UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD DIFERENCIABLE Y PROYECTIVA Y FIBRADOS UNIVERSALES

TESIS

PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

POR

SAUL DUARTE BEZA

AL CONFERIRSELE EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICA APLICADA

GUATEMALA, 30 DE MARZO DE 1995

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado

LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD DIFRENCIABLE Y PROYECTIVA Y FIBRADOS UNIVERSALES

tema que me fuera aprobado por la Dirección de la Escuela de Ciencias, con fecha 31 de mayo de 1,993.

f)__________________________

Saúl Duarte Beza

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MIEMBROS DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO:	Ing. Julio Ismael González Podszueck
VOCAL 1o:	Ing. Miguel Angel Sánchez Guerra
VOCAL 2o:	Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano.
VOCAL 3o:	Ing. Juan Adolfo Echeverría Méndez.
VOCAL 4o:	Br. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada.
VOCAL 5o:	Br. Mario Nephtalí Morales Solís.

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO:	Ing. Jorge Mario Morales González.
EXAMINADOR:	Dr. Juan Francisco Escamilla Castillo.
EXAMINADOR:	Dr. Leonel Morales Aldana.
EXAMINADOR:	Lic. Angel Augusto Arévalo Aguirre.
SECRETARIO:	Ing. Edgar José Bravatti Castro.

AGRADECIMIENTO

Con todo respeto, quiero patentizar mi agradecimiento, de manera especial al

Doctor Juan Francisco Escamilla Castillo ;

ya que este trabajo fue posible gracias a su eficiente asesoría, su calidad profesional y humana, y al entusiasmo que prodigó en largas horas de trabajo paciente y agotador; además de haber puesto a mi disposición su amplia biblioteca, y su computadora personal.

Asimismo, extiendo este agradecimiento a mi compañera de estudio, Mayra Virginia Castillo Montes de Carvajal, por su ayuda en el levantado de texto del presente trabajo de tesis.

ACTO QUE DEDICO

Al Supremo Creador.

A la memoria de mis padres:

Sofía Beza Martínez de Duarte. (QED)
Víctor Manuel Duarte Lemus. (QED)

Por su lucha por la superación de la familia.

A mi esposa:

María Haydeé Duarte Jiménez de Duarte.

Por su apoyo y solidaridad.

A mis hijas:

Sofía Isabel y Ana Carolina.

Como un ejemplo para su superación académica.

A mis hermanas y hermanos:

Elsa Lilia, Irma del Carmen, Rosa Elvira,
Sofía Aracely, Leticia Maribel, María Elena,
José Benedicto, Carlos, y en forma
muy especial a Hugo Elí, José Efraín e
Hilder Abilio.

Por su apoyo incondicional.

A la Familia Duarte Jiménez:

En especial, a la memoria de don Rafael Trinidad Duarte
Garza (QED).

A mis estimados maestros y amigos:

Dr. Juan Escamilla Castillo.
Dr. Leonel Morales Aldana.
Lic. Angel Augusto Arévalo Aguirre.

Por sus valiosas enseñanzas.

A mis amigos y compañeros de estudio:

Mayra Castillo.
Jorge Mario García.

A la Licenciatura en Matemática.

A la Facultad de Ingeniería.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala.

Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Ciudad Universitqria zona 12

Guatemala, 27 de Marzo de 1995

Lic. Angel Augusto Arévalo Aguirre
Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería
USAC

Lic. Arévalo:

Por la presente le comunico que he leído el trabajo de tesis de Saul Duarte Beza, intitulado "La Grassmanniana como Variedad Diferenciable y Proyectiva y Fibrados Universales", elaborada bajo mi asesoría. Dicho trabajo emplea un gran bagage matemático, así como la lectura de trabajos de investigación de alto nivel, por lo que considero que llena y supera los requisitos de una tesis para optar al grado de Licenciado en Matemática Aplicada.

La Grassmanniana es una variedad de mucha importancia en la matemática moderna y este trabajo representa una buena introducción a su estudio, así como una sencilla introducción a la construcción de los fibrados universales y de clasificiación, los cuales han adquirido una gran importancia en la física moderna, en particular con el desarrollo de la teoría de cuerdas y la teoría de partículas elementales. Considerando que no existe literatura en español sobre dicho tema, dicha tesis podrá servir a las futuras generaciones de matemáticos y físicos, no sólo guatemaltecos sino de toda el área Centro Americana.

Atentamente

ID Y ENSEÑAD A TODOS

Dr. Juan Francisco Escamilla Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA
Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.
Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, 17 de abril de 1995

Ing. José Antonio Del Cid Pacheco
Director Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería
Presente.

Ing. Del Cid:

De manera atenta me dirijo a usted para informarle que leí el trabajo de Tesis "LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD DIFERENCIABLE Y PROYECTIVA Y FIBRADOS UNIVERSALES", elaborada por Saul Duarte Beza, con asesoría del Doctor Juan Francisco Escamilla Castillo; por lo que considero la encuentro satisfactoria llenando los requisitos necesarios para optar al grado de Licenciado en Matemática Aplicada.

Sin otro particular, me suscribo deferentemente.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

Lic. Angel A. Arévalo Aguirre
Coordinador
Licenciatura en Matemática Aplicada

c.c. Archivo.
casm.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA
Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.
Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, 25 de mayo de 1995
Ref.E.C.86-95

EL DIRECTOR DE LA ESCUELA DE CIENCIAS DESPUES DE CONOCER EL DICTAMEN DEL ASESOR, CON EL VISTO BUENO DEL COORDINADOR DEL AREA, ANALIZANDO LA HOJA DE CONTROL DEL PROTOCOLO DE TESIS, LA FICHA DE SEGUIMIENTO DE TESIS, Y DANDOLE UNA LECTURA AL TRABAJO DE TESIS DEL ESTUDIANTE UNIVERSITARIO **SAUL DUARTE BEZA** TITULADO **LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD DIFERENCIABLE Y PROYECTIVA Y FIBRADOS UNIVERSALES.**

PROCEDE A LA AUTORIZACION DEL MISMO.

"Id y enseñad a todos"

Ing. José A. del Cid Pacheco
DIRECTOR ESCUELA DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
Escuela de Ciencias
DIR.
FACULTAD DE INGENIERIA

/cs

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA
Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de tesis titulado LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD DIFERENCIABLE Y PROYECTIVA Y FIBRADOS UNIVERSALES presentado por el estudiante universitario SAUL DUARTE BEZA, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

ING. JULIO ISMAEL GONZALEZ PODSZUECK

DECANO

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DECANO
FACULTAD DE INGENIERIA
DE GUATEMALA

Guatemala, mayo de 1,995

NOMENCLATURA

$\mathbf{A}$	Matriz compleja $k\times n$.
A^n	Espacio afín n-dimensional.
$\mathscr{L}(k,n)$	Conjunto de matrices complejas $k\times n$.
$\mathscr{A}(k,n)$	Conjunto de matrices compejas $k\times n$, de rango k.
$\mathscr{A}_0(k,n)$	Conjunto de matrices compejas $k\times n$, de rango k, cuyos vectores fila son ortonormales.
$G(k,n)$	Conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión k, del espacio vectorial V de dimensión n, $k\leq n$.
Λ	Elemento de $G(k,n)$.
$\mathbb{C}^n$	Espacio vectorial complejo de dimensión n.
$\mathbb{P}^n$	Espacio proyectivo complejo n-dimensional.
V_i	Subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ generado por los vectores $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_i$.
$\langle \mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_i\rangle$	Espacio generado por los vectores $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_i$.
$I=\{i_1,\ldots,i_k\}$	Multi-índice contenido en $\{1,\ldots,n\}$
V_{I_0}	(n–k)-plano de $\mathbb{C}^n$ generado por los vectores $\{\mathbf{e}_j \mid j\notin I\}$.
U_I	Conjunto de elementos de $G(k,n)$ cuya intersección con V_{I_0} es igual a cero.
$\mathbf{A}^I$	Submatriz invertible $k\times k$, de rango k, formada por las columnas $i_1,\ldots,i_k$ de la matriz $\mathbf{A}$.
$\mathscr{A}^I(k,n)$	Matrices que pertenecen a $\mathscr{A}(k,n)$, con $\mathbf{A}^I=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$
G_s	Grupo de isotropía de s.
Gx o $[x]$	Órbita del elemento x.
$V_k(n)$	Variedad de Stiefel.
$\mathbf{e}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_n$	Producto externo o exterior de los vectores $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

$\lambda_{i_1 \ldots i_k}$	Determinante del menor $k \times k$, formado por las columnas $i_1, \ldots, i_k$ de la matriz que representa a Λ.
$\mathbb{S}^n$	Esfera unitaria n-dimensional.
GL_k	Grupo de transformaciones lineales de orden k.

INTRODUCCION

En este trabajo de tesis, se hace una descripción general de la Grassmanniana G(k,n) como un conjunto de subespacios vectoriales k-dimensionales, tomados de un subespacio vectorial n-dimensional. A cada elemento de la Grassmanniana, se le asocia una representación matricial; mediante la acción del grupo GL_k sobre el conjunto de matrices complejas, $k \times n$, de rango k, se representa como el espacio de órbitas.

Se le dota de una topología, se demuestra que es una variedad topológica de dimensión compleja k(n–k), compacta y conexa.

Mediante la Inmersión de Plücker se representa la Grassmanniana G(k,n) como una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$, se hace una ilustración para el caso particular G(3,5). A continuación, con el auxilio de los pares duales y de ciertas aplicaciones i, i*, se obtienen las clásicas relaciones de Plücker, y se muestra que la imagen de la Grassmanniana bajo la inmersión de Plücker queda completamente determinada por un sistema de ecuaciones cuadráticas; se ilustra el proceso considerando el caso de G(2,4), y se obtiene el sistema $\lambda_{23}\lambda_{14} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{12}\lambda_{34}=0$, que nos permite afirmar que G(2,4) es una hipersuperficie cuadrática de $\mathbb{P}^5$.

Finalmente, se dan generalidades de los fibrados vectoriales, se construye el fibrado universal sobre la Grassmanniana, que tiene la propiedad universal que para cualquier fibrado k-dimensional sobre un espacio base compacto B y n un entero positivo suficientemente grande, entonces existe un único homomorfismo de fibrados, $f:\xi \longrightarrow \gamma^k(\mathbb{C}^n)$.El trabajo culmina con una importante aplicación: la construcción del grupo y del anillo de Grothendieck asociado al semigrupo Vect(X).

RESEÑA HISTORICA

En el siglo XIX, se rompieron los cánones clásicos del álgebra también a través del análisis, con criterio cada vez más abstracto, de los conceptos fundamentales de la aritmética y del álgebra ordinarias, lo que dio como resultado la creación de nuevos entes que pusieron de manifiesto el carácter básico de la llamada "Ley de composición"; noción que según Bourbakí, es de las más primitivas de la matemática.

En el siglo XVIII, el auge del cálculo infinitesimal y los sucesivos fracasos al resolver la ecuación de quinto grado por radicales, detuvieron el progreso del álgebra, pero en el siglo XIX, y en especial, el álgebra se dirige por distintos derroteros hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

El primero de los nuevos entes es el vector, utilizado en la composición de fuerzas y de velocidades por los tratadistas de Mecánica desde fines del siglo XVII, que no tuvo repercusiones entre los matemáticos. Es posible, en cambio, que a principios del siglo XIX una especie de cálculo geométrico fuera una necesidad entre los métodos puramente sintéticos, por una parte, y los métodos analíticos vinculados a un sistema de coordenadas arbitrariamente infringido al espacio.

Gauss utiliza implícitamente la suma vectorial en su representación de los números complejos en el plano, en tanto que August Ferdinand Möbius (1,790-1,868) expone en 1,827, un cálculo baricéntrico con importantes aplicaciones geométricas, pero en el que las coordenadas tienen un sentido aritmético y no geométrico, y entre 1,832 y 1,837 Giusto Bellavitis (1,803-1,880) desarrolla, con su método de las equipolencias, un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas, que equivale al cálculo vectorial de hoy.

Mientras que por un lado los vectores y sus sucesores los tensores, con el auxilio de los recursos del análisis matemático, encuentran importantes aplicaciones en diversos campos de la física; por el otro, los vectores contribuyeron a la creación de las nuevas álgebras. En este sentido, cabe señalar las obras de William Rowan Hamilton (1,805-1,865) y de Grassmann. Hamilton se ocupó de vectores (el nombre es invención suya) y creó un sistema de números complejos de cuatro unidades que llamó "Quaternions" (cuaternios). Mientras la obra de Hamilton se difundió con relativa rapidez, no ocurrió lo mismo con la de German Günther Grassmann (1,809-1,877), hombre de ciencia original, teólogo y lingüista, que a los 53 años desengañado por el escaso éxito de sus trabajos matemáticos, se dedicó al estudio del sánscrito. Su obra matemática importante es de 1,844 y se conoce con el título abreviado Ausdehnungslehre (Teoría de la Extensión), aunque en su título completo se refiere a "Una nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones". El trabajo de 1,844 se refiere a la parte "lineal" de la teoría y en años posteriores publicó ampliaciones de la misma, pero la manera algo inusitada y en exceso "filosófica" para los matemáticos de la época, hizo que esta obra pasara inadvertida. Sólo más tarde, ya muerto el autor, se reconoció tanto la amplia generalidad, como la total abstracción de este cálculo algebraico-geométrico en un espacio de n dimensiones, con importantes aplicaciones, y donde aparecen conceptos básicos del cálculo vectorial, como producto interno producto externo, etc.

La obra de Grassmann fue una crítica piedra miliar en esa época de cambio en las ideas; era descrita por su autor en los siguientes términos: "Mi Ausdehnungslehre es la fundamentación abstracta de la teoría del espacio, y es una disciplina puramente matemática, cuya aplicación al espacio da de sí la ciencia del espacio. Esta última ciencia, puesto que se refiere a algo dado en la naturaleza (o sea, al espacio) no es una rama de la matemática, sino una aplicación de la matemática a la naturaleza).

Como ya se dijo, la contribución de Grassmann pasó inadvertida hasta su aplicación en 1,915, en la Teoría General de la Relatividad y sólo hasta fecha muy reciente , su trabajo se ha apreciado plenamente.

Es a Sylvester a quien se deben las matrices, y fue Cayley, quien desarrolló en 1,858 con el cálculo de las matrices (el nombre es de él) una nueva álgebra. Con el desarrollo de la geométria, el estudio de configuraciones geométricas, como elementos de cierto espacio, conduce a identificar curvas algebraicas planas de orden n, con ecuaciones homogéneas de grado n; así, un primer desarrollo importante es la geometría de rectas, debida en forma independiente a Plücker y a Cayley.

De manera que dada una recta en $\mathbb{P}^3$ o en forma equivalente, un plano en $\mathbb{C}^4$ de coordenadas homogéneas, ellos le asocian 6 determinantes de orden 2 de la matriz **A** de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

y muestran que estos 6 determinantes están relacionados por medio de la ecuación

$$P_{01}\,P_{23} + P_{02}P_{31} + P_{03}P_{12} = 0$$

la cual se conoce con el nombre de Ecuacion de Plücker; e inversamente, si 6 números, no todos cero, satisfacen dicha ecuación; estos 6 números determinan una recta en $\mathbb{P}^3$. Esto nos dice que el conjunto de todas las rectas puede ser visto como una subvariedad proyectiva de grado dos del espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$. Luego se generalizó no solamente a rectas, sino también a subespacios k-dimensionales de un n-espacio vectorial, $k \leq n$. O de forma equivalente de $(k-1)$ espacios proyectivos del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$; dando origen a las variedades Grassmannianas.

Las componentes de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

no son otra cosa más que las componentes del vector $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ en el espacio $\Lambda^k V$ introducidas por Grassmann, en la llamada Algebra de Grassmann; de allí el nombre de Grassmanniana.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

INTRODUCCION:

Antes de iniciar este trabajo, se considera oportuno y necesario incluir en este capítulo los conceptos fundamentales relacionados con el mismo; la presentación de los temas no se hace de acuerdo con el orden en que se usan, sino de acuerdo con el área a la que pertenecen:

1.1. Preliminares de Algebra Moderna y Algebra Lineal.

1.2 Preliminares de Topología.

1.3 Preliminares de Variable Compleja.

1.4 Preliminares de Geometría Diferencial.

1.1 PRELIMINARES DE ALGEBRA MODERNA Y ALGEBRA LINEAL

OPERACION O ACCION DE UN GRUPO SOBRE UN CONJUNTO

DEFINICION 1.1.1:

Sea S un conjunto y G un monoide (o un grupo). Por acción u operación de G sobre S (a la izquierda), se entiende un mapeo

$$G\times S \longrightarrow S$$

tal que, denotando por xs la imagen del par (x,s) bajo el mapeo ($x \in G$, $s \in S$), se tiene que para todo
$x, y \in G$ y $s \in S$

$$(xy)s = x(ys) \quad \text{y} \quad es = s$$

y se dice que G opera sobre S (a la izquierda) y también que S es un G-conjunto.

Consideremos un G-conjunto S. Sea $x \in G$, entonces x induce un mapeo:

$$T_x: S \longrightarrow S$$

de S sobre sí mismo, dado por

$$T_x(s) = xs, \qquad \forall\ s \in S.$$

Además, tenemos por definición que

$$T_{xy} = T_x T_y \qquad \forall\ x, y \in G$$

Si G es grupo, entonces T_x tiene inverso, llamémosle $T_{x^{-1}}$, y por lo tanto cada T_x es una permutación de S. En esta forma, el mapeo

$$x \mapsto T_x$$

es un homomorfismo de G en el grupo de permutaciones de S, denotado por $\sigma(S)$, y se dice que G está representado como un grupo de permutaciones.

Nota:

$$G \longrightarrow \sigma(S)$$
$$x \mapsto T_x = \sigma_x$$

Ejemplos:

1. CONJUGACION:

Para $x \in G$, definimos el mapeo

$$\sigma_x : G \longrightarrow G$$
$$(x,y) \mapsto x\, y\, x^{-1}$$

tal que $\sigma_x(y) = x\, y\, x^{-1}$. Este mapeo define una acción u operación de G en sí mismo llamada **Conjugación**. De hecho, cada σ_x es un automorfismo de G, es decir, para todo y, z $\in G$, se tiene que $\sigma_x(yz) = \sigma_x(y)\sigma_x(z)$ y σ_x tiene inverso, denotado por $\sigma_{x^{-1}}$. En el presente caso; se ve por lo tanto que el mapeo $x \mapsto \sigma_x$ es un homomorfismo de G sobre su grupo de automorfismos. El Kernel de este homomorfismo es un subgrupo normal de G, que consiste de todos los $x \in G$ tales que: $y = x\, y\, x^{-1}$; es decir, todo $x \in G$ que conmuta con cada elemento de G. El Kernel es llamado el **centro** de G.

Para evitar confusión sobre la operación a la izquierda, no se escribe xy por $\sigma_x(y)$. A veces se escribe $\sigma_{x^{-1}}(y) = x^{-1}yx = y^x$, es decir, se usa la notación exponencial; así que tenemos las siguientes reglas: $y^{xz} = (y^x)^z$, $y^e = y$; $\forall\, x, y, z \in G$.

Notemos que G también opera por conjugación sobre el conjunto de subconjuntos de G.

Sea S el conjunto de subconjuntos de G, $S = \{X \mid X \subseteq G\}$ y sea $A \in S$ un subconjunto de G. Entonces $x\, A\, x^{-1}$ es también un subconjunto de G, que puede denotarse por $\sigma_x(A)$ y se puede verificar que el mapeo:

$$G \times S \longrightarrow S$$
$$(x,A) \mapsto x\, A\, x^{-1}$$

es una operación de G sobre S.

Notemos además que si A es un subgrupo de G, entonces $x\, A\, x^{-1}$ lo es también; así que G opera sobre el conjunto de subgrupos por conjugación.

Si A y B son dos subconjuntos de G, se dice que son conjugados, si existe $x \in G$, tal que: $B = x\, A\, x^{-1}$.

2. TRASLACION:

Para cada $x \in G$, se define la traslación

$$T_x: G \longrightarrow G$$

por medio de $T_x(y) = x\,y$, entonces el mapeo

$$(x,y) \mapsto T_x(y) = x\,y,$$

define una operación de G sobre sí mismo.

Advertencia:
T_x no es un homomorfismo de grupo, sino una permutación de G.

Similarmente, G opera por traslación sobre el conjunto de subconjuntos; si A es un subconjunto de G, entonces: $x\,A = T_x(A)$ es también un subconjunto.

Si H es subgrupo de G, entonces $T_x(H) = x\,H$ no es un subgrupo, pero sí es un co-conjunto o una clase lateral de H. Si denotamos por G/H el conjunto de las clases laterales izquierdas de H, y por consiguiente H/G el conjunto de clases laterales derechas, H no necesita ser normal.

Nota:

Sean S y S' G-conjuntos y $f: S \longrightarrow S'$ un mapeo. Se dice que f es un morfismo de G-conjuntos, o un G-mapeo, si se cumple que $f(xs) = x\,f(s)$, $\forall\ x \in G$ y $s \in S$.

Se regresa ahora a la situación general y se considera un grupo G que opera sobre un conjunto S. Sea $s \in S$, el conjunto de elementos $x \in G$, tal que $x\,s = s$ es un subgrupo de G, llamado **grupo de isotropía de s en G** y se denota por G_s.

Cuando G opera sobre sí mismo por conjugación, entonces el grupo de isotropía de un elemento no es más que el normalizador del mismo elemento. Similarmente, cuando G opera sobre el conjunto de subgrupos por conjugación, el grupo de isotropía de un subgrupo es de nuevo su normalizador.

Sea G operando sobre un conjunto S. Sean s y s' elementos de S y sea $y \in G$, tales que $y\,s = s'$, entonces $G_{s'} = y\,G_s\,y^{-1}$, es decir, los grupos de isotropía de s y s' son conjugados.

Sea G operando sobre un conjuto S. Sea $s \in S$. El subconjunto de S que consiste de todos los elementos xs ($x \in G$) es denotado por Gs y se llama **la órbita de s bajo G**.

<u>TEOREMA 1.1.1:</u>

Sea X un conjunto, y sea G un grupo que opera sobre X por la izquierda. Entonces, la relación definida por $x \sim y$ sí y sólo sí existe $g \in G$ tal que $gx=y$ es una relación de equivalencia sobre X y la clase de equivalencia de x es su órbita bajo G.

Por mostrar que:

1. $x \sim x$; $\forall\, x \in X$.

2. Si $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $\forall\ x, y \in X$.

3. Si $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$; $\forall\ x, y, z \in X$.

DEMOSTRACION:

1. $x \sim x$ pues para $e \in G$ (neutro) se tiene que $ex = x$.

2. Si $x \sim y \Rightarrow \exists\ g \in G$ tal que $gx=y$; como G es grupo existe $g^{-1} \in G$ tal que:
$x = ex = g^{-1}(gx) = g^{-1}y$, por lo tanto $y \sim x$.

3. Si $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow \exists\ g,h \in G$ tales que: $gx=y$ & $hy=z$, entonces:

$hy = h(gx) =(hg)x = sx = z$, por lo tanto $x \sim z$.

Por 1,2, y 3 $\sim$ es una relación de equivalencia y es claro, de la definición, que la clase de x es su órbita bajo G.

Si x, y están en la misma clase lateral del subgrupo $H=G_s$, entonces $xs=ys$, y conversamente. En esta forma, se tiene el mapeo

$$f : G/H \longrightarrow S$$

dado por $f(xH) = xs$ y se tiene que este mapeo es un morfismo de G-conjuntos. De hecho, se ve que se induce una biyección de G/H sobre la órbita Gs .

En consecuencia:

<u>PROPOSICION 1.1.1:</u>

Si G es un grupo que opera sobre un conjunto S y $s \in S$, entonces el orden de la órbita Gs es igual al índice: $(G: G_s)$.

En particular, cuando G opera por conjugación sobre el conjunto de subgrupos, y H es un subgrupo, entonces :

<u>PROPOSICION 1.1.2:</u>

El número de subgrupos conjugados de H es igual al índice del normalizador de H.

Ejemplo:

Sea G un grupo y H un subgrupo de índice 2, entonces H es normal en G.

PRUEBA:

Si $i_G(N) = 1 \Rightarrow G=N \Rightarrow$ H es normal.

Si $i_G(N) = 2 \Rightarrow$ H=N ya que $i_N(t) = 1$ y además existe homomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow S_2,$$

cuyo núcleo es de índice 2 y contiene a N, entonces N= Ker φ =H; por lo tanto H es normal como núcleo de un homomorfismo.

Sea G operando sobre un conjunto S. Entonces dos órbitas de G son iguales o disjuntas. Si Gs_1 y Gs_2 son dos órbitas con un elemento s en común, entonces $s = x\, s_1$ para algún $x \in G$ y por lo tanto $Gs=Gxs_1=Gs_1$; similarmente, $Gs=Gxs_2=Gs_2$. Por consiguiente, S es la unión disjunta de las distintas órbitas, y podemos escribir

$$S=\bigcup_{i\in I} Gs_i \quad \text{(disjunta)},$$

donde I es algún conjunto de índices y los s_i son elementos de distintas órbitas.

Si S es finito, esto da una descomposición del orden de S como una suma de órdenes de órbitas, que llamaremos **Fórmula de descomposición de órbitas**,

$$\mathrm{Card}(S) = \sum_{i\in I}(G:G_{s_i})$$

Sean x, y elementos de un grupo (o monoide) G. Se dice que x & y conmutan si xy=yx. Si G es un grupo, el conjunto de todos los elementos $x \in G$ que conmutan con todos los elementos de G, es un subgrupo de G, que se llama **centro** de G.

Sea G actuando sobre sí mismo por conjugación. Entonces x es el centro de G sí y sólo sí la órbita de x es x mismo, y por lo tanto tiene sólo un elemento. En general, el orden de la órbita de x es igual al índice del normalizador de x. Entonces cuando G es un grupo finito, la fórmula anterior se lee:

$$(G:1)= \sum_{x\in C}(G:G_x)$$

donde C es un conjunto de representantes de distintas clases conjugadas y la suma es tomada sobre todos los $x \in X$; esta fórmula también es llamada **fórmula de clases** .

A continuación, se presentan algunos ejemplos de operaciones de grupo sobre un conjunto.

ESPACIO PROYECTIVO:

DEFINICION 1.1.2:

Sea K cualquier campo. Un n-espacio proyectivo sobre K, representado por $\mathbb{P}^n(K)$, o simplemente por $\mathbb{P}^n$, se define como el conjunto de todas las líneas que pasan por $(0,\ldots,0)$ en el espacio vectorial afín $A^{n+1}(K)$.

Cualquier punto $(\mathbf{x})= (x_1,\ldots,x_{n+1}) \neq (0,\ldots,0)$ determina una única línea, a saber,

$\{(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_{n+1}) \mid \lambda \in K\}$. Dos de tales puntos $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{y})$ determinan la misma línea sí y sólo sí existe
$\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tal que $y_i = \lambda x_i$, $\forall\ i=1,\ldots,n+1$. En tal caso diremos que $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{y})$ son equivalentes.

En consecuencia, $\mathbb{P}^n$ puede identificarse con el conjunto de las clases de equivalencia de puntos en $A^{n+1} - \{(0,\ldots,0)\}$.

Los elementos de $\mathbb{P}^n$ se llamarán puntos. Si un punto $p \in \mathbb{P}^n$, está determinado por algún
$(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in A^{n+1}$, diremos que $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ es un conjunto de coordenadas homogéneas para p.
Basta escribir, $p=(x_1,\ldots,x_{n+1})$ para indicar que $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ son las coordenadas homogéneas para p. Nótese que aunque la i-ésima coordenada no está bien definida, sí está bien definida la noción de cuándo ésta es cero o distinta de cero; y si $x_i \neq 0$, la razón x_j/x_i está bien definida.

Sea $U_i=\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. Cada $p \in U_i$ posee un único conjunto de coordenadas homogéneas de la forma

$$p=(x_1,\ldots,x_{i-1}, 1, x_{i+1},\ldots,x_{n+1})$$

Las coordenadas $(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,x_{n+1})$ se llaman coordenadas no-homogéneas de p respecto de U_i (o de x_i, o de i).

Si definimos ahora la aplicación

$$\varphi_i : A^n \longrightarrow U_i$$

tal que

$$\varphi_i(a_1,\ldots,a_n) = (a_1,\ldots,a_{i-1}, 1, a_{i+1},\ldots,a_{n+1})$$

tenemos que φ_i establece una correspondencia entre los puntos de A^n y los puntos de U_i.

Nótese que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, así que, $\mathbb{P}^n$ es cubierto por $(n+1)$ conjuntos, cada uno de los cuales está en el n-espacio afín.

Sea $H_\infty = \mathbb{P}^n - U_{n+1} = \{(x_1,\ldots,x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1}=0\}$. H_∞ es a menudo llamado el **hiperplano en el infinito.**

La correpondencia $(x_1,\ldots,x_n, 0) \leftrightarrow (x_1,\ldots,x_n)$ muestra que H_∞ puede identificarse con $\mathbb{P}^{n-1}$.

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}^n = U_{n+1} \cup H_\infty$$

es la unión de un n-espacio afín y un conjunto que da todas las direcciones en el n-espacio afín.

a) **Espacio Proyectivo real:**

En el caso en que K es el campo de los números reales, una línea por el origen intersecta a la n-esfera $\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ en dos puntos antipodales $\mathbf{x}$ y $-\mathbf{x}$; se puede ver el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ como el conjunto de clases de equivalencia de la relación $x \sim y$ Ssi $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ ó $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, definida sobre $\mathbb{S}^n$.

Si n=1 se tiene:

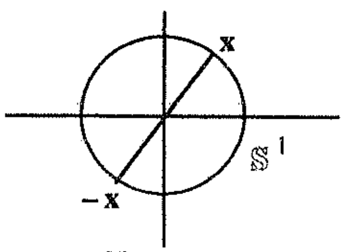


Figura 1.1

Si $Z_2 = \{-1, 1\}$ con el producto ordinario, entonces Z_2 tiene estructura de grupo y la aplicación:

$$\begin{aligned} Z_2 \times \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (1, \gamma) &\mapsto x \\ (-1, \gamma) &\mapsto -x \end{aligned}$$

tal que

define una acción del grupo Z_2 sobre $\mathbb{S}^n$.

Las órbitas de $\mathbf{x}$ son : $o(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\} = [\mathbf{x}]$.

De manera que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es el espacio de órbitas de la acción $Z_2 \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{ o(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n \} = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^n} o(\mathbf{x})$$

b) **Espacio Proyectivo complejo:**

Se tiene que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{2n+1}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbf{y} = \lambda\,\mathbf{x}$. Se puede limitar a los $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{2n+1}$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Como $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{2n+1}$ entonces: $\|\mathbf{y}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\| = 1$, por lo tanto $|\lambda| = 1$.

Si $\lambda \in \mathbb{S}^1$, entonces $\lambda_1 = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = e^{it'}$, $t' \in \mathbb{R}$, de manera que $\lambda_1\lambda_2 = e^{i(t+t')} \in \mathbb{S}^1$, el cual forma un grupo con el producto de complejos.

Así que, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es el espacio de órbitas de la acción del grupo $\mathbb{S}^1$ sobre la esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$.

$$o(\mathbf{x}) = \{ \lambda\mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{S}^1 \}.$$

CONJUNTOS ALGEBRAICOS

DEFINICION 1.1.3:

Sea S un conjunto de polinomios en el anillo de polinomios $K[x_1,\ldots,x_n]$ en n variables. Sea L una extensión del campo K. Por un cero de S en L se entiende una n-ada de elementos $(c_1,\ldots,c_n)$ en L tal que: $f(c_1,\ldots,c_n)=0$, para todo $f \in S$.

Si S consiste de un polinomio f, entonces también se dice que (c) es un cero de f. El conjunto de todos los ceros de S es llamado un **conjunto algebraico** en L (o más precisamente en $L^{(n)}$).

Sea α el ideal generado por todos los elementos de S. Ya que $S \subset \alpha$, se tiene que cada cero de α es también un cero de S. De cualquier modo, el converso también se cumple; es decir, cada cero de S es también cero de α , porque cada elemento de α es del tipo:

$$g_1(x)f_1(x)+\ldots\ldots+g_m(x)f_m(x)$$

con $f_j \in S$ y $g_i \in K[x]$. Por lo tanto, cuando consideramos ceros de un conjunto S podemos justamente considerar los ceros de un ideal. Cada ideal es finitamente generado y así, cada conjunto algebraico es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios.

Ahora, sea $\mathbb{C}[x]$ el anillo de polinomios de n indeterminadas con coeficientes en $\mathbb{C}$. Sea el ideal I tal que, $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

Definimos el conjunto

$$V(I) := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid P(z)=0,\ \forall\, P \in I \},$$

V(I) es un conjunto algebraico de $\mathbb{C}^n$.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS ALGEBRAICOS:

1.- $\varnothing$ y X son conjuntos algebraicos.

2.- Si $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ entonces $V(I_1 I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$.

3.- Si $\{I_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de ideales, entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es el ideal formado por todas las

sumas finitas de elementos de la familia $V(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$.

Nota: los conjuntos algebraicos satisfacen los axiomas de una topología sobre $\mathbb{C}^n$: la topología de Zariski.

CONJUNTOS ALGEBRAICOS PROYECTIVOS:

DEFINICION 1.1.4:

Un punto $p \in \mathbb{P}^n$ se dice que es un cero de un polinomio $F \in K[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ si $F(x_1,\ldots,x_{n+1})=0$ para cada elección de coordenadas homogéneas $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ para p; entonces escribimos $F(p)=0$. Si escribimos F como una suma de formas en la manera usual, entonces cada forma se desvanece sobre cualquier conjunto de coordenadas homogéneas de p.

Para cualquier conjunto S de polinomios en $K[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, se define el conjunto

$$V(S)=\{p \in \mathbb{P}^n \mid p \text{ es un cero de cada } F \in S\}.$$

Si I es el ideal generado por S, entonces $V(I) = V(S)$. Si $I=(F^{(1)},\ldots,F^{(r)})$, con $F^{(i)}=\sum F_j^{(i)}$, donde F_j es una forma de grado j, entonces $V(I)=V(\{F_j^{(i)}\})$; así que $V(S)=V(\{F_j^{(i)}\})$ es el conjunto de ceros de un número finito de formas. Tal conjunto es llamado un **conjunto algebraico en** $\mathbb{P}^n$ o un **conjunto algebraico proyectivo.**

VARIEDAD PROYECTIVA:

DEFINICION 1.1.5:

Un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{P}^n$ es irreducible, si éste no es la unión de dos conjuntos algebraicos más pequeños.

DEFINICION 1.1.6:

Un conjunto algebraico irreducible en $\mathbb{P}^n$ es llamado una variedad proyectiva.

LA INMERSION DE PLUCKER:

El mapeo de Plücker está definido por:

$$P:G(k,n)\longrightarrow P(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

tal que $P(\Lambda)=P(<\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k> = \mathbf{v}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_k$, donde $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ son vectores linealmente independientes de Λ. Fijemos una base $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ en $\mathbb{C}^n$ y una base $\{f_I = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\}$ de $\Lambda^k\mathbb{C}^n$, tenemos que

$P(\Lambda)=[\ldots,|\Lambda_I|,\ldots]$; es decir, las coordenadas homegéneas del mapeo, son todos los menores $k\times k$, denotados por $|\Lambda_I|$, de la matriz representativa de Λ.

Se sigue que:

1) P es holomórfico.

2) P transforma ciclos de Schubert de la forma

$$\sigma_{1,0,\ldots,0}=\{\Lambda\in G(k,n)\mid \dim(\Lambda\cap V^{(n-k)})\geq 1\}$$

en secciones de hiperplanos de $P(G(k,n))\subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$.

3) Si P es una inmersión que identifica G(k,n) con una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^{k-1}$ de dimensión $N=k(n-k)$ y grado dado por

$$\deg(G)=\frac{1!2!\ldots\ldots(k-1)!N!}{(n-k)!(n-k+1)!\ldots\ldots(n-1)!}.$$

Se sabe que la inmersión de Plücker es un conjunto de ceros de un sistema homogéneo de ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales.

ESPACIO ANILLADO:

DEFINICION 1.1.7:

Un espacio topológico con un haz de anillos sobre él, denotado por $(X,\mathbf{O})$, tal que $\mathbf{O}$ es un sub-haz del haz $\mathbf{O}_{\mathbb{C}}$, es llamado un espacio anillado. $\mathbf{O}_{\mathbb{C}}$ es el haz de funciones de valor complejo (no necesariamente continuas).

VARIEDAD ALGEBRAICA:

DEFINICION 1.1.8:

Una variedad agebraica es un espacio anillado que es localmente isomórfico al espacio anillado definido por un suconjunto algebraico de $\mathbb{C}^n$.

EQUIVALENCIA DE MATRICES :

TEOREMA 1.1.3:

Dadas matrices $\mathbf{A},\mathbf{B}$, $k\times n$, de rango k, entonces el espacio fila de $\mathbf{A}$ es igual al espacio fila de $\mathbf{B}$
sí y sólo sí existe matriz $\mathbf{G}\in GL_k$ invertible tal que : $\mathbf{G}=\mathbf{A}\,\mathbf{B}$.

DEMOSTRACION:

a) $(\Rightarrow)$

Sean $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_k$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Si $\mathbf{A}_i \in <\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_k>$ entonces $\mathbf{A}_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ji}\mathbf{B}_j$.

Si $\mathbf{B}_j \in <\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k>$ entonces $\mathbf{B}_j = \sum_{l=1}^{k} h_{lj}\mathbf{A}_l$.

Sean $\mathbf{G} = (g_{ji})$ y $\mathbf{H}=(h_{lj})$, matrices $k\times k$.

La matriz $\mathbf{H}$ es inversa de la matriz $\mathbf{G}$, ya que para todo i se tiene que:

$$\mathbf{A}_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ji}\sum_{l=1}^{k} h_{lj}\mathbf{A}_l = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} g_{ji}h_{lj}\mathbf{A}_l = \sum_{l=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{k} g_{ji}h_{lj}\Big)\mathbf{A}_l = \sum_{l=1}^{k}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} h_{lj}g_{ji}}_{c_{li}}\Big)\mathbf{A}_l .$$

c_{li} es el l i-ésimo elemento de $\mathbf{HG}$, entonces: $\begin{cases} c_{li} = 0, & i \neq l \\ c_{li} = 1, & i = l \end{cases}$,

por lo tanto $\mathbf{HG} = \mathbf{I}$.

Un argumento análogo prueba que $\mathbf{GH=I}$. Por lo tanto $\mathbf{G}$ es invertible.

b) $(\Leftarrow)$

Si $\mathbf{G}$ es matriz $k\times k$, invertible, $\mathbf{A}$ matriz $k\times n$, de rango k, tal que $\mathbf{GA} = \mathbf{B}$, entonces el espacio fila de $\mathbf{A}$ es igual al espacio fila de $\mathbf{B}$.

Sea $V=<\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k>$, se puede definir un isomorfismo

$$\varphi_G: V \longrightarrow V$$

tal que $\varphi(\mathbf{A}_1),\ldots,\varphi(\mathbf{A}_k)$ generan todo V. Pero estos son los vectores fila de la matriz $\mathbf{GA}$, por lo tanto $\mathbf{A}$ y $\mathbf{GA} = \mathbf{B}$ generan el mismo espacio V de dimensión k.

La afirmación anterior se muestra en el siguiente desarrollo: consideremos $\mathbf{G} \in GL_k$ y la matriz $\mathbf{A}$, de manera que

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = (b_{il})$$

con $i=1,\ldots,k$; $l = 1,\ldots,k$; donde

$$b_{il} = \sum_{r=1}^{k} g_{ir} a_{rl} = \left(\sum_{r=1}^{k} g_{ir} a_{r1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} g_{ir} a_{rn}\right).$$

$A_i = (a_{i1},\ldots, a_{in})$ y $V=\langle e_1,\ldots,e_k\rangle$, ahora bien, respecto de esta base, cada vector $v \in V$ de la forma $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$, se puede expresar como $v = \sum_{i=1}^{k} v_i e_i$, con $e_i=(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)$.

De manera que : $G(e_i) = G(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0) = (g_{i1},\ldots,g_{ik})$, entonces

$$\begin{aligned} G(A_i) &= \sum_{j=1}^{k} g_{ij} A_j = \left(\sum_{j=1}^{k} g_{ij} a_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} g_{ij} a_{jn}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} g_{ji} A_j = \left(\sum_{j=1}^{k} g_{ji} (a_{j1}, \ldots, a_{jn}\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} g_{ji} a_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} g_{ji} a_{jn}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, $V=\langle \mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k\rangle$ con $\mathbf{A}_j = (a_{j1},\ldots,a_{jn})$, y existe $\varphi_G: V \longrightarrow V$ tal que $\varphi_G(\mathbf{A}_i) = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} A_j$, donde $g_{ij} \mathbf{A}_j = (g_{ij}a_{j1},\ldots,g_{ij}a_{jn})$. Por lo tanto, también $V=\langle \varphi_G(\mathbf{A}_1),\ldots,\varphi_G(\mathbf{A}_k)\rangle$.

<u>TEOREMA 1.1.4:</u>

Una matriz $\mathbf{A}$, $k \times n$, es de rango k sí y sólo sí existe menor $k \times k \neq 0$.

DEMOSTRACION:

a) Si $\mathbf{A}$ es de rango k , entonces existe menor $k \times k \neq 0$.

Si $\mathbf{A}$ es de rango k, existen k vectores columna linealmente independientes, sean estos $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_k}$, donde $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}$; entonces el determinante de la matriz, cuyas columnas son $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$, es distinto de cero.

b) Si $\mathbf{A}$ posee un menor $k \times k \neq 0$ entonces $rg\mathbf{A} = k$.

Si $\mathbf{A}$ posee un menor $k \times k \neq 0$, entonces los vectores columna de dicho menor son linealmente independientes y $rg\mathbf{A} \geq k$; como la matriz $\mathbf{A}$ sólo tiene k filas, resulta que $rg\mathbf{A} = k$.

TEOREMA 1.1.5:

$\mathscr{A}(k,n)$ es abierto en $\mathscr{P}(k,n)$ y se llama **Variedad de Stiefel $V_k(n)$**.

DEMOSTRACION:

Se define la aplicación continua

$$\varphi: \mathscr{P}(k,n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\varphi(\mathbf{A}) := \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, \#I=k} \left|\det \mathbf{A}^I\right|$$

Se mostrará que $\varphi(\mathbf{A}) \neq 0$ Ssi $\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n)$.

En efecto, si $\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n)$ entonces existe $I \subset \{1,\ldots,n\}$, con $\#I=k$, tal que $\det \mathbf{A}^I \neq 0$ $\Rightarrow \varphi(\mathbf{A}) \neq 0$. Por otra parte, si $\varphi(\mathbf{A}) \neq 0$ entonces existe $I \subset \{1,\ldots,n\}$, con $\#I=k$, tal que $\det \mathbf{A}^I \neq 0$; por lo tanto $\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n)$.

Entonces, $\mathscr{A}(k,n) = \varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ y como φ continua y $(\mathbb{R} - \{0\})$ es abierto, resulta que $\mathscr{A}(k,n)$ es abierto en $\mathscr{P}(k,n)$.

DEFINICION 1.1.9:

Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita. Si $\Lambda \subseteq V$, se define la codimensión de Λ como $\operatorname{codim} \Lambda := \dim(V/\Lambda)$.

Si $\dim(V/\Lambda) < \infty$ entonces se dice que Λ es de codimensión finita.

PRODUCTO TENSORIAL

DEFINICION 1.1.10:

Sea K un campo. Si $E_1,\ldots,E_n$, F son espacios vectoriales, denotamos por $L^n(E_1,\ldots,E_n; F)$, es espacio vectorial de n-mapeos multilineales :

$$f: E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F \,.$$

Si $f: E_1\times\ldots\times E_n \longrightarrow F$ y $g: E_1\times\ldots\times E_n \longrightarrow G$ son multilineales, se define $f \longrightarrow g$ como un morfismo $h: F \longrightarrow G$, que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots\cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[d, "h"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Un objeto de esta categoría se llama **producto tensorial** $E_1\times\ldots\times E_n$ (sobre K).

Se probará que el producto tensorial existe, y se construirá uno en forma natural.

Sea M el espacio vectorial generado por todas las n-adas $(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_i \in E_i)$, es decir, generado por el conjunto $E_1\times\ldots\times E_n$. Sea N el subespacio generado por todos los elementos de la siguiente forma:

$$(x_1,\ldots,x_i + x'_i,\ldots,x_n) - (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x'_i,\ldots,x_n)\,.$$

$$(x_1,\ldots,ax_i,\ldots,x_n) = a(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n),$$

para todos los $x_i, x'_i \in E_i$, $a \in K$. Tenemos la inyección canónica

$$E_1\times\ldots\times E_n \longrightarrow M$$

de nuestro conjunto en el espacio vectorial generado por él. Componemos este mapeo con el el mapeo canónico $M \longrightarrow M/N$, sobre el espacio cociente, para obtener el mapeo:

$$\varphi: E_1\times\ldots\times E_n \longrightarrow M/N,$$

φ es multilineal, y es un producto tensorial. Es obvio que es multilineal; nuestra definicion fue ajustada a este propósito. Sea $f: E_1\times\ldots\times E_n \longrightarrow G$ un mapeo multilineal. Por la definición de espacio vectorial generado por $E_1\times\ldots\times E_n$, se tiene un mapeo lineal inducido $M \longrightarrow G$, que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots\cdots \times E_n \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d] \\ & G \end{tikzcd}$$

Ya que f es multilineal, el mapeo inducido $M \longrightarrow G$ toma el valor cero sobre N, por consiguiente, por la propiedad universal de los espacios cociente, puede factorizarse sobre M/N, y se tiene el homomorfismo

$$f_* : M/N \longrightarrow G$$

que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, "f_*"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Ya que la imagen de φ genera M/N, se sigue que el mapeo inducido f_* está unívocamente determinado. Que es lo que se quería probar.

El espacio M/N será denotado por $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, o también por $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$.

Hemos construido un producto tensorial específico en la clase de los isomorfismos de los productos tensoriales, y lo llamaremos el producto tensorial de $E_1, \ldots, E_n$. Si $x_i \in E_i$, escribimos:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n .$$

Se tiene que para todo i ,

$$x_1 \otimes \ldots \otimes a x_i \otimes \ldots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \ldots \otimes x_n = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) + x_1 \otimes \ldots \otimes x'_i \otimes \ldots \otimes x_n$$

Para todo x_i , $x'_i \in E_i$, $a \in K$. Si se tiene dos factores $E \otimes F$, entonces cada elemento de $E \otimes F$ puede escribirse como una suma de términos $x \otimes y$, $x \in E$, $y \in F$; porque tales términos generan $E \otimes F$ sobre K, y $a(x \otimes y) = ax \otimes y$, para todo $a \in K$.

PRODUCTOS ALTERNANTES

DEFINICION 1.1.11:

Un r-mapeo multilineal $f: E^r \longrightarrow F$, se dice que es alternante si $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ siempre que $x_i = x_j$, para algún $i \neq j$.

Sea a_r el subespacio generado de $T^r(E) = \bigotimes_{i=1}^{r} E$; generado por todos los elementos de la clase $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, donde $x_i = x_j$, para algún $i \neq j$. Se define

$$\Lambda^r(E) = T^r(E)/ a_r .$$

Se tiene entonces un r-mapeo multilineal $E^r \longrightarrow \Lambda^r(E)$ (llamado canónico) obtenido de la composición

$$E^r \longrightarrow T^r(E) \longrightarrow T^r(E)/\, a_r = \Lambda^r(E).$$

Es claro que nuestro mapeo es alternante, además es universal con respecto a r-mapeos multilineales alternantes sobre E. En otras palabras, si $f: E^r \longrightarrow F$ es un mapeo tal, existe un único mapeo lineal $f_*:\Lambda^r(E) \longrightarrow F$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E^r \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \Lambda^r(E) \arrow[d, "f_*"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Nuestro mapeo existe porque primero damos un mapeo inducido $T^r(E) \longrightarrow F$, haciendo que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} E^r \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & T^r(E) \arrow[d] \\ & F \end{tikzcd}$$

Y esto induce un mapeo que se desvanece sobre a_r y por consiguiente, induciendo nuestro f_*. En esta forma, Λ^r resulta un functor de espacios vectoriales en espacios vectoriales. La imagen de un elemento $(x_1,\ldots,x_r) \in E^r$, en el mapeo canónico, en $\Lambda^r(E)$, será denotado por: $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$. También la imagen de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$ en el homomorfismo factor $T^r(E) \longrightarrow \Lambda^r(E)$.

<u>PROPOSICION:</u>

Sea E un espacio de dimensión n sobre K. Si $r > n$ entonces $\Lambda^r(E) = 0$. Sea $\{v_1,\ldots,v_r\}$ una base de E sobre K. Si $1 \le r \le n$, entonces $\Lambda^r(E)$ es libre sobre K, y los elementos $\mathbf{v}_{i_1} \ldots \mathbf{v}_{i_r}$ con $i_1 < \ldots < i_r$, forman una base de $\Lambda^r(E)$ sobre K. Se tiene que $\dim_k \Lambda^r(E) = \binom{n}{k}$.

1.2. PRELIMINARES DE TOPOLOGIA

ESPACIO DE HAUSDORFF:

DEFINICION 1.2.1:

Se dice que el espacio topológico (X,τ) es un espacio de Hausdorff si, dados x, $y \in X$, $x \neq y$; existen vecindades U de x y $\mathcal{V}$ de y tales que $U \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

ESPACIO PARACOMPACTO:

DEFINICION 1.3.2:

Un espacio topológico (X,τ) se llama paracompacto sí y sólo sí (X,τ) es de Hausdorff y toda cubierta abierta de S posee un refinamineto abierto y localmente finito.

ESPACIO CUASICOMPACTO:

DEFINICION 1.3.3:

Un espacio topológico (X,τ) se llama quasicompacto si toda cubierta abierta de X posee un subcubierta finita.

ESPACIO COMPACTO:

DEFINICION 1.3.4:

Un espacio topológico (X,τ) se llama compacto, si además de ser cuasicompacto es T_2.

GRUPO TOPOLOGICO:

DEFINICION 1.3.5:

Un grupo topológico G es un grupo con una topología de Hausdorff que satisface las siguientes condiciones:

a) La multiplicación es continua: esto es, el mapeo $m : G \times G \longrightarrow G$ definido por $m(x,y) = xy$, es continuo.

b) La inversión es continua: esto es, el mapeo $o : G \longrightarrow G$ definido por $o(x) = x^{-1}$, es continuo.

VARIEDAD TOPOLOGICA:

DEFINICION 1.3.6:

Una n- variedad topológica γ real (compleja), es un espacio de Hausdorff X tal que existe un recubrimiento abierto de X, denotado por: $\{\omega_x \mid x \in X\}$, donde ω_x es homeomorfo a $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $\forall\ x \in X$.

TEOREMA 1.3.1:

a) Si $X=\bigcup x_\alpha$, donde cada x_α es conexo y $\bigcap x_\alpha \neq \varnothing$, entonces X es conexo.

b) Si cada par de puntos x, y de X yacen en algún subconjunto conexo E_{xy} de X, entonces X es conexo.

c) Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$, donde cada x_n es conexo, y $x_{n-1} \cap x_n \neq \varnothing$, para cada $n \geq 2$, entonces X es conexo.

(Demostración puede verse en pag 192 [21]

TEOREMA 1.3.2:

Un producto de espacios no vacíos es conexo sí y sólo sí cada espacio factor es conexo.
(Demostración puede verse en pag 193 [21])

TEOREMA 1.3.3:

Sea X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff, si para todo $x,z \in X$ existe una función continua

$$f : X \longrightarrow Y$$

tal que $f(x) \neq f(z)$, entonces X es de Hausdorff.

DEMOSTRACION:

Sean $x,z \in X$, $x \neq z$, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua tal que $f(x) \neq f(z)$. Como Y es un espacio de Hausdorff, existen U y $\mathcal{V}$ vecindades abiertas de $f(x)$ y $f(z)$ respectivamente, tales que $U \cap \mathcal{V} = \varnothing$; entonces se tiene que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(\mathcal{V})$ son vecindades abiertas de x y z respectivamente. Además $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = f^{-1}(U \cap \mathcal{V}) = \varnothing$, por lo tanto, X es conexo.

LA TOPOLOGIA DE ZARISKI:

DEFINICION 1.3.6:

Para un polinomio P en n variables reales, sea

$$Z(P)=\{(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{R}^n \mid P(x_1,\dots,x_n)=0\}.$$

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de los polinomios de tal tipo. Entonces tenemos que:

1.- $\{Z(P) \mid P\in \mathscr{P}\}$ es una base para los conjuntos cerrados de una topología sobre $\mathbb{R}^n$ (la topología de Zariski).

2.- La topología de Zariski es T_1 pero no es T_2.[21]

3.- Sobre $\mathbb{R}$ la topología de Zariski coincide con la topología cofinita; en $\mathbb{R}^n$, para $n>1$, son diferentes.

1.3 PRELIMINARES DE VARIABLE COMPLEJA

FUNCION HOLOMORFICA:

DEFINICION 1.4.1:

Se dice que una función $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomórfica si para $z_0\in\Omega$, existe $r=r(z_0)>0$ tal que $D^n(z_0, r)\subseteq\Omega$ y f puede representarse como una serie de potencias absolutamente convergente, es decir,

$$f(z)=\sum_{\alpha} a_\alpha (z-z_0)^\alpha \quad \text{para } z\in D^n(z_0, r)\ .$$

1.4 PRELIMINARES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

VARIEDAD DIFERENCIABLE:

DEFINICION 1.4.1:

Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $0\le N\in \mathbb{Z}$; supongamos que para cada $x\in X$ existe una vecindad U de x en X, un conjunto abierto $W\subseteq\mathbb{R}^N$ y un homeomorfismo:

Entonces se dice que X es una variedad de dimensión N (o N-variedad). El par (φ, U) es un sistema de coordenas. El conjunto $\{ (\varphi, U) \}$ es un atlas.

Sea $0 \leq k \in Z$, supongamos que para dos sistemas de coordenadas (φ, U) y (ϕ', U') se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \longrightarrow \varphi'(U \cap U') \\ \varphi \circ (\phi')^{-1} : \varphi'(U \cap U') \longrightarrow \varphi(U \cap U') \end{array}\right\} \quad (*)$$

son $\mathbb{C}^k$. Entonces se dice que X es una $\mathbb{C}^k$ variedad. Si los dos mapeos en (*) son $\mathbb{C}^\infty$, entonces X es $\mathbb{C}^\infty$ (o variedad suave). Si los mapeos son analíticos reales, entonces se dice que X es analítica real. Si $N= 2n$, $\mathbb{R}^N$ se identifica con $\mathbb{C}^n$ en la forma usual y si los mapeos en (*) son homomórficos, entonces X es una variedad analítica compleja (de dimensión n).

Sea X una $\mathbb{C}^k$ variedad. Entonces

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C},$$

se dice que es $\mathbb{C}^k$ si

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es $\mathbb{C}^k$ para cada sistema de coordenadas (φ, U) .

Asímismo, $\mathbb{C}^\infty$, analítica real, y funciones holomórficas son definidas sobre $\mathbb{C}^\infty$, analítica real y variedades analíticas complejas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con frontera $\mathbb{C}^k$. Entonces $\partial\Omega$ es variedad $\mathbb{C}^k$ de dimensión (N-1). El producto cartesiano de dos variedades $\mathbb{C}^k$ ($\mathbb{C}^\infty$, analítica real, analítica compleja) es $\mathbb{C}^k$ (respectivamente $\mathbb{C}^\infty$, analítica real, analítica compleja). Sin embargo, la unión de dos de tales variedades no necesita ser una variedad.

Sean X una $\mathbb{C}^k$ variedad de dimensión N y $Y \subseteq X$ una $\mathbb{C}^k$ variedad de dimensión $M < N$. Decimos que Y es una subvariedad regularmente inmersa de X, si cada $y \in Y$ tiene una vecindad $W \subseteq X$ y existe un homeomorfismo

$$\omega: W \longrightarrow \Psi(W) \subseteq \mathbb{R}^N$$

sujeto a la condición de que:

1.- (Ψ, W) es un sistema de coordenadas para $y \in X$.

2.- $\Psi(W \cap Y) = \Psi(W) \cap \{x_{n+1} =, \ldots =, x_N = 0\}$.

3.- $(W \cap Y)$ es un sistema de coordenadas para Y.

Si $Y \subseteq \mathbb{R}^N$, entonces Y es una $\mathbb{C}^k$ subvariedad regularmente inmersa de dimensión (N–1) en $\mathbb{R}^N$ sí y sólo sí existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ y una función $\mathbb{C}^k$

$$\rho: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $\nabla\rho \neq 0$ sobre Y y con $Y = \{ x \in U: \rho(x) = 0\}$.

Más generalmente, $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ es una $\mathbb{C}^k$ subvariedad regularmente inmersa de dimensión $M < N$ en $\mathbb{R}^N$ sí y sólo sí existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ y (N–M) funciones:

$$f_1, \ldots, f_{N-M}: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que $Y = \{ x \in U: \rho_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, N-M\}$, y así que

$$\begin{pmatrix} \nabla\rho_1 \\ \vdots \\ \nabla\rho_{N-M} \end{pmatrix}$$

tiene rango $N - M$ en cada punto de Y.

Si X es una variedad analítica compleja, entonces una subvariedad analítica compleja regularmente inmersa se define de manera obvia.

Sean X y X' dos $\mathbb{C}^k$ subvariedades y

$$F: X \longrightarrow X'$$

un homeomorfismo. Llamaremos a F un $\mathbb{C}^k$ difeomorfismo, a condición de que para cada elección de un sistema de coordenadas (φ, U) sobre X, y un sistema (ϕ', U') sobre X' se cumple que:

$$\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \varphi'(U') \quad y$$

$$\varphi \circ F \circ \varphi'^{-1}: \varphi'(U') \longrightarrow \varphi(U)$$

son $\mathbb{C}^k$ mapeos.

CAPITULO 2

LA GRASSMANNIANA G(K,V) Y SU TOPOLOGIA

INTRODUCCION

En este capítulo, se hace una descripción general de la Grassmanniana como conjunto de subespacios vectoriales lineales de dimensión k de un espacio vectorial de dimensión n, $k \leq n$.

A cada elemento de la Grassmanniana se le asocia una representación matricial, y mediante la acción del grupo GL_k sobre el conjunto de matrices complejas $k \times n$ de rango k, se representa la Grassmanniana como el espacio de órbitas correspondiente.

Finalmente, se dota a la Grassmanniana de una topología, y se demuestra que es una variedad topológica compacta y conexa.

2.1 LA GRASSMANNIANA G(K,V)

REPRESENTACION MATRICIAL DE LOS ELEMENTOS DE LA GRASSMANNIANA

Sea V un $\mathbb{C}$- espacio vectorial de $\dim_{\mathbb{C}} V=n$ y $\{e_1,\ldots, e_n\}$ una base de V. Si $\mathbf{v} \in V$ entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \ , \ v_i \in \mathbb{C} .$$

El vector $\mathbf{v}$ se puede representar mediante una n-eada:

$$\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n), \ v_i \in \mathbb{C} . \quad (*)$$

Por otra parte, k vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_k$ generan un subespacio vectorial Λ de V de dimensión k. Como cada vector $\mathbf{v}_i \in V$ se puede representar en la forma (*), entonces Λ se puede representar por la matriz $k \times n$, de rango k , de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

TEOREMA 2.2:

Sea **A** una matriz k×n, de rango k, $I=\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$; $\mathbf{A}^I$ la submatriz k×k, formada por las columnas $i_1,\ldots,i_k$ de **A**, entonces $\mathbf{A}^I$ es regular sí y sólo sí $(\mathbf{gA})^I$ es regular, $\forall$ $g\in Gl_k$.

Para demostrar lo anterior vamos primero a mostrar lo siguiente:

LEMA 2.1

$$(g\mathbf{A})^I = g\mathbf{A}^I$$

DEMOSTRACION:

Consideremos una matriz **A** k×n, de rango k; sin pérdida de la generalidad, sea

$$\mathbf{A}^I=(u_{ij});\quad i=1,\ldots k,\quad j=1,\ldots,k\ .$$

Sea $g\in Gl_k$, una matriz k×k , de rango k, tal que

$$g=g_{rj}.;\quad r=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,k.$$

Por definición de producto de matrices tenemos:

$$(g\mathbf{A})_{ij}=\sum_{r=1}^{k} g_{ir}u_{rj}\ ,\qquad i,j=1,\ldots k.$$

Si tomamos el producto hasta la columna k, tenemos por definición de $\mathbf{A}^I$ que

$$(g\mathbf{A})^I_{ij}=\sum_{r=1}^{k} g_{ir}u_{rj}\ ,\qquad i,j=1,\ldots k.$$

$$\sum_{r=1}^{k} g_{ir}u_{rj} = (g\mathbf{A})^I_{ij}\qquad i,j=1,\ldots k.$$

por tanto $(g\mathbf{A})^I = g\mathbf{A}^I$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA:

Por el lema anterior:

$$\det (g\mathbf{A})^I = \det g(\mathbf{A}^I) = \det g.\ \det \mathbf{A}^I,$$

como $\det g \neq 0$ entonces $\det (g\mathbf{A})^I \neq 0$ sí y sólo sí $\det \mathbf{A}^I \neq 0$.

COROLARIO 2.1

$\Lambda \in U_I$ sí y sólo sí Λ puede ser representado de forma única por una matriz **B** tal que la submatriz $\mathbf{B}^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

DEMOSTRACION:

Si $\Lambda \in U_I$ la submariz $\mathbf{A}^I$ de la matriz **A** que lo representa es invertible. Tomando $g=(\mathbf{A}^I)^{-1}$ $\in GL_k$ entonces $\mathbf{B}=g\mathbf{A}$, representa también a Λ y $\mathbf{B}^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte, si Λ está representado por la matriz **B**, tal que $\mathbf{B}^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ entonces $\mathbf{B}^I$ es invertible y $\Lambda \in U_I$.

Si **B'** es otra representación de Λ, tal que $(\mathbf{B}')^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces existe $g\in GL_k$, tal que $g\mathbf{B}=\mathbf{B}'$, entonces $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=g\mathbf{B}^I=(g\mathbf{B}')^I=(g\mathbf{B}')^I$; como $\mathbf{B}^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces $g=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$.

Por el Corolario precedente, para cada $\Lambda \in U_I$ existe una única matriz **B** que lo representa, tal que la submatriz $\mathbf{B}^I=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. A esta representación la llamaremos **la representación normalizada** de Λ.

Por ejemplo para $I=\{1,\ldots,k\}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & u_{1k+1} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & u_{kk+1} & \cdots & u_{kn} \end{pmatrix}$$

es la matriz normalizada de un elemento $\Lambda\in U_I$.

LEMA 2.2

$$G(k,n) = \bigcup_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$$

DEMOSTRACION:

a) ($\Rightarrow$)

Si $\Lambda \in U_I$ entonces se puede representar por medio de una matriz $\mathbf{A}$, $k\times n$, de rango k, que contiene una submatriz $k\times k$ invertible. Supongamos que este menor corresponde a la submatriz formada por las columnas $i_1,\ldots,i_k$. Entonces si $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$, $\Lambda\in U_I$ y por consiguiente $\Lambda\in \bigcup_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$.

b) ($\Leftarrow$)

Si $\Lambda\in \bigcup_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$ entonces existe $I\subset\{1,\ldots,n\}$, $\#I=k$, tal que $\Lambda \in U_I$ entonces la submatriz $k\times k$, $\mathbf{A}^I$, es de rango k y por consiguiente $\Lambda \in G(k,n)$.

De a) y b) resulta entonces que $G(k,n) = \bigcup_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$.

<u>LEMA 2.3:</u>

$$\bigcap_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I \neq\emptyset.$$

DEMOSTRACION:

Vamos a demostrar que existe al menos un $\Lambda\in G(k,n)$, tal que $\Lambda\in \bigcap_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$. En efecto, consideremos la matriz normalizada:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_{n-k}^{k-1} \end{pmatrix}$$

donde $x_i\neq 0$, $\forall\ i=1,\ldots,(n-k)$ y $x_i \neq x_j$ si $i\neq j$ y consideremos una submatriz $\mathbf{B}$, $k\times k$, de $\mathbf{A}$.

a) Si **B** posee (k–1) columnas de la submatriz $\mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, I={1,...k} y la columna r, r=k+1,...,n, de las (n–k) columnas restantes, entonces det $\mathbf{B}=x_r^{k-1} \neq 0$, $A \in U_I$, y **B** es de rango k.

b) Si **B** posee s de las k columnas de la submatriz $\mathbf{A}^I$, entonces, mediante el desarrollo por columnas, se obtiene un determinante (k–s)×(k–s) que se reduce al producto de un determinante de Van der Monde con potencias de algunos x_j distintos de cero; por lo que det $\mathbf{B}\neq 0$ y por consiguiente **B** es de rango k.

c) Si la submatriz **B** no contiene ninguna columna de la submatriz $\mathbf{A}^I$, entonces det **B** es de Van der Monde y distinto de cero; por consiguiente **B** es de rango k.

De a),b) y c) se concluye que $\bigcap\limits_{\substack{I\subseteq\{1,..,n\} \\ \#I=k}} U_I \neq \varnothing$.

2.2 TOPOLOGIA DE LA GRASSMANNIANA

Si consideramos el conjunto $\mathscr{L}(k,n)$ de las matrices complejas k×n, entonces podemos identificar $\mathscr{L}(k,n)$ con el conjunto $\mathbb{C}^{kn}$, donde $\mathbb{C}^{kn}:=\mathbb{C}^n\times\ldots\times\mathbb{C}^n$, k veces, de manera que $\mathscr{L}(k,n)$ tiene la topología de $\mathbb{C}^{kn}$.

El subconjuunto $\mathscr{A}(k,n) \subset \mathscr{L}(k,n)$ de las matrices complejas de rango k, posee entonces la topología relativa correspondiente. Como G(k,n) es el espacio de órbitas de $\mathscr{A}(k,n)$ respecto de la acción del grupo GL_k sobre $\mathscr{A}(k,n)$, se tiene la aplicación canónica

$$\pi:\mathscr{A}(k,n)\longrightarrow G(k,n),$$

que asigna a $\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n)$ la órbita $|\mathbf{A}| \in G(k,n)$.

A G(k,n) la dotamos entonces de la topología cociente respecto de π. Es decir $U\in G(k,n)$ es abierto sí y sólo sí $\pi^{-1}|U|$ es abierto en $\mathscr{A}(k,n)$.

LA GRASSMANNIANA COMO VARIEDAD TOPOLOGICA

TEOREMA 2.3

G(k,n) es variedad topológica de dimensión compleja k(n-k).

Por demostrar:

a) G(k,n) es de Hausdorff .

b) U_I es abierto en G(k,n) .

c) Existe homeomorfismo: $\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}$.

DEMOSTRACION:

a) G(k,n) es de Hausdorff:

Sean Λ_1, $\Lambda_2 \in G(k,n)$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, entonces existe $\mathbf{w} \in \Lambda_1$ tal que $\mathbf{w} \notin \Lambda_2$, y definimos:

$$\rho_{\mathbf{w}}: \quad G(k,n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

con

$$\rho_{\mathbf{w}}(\Lambda) = <\mathbf{w},\mathbf{w}> - \sum_{j=1}^{k} \left|\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_j \rangle\right|^2,$$

donde $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ es base ortonormal de Λ.

$\rho_{\mathbf{w}}(\Lambda_1)=0$, ya que $\mathbf{w} \in \Lambda_1$ y podemos expresarlo en la forma:

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} w_j \mathbf{u}_j \text{ entonces}$$

$$\rho_{\mathbf{w}}(\Lambda_1) = \left\langle \sum_{j=1}^{k} w_j \mathbf{u}_j, \sum_{j=1}^{k} w_j \mathbf{u}_j \right\rangle - \sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{k} w_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle \right|$$

$$\rho_{\mathbf{w}} = \sum_{j=1}^{k} w_j \overline{w}_j - \sum_{j=1}^{k} \left|w_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left|w_j\right|^2 - \sum_{j=1}^{k} \left|w_j\right|^2 = 0$$

Por otra parte:

$$\rho_{\mathbf{w}}(\Lambda_2) \neq 0 \text{ ya que}$$

$$\rho_{\mathbf{w}}(\Lambda_2) = <\mathbf{w},\mathbf{w}> - \sum_{j=1}^{k} \left|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle\right|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left\|w_j\right\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \left|w_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle\right|^2 \neq 0$$

donde $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$, es base ortonormal de Λ_2 .

Además $\rho_{\mathbf{w}}$ es continua, ya que la composición

$$\mathscr{A}_0(k,n) \xrightarrow{\pi_0} G(k,n) \xrightarrow{\rho_w} \mathbb{R}$$

es continua; donde $\mathscr{A}_0(k,n)$ es el conjunto de matrices $k\times n$, de rango k, cuyos vectores fila son ortonormales.

Ya que ρ_w cumple las condiciones del teorema 1.2.3, se tiene que G(k,n) es de Hausdorff.

b) U_I es abierto en G(k,n):

$\pi^{-1}(U_I)=\{\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n) \mid \mathbf{A}^I \text{ es invertible}\}=\{\mathbf{A} \in \mathscr{A}(k,n) \mid \det_I \mathbf{A} \neq 0\}$

$=(\det_I)^{-1}(\mathbb{C}-\backslash\{0\})$ el cual es abierto en $\mathscr{A}(k,n)$. Por lo tanto, U_I es abierto en G(k,n).

Como $G(k,n)=\bigcup\limits_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$, entonces $\{U_I\}_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}}$ es cubierta abierta de G(k,n); donde $U_I \approx \mathbb{C}^{k(n-k)}$.

c) Existe homeomorfismo $\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}$

Si $\Lambda \in U_I$, $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $\#I=k$, por el corolario 2.1 existe una única representación de Λ por una matriz normalizada, de manera que podemos definir una biyección entre conjuntos:

$$\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}$$

tal que, si $\Lambda \in U_I$, $\varphi_I(\Lambda)$ = la matriz k(n-k), que resulta de eliminar la submatriz $\mathbf{A}^I$ $k\times k$, ,de la matriz normalizada.

Falta mostrar que:

i) φ_I es continua .

ii) φ_I^{-1} es continua .

i) φ_I es continua

En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}[U_I] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi_I"'] & U_I \arrow[r, "\varphi_I"] & \mathbb{C}^{k(n-k)} \\
\pi^{-1}[U_I] \arrow[urr, "P_{(i_1,\ldots,i_k)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\psi_I(\mathbf{A})=(\mathbf{A}^I)^{-1}\mathbf{A}$, y $p_{(i_1,\ldots,i_k)}$ es la proyección que elimina las $i_1,\ldots,i_k$ columnas.

Vamos a mostrar que $\varphi\circ\pi$ es continua; esto equivale a mostrar que: $p_{(i_1,\ldots,i_k)}\circ\psi_I$ es continua.

$p_{(i_1,\ldots,i_k)}$ es continua, ya que es proyección. Por otra parte, ψ_I es el producto de $(\mathbf{A}^I)^{-1}$ con la identidad, que es continua. $(\mathbf{A}^I)^{-1}$ es la composición:

$$\pi^{-1}(U_I)\xrightarrow{p_I}GL_k\xrightarrow{(\ )^{-1}}GL_k,$$

que actúa de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\mapsto\mathbf{A}^I\mapsto(\mathbf{A}^I)^{-1}$$

donde p_I es continua por ser proyección y la inversa es continua, ya que GL_k es grupo topológico; entonces ψ_I es composición de funciones continuas.

ii) φ_I^{-1} es continua:

Como φ_I es biyectiva por definición, φ_I^{-1} existe, y para probar que es continua basta probar que φ_I es abierta.

Sea $\mathscr{A}^I(k,n):=\left\{\mathbf{A}\in\mathscr{A}\mid\mathbf{A}^I=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$,

este conjunto es abierto en $\mathscr{A}(k,n)$ ya que es homeomorfo a $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ que es abierto en $\mathbb{C}^{kn}$, que es homeomorfo a $\mathscr{L}(k,n)$ y $\mathscr{A}(k,n)$ es abierto en $\mathscr{L}(k,n)$.

Ahora bien, $p_{(i_1,\ldots,i_k)}$ es la composición:

$$\mathscr{A}^I(k,n)\xrightarrow{\pi|}U_I\xrightarrow{\varphi_I}\mathbb{C}^{k(n-k)}$$

$\pi|^{-1}(U_I)=\pi^{-1}(U_I)\cap\mathscr{A}^I(k,n)$ es abierto ya que $\pi|^{-1}(U_I)$ y $\mathscr{A}^I(k,n)$ son abiertos; por lo tanto $\varphi_I(U_I)=p_{(i_1,\ldots,i_k)}(\pi|^{-1}(U_I))$ abierto ya que $p_{(i_1,\ldots,i_k)}$ es abierta por ser proyección.

Por a), b) y c) $G(k,n)$ es variedad topológica de dimensión compleja $k(n-k)$.

TEOREMA 2.4:

$\varphi_I(U_I \cap U_J)$ es abierto en $\mathbb{C}^{k(n-k)}$, $\forall$ $I,J \subseteq \{1,\ldots,n\}$, con $\#I=\#J=k$.

DEMOSTRACION:

Sean $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$ y $J=\{j_1,\ldots,j_k\}$, consideremos primero el caso:

a) $I \cap J = \varnothing$ y $k \leq n-k$.

Si $\Lambda \in (U_I \cap U_J)$ y $\mathbf{A}$ es la matriz que lo representa, entonces $\varphi_I(\Lambda)$ es una matriz $\mathbf{B}$, $k(n-k)$ que contiene a la submatriz $\mathbf{A}^J$ de $\mathbf{A}$ que corresponde a las columnas $(l_1,\ldots,l_k)$ de $\mathbf{B}$ y $\det \mathbf{B}^L \neq 0$.

Por otra parte, si $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{k(n-k)}$ tal que $\det \mathbf{B}^L \neq 0$, para $L=(l_1,\ldots,l_k)$, entonces $\mathbf{B}$ es imagen de un $\Lambda \in (U_I \cap U_J)$, cuya matriz $\mathbf{A}$ posee a $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ como submatriz $\mathbf{A}^I$, y las columnas $i_{k+1},\ldots,i_n$ son tales que la columna i_{k+j}, con $j=1,\ldots,n-k$, corresponde a la columna j de la matriz $\mathbf{B}$. Por consiguiente: $\varphi_I(U_I \cap U_J) = \{\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{k(n-k)} \mid \det \mathbf{B}^L \neq 0\}$.

Si definimos para $L=(l_1,\ldots,l_k)$, $\det_L : \mathbb{C}^{k(n-k)} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\det_L \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^L$, se tiene que
$\varphi_I(U_I \cap U_J) = \{\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{k(n-k)} \mid \det_L \mathbf{B} \neq 0 = {\det_L}^{-1}(\mathbb{C}-\{0\})\}$. Como $\det_L$ es continua y $\mathbb{C}-\{0\}$ es abierto en $\mathbb{C}$, resulta que $\varphi_I(U_I \cap U_J)$ es abierto en $\mathbb{C}^{k(n-k)}$.

b) Ahora consideremos el caso $I \cap J \neq \varnothing$: Si $\Lambda \in U_I \cap U_J$, entonces la submatriz $\mathbf{A}^J$ posee columnas en común con $\mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Sea m el número de tales columnas, entonces $\det \mathbf{A}^J = \det \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es la submatriz $(k-m)\times(k-m)$ que resulta de eliminar las m filas y las m columnas correspondientes a las posiciones de los unos que aparecen en $\mathbf{A}^J$.

Entonces $\varphi_I(\Lambda)$ es una matriz $k(n-k)$ que contiene a la submatriz invertible $\mathbf{B}$ de rango $(k-m)$ como submatriz: $\mathbf{M}_{l_1,\ldots,l_{k-m} r_1,\ldots,r_{k-m}} = \mathbf{M}_{LR}$, con $L=(l_1,\ldots,l_k)$, $R=(r_1,\ldots,r_{k-m})$.

Por otra parte, si $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{k(n-k)}$ es tal que la submatriz $\mathbf{M}_{LR}$ es invertible, entonces $\mathbf{D}$ es la imagen de un $\Lambda \in U_I \cap U_J$, concretamente del Λ representado por la matriz $\mathbf{A}$ con: $\mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ y las columnas $i_{k+1},\ldots,i_n$ son tales que la columna i_{k+j} con $j=1,\ldots,n-k$, corresponde a la columna j de la matriz $\mathbf{B}$.

Si definimos: $\det_{LR}: \det_L : \mathbb{C}^{k(n-k)} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\det_{LR}\mathbf{B} = \det \mathbf{B}^{LR}$ entonces $\varphi_I(U_I \cap U_J) = \{\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{k(n-k)} \mid \det \mathbf{M}_{LR} \neq 0\} = \det_{LR}{}^{-1}(\mathbb{C}-\{0\})$, el cual es abierto en $\mathbb{C}^{k(n-k)}$, ya que $\det_{LR}$ es continua y $\mathbb{C}-\{0\}$ es abierto en $\mathbb{C}$.

COMPACIDAD DE LA GRASSMANNIANA :

TEOREMA 2-5:

G(k,n) es compacto.

DEMOSTRACION:

Del teorema 2-3 a) sabemos que G(k,n) es de Hausdorff. Falta probar que G(k,n) es cuasicompacto.

En efecto: $\mathscr{A}_0(k,n)$ es cerrado y acotado en $\mathscr{A}(k,n)$. Es acotado ya que si $\mathbf{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kn} \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_0(k,n)$, entonces la norma de $\mathbf{U}$, como elemento de $\mathbb{C}^{kn}$ es k, para todo $\mathbf{U} \in \mathscr{A}_0(k,n)$. Por otra parte $\mathscr{A}_0(k,n)$ se puede representar como la intersección finita de cerrados en $\mathscr{A}(k,n)$. En efecto, consideremos los conjuntos:

$S := \bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} (\varphi_{ij}^{-1}(0))$, donde : $\varphi_{ij}: \mathscr{A}(k,n) \longrightarrow \mathbb{C}$ es la aplicación definida por $\varphi_{ij}(\mathbf{U}) := \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$,

donde $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ son los vectores de las columnas i,j de $\mathbf{U}$ respectivamente. S es cerrado ya que es la intersección finita de cerrados pues φ_{ij} es continua y $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Igualmente el conjunto $T := \bigcap_{i=1}^{k} (\psi_i^{-1}(1))$, donde $\psi_i: \mathscr{A}(k,n) \longrightarrow \mathbb{R}$, es la aplicación definida por $\psi_i(\mathbf{U}) := \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle$, es

cerrado, ya que es la intersección finita de cerrados, ya que ψ_i es continua y $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Entonces $\mathscr{A}_0(k,n) = S \cap T$ es cerrado en $\mathscr{A}(k,n)$, lo que muestra que $\mathscr{A}_0(k,n)$ es compacto en $\mathscr{A}(k,n)$. Como $\pi_0: \mathscr{A}_0(k,n) \longrightarrow G(k,n)$ es continua y sobreyectiva, entonces G(k,n) es cuasicompacto. Esto, unido al hecho de que G(k,n) es de Hausdorff, muestra que es G(k,n) compacto.

CONEXIDAD DE LA GRASSMANNIANA

TEOREMA 2-5:

G(k,n) es conexo.

DEMOSTRACION:

De los lemas 2.2 y 2.3 sabemos que :

$$G(k,n)= \bigcup_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I \quad \text{y que} \quad \bigcap_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I \neq\varnothing.$$

Cada U_I es conexo ya que es homeomorfo a $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ que es conexo, ya que $\mathbb{C}$ es conexo. Por lo tanto G(k,n) es conexo, ya que satisface las condiciones del teorema 1.2.1a).

Resumiendo , se ha mostradò entonces el siguiente

TEOREMA 2-6:

G(k,n) es una variedad topológica de dimensión compleja k(n–k), compacta y conexa.

CAPITULO 3

LA GRASSMANNIANA COMO UNA SUBVARIEDAD ALGEBRAICA PROYECTIVA COMPLEJA

INTRODUCCION:

En este capítulo, se define la inmersión de Plücker, una aplicación inyectiva que permite ver la Grassmanniana , G(k,n) como una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$.

Con ayuda de los pares duales y ciertas aplicaciones i, i*, se definen las condiciones bajo las cuales un elemento del espacio proyectivo complejo es imagen de algún $\Lambda \in G(k,n)$ bajo la inmersión de Plücker; y así se obtienen las clásicas relaciones de Plücker. Se mostrará que la imagen de la Grassmanniana G(k,n) bajo la inmersión de Plücker queda completamente determinada por un sistema de ecuaciones cuadráticas.

Finalmente, se puede afirmar que la Grassmanniana es una subvariedad algebraica proyectiva compleja , pues es la solución correpondiente a un conjunto de ceros de un número finito de ecuaciones cuadráticas dadas por la relación de Plücker.

3.1 APLICACION DE PLÜCKER

Mediante la inmersión de Plücker, la Grassmanniana G(k,n) se puede ver como una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$, puesto que este mapeo hace correponder a cada elemento $\Lambda \in G(k,n)$ una n-ada de coordenadas homogéneas, como veremos a continuación.

LA INMERSION DE PLÜCKER:

Antes de dar la definición recordemos que: cada matriz **A**, $k \times n$, que representa un $\Lambda \in G(k,n)$, posee $\binom{n}{k}$ submatrices A_I , $k \times k$, correspondientes a los $\binom{n}{k}$ multi-índices de orden k tomados del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ y ordenados lexicográficamente, es decir,

$$i_1\, i_2 \ldots i_k < j_1\, j_2 \ldots j_k$$

si $i_1 < j_1$ o para $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots,\ i_l = j_l,\ l < k,\ i_{l+1} < j_{l+1}$.

DEFINICION 3.1:

Se define la aplicación de Plücker

$$P:\ G(k,n) \longrightarrow P(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

tal que $P(\Lambda) = P(<v_1,\ldots,v_k>) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$; donde $v_1,\ldots,v_k$ son vectores linealmente independientes de Λ.

DEMOSTRACION:

De los lemas 2.2 y 2.3 sabemos que :

$G(k,n)= \bigcup\limits_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I$ y que $\bigcap\limits_{\substack{I\subseteq\{1\ldots,n\}\\ \#I=k}} U_I \neq\varnothing$. Cada U_I es conexo ya que es homeomorfo a $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ que es conexo, ya que $\mathbb{C}$ es conexo. Por lo tanto G(k,n) es conexo, ya que satisface las condiciones del teorema 1.2.1a).

Resumiendo , se ha mostradò entonces el siguiente

TEOREMA 2-6:

G(k,n) es una variedad topológica de dimensión compleja k(n–k), compacta y conexa.

CAPITULO 3

LA GRASSMANNIANA COMO UNA SUBVARIEDAD ALGEBRAICA PROYECTIVA COMPLEJA

INTRODUCCION:

En este capítulo, se define la inmersión de Plücker, una aplicación inyectiva que permite ver la Grassmanniana , G(k,n) como una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$.

Con ayuda de los pares duales y ciertas aplicaciones i, i*, se definen las condiciones bajo las cuales un elemento del espacio proyectivo complejo es imagen de algún $\Lambda \in G(k,n)$ bajo la inmersión de Plücker; y así se obtienen las clásicas relaciones de Plücker. Se mostrará que la imagen de la Grassmanniana G(k,n) bajo la inmersión de Plücker queda completamente determinada por un sistema de ecuaciones cuadráticas.

Finalmente, se puede afirmar que la Grassmanniana es una subvariedad algebraica proyectiva compleja , pues es la solución correpondiente a un conjunto de ceros de un número finito de ecuaciones cuadráticas dadas por la relación de Plücker.

3.1 APLICACION DE PLÜCKER

Mediante la inmersión de Plücker, la Grassmanniana G(k,n) se puede ver como una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$, puesto que este mapeo hace correponder a cada elemento $\Lambda \in G(k,n)$ una n-ada de coordenadas homogéneas, como veremos a continuación.

LA INMERSION DE PLÜCKER:

Antes de dar la definición recordemos que: cada matriz **A**, $k \times n$, que representa un $\Lambda \in G(k,n)$, posee $\binom{n}{k}$ submatrices A_I, $k \times k$, correspondientes a los $\binom{n}{k}$ multi-índices de orden k tomados del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ y ordenados lexicográficamente, es decir,

$$i_1\, i_2 \ldots i_k < j_1\, j_2 \ldots j_k$$

si $\quad i_1 < j_1 \quad$ o para $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots,\ i_l = j_l,\ l < k,\ i_{l+1} < j_{l+1}$.

DEFINICION 3.1:

Se define la aplicación de Plücker

$$P\colon G(k,n) \longrightarrow P(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

tal que $P(\Lambda) = P(\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k \rangle) = \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k$; donde $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ son vectores linealmente independientes de Λ.

En forma equivalente

$$\Lambda \mapsto (\ldots, \left|\Lambda_{I_j}\right|, \ldots); \quad j=1,\ldots,\binom{n}{k}$$

donde $\left|\Lambda_{I_j}\right| = \det \Lambda_{I_j}$.

Fijemos una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ en $\mathbb{C}^n$ y una base $\{ f_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \}$ de $\Lambda^k \mathbb{C}^n$, entonces tenemos

$$P(\Lambda)=[\ldots,\left|\Lambda_I\right|,\ldots]$$

es decir, las coordenadas homogéneas del mapeo son todos los menores $k\times k$, $\left|\Lambda_I\right|$ de la matriz representativa de Λ. De manera que P es una inmersión que identifica G(k,n) con una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ de dimensión $N=k(n-k)$ y grado

$$\deg(G)=\frac{1!2!\ldots(k-1)!N!}{(n-k)!(n-k+1)!\ldots(n-1)!}.$$

Se sabe que la inmersión de Plücker es un conjunto de ceros de un sistema homogéneo de ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales.

Con el propósito de ilustrar lo anterior, consideremos la Grassmanniana G(3,5).

Si $\Lambda \in G(3,5)$ entonces Λ tiene representación matricial de la forma

$$\Lambda=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} \end{pmatrix}$$

El conjunto de multi-índices $I_j \subset \{1,\ldots,5\}$ de orden 3, ordenado lexicográficamente es

$\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}$.

De manera que

$$P(\Lambda)=\left(\left|\Lambda_{123}\right|, \left|\Lambda_{124}\right|, \left|\Lambda_{125}\right|, \left|\Lambda_{134}\right|, \left|\Lambda_{135}\right|, \left|\Lambda_{145}\right|, \left|\Lambda_{234}\right|, \left|\Lambda_{235}\right|, \left|\Lambda_{245}\right|, \left|\Lambda_{345}\right|\right)$$

donde $|\Lambda_{ijk}|$ es el menor 3×3 correspondiente a las columnas ijk.

PROPOSICION 3.1:

P es inyectiva.

Nótese que: $j(\Lambda')$ nos da la representación de Λ' como elemento de $\Lambda^k V$, respecto de la base canónica.

TEOREMA 3.1:

Λ es descomponible sí y sólo sí $\dim W = k$.

DEMOSTRACION:

a) Si Λ es descomponible, existen $w_1,\ldots,w_k$ vectores linealmente independientes tales que: $\Lambda = w_1 \wedge \ldots\ldots \wedge w_k$, por lo que Λ está en la imagen de $j: \Lambda^k W \longrightarrow \Lambda^k V$ donde $W = \langle w_1,\ldots,w_k \rangle$.

b) Si $\dim W = k$, $\dim \Lambda^k W = 1$ y todo elemento en $\Lambda^k W$ es descomponible.

El problema ahora es determinar las condiciones que debe satisfacer Λ, para que el espacio minimal correspondiente sea de dimensión k; para el efecto, utilizaremos la noción de pares duales.

PARES DUALES

DEFINICION 3.2:

Sean V y W $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Decimos que (V,W) forman un par dual, si existe una aplicación bilineal:

$$\langle\,,\,\rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que

a) $\langle \mathbf{a}, w \rangle = 0$ para todo $w \in W \Rightarrow \mathbf{a} = 0$.

b) $\langle v, \mathbf{b} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{b} = 0$.

$\langle\,,\,\rangle$ se llama el producto escalar que determina la dualidad.

En particular, (V,V^*) forman un par dual, con $\langle v, u^* \rangle := u^*(v)$.
También $\Lambda^k V$ y $\Lambda^k V^*$, $k \leq \dim V$, forman un par dual:
$\langle v_1 \wedge \ldots\ldots \wedge v_k, u^*_1 \wedge \ldots\ldots \wedge u^*_k \rangle := \det(\langle v_i, w^*_j \rangle)$.

Ejemplo: Para k=2 tenemos

$$\langle v_1 \wedge v_2, u^*_1 \wedge u^*_2 \rangle = \begin{vmatrix} u^*_1(v_1) & u^*_2(v_1) \\ u^*_1(v_2) & u^*_2(v_2) \end{vmatrix} = u^*_1(v_1)u^*_2(v_2) - u^*_2(v_1)u^*_1(v_2)$$

Con ayuda de los pares duales y un $k \geq 1$ fijo, se puede definir una aplicación:

$$i : V^* \longrightarrow \mathscr{L}(\Lambda^k V, \Lambda^{k-1} V)$$

de la siguiente forma: dado $\mathbf{v}^* \in V^*$ fijo,

$$i(\mathbf{v}^*): \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$$

donde $i(\mathbf{v}^*)(\Lambda)$ es el único elemento de $\Lambda^{k-1}V$, tal que:

$<\Lambda, \mathbf{v}^* \wedge \Xi> = < i(\mathbf{v}^*)\Lambda, \Xi>$ para todo $\Xi \in (\Lambda^{k-1}V)^* \approx (\Lambda^{k-1}V^*)$.

Por ejemplo: sea $V = \mathbb{C}^3$, $k=2$. $i(\mathbf{v}^*): \Lambda^2 V \longrightarrow \Lambda^1 V \approx V$

$\Lambda = u_{12}\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + u_{13}\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + u_{23}\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\Xi \in V^*$

$$< u_{12}\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + u_{13}\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + u_{23}\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{v}^* \wedge \Xi > = < i(\mathbf{v}^*)\Lambda, \Xi>, \forall\ \Xi$$

$$= u_{12} < \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{v}^* \wedge \Xi > + u_{13} < \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{v}^* \wedge \Xi > + u_{23} < \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{v}^* \wedge \Xi >$$

$$= u_{12} \begin{vmatrix} v^*(\mathbf{e}_1) & \Xi(\mathbf{e}_1) \\ v^*(\mathbf{e}_2) & \Xi(\mathbf{e}_2) \end{vmatrix} + u_{13} \begin{vmatrix} v^*(\mathbf{e}_1) & \Xi(\mathbf{e}_1) \\ v^*(\mathbf{e}_3) & \Xi(\mathbf{e}_3) \end{vmatrix} + u_{23} \begin{vmatrix} v^*(\mathbf{e}_2) & \Xi(\mathbf{e}_2) \\ v^*(\mathbf{e}_3) & \Xi(\mathbf{e}_3) \end{vmatrix}$$

$$= \Xi(\mathbf{e}_1)(-u_{12}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_2) - u_{13}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_3)) + \Xi(\mathbf{e}_2)(u_{12}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_1) - u_{23}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_3)) +$$

$$\Xi(\mathbf{e}_3)(u_{13}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_1) + u_{23}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_2)).$$

$$= \Xi\,[(-u_{12}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_2) - u_{13}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_3))\mathbf{e}_1 + (u_{12}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_1) - u_{23}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_3))\mathbf{e}_2 + (u_{13}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_1) + u_{23}\, \mathbf{v}^*(\mathbf{e}_2))\mathbf{e}_3\,].$$

A continuación, se presenta una descripción explícita de las componentes de $i(\mathbf{v}^*)\Lambda$ respecto de la base canónica de $\Lambda^{k-1}V$. Consideremos

$$< i(\mathbf{u}^*)\Lambda, \Xi> = < \Lambda, \mathbf{u}^* \wedge \Xi>,$$

como $i(\mathbf{u}^*)\Lambda \in \Lambda^{k-1}V$ entonces

$$i(\mathbf{u}^*)\Lambda = \sum_{j_1 < \ldots < j_{k-1} = 1} \lambda_{j_1 \ldots j_k} (\mathbf{e}^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^*_{j_{k-1}})$$

y $\lambda_{j_1 \ldots\ldots j_{k-1}} = < \Lambda, \mathbf{u}^* \wedge \mathbf{e}^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^*_{j_k} >$. Por otra parte $\Lambda \in \Lambda^k V$;
$\Lambda = \sum a_{i_1 \ldots i_k} (\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k})$, por consiguiente:

$$< \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{u}^* \wedge \mathbf{e}^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^*_{j_{k-1}} > = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{u}^* \rangle & \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}^*_{j_1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}^*_{j_{k-1}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{u}^* \rangle & \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}^*_{j_1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}^*_{j_{k-1}} \rangle \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\langle \mathbf{e}_{i_l},\mathbf{u}^*\rangle\langle \mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\mathbf{e}}_{i_l}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_k},\mathbf{e}^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^*_{j_{k-1}}\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_{i_l}$ denota el término que se suprime.

Como

$$\langle \mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\mathbf{e}}_{i_l}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_k},\mathbf{e}^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}^*_{j_{k-1}}\rangle=\delta^{i_1\cdots\hat{i}_l\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{k-1}},$$

entonces

$$<\Lambda,\mathbf{u}^*\wedge\ \mathbf{e}^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}^*_{j_{k-1}}>=\sum_{i_1<\cdots<i_k}a_{i_1\cdots i_k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\langle\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{u}^*\rangle\delta^{i_1\cdots\hat{i}_l\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{k-1}}$$

$$=\lambda_{j_1,\ldots,j_{k-1}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}a_{j_1\cdots j_{l-1},j_l,i_l,j_{l+1}\cdots j_{k-1}}\langle\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{u}^*\rangle, & \text{si } j_l<i_l\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}a_{j_1\cdots j_{l-1},i_l,j_l,j_{l+1}\cdots j_{k-1}}\langle\mathbf{e}_{i_l},\mathbf{u}^*\rangle, & \text{si } i_l<j_l\end{cases}$$

Ahora, se define $\Lambda^{\perp}:=\{\mathbf{u}^*\in V^*\mid i(\mathbf{u}^*)\Lambda=0\}$ para un Λ fijo y sea $W:=\{w\in V\mid <w,\mathbf{u}^*>=0,\ \forall\ \mathbf{u}^*\in\Lambda^{\perp}\}$.

De manera que $W=(\Lambda^{\perp})^{\perp}$ es el complemento ortogonal respecto del producto dual.

Por lo tanto, $\dim(\Lambda^{\perp})^{\perp}=\dim V-\dim\Lambda^{\perp}\quad\Rightarrow\quad\dim\Lambda^{\perp}=n-l$.

TEOREMA 3.2:

$\Lambda^{\perp}$ es el subespacio generado por $\{\mathbf{w}^*_{l+1},\cdots,\mathbf{w}^*_n\}$.

DEMOSTRACION:

Sea $W=<\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l>$, $\mathbf{w}_{l+1},\cdots\mathbf{w}_n$, son tales que $V=<\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l,\ldots,\mathbf{w}_n>$ y $\{\mathbf{w}^*_1,\cdots,\mathbf{w}^*_n\}$ es la base dual correspondiente de V^*.

Si $j\le l$, $\mathbf{w}^*_j\notin\Lambda^{\perp}$, ya que $\langle\mathbf{w}_j,\mathbf{w}^*_j\rangle=1\neq0$. Si $\mathbf{u}^*\in\Lambda^{\perp}$, las componentes de $\mathbf{u}^*$ respecto de $\mathbf{w}^*_1,\cdots,\mathbf{w}^*_l$ deben ser cero, ya que $\langle\mathbf{w}_j,\mathbf{u}^*\rangle=0$, por consiguiente $\Lambda^{\perp}\subset<\mathbf{w}^*_{l+1},\cdots,\mathbf{w}^*_n>$ y como $\dim\Lambda^{\perp}=n-l$ entonces $\Lambda^{\perp}=<\mathbf{w}^*_{l+1},\cdots,\mathbf{w}^*_n>$.

COROLARIO:

$$w_j^* \in \Lambda^{\perp} \quad \text{si} \quad j \geq l+1$$

LEMA 3.1:

Si $V = W \oplus U$ entonces $\Lambda^{k-1}V \approx \bigoplus_{j=0}^{k} (\Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j}U)$.
(La demostración puede verse en [15]).

TEOREMA 3.3:

$W = \mathrm{Ann}\,(\Lambda^{\perp})$ es el subespacio minimal de V tal que Λ está en la imagen de $j: \Lambda^k W \longrightarrow \Lambda^k V$.

$V = W \oplus U$, $W := \langle w_1, \ldots, w_l \rangle$., $U = \langle w_{l+1}, \cdots w_n \rangle$

DEMOSTRACION:

Para $j \geq 1$ y $u^* \in U^*$, $i(u^*): \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1}V$ induce sobre la componente $\Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j}U$ una aplicación

$$\Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j}U \longrightarrow \Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j-1}U$$

por medio de

$$\langle i(u^*)\Lambda_j, \xi^*_{k-j} \otimes \eta^*_{j-1} \rangle = \langle \Lambda_j, \xi^*_{k-j} \otimes (u^* \wedge \eta^*_{j-1}) \rangle$$

donde Λ_j es la componente de $\Lambda \in \Lambda^k V$ en $\Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j}U$ y $\xi^*_{k-j} \otimes \eta^*_{j-1}$ la componente de Ξ, $\Xi \in \Lambda^{k-1}V^*$ en $\Lambda^{k-j}W \otimes \Lambda^{j-1}U$.

Para $j=1$, $i(u^*)$ induce sobre $\Lambda^{k-1}W \otimes U$ una aplicación

$$\Lambda^{k-1}W \otimes U \longrightarrow \Lambda^{k-1}W$$

donde $\Lambda^{k-1}W \approx \Lambda^{k-1}W \otimes \mathbb{C}$.

Para $u^* = w^*_\alpha$ elemento de la base dual y $\Lambda_1 \in \Lambda^{k-1}W \otimes U$,

$$\Lambda_1 = \sum \lambda_{i_1 \ldots i_{k-1}} (w^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge w^*_{i_{k-1}}) \otimes \sum_{\alpha=l+1}^{n} a_\alpha w_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=l+1}^{n} a_\alpha \left(\sum \lambda_{i_1 \ldots i_{k-1}} w^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge w^*_{i_{k-1}} \right) \otimes w_\alpha \quad \text{siendo}$$

$$\Lambda_\alpha = a_\alpha \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} \lambda_{i_1 \ldots i_{k-1}} w^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge w^*_{i_{k-1}} \right).$$

Para $j \geq l+1$, $j_1<\ldots<j_{k-1}$ fijos, $1\leq j_k \leq l$. $k=1,\ldots,k-1$

$$\langle i(w^*)\Lambda_1, w^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge w^*_{i_{k-1}} \otimes 1_C\rangle = \langle \Lambda_1, w^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge w^*_{j_{k-1}} \otimes w^*_j\rangle = \alpha_j\lambda_{j_1\ldots j_{k-1}} = 0$$

$\forall$ $j= l+1,\ldots,n$. $\forall$ $j_1,\ldots,j_{k-1}$, entonces $\Lambda_j=0$, $j=l+1,\ldots,n$.

Tomemos ahora

$$\Lambda_2 = \sum_{\alpha<\beta=l+1}^{n} \Lambda_{\alpha\beta}\otimes(w_\alpha\wedge w_\beta)\in\Lambda^{k-1}W\otimes\Lambda^2U$$

$$= (\sum_{i_1<\ldots<i_k}\lambda_{i_1\ldots i_{k-1}} w_{i_1}\wedge\ldots w_{i_{k-1}})\otimes(\sum_{\alpha<\beta=l+1}^{n} a_{\alpha\beta}w_\alpha\wedge w_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha<\beta}(\Lambda_{\alpha\beta}\otimes(w_\alpha\wedge w_\beta)$$

siendo $\Lambda_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}}\lambda_{i_1\ldots i_{k-1}} w_{i_1}\wedge\ldots w_{i_{k-1}})$.

Para $j_1,\ldots,j_{k-1}$ fijos $1\leq j_k\leq l$, $k=1,\ldots,k-1$, γ' fijo, $\gamma'=l+1,\ldots,n$, $w^*_\gamma\in U^*$, $l+1\leq\gamma\leq n$.

$$\langle i(w^*_\gamma)\Lambda_2, w^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge w^*_{j_{k-1}}\otimes w^*_{\gamma'}\rangle = \langle\Lambda_2, w^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge w^*_{j_{k-1}}\otimes w^*_\gamma\wedge w^*_{\gamma'}\rangle = a_{\gamma\gamma'}\lambda_{j_1\ldots j_{k-1}} = 0$$

para todo γ , γ', $j_1,\ldots,j_{k-1}$, entonces $\Lambda_{\alpha\beta}=0$.

Similarmente, los otros factores de Λ en $\Lambda^{k-j}W\otimes\Lambda^j U$ $(j\geq 2)$ son cero, y por lo tanto $\Lambda\in\Lambda^k W$.

<u>LEMA 3.2:</u>

Sea $W'=\{ w\in W \mid w\wedge\Lambda=0\}$, entonces Λ es descomponible sí y sólo sí $W'=W$.

DEMOSTRACION:

Si Λ es descomponible entonces dim W=k.

$\Lambda= w_1\wedge\ldots\wedge w_k$ para $w_j\in W$, elemento de la base, $w_j\wedge\Lambda=0$, por lo que $W'=W$.

Si Λ no es descomponible, dim W= $l>k$, y

$$\Lambda^k W\otimes\Lambda^{l-k}W\longrightarrow\Lambda^l W$$

no es la aplicación cero, ya que

$$w_{i_1}\wedge\ldots w_{i_k}\wedge\otimes w_{j_1}\wedge\ldots\wedge w_{j_{l-k}} \mapsto w_{i_1}\wedge\ldots w_{i_k}\wedge w_{j_1}\wedge\ldots\wedge w_{j_{l-k}}\neq 0$$

cuando $i_1\ldots i_k$, $j_1\ldots j_{k-l}$ son todos distintos; lo cual es posible, ya que $l>k$.

En particular:

$w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} \wedge w_j \neq 0$, si $i_1 \ldots i_k, j$ son todos distintos.

Entonces dado

$$\Lambda = \sum \lambda_{i_1 \ldots i_k} (w_{j_1} \wedge \ldots \wedge w_{j_k}),$$

para $i_1 \ldots i_k$ fijo existe j, $1 \leq j \leq l$, tal que j, $i_1 \ldots i_k$, distintos y $w_j \wedge \Lambda \neq 0$, por lo que $W' \neq W$.

Ya que en:

$$\Lambda^{k+1} V^* = \bigoplus_{i+j=k+1} \Lambda^i V^* / \Lambda^{\perp} \otimes \Lambda^j \Lambda^{\perp} = \Lambda^{k+1}(V^* / \Lambda^{\perp}) \oplus \Lambda^k (V^* / \Lambda^{\perp}) \otimes \Lambda^{\perp} \oplus \ldots\ldots$$

todos los términos del miembro de la derecha, excepto el primero, se desvanecen debido a la presencia de $\Lambda^{\perp}$.

De manera que, para $w \in W$, $\langle \Xi, \Lambda \wedge w \rangle$ sólo depende de la componente de Ξ en $\Lambda^{k+1} W^* \approx (V^* / \Lambda^{\perp})$. Entonces

$\Lambda \wedge w = 0$ Ssi $\langle \Xi, \Lambda \wedge w \rangle = 0$, para todo $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$

Ssi $\langle i^*(\Xi) \Lambda, w \rangle = 0$, para todo $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$, Ssi $i^*(\Xi) \in \Lambda^{\perp}$. para todo $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$,

Ssi $i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda = 0$, para todo $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$. Por lo que Λ es descomponible Ssi para todo $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$, $i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda = 0$.

Expresaremos la condición anterior por dualidad, en dos formas: para la primera usaremos el operador

$$(\blacklozenge) \qquad i^*(\Xi): \Lambda^k V \longrightarrow V^*$$

definida para $\Xi \in \Lambda^{k+1} V^*$ por

$$\langle i^*(\Xi) \Lambda, v \rangle = \langle \Xi, \Lambda \wedge v \rangle$$

para todo $v \in V$.

Recordemos que

$$\Lambda^{\perp} := \{ v^* \in V^* \mid i(v^*) \Lambda = 0 \} \quad \text{y}$$
$$W = \mathrm{Ann}\, \Lambda^{\perp} := \{ v \in V \mid \langle u^*, v \rangle = 0, \ \forall \ u^* \in \Lambda^{\perp} \}.$$

Como $V^* = W^* \oplus \Lambda^{\perp}$ entonces $V^* / \Lambda^{\perp} \approx W^*$.

Observemos que por la definición de $\Lambda^{\perp}$, para $v \in W$ el miembro de la izquierda de $(\blacklozenge)$ depende solamente de la imagen de Ξ bajo la proyección natural:

$$V^* \xrightarrow{\Pi} V^*/\Lambda^{\perp}$$

$$\Lambda^{k+1}V^* \longrightarrow \Lambda^{k+1}(V^*/\Lambda^{\perp})$$

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{k+1}} \mapsto [e_{i_1}] \wedge \ldots \wedge [e_{i_{k+1}}]$$

Consecuentemente, la condición $\Lambda \wedge w=0,\ \forall\ w \in W$ es equivalente a $i(\Xi)\Lambda \in \Lambda^{\perp}$, que se torna equivalente a

$$(*) \qquad i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda = 0 \qquad \forall\ \Xi \in \Lambda^{k+1}V^*$$

El miembro de la izquierda de (*) da $\binom{n}{k+1}$ formas cuadráticas en las coordenadas homogéneas Λ $P(G(k,n))$; igualando a cero, se obtiene la clásica relación de Plücker.

En resumen: la imagen de la Grassmanniana bajo la inmersión de Plücker;

$$P\colon G(k,n) \longrightarrow P(\Lambda^k V)$$

queda determinada por un sistema de ecuaciones cuadráticas dadas por (*).

Ilustremos el proceso con los siguientes ejemplos:

1) Consideremos las Grassmanniana G(2,4). Sea $\Xi \in \Lambda^3V^*$; entonces

$$\Xi = \xi_{123}e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \xi_{124}e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^* + \xi_{134}e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* + \xi_{234}e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*$$

$i(\Xi) = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$, de manera que

$$a_i = \langle i(\Xi)\Lambda, e_i \rangle = \langle \Xi, \Lambda \wedge e_i \rangle, \quad \Lambda \in \Lambda^2V.$$

$$\Lambda = \lambda_{12}e_1 \wedge e_2 + \lambda_{13}e_1 \wedge e_3 + \lambda_{14}e_1 \wedge e_4 + \lambda_{23}e_2 \wedge e_3 + \lambda_{24}e_2 \wedge e_4 + \lambda_{34}e_3 \wedge e_4.$$

$$\Lambda \wedge e_1 = \lambda_{23}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + \lambda_{24}e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + \lambda_{34}e_1 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

$$\Lambda \wedge e_2 = -\lambda_{13}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - \lambda_{14}e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + \lambda_{34}e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

$$\Lambda \wedge e_3 = \lambda_{12}e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - \lambda_{14}e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - \lambda_{24}e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

$$\Lambda \wedge e_4 = \lambda_{12}e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + \lambda_{13}e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + \lambda_{23}e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

$a_i = \langle \Xi, \Lambda \wedge e_i \rangle$, es decir,

$$a_i = \langle \xi_{123}e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + \xi_{124}e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^* + \xi_{134}e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* + \xi_{234}e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*, \Lambda \wedge e_i \rangle$$

así que

$a_1= \lambda_{23}\xi_{123} + \lambda_{24}\xi_{124} + \lambda_{34}\xi_{134}.$

$a_2= -\lambda_{13}\xi_{123} - \lambda_{14}\xi_{124} + \lambda_{34}\xi_{234}.$

$a_3 = \lambda_{12}\xi_{123} - \lambda_{14}\xi_{134} - \lambda_{24}\xi_{234}.$

$a_4= \lambda_{12}\xi_{124} + \lambda_{13}\xi_{134} + \lambda_{23}\xi_{234}.$

Además,

$$i^*(\Xi)\Lambda = \sum_{i=1}^{4} a_i \mathbf{e}_i^* = a_1\mathbf{e}_1^* + a_2\mathbf{e}_2^* + a_3\mathbf{e}_3^* + a_4\mathbf{e}_4^*$$

como $i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda \in V$; $i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda = \sum \bar{\lambda}_i \mathbf{e}_i$, por consiguiente

$$i^*(\Xi)\Lambda\wedge\mathbf{e}_1^* = -a_2\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_2^* - a_3\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_3^* - a_4\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_4^*$$

$$i^*(\Xi)\Lambda\wedge\mathbf{e}_2^* = a_1\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_2^* - a_3\,\mathbf{e}_2^*\wedge\mathbf{e}_3^* - a_4\,\mathbf{e}_2^*\wedge\mathbf{e}_4^*$$

$$i^*(\Xi)\Lambda\wedge\mathbf{e}_3^* = a_1\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_3^* + a_2\,\mathbf{e}_2^*\wedge\mathbf{e}_3^* - a_4\,\mathbf{e}_3^*\wedge\mathbf{e}_4^*$$

$$i^*(\Xi)\Lambda\wedge\mathbf{e}_4^* = a_1\,\mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_4^* + a_2\,\mathbf{e}_2^*\wedge\mathbf{e}_4^* + a_3\,\mathbf{e}_3^*\wedge\mathbf{e}_4^*$$

$$\bar{\lambda}_i = \langle i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda, \mathbf{e}_i^*\rangle = \langle \Lambda, i^*(\Xi)\Lambda\wedge\mathbf{e}_i^*\rangle = 0, \quad \forall\ \Xi .$$

$\bar{\lambda}_1 = -a_2\lambda_{12} - a_3\lambda_{13} - a_4\lambda_{14}$

$\bar{\lambda}_2 = a_1\lambda_{12} - a_3\lambda_{23} - a_4\lambda_{24}$

$\bar{\lambda}_3 = a_1\lambda_{13} + a_2\lambda_{23} - a_4\lambda_{34}$

$\bar{\lambda}_4 = a_1\lambda_{14} + a_2\lambda_{24} + a_3\lambda_{34}$

Como $i(i^*(\Xi)\Lambda)\Lambda=0$, $\forall\ \Xi$, escogemos en particular $\Xi = \mathbf{e}_1^*\wedge\mathbf{e}_2^*\wedge\mathbf{e}_3^*$, entonces

$$a_1=\lambda_{23}, \qquad a_2=-\lambda_{13}, \qquad a_3=\lambda_{12}, \qquad a_4=0.$$

Por consiguiente, se tiene que

$\bar{\lambda}_1 = \lambda_{13}\lambda_{12} - \lambda_{12}\lambda_{13} \qquad = 0$

$\bar{\lambda}_2 = \lambda_{23}\lambda_{12} - \lambda_{12}\lambda_{23} \qquad = 0$

$\bar{\lambda}_3 = \lambda_{23}\lambda_{13} - \lambda_{13}\lambda_{23} \qquad = 0$

$\bar{\lambda}_4 = \lambda_{23}\lambda_{14} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{12}\lambda_{34} = 0$

Lo mismo se obtiene tomando cualquier otro elemento de la base; por consiguiente $G(2,4)$ es una hipersuperficie cuadrática de $\mathbb{P}^5$, dada por la ecuación cuadrática

$$\lambda_{23}\lambda_{14} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{12}\lambda_{34} = 0$$

2) En forma similar, para el caso de la Grassmanniana $G(3,5)$, se obtienen las ecuaciones

$$\lambda_{125}\lambda_{134} - \lambda_{135}\lambda_{124} + \lambda_{123}\lambda_{145} = 0$$

$$\lambda_{125}\lambda_{234} - \lambda_{235}\lambda_{124} + \lambda_{245}\lambda_{123} = 0$$

$$\lambda_{135}\lambda_{234} - \lambda_{245}\lambda_{134} + \lambda_{345}\lambda_{124} = 0$$

$$\lambda_{145}\lambda_{234} - \lambda_{245}\lambda_{134} - \lambda_{345}\lambda_{124} = 0$$

$$\lambda_{134}\lambda_{235} - \lambda_{234}\lambda_{135} - \lambda_{345}\lambda_{123} = 0$$

$$\lambda_{145}\lambda_{235} - \lambda_{245}\lambda_{135} + \lambda_{345}\lambda_{125} = 0$$

Por lo tanto, G(3.5) es una hipersuperficie cuadrática de $\mathbb{P}^9$, dada por el sistema anterior.

Finalmente, cada punto $x \in X$, posee vecindad $U_x \overset{\phi}{\approx} \mathbb{C}^{k(n-k)}$, donde cada una de las φ son diferenciablemente continuas, por consiguiente, **G(k,n) posee la estructura de una variedad diferenciable, incluso analítica.**

CAPITULO 4

CONSTRUCCION DEL FIBRADO UNIVERSAL SOBRE LA GRASSMANNIANA

INTRODUCCION:

Como parte final del trabajo se presentan en este capítulo, generalidades de los fibrados vectoriales, cómo se construyen y algunos ejemplos interesantes.

Se definen: homomorfismos e isomorfismos entre fibrados, fibrados vectoriales euclideanos, subfibrados, fibrados cociente, fibrado inducido y el fibrado de clasificación, la variedad Grassmanniana y los fibrados universales y la variedad Grassmanniana infinita.

Y finaliza con una aplicación del fibrado universal en la construcción del grupo de Grotendieck y del anillo de Grotendieck asociado a un espacio compacto X.

4.1 FIBRADOS VECTORIALES

DEFINICION 4.1.1:

Sea B un espacio topológico fijo, que será llamado el espacio base. Un fibrado vectorial complejo ξ sobre B, consiste de lo siguiente:

1.- Un espacio topológico $E= E(\xi)$ llamado el espacio total.

2.- Un mapeo continuo $\pi : E \longrightarrow B$ llamado la proyección, y

3.- Para cada $b \in B$, la estructura de un espacio vectorial en el conjunto $\pi^{-1}(b)$.

Además, debe satisfacer la siguiente restricción llamada

CONDICION DE TRIVIALIDAD LOCAL:

Para cada punto $b \in B$ debe existir una vecindad $U \subset B$, un entero $n \geq 0$, y un homeomorfismo:

$$h : U \times \mathbb{C}^{n} \longrightarrow \pi^{-1}(U).$$

De manera que, para cada $b \in U$, la correspondencia

$$x \longrightarrow h(b,x)$$

define un isomorfismo entre el espacio vectorial $\mathbb{C}^{n}$ y el espacio vectorial $\pi^{-1}(b)$.

El par (U,h) será llamado un sistema local de coordenadas para ξ con respecto de b. Si es posible elegir U igual al espacio base completo, entonces ξ será llamado un **fibrado trivial.**

El espacio vectorial $\pi^{-1}(b)$ es llamado **la fibra sobre b**; y se denota por F_b o $F_b(\xi)$.

F_b nunca es vacío, aunque puede consistir de un único punto. La dimensión n de F_b podría ser, en general, una función de b, localmente constante; pero en los casos de más interés, esta función es constante. Se habla entonces de un fibrado n-dimensional o brevemente, de un $\mathbb{C}^n$-plano.

El concepto de **fibrado vectorial liso** puede definirse en forma similar. Se requiere que B y E sean variedades lisas, que π sea un mapeo liso, y que para cada $b \in B$ exista un sistema coordenado local (U,h) con $b \in U$, tal que h es un difeomorfismo.

HOMOMORFISMO DE FIBRADOS:

DEFINICION 4.1.2:

Consideremos los fibrados $\xi = (E,B,\pi)$ y $\eta = (F,B,\pi')$ y el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Diremos que $\varphi : E \longrightarrow F$ es un homomorfismo de fibrados, si:

a) $\pi' \circ \varphi = \pi$.

b) $\varphi/\pi'(b)$ es un homomorfismo de espacios vectoriales entre $\pi^{-1}(b)$ y $\pi'^{-1}(b)$.

Se dice que φ es un isomorfismo de fibrados, si φ es un homomorfismo, entonces $\varphi/\pi^{-1}(b)$
es un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $b \in B$. Se puede mostrar que si $\varphi/\pi^{-1}(b)$ es isomorfismo para todo $b \in B$, entonces φ es un isomorfismo de fibrados sobre B.

Diremos que los fibrados $\xi = (E,B,\pi)$ y $\eta = (F,B,\pi')$ son isomorfos, $\xi \approx \eta$, si existe un isomorfismo de fibrados entre ellos.

HOMOMORFISMO DE FIBRADOS SOBRE DIFERENTES ESPACIOS BASE:

DEFINICION 4.1.3:

Un homomorfismo $\Phi: \xi \longrightarrow \eta$, consta de un par (φ,f) de aplicaciones continuas: $\varphi: E \longrightarrow E'$, $f:B \longrightarrow B'$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

es conmutativo; y la restricción : $\varphi/\pi^{-1}(b) : \pi^{-1}(b) \longrightarrow \pi^{-1}(f(b))$ es homomorfismo de espacios vectoriales, para todo $b \in B$.

Si φ y f son homeomorfismos, entonces se dice que es un isomorfismo de fibrados.

Se presentan a continuación algunos ejemplos de fibrados.

Ejemplo 1:

El fibrado trivial con espacio total $B\times \mathbb{R}^n$, con mapeo proyección $\pi(b,x) = b$ y con la estructura de espacio vectorial en las fibras, definido por:

$$t_1(b,x_1) + t_2(b,x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2).$$

denotado por $\boldsymbol{E}^n_B$. Un segundo $\mathbb{R}^n$-fibrado sobre B es trivial sí y sólo sí es isomorfo a $\boldsymbol{E}^n_B$.

Ejemplo 2:

El fibrado tangente Γ_M de una variedad lisa M. El espacio total de Γ_M es la variedad DM consistente de todos los pares (x,v) con $x \in M$ y **v** tangente a M en x . El mapeo proyección:

$$\pi: DM \longrightarrow M$$

está definido por $\pi(x,\mathbf{v}) = x$, y la estructura de espacio vectorial definida por:

$$t_1(x,\mathbf{v}_1) + t_2(x,\mathbf{v}_2) = (x, t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2).$$

Si Γ_M es un fibrado trivial, entonces la variedad M es llamada "paralelizable"; por ejemplo, supongamos que M es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces DM es igual a $M\times\mathbb{R}^n$, y M claramente es paralelizable.

La 2-esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ proporciona un ejemplo de una variedad que no es paralelizable.
De hecho, una variedad paralelizable debe tener característica de Euler igual a cero, mientras que la 2-esfera tiene característica de Euler +2.

Ejemplo 3:

El fibrado normal ν de una variedad lisa $M \subset \mathbb{R}^n$, se obtiene como sigue: el espacio total
$E \subset M \times \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los pares $(x,\mathbf{v})$ tales que $\mathbf{v}$ es ortogonal al espacio tangente DM_x.

El mapeo proyección $\pi: E \longrightarrow M$ y la estructura de espacio vectorial en $\pi^{-1}(x)$ son definidos como en los ejemplos 1 y 2, y por las fórmulas

$$\pi\,(x,\mathbf{v}) = x \quad \text{y} \quad t_1(x,\mathbf{v}_1) + t_2(x,\mathbf{v}_2) = (x,\, t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2).$$

Ejemplo 4:

El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n$ puede definirse como el conjunto de todos los pares no ordenados $\{x,-x\}$, donde x varía sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y es topologizado como un espacio cociente de $\mathbb{S}^n$. Alternativamente, $\mathbb{P}^n$ puede definirse como el conjunto de líneas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esto conduce a lo mismo, ya que cada línea corta $\mathbb{S}^n$ en dos puntos antipódicos.

Sea $E(Y'_n)$ el subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ consistente de todos los pares $(\{\pm x\},\mathbf{v})$ tal que el vector $\mathbf{v}$ es múltiplo de x. Definimos:

$$\pi: E(Y'_n) \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

por $\pi\,(\{\pm x\},\mathbf{v}) = \{\pm x\}$. Por lo tanto, cada fibra $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ puede ser identificada con la línea sobre x y $-x$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. A cada línea tal, se le da su usual estructura de espacio vectorial. El fibrado vectorial resultante Y'_n será llamado el **fibrado canónico lineal sobre $\mathbb{P}^n$**.

Prueba de que Y'_n es localmente trivial:

Sea $U \subset \mathbb{S}^n$ cualquier conjunto abierto lo suficientemente pequeño para que no contenga un par de puntos antipódicos, y sea U_1 la imagen de U en $\mathbb{P}^n$. Entonces un homeomorfismo

$$h: U_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$$

se define con el requerimiento de que $h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, t\,x)$ para cada $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$.
Evidentemente, (U_1,h) es un sistema local coordenado ya que Y'_n es localmente trivial.

DEFINICION 4.1.4:

Una sección de un fibrado vectorial ξ con espacio base B, es una función continua

$$s: B \longrightarrow E(\xi)$$

que aplica cada $b \in B$ en un elemento de la correspondiente fibra $F_b(\xi)$. Tal sección en ninguna parte es cero, si s(b), es un vector no cero de $F_b(\xi)$. (Una sección del fibrado tangente de una variedad lisa M, es usualmente llamada un campo vectorial sobre M).

Evidentemente, un $\mathbb{R}^1$-fibrado trivial posee una sección que en ninguna parte es cero. Veremos que el fibrado Y'_n no tiene sección.

Sea $s: \mathbb{P}^n \longrightarrow E(Y'_n)$ una sección, y consideremos la conposición

$$\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \xrightarrow{s} E(Y'_n)$$

que lleva cada $x \in \mathbb{S}^n$ a algún par $(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(Y'_n)$, evidentemente t(x) es una función real continua de x, y $t(-x)=-t(x)$. Ya que $\mathbb{S}^n$ está relacionado, se sigue del toerema del valor intermedio que $t(x_0)=0$ para algún x_0. Por lo tanto, $s(\{\pm x_0\})=(\{\pm x_0\}, 0)$. Esto prueba el siguiente teorema:

TEOREMA 4.1.1:

El fibrado Y'_n sobre $\mathbb{P}^n$ no es trivial para $n \geq 1$.

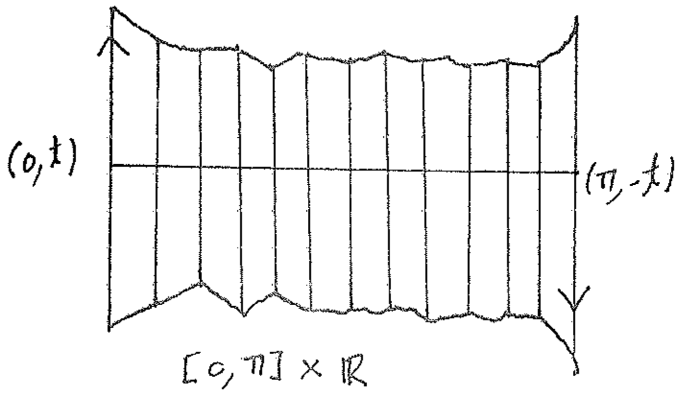
Es de especial interés, el espacio $E(Y'_n)$ para el caso particular en que n=1. En este caso, cada punto $e=(\{\pm x\},v)$ de $E(Y'_n)$, puede escribirse como:
$e=(\{\pm(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\}, t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta))$ con $0 \leq \theta \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$. Esta representación es única, excepto que el punto

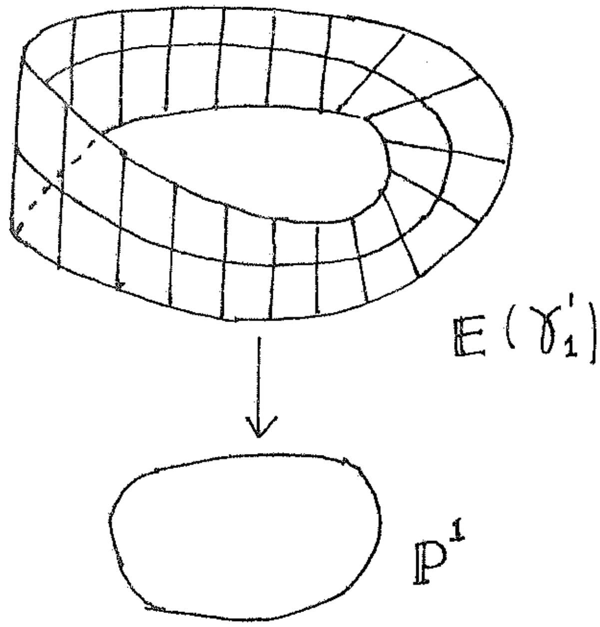
$$(\{\pm(\cos 0, \operatorname{sen}\theta)\}, t(\cos\theta, \operatorname{sen} 0)) = (\{\pm(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)\}, -t(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)), \text{ para cada } t.$$

En otras palabras, $E(Y'_n)$ puede obtenerse de la banda $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ en el plano (θ,t) identificando la frontera izquierda con $[0] \times \mathbb{R}$ con la frontera derecha $[\pi] \times \mathbb{R}$, bajo la correspondencia

$$(0, t) \mapsto (\pi, -t)$$

Por consiguiente, $E(Y'_1)$ es una banda abierta de Moebius. Esta descripción da una prueba alternativa de que Y'_1 es no trivial, puesto que la banda de Moebius ciertamente no es homeomórfica al cilindro $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}$





Consideremos ahora una colección $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de secciones de un fibrado vectorial ξ.

<u>DEFINICION 4.1.5:</u>

Las secciones $s_1, \ldots, s_n$ son en ninguna parte dependientes, si para cada $b \in B$ los vectores $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ son linealmente independientes.

<u>TEOREMA 4.1.2:</u>

Un $\mathbb{R}^n$-fibrado vectorial ξ es trivial sí y sólo sí ξ admite una n-sección $s_1, \ldots, s_n$ que en ninguna parte son linealmente dependientes. La prueba dependerá del siguiente resultado básico:

<u>LEMA 4.1.2:</u>

Sean ξ y η fibrados vectoriales sobre B, y sea

$$f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$$

una función continua que mapea cada espacio vectorial $F_b(\xi)$ isomórficamente sobre el correspondiente espacio vectorial $F_b(\eta)$. Entonces f es necesariamente un homeomorfismo; por lo tanto $\xi \approx \eta$.

PRUEBA:

Dado cualquier punto $b_0 \in B$, elegimos un sistema local de coordenadas (U,g) para ξ y (V,h) para η, con $b_0 \in U \cap V$, entonces debemos mostrar que la composición:

$$(U \cap V)\times \mathbb{R}^n \xrightarrow{h^{-1}\circ f\circ g} (U \cap V)\times \mathbb{R}^n$$

es homeomorfismo. Haciendo $h^{-1}(f(g(b,x)))=(b,y)$, resulta evidente que $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ puede expresarse en la forma $y_i = \sum_j f_{ij}(b)x_j$, donde $[f_{ij}(b)]$ denota una matriz no-singular de números reales. Además, las entradas $f_{ij}(b)$ dependen continuamente de b. Sea $[F_{ij}(b)]$ la matriz inversa. Evidentemente, $g^{-1}\circ f^{-1}\circ h(b,y) = (b,x)$, donde $x_j= \sum_i F_{ji}(b)y_i$.

Ya que los números complejos $F_{ji}(b)$ dependen continuamente de la matriz $[F_{ij}(b)]$ que dependen continuamente de b. Por lo tanto, $g^{-1}\circ f^{-1}\circ h$ es continua, lo cual completa la prueba del lema.

PRUEBA DEL TEOREMA:

Sean $s_1,\ldots,s_n$ secciones de ξ que en ninguna parte son linealmente dependientes. Definimos:

$f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ por $f(b,x)= x_1s_1(b) +\ldots\ldots+x_ns_n(b)$. Evidentemente, f es continua y mapea cada fibra del fibrado trivial ε_B^n isomórficamente sobre la correspondiente fibra de ξ. Por consiguiente f es un isomorfismo de fibrados y es ξ trivial.

Conversamente, supongamos que ξ es trivial, con sistema de coordenadas (B,h), definiendo:
$s_i(b)= h(b(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)) \in F_b(\xi)$, (con 1 en el i-ésimo lugar). Resulta evidente que $s_1,\ldots,s_n$ son en ninguna parte linealmente dependientes. Esto completa la prueba.

Como una ilustración, el fibrado tangente del círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ admite una sección en ninguna parte cero, como se ilustra en la figura (las flechas llevan $x \in \mathbb{S}^1$ a x+v, donde $s(x)=(x,v)=((x_1,x_2),(-x_2,x_1))$, por consiguiente $\mathbb{S}^1$ es paralelizable.

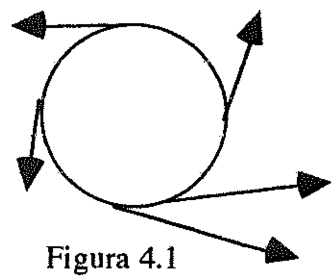


Figura 4.1

Similarmente, la 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ admite tres campos vectoriales en ninguna parte dependientes:

$$S_i(x) = (x, S'(x)),$$

donde:

$$S_1'(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \quad S_2'(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2), \quad S_3'(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1).$$

Por lo tanto, $\mathbb{S}^3$ es paralelizable. (Estas fórmulas proceden de la multiplicación de cuaterniones en $\mathbb{R}^4$). En efecto, las únicas paralelizables son para n=1,3,7. Esto está íntimamente relacionado con la posibilidad de dotar al $\mathbb{R}^n$ de un estructura de álgebra de división. Se ha mostrado que $\mathbb{R}^n$ posee dicha estructura si sus esferas correspondientes son paralelizables. De aquí se obtiene de forma topológica el teorema de Frobenius:

$\mathbb{R}^n$ posee una estructura de álgebra de división sólo para n=1,2,4,8; que son el álgebra de los números reales, números complejos, cuaterniones y octoniones o números de Cayley.

4.2 FIBRADOS VECTORIALES EUCLIDEANOS

Recordemos que una función μ de valor real sobre un espacio vectorial de dimensión finita V, es cuadrática si μ puede expresarse en la forma:

$$\mu(v) = \sum l_i(v)\, l'_i(v),$$

donde l_i y l'_i son lineales. Cada función cuadrática determina un apareamiento simétrico y bilineal:

$$V, W \longrightarrow V \cdot W$$

$V \times V$ en $\mathbb{R}$, donde $V \cdot W = 1/2(\mu(v+w)) - \mu(v) - \mu(w))$.

Nótese que $v \cdot v = \mu(v)$. La función cuadrática μ es llamada **definida positiva** si $\mu(v) > 0$, para $v \neq 0$.

DEFINICION 4.2.1:

Un espacio vectorial euclideano es un espacio vectorial real V conjuntamente con una función cuadrática definida positiva

$$\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

El número real $v \cdot w$ será llamado el producto interno de los vectores v y w. El número $v \cdot v = \mu(v)$ será denotado también por $|v|^2$.

DEFINICION 4.2.2:

Un fibrado vectorial euclideano es un fibrado vectorial real ξ conjuntamente con un función continua

$$\mu: E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que la restricción de μ a cada fibra de ξ es definida positiva y cuadrática. La función μ misma será llamada una métrica euclideana sobre el fibrado vectorial ξ.

En el caso del fibrado tangente Γ_M de una variedad lisa, una métrica euclideana:

$$\mu: DM \longrightarrow \mathbb{R}$$

es llamada una **métrica Riemaniana**; y M conjuntamente con μ es llamada una **variedad Riemaniana** (En la práctica se requiere que μ sea una función lisa. La notación $\mu = ds^2$ es usada a menudo para una métrica Riemaniana.)

Ejemplos:

Al fibrado trivial E^n_B se le puede dar la métrica euclideana: $\mu(b,x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Ya que el fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$ es trivial, se sigue que la variedad lisa $\mathbb{R}^n$ posee una métrica Riemaniana estandar. Para cualquier variedad lisa $M \subset \mathbb{R}^n$, la composición

$$DM \subset D\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$$

convierte a M en un variedad Riemaniana.

A priori aparecen dos diferentes conceptos de trivialidad para fibrados vectoriales euclideanos, sin embargo, el siguiente lema muestra que estos coinciden.

LEMA 4.2.1:

Sea ξ un fibrado vectorial de dimensión n sobre B, y sea μ cualquier métrica euclideana sobre ξ. Entonces existen n secciones $s_1, \ldots, s_n$ de ξ que son normales y ortogonales, en el sentido de que

$s_i(b) \cdot s_j(b) = \delta_{ij}$ para cada $b \in B$. Por lo tanto ξ es trivial también como fibrado vectorial euclideano.

PRUEBA:

Sean $s'_1,\dots, s'_n$ n secciones cualesquiera en ninguna parte linealmente dependientes. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a $s'_1(b),\dots, s'_n(b)$ obtenemos una base ortonormal para $F_b(\xi)$. Ya que las funciones resultantes: $s_1,\dots, s_n$ son claramente continuas, se completa la prueba.

DEFINICION 4.2.3:

Sea (E,X,p) un fibrado sobre X y $Y \subset X$ un subespacio, entonces $(p^{-1}(Y), Y, p)$ es un fibrado sobre Y; se llama la restricción de E a Y, y se suele denotar por E/Y.

DEFINICION 4.2.4:

Sea (E,X,p) un fibrado sobre X, y $f: Y \longrightarrow X$ una aplicación continua. Entonces f induce un fibrado sobre Y, que lo denotaremos por (f^*E, Y, p); donde

$$f^*E:=\{(e,x) \in E \times X \mid p(e)=f(x)\}.$$

f induce además una aplicación $f^*: f^*E \longrightarrow E$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "p^*"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Además f^* restringida a cada fibra es lineal.

4.3 OPERACIONES SOBRE FIBRADOS VECTORIALES

Las operaciones naturales sobre espacios vectoriales, tales como la suma directa y el producto tensorial, pueden extenderse a fibrados vectoriales. La única cuestión molesta es cómo topologizar los espacios resultantes. Se dará un método general para extender operaciones de espacios vectoriales a fibrados vectoriales, el cual permitirá manejar estos problemas uniformemente.

Sea T un functor que transforma espacios vectoriales de dimensión finita en espacios vectoriales de dimensión finita. Para simplificar, asumiremos que T es un functor covariante de una variable. Por lo tanto, a cada espacio vectorial V, le asociamos un espacio vectorial T(V). Diremos que T es un functor continuo, si para todo V y W, el mapeo

$$T:\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T(V),T(W)),$$

es continuo.

Si $\xi=(E,B,\pi)$ es un fibrado vectorial, definimos el conjunto $T(\xi)$, como la unión:

$\bigcup_{x\in X} T(\xi_x)$, y si $\varphi:\xi \longrightarrow \eta$, definimos $T(\varphi):T(\xi) \longrightarrow T(\eta)$, por los mapeos

$T(\varphi_x):T(\xi_x) \longrightarrow T(\eta_x)$; siendo $\eta = (F,B',\pi')$.

Debemos mostrar que $T(\xi)$ tiene una topología natural, y, que en esta topología, $T(\varphi)$ es continua.

Nota: A partir de aquí y para facilitar la notación, se hará referencia al espacio topológico del fibrado en lugar del fibrado.

Se comenzará definiendo T(E) para el caso en que E es un fibrado producto. Si $E=X\times V$, se define T(E) como $X\times T(V)$ en la topología producto. Supongamos que $F= X\times W$, y que: $\varphi:E \longrightarrow F$, es un homomorfismo. Sea $\Phi:X \longrightarrow Hom(V,W)$ el mapeo correspondiente.

Ya que, por hipótesis, $T:Hom(V,W) \longrightarrow Hom(T(V),T(W))$, es continuo, $T\Phi:X \longrightarrow Hom(T(V),T(W))$ es continuo, por lo tanto $T(\varphi)$: $X\times T(V) \longrightarrow X\times T(W)$, también es continuo. Si φ es un isomorfismo, entonces $T\varphi$ será un isomorfismo, ya que es continuo y un isomorfismo en cada fibra. Ahora supongamos que E es trivial, pero no tiene estructura de producto preferida. Escogemos un isomorfismo $\alpha:E \longrightarrow X\times V$, y topologizamos T(E), requiriendo:
$T(\alpha)$: $T(E) \longrightarrow X\times T(V)$ sea homeomorfismo.

Si β: $E \longrightarrow X\times W$ es cualquier otro isomorfismo, haciendo $\varphi = \beta\alpha^{-1}$ vemos que $T(\alpha)$ y $T(\beta)$ inducen la misma topología sobre T(E), ya que $T(\varphi)=T(\beta)T(\alpha^{-1})$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, la topología sobre E no depende de la escogencia de α. Además, si $Y\subset X$, es claro que la topología sobre T(E)/Y es la misma que sobre T(E/Y). Finalmente, si $\varphi:E \longrightarrow F$ es un homeomorfismo de fibrados triviales, vemos que $T(\varphi):T(E) \longrightarrow T(F)$ es continuo y, por lo tanto, un homeomorfismo.

Ahora supongamos que E es cualquier fibrado vectorial, entonces si $U \subset X$ es tal que E/U es trivial, topologizamos T(E/U) como antes. Topologizamos T(E) tomando para los conjuntos abiertos estos subconjuntos $V \subset T(E)$ tales que $V\cap (T(E)/U)$ es abierto en T(E/U) para todo abierto $U \subset X$, para el cual E/U es trivial. Se puede verificar fácilmente que si $Y\subset X$, la topología sobre T(E/Y) es la misma que sobre T(E)/Y, y que, si $\varphi:E \longrightarrow F$ es cualquier homomorfismo, $T(\varphi):T(E) \longrightarrow T(F)$ es también un homomorfismo. Si $f: Y \longrightarrow X$ es un mapeo continuo y E es un fibrado vectorial sobre X, entonces para cualquier functor continuo T, tenemos un isomorfismo natural: $f^*T(E) \approx Tf^*(E)$.

En el caso cuando T tiene varias variables, ambas covariantes y contravariantes, se procede en forma similar. Por lo tanto, se pueden definir para fibrados vectoriales E y F, fibrados correspondientes :

1) $E\oplus F$, su suma directa o suma de Whitney

2) $E\otimes F$, su producto tensorial

3) Hom(E,F)

4) E^* el fibrado dual de E

5) $\lambda^i(E)$, donde λ^i es la i-ésima potencia externa.

También se obtienen isomorfismos naturales:

1) $E \oplus F \approx F \oplus E$

2) $E \otimes F \approx F \otimes E$

3) $E \otimes (F' \oplus F'') \approx (E \otimes F') \oplus (E \otimes F'')$

4) $\mathrm{Hom}(E,F) \approx E^* \otimes F$

5) $\lambda^k(E \oplus F) \approx \bigoplus_{i+j=k} (\lambda^i(E) \otimes \lambda^j(F))$

4.4 SUBFIBRADOS Y FIBRADOS COCIENTE

DEFINICION 4.4.1:

Sea E un fibrado vectorial. Un subfibrado de E es un subconjunto de E que es un fibrado en la estructura inducida

Un homomorfismo $\varphi: F \longrightarrow E$ es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo) si cada
$\varphi_x: F_x \longrightarrow E_x$ es un monomorfismo (respectivamente, epimorfismo).

$\varphi: F \longrightarrow E$ es monomorfismo sí y sólo sí $\varphi^*: E^* \longrightarrow F^*$ es un epimorfismo. Si F es un subfibrado de E, y si $\varphi: F \longrightarrow E$ es el mapeo inclusión, entonces φ es un monomorfismo.

LEMA 4.4.1:

Si $\varphi: F \longrightarrow E$ es un monomorfismo , entonces $\varphi(F)$ es un subfibrado de E, y
$\varphi: F \longrightarrow \varphi(F)$
es un isomorfismo.

PRUEBA:

$\varphi: F \longrightarrow \varphi(F)$ es una biyección, así que $\varphi(F)$ es un subfibrado, φ es un isomorfismo. Solamente necesitamos mostrar que $\varphi(F)$ es un subfibrado. El problema es local, así que es suficiente considerar el caso cuando E y F son fibrados producto. Sea $E = X \times V$, y sea $x \in X$; elegimos $W_x \subset V$ el subespacio complementario a $\varphi(F_x)$. $G = X \times W_x$ es un subfibrado de E. Definimos

$\theta: F\oplus G \longrightarrow E$ por $\theta(a\oplus b)= \varphi(a) + i(b)$; donde $i: G \longrightarrow E$ es la inclusión. Por construcción, θ_x es un isomorfismo . Por lo tanto, existe una vecindad abierta U de x tal que θ/U es un isomorfismo. F es un subfibrado de $F\oplus G$, así que $\theta(F) =\varphi(F)$ es un subfibrado de $\theta(F\oplus G) = E$ sobre U.

Nótese que en nuestro argumento, hemos mostrado más de lo que hemos establecido. hemos mostrado, que si $\varphi:F \longrightarrow E$, entonces el conjunto de puntos para los cuales φ_x es un monomorfismo, forman un conjunto abierto. También hemos mostrado que localmente un subfibrado es un sumando directo.

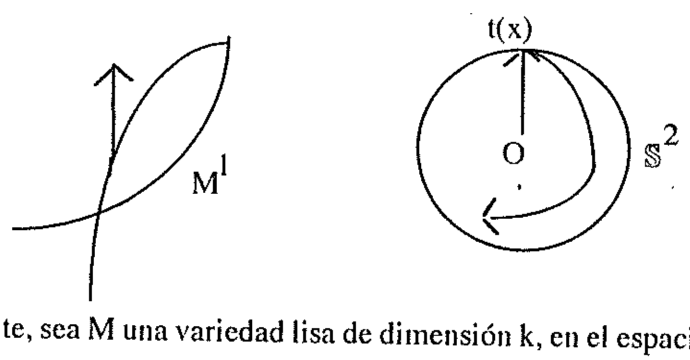
DEFINICION 4.4.2:

Si F es un subfibrado de E, el fibrado cociente E/F es la unión de todos los espacios vectoriales E_x/F_x, dada la topología cociente. Ya que F es localmente un sumando directo de E, se ve que E/F es localmente trivial y por lo tanto, fibrado. Esto justifica la terminología.

4.5 LA VARIEDAD GRASSMANNIANA Y LOS FIBRADOS UNIVERSALES

En geometría diferencial clásica, uno encuentra la imagen esférica de una curva $M^1 \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Esto es la imagen de M^1 bajo el mapeo, $t: M^1 \longrightarrow \mathbb{S}^k$ que lleva cada punto de M^1 a su vector tangente unitario. En forma similar, Gauss define la imagen esférica de una hipersuperficie $M^k \subset \mathbb{S}^{k+1}$ como la imagen de M^k bajo el mapeo; $t':M^k \longrightarrow \mathbb{S}^k$ que lleva cada punto de M a su vector normal unitario.

Para especificar el signo del vector tangente o normal es necesario que M^1 o M^k tenga orientación preferida. Sin embargo, fuera de esta orientación, uno puede, no obstante, definir un mapeo de la variedad al espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n$



Más generalmente, sea M una variedad lisa de dimensión k, en el espacio coordenado $\mathbb{R}^n$. Entonces a cada $x \in M$ uno puede asignarle el espacio tangente $DM_x \subset \mathbb{R}^n$. Pensaremos de DM_x como determinando un punto en un nuevo espacio topológico G(k,n).

Un fibrado vectorial canónico $Y^k(\mathbb{C}^n)$ sobre G(k,n) se construye como sigue. Sea $E=E(Y^k(\mathbb{C}^n))$ el conjunto de todos los pares: (k-subespacios de $\mathbb{C}^n$, vector en el k-subespacio).

Este es topologizado como un subconjunto de $G(k,n)\times \mathbb{C}^n$. La proyección $\pi:E \longrightarrow G(k,n)$ se define por: $\pi(\Lambda,x)=\Lambda$ y la estructura de espacio vectorial en la fibra sobre Λ se define:

$$t_1(\Lambda,x_1)+t_2(\Lambda,x_2)=(\Lambda,t_1x_1+t_2x_2)$$

LEMA 4.5.1:

El fibrado vectorial $Y^k(\mathbb{C}^n)$ construido de esta forma satisface la condición de trivialidad local.

PRUEBA:

Sea U la vecindad de un x_0 construido como en el lema 4.4.1 , definimos el homeomorfismo coordenado:

$$h: U\times x_0 \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

Sea $h(Y,x)=(Y,y)$ donde y denota el único vector en Y que es aplicado en x por la proyección ortogonal
$p:\mathbb{C}^n \longrightarrow x_0$, identificamos $h(Y,x)=(Y,x+T(Y)x)$ y $h^{-1}(Y,y)=(Y,py)$, mostrando que h y h^{-1} son continuas.
Esto completa la prueba.

Dada una k-variedad lisa $M\subset \mathbb{C}^n$, el mapeo generalizado de Gauss

$$\bar{g}: M \longrightarrow G(k,n)$$

puede definirse como la función que lleva cada $x \in M$ a su espacio tangente $DM_x \in G(k,n)$.

Esta es cubierta por un homomorfismo de fibrados

$$g:E(r_M) \longrightarrow E(Y^k(\mathbb{C}^n))$$

donde $g(x,v)=(DM_x,v)$. Usaremos la notación abreviada $g: r_M \longrightarrow Y^k(\mathbb{C}^n)$. Es claro que g y $\bar{g}$ son continuas. No solamente los fibrados tangentes, sino que además otros fibrado k-dimensionales pueden ser mapeados en el fibrado $Y^k(\mathbb{C}^n)$ con tal de que n sea suficientemente grande. Por esta razón $Y^k(\mathbb{C}^n)$ es llamado **fibrado universal** .

TEOREMA 4.5.1:

Para cualquier fibrado k-dimensional ξ sobre un espacio base compacto B, existe un homomorfismo de fibrados,

$$f:\xi \longrightarrow Y^k(\mathbb{C}^n)$$

con tal de n sea suficientemente grande.

Para construir un homomorfismo de fibrados $f:\xi \longrightarrow Y^k(\mathbb{C}^n)$, es suficiente construir un mapeo

$$\hat{f}:E(\xi) \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

que es lineal e inyectivo (tiene Kernel cero) sobre cada fibra de ξ.

La función requerida f, puede entonces ser definida por : $f(e)=(\hat{f}$ (fibra sobre e), $\hat{f}(e))$. La continuidad de f se verifica haciendo uso del hecho de que ξ es localmente trivial.

PRUEBA:

Escogemos conjuntos abiertos $U_1,\ldots,U_r$ cubriendo B, así que cada ξ/U_i es trivial. Ya que B es normal, existen conjuntos abiertos $V_1,\ldots,V_r$ cubriendo B, con $\bar{V}_i \subset U_i$ (aquí $\bar{V}_i$ denota la cerradura de V_i). En forma similar, construimos $W_1,\ldots,W_r$ con $\bar{W}_i \subset V_i$. Sea $\lambda_i : B \longrightarrow \mathbb{C}$, denota una función continua que toma el valor 1 sobre W_i y el valor 0 fuera de V_i. Ya que ξ/U_i es trivial , existe un mapeo

$$h_i: \pi^{-1}U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

que mapea cada fibra de ξ/U_i linealmente sobre $\mathbb{C}^n$. Definimos

$$h'_i: E(\xi) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

por: $h'_i(e)=0$ para $\pi(e) \notin V_i$; $h'_i(e)=\lambda_i(\pi(e))h_i(e)$ para $\pi(e) \in U_i$.

Evidentemente, h'_i es continua y es lineal en cada fibra. Ahora definimos

$$\hat{f}:E(\xi) \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^n \approx \mathbb{C}^m$$

por $\hat{f}(e)=(h'_1(e),\ldots,h'_r(e))$. Entonces $\hat{f}$ es continua y mapea cada fibra inyectivamente. Esto completa la prueba.

4.6 VARIEDAD GRASSMANNIANA INFINITA

Un argumento similar se aplica si el espacio base B es paracompacto y finito dimensional. Sin embargo, para interpretar con cuidado fibrados sobre espacios base más exóticos, es necesario asignar la dimensión de $\mathbb{C}^n$ tendiendo al infinito, conduciendo a una variedad Grassmanniana infinita: $G(k,\propto)$.

Sea $\mathbb{C}^\infty$ el espacio vectorial consistente de todas estas sucesiones infinitas, $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ de números complejos de los cuales todos excepto un número finito de los x_i son cero. Para k fijo, el subespacio consistente de todos los $x=(x_1,\ldots,x_k,0,0,\ldots)$ será identificado con el espacio coordenado $\mathbb{C}^k$. Por consiguiente, $\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3 \subset \ldots$ con unión $\mathbb{C}^\infty$.

DEFINICION 4.6.1:

La variedad Grassmanniana infinita $Gk=G(k,\mathbb{C}^{\infty})=G(k,\infty)$ es el conjunto de todos los subespacios lineales k-dimensionales de $\mathbb{C}^{n}$, topologizado como el límite directo de la sucesión

$$Gk(\mathbb{C}^{n})\subset Gk(\mathbb{C}^{n+1})\subset Gk(\mathbb{C}^{n+2})\subset\ldots$$

En otras palabras, un subconjunto de Gk es abierto (cerrado) sí y sólo sí es la intersección con G(k,n), que es abierto (o cerrado) como un subconjunto de G(k,n). Esto tiene sentido, ya que $G(k,\infty)$ es igual a la unión de los subconjuntos G(k,n).

Como un caso especial, el espacio proyectivo infinito $\mathbb{P}^{\infty}\equiv G(\mathbb{C}^{\infty})$, es igual al límite directo de la sucesión

$$\mathbb{P}^{1}\subset\mathbb{P}^{2}\subset\mathbb{P}^{3}\subset\ldots$$

En forma similar, $\mathbb{C}^{\infty}$ puede ser topologizado como el límite directo de la sucesión

$$\mathbb{C}^{1}\subset\mathbb{C}^{2}\subset\mathbb{C}^{3}\subset\ldots$$

EL FIBRADO UNIVERSAL Y^{N}

DEFINICION 4.6.2:

Un fibrado canónico Y^{n} sobre Gn(V) se construye justamente, como en el caso finito-dimensional, como sigue: sea $E(Y^{n})\subset Gn(V)\times\mathbb{C}^{\infty}$, el conjunto de todos los pares

(n-planos en $\mathbb{C}^{n}$, vector en el n-plano) topologizado como un subconjunto del producto cartesiano.

Se define, $\pi: E(Y^{n})\longrightarrow Gn(V)$, por $\pi(\Lambda,x)=\Lambda$, y la estructura de espacio vectorial en las fibras, como antes.

LEMA 4.6.1:

El fibrado vectorial Y^{n} satisface la condición de trivialidad local.

La prueba es esencialmente la misma, como en el lema 4.5.1.

Nota:

para algunos propósitos, como en la K-teoría, se puede definir la Grassmanniana, Gn(V), como el conjunto de todos los subespacios de V, de codimensión n; esto es particularmente útil cuando V es un espacio de dimensión infinita.

DEFINICION 4.6.3:

Sea V un espacio vectorial, y sea $F \subset G(k,n) \times V$, el subfibrado consistente de todos los puntos (Λ, v) tal que $v \in \Lambda$. Entonces, si $E=(G(k,n)\times V)/F$, es el fibrado cociente, E , se llama el **fibrado de clasificación** sobre G(k,n). Este fibrado posee la propiedad siguiente:
Dado un fibrado n-dimensional E sobre X, compacto, existe un espacio vectorial V y un epimorfismo de fibrados

$$\varphi : X \times V \longrightarrow E,$$

tal que , si φ_x es la restricción de la fibra de x, entonces

$$\varphi_x \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi_x$$

define un aplicación continua,

$$f : X \longrightarrow Gn(V),$$

llamada la aplicación inducida por el epimorfismo φ. Entonces, si E(F) es el fibrado de clasificación sobre la Grassmanniana Gn(V), E es isomorfo a $f^*(E(F))$; de acuerdo con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, phantom, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & f^*(E(F)) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi^*"] & E(F) \arrow[d, "\pi'"] \\
 & X \arrow[r, "f"'] & Gn(V)
\end{tikzcd}$$

En K- teoría se definen, para un espacio topológico compacto, Vect(X) el conjunto de todas las clases de isomorfía de los fibrados vectoriales sobre X y $\mathrm{Vect}_n(X)$, al subconjunto de Vect(X) de los fibrados de dimensión n. Entonces, la suma de Whitney en el conjunto de los fibrado, induce una operación binaria $\oplus$ sobre Vect(X) que lo dota de una estructura de semigrupo abeliano . En $\mathrm{Vect}_n(X)$ existe un elemento distinguido que es la clase del fibrado trivial de dimensión n.

PROPIEDADES DE VECT(X)

1) Toda aplicación continua $f:X \longrightarrow Y$ induce una aplicación $f^*: \mathrm{Vect}(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)$.

2) Si la aplicación es una homotopía equivalencia, entonces f^* es biyectiva.

3) Si X es contractible, todo fibrado sobre X es trivial y Vect(X) es isomorfo al semigrupo de los enteros no negativos.

4) Si Y es un subespacio cerrado y contractible de X, entonces la aplicación $f:X \longrightarrow X/Y$, induce una biyección $f^*:Vect(X/Y) \longrightarrow Vect(X)$.

Para la interpretación de $Vect_n(X)$, se procede de la siguiente forma: sea V un espacio vectorial cualquiera y consideremos la Grassmanniana Gn(V), consistente en el conjunto de todos los subespacios de V de codimensión n. Si sobre V está definida una métrica hermitiana, cada subespacio de V induce un operador de proyección. Este define una aplicación:

$$Gn(V) \longrightarrow End(V),$$

y dotamos a Gn(V) de la topología inicial inducida por ésta.

Se puede mostrar que esta topología no depende de la métrica escogida para V.

Consideremos anora la proyección

$$\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^{m-1}$$

definida por

$$(z_1,\ldots,z_m) \mapsto (z_1,\ldots,z_{m-1}).$$

Esta induce aplicaciones continuas

$$i_{m-1}: Gn(\mathbb{C}^{m-1}) \longrightarrow Gn(\mathbb{C}^m)$$

Si E(m) denota el fibrado de clasificación sobre $Gn(\mathbb{C}^m)$, entonces

$$i^*_{m-1}(E(m)) \approx E(m-1).$$

La familia $\{Gn(\mathbb{C}^m) \,.\, i_{m-1}\}$, $m \in Z^+$; forma un sistema inductivo el cual induce uno de los conjuntos de homotopía $[X \,.\, Gn(\mathbb{C}^m)]$. Entonces se puede formar el límite inductivo o directo

$\xrightarrow[n]{\lim}[X\cdot Gn(^m)]$ y se puede mostrar que se tiene un isomorfismo

$$\xrightarrow[n]{\lim}[X\cdot Gn(\mathbb{C}^m)] \longrightarrow Vect_n(X),$$

inducido por la aplicación, definida por:

$$f \longrightarrow f^*(E(m)),$$

donde $f:X \longrightarrow Gn(\mathbb{C}^m)$.

El límite inductivo conmuta con el functor [X], cuando X es compacto. Ahora, dado X compacto, le podemos asociar el semigrupo abeliano $(Vect(X), \oplus)$. entonces podemos definir

$K(X):=K(Vect(X))$ el grupo de Grothendieck asociado al semigrupo Vect (X).

Si consideramos al semigrupo dotado, además de la operación $\oplus$, inducida por el producto tensorial de fibrados, entonces (Vect(X), $\oplus$,$\otimes$) es un semianillo, y K(X) posee la estructura de anillo, y se llama el **anillo de Grothendieck asociado a X.**

En esta forma hemos presentado una de las más importantes aplicaciones del fibrado universal.

CONCLUSIONES

1) La Grassmanniana G(k,n) es una variedad topológica de dimensión compleja k(n–k), compacta y conexa.

2) La Grassmanniana G(k,n) es una subvariedad proyectiva del espacio proyectivo complejo de dimensión $N=\binom{n}{k}-1$.

3) La Grassmanniana G(k,n) es una variedad diferenciable.

4) Bajo la inmersión de Plücker, las Grassmanniana G(k,n) queda completamente determinada por un sistema de ecuaciones cuadráticas.

5) La Grassmanniana G(k,n) es el espacio base de un fibrado vectorial universal.

BIBLIOGRAFIA

[1] ATIYAH, M. F. **K-theory**. New York: Edit. W.A. Benjamín , 1,988.

[2] DIEUDONNE, J. **Abrége D'histoire des mathematiques.** s.l.i: s.p.i., s.f.

[3] ESCAMILLA, Juan. **Análisis funcional y topología algebraica.** Cuadernos de matemática . No. 1/93, Licenciatura en Matemática Aplicada, Facultad Ingeniería, USAC, 1,993.

[4] ESCAMILLA, Juan. **Introducción a la Topología General** . Folleto. s.l.i: s.p.i, s.f.

[5] FULTON. **Courves Algebriques.** New York: Edit. W.A. Benjamín, 1,964.

[6] GRIFFITH-HARRIS. **Introducción to Algebra Geometry**. s.l.i.: Edit. Jhon Wyley, 1,978.

[7] HALMOS, Paul. **Finite Dimensional Vector Spaces.** Princeton: Edit. D. Van Nostrand Co, 1,958.

[8] HASSER, et. al. **Análisis Matemático II**. México: Edit. Trillas, 1,974.

[9] HERSTEIN, I. N. **Algebra Moderna.** México: Edit. Trillas, 1,970.

[10] HOFFMAN, Kenneth et. al. **Algebra Lineal**. México: Edit. Prentice Hall Hispanoamericana, 1,973.

[11] JANICH, Klaus. **Topology**. New York : Edit. Springler Verlag, 1,984.

[12] KLEIMAN, S. L. et. al. **Schubert Calculus**. Massachusetts: Instituto de Tecnología. Publicaciones de American Mathematical Monthly, No. 79-II, 1,979.

[13] KLEIMAN, S. L. **Problem 15 and Rigorous Fondation of Schubert Enumerative Calculus**. Proceedings of Symposia in pure matematics. Volumen 28. Massachusetts, 1,976.

[14] KOWALSKY, Hans-Joachim. **Lineare Algebra.** Berlín: Edit: Walter de Gruyter & Co., 1.967.

[15] LANG, Serge. **Algebra**. 2a. edición. California: Edit. Addison-Wesley, 1,984.

[16] LANG, Serge. **Análisis II**. California: Edit. Addison-Wesley, 1,969.

[17] MILNOR, Jhon. **Characteristic Class**. Princeton: Publicado por la Universidad de Princeton , 1,974.

[18] NEWMAN, James R. **El Mundo de las Matemáticas**.Vol. I. México: Edit. Grijalbo S. A., 1,976.

[19] ROYDEN, A. L. **Real Análisis.** Londres: Edit. Mcmillan Company, 1,968.

[20] SPIVAK, Michael. **Calculus on Manifolds.** New york: Edit. W. A. Benjamín, 1,965.

[21] WILLARD, Stephen. **General Topology.** California: Edit. Addison-Wesley, 1,970.