Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

LA FUNCIÓN ZETA Y SU RELACIÓN CON LAS FUNCIONES ARITMÉTICAS

Ricardo Neftalí Pontaza Rodas

Asesorado por el Lic. José Rodrigo Vásquez Bianchi

Guatemala, junio del 2011

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

LA FUNCIÓN ZETA Y SU RELACIÓN CON LAS FUNCIONES ARITMÉTICAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

RICARDO NEFTALÍ PONTAZA RODAS
ASESORADO POR EL Lic. JOSE RODRIGO VÁSQUEZ BIANCHI

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, JUNIO DEL 2011

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA

NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Ing. Miguel Angel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. Juan Carlos Molina Jiménez
VOCAL V	Br. Mario Maldonado Muralles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADORA	Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
EXAMINADOR	Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera
EXAMINADOR	Lic. Francisco Bernardo Raúl De La Rosa
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

La función zeta y su relación con
las funciones aritméticas,

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Matemática Aplicada, el 25 de mayo de 2010.

Ricardo Neftalí Pontaza Rodas

Guatemala, 8 de octubre de 2010

Doctora Mayra Castillo Montes
Coordinadora de la Licenciatura en Matemática Aplicada
Presente

Doctora Castillo:

La saludo atentamente y le deseo mucho éxito en sus actividades.

La presente es para informarle a usted que he asesorado el trabajo de graduación de Ricardo Neftalí Pontaza Rodas, estudiante de la Licenciatura en Matemática Aplicada que se identifica con el carné número 200611292. El título de la tesis es: La función zeta y su relación con las funciones aritméticas. Además he revisado tanto la redacción del trabajo de graduación como el artículo sobre el trabajo de graduación en la versión en español y en inglés. Todos estos documentos satisfacen las condiciones necesarias en el aspecto matemático, metodológico, de estilo y redacción, por lo que les doy mi aprobación.

Agradeciendo de antemano su fina atención, quedo de usted su Atto. y S. S.

Rodrigo Vásquez Bianchi
Asesor de tesis

Cc. Interesado
Doctora Castillo
Rodrigo Vásquez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

REF. LMA 45-2010
Guatemala, 12 de octubre de 2010.

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco
Director de la Escuela de Ciencias.
Presente.

Licenciada Muñoz:

Por este medio hago de su conocimiento que he tenido a la vista el trabajo de graduación de la carrera de Licenciatura en Matemática Aplicada, titulado "La función Zeta y su relación con las funciones aritméticas" elaborado por el estudiante universitario Ricardo Neftalí Pontaza Rodas quien se identifica con carné número 2006-11292, con la asesoría, revisión y aprobación del Lic. Rodrigo Vásquez. Asimismo, le informo que también revisé la versión en español y en inglés del artículo referente al trabajo mencionado.

Al respecto manifiesto que considero que tanto el trabajo de graduación como las versiones del artículo satisfacen los aspectos académicos requeridos desde el punto de vista científico, metodológico, y de estilo de redacción en sus componentes gramáticas y ortográficas, por lo cual esta coordinación aprueba el trabajo de graduación y las versiones del artículo correspondiente.

Sin otro particular, me suscribo.

Atentamente,

"Id y Enseñad a Todos"

UNIV... SAN CARLOS
LICENCIA... ...ATICA APLICADA
COORDINADOR GENERAL
ESCUELA DE CIENCIAS - FACULTAD DE INGENIERIA

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Coordinadora de Licenciatura en Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer el dictamen del Asesor, el Visto Bueno del Revisor del Coordinador de la Carrera y la aprobación del Área de Lingüística del trabajo de graduación titulado **LA FUNCIÓN ZETA Y SU RELACIÓN CON LAS FUNCIONES ARITMÉTICAS**, presentado por el estudiante universitario **Ricardo Neftalí Pontaza Rodas**, aprueba el presente trabajo y solicita la autorización del mismo.

"Id y Enseñad a Todos"

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco
Director Escuela de Ciencias

Guatemala, Noviembre de 2010

EABO/mlmvdl
c.c. Archivo

Universidad de San Carlos
de Guatemala

Facultad de Ingeniería
Decanato

Ref. DTG. 211-2011

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **LA FUNCIÓN ZETA Y SU RELACIÓN CON LAS FUNCIONES ARITMÉTICAS,** presentado por el estudiante universitario **Ricardo Neftalí Pontaza Rodas,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
DECANO

Guatemala, 28 de junio de 2011

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
DECANO
FACULTAD DE INGENIERIA

/gdech

AGRADECIMIENTOS A:

Dios Por permitirme culminar mis estudios de pregrado, brindando fortaleza y ayuda en todo momento.

Mi familia Por su apoyo y cariño incondicional en todo momento, por sus sacrificios y esfuerzos realizados. Son la base de mi vida.

Mis amigos Por los gratos momentos dentro y fuera del salón de clase, por su amistad y por su constante apoyo.

Dra. Mayra Castillo Por su gran amistad, su apoyo tanto en los buenos como malos momentos, por su constante interés en los estudiantes y por su gran espíritu de enseñanza de la matemática y de la vida, y por ser parte de mi formación profesional.

Lic. Rodrigo Vásquez Por sus consejos, apoyo y gran amistad; por compartir su basto conocimiento de las matemáticas y de la vida; por sus constante y excelente guía en la realización del presente trabajo; por siempre resolver mis dudas y ser un ejemplo a seguir y por ser parte de mi formación profesional.

Lic. William Gutiérrez Por su amistad y su apoyo tanto en los buenos como malos momentos; por la paciencia y espíritu de enseñanza demostrado tanto dentro como fuera de las clases y por ser parte de mi formación profesional.

Lic. William Polanco Por su apoyo, amistad, paciencia y por su espíritu de enseñanza reflejado en los trabajos realizados a lo largo de la carrera; por brindar consejos de índole académico y por ser parte de mi formación profesional.

Universidad de San Carlos Por darme la oportunidad de ser parte de esta casa de estudios.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE SÍMBOLOS **III**

RESUMEN **V**

OBJETIVOS **VII**

INTRODUCCIÓN **IX**

1. Las funciones aritméticas **1**
- 1.1. Generalidades . . . 1
- 1.2. Las funciones aritméticas clásicas . . . 3
  - 1.2.1. Las funciones τ y σ . . . 3
  - 1.2.2. Las funciones I y u . . . 4
  - 1.2.3. La función ν . . . 5
  - 1.2.4. La función λ . . . 8
  - 1.2.5. La función μ . . . 11
  - 1.2.6. La función ϕ . . . 15

2. Las funciones p **17**
- 2.1. Fundamentos teóricos . . . 17
  - 2.1.1. Generalidades . . . 17
  - 2.1.2. Las funciones p asociadas a las funciones aritméticas clásicas . 18
- 2.2. Las funciones p y las funciones aritméticas . . . 24

3. La función ζ y sus propiedades **29**
- 3.1. La función ζ . . . 29
  - 3.1.1. Generalidades . . . 29
  - 3.1.2. Relaciones entre ζ y las funciones aritméticas . . . 29
- 3.2. Generalizaciones . . . 39
  - 3.2.1. Expresiones de la forma $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$ . . . 40
  - 3.2.2. Método de generalización . . . 53
  - 3.2.3. Expresiones de la forma $\zeta^a(bs)$ . . . 54
  - 3.2.4. Expresiones de la forma $\frac{1}{\zeta^c(ds)}$ . . . 57
  - 3.2.5. Expresiones de la forma $\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}$ . . . 59

CONCLUSIONES **61**

RECOMENDACIONES **63**

BIBLIOGRAFÍA **65**

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	**Significado**
$\cancelto{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x}}$	cancelación de x al valor n
$\boldsymbol{E^c}$	complemento de E
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^+$	conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\varnothing$	conjunto vacío
$\boldsymbol{d \mid n}$	d divisor de n
$\boldsymbol{E \setminus F}$	diferencia entre E y F
$\neq$	distinto
$\subsetneq$	estrictamente contenido
$\exists$	existe
$\exists!$	existe un único
$\boldsymbol{n!}$	factorial de n
$\square$	fin de la demostración
$\boldsymbol{(f * g)(n)}$	función convolución de f y g
$\boldsymbol{I(n)}$	función *identidad*
$\boldsymbol{\lambda(n)}$	función *lambda*
$\boldsymbol{\mu(n)}$	función *mu*
$\boldsymbol{\nu(n)}$	función *nu*
$\boldsymbol{f_p(x)}$	función p asociada a la función aritmética f
$\boldsymbol{I_p(x)}$	función p asociada a la función *Identidad*
$\boldsymbol{\lambda_p(x)}$	función p asociada a la función *lambda*
$\boldsymbol{\mu_p(x)}$	función p asociada a la función *mu*
$\boldsymbol{\nu_p(x)}$	función p asociada a la función *nu*
$\boldsymbol{\phi_p(x)}$	función p asociada a la función *phi*
$\boldsymbol{u_p(x)}$	función p asociada a la función *unidad*
$\boldsymbol{\phi(n)}$	función *phi*, función totiente de Euler
$\boldsymbol{\sigma(n)}$	función *sigma*

Símbolo	Significado
$\boldsymbol{\tau(n)}$	función *tau*
$\boldsymbol{u(n)}$	función *unidad*
$\boldsymbol{\zeta(s)}$	función zeta de Riemann
$\boldsymbol{\infty}$	infinito
$\mathbf{ln}$	logaritmo natural
$\boldsymbol{(m,n)}$	máximo común divisor entre m y n
$\boldsymbol{\frac{d^n}{dx^n}}$	n-ésima derivada respecto de x
$\notin$	no pertenencia
$\forall$	para todo
$\in$	pertenencia
$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}$	primera derivada respecto de x
$\prod$	productoria
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\boldsymbol{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$	sucesión de a_n
$\sum$	sumatoria
$\lvert\cdot\rvert$	valor absoluto
$[\cdot]\rvert_{\boldsymbol{x=m}}$	valuación de expresión con $x = m$

RESUMEN

La función ζ es una de las funciones más estudiadas tanto en la rama de la Teoría de los Números como de la del Análisis de variable compleja. Su importancia radica en el hecho que permite demostrar propiedades entre los números primos, basándose en el conjunto de los complejos.

Este trabajo de graduación utiliza los conceptos de funciones aritmética, números primos y convoluciones, demostrando relaciones que se dan entre ellos. Se demuestra la existencia de un concepto dual al de las funciones aritméticas, el cual es el concepto de funciones p. Se introduce y trabaja un concepto dual al de convolución aplicándose para las funciones p, lo que delimita una manera alterna de demostración de relaciones entre funciones aritméticas. Al utilizar la teoría desarrollada para las funciones aritméticas y las funciones p, se demuestra la existencia y se encuentran las funciones aritméticas que aparecen como numerador en la expansión en serie de $\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$, $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$, $\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$, $\frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}$; se demuestra además que para la expresión general $\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$, se cumple que el numerador de cada término de su expansión en serie define una función aritmética, encontrando la forma general de la misma.

OBJETIVOS

General

- Brindar al lector teoría de la función ζ de Riemann y sus relaciones con los números primos y las funciones aritméticas, tanto como de las relaciones entre las funciones p de dichas funciones aritméticas con la función ζ.

Específicos

1. Mostrar las relaciones entre las funciones multiplicativas, las aritméticas en general y la expansión en serie de razones de la función ζ valuada en distintos múltiplos de un $s \in \mathbb{C}$.
2. Mostrar el concepto de funcines p y la dualidad con las funciones aritméticas.
3. Hacer uso de las funciones p y del concepto de multiplicatividad para demostrar varias de las propiedades de las funciones aritméticas.
4. Desarrollar propiedades de ζ y expresiones de la misma utilizando el concepto de funciones p.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de graduación se tratarán propiedades entre la función zeta de Riemann[1] y las funciones aritméticas. La función ζ es una función de variable compleja estudiada ampliamente en la actualidad. La misma es definida como una serie infinita de complejos. A lo largo del presente documento se demostrará como las funciones aritméticas aparecen al momento de valuar ζ sobre distintas expresiones que dependan de $s \in \mathbb{C}$ dado.

El trabajo de graduación consta de tres secciones principales: la primera sección enmarca un desarrollo teórico de las propiedades y conceptos relacionados a las funciones aritméticas. La mayoría de las funciones a utilizar cumplen ser multiplicativas, propiedad definida y utilizada ampliamente en dicha sección. Se enlistan y definen las funciones aritméticas principales, demostrando relaciones entre las mismas utilizadas posteriormente en el documento. La segunda sección muestra un concepto dual al de las funciones aritméticas, el cual es el concepto de *función p*. Junto con este, se define la *convolución de funciones aritméticas*, la cual es una operación utilizada tanto en la segunda como tercera sección del documento. Se define dicha pareja de conceptos dado que muchas de las propiedades de las funciones aritméticas son demostradas utilizando la propiedad de multiplicatividad, aspecto que hace necesario la búsqueda de una manera alterna para poder demostrarlas. La tercera sección enlista varias de las relaciones entre el desarrollo en serie de la función ζ y las funciones aritméticas, definiendo un concepto similar a las convoluciones, ampliándose el uso del concepto a series. Utilizando las propiedades de las convoluciones en series, se realiza la mayoría del desarrollo de la teoría que rige los valores de ζ para distintos múltiplos de un $s \in \mathbb{C}$ dado y las funciones aritméticas que aparecen en su desarrollo en serie, alcanzando la forma general de las mismas.

[1]Denotada con la letra griega ζ.

1. Las funciones aritméticas

1.1. Generalidades

Definición. *A toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ se le conoce como* ***función aritmética****.*

Notación. *Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, denotaremos el* ***máximo común divisor*** *de m y n como (m, n), y denotatemos el* ***mínimo común múltiplo*** *como $[m, n]$.*

Definición. *Sea f una función aritmética y sean $m, n \in \mathbb{Z}$:*

1. *Se dice que f es* ***multiplicativa*** *si*

$$f(mn) = f(m)f(n),\ \forall\, m, n \in \mathbb{Z} : (m, n) = 1$$

2. *Se dice que f es* ***totalmente multiplicativa***

$$f(mn) = f(m)f(n),\ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$$

Teorema 1. *Sea f una función multiplicativa. Defínase a F como*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d),\ d > 0 \tag{1.1}$$

se tiene que F es multiplicativa

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z} : (m, n) = 1$. De la definición de F se sabe que $F(mn) = \sum_{d|mn} f(d)$. Ahora bien, nótese que $\forall\, d : d|mn$, $\exists!\, d_1, d_2 \in \mathbb{Z} : d = d_1 d_2$, $d_1|m, d_2|n$ y $(d_1, d_2) = 1$, debido a que $(m, n) = 1$. Se tiene

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2)$$

Dado que $(d_1, d_2) = 1$, utilizando el hecho de que f es multiplicativa se tiene entonces que

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_2|n} \left[\left(\sum_{d_1|m} f(d_1) \right) f(d_2) \right] \\ &= \left(\sum_{d_1|m} f(d_1) \right) \left(\sum_{d_2|n} f(d_2) \right) = F(m)F(n) \end{aligned}$$

se sigue entonces que $F(mn) = F(m)F(n)$, cuando $(m, n) = 1$, por lo que F es multiplicativa. $\square$

Definición. *Sean f y g dos funciones aritméticas. Se define la **convolución de f y g** como*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \tag{1.2}$$

Teorema 2. *Si f y g son dos funciones multiplicativas, entonces $h = f * g$ también es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z} : (m, n) = 1$. Se tiene:

$$h(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right)$$

Ahora bien, nótese que $\forall\, d : d|mn$, $\exists!\, d_1, d_2 \in \mathbb{Z} : d = d_1 d_2$, $d_1|m, d_2|n$ y $(d_1, d_2) = 1$, debido a que $(m, n) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{\substack{d1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2) g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) = \sum_{\substack{d1|m \\ d_2|n}} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{m}{d_1}\right) g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \sum_{d_2|n} \left[\left(\sum_{d_1|m} f(d_1) g\left(\frac{m}{d_1}\right) \right) f(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right) \right] = \left[\sum_{d_1|m} f(d_1) g\left(\frac{m}{d_1}\right) \right] \left[\sum_{d_2|n} f(d_2) g\left(\frac{n}{d_2}\right) \right] \\ &= h(m)h(n) \end{aligned}$$

De lo anterior se infiere que $h(mn) = h(m)h(n)$ cuando $(m, n) = 1$, por lo que h es multiplicativa. $\square$

1.2. Las funciones aritméticas clásicas

Nota. La función ζ se relaciona con varias funciones aritméticas. Inicialmente se definirán y presentarán las propiedades de dichas funciones aritméticas, para consecuentemente mostrar su relación con la función ζ.

1.2.1. Las funciones τ y σ

Definición. *Se definirán las funciones $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como*

1. *$\tau(n)$ representa el número de divisores positivos de n.*
2. *$\sigma(n)$ representa la suma de todos los divisores positivos de n*

Nota. Utilizando la notación de la sección anterior, se debe notar que

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \tag{1.3}$$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \tag{1.4}$$

Lema. *Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, con $p_1, \cdots, p_m$ primos distintos. Las funciones τ y σ cumplen que*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1) \tag{1.5}$$

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) \cdots \left(\frac{p_m^{\alpha_m+1} - 1}{p_m - 1} \right) \tag{1.6}$$

Demostración. Nótese que todo $d|n$ tiene la forma

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}, \text{ con } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \text{ para } i = 1, \cdots, m \tag{1.7}$$

Se procederá entonces por incisos:

1. Nótese que $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$. De ello hay $\alpha_1 + 1$ posibilidades para el exponente de p_1. Como $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, se tiene que hay $\alpha_2 + 1$ posibilidades para el exponente de p_2. En general, como $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, se da que existen $\alpha_i + 1$ posibilidades para β_i. Dado que todos los divisores de n son de la forma descrita en (1.7), al usar el principio de la multiplicación, se obtiene que hay $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$ divisores positivos de n. Entonces

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_m + 1)$$

2. Considérese el producto

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 + p_m + p_m^2 + \cdots + p_m^{\alpha_m}\right)$$

Nótese que todos los números de la forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \cdots, m$ se encuentran enlistados en el producto anterior, y solamente dichos números aparecen en la lista. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 + p_m + p_m^2 + \cdots + p_m^{\alpha_m}\right)\\ &= \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right)\cdots\left(\frac{p_m^{\alpha_m+1} - 1}{p_m - 1}\right)\end{aligned}$$

De los incisos anteriores se siguen las propiedades (1.5) y (1.6) mencionadas. □

1.2.2. Las funciones I y u

Definición. *Se definirán a las funciones $I : \mathbb{N} \to N$ y $u : \mathbb{N} \to N$ como*

$$I(n) = n, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

$$u(n) = 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

Nota. A la función I definida anteriormente se le conoce como **función identidad**, y a la función u como **función unidad**.

Lema. *Las funciones I y u son multiplicativas.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N} : (m, n) = 1$. Se procederá entonces por incisos:

1. Nótese que $I(mn) = mn = I(m)I(n)$
2. Nótese que $u(mn) = 1 = 1 \cdot 1 = u(m)u(n)$

De lo anterior, se tiene que I y u son multiplicativas. $\square$

Corolario 1. *Las funciones I y u son totalmente multiplicativas.*

Nota. Al utilizar (1.8) y (1.9), se puede reescribir τ y σ como

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} u(d)u\left(\frac{n}{d}\right) = (u * u)(n)$$
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} I(d)u\left(\frac{n}{d}\right) = (I * u)(n)$$

se tiene que

$$\tau(n) = (u * u)(n) \tag{1.10}$$
$$\sigma(n) = (I * u)(n) \tag{1.11}$$

Teorema 3. *Las funciones τ y σ son multiplicativas*

Demostración. Nótese que I y u son ambas funciones multiplicativas. De (1.10) y (1.11), se sabe que τ y σ son convoluciones de funciones multiplicativas. Al utilizar el Teorema 2, se infiere que τ y σ son funciones multiplicativas. $\square$

1.2.3. La función ν

Definición. *Se define a la función aritmética $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como*

$$\nu(n) = \begin{cases} 0 & si\ n = 1 \\ m & si\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} \end{cases} \tag{1.12}$$

Se tiene que ν representa la cantidad de primos distintos que dividen a todo natural mayor a 1.

Teorema 4. *La función $f(n) = 2^{\nu(n)}$ es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N} : (m, n) = 1$. Sean

$$m = p_{\alpha_1}^{r_1} p_{\alpha_2}^{r_2} \cdots p_{\alpha_j}^{r_j}$$
$$n = p_{\beta_1}^{s_1} p_{\beta_2}^{s_2} \cdots p_{\beta_k}^{s_k}$$

donde $p_{\alpha_1}^{r_1} p_{\alpha_2}^{r_2} \cdots p_{\alpha_j}^{r_j}$ y $p_{\beta_1}^{s_1} p_{\beta_2}^{s_2} \cdots p_{\beta_k}^{s_k}$ son las factorizaciones en números primos distintos de m y n, respectivamente. Dado que $(m, n) = 1$, se tiene

$$mn = p_{\alpha_1}^{r_1} p_{\alpha_2}^{r_2} \cdots p_{\alpha_j}^{r_j} p_{\beta_1}^{s_1} p_{\beta_2}^{s_2} \cdots p_{\beta_k}^{s_k}$$

donde $p_{\alpha_x} \neq p_{\beta_y}$, con $x = 1, \cdots, j$, $y = 1, \cdots, k$. Entonces

$$\nu(mn) = j + k = \nu(m) + \nu(n)$$

por lo que

$$2^{\nu(mn)} = 2^{\nu(m)+\nu(n)} = 2^{\nu(m)} \cdot 2^{\nu(n)}$$

por lo que se demuestra que $2^{\nu(\cdot)}$ es una función multiplicativa. □

Teorema 5. $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ *se tiene que*

$$\tau(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)} = (2^{\nu} * u)(n) \tag{1.13}$$

Demostración. Nótese que si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_j^{\alpha_j}$, entonces $n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_j^{2\alpha_j}$, por lo que

$$\tau(n^2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_j + 1) \tag{1.14}$$

Por el otro lado, sea $F(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)}$. Por el Teorema 4, se sabe que $2^{\nu(\cdot)}$ es multiplicativa, por lo que por el Teorema 1 se sabe que F también es multiplicativa. Entonces

$$\begin{aligned} F(n) &= F\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_j^{\alpha_j}\right) = F\left(p_1^{\alpha_1}\right) F\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots F\left(p_j^{\alpha_j}\right) \\ &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\right] \left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)}\right] \cdots \left[\sum_{d|p_j^{\alpha_j}} 2^{\nu(d)}\right] \end{aligned}$$

Nótese que para p_1, existen exactamente α_1 posibles valores[1] de d tales que $d|p_1^{\alpha_1}$ con $d \neq 1$. Se tiene que

$$\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)} = \underbrace{2^0}_{d=1} + \underbrace{2^1 + 2^1 + \cdots + 2^1}_{\alpha_1 \text{ veces } (d \neq 1)} = 1 + 2\alpha_1$$

Argumentando de manera similar para los demás $j-1$ términos, se tiene que en general para $1 \leq r \leq j$

$$\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} 2^{\nu(d)} = 1 + 2\alpha_r$$

De ello se infiere que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} = F(n) &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)}\right]\cdots\left[\sum_{d|p_j^{\alpha_j}} 2^{\nu(d)}\right] \\ &= (2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_j+1) = \tau\left(n^2\right)\end{aligned}$$

lo que se demuestra lo que se deseaba. □

Nota. De la definición dada para $\nu(n)$, se sabe que

$$\nu(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ primo}}} 1 \tag{1.15}$$

Nota. Antes de continuar con el análisis de las funciones multiplicativas, es necesario establecer un teorema que permitirá conocer la naturaleza de su producto.

Teorema 6. *Si f y g son funciones aritméticas, entonces su producto[2] fg también es una función aritmética.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N} : (m,n) = 1$. Sea $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, y a la vez sea $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$ los productos en factores primos distintos respectivos a m y n. Dado

[1]Los cuales son $p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1}$.

[2]Definiendo a $fg : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ como $(fg)(m) = f(m)g(m)$.

que $(m,n)=1$, se tiene que $p_i \neq q_j$, con $i=1,\cdots,r$, y con $j=1,\cdots,s$. Nótese ahora que

$$\begin{aligned}
(fg)(mn) &= (fg)\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}\right)\\
&= f\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}\right) g\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}\right)\\
&= \prod_{j=1}^{r} f\left(p_j^{\alpha_j}\right)\prod_{j=1}^{s} f\left(q_j^{\beta_j}\right)\prod_{k=1}^{r} g\left(p_k^{\alpha_k}\right)\prod_{k=1}^{s} g\left(q_k^{\beta_k}\right)\\
&= \left[\prod_{j=1}^{r} f\left(p_j^{\alpha_j}\right)\prod_{k=1}^{r} g\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{s} f\left(q_j^{\beta_j}\right)\prod_{k=1}^{s} g\left(q_k^{\beta_k}\right)\right]\\
&= \left[\prod_{j=1}^{r}(fg)\left(p_j^{\alpha_j}\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{s}(fg)\left(q_j^{\beta_j}\right)\right] = \left[(fg)(m)\right]\left[(fg)(n)\right]
\end{aligned}$$

de donde se infiere que $(fg)(mn) = [(fg)(m)]\,[(fg)(n)]$, lo que demuestra que (fg) es multiplicativa. □

1.2.4. La función λ

Definición. *Sea la función aritmética $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como*

$$\lambda(n) = \begin{cases} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}, & si\ n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m} \\ 1, & si\ n = 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

Teorema 7. *La función λ es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m,n \in \mathbb{N} : (m,n)=1$. Sean $m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $n = q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}$ las factorizaciones primas respectivas de m y n. Dado que $(m,n)=1$, se tiene que $p_i \neq q_j$, con $i=1,\cdots,r$, y con $j=1,\cdots,s$. Nótese ahora que

$$\begin{aligned}
\lambda(mn) &= \lambda\left(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}\cdots q_r^{\beta_r}\right) = (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r+\beta_1+\cdots+\beta_s}\\
&= (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}(-1)^{\beta_1+\cdots+\beta_s} = \lambda(m)\lambda(n)
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$, cuando $(m,n)=1$, por lo que λ es multiplicativa. □

Nota. La función λ cumple dos propiedades importantes relacionadas con otras de las funciones aritméticas, las cuales se presentan a continuación.

Teorema 8. *La función λ cumple que*

$$\lambda(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d) \tag{1.17}$$

Demostración. Del Teorema 4 y del Teorema 7 se sabe que las funciones $2^{\nu(\cdot)}$ y $\lambda(\cdot)$ son ambas funciones multiplicativas. Al utilizar el Teorema 6 se sabe que la función f definida por

$$f(m) = 2^{\nu(m)}\lambda(m)$$

es una función multiplicativa. Aplicando el Teorema 1, se obtiene que la función F definida por

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d)$$

es también una función multiplicativa. Sean entonces $n \in \mathbb{N}$, con $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ su factorización prima. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d) &= F(n) = F(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = F\left(p_1^{\alpha_1}\right) F\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots F\left(p_r^{\alpha_r}\right) \\
&= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right] \left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right] \cdots \left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right]
\end{aligned}$$

De las definiciones (1.12) y (1.16) se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\lambda(d) &= 2^{\nu(1)}\lambda(1) + 2^{\nu(p_1)}\lambda(p_1) + 2^{\nu\left(p_1^2\right)}\lambda\left(p_1^2\right) + \cdots + 2^{\nu\left(p_1^{\alpha_1}\right)}\lambda\left(p_1^{\alpha_1}\right) \\
&= \underbrace{2^0(1)}_{d=1} + \underbrace{2^1(-1)}_{d=p_1} + \underbrace{2^1(1)}_{d=p_1^2} + \cdots + \underbrace{2^1(-1)^{\alpha_1}}_{d=p_1^{\alpha_1}} \\
&= 1 + 2\left[-1 + 1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^{\alpha_1}\right] = \begin{cases} 1, & \text{si } 2|\alpha_1 \\ -1, & \text{si } 2 \nmid \alpha_1 \end{cases} \\
&= (-1)^{\alpha_1} = \lambda\left(p_1^{\alpha_1}\right)
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\lambda(d) = \lambda\left(p_1^{\alpha_1}\right)$$

Argumentando de una manera similar para los $r-1$ términos restantes, se tiene que

$$\sum_{d|p_j^{\alpha_j}} 2^{\nu(d)}\lambda(d) = \lambda\left(p_j^{\alpha_j}\right),\ \text{con } j = 1, \cdots, r$$

De ello se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d) &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} 2^{\nu(d)}\lambda(d)\right] \\ &= \lambda\left(p_1^{\alpha_1}\right)\lambda\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\lambda\left(p_r^{\alpha_r}\right) = \lambda\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right) = \lambda(n)\end{aligned}$$

lo que demuestra lo que se deseaba. □

Escolio 1. *La función $2^{\nu(\cdot)}\lambda(\cdot)$ es multiplicativa.*

Teorema 9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La función λ cumple que*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es cuadrado.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.18}$$

Demostración. Nótese que λ es multiplicativa, por lo que la función f definida por

$$f(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$$

también es multiplicativa. Sean entonces $n \in \mathbb{N}$, con $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ su descomposición en factores primos distintos. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \lambda(d) = f(n) &= f\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right)f\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots f\left(p_r^{\alpha_r}\right) \\ &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} \lambda(d)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} \lambda(d)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} \lambda(d)\right]\end{aligned}$$

Analizando el primer término, se tiene:

$$\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} \lambda(d) = \lambda(1) + \lambda(p_1) + \lambda(p_1^2) + \cdots + \lambda(p_1^{\alpha_1})$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2 \nmid \alpha_1 \\ 1, & \text{si } 2|\alpha_1 \end{cases}$$

Argumentando de manera similar para los $r-1$ términos restantes, se tiene que

$$\sum_{d|p_j^{\alpha_j}} \lambda(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } 2 \nmid \alpha_j \\ 1, & \text{si } 2|\alpha_j \end{cases}, \text{ con } j = 1, \cdots, r$$

por lo que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right) f\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots f\left(p_r^{\alpha_r}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2|\alpha_1,\, 2|\alpha_2, \cdots, 2|\alpha_r. \\ 0, & \text{si } 2 \nmid \alpha_j, \text{ para algún } j. \end{cases}$$

de donde se infiere que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es cuadrado.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

lo que demuestra lo que se deseaba. □

1.2.5. La función μ

Definición. *Se define la función $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 1 \\ (-1)^r, & si\ n = p_1 p_2 \cdots p_r \\ 0, & si\ p^2|n,\ para\ alg\acute{u}n\ primo\ p \end{cases} \tag{1.19}$$

Nota. La función μ recibe el nombre de **función de inversión de Möbius.**

Teorema 10. *La función μ es multiplicativa.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N} : (m, n) = 1$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que m es divisible por un cuadrado distinto al 1. Por definición, se sabe que $\mu(m) = 0$. A la vez, dado que $m|mn$, el mismo cuadrado que divide a m dividiría a mn, por lo que $\mu(mn) = 0$, de donde se tendría que

$$\mu(mn) = 0 = \mu(m) = \mu(m)\mu(n)$$

Supóngase entonces que ambos m y n son libres de cuadrados. Entonces se tiene que al ser $n = p_1p_2 \cdots p_r$, $m = q_1q_2, \cdots, q_s$ las descomposiciones en factores primos distintos de m y n, dado que $(m, n) = 1$, se tiene que $p_i \neq q_j$, con $i = 1, \cdots, r$, $j = 1, \cdots, s$, por lo que $mn = p_1p_2 \cdots p_rq_1q_2, \cdots, q_s$. De ello se infiere que

$$\mu(mn) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \mu(m)\mu(n)$$

demostrando así lo que se deseaba. □

Nota. Sea p un primo cualquiera, y sea $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{N}$. Nótese que

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(1) \\ -1 &= \mu(p) \\ 0 &= \mu\left(p^2\right) = \mu\left(p^3\right) = \cdots = \mu\left(p^\alpha\right) \end{aligned}$$

Dicha propiedad se utilizará en el siguiente teorema.

Teorema 11. *$\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ se da que*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & si\ n = 1 \\ 0, & si\ n > 1 \end{cases} \tag{1.20}$$

Demostración. Para el caso $n = 1$, la propiedad es evidente. Supóngase que $n > 1$. Sea entonces $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la factorización prima de n. Ahora bien, por el Teorema 10 se sabe que μ es multiplicativa; utilizando el Teorema 1 se sabe que la función F definida como

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

es multiplicativa. Utilizando la descomposición en factores primos distintos de n se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d) &= F(n) = F\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right) = F\left(p_1^{\alpha_1}\right)F\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots F\left(p_r^{\alpha_r}\right)\\ &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}}\mu(d)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}}\mu(d)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}}\mu(d)\right]\end{aligned}$$

Analizando la expresión $\sum_{d|p_1^{\alpha_1}}\mu(d)$, se debe notar que

$$\begin{aligned}\sum_{d|p_1^{\alpha_1}}\mu(d) &= \mu(1)+\mu(p)+\mu\left(p^2\right)+\mu\left(p^3\right)+\cdots+\mu\left(p^{\alpha_r}\right)\\ &= \underbrace{1}_{d=1}+\underbrace{(-1)}_{d=p}+\underbrace{0+0+\cdots+0}_{d=p^2,p^3,\cdots,p^{\alpha_r}}=0\end{aligned}$$

Por lo que $\sum_{d|p_j^{\alpha_j}}\mu(d)=0$ para algún j, si $p>1$. Dado que se asumse a $n>1$, se tiene que $p_j>1$, para algún j. De la expresión

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}}\mu(d)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}}\mu(d)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}}\mu(d)\right]$$

se sabe que dado que algunos[3] de los términos en paréntesis valdrán 0, la expresión $\sum_{d|n}\mu(d)$ valdrá 0. De ello se infiere que

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{si } n=1\\ \\ 0, & \text{si } n>1\end{cases}$$

lo que demuestra lo que se deseaba. $\square$

Nota. La función μ tiene la característica de relacionar dos funcines multiplicativas como las que se mencionan en el Teorema 1. Se procederá a demostrar dicha propiedad.

Teorema (Inversión de Möbius). *Sean f y F dos funciones multiplicativas que cumplen la propiedad*

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

[3] Si no es que todos.

Entonces

$$f(n) = (\mu * F)(n) = (F * \mu)(n) \tag{1.21}$$

Demostración. Sea $d' = \frac{n}{d}$. Se tiene entonces que

$$(\mu * F)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} \mu\left(\frac{n}{d'}\right) F(d') = (F * \mu)(n)$$

de donde se infiere que $(\mu * F)(n) = (F * \mu)(n)$. Ahora bien, nótese que

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \left[\mu(d) \left(\sum_{e|\frac{n}{d}} f(e)\right)\right] = \sum_{d|n} \left[\sum_{e|\frac{n}{d}} \mu(d) f(e)\right]$$

De lo anterior, se tiene que $d|n$ y $e\,\middle|\,\frac{n}{d}$, lo que implica que $\exists\, x \in \mathbb{Z} : ex = \frac{n}{d}$, por lo que $n = exd$. Se tiene entonces que $e|n$ y $d\,\middle|\,\frac{n}{e}$. Esto permitirá cambiar los subíndices en las sumatorias de la siguiente manera

$$\sum_{d|n} \left[\sum_{e|\frac{n}{d}} \mu(d) f(e)\right] = \sum_{e|n} \left[\sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d) f(e)\right] = \sum_{e|n} \left[f(e) \sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d)\right]$$

Por el Teorema 11 se sabe que $\sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d) \neq 1$ únicamente cuando $\frac{n}{e} = 1$, i.e., $n = e$. Tomando únicamente dicho caso[4], se tiene que

$$\sum_{e|n} \left[f(e) \sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d)\right] = \sum_{e=n} f(e) \cdot 1 = f(n)$$

De lo anterior se infiere que

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$$

demostrando así lo que se deseaba. $\square$

Escolio 2. *La convolución es conmutativa.*

[4]Ignoramos los demás casos dado que $\sum_{d|\frac{n}{e}} \mu(d) = 0$.

1.2.6. La función ϕ

Definición. *Se define la función aritmética $\phi(n)$ como aquella que cuenta los enteros positivos menores que n que son primos relativos a n.*

Nota. A la función ϕ se le conoce como **Función totiente[5] de Euler.**

Nota. De la definición, se sabe que para p primo se cumple

$$\phi(p) = p - 1$$

dado que todos los $p-1$ números anteriores a p son primos relativos con p.

Teorema 12. *Para p primo y $\alpha > 0$ se tiene*

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{1.22}$$

Demostración. Nótese que $\forall\, n \in \mathbb{N} : (n, p^\alpha) = 1$, con $n < p^\alpha$ se da que $p \nmid n$. Entonces basta contar cuantos números entre 1 y p^α son divisibles entre p. Nótese que la lista de todos los múltiplos de p entre 1 y p^α es dado por $(1)p, (2)p, (3)p, \cdots, (p^{\alpha-1})\,p$, de donde hay $p^{\alpha-1}$ múltiplos de p, por lo que hay $p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ números positivos menores a p^α que son primos relativos con p^α. Por definición de ϕ, se sabe que $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, lo que demuestra lo que se deseaba. $\square$

Teorema 13. $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ *se cumple*

$$n = \sum_{d|n} \phi(d) = (\phi * u)(n) \tag{1.23}$$

Demostración. Para poder realizar la demostración, se clasificarán los números entre 1 y n de la siguiente forma: $\forall\ d \in \mathbb{N} : d|n$ defínase el conjunto

$$A(d) = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n \text{ y } (n, x) = d\}$$

[5] Conocida también como *Función phi* ó *Función tociente* de Euler.

Nótese que todo $x : 1 \leq x \leq n$ cumple pertenecer a algún $A(d)$ (Dado que $(x,n)|n, \forall\, x$). Ahora bien, nótese que $(n,x) = d$ es equivalente a $\left(\frac{n}{d}, \frac{x}{d}\right) = 1$, por lo que cada conjunto $A(d)$ es equivalente a un conjunto de la forma

$$B\left(\frac{n}{d}\right) = \left\{y \in \mathbb{N} : 1 \leq y \leq \frac{n}{d} \text{ y } \left(\frac{n}{d}, y\right) = 1\right\}$$

Nótese que $\left|B\left(\frac{n}{d}\right)\right| = \phi\left(\frac{n}{d}\right)$. De esto se tiene que

$$n = \sum_{d|n} |A(d)| = \sum_{\frac{n}{d}|n} \left|B\left(\frac{n}{d}\right)\right| = \sum_{\frac{n}{d}|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

lo que demuestra lo deseado. $\square$

2. Las funciones p

2.1. Fundamentos teóricos

2.1.1. Generalidades

Definición. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *una función aritmética. Para dicha función, se define la función* $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como*

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n \tag{2.1}$$

donde p *es un primo cualquiera.*

Nota. La expresión anterior indica que se trabajará con una función generadora f_p de f, por lo que no se profundizará en mayor medida sobre la convergencia de f_p, para todos los p primos.

Nota. Para las funciones $\tau, \sigma, I, u, \nu, \lambda, \mu, \phi$, existen sus funciones asociadas

$$\tau_p, \sigma_p, I_p, u_p, \nu_p, \lambda_p, \mu_p, \phi_p$$

Es necesario establecer algunos teoremas relacionados con las expresiones f_p y encontrar los valores de las expresiones anteriores para poder determinar las relaciones entre ellas.

Nota. A las funciones f_p se les conoce como **función p de f.**

Teorema 14. $\forall\, p$ *primo, dos funciones multiplicativas* f *y* g *son iguales si y sólo si* f_p *y* g_p *son iguales.*

Demostración. Se procederá por incisos:

1. ($\Rightarrow$) Supóngase que $f = g$. Se sigue entonces que $f(p^n) = g(p^n)$, $\forall\, p$ primo y $\forall\, n \in \mathbb{N}$. De ello se infiere que

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n)\, x^n = g_p(x)$$

2. ($\Leftarrow$) Supóngase que $f_p = g_p$. Se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)\, x^n = f_p(x) = g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n)\, x^n$$

de donde se infiere que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n)\, x^n$$

Dada la igualdad de series, se tiene que $f(p^n) = g(p^n)$, $\forall\, p$ primo y $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Al ser $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, por ser f y g multiplicativas, se da que

$$\left.\begin{array}{c} f(p_1^{\alpha_1}) = g(p_1^{\alpha_1}) \\ f(p_2^{\alpha_2}) = g(p_2^{\alpha_2}) \\ \vdots \\ f(p_r^{\alpha_r}) = g(p_r^{\alpha_r}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(p_1^{\alpha_1})\, f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_r^{\alpha_r}) = g(p_1^{\alpha_1})\, g(p_2^{\alpha_2}) \cdots g(p_r^{\alpha_r}) \Rightarrow \\ f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) \end{array}$$

de donde se infiere que $f(n) = g(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

De los dos incisos anteriores, se infiere que $f = g$ sí, y sólo sí $f_p = g_p$. $\square$

Notación. *Es necesario tomar en cuenta aspectos de notación para lo siguiente:*

1. La expresión $(fg)_p$ denotará el producto de funciones $f_p(x)g_p(x)$.

2. La expresión $(f \cdot g)_p$ denotará la composicion de funciones $f(g)_p(x)$

2.1.2. Las funciones p asociadas a las funciones aritméticas clásicas

Nota. Del cálculo, se sabe que $\forall\, x \in \mathbb{R} : |x| < 1$ y $\forall\, a \in \mathbb{R}$, se da que

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

A la vez se sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^n = ax^0 + \sum_{n=1}^{\infty} ax^n - ax^0 = -a + \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = -a + \frac{a}{1-x}$$
$$= \frac{-a(1-x)+a}{1-x} = \frac{-a+ax+a}{1-x} = \frac{ax}{1-x}$$

de donde se infieren las igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x} \tag{2.2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^n = \frac{ax}{1-x} \tag{2.3}$$

Nota. Es importante notar que se restringe a x a cumplir que $|x| < 1$ para asegurar la convergencia de la serie. Se mencionan estas propiedades de los valores de las series geométricas ya que se utilizarán en la siguiente propiedad.

Teorema 15. *Las funciones aritméticas cumplen* $\forall\, p$ *primo las propiedades*

$$I_p(x) = \frac{1}{1-px} \tag{2.4}$$
$$u_p(x) = \frac{1}{1-x} \tag{2.5}$$
$$\nu_p(x) = \frac{x}{1-x} \tag{2.6}$$
$$\lambda_p(x) = \frac{1}{x+1} \tag{2.7}$$
$$\mu_p(x) = 1-x \tag{2.8}$$
$$\phi_p(x) = \frac{x-1}{px-1} \tag{2.9}$$

Demostración. Se procederá por incisos:

1. Por definición se tiene que $I(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. De esto se debe notar que

$$I_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I\left(p^n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (px)^n = \frac{1}{1-px}$$

mostrando así que

$$I_p(x) = \frac{1}{1-px}$$

2. Por definición se sabe que $u(n) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. De esto se debe notar que

$$u_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u\left(p^n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

mostrando así que

$$u_p(x) = \frac{1}{1-x}$$

3. Por definición se sabe que

$$\nu(m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 1 \\ r, & \text{si } m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

de donde se sigue que

$$\nu\left(p^\alpha\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0 \\ 1, & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Utilizando lo anterior en la expansión de serie de ν_p, se tiene que

$$\begin{aligned} \nu_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left(p^n\right) x^n = \cancelto{0}{\nu\left(p^0\right) x^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu\left(p^n\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \cancelto{1}{\nu\left(p^n\right)} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1+x-1}{1-x} = \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\nu_p(x) = \frac{x}{1-x}$$

4. Por definición se sabe que

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 1 \\ \\ (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}, & \text{cuando } m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

de donde se sigue que

$$\lambda\left(p^r\right) = (-1)^r$$

Utilizando esto en la serie de λ_p, se tiene

$$\lambda_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\left(p^n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

lo que demuestra que

$$\lambda_p(x) = \frac{1}{1+x}$$

5. Se debe recordar que

$$\mu\left(p^\alpha\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 0 \\ -1, & \text{si } \alpha = 1 \\ 0, & \text{si } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

De lo anterior se tiene entonces que

$$\mu_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(p^n\right) x^n \qquad = \mu\left(p^0\right) x^0 + \mu\left(p^1\right) x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \cancelto{0}{\mu\left(p^n\right)} x^n = 1 - x$$

lo que demuestra que

$$\mu_p(x) = 1 - x$$

6. De (1.22) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi\left(p^n\right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(p^n\right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^n - p^{n-1}\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^n x^n = 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} p^n x^n = 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[\frac{px}{1-px}\right] \\ &= \frac{p(1-px)}{p(1-px)} + \frac{p^2 x}{p(1-px)} - \frac{px}{p(1-px)} = \frac{p(1-px) + p^2 x - px}{p(1-px)} \\ &= \frac{p - px}{p(1-px)} = \frac{1-x}{1-px} \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\phi_p(x) = \frac{1-x}{1-px}$$

□

Teorema de convolución de series. *Sean f y g dos funciones aritméticas*[1]*, y sea h función aritmética tal que*

$$h_p(x) = f_p(x)g_p(x), \ \forall\, p \text{ primo} \tag{2.10}$$

Entonces $h\left(p^n\right) = (f * g)\left(p^n\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. El converso también es válido.

Demostración. Sea p un primo cualquiera. Se procederá por incisos:

1. ($\Rightarrow$) Supóngase que la expresión en (2.10) es verdadera. Nótese que

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n$$
$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g\left(p^n\right) x^n$$

De ello se tiene que

$$\begin{aligned}
f_p(x)g_p(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} g\left(p^n\right) x^n\right] \\
&= \left[f\left(p^0\right)x^0 + f\left(p^1\right)x^1 + f\left(p^2\right)x^2 + \cdots\right]\left[g\left(p^0\right)x^0 + g\left(p^1\right)x^1 + g\left(p^2\right)x^2 + \cdots\right] \\
&= x^0\left[f\left(p^0\right)g\left(p^0\right)\right] + x^1\left[f\left(p^0\right)g\left(p^1\right) + f\left(p^1\right)g\left(p^0\right)\right] \\
&\quad + x^2\left[f\left(p^2\right)g\left(p^0\right) + f\left(p^1\right)g\left(p^1\right) + f\left(p^0\right)g\left(p^2\right)\right] + \cdots \\
&\quad \cdots + x^k\left[\sum_{j=0}^{k} f\left(p^j\right)g\left(p^{k-j}\right)\right] + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} f\left(p^j\right)g\left(p^{n-j}\right)\right]x^n
\end{aligned}$$

De donde se infiere que

$$f_p(x)g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} f\left(p^j\right)g\left(p^{n-j}\right)\right]x^n$$

[1] No necesariamente multiplicativas.

Ahora bien, nótese que los términos p^j y p^{n-j} son divisores de p^n cuando $j = 0, 1, \cdots, n$. De allí que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h\left(p^n\right) x^n = h_p(x) = f_p(x) g_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} f\left(p^j\right) g\left(p^{n-j}\right)\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{d \mid p^n} f(d)\, g\left(\frac{p^n}{d}\right)\right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(f * g)\left(p^n\right)\right] x^n
\end{aligned}$$

de donde se infiere que $h\left(p^n\right) = (f * g)\left(p^n\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. ($\Leftarrow$) Se infiere de la necesidad.

$\square$

Nota. Las propiedades demostradas para las funciones aritméticas clásicas conjunto al uso del Teorema de convoluciones de series permitirá el análisis de propiedades avanzadas entre las funciones aritméticas

2.2. Las funciones p y las funciones aritméticas

Nota. Se procederá a utilizar las propiedades de las funciones p en las funciones aritméticas.

Teorema 16. *$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ se da que*

$$n = \sum_{d|n} \phi(d) = (\phi * u)(n) \tag{2.11}$$

Demostración. Se demostrará la propiedad utilizando funciones p. Asumiendo a p como un primo cualquiera, y $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = \sum_{d|n} \phi(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = (\phi * u)(n)$$

Ahora bien, utilizando las expresiones en (2.5), (2.9) y (2.4), nótese que

$$\phi_p(x) u_p(x) = \left(\frac{1-x}{1-px}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-px} = I_p(x)$$

por lo que, al utilizar el Teorema de Convoluciones de Series, se infiere que

$$I\left(p^\alpha\right) = (\phi * u)\left(p^\alpha\right)$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}$. Nótese ahora que $I\left(p^\alpha\right) = p^\alpha$ y que $(\phi * u)\left(p^\alpha\right) = \sum_{d|p^\alpha} \phi(d)$. De ello

$$p^\alpha = I\left(p^\alpha\right) = (\phi * u)\left(p^\alpha\right) = \sum_{d|p^\alpha} \phi(d)$$

por lo que, para p primo y $\alpha \in \mathbb{N}$ se infiere que

$$p^\alpha = \sum_{d|p^\alpha} \phi(d)$$

Dado que ϕ es multiplicativa y $f(p) = p^\alpha$ también es multiplicativa, se infiere que para $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ se cumple que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} \phi(d)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} \phi(d)\right] \cdots \left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} \phi(d)\right] = \sum_{d|n} \phi(d)$$

mostrando así lo que se deseaba. $\square$

Nota. De la demostración anterior, se debe mencionar que el uso de las funciones p permitirán demostrar las propiedades de las funciones aritméticas vía el uso de convoluciones.

Teorema 17. *Las funciones μ y λ cumplen que*

$$\left(\mu^2 * \lambda\right)(n) = \begin{cases} 1, & si\ n = 1 \\ \\ 0, & si\ n > 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Demostración. Se procederá a demostrar utilizando funciones p, con p un primo cualquiera. Nótese que

$$\mu^2(n) = \mu(n)\mu(n) = |\mu(n)|, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Utilizando lo anterior en (2.8) se tiene que como

$$\mu_p(x) = 1 - x = \mu(1)x^0 + \mu(p)x^1$$

entonces se da que

$$\mu_p^2(x) = |\mu(1)|x^0 + |\mu(p)|x^1 = 1 + x$$

Ahora bien, de la expresión en (2.7) se tiene

$$\mu_p^2(x) = 1 + x = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \frac{1}{\lambda_p(x)}$$

de donde se infiere que

$$\mu_p^2(x) = \frac{1}{\lambda_p(x)} = 1 + x$$

De esta nueva propiedad se infiere que

$$1 = \mu_p^2(x)\lambda_p(x)$$

Sea f una función tal que la expresión en la izquierda de la igualdad anterior se pueda escribir como una función f. Se tiene entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n = f_p(x) = 1 = \mu_p^2(x)\lambda_p(x)$$

y dado que $\sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)\, x^n = 1$, se infiere que f cumple que

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 0 \\ \\ 0, & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Nótese que la función f anterior es multiplicativa. A la vez se sabe que μ y λ son multiplicativas, por lo que $(\mu^2 * \lambda)$ es multiplicativa. Además de esto, nótese que si $n = p^\alpha$ cumple que $\alpha = 0$, entonces $n = 1$ y si $\alpha > 0$ entonces $n > 1$. Utilizando esto en lo anterior, para $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ se infiere que

$$\left[\left(\mu^2 * \lambda\right)(p_1^{\alpha_1})\right] \cdots \left[\left(\mu^2 * \lambda\right)(p_r^{\alpha_r})\right] = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0 \\ \\ 0, & \text{si } \alpha_j \geq 1, \text{ para algún } j. \end{cases}$$

lo que es equivalente a

$$\left(\mu^2 * \lambda\right)(n) = f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ \\ 0, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

lo que demuestra lo que se deseaba. □

Escolio 3. *Las funciones μ_p y λ_p cumplen que*

$$\mu_p^2(x) = \frac{1}{\lambda_p(x)} = 1 + x \tag{2.13}$$

Teorema 18. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *se cumple que*

$$\frac{n}{\phi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \tag{2.14}$$

Demostración. Sea $f(n) = \frac{n}{\phi(n)}$. Se procederá a utilizar funciones p, con p un primo cualquiera. Nótese que

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\phi(p^n)} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{\phi(p^n)} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{p^n - p^{n-1}} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{p^n\left(1 - \frac{1}{p}\right)} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{p-1}{p}\right)} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p-1} x^n = 1 + \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + \left[\frac{p}{p-1}\right]\left[\frac{x}{1-x}\right] = \frac{(p-1)(1-x) + px}{(p-1)(1-x)} \\ &= \frac{p - px - 1 + x - px}{(p-1)(1-x)} = \frac{p - 1 + x}{(p-1)(1-x)} = \left[\frac{(p-1) + x}{p-1}\right]\left[\frac{1}{1-x}\right] = \left[1 + \frac{x}{p-1}\right]\left[\frac{1}{1-x}\right] \end{aligned}$$

De lo anterior se infiere que

$$f_p(x) = \left[1 + \frac{x}{p-1}\right]\left[\frac{1}{1-x}\right]$$

Ahora bien, sea

$$g(n) = \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$$

de donde

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^2\left(p^n\right)}{\phi\left(p^n\right)} x^n = 1 + \frac{\mu^2(p)}{\phi(p)} x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancelto{0}{\mu^2\left(p^n\right)}}{\phi\left(p^n\right)} x^n \\ &= 1 + \left[\frac{1}{p-1}\right] x = 1 + \frac{x}{p-1} \end{aligned}$$

De lo anterior se infiere entonces que

$$f_p(x) = \left[1 + \frac{x}{p-1}\right]\left[\frac{1}{1-x}\right] = g_p(x) u_p(x)$$

por lo que al utilizar el Teorema de Convoluciones de Series, se infiere que $f = g * u$, por lo que

$$\frac{n}{\phi(n)} = f = g * u = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \cancelto{1}{u\left(\frac{n}{d}\right)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}$$

lo que completa la demostración. □

Teorema 19. *Las funciones ν y μ cumplen que*

$$(\nu * \mu)(n) = \begin{cases} 1, & \textit{si } n \textit{ es de la forma } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \textit{ con } p_j \textit{ primo.} \\ \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Demostración. Se procederá a utilizar funciones p, con p un primo cualquiera.

Sea f definida como $f = \nu * \mu$. Utilizando las propiedades (2.6) y (2.8) se obtiene que

$$f_p(x) = \mu_p(x) \nu_p(x) = (1-x)\left[\frac{x}{1-x}\right] = x$$

De esto se sigue que

$$f_p(x) = x = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n$$

Comparando el segundo y tercer término en las igualdades, se tiene

$$f\left(p^n\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que μ y ν son multiplicativas, se da que $(\nu * \mu)$ también es multiplicativa, por lo que para $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\nu * \mu)(n) &= \left[(\nu * \mu)\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\right)\right] = \left[(\nu * \mu)\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right]\left[(\nu * \mu)\left(p_2^{\alpha_2}\right)\right] \cdots \left[(\nu * \mu)\left(p_r^{\alpha_r}\right)\right] \\ &= f\left(p_1^{\alpha_1}\right) f\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots f\left(p_r^{\alpha_r}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1 \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. $\square$

3. La función ζ y sus propiedades

3.1. La función ζ

3.1.1. Generalidades

Definición. *Se define a la función* $\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *como*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.1}$$

Nota. Del análisis complejo, se sabe que $\zeta(s)$ converge con $s \in \mathbb{C}$ cuando $\mathbf{Re}(s) > 1$.

Nota. Vía extensión analítica, la función ζ se puede extender a todo el plano complejo con el único polo en $s = 1$.

Nota. Para valores de s donde $\mathbf{Re}(s) < 1$, los valores de la función ζ deben de ser calculados vía la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2\pi(-s)(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

donde

$$\pi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-s}(n+1)^s}{s+n}$$

3.1.2. Relaciones entre ζ y las funciones aritméticas

Nota. Antes de inicial las demostraciones de las propiedades de ζ, es necesario demostrar un teorema relacionada con las funciones aritméticas en series infinitas.

Teorema (Convolución en series infinitas). *Sea $s \in \mathbb{C}$ y sean $f(n)$ y $g(n)$ dos funciones aritméticas. Se da entonces que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \tag{3.2}$$

donde $h = (f * g)$.

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} &= \left[\frac{f(1)}{1^s} + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \cdots\right]\left[\frac{g(1)}{1^s} + \frac{g(2)}{2^s} + \frac{g(3)}{3^s} + \cdots\right] \\
&= \frac{f(1)g(1)}{1^s} + \frac{1}{2^s}\left[f(1)g(2) + f(2)g(1)\right] + \frac{1}{3^s}\left[f(1)g(3) + f(3)g(1)\right] + \cdots \\
&\cdots + \frac{1}{k^s}\left[\sum_{d|k} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\right] + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

Teorema 20. $\forall\, s \in \mathbb{C}$ *no cero de ζ, $s \neq 2, s \neq 1$ se cumple que*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} \tag{3.3}$$

Demostración. Analizando la función

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s}$$

Aplicando el Teorema de convolución en series en la expresión anterior, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \phi(d)(1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \phi(d)}{n^s}$$

Utilizando la expresión en (1.23), se sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \phi(d)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1)$$

De lo anterior, se sabe que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\zeta(s-1)$$

lo que demuestra que, para s no cero de ζ se da que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}$$

□

Definición. *Sea $\alpha\in\mathbb{C}$. Se define la función aritmética $\sigma_\alpha(n)$ como*

$$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha \tag{3.4}$$

Teorema 21. *Para $s,\alpha\in\mathbb{C}, s\neq 1, s\neq\alpha+1$ se da que*

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \tag{3.5}$$

Demostración. Nótese que

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n^s}$$

Ahora bien, utilizando el Teorema de convoluciones en series, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}d^\alpha(1)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}d^\alpha}{n^s}$$

de donde se infiere que

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}d^\alpha}{n^s}$$

lo que completa la demostración. □

Teorema 22. $\forall\, s\in\mathbb{C}$ *no cero de ζ con $s\neq 1$, se da que*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s} \tag{3.6}$$

Demostración. Analizando la expresión $\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$, nótese que del Teorema de convoluciones en series se tiene que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\lambda(d)(1)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\lambda(d)}{n^s}$$

Ahora, al utilizar la expresión en (1.18), se sabe que los términos en la suma anterior se eliminarán salvo para los valores de n que sean cuadrados. De esto se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\lambda(d)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}=\zeta(2s)$$

De ello se sabe que

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\zeta(2s)$$

de donde se infiere que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$$

lo que completa la demostración. $\square$

Nota. Antes de proseguir, es necesario establecer el valor de $\zeta^2(s)$.

Lema. *La función ζ cumple que*

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s} \tag{3.7}$$

Demostración. Nótese que

$$\zeta^2(s)=\zeta(s)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}1}{n^s}$$

y de la propiedad (1.3) se sabe que

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

lo que completa la demostración. $\square$

Teorema 23. *$\forall\, s \in \mathbb{C}$, con $2s$ no cero de ζ, se da que*

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} \tag{3.8}$$

Demostración. Se procederá a demostrar esta propiedad por incisos:

1. Sea f una función aritmética definida de la forma

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es cuadrado.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean a la vez $m, n \in \mathbb{N} : (m,n) = 1$. De ello, para mn hay dos casos:

   a) <u>mn es cuadrado:</u> Si mn es cuadrado, dado que $(m,n) = 1$, se infiere que tanto m como n son cuadrados[1]. De ello $f(mn) = 1 = f(m)f(n)$

   b) <u>mn no es cuadrado:</u> Si mn no es cuadrado, entonces $f(mn) = 0$. A la vez, no se podria dar que ambos m y n sean cuadrados a la vez, porque de lo contrario mn seria cuadrado. De esto forzosamente o $f(m) = 0$ ó $f(n) = 0$. De ello $f(mn) = 0 = f(m)f(n)$

De los dos casos anteriores, se debe notar que f es multiplicativa.

2. De lo anterior, se sabe que f es multiplicativa. A la vez, del Teorema 4 se sabe que $2^{\nu(\cdot)}$ también es multiplicativa. De ello, por el Teorema 1 se infiere que la función F definida como

$$F(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

es también multiplicativa. Sea entonces $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$. De ello

$$\begin{aligned} F(n) &= F\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}\right) = F\left(p_1^{\alpha_1}\right) F\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots F\left(p_m^{\alpha_m}\right) \\ &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right] \left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right] \cdots \left[\sum_{d|p_m^{\alpha_m}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right] \end{aligned}$$

[1]Dado que si m o n no es cuadrado, entonces tendría algún divisor primo elevado a una potencia impar, y para que mn sea cuadrado, el otro número (n o m dependiendo del caso) debería poseer el mismo factor primo también elevado a una potencia impar, contradiciendo el hecho que $(m,n) = 1$.

Analizando el término general $\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)$, donde p toma los valores $p_1, \cdots, p_m$ y α los correspondientes valores de $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. Para α se tiene los siguientes casos:

a) Si α es par:

Si α es par, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) =& 2^{\nu(1)} f\left(p^\alpha\right) + 2^{\nu(p)} f\left(p^{\alpha-1}\right) + 2^{\nu\left(p^2\right)} f\left(p^{\alpha-2}\right) \\ & + 2^{\nu\left(p^3\right)} f\left(p^{\alpha-3}\right) + \cdots + 2^{\nu(p^\alpha)} f(1) \\ =& \underbrace{1\cdot 1}_{d=1} + \underbrace{2\cdot 0}_{d=p} + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p^2} + \underbrace{2\cdot 0}_{d=p^3} + \cdots + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p^\alpha} \\ & = 1 + 2\Bigg[\underbrace{(0+1) + (0+1) + \cdots + (0+1)}_{\frac{\alpha}{2} \text{ veces el término } (0+1)}\Bigg] \\ & = 1 + 2\left[\frac{\alpha}{2}\right] = 1 + \alpha\end{aligned}$$

De lo anterior, si α es par, se tiene que

$$\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = \alpha + 1$$

b) Si α es impar:

Si α es impar, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) =& 2^{\nu(1)} f\left(p^\alpha\right) + 2^{\nu(p)} f\left(p^{\alpha-1}\right) + 2^{\nu\left(p^2\right)} f\left(p^{\alpha-2}\right) + 2^{\nu\left(p^3\right)} f\left(p^{\alpha-3}\right) + \cdots \\ & \cdots + 2^{\nu\left(p^{\alpha-2}\right)} f\left(p^2\right) + 2^{\nu\left(p^{\alpha-1}\right)} f(p) + 2^{\nu(p^\alpha)} f(1) \\ =& \underbrace{1\cdot 0}_{d=1} + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p} + \underbrace{2\cdot 0}_{d=p^2} + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p^3} + \cdots + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p^{\alpha-2}} + \underbrace{2\cdot 0}_{d=p^{\alpha-1}} + \underbrace{2\cdot 1}_{d=p^\alpha} \\ =& 0 + 2\Bigg[\underbrace{(1+0) + (1+0) + \cdots + (1+0)}_{\frac{\alpha-1}{2} \text{ veces el término } (1+0)} + 1\Bigg] \\ =& 2\left[\frac{\alpha-1}{2} + 1\right] = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1\end{aligned}$$

De lo anterior, si α es impar, se tiene que

$$\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = \alpha + 1$$

De los dos incisos anteriores, se debe notar que, sin importar la paridad de α, se cumple

$$\sum_{d|p^\alpha} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = \alpha + 1$$

Al aplicar lo anterior a la expresión

$$\left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_m^{\alpha_m}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]$$

se sabe que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = F(n) &= \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]\left[\sum_{d|p_2^{\alpha_2}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]\cdots\left[\sum_{d|p_m^{\alpha_m}} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)\right]\\ &= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1) = \tau(n)\end{aligned}$$

infiriendo la propiedad

$$\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = \tau(n)$$

3. De la expresión (3.6) se sabe que

$$\zeta(2s) = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$$

Utilizando esto junto con el resultado del iniciso 2, se tiene

$$\begin{aligned}\zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s} &= \left[\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s}\\ &= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\lambda(d)}{n^s}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s}\end{aligned}$$

Ahora bien, de la propiedad (1.18) se sabe que

$$\sum_{d|n}\lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es cuadrado.}\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Renombrando la expresión $\sum_{d|n} \lambda(d)$ como $f(n)$, se tiene que

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \lambda(d)}{n^s}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}$$

y por la propiedad demostrada en el inciso anterior, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

Aplicando la expresión en (3.7), se infiere que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s)$$

De donde, de las expresiones anteriores, se tiene que

$$\zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \lambda(d)}{n^s}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s)$$

por lo que

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

lo que completa la demostración.

$\square$

Escolio 4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *se da que*

$$\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} f\left(\frac{n}{d}\right) = \tau(n)$$

donde

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es cuadrado.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 24. $\forall\, s \in \mathbb{C}$, *con* $2s$ *no cero de* ζ, *se da que*

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s} \tag{3.9}$$

Demostración. Del Teorema 23 se sabe que

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

De ello se tiene que

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}}{n^s}$$

Utilizando la expresión (2.13) en lo anterior, se infiere que

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s}$$

lo que completa la demostración. $\square$

Teorema 25. $\forall\, s \in \mathbb{C}$ *se da que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{p\ primo} \frac{1}{p^s} \tag{3.10}$$

Demostración. Sea $g(n)$ una función definida como

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es primo.} \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Utilizando entonces el Teorema de las convoluciones en series, se tiene que

$$\zeta(s) \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} g(d)}{n^s}$$

Veamos ahora que la expresión $\sum_{d|n} g(d)$ cuenta la cantidad de primos distintos que dividen a n. De ello, al comprarla con (1.12), se infiere que

$$\zeta(s) \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} g(d)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s}$$

lo que completa la demostración. $\square$

Nota. Del teorema anterior, se infiere que ν puede ser reescrito como

$$\nu(n) = \sum_{d|n} g(d) = (g * u)(n)$$

donde

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es primo.} \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 26. *$\forall\, s \in \mathbb{C}$, con s no cero de ζ se da que*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} \tag{3.11}$$

Demostración. Nótese que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d)}{n^s}$$

Ahora bien, de la expresión en (1.17) se sabe que

$$\lambda(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d)$$

por lo que al aplicar esto en lo anterior, se tiene que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\lambda(d)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

Por otro lado, de la expresión en (3.6) se sabe que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

por lo que aplicando esto en lo anterior, se tiene que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

de donde se infiere que, para s no cero de ζ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}$$

lo que completa la demostración. $\square$

Teorema 27. *La función ζ cumple que*

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s} \tag{3.12}$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}\zeta'(s) &= \frac{d}{ds}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right] = \frac{d}{ds}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}\left(n^{-s}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-s}\ln n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s}\end{aligned}$$

lo que completa la demostración. $\square$

3.2. Generalizaciones

Nota. En las secciones anteriores se trabajó con expresiones que involucraban razones y productos de expresiones de ζ. Se demostró, para el conjunto de propiedades de la sección anterior, que cada una de ellas se relacionaba con una serie de potencias, donde el denominador era una función aritmética, o una función que dependia de las mismas. Se llegaron a encontrar los siguientes resultados:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s} \qquad \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s} \qquad \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau\left(n^2\right)}{n^s} \qquad \frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s}$$

Nótese que las expresiones anteriores constan de una sumatoria de fracciones, donde el denominador es n^s y el numerador es una de las funciones aritméticas trabajadas en la sección anterior, o combinacion de varias de ellas. Es natural entonces cuestionarse por la generalización de expresiones de la forma

$$\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

En lo siguiente se desarrollaran las expresiones necesarias para poder llegar a esta generalización utilizando funciones p y propiedades de las funciones aritméticas.

3.2.1. Expresiones de la forma $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$

Nota. En el proceso de generalización se trabajará, en primer lugar, con expresiones de la forma $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$. Esto permitirá el desarrollo las técnicas y los pasos necesarios para determinar la expresión buscada.

Teorema 28. *$\forall\, s \in \mathbb{C}$, con $2s$ no cero de ζ, se da que*

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \tag{3.14}$$

Demostración. Se procederá a realizar la demostración en dos partes:

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 1$. Nótese que μ es multiplicativa, por lo que

   $$|\mu(ab)| = |\mu(a)\mu(b)| = |\mu(a)|\,|\mu(b)|$$

   De lo anterior se infiere que la función $|\mu(\cdot)|$ es multiplicativa, por lo que F definida como

   $$F(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

   también es multiplicativa. Sea entonces $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. De esto se tiene que

   $$\sum_{d|n} |\mu(d)| = F(n) = F\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\right) = \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} |\mu(d)|\right] \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_2}} |\mu(d)|\right] \cdots \left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} |\mu(d)|\right] \tag{3.15}$$

   Considérese ahora el término $\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} |\mu(d)|$. Nótese que

   $$\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} |\mu(d)| = \underbrace{1}_{d=1} + \underbrace{1}_{d=p} + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{d \geq p^2} = 2$$

por lo que se sabe que

$$\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} |\mu(d)| = 2 \tag{3.16}$$

Utilizando (3.16) en (3.15) se sabe que

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_1}} |\mu(d)|\right] \left[\sum_{d|p_1^{\alpha_2}} |\mu(d)|\right] \cdots \left[\sum_{d|p_r^{\alpha_r}} |\mu(d)|\right] = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\nu(n) \text{ veces}} = 2^{\nu(n)}$$

Por lo que

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\nu(n)}$$

Aplicando el Teorema de Inversión de Möbius a lo anterior, se tiene que

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\nu(n)} \Leftrightarrow \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\nu(d)} = |\mu(n)|$$

por lo que

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\nu(d)} = |\mu(n)| \tag{3.17}$$

Esta propiedad se utilizará en el siguiente inciso.

2. De la propiedad (3.8) se tiene que

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

por lo que

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \left[\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\right] \left[\frac{1}{\zeta(s)}\right] \tag{3.18}$$

de donde es necesario calcular la expresión relacionada a $\frac{1}{\zeta(s)}$. Nótese que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \mu(d)}{n^s} = \underbrace{1}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \mu(d)}{n^s}$$

De la expresión en (1.20) se sabe que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \text{ si } n \geq 2$$

por lo que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancelto{0}{\sum_{d|n} \mu(d)}}{n^s} = 1$$

de donde se infiere que $\forall\, s \in \mathbb{C}$ no cero de ζ se da que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{3.19}$$

Utilizando (3.19) en (3.18) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} &= \left[\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\right] \left[\frac{1}{\zeta(s)}\right] = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}\right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

$\square$

Corolario 2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *se da que*

$$(\mu * 2^{\nu})(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) 2^{\nu(d)} = |\mu(n)| \tag{3.20}$$

Corolario 3. $\forall\, s \in \mathbb{C}$ *no cero de* ζ *se da que*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{3.21}$$

Nota. De lo anterior, se sabe que

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \qquad \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} \qquad \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau\left(n^2\right)}{n^s}$$

Se procederá entonces a encontrar la expresión relacionada a $\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$.

Nótese que

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \zeta^2(s) \cdot \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} 2^{\nu(d)}\tau\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2^{\nu} * \tau\right)(n)}{n^s}$$

por lo que

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2^{\nu} * \tau\right)(n)}{n^s} \tag{3.22}$$

De lo anterior se debe notar que $\left(2^{\nu} * \tau\right)(n)$ es la función aritmética que se encuentra en el numerador de las fracciones de la serie. En ese sentido, es natural cuestionarse si existe alguna expresión más simple para $\left(2^{\nu} * \tau\right)(n)$. Se procederá a trabajar entonces con funciones p. Nótese que

$$\tau_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau\left(p^n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+1)}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A la vez

$$\begin{aligned} 2^{\nu}_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\nu(p^n)} x^n = \underbrace{2^{\nu(1)}x^0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancelto{2}{2^{\nu(p^n)}} x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + 2\left[\frac{x}{1-x}\right] \\ &= \frac{1-x+2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

De lo anterior se sabe que

$$\tau_p(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{3.23}$$

$$2^{\nu}_p(x) = \frac{1+x}{1-x} \tag{3.24}$$

Utilizando las dos expresiones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} \tau_p(x) \cdot 2^{\nu}_p(x) &= \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = \frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Convolución en series a lo anterior, se sabe entonces que al ser $h_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$, se da que $h_p(x) = \tau_p(x) \cdot 2_p^{\nu}(x)$, por lo que

$$h\left(p^n\right) = (n+1)^2 = \tau^2\left(p^n\right)$$

para p primo cualquiera. De esto se tiene entonces que

$$\sum_{d|p^n} 2^{\nu(d)} \tau\left(\frac{p^n}{d}\right) = \tau^2\left(p^n\right)$$

para p primo cualquiera, por lo que

$$\left(2^{\nu} * \tau\right)(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)} \tau\left(\frac{n}{d}\right) = \tau^2(n) \tag{3.25}$$

Utilizando (3.25) en (3.22) se infiere entonces que

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2^{\nu} * \tau\right)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s}$$

Lo anterior demuestra el siguiente teorema.

Teorema 29. *$\forall\, s \in \mathbb{C}$, con $2s$ no cero de ζ, se tiene que*

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s} \tag{3.26}$$

Corolario 4. *$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ se da que*

$$\tau^2(n) = \sum_{d|n} 2^{\nu(d)} \tau\left(\frac{n}{d}\right) = (2^{\nu} * \tau)(n) \tag{3.27}$$

Nota. Se conocen ahora las expresiones buscadas para los exponentes $a = 1, 2, 3, 4$ en la expresión $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$. Se analizará el caso $a \geq 5$.

Nota. Del desarrollo anterior se sabe que

$$\begin{aligned}\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)} &= \zeta(s) \cdot \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \tau^2(d)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \tau^2(d) u\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tau^2 * u\right)(n)}{n^s}\end{aligned}$$

De ello, es necesario calcular las expresiones relacionadas a $(\tau^2 * u)(n)$. Nótese que

$$\tau_p^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

A la vez nótese que la función p asociada a u es

$$u_p(x) = \frac{1}{1-x}$$

por lo que

$$\tau_p^2(x) \cdot u_p(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^4}$$

Sea $g_p(x)$ definido entonces como

$$g_p(x) = \tau_p^2(x) \cdot u_p(x) \tag{3.28}$$

Nótese que del desarrollo de Taylor de $g_p(x)$ se sabe que

$$\tau_p^2(x) \cdot u_p(x) = \frac{1+x}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left[\frac{d^{(n)}}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^4}\right)\right]\Bigg|_{x=0} \tag{3.29}$$

Analizando la generalización de la expresión anterior, se debe notar que $\left[\frac{d^{(n)}}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Big|_{x=0}$, con $m \in \mathbb{Z}^+$ cumple que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m+1 \\
\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m(m+3) \\
\left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m(m+1)(m+5) \\
\left[\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m(m+1)(m+2)(m+7) \\
\left[\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m(m+1)(m+2)(m+3)(m+9) \\
\left[\frac{d^6}{dx^6}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} &= m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+11) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Esto brinda una secuencia inductiva que puede ser utilizada en el siguiente teorema.

Teorema 30. La expresión

$$\left[\frac{d^{(n)}}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0}$$

con $m \in \mathbb{Z}^+$ *cumple que*

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \begin{cases} m+1, \ \ si\ n=1 \\ \\ m(m+3), \ \ si\ n=2 \\ \\ \left[\prod_{j=0}^{n-2}(m+j)\right](m+2n-1), \ \ si\ n\geq 3 \end{cases} \tag{3.30}$$

Demostración. Se procederá por inducción sobre n.

1. Para $n=1$: Si $n=1$, entonces

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \left[-\frac{1}{(x-1)^m}\left(\frac{-2m}{x-1}-m+1\right)\right]\Bigg|_{x=0} = m+1$$

2. Para $n=2$: Si $n=2$, entonces

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \left[\frac{m((m-1)x+m+3)}{(x-1)^2(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} = m(m+3)$$

3. Para $n=3$: Si $n=3$, entonces

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \left[\frac{-m(m+1)\left[(m-1)x+m+5\right]}{(x-1)^3(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} = m(m+1)(m+5)$$

4. Supóngase que para $n=k$, con $k\geq 3$ se cumple que:

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \left[\prod_{j=0}^{k-2}(m+j)\right](m+2k-1)$$

5. <u>Ahora, para $n = k+1$:</u> Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left[\frac{1+x}{(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1+x}{(1-x)^m}\right]\right]\Bigg|_{x=0} &= \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{(1-x)^m}\right]\right]\Bigg|_{x=0} \\
&= \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{m(1+x)}{(1-x)^{m+1}} + \frac{1}{(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} \\
&= \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{m(1+x)}{(1-x)^{m+1}}\right]\Bigg|_{x=0} + \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1}{(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} \\
&=m\,\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{(1+x)}{(1-x)^{m+1}}\right]\Bigg|_{x=0} + \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1}{(1-x)^m}\right]\Bigg|_{x=0} \\
&=m\left(\left[\prod_{j=0}^{k-2}((m+1)+j)\right]((m+1)+2k-1)\right) + \\
&\quad + \left[m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)(1-x)^{-m-k}\right]\Big|_{x=0} \\
&=m(m+2k)\left[\prod_{j=0}^{k-2}((m+1)+j)\right] + m\prod_{j=0}^{k-2}((m+1)+j) \\
&=m((m+1)+2k)\left[\prod_{j=0}^{k-2}((m+1)+j)\right] \\
&= \left(m\left[\prod_{j=0}^{k-2}((m+1)+j)\right]\right)((m+1)+2k) \\
&= \left[\prod_{j=0}^{k-1}(m+j)\right]((m+1)+2k) \\
&= \left[\prod_{j=0}^{(k+1)-2}(m+j)\right](m+2(k+1)-1)
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que para $n = k+1$, la propiedad se mantiene, completando así la demostración.

$\square$

Al reagrupar a (3.29) en las formas de las funciones p, se tiene que

$$\tau_p^2(x)\cdot u_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^4}\right)\right]\Bigg|_{x=0} x^n$$

y tomando a $\left[\frac{1}{n!}\frac{d^{(0)}}{dx^0}\left(\frac{1+x}{(1-x)^4}\right)\right]\Big|_{x=0} = 1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tau_p^2(x)\cdot u_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^4}\right)\right]\Bigg|_{x=0} x^n \\
&= \underbrace{1}_{n=0} + \underbrace{\frac{4+1}{1!}x}_{n=1} + \underbrace{\frac{4(4+3)}{2!}x^2}_{n=2} + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\underbrace{\left[\prod_{j=0}^{n-2}(4+j)\right](4+2n-1)\frac{1}{n!}\,x^n}_{n\geq 3}\right] \\
&= 1 + 5x + 14x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\underbrace{\left[\prod_{j=0}^{n-2}(4+j)\right](4+2n-1)\frac{1}{n!}\,x^n}_{n\geq 3}\right]
\end{aligned}
$$

Del cálculo de la expresión relacionada para $n \geq 3$, se debe notar que en general se cumple

$$
\begin{aligned}
\left[\prod_{j=0}^{n-2}(m+j)\right](m+2n-1)\frac{1}{n!} &= \frac{(m+2n-1)\left[m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)\right]}{n!} \\
&= \frac{(m+2n-1)\left[m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)\right](m-1)!}{n!(m-1)!} \\
&= \frac{(m+2n-1)(m+n-2)!}{n!(m-1)!} = \frac{(m+2n-1)(m+n-2)!}{(m-1)n!(m-2)!} \\
&= \left[\frac{m+2n-1}{m-1}\right]\left[\frac{(m+n-2)!}{n!(m-2)!}\right] = \left[\frac{m+2n-1}{m-1}\right]\binom{m+n-2}{n}
\end{aligned}
$$

por lo que se infiere que

$$
\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1+x}{(1-x)^m}\right)\right]\Bigg|_{x=0} = \begin{cases} 1,\ \text{si } n=0 \\[2ex] m+1,\ \text{si } n=1 \\[2ex] \dfrac{m(m+3)}{2},\ \text{si } n=2 \\[2ex] \left[\dfrac{m+2n-1}{m-1}\right]\dbinom{m+n-2}{n},\ \text{si } n\geq 3 \end{cases} \tag{3.31}
$$

Utilizando esto, se tiene entonces que

$$g_p(x) = \tau_p^2(x) \cdot u_p(x) = 1 + 5x + 14x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\left[\prod_{j=0}^{n-2} (4+j) \right] (4 + 2n - 1) \frac{1}{n!} x^n \right]$$
$$= 1 + 5x + 14x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{4 + 2n - 1}{4 - 1} \right] \binom{4 + n - 2}{n} x^n$$
$$= 1 + 5x + 14x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{4 + 2n - 1}{3} \right] \binom{2 + n}{n} x^n$$

es la función p asociada a la convolución en el desarrollo de $\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}$. Se tiene entonces que la función g definida como

$$g\left(p^r\right) = \begin{cases} 1, \text{ si } r = 0 \\ 5, \text{ si } r = 1 \\ 14, \text{ si } r = 2 \\ \left[\dfrac{4 + 2r - 1}{3} \right] \dbinom{2 + r}{n}, \text{ si } r \geq 3 \end{cases} \quad \text{, con } p \text{ primo cualquiera} \tag{3.32}$$

es la función aritmética que aparece en

$$\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

donde, por tratarse de primos cualesquiera en (3.32), se da, para $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, que

$$g(n) = g\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\right) = g\left(p_1^{\alpha_1}\right) g\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots g\left(p_r^{\alpha_r}\right)$$

Esta técnica demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 31. *La función aritmética $g(n)$ que aparece en la expresión*

$$\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

cumple ser multiplicativa. Sus valores son dados por

$$g\left(p^{r}\right)=\begin{cases}1, & si\ r=0\\ 5, & si\ r=1\\ 14, & si\ r=2\\ \left[\dfrac{4+2r-1}{3}\right]\dbinom{2+r}{r}, & si\ r\geq 3\end{cases}$$

donde p es un primo cualquiera y $r\in\mathbb{N}$.

Nota. Nótese que, a diferencia de las expresiones de $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$, $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$, $\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}$ y $\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$, la función aritmética buscada no se expresó como una función explícita, sino como la lista de las imagenes de potencias de primos cualesquiera.

Nota. Ahora bien, analicemos el caso de $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$, con $a>5$. De la nota anterior se sabe que

$$\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$$

donde

$$g_p(x)=\frac{1+x}{(1-x)^4}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\zeta^6(s)}{\zeta(2s)}&=\zeta(s)\frac{\zeta^5(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}g(d)}{n^s}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}g(d)u\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g*u)(n)}{n^s}\end{aligned}$$

Nótese que al utilizar funciones p para calcular $(g*u)(n)$, se tiene que

$$g_p(x)u_p(x)=\frac{1+x}{(1-x)^4}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^5}$$

Denotando como $g_p(5,x)$ a la expresión

$$g_p(5,x)=g_p(x)u_p(x)=\frac{1+x}{(1-x)^5}$$

al utilizar (3.31) en su desarrollo de Taylor, se sabe que

$$\begin{aligned} g_p(5,x) &= 1+(5+1)x+\frac{5(5+3)}{2!}x^2+\sum_{r=3}^{\infty}\left[\frac{5+2r-1}{5-1}\right]\binom{5+r-2}{r}x^r \\ &= 1+6x+20x^2+\sum_{r=3}^{\infty}\left[\frac{4+2r}{4}\right]\binom{3+r}{r}x^r \end{aligned}$$

donde los valores son calculados al tomar $m=5$ en (3.31), por lo al ser $g(5,n)$ la función aritmética asociada a $g_p(5,x)$, se tiene que

$$g\left(5,p^r\right)=\begin{cases} 1, \text{ si } r=0 \\ 6, \text{ si } r=1 \\ 20, \text{ si } r=2 \\ \left[\frac{4+2r}{4}\right]\binom{3+r}{r}, \text{ si } r\geq 3 \end{cases}$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 32. La función aritmética $\widetilde{g}(n)$ la cual cumple que

$$\frac{\zeta^6(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{g}(n)}{n^s}$$

es de la forma

$$\widetilde{g}\left(p^r\right)=g\left(5,p^r\right)=\begin{cases} 1, \text{ si } r=0 \\ 6, \text{ si } r=1 \\ 20, \text{ si } r=2 \\ \left[\frac{4+2r}{4}\right]\binom{3+r}{r}, \text{ si } r\geq 3 \end{cases}$$

Además, la función $\widetilde{g}$ cumple ser multiplicativa.

Nota. La función aritmética $\widetilde{g}(n)$ que se encuentra en la expresión

$$\frac{\zeta^6(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{g}(n)}{n^s}$$

cumple que

$$\widetilde{g}_p(x)=\frac{1+x}{(1-x)^5}$$

por lo que la expresión relacionada con $\frac{\zeta^7(s)}{\zeta(2s)}$ seria

$$\begin{aligned}\frac{\zeta^7(s)}{\zeta(2s)} &= \zeta(s)\frac{\zeta^6(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{g}(n)}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\widetilde{g}(d)}{n^s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}\widetilde{g}(d)u\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\widetilde{g}*u)(n)}{n^s}\end{aligned}$$

Nótese que al utilizar funciones p para calcular $(\widetilde{g}*u)(n)$, se tiene que

$$\widetilde{g}_p(x)u_p(x) = \frac{1+x}{(1-x)^5}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^6}$$

De las notas anteriores, se debe notar que se puede seguir un desarrollo inductivo. Para $a > 5$ se sabe que la función aritmética $g(n)$ que se encuentra en la expresión

$$\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$$

tiene la función p asociada

$$g_p(x) = \frac{1+x}{(1-x)^{a-1}}$$

De la expresión en (3.31) se sabe que

$$g\left(p^r\right) = \frac{g_p^{(r)}(0)}{r!} = \begin{cases} 1, \text{ si } r=0 \\ a, \text{ si } r=1 \\ \dfrac{(a-1)(a+2)}{2}, \text{ si } r=2 \\ \left[\dfrac{a+2r-2}{a-2}\right]\dbinom{a+r-3}{r}, \text{ si } r\geq 3\end{cases}$$

donde p es un primo cualquiera, y g es multiplicativa. Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 33. *Sea $a \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq 5$. La función aritmética $g(n)$ que se encuentra en la serie*

$$\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$$

es de la forma

$$g\left(p^r\right)=\begin{cases} 1, \ \ si\ r=0 \\ \\ a, \ \ si\ r=1 \\ \\ \dfrac{(a-1)(a+2)}{2}, \ \ si\ r=2 \\ \\ \left[\dfrac{a+2r-2}{a-2}\right]\dbinom{a+r-3}{r}, \ \ si\ r\geq 3 \end{cases}$$

donde p es un primo cualquiera. Además, g es multiplicativa.

El teorema anterior brinda la forma general de la función aritmética de la expresión $\frac{\zeta^a(s)}{\zeta(2s)}$.

3.2.2. Método de generalización

Del método inductivo utilizado anteriormente, se infiere que para poder encontrar la función aritmética $h(n)$ la cual cumpla que

$$\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}, \qquad \text{con } a,b,c,d\in\mathbb{N} \tag{3.33}$$

es necesario encontrar las funciones aritméticas $h_1(n), h_2(n)$ las cuales cumplan que

$$\begin{aligned} \zeta^a(bs)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_1(n)}{n^s} \\ \frac{1}{\zeta^c(ds)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_2(n)}{n^s} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Utilizando dichas expresiones, se debe notar que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}=\zeta^a(bs)\cdot\frac{1}{\zeta^c(ds)}&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_1(n)}{n^s}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_2(n)}{n^s}\right] \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n}h_1(d)h_2\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(h_1*h_2)(n)}{n^s} \end{aligned}$$

Para calcular la convolución $(h_1 * h_2)(n)$, es necesario utilizar funciones p y encontrar la expresión

$$h_p(x) = (h_1)_p(x)(h_2)_p(x) \tag{3.35}$$

Finalmente, la expresión $h(n)$ buscada para (3.33) es dada por

$$h\left(p^r\right) = \frac{h^{(r)}(0)}{r!} \tag{3.36}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{N}$. Éste es básicamente el método utilizado en la sección anterior, y es el que permitirá calcular la función aritmética relacionada a $\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}$.

3.2.3. Expresiones de la forma $\zeta^a(bs)$

Nótese que

$$\zeta(bs) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{bs}}$$

De esto, se puede definir entonces a la función $\phi_b(n)$ como

$$\phi_b(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ es de la forma } n = \alpha^b, \text{ con } \alpha \in \mathbb{N} \\ \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Utilizando la expresión anterior, se sabe entonces que

$$\zeta(bs) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{bs}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_b(n)}{n^s}$$

Por otro lado, nótese que la serie p asociada a $\phi_b(n)$ es dada por

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} x^{bj} &= \underbrace{1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^{b-1}}_{b \text{ elementos}} + \underbrace{x^b + 0x^{b+1} + \cdots + 0x^{2b-1}}_{b \text{ elementos}} + x^{2b} + 0x^{2b+1} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - x^b}\end{aligned}$$

por lo que

$$(\phi_b)_p(x) = \frac{1}{1-x^b} \tag{3.38}$$

es la función p asociada a $\phi_b(n)$.

Ahora bien, nótese que

$$\zeta^2(bs) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_b(n)}{n^s}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_b(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \phi_b(d)\phi_b\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\phi_b * \phi_b\right)(n)}{n^s}$$

Denotando a

$$h_b^{[2]}(n) = (\phi_b * \phi_b)(n)$$

se tiene

$$\zeta^2(bs) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\phi_b * \phi_b\right)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_b^{[2]}(n)}{n^s}$$

Utilizando (3.38) se sabe que

$$(h_b^{[2]})_p(x) = (\phi_b)_p(x) \cdot (\phi_b)_p(x) = \frac{1}{1-x^b} \cdot \frac{1}{1-x^b} = \frac{1}{(1-x^b)^2}$$

Nótese ahora que

$$\zeta^3(bs) = \zeta(bs)\zeta^2(bs) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_b(n)}{n^s}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_b^{[2]}(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \phi_b(d)h_b^{[2]}\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(h_b^{[2]} * \phi_b\right)(n)}{n^s}$$

Denotando entonces como

$$h_b^{[3]} = h_b^{[2]} * \phi_b$$

se tiene que

$$\zeta^3(bs) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(h_b^{[2]} * \phi_b\right)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(h_b^{[3]}\right)(n)}{n^s}$$

y a la vez

$$(h_b^{[3]})_p(x) = (h_b^{[2]})_p(x) \cdot (\phi_b)_p(x) = \frac{1}{(1-x^b)^2} \cdot \frac{1}{1-x^b} = \frac{1}{(1-x^b)^3}$$

Procediendo de manera inductiva, se define la sucesión $\left(h_b^{[j]}\right)_{j\in\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}}$ la cual cumple que

$$(h_b^{[j]})(n) = (h_b^{[j-1]} * \phi_b)(n) \tag{3.39}$$

y donde se da que

$$(h_b^{[j]})_p(x) = \frac{1}{(1-x^b)^j} \tag{3.40}$$

A la vez, por (3.39), se sabe que cada miembro de la sucesión cumple que

$$\zeta^j(bs) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_b^{[j]}(n)}{n^s} \tag{3.41}$$

Para poder determinar los valores de $h_b^{[j]}(n)$ que aparecen en (3.41) se utiliza (3.40). Nótese que el desarrollo de Taylor de $(h_b^{[j]})_p(x)$ es

$$\begin{aligned}(h_b^{[j]})_p(x) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d^k}{dx^k}(h_b^{[j]})_p(x)\right)\bigg|_{x=0}\left(\frac{1}{k!}\right)\right]x^k \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1}{(1-x^b)^j}\right]\right)\bigg|_{x=0}\left(\frac{1}{k!}\right)\right]x^k\end{aligned}$$

De las propiedades de las funciones p, se sabe entonces que para un primo p cualquiera y $r\in\mathbb{Z}^+$ con $r>1$, se da entonces que

$$h_b^{[j]}(p^r) = \left(\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{1}{(1-x^b)^j}\right]\right)\bigg|_{x=0}\left(\frac{1}{r!}\right) \tag{3.42}$$

Al tomar a $a=r$, se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema 34. *Sean $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Sea $h(n)$ la función aritmética que aparece en*

$$\zeta^a(bs) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}$$

Entonces h es de la forma

$$h(p^r) = \left(\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{1}{(1-x^b)^a}\right]\right)\bigg|_{x=0}\left(\frac{1}{r!}\right) \tag{3.43}$$

donde p es un primo cualquiera y $r\in\mathbb{Z}^+$. A la vez, h es multiplicativa y la función p asociada a h es

$$h_p(x) = \frac{1}{(1-x^b)^a} \tag{3.44}$$

3.2.4. Expresiones de la forma $\frac{1}{\zeta^c(ds)}$

Para calcular las expresiones de la forma $\frac{1}{\zeta^c(ds)}$, con $c, d \in \mathbb{Z}^+$, se calcularán unos ejemplos sencillos y luego se realizará la inferencia de la generalización.

Procediendo con el caso $c = d = 1$, se debe calcular la función aritmética relacionada a $\frac{1}{\zeta(s)}$. Sea $f(n)$ la función aritmética que cumple que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Dado que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, se tiene entonces que

$$1 = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} f(d)}{n^s}$$

De lo anterior, se sabe entonces que

$$\sum_{d|n} f(d) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 1. \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese a la vez que $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = (f * u)(n)$. Utilizando funciones p, se sabe entonces que, para el caso de $n = 1$, que

$$1 = f_p(x) u_p(x) = f_p(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

De ello se sabe que $f_p(x) = 1 - x$ cuando $n = 1$. Esto nos dice que

$$f\left(p^0\right) = 1$$
$$f\left(p^1\right) = -1$$

para un p primo cualquiera. Ahora al considerar el caso en que $n \geq 2$, se tiene que

$$0 = f_p(x) u_p(x) = f_p(x) \cdot \frac{1}{1-x}$$

Se concluye entonces que $f(p^n) = 0$ cuando $n \geq 2$. Se tiene

$$f\left(p^r\right) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 0 \\ -1, \text{ si } n = 1 \\ 0, \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

De lo anterior se debe notar que $f = \mu$, por lo que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Sean $c, d \in \mathbb{Z}^+$, y sea $g(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\frac{1}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

A la vez, sea $h(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\zeta^c(ds) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

Nótese que

$$1 = \frac{1}{\zeta^c(ds)} \cdot \zeta^c(ds) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} g(d) h\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g*h)(n)}{n^s}$$

Al utilizar funciones p se sabe entonces que

$$1 = g_p(x) \cdot h_p(x)$$

Ahora bien, del Teorema (34) se sabe que

$$h_p(x) = \frac{1}{(1 - x^d)^c}$$

de donde se sabe entonces que

$$g_p(x) = (1 - x^d)^c$$

Ahora bien, nótese que al utilizar el teorema del Binomio de Newton, la expresión $g_p(x)$ cumple

$$\begin{aligned} g_p(x) = (1 - x^d)^c &= \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} (-1)^j \left(x^d\right)^j (1)^{c-j} = \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} (-1)^j \left(x^d\right)^j \\ &= 1 + (-1)\binom{c}{1} x^d + \binom{c}{2} x^{2d} + (-1)\binom{c}{3} x^{3d} + \cdots + (-1)^{c-1}\binom{c}{c-1} x^{(c-1)d} + (-1)^c x^{cd} \end{aligned}$$

Utilizando la teoría de las funciones p, se sabe entonces que g es de la forma

$$g\left(p^r\right) = \begin{cases} (-1)^t \dbinom{c}{t}, \text{ con } t \in \mathbb{N} \text{ tal que } r = td, \text{ y } r \leq cd \\ \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{N}$. Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 35. *Sean $c, d \in \mathbb{Z}^+$. Sea $g(n)$ la función aritmética que aparece en*

$$\frac{1}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Entonces g cumple ser de la forma

$$g\left(p^r\right) = \begin{cases} (-1)^t \dbinom{c}{t}, \text{ con } t \in \mathbb{N} \text{ tal que } r = td, \text{ y } r \leq cd \\ \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{3.45}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{N}$. A la vez g es multiplicativa y la función p asociada a g es

$$g_p(x) = (1 - x^d)^c \tag{3.46}$$

3.2.5. Expresiones de la forma $\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}$

Sea $f(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$. Sean ahora $g(n)$ y $h(n)$ las funciones aritméticas que aparecen en

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta^c(ds)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \\ \zeta^a(bs) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)} = \frac{1}{\zeta^c ds} \cdot \zeta^a(bs) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}\right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} g(d) h\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g * h)(n)}{n^s} \end{aligned}$$

de ello se sabe entonces que

$$f(n) = (g * h)(n)$$

y al aplicar la teoría de funciones p a la expresión anterior, se sabe que

$$f_p(x) = g_p(x)h_p(x) \tag{3.48}$$

Por el otro lado, al aplicar el Teorema 34 y el Teorema 35 en (3.47), se sabe que las funciones p asociadas a g y h son

$$\begin{aligned} g_p(x) &= (1 - x^d)^c \\ h_p(x) &= \frac{1}{(1 - x^b)^a} \end{aligned} \tag{3.49}$$

por lo que al aplicar las expresiones de (3.49) en (3.48) se tiene que

$$f_p(x) = g_p(x)h_p(x) = (1 - x^d)^c \cdot \frac{1}{(1 - x^b)^a} = \frac{(1 - x^d)^c}{(1 - x^b)^a}$$

Ahora bien, al encontrar el desarrollo de Taylor de la expresión anterior, se sabe que

$$\begin{aligned} f_p(x) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{d^j}{dx^j} \left[f_p(x) \right] \right) \bigg|_{x=0} \left(\frac{1}{j!} \right) \right] x^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{d^j}{dx^j} \left[\frac{(1 - x^d)^c}{(1 - x^b)^a} \right] \right) \bigg|_{x=0} \left(\frac{1}{j!} \right) \right] x^j \end{aligned}$$

De la teoría de funciones p, se sabe entonces que

$$f(p^r) = \left(\frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{(1 - x^d)^c}{(1 - x^b)^a} \right] \right) \bigg|_{x=0} \left(\frac{1}{r!} \right)$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{Z}^+$. Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 36. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$. Sea $f(n)$ la función aritmética que aparece en*

$$\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Entonces f es de la forma

$$f(p^r) = \left(\frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{(1 - x^d)^c}{(1 - x^b)^a} \right] \right) \bigg|_{x=0} \left(\frac{1}{r!} \right) \tag{3.50}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{Z}^+$. A la vez, f es multiplicativa y la función p asociada a f es

$$f_p(x) = \frac{(1 - x^d)^c}{(1 - x^b)^a} \tag{3.51}$$

CONCLUSIONES

1. La propiedad de multiplicatividad de las funciones aritméticas permite calcular expresiones complejas que relacione varias de las mismas.

2. Cualquier función aritmética f puede ser vista como función de variable real, definiendo la función $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(p^n\right) x^n \tag{3.52}$$

donde p es un primo cualquiera. Esto permite utilizar convoluciones para demostrar varias de sus propiedades sin utilizar el concepto de multiplicatividad.

3. Existen dos tipos distintos de convolución. Ambas pueden ser utilizadas para demostrar propiedades de las funciones aritméticas.

4. El numerador de cada término de la expansión de serie de la expresión $\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ define una función aritmética, la cual depende de los exponentes de las potencias de primos que se encuentran en la factorización prima del índice de cada término en la expansión de serie de dicha expresión.

5. Al ser $a, b \in \mathbb{Z}^+$, y $h(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\zeta^a(bs) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

Entonces h es de la forma

$$h\left(p^r\right) = \left(\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{1}{(1-x^b)^a}\right]\right)\Bigg|_{x=0}\left(\frac{1}{r!}\right) \tag{3.53}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{Z}^+$. A la vez, h es multiplicativa y la función p asociada a h es

$$h_p(x) = \frac{1}{(1-x^b)^a} \tag{3.54}$$

6. Al ser $c, d \in \mathbb{Z}^+$, y ser $g(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\frac{1}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Entonces g es de la forma

$$g\left(p^r\right) = \begin{cases} (-1)^t \dbinom{c}{t}, \text{ con } t \in \mathbb{N} \text{ tal que } r = td, \text{ y } r \leq cd \\ \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{3.55}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{N}$. A la vez g es multiplicativa y la función p asociada a g es

$$g_p(x) = (1-x^d)^c \tag{3.56}$$

7. Al ser $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, y ser $f(n)$ la función aritmética que aparece en

$$\frac{\zeta^a(bs)}{\zeta^c(ds)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Entonces f es de la forma

$$f(p^r) = \left(\frac{d^r}{dx^r} \left[\frac{(1-x^d)^c}{(1-x^b)^a} \right] \right) \Bigg|_{x=0} \left(\frac{1}{r!} \right) \tag{3.57}$$

donde p es un primo cualquiera y $r \in \mathbb{Z}^+$. A la vez, f es multiplicativa y la función p asociada a f es

$$f_p(x) = \frac{(1-x^d)^c}{(1-x^b)^a} \tag{3.58}$$

RECOMENDACIONES

1. Para un curso a nivel de pregrado en Teoría de Números, como referencia se pueden utilizar los contenidos de las primeras dos secciones del presente trabajo de graduación.

2. Como complemento al estudio de la Teoría de Números Analítica se pueden utilizar las últimas dos secciones, con la salvedad de hacer referencia a las definiciones y propiedades básicas de las funciones aritméticas.

3. Para enriquecer y sustentar los resultados que se obtengan en el estudio de Teoría de Números Analítica, es necesario analizar los resultados alcanzados como los que se podrían alcanzar al utilizar conceptos como: números y polinomios de Bernoulli, polinomio de Jacobi, números de Stirling, etc.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ahlfors, Lars V. **Complex Analysis (An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable)** 3^{a} ed. (International Series in Pure and Applied Mathematics)

[2] Burton, David M. **Elementary Number Theory**. 4^{ta} ed. Estados Unidos: McGraw-Hill Inc., 1991.

[3] Ebbinghaus, H.D. y otros. **Numbers**. Estados Unidos: Springger-Verlag, 1991.

[4] Gutiérrez, William. **Introducción a TeXy a LaTeX 2_{ε}**. Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala, Licenciatura en Matemática.

[5] Hlawka, Edmund y otros. **Geometric and Analytic Number Theory**. Estados Unidos: Springger-Verlag, 1991.

[6] Niven, Ivan y otros. **Introduccion a la Teoría de los Números**. Mexico: Limusa, 1976. Estados Unidos: McGraw-Hill Inc., 1991.

[7] Rudin, Walter. **Principles of mathematical analysis.** 3^{a} ed. (International Series in Pure and Applied Mathematics) Estados Unidos: McGraw-Hill, 1973.

[8] Rudin, Walter. **Real and complex analysis.** 3^{a} ed. (International Series in Pure and Applied Mathematics) Estados Unidos: McGraw-Hill, 1987.