UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Guatemala, Centro América.

"PROBLEMA DEL TRANSPORTE Y SU APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA"

T E S I S

Presentada a la Junta Directiva de la

Facultad de Ingeniería

de la

Universidad de San Carlos de Guatemala

por:

EMILIO GERARDO CORZO BACA

Al conferírsele el Título de

INGENIERO INDUSTRIAL

Guatemala, Julio de 1969.

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:	Ing. Amando Vides Tobar
Vocal Primero:	Ing. Marco Antonio Cuevas
Vocal Segundo:	Ing. Francisco Ubieto
Vocal Tercero:	Ing. Adolfo Behrens M.
Vocal Cuarto:	Br. Alfredo Bonatti
Vocal Quinto:	Br. Eliseo Osorio
Secretario:	Ing. Héctor A. Centeno

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Decano:	Ing. Amando Vides Tobar
Director del Departamento de Ingeniería Mecánica Industrial	Ing. Francisco Billeb
Examinador:	Ing. Alejandro Botrán
Examinador:	Ing. Pedro Aragón
Secretario:	Ing. Héctor A. Centeno

ACTO QUE DEDICO

A DIOS

A MIS PADRES:

Lic. Guillermo Corzo

Guadalupe B. de Corzo

A

Universidad de San Carlos

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

Cumpliendo con los preceptos que la Ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala establece, presento a vuestra consideración, mi trabajo de tesis titulado:

"PROBLEMA DEL TRANSPORTE Y SU
APLICACION EN LA INDUSTRIA"

tema que me fue asignado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.

CONTENIDO

Introducción 1

Capítulo I:

Descripción del Problema 5

El arreglo del transporte 9
Definiciones: Solución al problema del transporte, solución variable, solución factible, sistema triangular de ecuaciones 10
Solución básica, solución degenerada, no degenerada 11
La solución inicial 12
Obtención de una solución básica factible a partir de otra anterior 15
Otras definiciones 17
Procedimiento cuando se tiene una solución degenerada 18
Otros métodos de obtener una solución básica factible 20

Capítulo II:

Procedimiento para resolver el problema del transporte 27

Problemas en que la suma de disponibilidades es diferente a la suma de requerimientos 35
Una variante del problema del transporte 37
Asignación de personal 37

CONTENIDO

-II-

Capítulo III:

Problemas de aplicación 39

Capítulo IV:

Un problema real en la industria del país 69

Conclusiones 75

Bibliografía 77

INTRODUCCION

El problema del transporte, que estudiaremos más adelante, es una de las aplicaciones de la programación lineal que tanto auge ha cobrado en los últimos años por sus múltiples usos en los diversos campos relacionados con las Matemáticas, Economía, etc.

La programación lineal es un producto de las matemáticas modernas y se inició hace más de dos décadas. El Dr. George B. Dantzig publicó su primer escrito sobre el método simplex (otra de las aplicaciones de la programación lineal, de características similares al problema del transporte) en el año 1947 y desde entonces el progreso en este campo ha sido rápido. Sin embargo, ya antes, en la década de 1930-40, un grupo de economistas y matemáticos había sugerido problemas de programación lineal.

Después de 1951 importantes contribuciones fueron hechas por David Gale, H. W. Kuhn y A.W. Tucker quienes tuvieron parte importante en el desarrollo de la teoría binaria en programación lineal. A. Charnes quien también hizo algún trabajo importante y W.W. Cooper tomaron la iniciativa en aplicar la programación lineal a la industria. Respecto al problema del transporte, se sabe que en 1941 Hitchcock lo formuló y resolvió, así como el ruso Kantorovitch lo planteó en 1942 y más tarde, en 1947 Koopmans también lo resolvió.

Hablando en general, podemos decir que la programación lineal trata de determinar asignaciones óptimas de recursos limitados a ciertos objetivos dados, es decir, trata con situaciones en donde un cierto número de recursos, tales como hombres, materiales, maquinaria, etc., están disponibles y van a ser combinados para obtener uno o más productos. Hay sin embargo, ciertas restricciones en todas o algunas de las siguientes categorías: en la cantidad total de cada recurso disponible, en la cantidad de cada producto, etc. Aún dentro de estas restricciones existirán muchas asignaciones o soluciones factibles, pero lo que se desea es encontrar la o las soluciones que hagan máxima o mínima alguna cantidad como ganancia o costo.

Los problemas del transporte y en general los de programación lineal, tienen las siguientes características:

1.- Hay algún objetivo que alcanzar: ganancia máxima, costo mínimo, tiempo mínimo de operación, etc. del sistema que se estudia.

2.- Hay una gran cantidad de variables que intervienen simultáneamente en el problema, las cuales son los recursos de que hablamos anteriormente y entre ellas hay diferentes tipos de variables, algunas de las cuales son de rendimiento o capacidad del sistema como los productos obtenidos, mientras que otros son factores que integran la producción como hombres, máquinas, etc.

3.- Hay muchas interacciones entre las variables. Un problema tipo es aquel de determinar el mejor lote de productos para un período determinado de producción. Aquí estamos tratando de determinar cuáles productos manufacturar de una lista de productos potenciales, junto con la cantidad óptima de cada uno, de manera de obtener la máxima ganancia de todos los productos en un período de producción. Las interacciones surgen del hecho de que si hemos limitado los recursos y manufacturaremos una cantidad determinada del producto A, habrá entonces menos recursos disponibles para la producción de los productos B, C, D, etc. Los productos en cierto sentido compiten por los recursos disponibles. La programación lineal puede ser usada para determinar cómo resolver este conflicto y obtener el programa de producción más favorable.

4.- La mayoría de los problemas de programación lineal se caracterizan también por la presencia de objetivos que están en conflicto con el objetivo principal del problema. En el caso de un lote de productos por ejemplo, el fabricante puede especificar que al menos una cierta cantidad de uno de los productos sea hecha sin considerar el efecto en la ganancia. El objetivo compitiendo aquí con el de hacer máxima la ganancia, puede ser el de suplir una orden recibida y aceptada.

La palabra lineal en estos problemas significa que los mismos pueden ser resueltos por un modelo de programación lineal, sólo si las relaciones algebraicas entre las variables son lineales o pueden ser aproximadas a ecuaciones de primer orden.

Habiendo hecho las consideraciones anteriores sobre la programación lineal en general, podemos ahora hablar en particular sobre el problema del transporte que es el que nos ocupa.

En el problema del transporte estamos tratando con un producto que es almacenado en un número de orígenes (tal vez las plantas en las cuales fué hecho) y necesitado en un número de destinos (agiotistas, vendedores o almacenes distribuidores). Se asume que conocemos la cantidad del producto disponible en cada orígen y la cantidad necesitada en cada destino, así como el costo unitario de enviar el producto de cada orígen a cada destino. El objetivo del problema es encontrar, o más bien determinar, la cantidad que se enviará de cada orígen a su destino de manera que los costos totales de envío sean mínimos.

Hay que hacer notar que a menudo se habla de este problema en términos de artículos que son enviados de fábricas a almacenes, porque éso lo hace más fácil de enfocar en el significado físico de las ecuaciones que serán tratadas. Sin embargo, también veremos que se presentarán muchas situaciones que pueden ser simuladas matematicamente por idénticos sistemas de ecuaciones aunque dichos sistemas tengan muy poco o inclusive nada que ver con transporte. El término transporte es únicamente una descripción conveniente del sistema, sin asociarlo a un significado físico de estas relaciones. Se usarán frecuentemente los términos "fábrica" y "almacén", pero debe tenerse en cuenta que estos términos no son restrictivos.

Este trabajo no pretende ser una amplia exposición sobre todo lo que se refiere al problema del transporte, sino más bien, un enfoque práctico dando las herramientas necesarias para poder resolverlo aún sin profundizar demasiado en su estructura y después abordar algunos problemas que se presentan en la industria y resolverlos de manera que se observe la utilidad de lo que se ha dicho anteriormente.

CAPITULO 1

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El problema del transporte es importante tanto desde un punto de vista práctico como teórico. Su importancia radica en el hecho de que muchas situaciones reales pueden ser descritas por sistemas de ecuaciones que caen dentro de la clase del transporte. Una cantidad considerable de aplicaciones de programación lineal han sido hechas en este campo. La importancia teórica de estos problemas está en que los procedimientos de cálculo que han sido desarrollados para su solución, son ejemplos de las simplificaciones que resultan si alguna ventaja puede ser tomada de la estructura del problema.

El problema, como lo habíamos definido anteriormente, considera que un número que llamaremos "m" hay de orígenes y "n" de destinos que pueden ser representados gráficamente como se observa en la fig. 1-1.

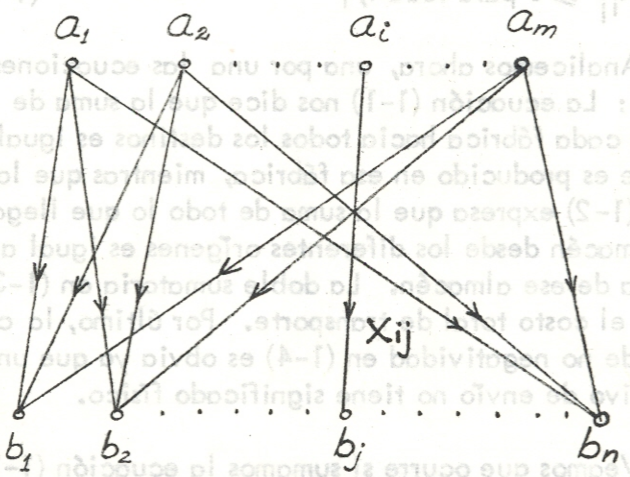


Fig. 1-1

Los orígenes, que en un problema particular podrían ser fábricas, producen o disponen de artículos en los niveles a_1, a_2, ..a_m y la demanda en los destinos que pueden ser centros distribuidores para estos artículos, es $b_1, b_2, ..,$ b_n. Si el costo unitario de envío de la fábrica "i" al destino "j" es "C ", entonces ¿qué modelo de envíos hará mínimo el costo total de transporte?

La manera de formular matemáticamente este problema es simple. Si denotamos por X_{ij} la cantidad enviada de i a j, entonces podemos escribir:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \text{ donde } i = 1, 2, 3, \ldots, m \qquad (1-1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \text{ donde } J = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (1-2)$$

$$\sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} . X_{ij} = \text{mínimo} \qquad (1-3)$$

$$X_{ij} \geqslant 0 \text{ para toda } i, j \qquad (1-4)$$

Analicemos ahora, una por una las ecuaciones anteriores: La ecuación (1-1) nos dice que la suma de lo que envía cada fábrica hacia todos los destinos es igual a todo lo que es producido en esa fábrica, mientras que la ecuación (1-2) expresa que la suma de todo lo que llega a cada almacén desde los diferentes orígenes es igual a la demanda de ese almacén. La doble sumatoria en (1-3) representa el costo total de transporte. Por último, la condición de no negatividad en (1-4) es obvia ya que un valor negativo de envío no tiene significado físico.

Veamos que ocurre si sumamos la ecuación (1-1) sobre toda i:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

y haciendo lo mismo con (1-2) sobre toda j:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=i}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Como el orden de las sumatorias a la izquierda de las ecuaciones no afecta en nada, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

La anterior es una condición de consistencia que debe ser satisfecha si existe una solución. Desde un punto - de vista físico, la ecuación significa que el sistema está balanceando (la producción total es igual a la demanda total), aunque no siempre sucede esto.

Desarrollando las ecuaciones (1-1) y (1-2), tenemos:

$$
\begin{array}{llllr}
X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} & & & & = a_1 \\
 & X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n}. & & & = a_2 \\
 & & \cdot & & \\
 & & & \cdot\; X_{m1} + X_{m2} \cdots + X_{mn} & = a_m \quad (1\text{-}6) \\
X_{11} \cdot & + X_{21} \cdots\cdots\cdots & + X_{m1} & & = b_1 \\
\quad \cdot & & & & \\
\quad \cdot\; X_{1n} & + X_{2n} & & + X_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

Este es un sistema de m+n ecuaciones con mn incógnitas, pero las ecuaciones no son independientes. Una ecuación (cualquiera) es redundante porque puede ser obtenida de otras. Por ejemplo, si sumamos las primeras m ecuaciones y sustraemos de esa suma las siguientes n-1 ecuaciones, obtenemos:

$$X_{1n} + X_{2n} + X_{mn} = a_1 + a_2 + \ldots + a_m - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_{n-1}$$

Pero el miembro izquierdo de esta ecuacion es igual a b_n, asi que hemos derivado la última ecuación de las otras y podemos eliminarla del sistema. Una base del sistema (1-6) envolverá entonces no m+n variables sino sólo m+n-1. Sin embargo, en vez de quitar una ecuación del sistema, retendremos todas por razón de simetría y tendremos siempre en mente que una de las ecuaciones es redundante.

Se puede observar que este sistema lo podemos resolver por medio de matrices y que los coeficientes de las variables son sólo unos y ceros, ya que donde aparecen espacios en las ecuaciones, corresponde a la ausencia de una incógnita. Además, puede verse como característica importante que cada variable aparece sólo una vez en las primeras m ecuaciones y sólo una vez en las siguientes n ecuaciones.

EL ARREGLO DEL TRANSPORTE. La estructura particular del sistema (1-6) nos permite representar el sistema por medio de un arreglo como se muestra en el cuadro 1-1.

X_{11}	X_{12}		X_{1n}	a_1
X_{21}	X_{22}		X_{2n}	a_2
X_{m1}	X_{m2}		X_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_n	

Cuadro 1-1

Cada uno de los cuadros corresponde a una variable. A la drecha y abajo se han puesto una columna y una fila adicionales, en cuyos cuadros escribimos los valores dados de a_i y b_j. Cada columna corresponde a una de las n ecuaciones y cada fila a una de las m ecuaciones de(1-6). Por tal razón, las primeras m ecuaciones son llamadas las ecuaciones de fila y las siguientes n ecuaciones se denominan las ecuaciones de columna. Con cada cuadro asociamos un costo unitario C_{ij}, de manera que el costo total de colocar un número X_{ij} en el cuadro ij es $C_{ij} \cdot X_{ij}$. Nuestro problema ahora es colocar m+n-1 números entre estos cuadros (un cuadro sin número tiene un $X_{ij} = O$), con el objeto de satisfacer los totales de fila y de columna, siempre que el costo total sea mínimo. El arreglo del cuadro 1-1 es una representación conveniente del sistema 1-6 y veremos más adelante que todos los cálculos son hechos directamente sobre ese arreglo.

Antes de seguir adelante, daremos unas definiciones que son de suma importancia para poder trabajar con el problema:

UNA SOLUCION AL PROBLEMA DEL TRANSPORTE es una matriz X que satisfaga los requerimientos de fila y de columna.

SOLUCION VARIABLE es una variable diferente de cero en una solución. Las variables iguales a cero en una solución, son consideradas como que no están en dicha solución.

SOLUCION FACTIBLE es una solución en la cual todas las variables son positivas.

SISTEMA TRIANGULAR DE ECUACIONES LINEALES es aquel que contiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y puede ser arreglado en tal forma que ningún término aparezca abajo (o arriba) de la diagonal principal del miembro izquierdo. Por ejemplo:

$$X_{32}+X_{22} = a_4$$

$$X_{22}+X_{21} = a_3$$

$$X_{21}+X_{11} = a_2$$

$$X_{11} = a_1$$

La diagonal principal va a través del primer término en cada ecuación y ningún término cae debajo de esta diagonal. Cualquier sistema triangular de ecuaciones, puede ser resuelto por medios directos y no es necesario reordenar las ecuaciones en forma triangular para que éso sea cierto. En el ejemplo anterior vemos que X_{11} es igual a a_1, que podemos sustituirlo en la ecuación anterior y obtener X_{21} que sustituido a su vez en la segunda ecuación nos dá X_{22} y éste en la primera da X_{32}, de manera que hemos asignado a cada variable un valor numérico.

SOLUCION BASICA es la que se dá a un sistema triangular de ecuaciones formado por las condiciones del problema.

SOLUCION BASICA FACTIBLE DEGENERADA ES la solución básica factible con menos de m+n-1 variables en la solución.

SOLUCION BASICA FACTIBLE NO DEGENERADA es aquella solución básica factible con exactamente m + n-1 variables positivas en la solución.

El término "degenerado" no es como podrá creerse que implique una solución incorrecta o inadecuada al problema, pues es una solución factible perfectamente válida que puede ser óptima. El término viene de las matemáticas de espacios vectoriales y posteriormente al resolver algunos problemas veremos cuándo es que se presenta.

LA SOLUCION INICIAL

Necesitamos una solución inicial básica factible para empezar el proceso. Consideremos el arreglo mostrado en el cuadro 1-1. Escojamos cualquier variable, digamos X_{pq}, como una variable básica y hagámosla tan grande como se pueda siendo consistente con los totales de fila y de columna, o sea:

$$X_{pq} = \text{mín. } (a_p, b_q)$$

Colocamos el valor de X_{pq} en el arreglo en su cuadro apropiado. Si $a_p < b_q$, entonces la fila "p" es eliminada de consideraciones posteriores (todas las variables en esa fila excepto X_{pq} no son básicas) y b_q es reemplazado por $b_q - a_p$. De otra manera, si $b_q < a_p$, entonces la columna q queda al margen de las siguientes consideraciones y a_p es reemplazado por $a_p - b_q$. En el caso de que $a_q = b_q$, podemos escoger la fila o la columna, excepto cuando hay sólo una fila o una columna, en cuyo caso se escoge la columna o la fila. De esta manera seleccionaremos las m+n-1 variables para la base inicial porque habrá sólo una fila y una columna antes de evaluar la última variable y ambas serán eliminadas al hacerlo. La condición de consistencia (1-5), asegura que la ecuación de la última fila y la ecuación de la última columna pueden ser satisfechas con sólo una variable.

Este procedimiento genera bases triangulares y en general todas las bases del problema del transporte son triangulares, así que podemos generar cualquiera de las posibles bases por medio de dicho procedimiento.

Para ver más claramente lo expuesto antes, tomemos un arreglo de 3 filas y 4 columnas:

$$\begin{array}{cccc|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & a_1 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & a_2 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

Aplicaremos el método propuesto por Dantzig y llamado por Charnes y Cooper "La regla de la esquina noroeste" por tomar como primera variable la que está arriba y a la izquierda en el tablero o arreglo:

Determinamos un valor para la variable X_{11}, el cual debe ser el mínimo entre a_1 y b_1, que supondremos es a_1, por lo que $X_{11} = a_1$ y todas las $X_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$. El paso inicial queda como se muestra a continuación:

1)

$$\begin{array}{cccc|c} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & a_2 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & a_3 \\ \hline b_1 - a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

Seguidamente, determinamos un valor para la primera variable en la fila 2. Tomamos $X_{21} = \text{mín.} (a_2, b_1 - a_1)$ Asumimos que $a_2 > b_1 - a_1$, por lo que $X_{21} = b_1 - a_1$ y $X_{31} = 0$:

2)
$$\begin{array}{cccc|c}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1-a_1 & X_{22} & X_{23} & X_{24} & a_2-b_1+a_1 \\
0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} & a_3 \\
\hline
0 & b_2 & b_3 & b_4 &
\end{array}$$

De igual manera, para los siguientes pasos, determinamos el valor de una variable X_{ij} y reducimos a cero la cantidad a ser enviada de i o la cantidad a ser enviada a j o ambas:

3) Asumiendo que $a_2 - b_1 + a_1 > b_2$:

$$\begin{array}{cccc|c}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1-a_1 & b_2 & X_{23} & X_{24} & a_2-b_1+a_1-b_2 \\
0 & 0 & X_{33} & X_{34} & a_3 \\
\hline
0 & 0 & b_3 & b_4 &
\end{array}$$

4) Suponiendo que $a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$:

$$\begin{array}{cccc|c}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1-a_1 & b_2 & a_2-b_1+a_1-b_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & X_{33} & X_{34} & a_3 \\
\hline
0 & 0 & b_3-a_2+b_1-a_1+b_2 & b_4 &
\end{array}$$

Del arreglo anterior vemos que $X_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$ y $X_{34} = b_4$. Dependiendo de los valores de a_i y b_i y de las suposiciones hechas al obtener la solución factible del ejemplo anterior, tenemos que las $m+n-1 = 6$ variables con valores positivos posibles, son:

$$X_{11} = a_1, \quad X_{21} = b_1 - a_1, \quad X_{22} = b_2,$$

$$X_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2$$

$$X_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2, \qquad X_{34} = b_4$$

Tenemos completa libertad al escoger el juego de variables para la solución básica, pero naturalmente, debemos escoger un juego que esté cercano a la base óptima, porque ésto en general, reducirá el número de iteraciones requeridas para llegar al óptimo. Un buen procedimiento es examinar el arreglo de costos unitarios:

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \cdots\cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots\cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots\cdots & C_{mn} \end{matrix}$$

y tomar el más pequeño C_{ij}, escogiendo la primera variable básica X_{pq} tal que: $C_{pq} = \text{mín. } C_{ij}$. Este procedimiento será empleado más adelante al resolver problemas numéricos.

OBTENCION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE A PARTIR DE OTRA ANTERIOR

Cuando tenemos una solución básica factible, podemos partir de ésta para encontrar otra solución, introduciendo una nueva variable entre la matriz solución y eliminando otra variable de esa matríz. Suponemos que tenemos una solución representada por:

	X_{12}			a_1
	X_{22}	X_{23}		a_2
X_{31}		X_{33}		a_3
	X_{42}		X_{44}	
b_1	b_2	b_3	b_4	

Este cuadro representa una solución básica factible. Si queremos introducir una variable, digamos X_{11} entre la solución con un valor positivo, pero pequeño (que llamaremos θ) y lo agregamos en el cuadro correspondiente, debemos sustraer ese mismo valor de X_{31} para satisfacer el total de columna b_1. Pero si sustraemos θ de X_{31}, debemos agregarlo a X_{33} para satisfacer a_3 y sustraerlo a X_{23} para satisfacer b_3 y así sucesivamente hasta cerrar el ciclo de manera que se satisfagan todos los totales de columna y de fila. La matríz, entonces, quedará así:

θ	$X_{12} - \theta$			a_1
	$X_{22} + \theta$	$X_{23} - \theta$		a
$X_{31} - \theta$		$X_{33} + \theta$		a_3
	X_{42}		X_{44}	a_4

Hay que hacer notar que aquí se sustrae θ a X_{12} en la columna 2, pues si se hubiera hecho a X_{42}, al agregar el valor a X_{44} no hubiera habido forma de compensarlo en la columna 4.

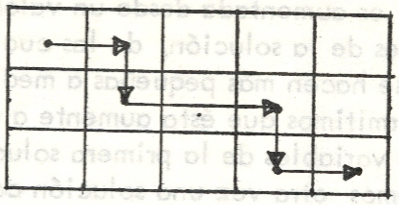
La secuencia de variables trazada por las sumas y restas de θ, es llamada "la Senda o el camino +, -". Supongamos que θ es aumentada desde un valor cercano a cero, las variables de la solución, de las cuales está siendo sustraída θ, se hacen más pequeñas a medida que θ aumenta. Si permitimos que ésta aumente a un tamaño tal que una de las variables de la primera solución se reduzca a cero, tendremos otra vez una solución conteniendo m+n -1 variables. Para obtener una solución básica factible, sin embargo, debemos insistir en que debe θ ser igual a la variable más pequeña de la cual está siendo sustraída, de lo contrario, una o más variables en la nueva solución serán negativas.

La existencia de una nueva solución significa que siempre podemos encontrar un camino "+, -", empezando en cualquier cuadro o celda vacía sin tomar en cuenta cuán largo se hará el problema o qué tan complicado pueda hacerse el camino.

OTRAS DEFINICIONES

CAMINO DIRECTO UNIENDO DOS CELDAS: Un camino directo de la celda (i, j) a la celda (v, w) en una tabla del tipo 1-1, es definido como un conjunto ordenado de celdas $\{(i, j), (i, k), (q, k), (q, r), \ldots, (v, w)\}$ o $\{(i, j), (s, j), (s, t), \ldots, (v, w)\}$ tal que dos celdas adyacentes cualesquiera en el conjunto ordenado, caen en la misma fila o columna. Además cada celda (excepto la última), debe aparecer sólo una vez en el conjunto ordenado. La celda (i, j) es llamada la celda inicial del camino y la celda (v, w) la celda terminal.

RAMAL DIRECTO: es un segmento de recta que une un par ordenado de celdas, el cual cae en la misma fila o en la misma columna. La primera celda del par, es llamada el punto inicial del ramal y la segunda celda, el punto final. Lo anterior se ilustra en el cuadro 1-2



Cuadro 1-2

VUELTA DIRECTA: es aquel camino en que la primera celda en el conjunto ordenado es la misma de la última celda y el primer ramal es ortogonal al último.

CAMINO SIMPLE DIRECTO: es el camino tal que en cualquier fila o columna no hay más de dos celdas en el conjunto que define tal camino. El cuadro 1-2 es un ejemplo de este caso.

PROCEDIMIENTO CUANDO SE TIENE UNA SOLUCION DEGENERADA

Cuando se tiene una solución degenerada, la manera de trabajar el problema es la siguiente: si una solución degenerada tiene $k < m+n-1$ variables positivas, entonces tenemos que seleccionar $m+n-1-k$ variables cero para la solución y a continuación emplear el método "perturbación $\mathcal{E}$" de Dantzig.

Refirámonos al tablero de 3 filas por 4 columnas usado para obtener una primera solución factible. En el paso 1, si $X_{21} = b_1 - a_1 = a_2$, entonces ni X_{31} ni X_{22} podrían ser positivas. O si en el paso 2, $X_{22} = b_2 = a_2 - b_1 + a_1$, ni X_{32} ni X_{23} serían positivas. Cuando cualquiera de estas situaciones aparece, el número de variables positivas en la solución básica es reducido en uno. Estos casos degenerados surgen cuando al evaluar alguna X_{ij} , son iguales dos valores; encontramos entonces una suma parcial de a_i y b_j que es igual a alguna a_i o b_j . Para evitar estas situaciones degeneradas, se "perturban" (modifican) los valores de a_i y b_j . Planteamos un nuevo problema donde:

$$\bar{a}_i = a_i + \varepsilon \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

$$\bar{b}_j = b_j \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$$\bar{b}_n = b_n + m\varepsilon \qquad \text{siendo } \varepsilon > 0$$

A continuación damos un ejemplo numérico para observar mejor la aplicación anterior. Primero el tablero con la solución degenerada y después modificado con el valor de ε .

1) Solución degenerada con m+n-2 variables positivas:

1	2	0	0	0	3
0	1	3	0	0	4
0	0	0	2	5	7
1	3	3	2	5	

2) Solución modificada con m+n-1 variables positivas:

1	$2+\varepsilon$	0	0	0	$3+\varepsilon$
0	$1-\varepsilon$	3	2ε	0	$4+\varepsilon$
0	0	0	$2-2\varepsilon$	$5+3\varepsilon$	$7+\varepsilon$
1	3	3	2	$5+3\varepsilon$	

Se puede observar, que la variable X_{24} que antes valía cero, ahora tiene valor de 2ε y que ε determina cuál de las dos variables con valores reales de cero debe ser incorporada a la solución. Aquí tuvimos la alternativa de escoger X_{24} o X_{33} y en general, lo único que se necesita saber es qué variables están en esa alternativa, aunque será mejor seleccionar la que tenga menor costo C_{ij}.

El valor de ε es muy pequeño y la manera de calcularlo varía según cada autor, pero lo que se hace a menudo es trabajar con una variable cero como valor positivo para completar las m+n-1 variables requeridas, sabiéndose que en la siguiente iteración, aparecerá otra variable y se podrá eliminar la que tiene valor cero, o sea que no afecta trabajar con soluciones degeneradas.

OTROS METCDOS DE OBTENER UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE.

Ya se ha discutido la regla de la esquina noroeste para determinar una solución básica factible. Ahora presentaremos algunos otros métodos que a menudo nos acercan más a la solución óptima que el método anterior. Veremos que es más provechoso ocupar algún tiempo en buscar una buena solución inicial, porque ésta puede reducir considerablemente el número total de iteraciones requeridas para llegar a la solución óptima.

La mayoría de los métodos para determinar una solución inicial básica factible, asigna un valor positivo a una variable y al mismo tiempo, satisface una fila o una columna en cada paso. Nosotros probaremos que cualquier procedimiento para determinar una solución factible, que asigne un valor positivo a una variable y satisfaga una condición de fila o de columna en cada paso, llegará automaticamente a una solución básica factible.

COLUMNA MINIMA

Teniendo un arreglo de m filas y n columnas, comenzamos con la columna 1, escogiendo el costo mínimo en esta columna. Supongamos que éso ocurre en la fila r. Entonces hacemos X_{r1} = mín. (a_r , b_1), si X_{r1} = b_1 , eliminamos la columna (se puede hacer poniendo una X o cualquier seña encabezando la columna, para recordarnos que ya no debemos considerar esa columna) y nos movemos hacia la columna 2. Si, de otra manera, X_{r1} = a_r , eliminamos la fila r y escogemos el siguiente costo más bajo en la columna 1, que supondremos ocurre en la fila s. Hacemos X_{s1} = mín. (a_s , $b_1 - a_r$) y continuamos de esta manera hasta que el requerimiento en el primer destino sea satisfecho. Si el costo mínimo no es único, se selecciona cualquiera de los mínimos. Cuando el requerimiento de la columna 1 sea satisfecho, se elimina dicha columna y se repite todo el proceso para la columna 2 y así sucesivamente, hasta satisfacer el requerimiento de la columna n. En el caso de que una fila y una columna, digamos columna k, sean satisfechos simultáneamente, se elimina sólo la fila y pasamos a la celda en la columna k que tenga el siguiente costo más bajo, asignándole un valor cero y asumiendo que dicha celda está en la solución básica. Se elimina la columna k y se pasa a la columna k+1. Esto nos llevará a una solución básica factible degenerada.

EJEMPLO. Supongamos que tenemos una tabla como muestra el cuadro 1-3. En cada celda está inserta otra cantidad que indica el costo respectivo:

2	1	3	3	2	5	50
3	2	2	4	3	4	40
3	5	4	2	4	1	60
4	2	2	1	2	2	31
30	50	20	40	30	11	

Cuadro 1-3

Siguiendo el procedimiento anterior llegaríamos a una solución inicial básica como la que indica el cuadro 1-4, que es mucho más cercana a la óptima que la que podríamos obtener por medio del método de la esquina noroeste.

2 30	1 20	3	3	2	5	50
3	2 30	2 10	4	3	4	40
3	5	4	2 19	4 30	1 11	60
4	2	2 10	1 21	2	2	31
30	50	20	40	30	11	

Cuadro 1-4

FILA MINIMA

Empezando con la fila 1, escogemos el costo mínimo en esta fila. Supongamos que ocurre en la columna r. Hacemos X_{1r} = mín. (a_1 , b_r); si X_{1r} = a_1 eliminamos la fila 1 y nos movemos a la fila 2. Pero, si X_{1r} = b_r, eliminamos la columna r y determinamos el siguiente costo más bajo en la fila 1, que vamos a suponer es en la columna s, por lo que hacemos X_{s1} = mín. ($a_1 - b_r$, b_s) y continuamos en la misma forma hasta obtener que la fila 1 sea satisfecha. Cuando ésto suceda, eliminamos la fila y repetimos todo el procedimiento hasta llegar a la fila m. En caso de que haya varios costos mínimos se hará lo mismo que en el método anterior y si se satisfacen simultáneamente una fila y una columna, se eliminará la columna, buscando el siguiente costo más bajo en la fila y asignando a la celda correspondiente un valor cero; después se elimina la fila y se pasa a la siguiente.

EJEMPLO En el cuadro 1-5 se ilustra el caso anterior. El tablero corresponde al mismo problema del 1-3, pero aquí aparece una solución degenerada y hay que hacer uso de una variable cero.

2 0	1 50	3	3	2	5	50
3 20	2	2 20	4	3	4	40
3 9	5	4	2 40	4	1 11	60
4 1	2	2	1	2 30	2	31
30	50	20	40	30	11	

Cuadro 1-5

MATRIZ MINIMA

Determínese el mínimo costo de toda la tabla. Supongamos que es el de la celda (i, j). Hagamos X_{ij} = mín. (a_i , b_j) y eliminemos la fila i o la columna j, dependiendo de cuál ha sido satisfecha. Si $X_{ij} = a_i$, sustráigase a_i a b_j y si $X_{ij} = b_j$, disminúyase a_i en b_j. Repítase el proceso para toda la tabla. Cuando el costo mínimo no es único, escójase cualquiera (a menudo se toma el número de la celda con menor índice entre los que son menores en costo). Como siempre, si se satisfacen al mismo tiempo una fila y una columna, elimínese sólo una de las dos.

EJEMPLO Aplicando este método, obtenemos la solución representada en el cuadro 1-6, tomando el mismo problema que hemos usado en los métodos anteriores. Una vez más, aparece una solución degenerada al seguir los pasos de este método.

2 0	1 50	3	3	2	5	50
3 20	2	2 20	4	3	4	40
3 10	5	4	2 9	4 30	1 11	60
4	2	2	1 31	2	2	31
30	50	20	40	30	11	

Cuadro 1-6

METODO DE VOGEL

Esta técnica ha sido sugerida por Vogel, de áhí su nombre: Para cada fila, se encuentra el menor costo C_{ij} y el siguiente menor costo C_{it}. Se calcula $C_{it} - C_{ij}$ de manera que m números son obtenidos; se procede de la misma forma para cada columna y se obtienen n números - más. Se escoge el mayor de esos m+n números, que vamos a suponer está asociado con la diferencia en la columna j. Entonces, si la celda (i, j) contiene el mínimo costo en la columna j, X_{ij} será igual al mínimo entre a_i y b_j. Se elimina la columna o la fila, dependiendo de cuál requerimiento ha sido satisfecho y se repite todo el proceso para el resto de la tabla. Lo mismo que en el método anterior debe hacerse cuando no hay una sola diferencia máxima o cuando se satisfacen simultáneamente una fila y una columna.

Es conveniente, siempre que se use este método, poner en lista las diferencias de fila en una columna a la derecha de la tabla y las diferencias de columna en una fila en la parte inferior de la tabla. Las diferencias mostradas en la fila y en la columna adicionales, del ejemplo siguiente en el cuadro 1-7, son las que se obtienen en el primer paso, o sea aquellas que servirán para seleccionar la primera celda básica; pero, es de suponerse que cada vez que sea escogida una celda básica, se hará un nuevo análisis de diferencias. En este ejemplo tenemos el caso más particular que se puede presentar: todas las diferencias tienen el mismo valor, pero ésto es resuelto escogiendo la celda con el valor más pequeño de i+j.

2 30	1 20	3	3	2	5	50	1
3	2 30	2 10	4	3	4	40	1
3	5	4	2 40	4 9	1 11	60	1
4	2	2 10	1	2 21	2	31	1
30	50	20	40	30	11		
1	1	1	1	1	1		

Cuadro 1-7

Muchas otras técnicas para determinar una solución inicial han sido discutidas. Sin embargo, las presentadas anteriormente son las más comunmente usadas tanto para cálculos manuales como por medio de computadoras. No se puede decir que esté establecido cuál de los métodos es mejor. Para decidir cuál de todos lleva el menor número de iteraciones en la determinación de la solución inicial básica factible, habría necesidad de resolver el problema por medio de todos los métodos, lo cual obviamente no es práctico en ningún caso.

CAPITULO II

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Para el procedimiento de resolución del problema del transporte, seguiremos a Dantzig, quien dice que para cualquier solución básica factible, pueden ser encontrados unos números u_i y v_j, tales que para las X_{ij} en la solución básica, tendremos $u_i + v_j = C_{ij}$ y que si $u_i + v_j = Z_{ij}$ para aquellas variables que no están en la solución básica, cuando todas las diferencias $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$, la solución básica factible que se obtenga, es también una solución mínima. Si esta condición de optimización no se satisface, entonces podemos rápidamente obtener una nueva solución básica factible cuyo valor correspondiente a la función objetivo es menor que el anterior.

Para explicar más claramente el procedimiento de resolución, lo haremos con un ejemplo numérico en que tendremos 3 orígenes con disponibilidades de 6, 8 y 10 unidades y cuatro destinos con requerimientos de 4, 6, 8 y 6 unidades, es decir que la suma de disponibilidades es igual a la suma de requerimientos, pues ambos totalizan 24. Los costos ocasionados por el envío de cada origen a cada destino están dados por la siguiente matriz de costos:

$$C_{ij} = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & a_1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

Según ésto, si quisiéramos enviar una unidad del orígen a_3 al destino b_2, nos costaría $C_{32} = 2$. En general, C_{ij} puede ser cualquier valor.

Vamos a emplear la regla de la esquina noroeste para obtener la primera solución factible:

4	2			6
	4	4		8
		4	6	10
4	6	8	6	

Tal como quedó la primera solución, fueron asignados valores a las variables X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{23}, X_{33}, X_{34} ya que fueron cayendo en la secuencia seguida por la regla de la esquina noroeste; las demás variables quedaron con valor cero. Seguidamente, calculamos el valor de la función objetivo, o sea la función que nos dará el costo en cada solución y que tratamos de minimizar:

$$f = \sum_i \sum_j C_{ij} \cdot X_{ij}$$

en la cual, se tomarán las X_{ij} que sean de la solución y las C_{ij} correspondientes. En este caso, la función valdrá:

$$f = 1x4+2x2+3x4+2x4+2x4+1x6 = 42$$

A continuación, determinamos para aquellas variables en la solución básica, m números u_i y n números v_j tales que:

$$u_1 + v_1 = C_{11} = 1$$

$$u_1 + v_2 = C_{12} = 2$$

$$u_2 + v_2 = C_{22} = 3$$

$$u_2 + v_3 = C_{23} = 2$$

$$u_3 + v_3 = C_{33} = 2$$

$$u_3 + v_4 = C_{34} = 1$$

Como vemos, el sistema anterior tiene siete variables en seis ecuaciones y siendo un conjunto de ecuaciones lineales en el que el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, tiene entonces un número infinito de soluciones. Determinamos una solución arbitrariamente, haciendo cualquiera de las variables igual a su correspondiente C_{ij}. Esto reduce el número de incógnitas a seis y obliga a una solución única para las m+n-1 restantes variables en las m+n-1 ecuaciones. Para el ejemplo que nos ocupa, hagamos $u_1 = 1$, de manera que ya es cosa simple resolver el sistema, cuyas soluciones serían en ese caso : $u_1 = 1$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $u_2 = 2$, $v_3 = 0$, $u_3 = 2$, $v_4 = -1$.

Lo anterior se puede hacer rápida y claramente por medio de la siguiente tabla, conteniendo los coeficientes de los costos de las variables en la solución básica: y los valores de u_i y v_j :

u \ v	0	1	0	-1
1	1	2		
2		3	2	
2			2	1

Como todas las ecuaciones del sistema son satisfechas, tenemos que $u_i + v_j = C_{ij}$ para toda X_{ij} en la solución básica factible. Calculamos después $Z_{ij} = u_i + v_j$ para todas las combinaciones (i, j) y colocamos estos números en sus correspondientes celdas de la tabla de costos indirectos ($Z_{ij} = C_{ij}$ para toda X_{ij} que esté en la solución). La tabla de costos indirectos (Z_{ij}) para la primera solución es como sigue:

$$Z_{ij} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Una forma más resumida de representar todo el problema es por medio de la tabla MODI (MOdified DIstribution), que es una tabla como las que hemos usado anteriormente (Cuadro 1-4 y otras), es decir, insertado en cada celda los costos correspondientes y agregando una fila y una columna para los valores de u_i y v_j. Esta tabla quedará así:

$u_i \backslash v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	c_{13} $z_{13}-c_{13}$	c_{14} $z_{14}-c_{14}$	a_1
u_2	c_{21} $z_{21}-c_{21}$	c_{22} X_{22}	c_{23} X_{23}	c_{24} $z_{24}-c_{24}$	a_2
u_3	c_{31} $z_{31}-c_{31}$	c_{32} $z_{32}-c_{32}$	c_{33} X_{33}	c_{34} X_{34}	a_3
	b_1	b_2	b_3	b_4	

Cuadro 2-1

Nótese que en las celdas básicas aparecen las variables y los costos C_{ij} , pero no los costos Z_{ij}, pues éstos son iguales en estas celdas, a los antes mencionados; mientras que en las demás celdas aparecen nada más ambos costos, es decir, C_{ij} y la diferencia $Z_{ij} - C_{ij}$.

Habiendo calculado las diferencias de costos, hacemos el siguiente análisis: si todas son negativas, entonces la solución que se obtuvo es la solución mínima factible (óptima). Si al menos una diferencia es positiva, entonces no hemos llegado a una solución óptima y tenemos que obtener una nueva solución básica factible que contenga una variable asociada con la diferencia positiva. En caso de que haya varias diferencias positivas, escogeremos la variable que corresponda a la mayor de esas diferencias. La nueva solución básica factible nos dará un valor para la función objetivo que será menor que el de la solución anterior (en el caso de que la solución anterior haya sido degenerada, nos dará una nueva solución con una función de igual valor a la que le precedió).

En el ejemplo presente, encontramos que la mayor diferencia positiva es la que corresponde a $Z_{31}-C_{31}=2-0=2$, por lo que seleccionaremos X_{31} para introducirla en la nueva solución (en caso de haber varias diferencias iguales, tomamos la que tenga menor costo). Al introducir X_{31} en la matríz, lo hacemos con un valor positivo, por el momento desconocido (θ_1) y seguimos el procedimiento que describimos al hablar de la obtención de una nueva solución a partir de la primera, es decir, para satisfacer los totales de fila y columna, tenemos que sustraer o agregar θ_1 en otras celdas tal como sigue:

$4-\theta_1$	$2+\theta_1$		
	$4-\theta_1$	$4+\theta_1$	
θ_1		$4-\theta_1$	6

Es decir, si se agregó un valor positivo en la celda (3, 1), debemos sustraer ese mismo valor de las celdas(1, 1), (2, 2) y (3, 3) y sumarlo a (1, 2) y (2, 3)

El valor de θ está restringido por la variable X_{ij} de la cual está siendo sustraído, ya que no puede ser mayor que dicha variable, pues daría un resultado negativo que como dijimos desde el principio, no tiene sentido; entonces θ_1 debe ser menor o igual que 4 y mayor que cero. Como queremos eliminar una de las variables de la solución e introducir X_{31}, hacemos $\theta_1 = 4$, pero nos encontramos con que se eliminan entonces tres variables y obtenemos una solución degenerada de cuatro variables positivas. Para mantener una solución con exactamente m+n-1 variables positivas, retendremos dos de éstas tres variables con valores nulos, siendo conveniente seleccionar X_{11} y X_{33} porque corresponde n a los costos menores:

$X_{ij} =$

0	6			6
		8		8
4		0	6	10
4	6	8	6	

La función objetivo para esta solución, valdrá:

$$f_2 = 1x0+2x6+0x4+2x8+2x0+1x6 = 34$$

que es menor que la anterior ($f_1 = 42$).

Construimos una nueva tabla de Z_{ij} que corresponde a la nueva solución y que queda así:

$Z_{ij} =$

u_i \ v_j	0	1	2	1
1	1	2	3	2
0	0	1	2	1
0	0	1	2	1

Observamos que ahora la diferencia $Z_{ij} - C_{ij}$ positiva mayor, es la que corresponde a $Z_{24} - C_{24} = 1-0 = 1$. Introducimos, entonces, θ_2 en la celda (2,4) y hacemos las sustracciones y adiciones pertinentes:

0	6			6
		$8 - \theta$		8
4		$0 + \theta$	$6 - \theta$	10
4	6	8	6	

θ_2 tendrá que ser igual al menor valor de las variables de las que está siendo sustraído, o sea $\theta_2 =$ mín. (6, 8) = 6, por lo cual, queda eliminado X_{34} y en cambio aparece $X_{24} = 6$:

0	6		
		2	6
4		6	

$$f_3 = 1\times0+2\times6+0\times4+2\times2+2\times6+0\times6 = 28$$

Si comparamos con los valores anteriores, vemos que esta función ha ido disminuyendo, lo que nos indica que vamos en camino de optimizar la función objetivo.

Una vez más, construímos la tabla de costos Z_{ij}:

u_i \ v_j	0	1	2	0
1	1	2	3	1
0	0	1	2	0
0	0	1	2	0

Obtenemos las diferencias $Z_{ij} - C_{ij}$ y encontramos que todas son negativas o nulas, por lo que la última solución obtenida es la óptima, siendo una solución mínima factible degenerada por contener una variable con valor cero y quedando entonces como variables de la solución:

$$X_{11}=0,\ X_{12}=6,\ X_{23}=2,\ X_{24}=6,\ X_{31}=4,\ X_{33}=6$$

Resumiendo, podríamos decir que para minimizar el problema del transporte, los pasos a seguir son los siguientes:

1.- Empezando con alguna solución inicial básica factible, que puede ser obtenida por cualquiera de los métodos descritos anteriormente, se calcula la matríz $Z_{ij} - C_{ij}$. Si todas las diferencias son negativas, la solución es óptima. Si una o más $Z_{ij} - C_{ij}$ son positivas, es posible encontrar una mejor solución.

2.- De todas las diferencias positivas, determínese la mayor en la matríz solución y trácese el "camino +, -" empezando en la celda de la variable que corresponda a esa diferencia. Hágase θ igual a la menor variable entre las que estén siendo sustraídas por ese valor, o sea las celdas que contengan $X_{ij} - \theta$

3.- Inclúyase θ en la solución, de acuerdo al camino trazado, formando así una nueva solución.

4.- Repítanse en forma cíclica los pasos 1, 2, 3 hasta que una de las soluciones sea la óptima.

5.- Si en la matríz $Z_{ij} - C_{ij}$ final, hay un costo con valor cero para una variable que no esté en la solución corriente, el problema tiene otra alternativa en la solución óptima, es decir, que esa variable puede ser incluída en la solución sin cambiar el costo total de la misma.

PROBLEMAS EN QUE LA SUMA DE DISPONIBILIDADES ES DIFERENTE A LA SUMA DE REQUERIMIENTOS

Como hicimos mención al principio, hay veces que algunos problemas tienen la particularidad de que el total de disponibilidades es menor que el total de requerimientos o viceversa y podemos decir con más apego a la realidad, que es lo que sucede casi siempre. En estos casos, aunque no podemos satisfacer completamente la demanda, podemos asignar los artículos u objetos de que se trate, de cada orígen a cada destino, de manera que el costo total de envío sea mínimo. Para éso, asumimos que tenemos un "orígen ficticio" que dispone de un total de $\sum_j b_j - \sum_i a_i > 0$ unidades, o sea, las que hacen falta para balancear el total de filas con el de columnas. Los costos de enviar una unidad entre este orígen ficticio de orden m+l y los destinos, se asume que son cero. Si el problema original fuera de 3 x 4, quedaría convertido en uno de 4 x 4 y se resolvería como cualquier otro problema de transporte. Una ilustración de este caso, se presenta en el siguiente cuadro:

Destinos

		1	2	3	4	
	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	a_2
Orígenes	3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	a_3
	4	0	0	0	0	$\sum_i b_i - \sum_i a_i$
		b_1	b_2	b_3	b_4	

Puede suceder también el caso contrario, es decir, que el total de requerimientos sea menor que el de disponibilidades, en cuyo caso, tendremos que incluir un "destino ficticio" que requiere $\sum_i a_i - \sum_j b_j > 0$ unidades, con costos de envío igual a cero. Un problema de 3 x 4 se transformará en uno de 3 x 5, como se ilustra en el siguiente cuadro:

Destinos

		1	2	3	4	5	
	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	0	a_1
Orígenes	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	0	a_2
	3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	0	a_3
		b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum_i a_i - \sum_i b_i$	

UNA VARIANTE DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Problema de la asignación de personal.

Este problema representa un caso particular del problema del transporte, pues aquí los valores de las variables X_{ij} buscadas para una solución óptima, están restringidos a ser cero o uno, debido a que el objetivo es asignar a cada "destino" un solo elemento de algún "origen". Esto sucede cuando se desea asignar un trabajador a un empleo, una máquina a un trabajo específico, etc. La matriz de costos puede representar realmente costos, en cuyo caso se tratará de minimizar, o bien puede tratarse de ganancias o calificaciones que representen el provecho o utilidad que se obtiene de cada asignación, por lo que el problema será hacer máxima la función objetivo.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, un valor cero para X_{ij} quiere decir que el elemento i no toma el puesto j, mientras que un valor de uno significa lo contrario. Como a cada elemento i no puede ser asignado más de un puesto o lugar j y al mismo tiempo cada puesto j requiere sólo un elemento i, el valor total de asignación para el elemento i ($\sum_j X_{ij}$) debe ser igual a 1 y el valor total de las asignaciones a cada puesto j ($\sum_i X_{ij}$) también sumará 1. Si hacemos que el valor que represente para una compañía cada trabajador en cada trabajo sea C_{ij}, entonces el problema tiene la siguiente interpretación de programación lineal:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad i = i, 2, 3, \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \ldots n$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} = \text{máx. o mín.}$$

Observamos que si se quiere maximizar la función, se puede trabajar con los valores negativos y buscar el mínimo (el más negativo que en valor absoluto es el más grande) y llegamos a la solución deseada.

Frecuentemente, hay trabajos idénticos que demandan las mismas calificaciones básicas. Tales trabajos pueden ser combinados dentro de una misma categoría. Asumimos que hay n categorías y hacemos que b_j sea el número de tales trabajos agrupados en la categoría j. Si diferentes individuos tienen idénticos o aproximados valores C_{ij}, estos individuos pueden ser agrupados en categorías de personal. Suponemos que hay m de esas categorías y hacemos que a_i sea el número de hombres en la categoría i de personal.

Hay otras variaciones del problema del transporte, pero la anterior es talvez la de más importancia, que podría ocupar un capítulo aparte. Entre esas otras variantes están el problema de la dieta, el, problema del abastecedor o proveedor, etc.

CAPITULO III

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PROBLEMA 1.

Una cierta compañía impresora tiene 8 órdenes para hojas de anuncios de página sencilla, todas de las mismas dimensiones. Las cantidades de cada orden son 10,000, 15,000, 18,000, 4,000, 40,000, 16,000, 17,000 y 35,000. Las tres prensas que hay disponibles pueden producir 60,000, 80,000 y 70,000 hojas por día, respectivamente. Los costos por mil, de hacer las órdenes en las diferentes prensas están dados por:

Órdenes

Prensas	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.42	2.80	3.20	2.70	3.21	2.44	2.61	2.07
2	2.20	2.72	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	2.49
3	2.31	2.41	3.10	2.63	3.09	2.63	3.04	2.67

¿Cuál será la asignación óptima de las órdenes a las prensas?

Antes de entrar a resolver el problema, observamos que la suma de lo ordenado, es menor que la capacidad total de las tres prensas, por lo que tendremos que incluir una columna ficticia con una orden de 55,000 que es la diferencia entre los totales de fila y de columna. Hecho esto, podemos encontrar la primera solución básica factible.

Solución:

Usaremos el método de Vogel, que en la mayoría de los casos nos acerca más a la solución óptima que otros métodos. Determinamos primero, las diferencias entre los dos menores costos en cada fila y columna, y después tomamos la mayor de todas:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
1	2.42	2.80	3.20	2.70	3.21	2.44	2.61	2.07	0.	2.07
2	2.20	2.72	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	2.49	0	2.20
3	2.31	2.41	3.10	2.63	3.09	2.63	3.04	2.67	0	2.31
Dif.	0.11	0.31	0.10	0.22	0.12	0.19	0.13	0.42	0	

Como la mayor diferencia aparece en la fila 3, buscamos el menor costo en esa fila y asignamos en la celda correspondiente el menor valor entre el elemento i y el j:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1										60
2										80
3									55	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

Nótese que como los costos no son unitarios sino por millar, hemos puesto todas las cantidades en unidades y decenas, según el caso.

Cada vez que una fila es satisfecha, se vuelven a calcular las diferencias de columna y si la columna es satisfecha se obtienen nuevas diferencias de fila. Las diferencias son comúnmente llamadas "penalidades". En nuestro problema, tendremos que calcular las penalidades de fila nuevamente. Hacemos la observación, de que por simplicidad y razones de espacio, iremos eliminando cada fila o columna a medida que ésa vaya siendo satisfecha:

	1	2	3	4	5	6	7	8	Dif.
1	2.42	2.80	3.20	2.70	3.21	2.44	2.61	2.07	0.35
2	2.20	2.72	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	2.49	0.21
3	2.31	2.41	3.10	2.63	3.09	2.63	3.04	2.67	0.10
Dif.	0.11	0.31	0.10	0.22	0.12	0.19	0.13	0.42	

Ahora la mayor penalidad es 0.42 y el menor costo corresponde a la celda (1,8) a la que asignamos el valor de la columna 8 por ser menor que el de la fila 1:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1								35	60
2									80
3									15
	10	15	18	4	40	16	17	35	

Como se satisfizo la columna 8, se elimina ésta y se recalculan las penalidades de fila. Los pasos siguientes son repetición de los anteriores, por lo que reducimos la explicación al mínimo.

	1	2	3	4	5	6	7	Dif.
1	2.42	2.80	3.20	2.70	3.21	2.44	2.61	0.02
2	2.20	2.72	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	0.21
3	2.31	2.41	3.10	2.63	3.09	2.63	3.04	0.10
Dif.	0.11	0.31	0.10	0.22	0.12	0.19	0.13	

	1	2	3	4	5	6	7	
1								25
2								80
3	0	15						15
	10	15	18	4	40	16	17	

Nótese que como en el cuadro anterior se satisfacen simultáneamente una fila y una columna, hemos puesto el valor 15 y además una variable cero en la celda de menor costo en la fila 3, con el objeto de tener las m + n - 1 variables.

	1	3	4	5	6	7	Dif.
1	2.42	3.20	2.70	3.21	2.44	2.61	0.02
2	2.20	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	0.21
Dif.	0.22	0.15	0.29	0.55	0.28	0.13	

→

	1	3	4	5	6	7	
1				25			25
2							80
	10	18	4	40	16	17	

	1	3	4	5	6	7	Dif.
2	2.20	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	0.21
Dif.	2.20	3.35	2.41	3.76	2.72	2.74	

	1	3	4	5	6	7	
2				15			80
	10	18	4	15	16	17	

	1	3	4	6	7	Dif.
2	2.20	3.35	2.41	2.72	2.74	0.21
Dif.	2.20	3.35	2.41	2.72	2.74	

	1	3	4	6	7	
2		18				65
	10	18	4	16	17	

	1	4	6	7	Dif.
2	2.20	2.41	2.72	2.74	0.21
Dif.	2.20	2.41	2.72	2.74	

$\rightarrow$

	1	4	6	7	
2				17	47
	10	4	16	17	

	1	4	6	Dif.
2	2.20	2.41	2.72	0.21
Dif.	2.20	2.41	2.72	

	1	4	6	
2			16	30
	10	4	16	

	1	4	Dif.
2	2.20	2.41	0.21
Dif.	2.20	2.41	

	1	4	
2		4	14
	10	4	

	1	Dif.
2	2.20	2.20
Dif.	2.20	

	1	
2	10	10
	10	

1a. Solución básica factible (degenerada):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					25			35		60
2	10		18	4	15	16	17			80
3	0	15							55	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

Valor de la función objetivo:

f_1 = 10x2.20+15x2.41+18x3.35+4x2.41+25x3.21+15x3.76+16x2.72+17x2.74+35.2.07+55x0=

f_1 = 22+36.15+60.30+9.64+80.25+56.40+43.52+46.58+72.45+0 = 427.29

A continuación habrá que buscar una nueva solución que sea mejor que la anterior. El método de Vogel nos sirvió para acercarnos más a la solución óptima, ahora seguiremos las indicaciones de Dantzig, según vimos en el capítulo anterior.

Construimos la tabla MODI con los marginales u_i y v_j (hacemos $u_2=2.2$), poniendo los costos C_{ij} correspondientes a las variables que están en la solución y obteniendo los costos Z_{ij} de las demás variables ($Z_{ij}=u_i+v_j$)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$u \backslash v$	0	0.10	1.15	0.21	1.56	0.52	0.54	0.42	-2.31
1	1.65	2.42 -0.77	2.80 -1.05	3.20 -0.40	2.70 -0.84	3.21 25	2.44 -0.27	2.61 -0.42	2.07 35	0 -0.66
2	2.20	2.20 10	2.72 -0.42	3.35 18	2.41 4	3.76 15	2.72 16	2.74 17	2.49 0.13	0 -0.11
3	2.31	2.31 0	2.41 15	3.10 0.36	2.63 -0.11	3.09 0.78	2.63 0.20	3.04 -0.19	2.67 0.06	0 55

La mayor diferencia $Z_{ij} - C_{ij}$ (números que están en la esquina inferior derecha de cada cuadro) entre las positivas, es 78 que corresponde a la celda (3,5), por lo cual, si incluimos en esa celda una variable θ, la solución será mejor. Partimos de dicha celda y seguimos el camino "+, –" :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					25			35		60
2	$10+\theta$		18	4	$15-\theta$	16	17			80
3	$0-\theta$	15			θ				55	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$$\theta = \text{mín.}\ (0, 15) = 0$$

En este caso, lo único que podemos hacer, porque no hay otro lugar donde incluir θ, es cambiar de posición la variable cero, pero la función objetivo no cambiará de valor; sin embargo, nos dará una nueva solución a partir de la cual podremos encontrar una mejor:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					25			35		60
2	10		18	4	15	16	17			80
3		15			0				55	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

A partir de la función anterior podemos calcular la nueva de la siguiente manera, con lo que se reducen los cálculos:

$$f_2 = f_1 - \left[\text{máx.}\ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0\right] \cancel{\theta} = 427.29 - 0.78 \times 0 = 427.29$$

A continuación un nuevo cálculo de Z_{ij} para encontrar una nueva solución:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	u \ v	0	0.88	1.15	0.21	1.56	0.52	0.54	0.42	-1.53
1	1.65	2.42 -0.77	2.80 -0.27	3.20 -0.40	2.70 -0.84	3.21 25	2.44 -0.27	2.61 -0.42	2.07 35	0 0.12
2	2.20	2.20 10	2.75 3.08	3.35 18	2.41 4	3.76 15	2.72 16	2.74 17	2.49 0.13	0 0.67
3	1.53	2.31 -0.78	2.41 15	3.10 -0.42	2.63 -0.89	3.09 0	2.63 -0.58	3.04 -0.97	2.67 -0.72	0 55

$$\text{Máx.}\ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0 = 0.67 \rightarrow \text{celda } (2,9)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					25			35		60
2	10		18	4	$15-\theta$	16	17		θ	80
3		15			$0+\theta$				$55-\theta$	70

$$\theta = \text{mín.}\ (15, 55) = 15$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					25			35		60
2	10		18	4		16	17		15	80
3		15			15				40	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

La solución degenerada ha desaparecido y tenemos nuevamente m+n-1 variables reales (cero no es solución en este problema). El valor de la función es:

$$f_3 = f_2 - \left[\text{máx.}\ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0\right]\theta = 427.29 - 0.67 \times 15 = 427.29 - 10.05 = 417.24$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u \backslash v$	0	0.21	1.15	0.21	0.89	0.52	0.54	-0.25	-2.20
1 2.32	2.42 -0.10	2.80 -0.27	3.20 0.27	2.70 -0.17	3.21 25	2.44 0.40	2.61 0.25	2.07 35	0 0.12
2 2.20	2.20 10	2.72 -0.31	3.35 18	2.41 4	3.76 -0.67	2.72 16	2.74 17	2.49 -0.54	0 15
3 2.20	2.31 -0.11	2.41 15	3.10 0.25	2.63 -0.22	3.09 15	2.63 0.09	3.04 -0.30	2.67 -0.72	0 40

Máx. $(z_{ij} - c_{ij}) > 0 = 0.40 \rightarrow$ celda (1,6)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					$25-\theta$	θ		35		60
2	10		18	4		$16-\theta$	17		$15-\theta$	80
3		15			$15-\theta$				$40-\theta$	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$\theta = \min.(25, 16, 40) = 16$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1					9	16		35		60
2	10		18	4			17		31	80
3		15			31				24	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$$f_4 = 417.24 - \left[\text{máx.}\ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0\right]\theta = 417.24 - 0.40 \times 16 = 410.84$$

	u \ v	1 0	2 0.21	3 1.15	4 0.21	5 0.89	6 0.12	7 0.54	8 -0.25	9 -2.20
1	2.32	2.42 -0.10	2.80 -0.27	3.20 0.27	2.70 -0.17	3.21 9	2.44 16	2.61 0.25	2.07 35	0 0.12
2	2.20	2.20 10	2.72 -0.31	3.35 18	2.41 4	3.76 -0.67	2.72 -0.40	2.74 17	2.49 -0.54	0 31
3	2.20	2.31 -0.11	2.41 15	3.10 0.25	2.63 -0.22	3.09 31	2.63 -0.31	3.04 -0.30	2.67 -0.72	0 24

Máx. $(Z_{ij} - C_{ij}) > 0 = 0.27 \rightarrow$ celda (1,3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			θ		$9-\theta$	16		35		60
2	10		$18-\theta$	4			17		$31+\theta$	80
3		15			$31+\theta$				$24-\theta$	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$$\theta = \min.(18, 24, 9) = 9$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		9			16		35		60
10		9	4			17		40	80
	15			40				15	70
10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$f_5 = 410.84 - \text{máx.}\,(Z_{ij} - C_{ij}) \quad 0 \quad \theta = 410.84 - 0.27 \times 9 = 408.41$

	u \ v	1: 0	2: 0.21	3: 1.15	4: 0.21	5: 0.89	6: 0.39	7: 0.54	8: 0.02	9: -2.20
1	2.05	2.42 / -0.37	2.80 / -0.54	3.20 / 9	2.70 / -0.44	3.21 / -0.27	2.44 / 16	2.61 / -0.02	2.07 / 35	0 / -0.15
2	2.20	2.20 / 10	2.72 / -0.31	3.35 / 9	2.41 / 4	3.76 / -0.67	2.72 / -0.13	2.74 / 17	2.49 / -0.27	0 / 40
3	2.20	2.31 / -0.11	2.41 / 15	3.10 / 0.25	2.63 / -0.22	3.09 / 40	2.63 / -0.04	3.04 / -0.30	2.67 / -0.45	0 / 15

Máx. $(Z_{ij} - C_{ij}) > 0 = 0.25 \rightarrow$ celda (3,3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			9			16		35		60
2	10		$9-\theta$	4			17		$40+\theta$	80
3		15	θ		40				$15-\theta$	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$\theta = \text{mín.}\,(9, 15) = 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			9			16		35		60
2	10			4			17		49	80
3		15	9		40				6	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$f_6 = 408.41 - \text{máx.}\,(Z_{ij} - C_{ij})\ \ 0\ \ \cancel{\theta} = 408.41 - 0.25 \times 9 = 406.16$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	u \ v	0	0.21	0.90	0.21	0.89	0.14	0.54	-0.23	-2.20
1	2.30	2.42 -0.12	2.80 -0.29	3.20 9	2.70 -0.19	3.21 -0.02	2.44 16	2.61 -0.23	2.07 35	0 0.10
2	2.20	2.20 10	2.72 -0.31	3.35 -0.25	2.41 4	3.76 -0.67	2.72 -0.38	2.74 17	2.49 -0.52	0 49
3	2.20	2.31 -0.11	2.41 15	3.10 9	2.63 -0.22	3.09 40	2.63 -0.29	3.04 -0.30	2.67 -0.70	6

$\text{Máx.}\,(z_{ij} - c_{ij}) > 0 = 0.23 \rightarrow$ celda (1,7)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			$9-\theta$			16	θ	35		60
2	10			4			$17-\theta$		$49+\theta$	80
3		15	$9+\theta$		40				$6-\theta$	70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$$\theta = min.\ (9, 6, 17) = 6$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1			3			16	6	35		60
2	10			4			11		55	80
3		15	15		40					70
	10	15	18	4	40	16	17	35	55	

$f_7 = 406.16 - 0.23 \times 6 = 404.78$

$u \backslash v$	0	0.44	1.13	0.21	1.12	0.37	0.54	0	-2.20
2.07	2.42 -0.35	2.80 -0.29	3.20 3	2.70 -0.42	3.21 -0.02	2.44 16	2.61 6	2.07 35	0 -0.13
2.20	2.20 10	2.72 -0.08	3.35 -0.02	2.41 4	3.76 -0.44	2.72 -0.15	2.74 11	2.49 -0.29	0 55
1.97	2.31 -0.34	2.41 15	3.10 15	2.63 -0.45	3.09 40	2.63 -0.29	3.04 -0.53	2.67 -0.70	0 -0.23

No hay $(Z_{ij} - C_{ij}) > 0$ $\therefore$ la solución es óptima.

La solución final será tal como quedó en el último tablero, excluyendo la columna 9 que sólo sirvió para poder resolver el problema.

Este problema como se ha observado, resulta bastante largo a pesar de haberlo resuelto al principio por Vogel (si se prueba por la esquina noroeste, se verá que la primera solución es más lejana a la óptima que la que se obtuvo aquí), sin embargo, no siempre resulta así, sino que dependerá de cada problema en particular y aún en los casos como éste, no tiene ninguna dificultad, ya que es un trabajo mecánico repetitivo.

PROBLEMA 2

Una empresa necesita señoritas para trabajos de mecanografía en cierto día, según se indica en la tabla siguiente:

Trabajo	Tiempo requerido en horas
1	15
2	22
3	12

Se presentan siete muchachas que disponen de: ocho horas las primeras cuatro y seis horas las tres restantes.

Las muchachas no son muy diferentes en habilidad y todas reciben el mismo pago. El gerente de la empresa sabe que es muy importante el factor de cómo se llevarán las trabajadoras con sus patronos temporales, así que tabula el grado de buenas relaciones que hay entre unos y otros, asignando un máximo de 10 para una armonía perfecta y un mínimo de cero para lo contrario. La tabla que se presenta a continuación indica tales calificaciones:

MUCHACHA \ TRABAJO	1	2	3
1	10	8	7
2	6	10	10
3	9	8	10
4	7	7	9
5	5	10	8
6	10	8	10
7	5	6	10

¿Cómo se deberá hacer la asignación para hacer máxima la armonía entre las muchachas y sus patrones temporales?

SOLUCIÓN: Aunque aquí se trata de maximizar, podemos cambiar los signos y minimizar el negativo de la función objetivo, trabajando de la misma manera que lo hemos hecho anteriormente.

Empezaremos con una solución obtenida por la regla de la esquina noroeste:

	1	2	3	4	
1	8				8
2		1			8
3		8			8
4		8			8
5		5	1		6
6			6		6
7			5	1	6
	15	22	12	1	

Nótese que se ha incluido una columna ficticia que "requiere" una hora de trabajo para poder balancear la demanda y la oferta.

El valor de la función en este caso es:

$$f_1 = -8x10-7x6-1x10-8x8-8x7-5x10-1x8-6x10-5x10-1x0 =$$

$$f_1 = -80-42-10-64-56-50-8-60-50 = -420$$

Ahora construimos la tabla de "costos" (en este caso son valores que representan, más bien, ganancias):

u \ v	0	-4	-2	8
-10	-10 / 8	-8 / -6	-7 / -5	0 / -2
-6	-6 / 7	-10 / 1	-10 / 2	0 / 2
-4	-9 / 5	-8 / 8	-10 / 4	0 / 4
-3	-7 / 4	-7 / 8	-9 / 4	0 / 5
-6	-5 / -1	-10 / 5	-8 / 1	0 / 2
-8	-10 / 2	-8 / -4	-10 / 6	0 / 0
-8	-5 / -3	-6 / -6	-10 / 5	0 / 1

Máx. $(Z_{ij} - C_{ij}) > 0 = 5 \longrightarrow$ celdas (3,1) y (4,4)

Como tenemos dos celdas posibles escogemos la (3,1) porque en este caso es mejor (por ser menor) -9 que cero:

8			
7-θ	1+θ		
θ	8-θ		
	8		
	5	1	
		6	
		5	1

θ = mín. (7,8) = 7

8				8
	8			8
7	1			8
	8			8
	5	1		6
		6		6
		5	1	6
15	22	12	1	

$$f_2 = f_1 - \left[\text{máx.} \ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0\right]\theta = -420 - 5 \times 7 = -420 - 35 = -455$$

Esta nueva solución es mejor que la primera pues nos da un valor relativo (comparado con cero) menor que ésa y el valor absoluto que indica la armonía total en el trabajo, es mayor esta vez, que es lo que se busca.

u \ v	0	1	3	13
-10	-10 8	-8 -1	-7 0	0 3
-11	-6 -5	-10 8	-10 2	0 2
-9	-9 7	-8 1	-10 4	0 4
-8	-7 -1	-7 8	-9 4	0 5
-11	-5 -6	-10 5	-8 1	0 2
-13	-10 -3	-8 -4	-10 6	0 0
-13	-5 -8	-6 -6	-10 5	0 1

Máx. $(z_{ij}-c_{ij}) > 0 = 5 \rightarrow$ celda $(4,4)$

8			
	8		
7	1		
	$8-\theta$		θ
	$5+\theta$	$1-\theta$	
		6	
		$5+\theta$	$1-\theta$

$\theta = \text{mín.}(1,1,8) = 1$

8				8
	8			8
7	1			8
	7		1	8
	6	0		6
		6		6
		6		6
15	22	12	1	

Como queda una solución degenerada, nos quedamos con una variable cero en la solución, la que corresponde al menor costo, o sea la de la celda (5,3).

$$f_3 = -455 - \left[\text{máx.}\ (Z_{ij} - C_{ij}) > 0\right]\theta = -455 - 5 \times 1 = -460$$

u \ v	0	1	3	8
−10	−10 8	−8 −1	−7 0	0 −2
−11	−6 −5	−10 8	−10 2	0 −3
−9	−9 7	−8 1	−10 4	0 −1
−8	−7 −1	−7 7	−9 4	0 1
−11	−5 −6	−10 6	−8 0	0 −3
−13	−10 −3	−8 −4	−10 6	0 −5
−13	−5 −8	−6 −6	−10 6	0 −5

Máx. $(Z_{ij}-C_{ij}) > 0 = 4 \rightarrow$ celdas (3,3) y (4,3)

Escogemos la de menor C_{ij}, o sea (3,3):

8			
	8		
7	$1-\theta$	θ	
	7		1
	$6+\theta$	$0-\theta$	
		6	
		6	

$\theta = \min.(1,0) = 0$

8				8
	8			8
7	1	0		8
	7		1	8
	6			6
		6		6
		6		6
15	22	12	1	

$$f_4 = f_3 - 4 \times 0 = -460 - 0 = -460$$

u \ v	0	1	-1	8
-10	-10 **8**	-8 -1	-7 -4	0 -2
-11	-6 -5	-10 **8**	-10 -2	0 -3
-9	-9 **7**	-8 **1**	-10 **0**	0 -1
-8	-7 -1	-7 **7**	-9 0	0 **1**
-11	-5 -6	-10 **6**	-8 -4	0 -3
-9	-10 1	-8 0	-10 **6**	0 -1
-9	-5 -4	-6 -2	-10 **6**	0 -1

Máx. $(z_{ij} - c_{ij}) > 0 = 1 \rightarrow$ celda (6,1)

8			
	8		
$7-\theta$	1	$0+\theta$	
	7		1
	6		
θ		$6-\theta$	
		6	

8				8
	8			8
1	1	6		8
	7		1	8
	6			6
6				6
		6		6
15	22	12	1	

$\theta = \min.(6,7) = 6$

$$f_5 = -460 - 1 \times 6 = -460 - 6 = -466$$

u \ v	0	1	-1	8
-10	-10 / 8	-8 / -1	-7 / -4	0 / -2
-11	-6 / -5	-10 / 8	-10 / -2	0 / -3
-9	-9 / 1	-8 / 1	-10 / 6	0 / -1
-8	-7 / -1	-7 / 7	-9 / 0	0 / 1
-11	-5 / -6	-10 / 6	-8 / -4	0 / -3
-10	-10 / 6	-8 / -1	-10 / -1	0 / -2
-9	-5 / -4	-6 / -2	-10 / 6	0 / -1

No hay $(Z_{ij} - C_{ij}) > 0$ $\therefore$ solución óptima.

Nota: Al existir una o más diferencias $Z_{ij} - C_{ij}$ iguales a cero, habrá otras soluciones del mismo valor, pero con diferentes asignaciones, es decir, en el presente caso podríamos incluir una variable en la celda (4,3) tal como hemos hecho al introducir θ para encontrar una nueva solución y llegaríamos al mismo valor óptimo de la anterior.

La solución será entonces, que el máximo valor que se obtiene para la función objetivo es 466 y corresponde al tablero de la iteración No. 5, cuyas asignaciones son las óptimas (excepto la columna 4 que es ficticia).

CAPÍTULO IV

UN PROBLEMA REAL EN LA INDUSTRIA DEL PAÍS

Un problema tipo que se presenta en la industria del país, es el de la importación de materia prima para la industria textil.

Supongamos que hay una fábrica de tejidos con bodegas aquí en la capital y en la ciudad de Quezaltenango. Necesitan cada determinado tiempo, hacer pedidos de fibra sintética, así como de muchas cosas más. Vamos a ocuparnos del pedido de fibra sintética. Se puede hacer la importación de los EE.UU., de algunos países de Europa y del Japón.

Para obtener los costos de transporte del material desde su lugar de origen hasta las bodegas, tenemos que sumar el costo de transporte marítimo y el costo de transporte terrestre desde el puerto a las ciudades.

A continuación, se presentan las tarifas de las compañías de navegación, haciendo la salvedad de que aunque son reales, no son rigurosamente exactas, pues son afectadas en cada caso por diversos factores, como el hecho de que para un mismo peso varía el costo de transporte según el volumen que es variable. Aquí se presentan los costos, sólo en base al peso.

Procedencia	Destino	Precio Q/2000 lbs.
New York (EE.UU.)	Pto. Santo Tomás	55.00
* Europa	Pto. Santo Tomás	70.00
Japón	Pto. San José	43.00

* De cualquier país de Europa que vengan, es la misma tarifa, por eso no importa si es de Alemania, Italia, etc.

También hay que hacer notar que la diferencia en las tarifas se debe no sólo a las distancias, sino a que son diferentes compañías, pues unas hacen el viaje de Europa, otras del Japón, etc.

Las tarifas de transporte terrestre son las siguientes:

Procedencia	Destino	Precio Q/100 lbs.
Pto. Santo Tomás	Guatemala	0.45
Pto. San José	Guatemala	0.25
Pto. Santo Tomás	Quezaltenango	0.80
Pto. San José	Quezaltenango	0.60

Según las tarifas anteriores, los costos de transporte quedarían de la siguiente manera:

(página siguiente)

Origen	Destino	Trans. mar.	Trans. terr.	Costo total Q/1000 lbs.
EE.UU.	Guatemala	27.50	4.50	32.00
EE.UU.	Quezaltenango	27.50	8.00	35.50
Europa	Guatemala	35.00	4.50	39.50
Europa	Quezaltenango	35.00	8.00	43.00
Japón	Guatemala	21.50	2.50	24.00
Japón	Quezaltenango	21.50	6.00	27.50

Vamos a suponer que periódicamente Guatemala y Quezaltenango hacen pedidos de diez mil y 4,500 libras respectivamente. Japón, EE.UU., y Europa pueden suplir una demanda de 5,000, 7,000 y 6,000 libras respectivamente. Lo anterior queda representado en el siguiente arreglo:

	Guat.	Quez.	
Japón			5,000
EE.UU.			7,000
Europa			6,000
	10,000	4,500	

y la matriz de costos (Q/1000 lbs.):

	Guat.	Quez.
Japón	24	27.5
EE.UU.	32	35.5
Europa	39.5	43

Una vez más, observamos que hay un desbalance entre la oferta y la demanda, pues es mayor la primera. Para trabajar el problema agregamos una columna con una ciudad ficticia que demanda una cantidad de 18000-14500= 3500

Obtenemos la primera solución básica factible:

	G.	Q.	Fic.	
Japón	5			5
EE.UU.	5	2		7
Europa		2.5	3.5	6
	10	4.5	3.5	

$f_1 = 5x24+5x32+2x35.5+2.5x43+3.5x0$

$f_1 = 120+160+71+107.5 = 458.5$

La tabla MODI:

u \ v	0	3.5	-39.5
24	24 / 5	27.5	0 / -15.5
32	32 / 5	35.5 / 2	0 / -7.5
39.5	39.5 / 0	43 / 2.5	0 / 3.5

No hay $(Z_{ij}-C_{ij}) > 0$

Por las diferencias $Z_{ij} - C_{ij}$, nos damos cuenta que la primera solución que hemos encontrado es óptima. Sin embargo, hay otras alternativas que también son óptimas. Esto sucede si tomamos las diferencias $Z_{ij} - C_{ij}$ iguales a cero, como si fueran positivas e incluimos en cualquiera de las dos celdas correspondientes una variable θ cuyo valor hemos de obtener según el "camino +, −" que se tome. Es decir, las soluciones óptimas al problema serían:

1)

	G.	Q.	
Japón	5000		5000
EE.UU.	5000	2000	7000
Europa		2500	6000
	10000	4500	

2)

	G.	Q.	
Jap.	3000	2000	5000
E.U.	7000		7000
Eur.		2500	6000
	10000	4500	

3)

	G.	Q.	
Japón	500	4500	5000
EE.UU.	7000		7000
Europa	2500		6000
	10000		4500

Este problema resultó óptimo en su primera solución y además con alternativas para ese óptimo, pero esto es mera coincidencia y a pesar de que resultó muy sencillo, pues casi no hubo necesidad de hacer cálculos, no afecta en ninguna forma el objetivo del mismo, o sea, presentar la manera cómo puede plantearse un problema de transporte en nuestro medio, ya que el procedimiento de resolución fue explicado ampliamente por medio de los ejercicios desarrollados en el capítulo anterior.

CONCLUSIONES

1. El algoritmo del transporte (método de resolución puramente matemático), proporciona la gran ventaja de que puede ser enseñado a cualquier persona sin necesidad de que tenga mayores conocimientos de matemáticas, lo que simplifica la labor para el Ingeniero, pues cuenta con auxiliares para estos casos.

2. Hay veces que por el gran número de recursos o requerimientos a ambos, el problema se hace largo y tedioso, pero entonces vemos otra ventaja que brinda gracias a su forma de resolución: como consiste en una serie de repeticiones del mismo procedimiento básico (iteraciones), se presta idealmente para ser programado y llevado a una computadora que dará la solución en unos cuantos minutos.

3. El problema del transporte es una herramienta de gran utilidad para cualquier empresa en el país, por el alcance que tiene con el auxilio de sus variantes y lo será más hasta llegar a ser indispensable, a medida que las industrias vayan creciendo y aumentando en capacidad, pues decisiones que ahora pueden tomarse por una simple inspección de alternativas, tendrán que ser llevadas, algunas, a formar la estructura del problema del transporte para después, por medio de éste, obtener la solución que, económicamente sea la más favorable para la empresa.

BIBLIOGRAFÍA

Linear Programming, Robert W. Llewellyn. Holt, Rinehart and Winston.

Linear Programming, methods and aplications, Saul I. Gass. McGraw-Hill book and Company, Inc.

Linear Programming, G. Hadley. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Introduction to Linear Programming. Walter W. Garvin. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Linear Programming, Michel Simonnard. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall.

Introduction to Operations Research, C. West Churchman, Russell L. Ackoff y E. Leonard Arnoff. New York, Wiley.

Vo. Bo.:

(f) Ing. Franklin Matzdorf
Asesor.

(f) Ing. Francisco Billeb V.
Director de la Escuela
de Ingeniería Mecánica Industrial.

IMPRÍMASE:

(f) Ing. Amando Vides T.
Decano.

Se terminó de imprimir el día 19 de julio de 1969,
en El Centro de Producción de Materiales de la
Universidad de San Carlos de Guatemala.
Una tirada de 100 ejemplares.

Ciudad Universitaria, Zona 12

Guatemala, Centroamérica.

Libro No. 128 Orden No. 272

Centro de Producción de Materiales

Universidad de San Carlos de Guatemala