no es una fantasía, se ha establecido ya su veracidad en esta Época Atómica. Según esta proposición de Einstein, un cuerpo caliente pesa más que estando frío; y si fundimos un kilogramo de hielo por ejemplo, su peso ya fundido será un poquitín mayor, pues el calor de fusión queda oculto en el agua. El hecho de que al combinarse dos elementos: Hidrógeno y Cloro, dando Ácido clorhídrico con desprendimiento de calor; significa que el peso obtenido de este ácido es menor que la suma original de sus componentes.

Se ha dado un gran paso hacia la unidad del Universo, al unir con el principio de equivalencia, la Energía y la Materia; y si conjugamos éste con el principio de la Conservación de la Energía, podemos decir sin temor a equivocarnos y pecar de exagerados: "LA FISICA ACTUAL A CORRIDO EL VELO DEL MISTERIO AL UNIVERSO".-

## III) LEYES DINÁMICAS DE NEWTON, ANALIZADAS Y COMPROBADAS POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA:

ANTES DE ENTRAR AL TEMA, DAREMOS LA DEFINICIÓN DE DINÁMICA: "ES LA CIENCIA QUE ESTUDIA LAS RELACIONES ENTRE LOS MOVIMIENTOS Y LAS CAUSAS QUE LOS PRODUCEN". LAS LEYES QUE RIGEN LA DINÁMICA, FUERON ENUNCIADAS POR PRIMERA VEZ EN FORMA EXPLÍCITA EN 1687 POR SIR ISAAC NEWTON, GENIAL FÍSICO Y MATEMÁTICO INGLÉS, QUE CONTRIBUYÓ GRANDEMENTE EN EL DESARROLLO DE ESTA CIENCIA; TAN ES ASÍ QUE ES DIFÍCIL ENCONTRAR UN ASPECTO EN DONDE NO HAYA INTERVENIDO. DICHOS PRINCIPIOS, EN NÚMERO DE 3 SON: PRINCIPIO DE LA INERCIA, PRINCIPIO DE LA FUERZA Y PRINCIPIO DE LA ACCIÓN Y REACCIÓN. ESTOS PRINCIPIOS SON FUNDAMENTALMENTE IMPORTANTES EN DINÁMICA; SIN ELLOS PRÁCTICAMENTE SERÍA IMPOSIBLE EL ANÁLISIS DE MUCHÍSIMOS PROBLEMAS.

PRIMER PRINCIPIO: LEY DE LA INERCIA: SE ENUNCIA DICIENDO: "SI SOBRE UN PUNTO MATERIAL (PARTÍCULA LIBRE) NO ACTÚA NINGUNA FUERZA, EL PUNTO CONTINÚA EN REPOSO O BIEN CONTINÚA MOVIÉNDOSE EN LINEA RECTA CON MOVIMIENTO UNIFORME. SE ENTIENDE POR PARTÍCULA LIBRE, A TODA PARTÍCULA (CUERPO) QUE POR ESTAR SUFICIENTEMENTE ALEJADA DE CUALQUIER OTRA PARTÍCULA, SE CONSIDERA LIBRE DE TODA ACCIÓN EXTERIOR. EL CONCEPTO DE PARTÍCULA LIBRE COMO PODRÁ VERSE ES UN CONCEPTO IDEALISTA 100%; EN LA PRÁCTICA ES IMPOSIBLE LOGRAR ESTA CONDICIÓN, DE ALLÍ LA IMPOSIBILIDAD DE LOGRAR UNA

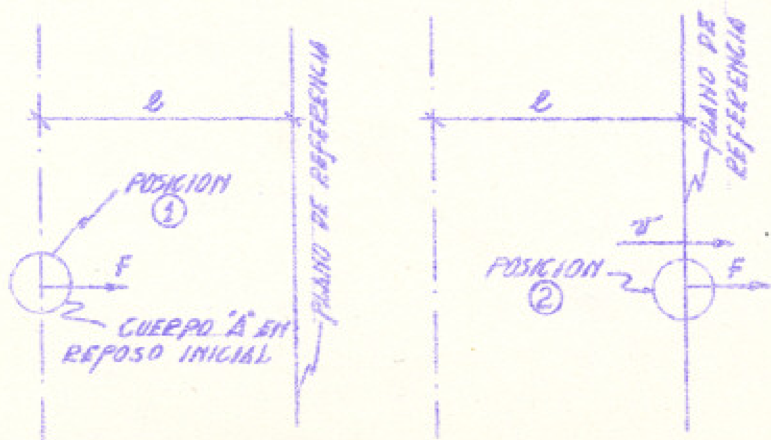
COMPROBACIÓN EXACTA DE ESTA LEY; SIN EMBARGO, LAS EXPERIENCIAS NOS HAN INDUCIDO A ADMITIRLA COMO UNA VERDAD INDISCUTIBLE. A CONTINUACIÓN Y COMO ES MI OBJETIVO VOY A TRATAR DE COMPROBAR ESTE PRINCIPIO, EN BASE DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: CONSIDEREMOS POR EJEMPLO UNA PARTÍCULA "A", QUE SE ENCUENTRA EN REPOSO, EN TAL CONDICIÓN ES FÁCIL NOTAR QUE TAL PARTÍCULA TENDRÁ ÚNICAMENTE ENERGÍA NO MECÁNICA, PUES ENERGÍA POTENCIAL Y CINÉTICA PRÁCTICAMENTE NO PODEMOS CONSIDERAR POR EL HECHO DE QUE LA PARTÍCULA QUE ESTAMOS TRATANDO CARECE DE PESO, A LA VEZ NO EXISTE PARA ESTA PARTÍCULA NINGÚN VALOR DE ENERGÍA CINÉTICA PUES LA CONSIDERAMOS EN REPOSO; POR LO TANTO, SUPONIENDO CONSTANTE LA ENERGÍA NO MECÁNICA, Y TOMANDO EN CUENTA EL PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA, DE UNA POSICIÓN A OTRA, ES TÁCITO QUE LA ENERGÍA EN UN SEGUNDO O TERCER INSTANTE TIENE QUE SER IGUAL A LA SUMA DE LAS ENERGÍAS POTENCIAL Y CINÉTICA DEL PRIMER INSTANTE CONSIDERADO, O SEA QUE EL CUERPO "A" CONTINÚA EN EL REPOSO INICIAL. SI ESTE MISMO CUERPO SE MUEVE CON UNA VELOCIDAD DADA, EL CUERPO PASA A TENER UNA ENERGÍA CINÉTICA EN VIRTUD DE SU VELOCIDAD, QUE SERÁ LA ÚNICA DE LAS ENERGÍAS MECÁNICAS QUE POSEERÁ, PUES LA CARACTERÍSTICA DE PARTÍCULA LIBRE (CARECER DE PESO) SIGUE PERSISTIENDO; POR LO TANTO EN BASE SIEMPRE DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE ENERGÍA, LA PARTÍCULA EN CUALQUIER POSICIÓN DEBE TENER LA MISMA ENERGÍA DE VELOCIDAD; LO QUE ES LO MISMO A DECIR QUE TIENE LA MISMA VELOCIDAD EN EL SUPUESTO DE

MANTENER CONSTANTE SU MASA Y SU ENERGÍA NO MECÁNICA. RESUMIENDO: HEMOS LLEGADO A LA CONCLUSIÓN DE QUE TAL PARTÍCULA QUE NOS PREOCUPA, ESTANDO EN REPOSO PERSISTIRÁ EN ÉL, SALVO QUE UNA FUERZA EXTRAÑA VENGA A SACARLA DE ESTE ESTADO; Y SI ESTÁ EN MOVIMIENTO, PERSISTIRÁ EN MOVIMIENTO UNIFORME SALVO TAMBIÉN QUE ALGUNA FUERZA EXTRAÑA VENGA A AFECTARLE. LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO SABE A LÓGICO QUE SERÁ EN LINEA RECTA, PUES UNA ALTERACIÓN A ESTA DIRECCIÓN SÓLO PODRÍA SER POSIBLE BAJO EL EFECTO DE UNA FUERZA EXTRAÑA NORMAL A LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO, HECHO QUE POR HIPÓTESIS NO EXISTE.

<u>SEGUNDO PRINCIPIO</u>: LEY DE LA PROPORCIONALIDAD ENTRE FUERZAS Y ACELERACIONES, SE ENUNCIA DICIENDO: "UNA FUERZA CONTÍNUA Y CONSTANTE AL ACTUAR SOBRE UNA PARTÍCULA MATERIAL EN REPOSO, LE IMPRIME UN MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORMEMENTE ACELERADO, EN LA MISMA DIRECCIÓN Y SENTIDO DE LA FUERZA". DE LO ANTERIOR CONCLUÍMOS QUE PARA PRODUCIR Y MANTENER UNA ACELERACIÓN ES NECESARIA LA PRESENCIA CONTINUA DE UNA ACCIÓN EXTERIOR. A ESTE AGENTE EXTERIOR SE LE LLAMA FUERZA; POR LO TANTO PODEMOS DECIR QUE FUERZA ES TODO AQUELLO QUE ES CAPÁZ DE PRODUCIR Y MANTENER UNA ACELERACIÓN.

PASEMOS AHORA A NUESTRO PROBLEMA, CUAL ES COMPROBAR ESTA LEY POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA. PARA ELLO CONSIDEREMOS UN CUERPO "A" (PARTÍCULA LIBRE) QUE SE ENCUENTRA EN REPOSO, AHORA CONSIDEREMOS QUE LE APLICAMOS UNA FUERZA

"F" Y SITUAMOS UN RESPECTIVO PLANO DE REFERENCIA A UNA DISTANCIA "E" DEL -- CUERPO EN LA POSICIÓN DE REPOSO; COMO ES DE SUPONERSE, EL CUERPO "A" SE DES- PLAZARÁ EN LA DIRECCIÓN DE ESTA FUERZA CON MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO, ACERCÁNDOSE AL PLANO DE REFERENCIA; -- POR LO QUE VIMOS EN EL CAPÍTULO ANTE- RIOR, ES FÁCIL NOTAR QUE CUANDO EL - - CUERPO LLEGUE A ESTAR EXACTAMENTE SO- BRE EL PLANO DE REFERENCIA, TODA LA E- NERGÍA POTENCIAL QUE TENÍA EL CUERPO - INICIALMENTE SE HA ANULADO; SIN EMBAR- GO EN ESTA ÚLTIMA POSICIÓN TIENE UNA - ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN DEBIDA A SU VELOCIDAD, ADQUIRIDA POR TRANSFOR MACIÓN DE SU ENERGÍA POTENCIAL INICIAL, ES DECIR QUE PODEMOS ESCRIBIR EN VIR- TUD DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE - LA ENERGÍA: LA ENERGÍA TOTAL EN LA PO SICIÓN UNO (ET1) ES IGUAL A LA ENERGÍA TOTAL EN LA POSICIÓN DOS (ET2). VEA- MOS AHORA LA GRÁFICA, ANÁLISIS Y CONSE CUENTE COMPROBACIÓN DE ESTE 2º. PRINCI PIO DE LA DINÁMICA.



$$\underline{\text{Energía Total}_{①} = \text{Energía Total}_{②}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Por movimiento uniformemente variado tenemos:

$$v^2 = 2ae$$

$$\therefore E_c = \frac{\cancel{2} m a \cancel{e}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{F = ma}$$ fórmula que generalizada es: $\underline{\Sigma F = (\Sigma m) a_c}$

($\Sigma$F) INDICA LA SUMA ALGEBRÁICA DE LAS FUERZAS EN UNA DIRECCIÓN.

($\Sigma$M) INDICA LA SUMA DE LAS MASAS DE -- CONJUNTO AFECTADAS POR LA ($\Sigma$F)

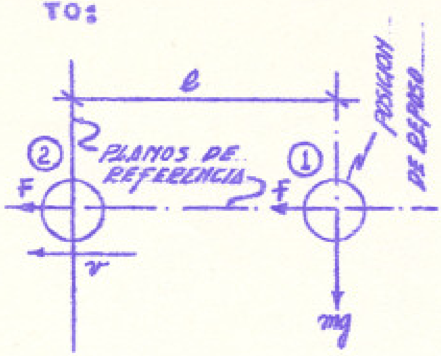
($A_C$) INDICA LA ACELERACIÓN COMÚN ADQUIRIDA EN LA DIRECCIÓN DE ($\Sigma$F) POR EL CONJUNTO DE MASAS.

<u>TERCER PRINCIPIO</u>: LEY DE LA ACCIÓN Y REACCIÓN: ESTA LEY SE ENUNCIA ASÍ: -- "SIEMPRE QUE UN CUERPO "A" EJERCE SOBRE OTRO "B" UNA FUERZA, QUE LLAMAREMOS ACCIÓN, EL CUERPO "B" EJERCE SOBRE "A" OTRA FUERZA DE IGUAL INTENSIDAD PERO DE SENTIDO CONTRARIO QUE LLAMAREMOS REACCIÓN". PARA COMPROBAR ESTE PRINCIPIO POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA: A) CONSIDEREMOS UN CUERPO EN REPOSO SOBRE UN PLANO HORIZONTAL; DESPRECIANDO EL ROZAMIENTO ENTRE EL CUERPO Y EL PLANO. B) APLIQUEMOS A ESTE CUERPO UNA FUERZA "F" Y SITUEMOS UN PLANO DE REFERENCIA PARA MEDIR LA ENERGÍA POTENCIAL DE ESTA FUERZA "F" CON RESPECTO AL PLANO INDICADO. C) CONSIDEREMOS POR CONVENIENCIA EL PLANO HORIZONTAL DE REFERENCIA AL NIVEL DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO PARA MEDIR LA ENERGÍA POTENCIAL POR SU PESO. D) POR EL SEGUNDO PRINCI

PIO, AL NOMÁS APLICAR A ESTE CUERPO LA
FUERZA "F", EL CUERPO SE EMPEZARÁ A MO
VER CON MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIA
DO (CON ACELERACIÓN CONSTANTE) EN VIS-
TA DE LO CUAL AL LLEGAR AL PLANO DE RE
FERENCIA, TODA SU ENERGÍA POTENCIAL SE
HABRÁ ANULADO, PERO TENDRÁ UNA ENERGÍA
DE VELOCIDAD; POR LO TANTO PODRÍAMOS -
ESCRIBIR EN BASE DEL PRINCIPIO DE LA -
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: LA ENER-
GÍA TOTAL EN LA POSICIÓN UNO, ES IGUAL
A LA ENERGÍA TOTAL EN LA POSICIÓN DOS;
DE DONDE LLEGAMOS A LA CONCLUSIÓN DE -
QUE LA VELOCIDAD QUE TIENE EL CUERPO -
EN LA POSICIÓN DOS ELEVADA AL CUADRADO,
ES IGUAL A DOS VECES LA FUERZA CONSTAN
TE APLICADA, MULTIPLICADA POR EL ESPA-
CIO RECORRIDO DE SU POSICIÓN DE REPOSO
(1) A SU POSICIÓN CONFUNDIDA CON EL --
PLANO DE REFERENCIA (2) Y TODO ESTE VA
LOR DIVIDIDO POR LA MASA DEL CUERPO.
AHORA TENIENDO EL CUERPO EN ESTA POSI-
CIÓN (2), APLIQUÉMOSLE UNA FUERZA CONS
TANTE QUE TIENDA A REGRESAR EL CUERPO
A SU POSICIÓN INICIAL DE EQUILIBRIO --
(1); A ESTA FUERZA LE LLAMAREMOS "R" -
POR CUMPLIR PROPIAMENTE CON LA FUNCIÓN
DE LA REACCIÓN DE SER SIMULTANEA EN SU
ACCIÓN CON LA FUERZA DE ACCIÓN Y TRA-
TAR DE HACER QUE EL CUERPO REGRESE I-
GUAL E INSTANTÁNEAMENTE LO QUE LA FUER
ZA DE ACCIÓN TIENDE A DESPLAZARLO. EN
ESTA POSICIÓN (2), APLIQUÉMOSLE NUEVA-
MENTE EL CONCEPTO DE CONSERVACIÓN DE -
ENERGÍA, DICIENDO: LA ENERGÍA TOTAL --
DEL CUERPO EN LA POSICIÓN (2) ES IGUAL
A LA ENERGÍA TOTAL EN LA POSICIÓN (1),
DE DONDE LLEGAMOS A ESTABLECER QUE EL
CUADRADO DE LA VELOCIDAD QUE EL CUERPO
TENÍA EN LA POSICIÓN (2), POR EFECTO -
DE LA FUERZA "F", ES IGUAL A MENOS DOS

VECES LA REACCIÓN POR EL ESPACIO COMPRENDIDO ENTRE LA POSICIÓN (2) Y (1); TODO ESTE VALOR DIVIDIDO POR LA MASA DEL CUERPO. DE DONDE LLEGAMOS A LA CONCLUSIÓN DE QUE (F=-R) LA ACCIÓN ES IGUAL Y OPUESTA A LA REACCIÓN O VICEVERSA.

A CONTINUACIÓN VEAMOS LA EXPRESIÓN ALGORÍTMICA DE LO ANTERIORMENTE EXPUESTO:



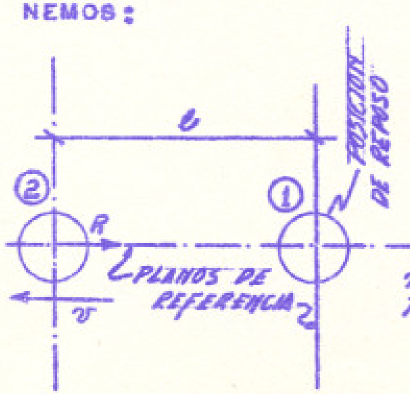

$$E.T_{1} = E.T_{2}$$

$$Fl = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\therefore \boxed{v^2 = \frac{2Fl}{m}}$$

Ecuación (1)

AHORA EL CUERPO EN ESTA POSICIÓN (2), SUPRIMÁMOSLE LA FUERZA (F) Y APLIQUÉMOSLE UNA FUERZA (R) (REACCIÓN) QUE TIENDA A REGRESAR EL CUERPO A SU POSICIÓN INICIAL DE REPOSO, CON LO QUE TENEMOS:




$$E.T_2 = E.T_1$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + Rl = 0$$

$$\therefore \boxed{v^2 = \frac{-2Rl}{m}}$$

Ecuacion (2)

Resolviendo las Ecuaciones simultaneas (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\cancel{2}Fl}{\cancel{m}} = \frac{-\cancel{2}Rl}{\cancel{m}}$$

$$\boxed{F = -R}$$

## IV) CONCEPTOS:

A) CINEMÁTICA; FÓRMULAS DE M.U. Y M.U.V.
B) MASA
C) UNIDADES DE FUERZA
D) TORQUE
E) INERCIA DE MASA (TABLA DE INERCIAS), TRASLADO DE INERCIAS.
F) UNIDADES DE TRABAJO (DIMENSIONALES)
G) DIMENSIONALES DE ENERGÍA

DESARROLLO:

A) CINEMÁTICA: FÓRMULAS DE M.U. Y M.U.V.:

LA CINEMÁTICA ES LA PARTE DE LA MECÁNICA QUE TRATA EXCLUSIVAMENTE LOS DISTINTOS ASPECTOS DEL MOVIMIENTO PERO SIN ATENDER A LAS CAUSAS QUE LOS PRODUCEN. EN CUANTO AL MOVIMIENTO CONVIENE CIMENTAR BIEN EL CONCEPTO DE REPOSO Y DE MOVIMIENTO; ANTE TODO NO HAY QUE OLVIDAR QUE TODO EN ESTA VIDA ES RELATIVO. SE DICE QUE UN CUERPO ESTÁ EN REPOSO RELATIVO, CUANDO LA DISTANCIA QUE LO SEPARA DE OTRO ES CONSTANTE. EJEMPLO: UNA CASA RESPECTO A OTRA VECINA, SE DICE QUE ESTÁN EN REPOSO RELATIVO; PUES HAY QUE TOMAR EN CUENTA QUE LA TIERRA SE ENCUENTRA EN MOVIMIENTO. AHORA BIEN, SE DICE QUE UN CUERPO ESTÁ EN MOVIMIENTO RELATIVO A OTRO, CUANDO SU POSICIÓN RESPECTO A ESTE SEGUNDO CAMBIA EN EL TRANSCURSO DEL TIEMPO; TAL ES EL CASO DE UN VEHÍCULO QUE SE MUEVE POR LA CALLE. LA RELATIVIDAD NACE DE LA COMPARACIÓN; SOLO ES POSIBLE ENTERARSE DE LA EXISTENCIA DEL MOVIMIENTO, SI SE TOMA COMO BASE DE REFERENCIA OTRO AL CUAL CONSIDERAMOS QUIETO. ES POSIBLE

CONSIDERAR A UN CUERPO EN REPOSO Y -
MOVIMIENTO RELATIVO A LA VEZ; EJEM-
PLO: EL ASIENTO DE UN VEHÍCULO EN -
MOVIMIENTO, PUEDE CONSIDERARSE EN RE
POSO RELATIVO CON RESPECTO A LA PLA-
TAFORMA DEL VEHÍCULO; PERO SI SE LE
COMPARA CON LA SUPERFICIE TERRESTRE,
SE ENCUENTRA EN MOVIMIENTO RELATIVO.
EN CINEMÁTICA, ES TAMBIÉN IMPORTANTE
TENER EL CONCEPTO DE LO QUE ES LA --
TRAYECTORIA DE UN CUERPO Y DE LAS --
CLASES DE MOVIMIENTO QUE HAY; ASI TE
NEMOS QUE TRAYECTORIA ES LLAMADA A -
LA LINEA QUE RESULTA DE UNIR TODAS -
LAS POSICIONES SUCESIVAS DE UNA PAR-
TÍCULA EN MOVIMIENTO. LAS FORMAS DE
LAS TRAYECTORIAS QUE PUEDEN SEGUIR -
LAS PARTÍCULAS, SON VARIADÍSIMAS; --
SIN EMBARGO, HAY TRAYECTORIAS SENCI-
LLAS, EXPRESABLES POR FUNCIONES MATE
MÁTICAS, Y BASTANTE FRECUENTES EN LA
NATURALEZA; ENTRE ESTA CLASE DE TRA-
YECTORIAS, TENEMOS: LA RECTILINEA Y
LA CIRCULAR. TAMBIÉN EXISTEN TRAYEC
TORIAS ELÍPTICAS; EJEMPLO: LA TRA-
YECTORIA QUE SIGUEN LOS PLANETAS AL-
REDEDOR DEL SOL, QUE COMO ES BIEN SA
BIDO SON ELIPSES EN QUE EL SOL OCUPA
UNO DE LOS FOCOS DE LAS ELIPSES. EN
CUANTO A MOVIMIENTO, LA PARTÍCULA TO
MA EL NOMBRE DEL MOVIMIENTO AL CUAL
CORRESPONDE LA TRAYECTORIA; ASI: UNA
PARTÍCULA QUE SE MUEVE EN UNA TRAYEC
TORIA RECTILINEA TOMA EL NOMBRE DE -
MOVIMIENTO RECTILINEO; SI LO HACE EN
UNA TRAYECTORIA CIRCULAR, TOMA EL --
NOMBRE DE MOVIMIENTO CIRCULAR, ETC.
AHORA SI CONSIDERAMOS UN CUERPO RÍGI
DO (O SEA EL FORMADO POR UN CONJUNTO
DE PARTÍCULAS, CUYAS DISTANCIAS SON

INVARIABLES Y NO PUEDE POR CONSIGUIENTE DEFORMARSE); VEREMOS QUE EN LO GENERAL LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTÍCULAS DIFIEREN NOTABLEMENTE; SIN EMBARGO, PUEDE SUCEDER QUE AL DESPLAZARSE ESTE CUERPO, LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTÍCULAS COMPONENTES SEAN PARALELAS; CONSTITUYENDO EL LLAMADO MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DEL CUERPO. SI LAS TRAYECTORIAS DE CADA PARTÍCULA QUE CONFORMAN EL CUERPO, SON CÍRCULOS CONCÉNTRICOS, EL MOVIMIENTO DE ESTE CUERPO SE DICE QUE ES DE ROTACIÓN, CON RESPECTO A ESTE PUNTO, LLAMADO EJE DE ROTACIÓN.

CONSIDERANDO LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO, CON RESPECTO A UN EJE QUE PASE FUERA DE SU CENTRO DE GRAVEDAD; PODEMOS CONSIDERAR ESTE MOVIMIENTO COMO EL FORMADO POR LOS MOVIMIENTOS DE TRASLACIÓN Y ROTACIÓN; ME EXPLICO; TRASLACIÓN POR EL HECHO DE QUE EL CENTRO DE GRAVEDAD DEL SISTEMA-CUERPO, SE TRASLADA EN UNA TRAYECTORIA CIRCULAR, Y ROTACIÓN POR EL HECHO, DE QUE SIENDO EL CUERPO RÍGIDO; AL GIRAR CON RESPECTO AL EJE DE REFERENCIA, SE OBLIGA A UN GIRO O CAMBIO RELATIVO DE POSICIÓN CON RESPECTO A SU PROPIO CENTRO DE GRAVEDAD. ASÍ POR EJEMPLO, SI QUEREMOS EVALUAR LA ENERGÍA DE UN CUERPO RÍGIDO, CUANDO ÉSTE GIRA CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA FUERA DE SU CENTRO DE GRAVEDAD, SE NOS PUEDEN OCURRIR 2 FORMAS O ASPECTOS DE SOLUCIONAR EL PROBLEMA; ASÍ:

<u>ASPECTO 1)</u>: PODRÍAMOS CONSIDERAR ESE

MOVIMIENTO COMO UNA SIMPLE ROTACIÓN DI CIENDO: "ENERGÍA DEL CUERPO RÍGIDO, AL GIRAR RESPECTO A UN EJE FUERA DE SU CENTRO DE GRAVEDAD ES IGUAL: 1/2 DE LA INERCIA REFERIDA AL EJE DE GIRO, MULTI PLICADA POR LA VELOCIDAD ANGULAR DE RO TACIÓN ELEVADA AL CUADRADO". TÉNGASE PRESENTE QUE SI SE CONOCE SOLAMENTE LA INERCIA DEL CUERPO RESPECTO A SU CEN- TRO DE GRAVEDAD; HABRÁ QUE HACER EL TRASLADO CORRESPONDIENTE, BASADOS EN EL TEOREMA DE TRASLADO DE INERCIAS PA- RA EJES PARALELOS.

ASPECTO 2): PODRÍAMOS CONSIDERAR ESE MOVIMIENTO COMO UNA TRASLACIÓN DEL CUERPO EN UNA TRAYECTORIA CIRCULAR, (ESTO EQUIVALE A CONSIDERAR LA MASA DEL CUERPO CONCENTRADA EN UN PUNTO, QUE ES SU CENTRO DE GRAVEDAD) SIENDO POR LO TANTO EL VALOR DE ESTA ENERGÍA POR TRASLACIÓN, IGUAL A: 1/2 DE LA MA- SA DEL CUERPO RÍGIDO, POR EL CUADRADO DE LA VELOCIDAD TANGENCIAL CON QUE SE MUEVE SU CENTRO DE GRAVEDAD EN LA TRA- YECTORIA CIRCULAR; ESTE VALOR ENCON- TRADO, ÚNICAMENTE EXPRESA LA ENERGÍA POR TRASLACIÓN; PERO NO OLVIDEMOS QUE EL CUERPO ES RÍGIDO RESPECTO AL BRAZO DE GIRO (DISTANCIA DEL C. DE G. AL EJE DE GIRO) QUE PUEDE SER EL MISMO CUERPO, O UN ELEMENTO SÓLIDAMENTE SUJETO A EL DE INERCIA PARTICULAR DESPRECIABLE; POR LO TANTO Y COMO YA LO DIJE ALLÍ ATRÁS, EL CUERPO POR ESTA CONDICIÓN (SER RÍGI DO) SE VE OBLIGADO A GIRAR, ES DECIR A CAMBIAR SU POSICIÓN RELATIVA, A LA VEZ QUE TRASLADA SU CENTRO DE GRAVEDAD EN LA TRAYECTORIA CIRCULAR; ÉSTO ES QUE EL CUERPO A LA VEZ SE VE OBLIGADO A GI

RAR CON RESPECTO A SU CENTRO DE GRAVEDAD; POR LO QUE HAY QUE AGREGAR A LA ENERGÍA POR TRASLACIÓN, EL VALOR DE LA ENERGÍA POR ROTACIÓN RESPECTO A SU CENTRO DE GRAVEDAD, O SEA AGREGAR: "1/2 DE LA INERCIA DEL CUERPO RÍGIDO RESPECTO A SU CENTRO DE GRAVEDAD, MULTIPLICADA POR LA VELOCIDAD ANGULAR DE ROTACIÓN ELEVADA AL CUADRADO"

RESUMIENDO:

LA ENERGÍA DE UN CUERPO RÍGIDO, AL GIRAR CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA FUERA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO ES:

ASPECTO 1): IGUAL A 1/2 DE LA INERCIA REFERIDA AL EJE DE GIRO MULTIPLICADA POR LA VELOCIDAD ANGULAR ELEVADA AL CUADRADO.

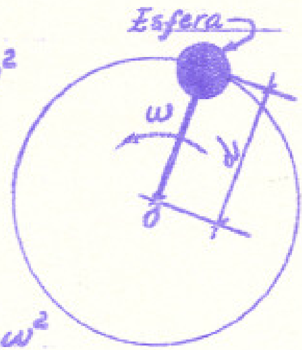
ASPECTO 2): IGUAL A 1/2 DE LA MASA DEL CUERPO, MULTIPLICADA POR LA VELOCIDAD TANGENCIAL DEL CENTRO DE GRAVEDAD ELEVADA AL CUADRADO, MÁS 1/2 DE LA INERCIA DEL CUERPO REFERIDA A SU CENTRO DE GRAVEDAD, MULTIPLICADA POR LA VELOCIDAD ANGULAR ELEVADA AL CUADRADO.

A CONTINUACIÓN Y PARA ACLARAR COMPLETAMENTE ESTOS ASPECTOS, HALLEMOS EL VALOR DE LA ENERGÍA DE ROTACIÓN DE UNA ESFERA CUYO CENTRO DE GRAVEDAD DISTA DEL EJE DE GIRO, UNA DISTANCIA (D). EL BRAZO QUE LE TRANSMITE MOVIMIENTO A LA ESFERA, SE CONSIDERA RÍGIDO Y PERFECTAMENTE EMPOTRADO A LA MISMA. ESTE

ELEMENTO QUE SIRVE DE BRAZO DE GIRO, LO CONSIDERAMOS DE MASA E INERCIA DESPRECIABLES. LA VELOCIDAD ANGULAR DE ESTE BRAZO ES ($\omega$). LA INERCIA DE LA ESFERA RESPECTO A SU CENTRO DE GRAVEDAD ES: 2/5 MASA X RADIO ESFERA AL CUADRADO.

<u>ASPECTO 1:</u>

$$I_{cg} = \frac{2}{5} Mr^2$$
$$I_O = \frac{2}{5} Mr^2 + Md^2$$
$$E.\,Rotación = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2$$
$$'' \quad '' = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} Mr^2 + Md^2\right)\omega^2$$
$$'' \quad '' = \left(\frac{Mr^2}{5} + \frac{Md^2}{2}\right)\omega^2$$




<u>ASPECTO 2:</u>

$$E.\,Rotación = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{cg}\,\omega^2$$
$$'' \quad = \frac{1}{2} M\omega^2 d^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} Mr^2 \omega^2$$
$$'' \quad = \left(\frac{Mr^2}{5} + \frac{Md^2}{2}\right)\omega^2$$

<u>MOVIMIENTO UNIFORME Y UNIFORMEMENTE VARIADO:</u> DECIMOS QUE UN MOVIMIENTO ES UNIFORME, CUANDO EL ESPACIO (NO IMPORTA LA TRAYECTORIA) RECORRIDO EN TIEMPOS IGUALES ES EL MISMO. DECIMOS QUE UN MOVIMIENTO ES UNIFORMEMENTE VARIADO, CUANDO EL MOVIMIENTO VARÍA CON UNIFORMIDAD A LO LARGO DEL TIEMPO; ÉSTO ES QUE EL CUERPO VARÍA SU VELOCIDAD UNA MISMA CANTIDAD EN LA UNIDAD DE TIEMPO. A ESTA VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN LA UNIDAD DE

TIEMPO, ES A LO QUE SE LE LLAMA ACELE-RACIÓN. LA ACELERACIÓN PUEDE SER POSITIVA O NEGATIVA SEGÚN QUE LA VELOCIDAD AUMENTE O DISMINUYA RESPECTIVAMENTE.
YA VIMOS QUE UNA FUERZA CONSTANTE ACTUANDO SOBRE UN CUERPO LE IMPRIME A ESTE UNA ACELERACIÓN CONSTANTE; ÉSTO QUIERE DECIR QUE LA CLASE DE MOVIMIENTO QUE ESTE CUERPO ADQUIERE ES UNIFORMEMENTE VARIADO. LA FUERZA DE ATRACCIÓN DE LOS CUERPOS POR LA TIERRA (PESO), PODEMOS EN UN MISMO LUGAR CONSIDERARLA CONSTANTE, EN VISTA DE ÉSTO LOS CUERPOS CAERÁN SIGUIENDO UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO; ESTA VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD EN LA UNIDAD DE TIEMPO, ES EL VALOR DE GRAVEDAD DEL LUGAR DONDE SE HACE LA EXPERIENCIA Y SU EFECTO ES TENDER A PRODUCIR DICHO INCREMENTO HACIA ABAJO O SEA EN LA DIRECCIÓN DEL PESO. POR EJEMPLO: "SI UN CUERPO SE LANZA HACIA ABAJO CON UNA VELOCIDAD DADA, SUPONGAMOS 80 M/SEG. Y SI LA GRAVEDAD ES DE 9.78 M/SEG$^2$ (GRAVEDAD EN GUATEMALA), ÉSTO SIGNIFICA QUE DICHO CUERPO POR CADA SEGUNDO QUE TRANSCURRA EN SU CAÍDA INCREMENTARÁ A LA VELOCIDAD INICIAL 9.78M/SEG$^2$ DE VELOCIDAD O SEA QUE AL FINAL DE 5 SEGUNDOS (POR EJEMPLO) DE HABÉRSE LANZADO EL CUERPO HACIA ABAJO, EL INCREMENTO DE VELOCIDAD ADQUIRIDO SERÁ 9.78 M/SEG$^2$ X 5 SEG. = 48.90 M/SEG. O SEA QUE EL CUERPO EN ESTE INSTANTE TENDRÁ UNA VELOCIDAD DE 80 + 48.90 = 128.90 M/SEG.; SI EL CUERPO SE HUBIERA LANZADO HACIA ARRIBA CON LA MISMA VELOCIDAD DE 80 M/SEG., EL INCREMENTO DE VELOCIDAD HABRÍA SIDO EL MISMO, PERO DE SENTIDO CONTRARIO A COMO SE LANZÓ; PUES COMO

YA DIJIMOS, EL INCREMENTO DE LA GRAVEDAD ES HACIA ABAJO O SEA CONTRARIO A LA VELOCIDAD DE LANZAMIENTO PARA ESTE CASO; POR LO TANTO LA VELOCIDAD DEL CUERPO A LOS MISMOS 5 SEGUNDOS DE HABERSE LANZADO, SERÁ $80 - 48.90 = 31.10$ M/SEG.

EN CUALQUIER MANUAL DE FÍSICA O MECÁNICA, PUEDE ENCONTRARSE LA DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL MOVIMIENTO UNIFORME Y UNIFORMEMENTE VARIADO; OCUPANDOME AQUÍ ÚNICAMENTE DE HACER UN RESUMEN DE ELLAS:

FORMULAS DE MOVIMIENTO UNIFORME:

LINEAL: $\begin{cases} E = V \cdot T \\ V = E/T \\ T = E/V \end{cases}$ ANGULAR: $\begin{cases} \theta = \omega \cdot T \\ \omega = \theta/T \\ T = \theta/\omega \end{cases}$

FORMULAS DE MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO:

LINEAL:

$$\pm A = \frac{VF - VI}{T}$$

$$VF = VI \pm A \cdot T$$

$$VM = \frac{VF + VI}{2}$$

$$E = VI \cdot T \pm 1/2\, A \cdot T^2$$

$$VF^2 = VI^2 \pm 2A \cdot E$$

$$E = VM \cdot T$$

## FORMULAS DE MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE - VARIADO:

ANGULAR:

$$+ \theta = \frac{WF - WI}{T}$$

$$WF = WI + \alpha . T$$

$$WM = \frac{WF + WI}{2}$$

$$\theta = WI . T + 1/2 \alpha . T^2$$

$$WF^2 = WI^2 + 2\alpha . \theta$$

$$\theta = WM . T$$

$$VT = W . R \ ; \ E = \theta . R$$

### NOMENCLATURA:

A = ACELERACIÓN
$\alpha$ = ACELERACIÓN ANGULAR
VF = VELOCIDAD LINEAL FINAL
VI = VELOCIDAD LINEAL INICIAL
E = ESPACIO LINEAL RECORRIDO
$\theta$ = ESPACIO ANGULAR RECORRIDO
VM = VELOCIDAD LINEAL MEDIA
WM = VELOCIDAD ANGULAR MEDIA
T = TIEMPO.
W = VELOCIDAD ANGULAR
R = RADIO DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

## B) MASA:

LA RELACIÓN DEL HOMBRE CON LA NATURALEZA SE LLEVA A CABO MEDIANTE LOS SENTIDOS; SON ÉSTOS LOS QUE TRANSMITEN AL CEREBRO LAS IMPRESIONES RECIBIDAS DEL MEDIO EXTERIOR, TRAYENDO ESTO POR CONSECUENCIA LA RAZÓN DE DIFERENCIA QUE EXISTE ENTRE SU PROPIO SER Y EL MEDIO

QUE LE RODEA, DENOMINADO UNIVERSO. EL UNIVERSO ESTÁ FORMADO POR CUERPOS QUE IMPRESIONAN NUESTROS SENTIDOS DE DISTINTAS MANERAS QUE LLAMAMOS PROPIEDADES; DICHAS PROPIEDADES DE LOS CUERPOS NO SON EN SÍ ESENCIALES, SINO QUE DEPENDEN DE NUESTRAS FACULTADES SENSITIVAS Y DE LAS CONDICIONES EN QUE LOS CUERPOS SE ENCUENTRAN; POR ESTA RAZÓN, CIERTAS PROPIEDADES QUE LES ATRIBUIMOS SOLO TIENEN EXISTENCIA PARA NOSOTROS, DADA LA CONSTITUCIÓN DE NUESTRO ORGANISMO; OTROS ORGANISMOS ESENCIALMENTE DIFERENTES Y DE OTRA CLASE DE SENTIDOS ENCONTRARÍAN EN LOS CUERPOS PROPIEDADES TAMBIÉN COMPLETAMENTE DISTINTAS Y HASTA PODRÍAN LLEGAR A OBTENER PROPIEDADES CONTRADICTORIAS.

EXAMINANDO LOS CUERPOS SIN PRETENDER AHONDAR EN SU CONSTITUCIÓN, VEMOS QUE TODOS ESTÁN SUJETOS A LA LEY DE LA GRAVEDAD, Y QUE TODOS PRESENTAN CIERTOS CARACTERES COMUNES FUNDAMENTALES. EL SUBSTRÁTUM FUNDAMENTAL, QUE VIENE A CONSTITUIR LA ÍNTIMA NATURALEZA DE LOS CUERPOS ES LO QUE SE HA LLEGADO A DESIGNAR CON EL NOMBRE DE MATERIA. LA MATERIA ES POR SÍ MISMA INCAPÁZ DE VARIAR SU ESTADO DE REPOSO O MOVIMIENTO, MIENTRAS UNA CAUSA EXTERIOR NO LA OBLIGUE A ESO; ESTA INCAPACIDAD ES LLAMADA <u>INERCIA</u>. TODO CUERPO POSEE CIERTA CANTIDAD DE MATERIA QUE ES LO QUE CONSTITUYE SU <u>MASA</u>, LA CUAL PUEDE MEDIRSE POR LA ACELERACIÓN QUE ÉSTA ADQUIERE AL APLICÁRSELE UNA FUERZA. YA VIMOS QUE <u>LA FUERZA ES IGUAL A LA MASA DEL CUERPO SOBRE LA CUAL ACTÚA, MULTIPLICADA POR LA ACELERACIÓN ADQUIRIDA</u>, POR LO

TANTO PODEMOS DETERMINAR EL VALOR DE LA MASA DE UN CUERPO POR LA MEDIDA DE SU PESO (PUES EL PESO SE DEBE A LA FUERZA DE ATRACCIÓN DE LAS MASAS: CUERPO-TIERRA) Y LA ACELERACIÓN QUE ES LA GRAVEDAD.

LA FUERZA DE ACCIÓN DE LA TIERRA-CUERPO, CONSTITUYE EL PESO ABSOLUTO, QUE SE MIDE POR MEDIO DE DINAMOMETROS; POR LO TANTO SI REPRESENTAMOS EL PESO ABSOLUTO POR "P", LA MASA POR "M" Y LA GRAVEDAD (ACELERACIÓN) POR "G", TENDREMOS: $\boxed{P = M.G}$ (1) LA MASA ES PUES PROPORCIONAL AL PESO ABSOLUTO; PERO EL VALOR DE ÉSTE VARÍA CON EL LUGAR QUE SE CONSIDERE; SIENDO MAYOR EN LOS POLOS Y MENOR EN EL ECUADOR; ES DECIR QUE VARÍA CON LA LATITUD Y ALTITUD. EL PESO ABSOLUTO CARECE DE APLICACIÓN PRÁCTICA, DEBIENDO ESTABLECERSE PESOS RELATIVOS; ES DECIR, VALORES QUE RESULTAN DE COMPARAR EL PESO ABSOLUTO UNIVERSALMENTE ACEPTADO DE UNA MASA DADA (PATRÓN) CON EL PESO ABSOLUTO DE OTRO CUERPO X; EN IGUALDAD DE CIRCUNSTANCIAS DE GRAVEDAD. EL PESO RELATIVO SE MIDE CON BALANZAS.

SI DE LA FÓRMULA (1) QUE APARECE ANTES, DESPEJAMOS EL VALOR DE LA MASA, TENDREMOS: $M = P/G$ O SEA: "LA MASA ES IGUAL AL PESO ABSOLUTO DIVIDIDO ENTRE LA GRAVEDAD"; COMO LA RELACIÓN ENTRE EL PESO ABSOLUTO Y LA GRAVEDAD ES CONSTANTE E INDEPENDIENTE DEL LUGAR, YA QUE AMBOS AUMENTAN O DISMINUYEN PROPORCIONALMENTE, EL VALOR DE "M" RESULTA TAMBIÉN CONSTANTE; POR LO TANTO LA MASA, SE COMPORTA COMO EL PESO RELATIVO.

La unidad patrón de Masa es la de un centímetro cúbico de agua destilada a la temperatura de 4 grados centígrados y presión de 760 milímetros de columna de Mercurio. El peso de esta unidad de Masa se llama gramo y constituye la unidad de peso.

Si en la fórmula: $F = M.A$ expresamos la (M) por el peso relativo, este valor es denominado según los distintos sistemas de medida empleados, así: Gramo masa, en el sistema C.G.S.; Kilo masa, en el sistema M.K.S.; Libra masa, en el sistema Lb.Pié. Segundo.

Sigamos con nuestro asunto: sabemos que la Masa es igual a la Fuerza sobre la aceleración o sea: $M = F/A$, relación que nos permite definir la Masa de un cuerpo, por la fuerza aplicada y la aceleración adquirida. En esta forma pueden definirse dos Unidades Gravitacionales de Masa muy empleadas en Ingeniería: El Slug Métrico (Eslog) o Unidad Técnica de Masa en el sistema M.K.S. y el Slug, en el sistema Inglés.

El Slug Métrico, es la masa de un cuerpo que al aplicársele una fuerza igual a un Kilogramo fuerza (Kgf), experimenta una aceleración de un metro sobre segundo al cuadrado o sea:

$$1 \text{ Slug Métrico} = \frac{1 \text{ Kgf}}{1 \text{ m/seg}^2}$$

El Slug Inglés, propiamente, es la masa de un cuerpo que al aplicársele una fuerza de una libra fuerza (Lbf), -

ADQUIERE UNA ACELERACIÓN DE UN PIÉ SOBRE SEGUNDO AL CUADRADO O SEA:

$$1 \text{ SLUG} = \frac{1 \text{ LBF.}}{1 \text{ PIÉ/SEG}^2}$$

c) UNIDADES DE FUERZA:

DOS CLASES DE UNIDADES DE FUERZA SE HAN ESTABLECIDO, ASÍ:

1) UNIDADES ABSOLUTAS: LLAMDAS ASÍ, PORQUE ESTÁN DEFINIDAS EN FUNCIÓN DE LAS TRES UNIDADES FUNDAMENTALES: (LONGITUD, MASA, TIEMPO).

2) UNIDADES GRAVITACIONALES: LLAMADAS ASÍ POR ESTAR DEFINIDAS EN FUNCIÓN DE LA GRAVEDAD.

1) UNIDADES ABSOLUTAS: SE DEFINEN PARTIENDO DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA (F = M.A). EN SÍ, PODEMOS DECIR QUE LA UNIDAD DE FUERZA ES AQUELLA QUE ACTUANDO SOBRE LA UNIDAD DE MASA (GRAMO MASA, KILO MASA, LIBRA MASA), LE IMPRIME LA UNIDAD DE ACELERACIÓN (1 CM/SEG$^2$, 1 M/SEG$^2$, 1 PIÉ/SEG$^2$).

EN EL SISTEMA C.G.S., LA UNIDAD DE FUERZA ES LA DINA, QUE ES LA FUERZA QUE ACTUANDO SOBRE UN GRAMO MASA, LE IMPRIME UNA ACELERACIÓN DE UN --

CM/SEG$^2$ O SEA: DINA $= \dfrac{GR. \times CM.}{SEG^2}$

EN EL SISTEMA M.K.S., LA UNIDAD DE FUERZA ES EL NEWTON, QUE ES LA FUERZA QUE ACTUANDO SOBRE UN KILOGRAMO MASA, LE IMPRIME UNA ACELERACIÓN DE 1 M/SEG$^2$, O SEA: NEWTON $= \dfrac{KG. \times M.}{SEG^2}$

EN EL SISTEMA INGLÉS, LA UNIDAD DE FUERZA ES EL POUNDAL, QUE ES LA FUERZA QUE ACTUANDO SOBRE UNA LIBRA MASA, LE IMPRIME UNA ACELERACIÓN DE 1 PIÉ/SEG$^2$ O SEA: POUNDAL $= \dfrac{LB. \times PIÉ}{SEG^2}$

2) UNIDADES GRAVITACIONALES: LA IGUALDAD $P/P' = M/M'$; QUE RESULTA DE DIVIDIR $P = M.G$ ENTRE $P' = M'.G$, O SEA RELACIONAR LOS PESOS ABSOLUTOS DE DOS CUERPOS, ES LA ECUACIÓN QUE NOS PERMITE DEFINIR LAS UNIDADES GRAVITACIONALES DE FUERZA (GRAMO FUERZA, KILO FUERZA, LIBRA FUERZA).

EN EL SISTEMA C.G.S., LA UNIDAD GRAVITACIONAL DE FUERZA ES EL GRAMO FUERZA (GRF.) Y SE DEFINE COMO LA FUERZA CON QUE LA TIERRA ATRAE A UN GRAMO MASA (GRM.) O SEA QUE ES EL PESO DE UN GRAMO MASA. SI EN LA FÓRMULA: $P = M.G$; HACEMOS $M = 1$ GRAMO MASA Y $G =$ AL VALOR DE LA GRAVEDAD EN EL SISTEMA C.G.S., EN EL LUGAR DE EXPERIMENTACIÓN O ANÁLISIS, TENEMOS: 1 GRAMO FUERZA $=$ G.DINAS.

EN EL SISTEMA M.K.S., LA UNIDAD DE FUERZA GRAVITACIONAL, ES EL KILO FUERZA (KGF.) Y SE DEFINE COMO LA FUERZA CON QUE LA TIERRA ATRÁE A UN KILO MASA (KGM.) O SEA QUE ES EL PESO DE UN KILO MASA.

SI EN LA FÓRMULA: P = M.G.; HACEMOS M = 1 KILO MASA Y G = AL VALOR DE LA GRAVEDAD EN EL SISTEMA M.K.S., EN EL LUGAR DE EXPERIMENTACIÓN O ANÁLISIS, TENEMOS: 1 KILO -- FUERZA = G. NEWTONS.

EN EL SISTEMA INGLÉS (LB. PIÉ. SEG.) LA UNIDAD GRAVITACIONAL DE -- FUERZA ES LA LIBRA FUERZA (LBF.) Y SE DEFINE COMO LA FUERZA CON QUE LA TIERRA ATRÁE A UNA LIBRA MASA (LBM.) O SEA QUE ES EL PESO DE UNA LIBRA - MASA. SI EN LA FÓRMULA: P = M.G; - HACEMOS M = 1 LIBRA MASA, Y G = AL VALOR DE LA GRAVEDAD EN DICHO SISTEMA INGLÉS, EN EL LUGAR DE EXPERIMENTACIÓN O ANÁLISIS, TENEMOS: G. POUNDALS = 1 LIBRA FUERZA. OBSERVEMOS QUE POR DEFINICIÓN DE LAS UNIDADES GRAVITACIONALES HEMOS LLEGADO A LA CONCLUSIÓN QUE LA MASA DE UN CUERPO (EN GRAMOS MASA, KILOS MASA, LIBRAS MASA) TIENE UN PESO NUMERICAMENTE - IGUAL, EXPRESADO RESPECTIVAMENTE EN GRAMOS FUERZA, KILOS FUERZA, LIBRAS FUERZA. LO ANTERIOR DICHO CON UN -- EJEMPLO ES: UN CUERPO QUE PESE 50 - GRF., TIENE UNA MASA DE 50 GRM. O - BIEN UNO QUE TENGA UNA MASA DE 80 - KGM., TIENE UN PESO DE 80 KGF.

D) CONCEPTO DE TORQUE:

BAJO ESTE NOMBRE SE COMPRENDE EL PRODUCTO DE UNA FUERZA POR LA MÍNIMA DISTANCIA DE ESTE VECTOR AL EJE DE ROTACIÓN; ENTENDIÉNDOSE POR DISTANCIA MÍNIMA O BRAZO, LA MEDIDA DE LA PERPENDICULAR COMÚN TRAZADA DEL VECTOR AL EJE. CORRIENTEMENTE SE DESIGNA EL TORQUE POR LA LETRA "L", LA FUERZA POR LA LETRA "F", Y EL BRAZO POR LA LETRA "B"; POR LO TANTO TENEMOS QUE: $L = F.B.$ PARA DIFERENCIAR DIMENSIONALMENTE EL TORQUE, DEL TRABAJO; YA QUE AMBOS VALORES SE OBTIENEN DE MULTIPLICAR UNA FUERZA, POR UNA DISTANCIA O MAGNITUD LINEAL; SE ACOSTUMBRA INTERCALAR UN GUIÓN ENTRE LA DIMENSIONAL DE FUERZA Y LA DIMENSIONAL DE BRAZO, ASÍ: L = 80 KGF - M.

EL TORQUE SE ACOSTUMBRA TOMAR COMO POSITIVO EN UN CUERPO QUE SIMPLEMENTE GIRA CON RESPECTO A UN PUNTO FIJO, CUANDO LO HACE EN EL SENTIDO DEL MOVIMIENTO DE LAS MANECILLAS DE UN RELOJ; Y NEGATIVO CUANDO LO HACE EN SENTIDO CONTRARIO. AHORA SI EL CUERPO AL GIRAR LO HACE TRASLADÁNDOSE A LA VEZ, SIN RESBALAR, EL CONVENIO USUAL Y LÓGICO ES CONSIDERAR EL TORQUE POSITIVO CUANDO ESTE TORQUE, TIENDA A PRODUCIR DESPLAZAMIENTO EN EL SENTIDO DEL MOVIMIENTO REAL O SUPUESTO; Y SE CONSIDERA EL TORQUE NEGATIVO CUANDO POR EFECTO DE LA ROTACIÓN (MOTIVADA POR EL TORQUE) TIENDA A PRODUCIRSE UN DESPLAZAMIENTO DEL CUERPO EN SENTIDO CONTRARIO AL ESTIMADO.

EL TORQUE, ES UNA MAGNITUD VECTO-

RIAL, SU MAGNITUD SE EXPRESA POR EL VALOR (F.B.), SU DIRECCIÓN POR UNA PERPENDICULAR AL PLANO FORMADO POR LA FUERZA Y EL BRAZO DE ROTACIÓN, Y SU SENTIDO POR EL DE PENETRACIÓN AL GIRAR DE UN TIRABUZÓN O TORNILLO DE ROSCA DERECHA. EL TORQUE Y LO QUE SE CONOCE CON EL NOMBRE DE MOMENTO, SE CALCULAN EN IGUAL FORMA Y AUNQUE ALGUNOS AUTORES TOMAN ESTOS NOMBRES INDISTINTAMENTE, SE ACOSTUMBRA DAR EL NOMBRE DE TORQUE CUANDO SE TRATA DE UNA ROTACIÓN, Y DE MOMENTO PARA UNA CONDICIÓN ESTÁTICA.

E) INERCIA DE MASA, TRASLADO DE INERCIAS. TABLA DE INERCIAS DE MASA:

SE DEFINE LA INERCIA COMO LA PROPIEDAD QUE TIENEN LOS CUERPOS DE PERMANECER EN EL ESTADO EN QUE SE ENCUENTRAN; YA GALILEO, EN 1610 ESTABLECIÓ ESTE PRINCIPIO DICIENDO: "TODO CUERPO EN MOVIMIENTO TIENDE A CONSERVAR SU VELOCIDAD Y LA DIRECCION EN QUE SE MUEVE". ES LA INERCIA LA QUE IMPIDE QUE UN VEHÍCULO PASE INMEDIATAMENTE DEL REPOSO A UNA VELOCIDAD ALTA, O BIEN PARE AL NOMÁS PONER FRENO. ES POR ESTA PROPIEDAD QUE LOS CUERPOS SON VERDADEROS ACUMULADORES DE ENERGÍA. LOS VOLANTES EN LAS MÁQUINAS TIENEN COMO UN PRINCIPAL OBJETIVO ACUMULAR ENERGÍA, LA CUAL CEDEN EN EL INSTANTE PRECISO, EVITANDO ALTERACIONES BRUSCAS EN LA VELOCIDAD POR EFECTO DE FUERZAS RESISTENTES QUE ACTÚAN EXABRUPTAMENTE, DADA LA FINALIDAD DEL TRABAJO. EN LOS RELOJES, LOS VOLANTES (CUERPOS DE RELATIVA GRAN INERCIA) SON LOS REGULADORES DE LA VELOCI-

DAD DEL RELOJ. EN SÍ, LA PROPIEDAD DE LA INERCIA DE LOS CUERPOS ES AMPLIAMENTE EXPLOTADA POR LA MECÁNICA DESDE HACE AÑOS, Y MUCHÍSIMAS EXPERIENCIAS DE ESTA PROPIEDAD SON AMPLIAMENTE CONOCIDAS Y EXPERIMENTADAS A DIARIO. LA INERCIA DE MASA, VALORADA POR LA FÍSICA, SE DEFINE COMO LA SUMA DE LOS PRODUCTOS DE LAS MASAS ELEMENTALES QUE CONFORMAN EL CUERPO, MULTIPLICADAS POR LOS CUADRADOS DE LAS DISTANCIAS A QUE SE ENCUENTRAN DICHAS PARTÍCULAS DEL EJE DE ROTACIÓN. SI LLAMAMOS: $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, ETC., A LAS MASAS ELEMENTALES QUE FORMAN UN CUERPO DADO, Y $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, ETC., A LAS DISTANCIAS RESPECTIVAS A QUE SE ENCUENTRAN DICHAS PARTÍCULAS DEL EJE DE ROTACIÓN CONSIDERADO, TENDREMOS: INERCIA $= M_1 \cdot R_1^2 + M_2 \cdot R_2^2 + M_3 \cdot R_3^2 + M_4 \cdot R_4^2 + \ldots\ldots =$ $\overbrace{\text{MASA TOTAL}}^{M}$ X $\overbrace{\text{RADIO DE GIRO AL CUADRADO}}^{K^2} = M \cdot K^2$. EL RADIO DE GIRO POR LO TANTO, SIGNIFICA LA DISTANCIA A LA QUE PRÁCTICAMENTE SE CONSIDERA CONCENTRADA LA MASA DE TODO EL CUERPO, CON RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN CONSIDERADO.

LA INERCIA DE LOS CUERPOS DE REVOLUCIÓN QUE SIGUEN UNA LEY MATEMÁTICA DE SU CONTORNO, Y MASA HOMOGENEA (O BIEN VARIABLE PERO CON UNA LEY MATEMÁTICA DE VARIACIÓN) SE CALCULA POR CÁLCULO INTEGRAL, EN DONDE SU VALOR EN FORMA GENERAL SE EXPRESA ASÍ: $I = \int DM \cdot R^2$ CORRIENTEMENTE SE EXPRESA LA INERCIA CON RESPECTO AL CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO, LAS CUALES SE PUEDEN REFERIR FÁCILMENTE A CUALQUIER OTRO EJE PARALELO, MEDIANTE LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL

EJE PARALELO PARA MASAS (TRASLADO DE INERCIAS); ESTE TEOREMA SE ENUNCIA ASÍ: "EL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE CUALQUIERA, ES IGUAL AL MOMENTO DE INERCIA DEL MISMO CON RESPECTO A UN EJE PARALELO QUE PASE POR SU CENTRO DE MASA, (CENTRO DE GRAVEDAD), MÁS EL PRODUCTO DE LA MASA DEL CUERPO POR EL CUADRADO DE LA DISTANCIA ENTRE LOS DOS EJES". ESTO EXPRESADO EN FÓRMULA, ES: $\underline{I = I_{CG.} + M.D^2}$
PUEDE HALLARSE UNA RELACIÓN TAMBIÉN ENTRE LOS RADIOS DE GIRO CON RESPECTO A LOS DOS EJES. ASÍ, SI LOS RADIOS DE GIRO CON RESPECTO A LOS DOS EJES SE DENOMINAN POR LAS LETRAS "K" Y "$K_{CG.}$", LA ECUACIÓN ANTERIOR SE PUEDE ESCRIBIR:

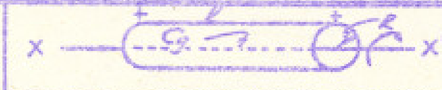
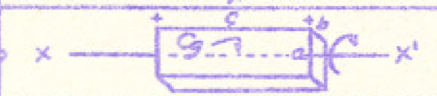
$$M.K^2 = M.K_{CG}^2 + M.D^2$$

POR CONSIGUIENTE: $K^2 = K_{CG}^2 + D^2$

RESPECTO A LA DIMENSIONAL DE LA INERCIA DE MASA, SI EXPRESAMOS LA MASA EN KILOS (KILO MASA) Y LA DISTANCIA EN METROS, TENEMOS QUE LA DIMENSIONAL ES: $K_{GM}-M^2$; ESTO ES EN EL SISTEMA M.K.S.

CONVIENE TENER PRESENTE TAMBIÉN, QUE LA INERCIA ES UNA MAGNITUD ESCALAR, POR LO QUE LA INERCIA DE UN CUERPO COMPUESTO DE MASAS DISTINTAS DE INERCIAS CONOCIDAS, ES IGUAL A LA SUMA ALGEBRÁICA DE LAS INERCIAS DE LOS CUERPOS COMPONENTES, REFERIDAS TODAS AL EJE DE ROTACIÓN CONSIDERADO.

CUANDO SE ENCUENTRA UN CUERPO DE FORMA IRREGULAR, EL MOMENTO DE INERCIA SE PUEDE DETERMINAR EXPERIMENTALMENTE POR MÉTODOS QUE UTILIZAN LAS LEYES DEL MOVIMIENTO PENDULAR.

| TABLA DE INERCIAS REFERIDAS A EJES QUE PASAN POR EL CENTRO DE MASA | | |
|---|---|---|
| CUERPO | FIGURA Y EJE PASANDO POR EL Cg. | MOMENTO DE INERCIA |
| CILINDRO |  | $\frac{MR^2}{2}$ |
| CILINDRO |  | $M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$ |
| BARRA DELGADA |  | $\frac{ML^2}{12}$ |
| PARALELEPIPEDO |  | $M\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)$ |
| LAMINA DELGADA |  | $M\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)$ |
| DISCO DELGADO |  | $\frac{MR^2}{2}$ |
| ANILLO |  | $MR^2$ |
| ESFERA |  | $\frac{2}{5}MR^2$ |
| CONO RECTO |  | $\frac{3}{10}MR^2$ |
| CONO RECTO |  | $\frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)$ |
| CILINDRO ELIPTICO |  | $\frac{1}{4}M(a^2+b^2)$ |
| CILINDRO ELIPTICO |  | $\frac{1}{12}M(l^2+3b^2)$ |
| CILINDRO ELIPTICO |  | $\frac{1}{12}M(l^2+3a^2)$ |

## F) Unidades de Trabajo (Dimensionales):

En el Sistema C.G.S., la unidad de trabajo es el Ergio, que es el trabajo efectuado por una Dina al mover su punto de aplicación un centímetro en su propia dirección. De donde la dimensional es: Ergio = Dina x centímetro, y como la Dina es = grm x cm/seg$^2$, tenemos: Ergio = grm. x cm$^2$/seg$^2$.-

En el Sistema M.K.S., la unidad de trabajo es el Joule, que es el trabajo efectuado por un Newton al mover su punto de aplicación un metro en su propia dirección. Como la dimensional de Newton es: Kgm x m/seg$^2$; tenemos que la dimensional de Joule, es: Kgm x m$^2$/seg$^2$. Como un Newton son 100,000 Dinas y un metro son 100 cms. se tiene que un Joule = $10^7$ Ergios. También tenemos de Unidad de Trabajo, el Kilowatt hora, que no es más que 1,000 Watts (Unidad de Potencia igual a 1 Joule/seg.) por 3,600 segundos de una hora, o sea que un Kilowatt hora = 36 x $10^5$ Joules.

En el Sistema Inglés, la Unidad de trabajo es la libra pié (foot pound) que es el trabajo efectuado por una libra fuerza al mover su punto de aplicación un pié en su propia dirección.

De donde la dimensional es:

Libra pié = libra fuerza x pié
= 32.16 poundals x pié
= 32.16 x 0.1382 Newtons x 0.305 m
= 1.356 Joules.

La Unidad gravitacional en el sistema M.K.S., es el <u>Kilográmetro</u> que es el trabajo efectuado por un Kgf. al mover su punto de aplicación un metro en su propia dirección. De donde la dimensional es: Kilográmetro = Kgf. x metro

= 9.81 Newtons x metro

= 9.81 Joules.

g) <u>Dimensionales de Energía:</u>

Es de hacerse notar que siendo la Energía una capacidad de los cuerpos para producir Trabajo, las Unidades de ésta serán las mismas que las de Trabajo; así por ejemplo en el Sistema M.K.S. tenemos:

| <u>Fórmulas.</u> | <u>Dimensionales.</u> |
|---|---|
| E. Rot.: $1/2 I.w^2$ | Kgm.$m^2$/seg$^2$ o Kg.m |
| E. Cinét.: $1/2$ M.$v^2$ | " " |
| E. Pot.: M.g.h. | " " |

Como puede verse por las dimensionales correspondientes a las Energías de Rotación, Cinética y Potencial, las unidades que corresponden son las mismas, pudiendo expresarse en Joules o Kilográmetros.

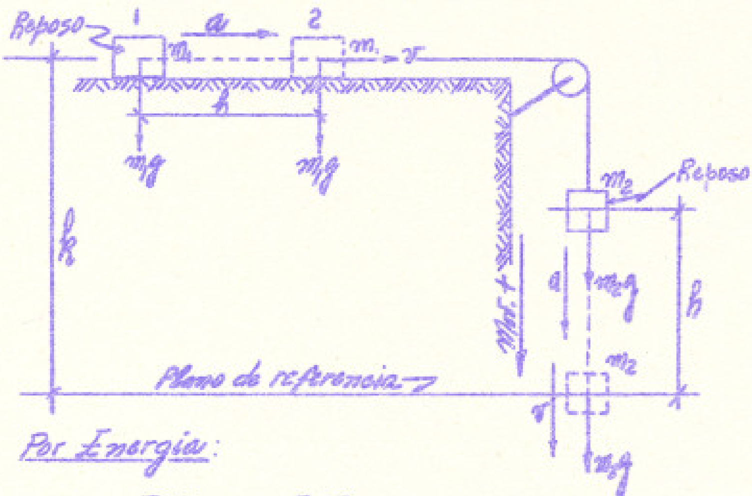
La Energía calorífica se expresa en Calorías grandes o pequeñas, (Caloría grande = 1000 Calorías pequeñas) cuyo equivalente mecánico es respectivamente 427 Kilográmetros y 0.427 Kilo

GRÁMETROS, Y SU EQUIVALENTE RESPECTIVO EN JOULES ES 4189 JOULES Y 4.189 JOULES; UNIDADES QUE FÁCILMENTE PUEDEN EXPRESARSE EN CUALQUIER OTRA UNIDAD DE TRABAJO DE CUALQUIER OTRO SISTEMA.-

## V) PROBLEMAS ILUSTRATIVOS DE DINÁMICA, RESUELTOS COMPARATIVAMENTE POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO VARIADO:

### PROBLEMA No. 1

EN EL SISTEMA DE CUERPOS QUE SE MUEVEN, COMO A CONTINUACIÓN LO INDICA EL DIAGRAMA; HALLAR LAS ACELERACIONES CON QUE SE MUEVEN LAS MASAS "$M_1$" Y "$M_2$", ASÍ COMO LAS TENSIONES EN LAS PITAS QUE SUJETAN A DICHAS MASAS. NO SE CONSIDERA ROZAMIENTO ENTRE EL PISO Y LA MASA "$M_1$". SE DESPRECIA LA MASA DE LA POLEA.




*Por Energía:*

$$\underline{E.T._{①} = E.T._{②}}$$

$$m_1gh + m_2gh = m_1gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$

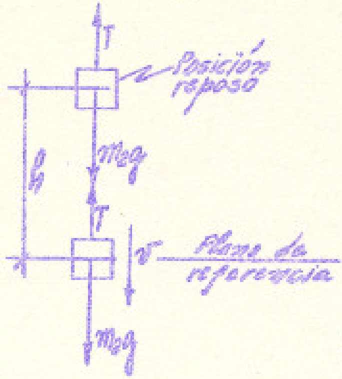
$$m_2gh = \left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)v^2$$

Pero: $v^2 = 2ah$ (Por mov. variado)

$$\therefore m_2g\cancel{h} = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right)2a\cancel{h}$$

$$\therefore \underline{a = \frac{m_2g}{m_1 + m_2}}$$

Para hallar la Tensión hacemos cuerpo libre de "$m_2$" en posición ① y ②:




$$\Sigma_T ① = \Sigma_T ②$$

$$m_2gh - Th = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

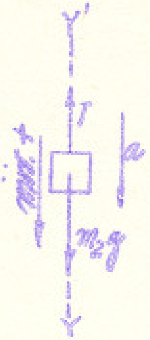
Pero: $v^2 = 2ah$

$$\therefore m_2gh - Th = \frac{1}{2} m_2 2ah$$

$$\therefore T = m_2g - m_2a$$

Por mov. variado:

Cuerpo libre de "$m_2$":

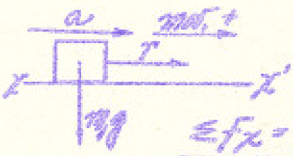



$$\Sigma F_y = (\Sigma m) a_y$$

$$\boxed{m_2g - T = m_2a}$$

Ecuación ①

Cuerpo libre de "$m_1$":




$$\Sigma F_x = (\Sigma m) a_x$$

$$\boxed{T = m_1a}$$

Ecuación ②

Resolviendo las Ecuaciones ① y ② tenemos:

$$① + ② \left\{ m_2g = m_2a + m_1a \right.$$

$$\therefore a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$$

El valor de "T" despejado de la Ecuación (1), nos dá:

$$T = m_2 g - m_2 a$$

Substituyendo el valor de "a" en ésta expresión tenemos:

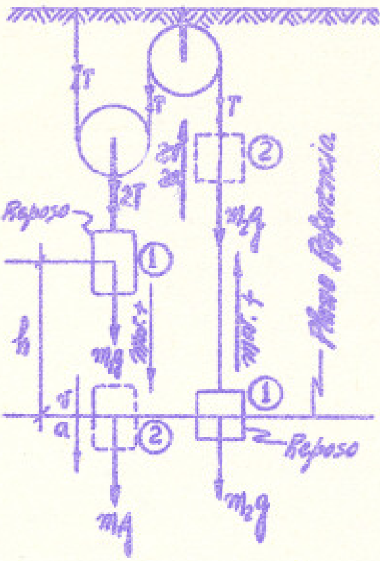
$$T = m_2 g - \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_2 m_1 g + m_2^2 g - m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_2^2 g}{m_1 + m_2}$$

## PROBLEMA No. 2

EN EL SISTEMA DE CUERPOS INDICADO A CONTINUACIÓN; HALLAR LAS ACELERACIONES CON QUE SE MUEVEN LAS MASAS "$M_1$" Y "$M_2$" ASÍ COMO LA TENSIÓN EN LAS PITAS DE LAS CUALES PENDEN. LAS MASAS DE LAS POLEAS CONSIDERARLAS SIN PESO.




*Por Energía*

$$E.K.(1) = E.K.(2)$$

$$m_1 g h = 2 m_2 g h + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 4 v^2$$

$$m_1 g h - 2 m_2 g h = v^2\left(\frac{m_1}{2} + 2 m_2\right)$$

Pero: $v^2 = 2ah$

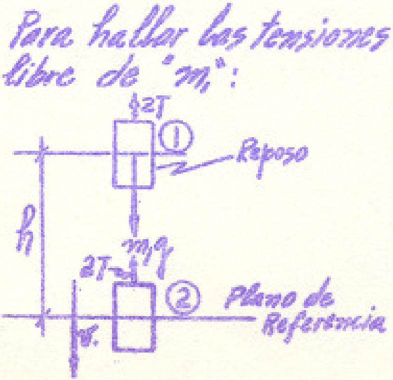
$$\therefore m_1 g h - 2 m_2 g h = 2ah\left(\frac{m_1}{2} + 2 m_2\right)$$

$$\therefore a = \frac{m_1 g - 2 m_2 g}{m_1 + 4 m_2}$$

$$a = \frac{(m_1 - 2 m_2) g}{m_1 + 4 m_2}$$

La aceleración hallada es la correspondiente a "$m_1$". La aceleracion correspondiente á "$m_2$" es el doble.

Para hallar las tensiones hay que hacer cuerpo libre de "$m_1$":




$$E.T.(1) = E.T.(2)$$

$$m_1 g h - 2Th = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$(m_1 g - 2T) h = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Pero $v^2 = 2ah$

$$\therefore (m_1 g - 2T)\cancel{h} = \frac{1}{2} m_1 2a\cancel{h}$$

$$m_1 g - 2T = m_1 a$$

$$T = \frac{m_1 g - m_1 a}{2}$$

$$T = \frac{m_1 g}{2} - \frac{m_1 g}{2}\left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\right)$$

$$\underline{T = \frac{m_1 g}{2}\left(1 - \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\right)} \longleftarrow$$

LAS TENSIONES EN LAS PITAS ESTÁN INDICADAS EN EL DIAGRAMA ASÍ: LA TENSIÓN EN LA PITA DE LA CUAL PENDE "$M_1$" TIENE UNA TENSIÓN = "2T" O SEA ($M_1 G - M_1 A$) Y LA TENSIÓN EN LA PITA DE LA CUAL PENDE "$M_2$" TIENE UNA TENSIÓN "T" CUYO VALOR ES $\left(\frac{M_1 G - M_1 A}{2}\right)$; LAS EXPRESIONES HALLADAS PARA ACELERACIONES Y TENSIONES ESTÁN BAJO LA BASE DE QUE LA MASA "$M_1$" CAE CON UNA ACELERACIÓN "A" Y LA MASA "$M_2$" POR LO TANTO SUBE CON UNA ACELERACIÓN "2A"; ES DECIR QUE SI AL SUBSTITUIR VALORES NUMÉRICOS EN LAS EXPRESIONES, OBTENEMOS VALORES NEGATIVOS DE ACELERACIÓN; ESTO SIGNIFICARÁ QUE LAS MASAS "$M_1$" Y "$M_2$" SE MUEVEN AL REVÉZ DE COMO SE SUPUSO O SEA QUE "$M_1$" SUBIRÁ Y "$M_2$" BAJARÁ.-

<u>Solución por Mov. variado</u>

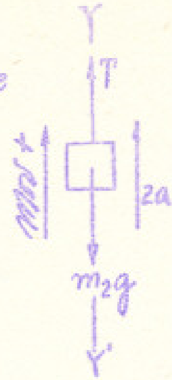
Cuerpo libre masa "$m_1$"


$$\underline{\Sigma F_Y = (\Sigma m) a_Y}$$

$$\boxed{m_1 g - 2T = m_1 a}$$

Ecuación (1)

Cuerpo libre
masa "$m_2$"




$$\sum F_y = (\sum m)a_y$$

$$\boxed{T - m_2g = 2m_2a}$$

Ecuación (2)

Resolviendo las Ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\begin{array}{ll} 2 \times \text{Ecuación (2)} & \{\; 2T - 2m_2g = 4m_2a \\ \text{Ecuación (1)} & \{\; -2T + m_1g = m_1a \end{array} \;+$$

$$m_1g - 2m_2g = (4m_2 + m_1)a$$

$$\therefore \quad \underline{a = \frac{m_1 - 2m_2g}{4m_2 + m_1}} \longleftarrow$$

Para hallar el valor de "T", substituimos el valor de "a" en cualquiera de las Ecuaciones simultáneas (1) ó (2)

Substituyendo "a" en la Ecuación (1) tenemos:

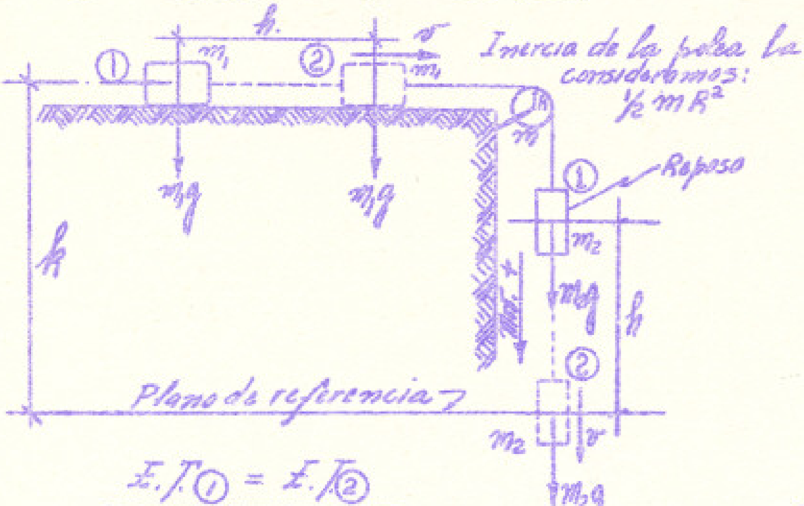
$$2T = m_1g - m_1a$$

$$T = \frac{m_1g}{2} - \frac{m_1g}{2}\left(\frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\right)$$

$$\underline{T = \frac{m_1g}{2}\left(1 - \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\right)} \longleftarrow$$

## PROBLEMA No. 3

CALCULAR LA ACELERACIÓN CON QUE SE MUEVE EL SISTEMA, SI LA POLEA DE RADIO "R" Y MASA "M", GIRA A CAUSA DE LA FRICCIÓN CON LA CUERDA. APLICACIÓN AL CASO EN QUE "M1" = 50 KG., "M2" = 200 KG., "M" = 15KG., Y "R" = 10 CMS.




$$E.T._{①} = E.T._{②}$$

$$\cancel{m_1 g h} + m_2 g h = \cancel{m_1 g h} + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$m_2 g h = v^2 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m_2}{2} \right)$$

Pero: $v^2 = 2ah$

$$\therefore \quad m_2 g \cancel{h} = 2a\cancel{h} \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m_2}{2} \right)$$

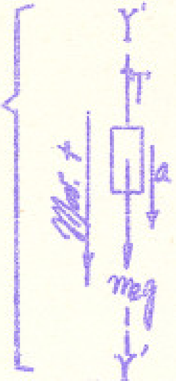
$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + \frac{m}{2} + \frac{m_2}{2}}$$

$$a = \frac{200 \times 9.8}{50 + 200 + 7.5} = 7.61 \, m/seg^2$$

$$\underline{a = 7.61 \, m/seg^2}$$

<u>Por Ecuaciones de Mov. variado:</u>

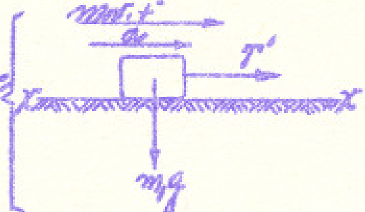
Cuerpo libre masa "$m_2$"




$$\frac{\Sigma F_y = (\Sigma m) a_y}{}$$

$$\boxed{m_2 g - T = m_2 a}$$ Ecuación ①

Cuerpo libre masa "$m_1$"

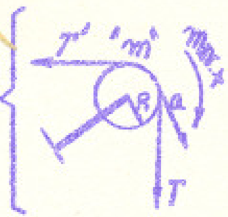



$$\frac{\Sigma F_x = (\Sigma m) a_x}{}$$

$$\boxed{T' = m_1 a}$$

Ecuación ②

Cuerpo libre masa "m"




$$\frac{\Sigma L = (\Sigma I) \alpha}{}$$

$$TR - T'R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R}$$

$$\boxed{T - T' = \frac{1}{2} m a}$$

Ecuación ③

<u>Resolviendo las 3 Ecuaciones Simultáneas tenemos:</u>

$$③ + ② \left\{ T = \left( m_1 + \frac{m}{2} \right) a \right.$$

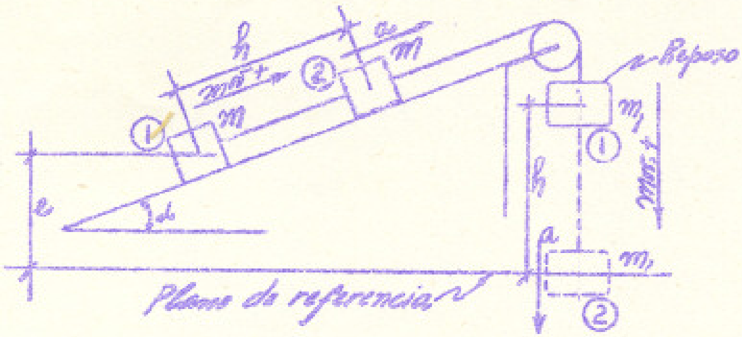
$$① \left\{ -T = m_2 a - m_2 g \right. \quad +$$

$$0 = m_1 a + \frac{m a}{2} + m_2 a - m_2 g$$

$$\therefore a = \frac{m_2 g}{m_1 + \frac{m}{2} + m_2}$$

## PROBLEMA No. 4

HALLAR LA ACELERACIÓN CON QUE SE MUEVE EL SISTEMA MOSTRADO EN LA FIGURA SIGUIENTE. EL HILO ES INEXTENSIBLE, NO HAY ROZAMIENTO EN EL PLANO EN QUE SE DESLIZA LA MASA "M". HALLAR TAMBIÉN EL VALOR DE LA TENSIÓN EN EL HILO.




$$E.T._{①} = E.T._{②}$$

$$mge + m_1gh = \frac{1}{2}(m+m_1)v^2 + mg(h\,\text{sen}\,\alpha + e)$$

$$\cancel{mge} + m_1gh = \frac{1}{2}(m+m_1)v^2 + mgh\,\text{sen}\,\alpha + \cancel{mge}$$

$$m_1gh - mgh\,\text{sen}\,\alpha = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$\boxed{gh(m_1 - m\,\text{sen}\,\alpha) = v^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{2}\right)}$$ Ecuación ①

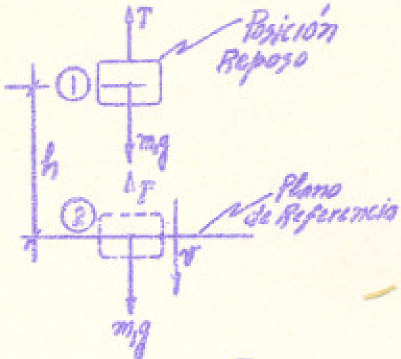
Pero sabemos por mov. uniformemente variado: $v^2 = 2ah$ valor que substituido en la Ecuación ① nos dá:

$$m_1g\cancel{h} - mg\cancel{h}\,\text{sen}\,\alpha = 2a\cancel{h}\left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$m_1g - mg\,\text{sen}\,\alpha = 2a\left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad a = \frac{(m_1 - m\,\text{sen}\,\alpha)g}{m+m_1}$$

Para hallar la Tensión, hagamos cuerpo libre de la masa "$m_1$":




$$\Sigma E_1 = \Sigma E_2$$

$$-Th + m_1gh = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

pero: $v^2 = 2ah$

$$\therefore -T\cancel{h} + m_1g\cancel{h} = \frac{1}{\cancel{2}} m_1 \cancel{2} a \cancel{h}$$

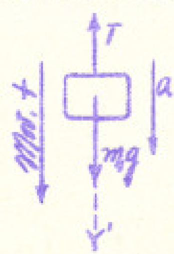
$$T = m_1g - m_1a$$

$$T = m_1g - m_1g\left(\frac{m_1 - m\sin\alpha}{m + m_1}\right)$$

$$T = m_1g\left[1 - \left(\frac{m_1 - m\sin\alpha}{m + m_1}\right)\right]$$

<u>Solución por Mov. variado</u>:

Cuerpo libre masa "$m_1$"

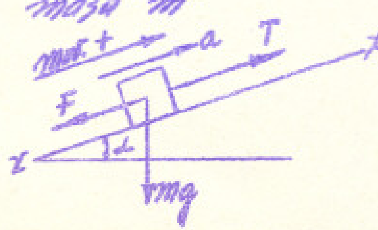



$$\Sigma F_y = (\Sigma m)a_y$$

$$\boxed{m_1g - T = m_1a}$$

Ecuación 1

Cuerpo libre masa "m"




$$\Sigma F_x = (\Sigma m)a_x$$

$$\boxed{T - mg\sin\alpha = ma}$$

Ecuación 2

Resolviendo 1 y 2 tenemos:

$$m_1 g - m g \operatorname{sen} \alpha = (m_1 + m) a$$

$$a = g\left(\frac{m_1 - m \operatorname{sen} \alpha}{m_1 + m}\right)$$

Substituyendo el valor de la aceleración en la Ecuación 1 tenemos:

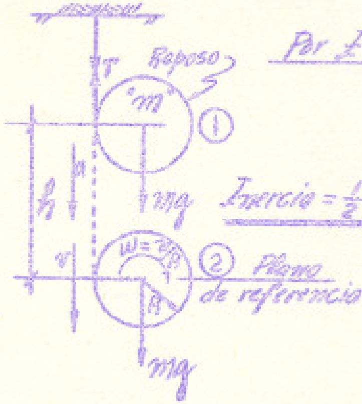
$$m_1 g - T = m_1 g\left(\frac{m_1 - m \operatorname{sen} \alpha}{m_1 + m}\right)$$

$$T = m_1 g - m_1 g\left(\frac{m_1 - m \operatorname{sen} \alpha}{m_1 + m}\right)$$

$$T = m_1 g\left[1 - \left(\frac{m_1 - m \operatorname{sen} \alpha}{m + m_1}\right)\right]$$

## PROBLEMA No. 5

ALREDEDOR DE UN CILINDRO HOMOGÉNEO DE RADIO "R", SE HA ENROLLADO UNA CUERDA FLEXIBLE. UN EXTREMO DE LA CUERDA SE HA UNIDO A UN PLANO FIJO, COMO SE INDICA EN LA FIGURA. CUANDO SE DEJA CAER EL CILINDRO, LA CUERDA SE TENSA. HALLAR: A) LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA, B) LA ACELERACIÓN ANGULAR DEL CILINDRO, C) LA DISTANCIA RECORRIDA POR EL CENTRO DE MASA EN "t" SEGUNDOS.




$$\boxed{\text{Inercia} = \frac{1}{2} m R^2}$$

*Por Energía:*

$$E.T.(1) = E.T.(2)$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2$$

$$\cancel{m} gh = \frac{3}{4} \cancel{m} v^2$$

$$\boxed{gh = \frac{3}{4} v^2} \quad \text{Ecuación } 1$$

Pero sabemos: $\boxed{v^2 = 2ah}$ Ecuación 2

$$\therefore \cancel{m} g \cancel{h} = \frac{3}{4} \cancel{m}\, 2a \cancel{h}$$

$$a = \frac{2}{3} g \longleftarrow$$

La aceleración angular "$\alpha$" $= \dfrac{a}{R}$

$$\therefore \alpha = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{g}{R}\right) = \frac{2g}{3R}$$

$$\alpha = \frac{2g}{3R} \longleftarrow$$

La distancia recorrida por el Centro de masa en "t" segundos es:

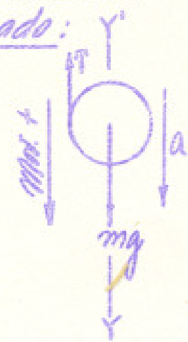
$$h = \frac{1}{2} a t^2 \text{ (mov. unif. variado)}$$

$$h = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} g t^2$$

$$\underline{h = \frac{1}{3} g t^2} \longleftarrow$$

<u>Por mov. variado:</u>

Cuerpo libre :




$$\underline{\Sigma F_y = (\Sigma m) a_y}$$

$$\boxed{mg - T = ma}$$

Ecuación ①

$$\underline{\Sigma L = \Sigma I \alpha}$$

$$T\cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} ma}$$

Ecuación ②

<u>Resolviendo las Ecuaciones ① y ②</u> :

① + ②

$$mg = ma + \frac{ma}{2}$$

$$\cancel{m}g = \frac{3}{2} \cancel{m}a$$

$$\therefore \underline{a = \frac{2}{3} g} \longleftarrow \quad \Big| \; \alpha = \frac{a}{R} = \frac{2g}{3R}$$

$$\underline{\alpha = \frac{2g}{3R}} \longleftarrow$$

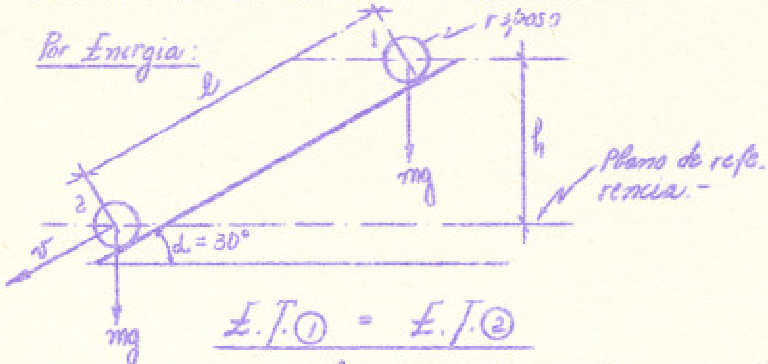
$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$h = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} g t^2 \quad \therefore \quad \underline{h = \frac{1}{3} g t^2} \longleftarrow$$

## PROBLEMA No. 6

HALLAR LA VELOCIDAD CON QUE LLEGARÁ UNA ESFERA, AL FINAL DE UN PLANO DE 30° DE PENDIENTE; SI SE DEJA CAER RODANDO SIN RESBALAR, DESDE UNA ALTURA "H". INERCIA DE LA ESFERA = 2/5 M.R².-

*Por Energía:*




$$E.T._{(1)} = E.T._{(2)}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

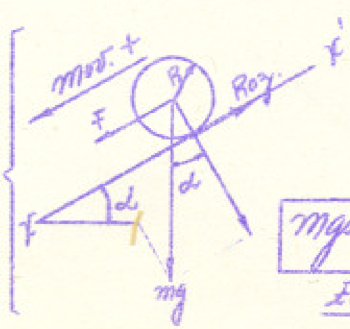
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2$$

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

*Por Mov. Variado:*

CUERPO LIBRE ESFERA




$$\Sigma F_x = (\Sigma m)a_x$$

$$F - Roz = ma$$

$$F = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\boxed{mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - Roz = ma}$$

Ecuación (1)

$$\Sigma L = (\Sigma I)\alpha$$

$$Roz\,\cancel{R} = \frac{2}{5} m R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}}$$

$$\therefore \boxed{Roz = \frac{2}{5} ma} \quad \text{Ecuación ②}$$

Resolviendo las Ecuaciones 1 y 2 Tenemos:

$$mg\,sen\,\alpha - \frac{2}{5} ma = ma$$

$$\cancel{m}g\,sen\,\alpha = \frac{7}{5}\cancel{m}a$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{5}{7} g\,sen\,\alpha}$$

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ae \quad (\text{Por mov. unif. variado})$$

$$v^2 = 0 + 2ae$$

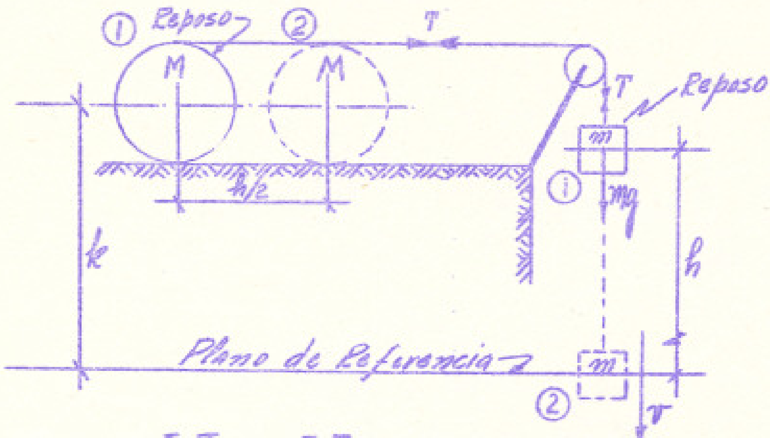
$$v^2 = 2 \times \frac{5}{7} ge\,sen\,\alpha$$

$$v^2 = \frac{10}{7} gh = \frac{10}{7} ge\,sen\,\alpha$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = \sqrt{\frac{10}{7} ge\,sen\,\alpha}}}$$

PROBLEMA No. 7

EN LA FIGURA SIGUIENTE, SE MUESTRA UN DISCO DE MASA "M", EN ÉL SE ENCUENTRA ENROLLADO UN HILO CONSIDERADO SIN PESO, DE CUYO EXTREMO PENDE (COMO LO MUESTRA LA FIGURA) UN CUERPO DE MASA "M". SE DESEA SABER QUE TIEMPO TARDA EN CAER ESTE ÚLTIMO CUERPO, UNA ALTURA "H", PARTIENDO DEL REPOSO, BAJO EL SUPUESTO DE QUE EL DISCO SE TRASLADARÁ RODANDO SIN RESBALAR. INERCIA DISCO = $1/2\ M.\ R^2$




$$E.T_{①} = E.T_{②}$$

$$\cancel{Mgk} + mgh = \frac{1}{2} M \frac{v^2}{4} + \cancel{Mgk} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} M\cancel{R^2} \frac{v^2}{4\cancel{R^2}} + \frac{1}{2} m v^2$$

$$mgh = \frac{Mv^2}{8} + \frac{Mv^2}{16} + \frac{mv^2}{2}$$

$$mgh = v^2 \left( \frac{M}{8} + \frac{M}{16} + \frac{m}{2} \right)$$

$$\boxed{v^2 = \frac{mgh}{3/16\ M + m/2}}$$ Ecuación ①

En virtud del mov. variado podemos escribir: $v^2 = 2ah$ que substituido en la Ecuación 1 nos da: $2a\cancel{h} = \dfrac{16 mg\cancel{h}}{3M + 8m}$

$$a = \frac{8mg}{3M+8m}$$

Ya con el valor de la aceleración, substituyendo éste valor en $h = \frac{1}{2}at^2$ (Condición de Movimiento variado tenemos:

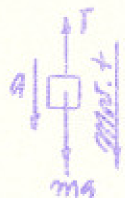
$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{8mg}{3M+8m}\right)t^2$$

$$h = \frac{4mgt^2}{3M+8m}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{(3M+8m)h}{4mg}}$$

Resolución por Ecuaciones de Mov. variado:

Cuerpo libre masa "m"

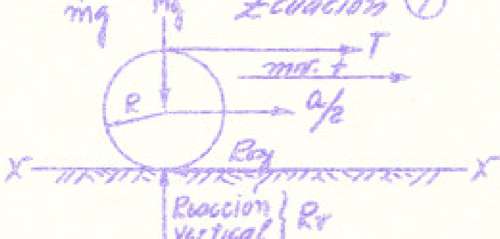



$$\Sigma F_y = (\Sigma m)a_y$$

$$\boxed{mg - T = ma}$$

Ecuación 1

Cuerpo libre masa "M"




$$\Sigma F_x = (\Sigma m)a_x$$

$$\boxed{T - R_x = M\frac{a}{2}}$$

Ecuación 2

$$\Sigma L = (\Sigma I)\alpha$$

$$T\cancel{R} + R_x R = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\frac{a}{2\cancel{R}}$$

$$\boxed{T + R_x = \frac{Ma}{4}}$$

Ecuación 3

Resolviendo ② y ③ tenemos:

$$2T = \frac{Ma}{2} + \frac{Ma}{4}$$

$$T = \frac{Ma}{4} + \frac{Ma}{8} = \frac{3}{8} Ma$$

$$\boxed{T = \frac{3}{8} Ma} \quad (2')$$

Resolviendo ahora las Ecuaciones ① y ②' tenemos:

$$mg - \frac{3}{8} Ma = ma$$

$$mg = ma + \frac{3}{8} Ma$$

$$mg = a\left(m + \frac{3}{8} M\right)$$

$$a = \frac{mg}{3/8\, M + m}$$

$$\boxed{a = \frac{8\,mg}{3M + 8m}}$$

Con el valor de "a" conocido, lo substituimos en la formula: $h = \frac{1}{2}at^2$ y tenemos:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{8mg}{3M + 8m}\right)t^2$$

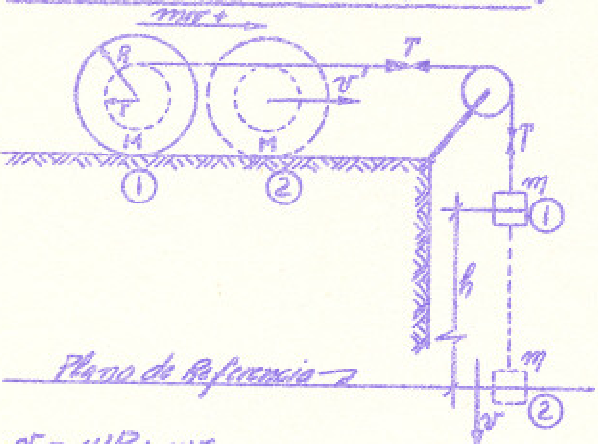
$$h = \frac{4mgt^2}{3M + 8m}$$

$$t = \sqrt{\frac{(3M + 8m)h}{4mg}}$$

## PROBLEMA No. 8

HALLAR LA VELOCIDAD CON QUE SE MOVERÁ EL CUERPO DE MASA "M" MOSTRADO EN LA FIGURA SIGUIENTE, CUANDO HAYA CAIDO ÉSTE DESDE LA POSICIÓN DE REPOSO, UNA ALTURA "H"; BAJO EL SUPUESTO DE QUE EL CUERPO DE MASA "M" SE TRASLADARÁ RODANDO SIN RESBALAR. EL RADIO DE GIRO DEL CUERPO "M" ES "K". LA PEQUEÑA POLEA FIJA QUE HAY, SÓLO SIRVE PARA CAMBIAR DIRECCIÓN A LA FUERZA; CONSIDERÁNDOSE QUE NO CONSUME NINGUNA ENERGÍA EN LA ROTACIÓN.

POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA:




$$v = \omega R + \omega r$$
$$v' = \omega R$$
$$v = v' + \omega r$$
$$v' = v - \omega r$$
$$v' = v - \frac{v' r}{R}$$
$$v' + \frac{v' r}{R} = v$$
$$v'\left(1 + \frac{r}{R}\right) = v$$
$$\boxed{v' = \frac{v}{1 + \frac{r}{R}}}$$

$$E.T._{(1)} = E.T._{(2)}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M v'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

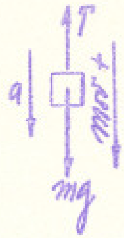
$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{M v^2}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{M K^2 v^2}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 R^2}$$

$$mgh = v^2 \left[ \frac{m}{2} + \frac{M}{2\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} + \frac{M K^2}{2R^2\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} \right]$$

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{m}{2} + \frac{M}{2\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}}$$

## Resolución por Ecuaciones de Mov. variado:

Cuerpo libre
masa "m"

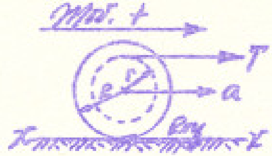



$$\Sigma F_y = (\Sigma m) a_y$$

$$\boxed{mg - T = ma}$$

Ecuación (1)

Cuerpo libre
masa "M"




Es facil establecer que $a' = \dfrac{a}{1+\frac{r}{R}}$

$$\Sigma F_x = (\Sigma m) a_x$$

$$\boxed{T - R_{ox} = M \frac{a}{1+\frac{r}{R}}}$$

Ecuación (2)

$$\Sigma L = (\Sigma I)\alpha$$

$$R_{ox} R + Tr = MK^2 \frac{a'}{R}$$

$$\boxed{R_{ox} R + Tr = \frac{MK^2 a}{R\left(1+\frac{r}{R}\right)}}$$

Ecuación (3)

Resolviendo las 3 Ecuaciones Simultaneas (1) (2) y (3) tenemos:

(Ecuación (2)) $\times R$: $\boxed{TR - R_{ox} R = \dfrac{MaR}{1+\frac{r}{R}}}$ Ecuación (2')

(3) + (2'): $\boxed{TR + Tr = \dfrac{MaR}{1+\frac{r}{R}} + \dfrac{MK^2 a}{\left(1+\frac{r}{R}\right)R}}$

Ecuación (3')

Ahora resolviendo las Ecuaciones (3') y (1) tenemos:

$$(mg-ma)R+(mg-ma)r=\frac{MaR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2a}{(1+\frac{r}{R})R}$$

$$mgR-maR+mgr-mar=\frac{MaR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2a}{(1+\frac{r}{R})R}$$

$$mgR+mgr=maR+mar+\frac{MaR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2a}{(1+\frac{r}{R})R}$$

$$mg(R+r)=a\left[mR+mr+\frac{MR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2}{(1+\frac{r}{R})R}\right]$$

$$\therefore \quad a=\frac{mg(R+r)}{mR+mr+\frac{MR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2}{(1+\frac{r}{R})R}}$$

Pero: $v^2=2ah$ (mov. variado)

$$\therefore \quad v^2=\frac{2mgh(R+r)}{mR+mr+\frac{MR}{(1+\frac{r}{R})}+\frac{MK^2}{(1+\frac{r}{R})R}}$$

$$v^2=\frac{2mgh(R+r)}{m(R+r)+\frac{M}{(1+\frac{r}{R})}\left(R+\frac{K^2}{R}\right)}$$

Dividiendo los 2 terminos del quebrado entre $2(R+r)$ tenemos:

$$v^2=\frac{mgh}{\frac{m}{2}+\frac{M(R+K^2/R)}{2(1+\frac{r}{R})(R+r)}}$$

$$v^2 = \frac{mgh}{\frac{m}{2} + \frac{MR\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{2\left(1+\frac{r}{R}\right)(R+r)}}$$

$$v^2 = \frac{mgh}{\frac{m}{2} + \frac{M\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{m}{2} + \frac{M}{2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}$$

## VI) CONCLUSIONES:

1) LA ENERGÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DINÁMICA, CONSTITUYE UN MÉTODO LÓGICO Y DE FÁCIL APLICACIÓN.

2) EL MÉTODO DE ENERGÍA EN DINÁMICA, ES VENTAJOSO PARA HALLAR VELOCIDADES Y ACELERACIONES. SIENDO INNECESARIO PARA DICHOS CASOS HACER CUERPOS LIBRES.

3) EL MÉTODO DE ENERGÍA EN DINÁMICA, EVITA RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS; MUY COMUNES CUANDO SE TRABAJO POR APLICACIÓN DE ECUACIONES DE MOVIMIENTO VARIADO.

4) EL MÉTODO DE ENERGÍA EN DINÁMICA, RESUELVE EN FORMA SENCILLA MUCHÍSIMOS PROBLEMAS, QUE DE NO RESOLVERLOS ASÍ NOS VERÍAMOS EN LA NECESIDAD DE APLICAR MATEMÁTICAS MÁS AVANZADAS: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

5) EL MÉTODO DE ENERGÍA EN DINÁMICA, ES DE IMPORTANCIA ESPECIAL PARA ESTUDIAR CUERPOS RÍGIDOS, ANIMADOS DE MOVIMIENTOS DESORDENADOS, ES DECIR CUERPOS QUE NO SIGUEN TRAYECTORIAS CONOCIDAS.

6) EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ENERGÍA, CREA UN NUEVO E IMPORTANTE SENTIDO DE LÓGICA, MUY ÚTIL Y NECESARIO A TODO ESTUDIANTE O PROFESIONAL EN EL CAMPO DE LA INGENIERÍA.

7) DADAS LAS AMPLIAS VENTAJAS Y MÚLTIPLES APLICACIONES DEL CONCEPTO DE ENERGÍA EN LOS DISTINTOS CAMPOS DE NUESTRA PROFESIÓN; CONSIDERO MUY NECESARIO QUE NUESTROS PROFESORES, HAGAN MÁS INCAPIÉ EN ELLOS A FIN DE QUE EL APRENDIZAJE SEA MÁS EFECTIVO; CREANDO A LA VEZ ESE IMPORTANTE SENTIDO DE LÓGICA, TAN NECESARIO EN LA VIDA PROFESIONAL COMO EN LA VIDA CORRIENTE.

## VIII) BIBLIOGRAFIA


ELEMENTOS DE FISICA, M. F. GRAN.
PROFESOR TITULAR DE FÍSICA SUPERIOR
DE LA UNIVERSIDAD DE LA HABANA.
CUARTA EDICIÓN 1950.

CURSO ELEMENTAL FISICA, ALONSO, D.C.
F.M.
MIEMBRO DE LA SOCIEDAD CUBANA DE CIEN
CIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.

CURSO DE FISICA, W. WATTSON.
MIEMBRO DE LA ROYAL SOCIETY,
PROFESOR DE FÍSICA DEL IMPERIAL CO-
LLEGE OF CIENCE AND TECHNOLOGY DE --
LONDRES.
OCTAVA EDICIÓN INGLESA 1948.

FISICO QUIMICA, DE E. CALVET.
EX-PROFESOR DE QUÍMICA DE LAS ESCUE-
LAS INDUSTRIALES DE BARCELONA Y TA-
RRAZA.
SEGUNDA EDICIÓN.

ELEMENTOS DE TERMODINAMICA, ALAN --
BROWSTER.
EDITORIAL GLEM. BUENOS AIRES (R.A.)

TRATADO POPULAR DE FISICA, KLEIBER -
KARSTEN.
OCTAVA EDICIÓN, REVISADA.
BARCELONA.

TU Y EL MUNDO FISICO, DR. PAUL KARL-
SON,
TERCERA EDICIÓN 1947.
EDITORIAL LABOR S. A.

MECANICA ANALITICA PARA INGENIEROS,
SEELY.
FRED B. SEELY, M. S.
Y NEWTON E. ENSIGN M. S.

LUIS ANTONIO GONZÁLEZ Y G.-

Vº. Bº.

ING. JULIO ESCOBAR FELTRÍN

IMPRÍMASE:

ING. JORGE ARIAS.-
DECANO