Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

DESARROLLO DE UNA FORMA CERRADA PARA LA EXPRESIÓN COMBINATORIA $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

Rubén Darío Narciso Cruz

ASESORADO POR EL
LIC. WILLIAM ROBERTO GUTIÉRREZ HERRERA

Guatemala, septiembre de 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DESARROLLO DE UNA FORMA CERRADA PARA LA EXPRESIÓN COMBINATORIA $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA DIRECCIÓN DE LA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
POR

RUBÉN DARÍO NARCISO CRUZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DIRECCIÓN

DIRECTOR	Msc. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu
SECRETARIO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
EXAMINADOR	Dr. Juan Escamilla Castillo
EXAMINADOR	Lic. Angel Augusto Arévalo Aguirre
EXAMINADOR	Lic. William Adolfo Polanco Anzueto
SECRETARIO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco Vargas

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

DESARROLLO DE UNA FORMA CERRADA PARA LA EXPRESIÓN COMBINATORIA $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

Rubén Darío Narciso Cruz

Universidad de San Carlos
De Guatemala

Escuela de Ciencias Físicas y
Matemáticas

Ref. DTG. 002-2015

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matematicas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del coordinador de la Licenciatura de Matemática Aplicada, al trabajo de graduación titulado: DESARROLLO DE UNA FORMA CERRADA PARA LA EXPRESION COMBINATORIA $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$ presentado por el estudiante universitario **RUBÉN DARÍO NARCISO CRUZ,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MS c. Edgar Anibal Cifuentes Anleu
Director

Guatemala, 31 de agosto de 2015

/pec.

ACTO QUE DEDICO A:

Mis hijos	Por ser mi fuente de inspiración desde mucho antes del momento que tuve la dicha de tenerlos en mis brazos.

AGRADECIMIENTOS A:

Mi esposa	Por apoyarme en todos los objetivos que me he propuesto, sobre todo en el más imporante de mi vida: nuestro matrimonio.
Mis padres	Por enseñarme a través del ejemplo, principios y valores.
Todos mis maestros	Por compartir sus conocimientos y experiencias.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

TABLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	**Significado**
$\boldsymbol{\lvert A \rvert}$	Cardinalidad del conjunto A
$\boldsymbol{A^c}$	Complemento del conjunto A
$\mathbb{N}_{\boldsymbol{m}}$	Conjunto de los número naturales desde el 1 hasta el m
$\boldsymbol{\lceil x \rceil}$	Función techo del número real x
$\boldsymbol{\lfloor x \rfloor}$	Función piso del número real x
$\boldsymbol{A \times B}$	Producto cartesiano de los conjuntos A y B
$\boldsymbol{[m]_n}$	Producto de los n factores decrecientes $m(m-1)\cdots(m-n+1)$

GLOSARIO

Axioma	Es una proposición que se acepta sin requerir demostración previa.
Conjunto	Es una agrupación de objetos considerada como un objeto en sí.
Conjunto potencia	Es un conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado.
Función de Möbious	Es una función multiplicativa estudiada en teoría de números y en combinatoria.
Inducción matemática	Es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parámetro n, que toma una infinidad de valores enteros.
Matriz	Es un arreglo n dimensional de números, y en su mayor generalidad de elementos de un anillo.
Matroide	Es una estructura que toma y generaliza el concepto de independencia lineal en los espacios vectoriales.
Partición de un conjunto	Es una división del mismo en subconjuntos disjuntos no vacíos.

Polinomio mónico Es aquel que tiene coeficiente principal uno.

Serie de Maclaurin Es la serie de Taylor de una función centrada en cero.

Sucesión Es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números.

Tableaux Es un objeto combinatórico útil en teoría de la representación y en el cálculo de Schubert.

RESUMEN

El trabajo de investigación tiene como principal resultado la obtención de una forma cerrada para la expresión combinatoria $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$, donde n es un entero positivo y r un entero no negativo; la identidad obtenida se demuestra mediante tres métodos distintos: algebraico, inducción matemática y funciones generatrices. Además, se presentan aplicaciones para la identidad desarrollada, dentro de las cuales resaltan la demostración de sumatorias conocidas como casos particulares de la identidad combinatoria alcanzada y la mejora en el tiempo de ejecución de algoritmos computacionales. Lo anterior se desarrolla a través de cuatro capítulos.

En el primero se exponen los elementos básicos del análisis combinatorio –como las permutaciones, combinaciones y el binomio de Newton–, con el propósito de que un lector con conocimientos mínimos de matemáticas, pueda leer por completo el trabajo de graduación.

Luego, en el capítulo dos se exponen y demuestran algunas identidades combinatorias conocidas, las cuales se utilizarán para la demostración de la expresión combinatoria desarrollada.

El principal resultado del trabajo de graduación se encuentra en el capítulo tres, ya que allí se presenta y demuestra la forma cerrada para $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$. Como se mencionó, se brindan tres diferentes demostraciones de la identidad desarrollada.

Finalmente, el capítulo cuatro se muestran algunas aplicaciones de la identidad combinatoria alcanzada.

OBJETIVOS

General

Encontrar fórmula cerrada para la expresión $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

Específicos

1. Determinar una forma cerrada para la expresión $N(n,r) = \sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$ y probarla por lo menos mediante dos métodos de demostración distintos.
2. Encontrar propiedades matemáticas de los números $N(n,r)$.
3. Probar sumatorias conocidas utilizando la forma cerrada para $N(n,r)$, logrando con ello aplicaciones teóricas de la misma.
4. Establecer si la forma cerrada mejora el tiempo de ejecución de un algoritmo computacional basado en ella respecto de otro basado en la expresión $N(n,r)$.

INTRODUCCIÓN

La combinatoria es una rama de la matemática que estudia la existencia y conteo de configuraciones discretas. Actualmente la combinatoria ha ganado mucha importancia debido a sus amplias aplicaciones en la teoría de probabilidades, la estadística y la informática.

Uno de los conceptos torales dentro de la combinatoria es el de coeficiente binomial $\binom{n}{r}$, el cual cuenta el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La teoría desarrollada para este concepto es basta y fructífera en aplicaciones. Dentro de ésta resaltan las identidades combinatorias, las cuales son igualdades que contienen coeficientes binomiales. Es tan importante este tema, que existen libros, artículos científicos y páginas web dedicadas a él.

Este trabajo de graduación se enmarca dentro de este tema, ya que expone y demuestra una identidad combinatoria. En particular, se encuentra y prueba mediante tres métodos una forma cerrada para la expresión $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$.

Como aporte adicional, se exponen aplicaciones teóricas (a sumatorias) y prácticas (a algoritmos computacionales) de la identidad encontrada.

Se espera que el trabajo de graduación aporte al acervo de identidades combinatorias conocidas y, con ello, se incremente el conocimiento en general y el matemático en particular, que es el objetivo fundamental de la educación superior.

1. ELEMENTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO

El presente trabajo se encuadra dentro de la rama de la matemática conocida como combinatoria. En este capítulo se dan las bases para el estudio del análisis combinatorio que servirán para desarrollar una forma cerrada para $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$.

1.1. Objeto de estudio del análisis combinatorio

El objeto de estudio de la combinatoria ha evolucionado con el tiempo, así que se hace necesario comenzar por la definición usual de esta materia y luego hacer un breve recorrido histórico de su evolución.

Es posible definir combinatoria como: "La parte de la matemática que estudia los problemas sobre cuántas combinaciones diferentes (sometidas a unas u otras condiciones) se pueden formar con objetos dados..." (14:8)

El estudio de la combinatoria se desarrolló paralelamente con el de otras ramas de la matemática, tales como el álgebra y teoría de números. Así, por ejemplo, en la teoría de números se puede citar el problema de los cuadrados mágicos, que son matrices de números con la propiedad de que la suma de los elementos de cualquier columna, fila o diagonal es siempre el mismo número. En el álgebra se puede mencionar como ejemplo los coeficiente binomiales que son los números enteros que surgen del desarrollo de la expresión $(x + y)^n$, donde x, y son variables y n es un número natural cualquiera. Este resultado se le atribuye a Isaac Newton, aunque se cree que en realidad fue descubierto por Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji[1] por primera vez alrededor del año 1000.

[1] Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (c. 953 – c. 1029), fue un matemático e

Así la combinatoria se puede considerar tan vieja como la matemática misma, debido a que la idea de contar está ligada del origen mismo al concepto de número de los tiempos prehistóricos.

De esto se puede encontrar diversos ejemplos en la historia de la matemática, por ejemplo, la fórmula $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ya era conocido en el siglo III (véase (3:73)). En el siglo XII el matemático indú Bhaskara conocía ya la fórmula general para $\binom{n}{p}$ y Leví Ben Gerson (1288-1344) realizó un estudio de las permutaciones y combinaciones que se pueden hacer con los elementos de un conjunto dado. La famosa fórmula para determinar la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto de cardinalidad n, se le atribuye a el matemático Cardano[2] en el siglo XV.

En la edad contemporánea, Cayley usó la teoría de árboles para contar el número de isómeros de los hidrocarburos saturados C_nH_{2n+2} para n un número natural cualquiera.

Actualmente el estudio del análisis combinatorio busca encontrar principios y teorías unificadoras que permitan ordenar y sistematizar el gran número de resultados existentes, aparentemente dispersos y sin relación. Ejemplo de estos son: "El estudio combinatorio de los conjuntos parcialmente ordenados y en particular la extensión de estos conjuntos a las funciones de Möbius y fórmulas de inversión y, la teoría de matroides, los *tableaux* y la teoría de especies combinatorias. Al mismo tiempo, tiene lugar un gran desarrollo de las ramas más ricas en aplicaciones inmediatas, tales como la optimización combinatoria." (10:4)

ingeniero persa. Vivió y trabajó la mayor parte de su vida en Bagdad, por entonces capital científica y comercial del mundo islámico.

[2]Gerolamo Cardano, o Girolamo Cardano (24 de septiembre de 1501 - 21 de septiembre de 1576) fue un médico notable, además de un célebre matemático italiano del Renacimiento, un astrólogo de valía y un estudioso del azar. Este filósofo y destacado enciclopedista, fue autor de una de las primeras autobiografías modernas.

De lo expuesto, se puede concluir que el análisis combinatorio busca, principalmente, determinar la existencia de configuraciones finitas y, si existen, encontrar el número posible de tales configuraciones.

1.2. Principios de la suma y la multiplicación

Estos dos principios son los dos más fundamentales para el conteo. Cabe destacar que algunos autores toman estos principios como parte de los axiomas del análisis combinatorio(12:1)

Teorema 1.2.1 (principio de la suma). Sean A y B conjuntos finitos disjuntos, es decir $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| \cup |B|$.

Demostración. Supóngase que $|A| = n$ y $|B| = m$, es decir, existe una biyección entre A y $\mathbb{N}_n$. y otra biyección entre B y $\mathbb{N}_m$. Nótese que $|A| + |B| = m + n$, así que el problema se reduce a demostrar que existe una biyección entre $A \cup B$ y $\mathbb{N}_{n+m}$.

Sea $h \colon A \cup B \to \mathbb{N}_{n+m}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \leq n \\ g(i-m) & \text{si } m < i \leq m+n \end{cases}$$

Donde $f \colon \mathbb{N}_n \to A$ y $g \colon \mathbb{N}_m \to B$ son funciones biyectivas. De esto, h es biyectiva y por lo tanto $|A \cup B| = m + n$. $\square$

En algunos textos se suele enunciar el principio de la suma como: si un suceso A puede ocurrir de n maneras y otro suceso B puede ocurrir de m maneras, y no pueden ocurrir ambos simultáneamente, entonces el suceso A o B puede ocurrir de $n + m$ maneras.

Es posible generalizar el principio de la suma:

Teorema 1.2.2. Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos disjuntos a pares y $n > 1$, entonces $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$

Demostración. Se hace por inducción sobre n. El caso base es para $n = 2$, y es simplemente el principio de la suma. Supóngase que $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$, entonces si se toma $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, se deduce que $B \cap A_{n+1} = \emptyset$ y usando el principio de la suma se tiene $|B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| = |A_1| + \cdots + |A_n| + |A_{n+1}|$. $\square$

Teorema 1.2.3 (Principio del producto). Sean A y B conjuntos finitos cualesquiera, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Demostración. Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Colocando los elementos del producto cartesiano $A \times B$ en una matriz se tiene

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_m) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \cdots & (a_n, b_m) \end{pmatrix},$$

la cual es de dimensión $n \cdot m = |A| \cdot |B|$. $\square$

Al igual que con el principio de la suma, el del producto tiene un enunciado equivalente de forma coloquial: si un primer objeto puede escogerse entre m posibles, y después de realizada esta selección puede escogerse un segundo entre n posibles, entonces pueden escogerse $m \cdot n$ pares diferentes.

El principio del producto se generaliza con el siguiente:

Teorema 1.2.4. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos cualesquiera, entonces:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

Demostración. Por inducción sobre n. El caso base es precisamente el teorema anterior. Supóngase que $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$, entonces tomando $B = A_1 \times \cdots \times A_n$ se tiene $|B \times A_{n+1} = |B| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$. $\square$

1.3. Permutaciones y combinaciones

El principio de la suma y el producto son bastantes básicos para realizar conteos, más aún, estos simplemente son una formalización de conceptos que son intuitivos. En esta sección se presentan técnicas de conteo más avanzadas en el que básicamente se muestra como resolver problemas de conteo en el que se necesita hacer selecciones de un conjunto de objetos bajo ciertas restricciones.

Definición 1.3.1. Dados m objetos se le llaman arreglos de m objetos tomados de n en n, a las sucesiones de n términos que pueden formarse con los m objetos.

Además, dado un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ para saber cuántos arreglos de elementos de A tomados de n en n existen basta con encontrar el número de funciones biyectivas que existen de $\mathbb{N}_n$ hacia A.

Si $n > m = |A|$ no pueden existir funciones inyectivas de $\mathbb{N}_n$ hacia A, entonces para $n \leq m$ sea $f \colon \mathbb{N}_n \to A$ inyectiva entonces para la elección de la imagen bajo f de $1 \in \mathbb{N}_n$ se tienen m posibilidades, ahora bien, para $2 \in \mathbb{N}_n$ se tienen solamente $m - 2$ posibilidades ya que la función debe ser inyectiva, así sucesivamente hasta llegar a $n \in \mathbb{N}_n$ para el cual se pueden elegir $(m - n + 1)$ posibilidades, luego por el principio del producto se tiene que el número de arreglos de m objetos tomados de n en n es precisamente $[m]_n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$. Este argumento demuestra la siguiente:

Proposición 1.3.1. El número de arreglos de m elementos tomados de n en n es $[m]_n = m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

Definición 1.3.2. Se llaman arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n a las sucesiones de n términos que pueden formarse de los m elementos, entendiendo que cada uno de ellos puede aparecer repetido.

Proposición 1.3.2. El número de arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n es m^n.

Demostración. El problema de hallar los arreglos con repetición de m elementos tomados de n en n es equivalente a encontrar las funciones(inyectivas o no) de $\mathbb{N}_n$ hacia $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Sea $f \colon \mathbb{N}_n$, entonces para la imagen de $1 \in \mathbb{N}_n$ se tienen m posibilidades, para $2 \in \mathbb{N}_n$ se tiene también m posibilidades, debido a que la función puede no ser biyectiva, así sucesivamente para $n \in \mathbb{N}_n$ se tienen m posibles formas de elegir su imagen, de esta cuenta y del principio del producto se tienen m^n formas de formar las funciones de $\mathbb{N}_n$ hacia A. $\square$

Hasta el momento se ha hablado de arreglos de m objetos tomados de n en n sin analizar el caso particular $n = m$, el cual se presenta a continuación.

Definición 1.3.3. Los arreglos de n objetos tomados de n en n son llamados permutaciones de n objetos.

Proposición 1.3.3. El número de permutaciones de n objetos es:

$$[n]_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

Demostración. La demostración de esta proposición es consecuencia directa de la proposición 1.3.1. $\square$

Nota 1.3.1. Al número $[n]_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ se le conoce como factorial de n y se le denota por $n!$. Además por definición se aceptará que $0! = 1$.

Definición 1.3.4. Dado $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ y $n_1, \ldots, n_r$ números naturales tales que $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$. Entonces al número de sucesiones de n términos que se pueden formar con los elementos $a_i \in A$ tal que a_i aparece exactamente n_i veces, $1 \leq i \leq r$, se le conoce como permutaciones con repetición de los elementos de A con multiplicidades $n_1, \ldots, n_r$.

Para calcular el número de permutaciones con repetición de elementos de A como se definió en el párrafo anterior considérese $P = \{B_1, \ldots, B_r\}$ una partición de B tal que $|A_i| = n_i, 1 \leq i \leq r$, donde B es un conjunto cualquiera de n elementos. Dos permutaciones σ, θ(vistas como funciones) de elementos de B son equivalentes si tanto $\sigma(i)$ como $\theta(i), 1 \leq i \leq n$ están en la misma parte B_j de B para j algún natural entre 1 y r. Además de la proposición 1.3.3 se tiene que el número de permutaciones de los elementos de B_i es $n_i!$ con $1 \leq i \leq n$, así, por el principio del producto, el número de permutaciones equivalentes de elementos de B es precisamente $n_1!n_2!\cdots n_r!$.

Entonces el número de particiones que se puede hacer de B con la restricción $|B_i| = n_i$ es precisamente $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ y además es evidente que existe una biyección entre las particiones y las permutaciones con repetición, esto demuestra la siguiente:

Proposición 1.3.4. El número de permutaciones con repetición con repetición de r elementos con multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_r$ es $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$, donde $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$.

Definición 1.3.5. Se llaman combinaciones de elementos de $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ tomados de n en n a los subconjuntos de n elementos del conjunto A. Se denota al número de tales combinaciones por $\binom{n}{m}$.

Proposición 1.3.5. El número de combinaciones de m elementos de $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de n en n es $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$.

Demostración. Para cada combinación de m elementos de n en n se forman sus permutaciones de n elementos, que por la proposición 1.3.3, son $n!$. Así se obtienen los arreglos de los m elementos de n en n, ya que cada arreglo es distinto a cualquier otro arreglo, esto es porque en el peor de los casos, en que los arreglos se formen de la misma combinación estos van a diferir en el orden de los elementos. Por el principio del producto se obtiene $[m]_n = n!\binom{m}{n}$, despejando para $\binom{m}{n}$ se obtiene el resultado. □

Definición 1.3.6. Las combinaciones con repetición de elementos de $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ son los grupos de n elementos que se puede formar con los m dados, sin importar el orden de estos y admitiendo repeticiones de los mismos.

Una forma de representar las combinaciones con repetición, que en algunas ocasiones resulta útil, es asociar a cada combinación el monomio $a_1^{i_1} \cdots a_m^{i_m}$ donde el exponente i_j de a_j representa el número de veces que aparece a_j en la combinación. De esta manera cada combinación con repetición corresponde a un monomio mónico de grado n en m variables. Ahora bien, a cada uno de estos monomios se les puede asociar una sucesión de unos y ceros de la siguiente manera: se escribe i_t cantidad de unos según el exponente de cada a_j si $i_t \neq 0$ y no se escribe nada si $i_t = 0$. Luego de escribir el número de unos correspodientes a cada variable se escribe un cero como separador. Dicha sucesión sería de la forma

$$\underbrace{1\ldots1}_{i_1\text{-veces}} \quad 0 \quad \underbrace{1\ldots1}_{i_2\text{-veces}} \ \ldots\ 0\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{i_m\text{-veces}}.$$

Al hacer el conteo se observa que se han utilizado exactamente $m-1$ ceros como separadores de las secuencias de unos y en total la longitud de la secuencia es $i_i + i_2 + \cdots + i_m + (m-1) = n + m - 1$. Ahora bien, la forma de colocar los unos en la secuencia anterior es precisamente $\binom{n+m-1}{n}$, ya que una vez distribuidos los unos, los $m-$ ceros quedan plenamente identificados. Con esto se ha demostrado la siguiente

Proposición 1.3.6. El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es $\binom{n+m-1}{n}$.

1.4. Tres interpretaciones de los coeficientes binomiales

Los números $\binom{m}{n}$, además de representar el número de subconjuntos de n elementos que pueden construirse a partir de los elementos de un conjunto de cardinalidad m, son susceptibles de otras interpretaciones. En las siguientes subsecciones se detallarán tres formas de interpretar a los coeficientes binomiales: la combinatoria, la algebraica y la geométrica.

1.4.1. Interpretación combinatoria

En la sección anterior se presentó a los números $\binom{m}{n}$ como el número de subconjuntos de n elementos, con lo cual ya se tiene una interpretación combinatoria de estos. En esta sección se presentarán dos formas más de interpretar estos números.

1.4.2. Interpretación algebráica

Teorema 1.4.1 (Newton). Sean x, y variables y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n y^{m-n}$$

.

Demostración. Analizando $(x+y)^m$ se observa que éste es el producto de m factores, todos iguales a $(x+y)$. Al desarrollar el producto se obtiene una suma de monomios de grado m en dos variables. Para encontrar el coeficiente del monomio $x^n y^{m-n}$ basta con encontrar las formas se pueden escoger n de los m paréntesis para seleccionar la x en ellos. Esto es precisamente las combinaciones de m objetos de n en n, así que el coeficiente es $\binom{m}{n}$. $\square$

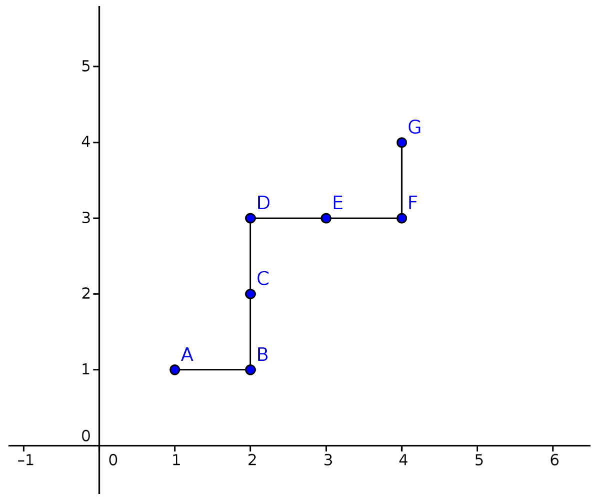
El resultado anterior se conoce como el teorema del binomio de Newton, y da la posibilidad de interpretar $\binom{m}{n}$ como el coeficiente del monomio $x^n y^{m-n}$ en la expansión de $(x+y)^m$. De este teorema se le da el nombre de coeficientes binomiales a los números $\binom{m}{n}$.

1.4.3. Interpretación geométrica

Definición 1.4.1. Un conjunto de vértices $V_1, \ldots, V_n$ en el plano cartesiano forman un camino ascendente si para todo i, $1 \leq i < n$ se cumple que si V_i tiene coordenadas (x, y) entonces V_{i+1} tiene coordenadas $(x+1, y)$ o $(x, y+1)$.

Como se puede ver en la figura 1 cada arista del camino es paralela a uno de los ejes coordenados y además el camino puede no es cerrado.

Figura 1. **Ejemplo de camino ascendente**



Fuente: elaboración propia, con programa Geogebra.

Proposición 1.4.1. El número de caminos ascendentes de longitud m que parten del origen es 2^m. El número de caminos que parten del origen y finalizan en el vértice con coordenadas (n, k) es $\binom{n+k}{k}$.

Demostración. Para construir un camino ascendente desde el origen se tienen dos posibilidades, según la definición de camino ascendente, luego para estando en el segundo vértice para conectar una arista hacia el tercer vértice se tienen dos posibilidades y así sucesivamente hasta llegar al m-ésimo vértice. Por el principio del producto el total de caminos que se pueden construir es 2^m.

Para contar los caminos que comienzan en el origen y terminan en el vértice con coordenadas (n, k) basta con notar que en total hay n aristas paralelas al eje x

y k paralelas al eje y y los caminos deben tener longitud de $m = n + k$. Si se cuenta cuantos de los segmentos del camino son paralelos al eje x los que son paralelos al eje y quedarán determinados de manera única, de esta cuenta el número total de caminos ascendentes es $\binom{n+k}{k}$ $\square$

Estos tres enfoques deben ser tomados en cuenta a la hora de resolver problemas que involucren coeficiente binomiales. A continuación se presenta un resumen de las estrategias que se pueden utilizar.

- Estrategia combinatoria pura: en esta se interpretan a los coeficientes binomiales $\binom{m}{n}$ como el número de subconjuntos de n elementos que se pueden formar de un conjunto de m.
- Estrategia algebraica: consiste en interpretar a el número $\binom{m}{n}$ como coeficiente del monomio $x^n y^{m-n}$ en el desarrollo de $(x+y)^m$ y posteriormente realizar cálculos puramente algebraicos.
- Estrategia geométrica: se interpreta a $\binom{m}{n}$ como el número de caminos ascendentes desde el origen hasta el punto $(m-n, n)$ para luego deducir propiedades a partir de la geometría.

En lo que sigue de este trabajo se dará demostraciones de las propiedades de los coeficiente binomiales utilizando las tres estrategias, siempre que sea posible.

1.5. Binomio de Newton

Del teorema del binomio de Newton se pueden deducir algunas propiedades de los coeficientes binomiales. Estas propiedades –expresadas en términos de sumatorias- son importantes debido a que con ellas es posible simplificar expresiones que contienen coeficientes binomiales, además porque poseen interpretaciones combinatorias interesantes.

Propiedad 1.5.1.

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

Demostración. En el binomio de Newton tomando $x = y = 1$ se tiene:

$$(1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}.$$

$\square$

Propiedad 1.5.2.

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{m} = 0.$$

Demostración. Tomando $x = 1, y = -1$ y desarrollando con el teorema del binomio:

$$(1-1) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m. \qquad \square$$

1.6. Funciones generatrices

Existe una forma distinta de concebir los coeficientes binomiales. Para el efecto considérese $A = \{a_1, a_2, a_n\}$, entonces el producto $(1+a_1x)(1+a_2x)(1+a_3x)$ queda desarrollado como $1+(a_1+a_2+a_3)x+(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x^2+a_1a_2a_3x^3$. La expresión anterior se puede escribir como $1 + f_1(a_1, a_2, a_3)x + f_2(a_1, a_2, a_3)x^2 + f_3(a_1, a_2, a_3)x^3$, donde f_1, f_2, f_3 quedan plenamente descritas por la ecuación anterior y son llamadas funciones simétricas de 3 variables. En particular se puede escribir

$$(1+x)^3 = \sum_{m=0}^{3} f_m(1,1,1)x^m,$$

siendo esta la expresión para el binomio de Newton. En general, se tiene:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} f_m(1,1,\ldots,1)x^m = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m.$$

De esto, a la función $(1+x)^n$ se le llama la función generatriz de los coeficientes binomiales $\binom{n}{m}$.

Definición 1.6.1. En general, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se dice que f es la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

De la función generatriz de los coeficientes binomiales, se deduce que $\binom{n}{m}$ es el resultado de evaluar la función simétrica f_m en $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$.

De esta manera, una función generatriz no es más que el resultado de asociar los elementos de una sucesión a monomios y luego sumarlos para obtener una serie infinita. Con esto a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le asocia la función $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

A la función f se le llama función generatriz de la sucesión (a_n). En este trabajo, muchas veces no será materia de preocupación el saber para que valores de x la serie infinita converge y forma en realidad una función, simplemente se supondrá que existen valores de x para los cuales la convergencia está garantizada.

1.6.1. Suma y multiplicación por constantes

Considérese las sucesiones (a_n) y (b_n) y sus respectivas funciones generatrices f y g. Sean α, β números reales cualesquiera, entonces la sucesión $(\alpha a_n + \beta b_n)$ está asociada con la función generatriz $\alpha f(x) + \beta g(x)$

1.6.2. Producto de funciones generatrices

En general se pueden definir varios tipos de productos para sucesiones, en esta sección se usará la definición de Cauchy. Esto es, dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n) y sus respectivas funciones generatrices f y g se define el producto de Cauchy de las funciones anteriores como:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

1.6.3. Corrimiento hacia la derecha de coeficientes

Para hacer corrimientos hacia la derecha en la función generatriz se multiplica por una potencia de x. Si se tiene la sucesión (a_n) y su función generatriz $f(x)$ y se desean agregar m ceros al inicio de la sucesión $(a)_n$ se debe multiplicar por x^m, así $x^m f(x)$ corresponde a la sucesión $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m-veces}, a_0, a_1, \dots) = (a_{n-m})$.

1.6.4. Sumas parciales

Considérese la función $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ y $f(x)$ la función generatriz la sucesión $(a)_n$, entonces al hacer el producto de Cauchy de f y g se tiene

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n,$$

esto implica que al multiplicar una función generatriz por $\frac{1}{1-x}$ se obtiene la función generatriz asociada a la sucesión de sumas parciales (b_n), donde $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

2. ALGUNAS IDENTIDADES COMBINATORIAS PREVIAS

Como expresa Donal Knuth en su obra *El arte de programar ordenadores*: "La cantidad $\binom{n}{k}$ se denomina coeficiente binomial; estos números tienen una cantidad extraordinaria de aplicaciones. Son quizá las cantidades más importantes que aparecen en el análisis de algoritmos y, por tanto, se recomienda al lector que se familiarice con ellos."(9:54), es de suma importancia estudiar las propiedades de los coeficientes binomiales, es por eso que en este capítulo se destacan algunas de las identidades más conocidas e importantes acerca de estos números.

2.1. Identidades comunes

En este secciones se presentan algunas de las más sencillas y útiles identidades combinatorias. Las identidades aquí expuestas serán ampliamente utilizadas en el capítulo 3. Para ejemplificar los distintos métodos del análisis combinatorio, se dará más de una demostración por cada identidad, siempre utilizando interpretaciones distintas de los coeficientes binomiales.

Teorema 2.1.1.

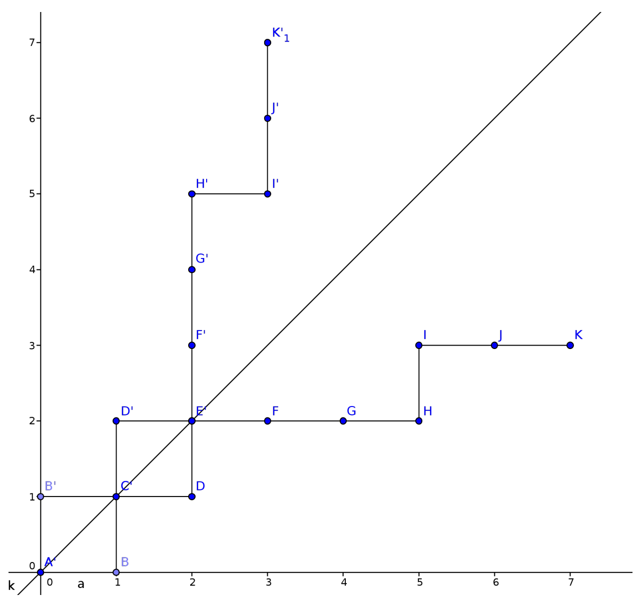
$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$$

Demostración combinatoria. Sea A un conjunto de m elementos. Se necesita demostrar que hay una biyección entre los subconjuntos de A de n elementos y los subconjutos de A de $m-n$ elementos. En efecto, sean S_n, S_{m-n} las familias de subconjuntos de n y $m-n$ elementos de A respectivamente y $f\colon S_n \to S_{n-m}$ tal que a

$f(Z) = Z^c$ para $Z \in S_n$. Entonces f es inyectiva, ya que $Z^c = X^c$ si y sólo si $Z = X$. Además para $Y \in S_{m-n}$ se tiene que $f(Y^c) = Y$, por lo que f es sobreyectiva. $\square$

Demostración algebraica. Se debe comparar el coeficiente del monomio $x^n y^{m-n}$ en la expansión de $(x+y)^m$ con el coeficiente del monomio $y^{m-n}x^n$ en la expansión de $(y+x)^m$. Por la definición de igualdad de polinomios[3] y del hecho que $(x+y)^m = (y+x)^m$ se sigue el resultado. $\square$

Figura 2. **Demostración de teorema 2.1.1**



Fuente: elaboración propia

Demostración geométrica. Como se aprecia en la figura 2, la bisectriz del ángulo del primer cuadrante establece una biyección entre los caminos que parten

[3]Los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son iguales si son del mismo grado y tienen los mismos coeficientes

del punto $(0,0)$ y terminan en $(m-n,n)$ y los que terminan en el punto simétrico $(n,m-n)$. Por la proposición 1.4.1 el número de caminos que terminan en $(n,m-n)$ es $\binom{n+(m-n)}{m-n} = \binom{m}{m-n}$. $\square$

Teorema 2.1.2 (fórmula de Stifel).

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Demostración combinatoria. Dado $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ al momento de calcular el número de subconjutos de n elementos de A se puede hacer una partición, a saber, los subconjuntos que contienen al elemento a_m y los que no lo contienen. Usando el princicpio del producto, se tiene que de la primera clase existen simplemente $1 \times \binom{m-1}{n-1}$, ya que una vez elegido a_m como parte del subconjunto, sólo existen $\binom{m-1}{n-1}$ formas de elegir subconjuntos de $n-1$ elementos de un total de $m-1$ elementos. Por otro lado, de la segunda clase se tienen $m-1$ elementos para escoger subconjuntos de n elementos, es decir que hay $\binom{m-1}{n}$ subconjuntos de los cuales a_m no forma parte. Para obtener el resultado simplemente se aplica el principio de la suma sobre la partición anteriormente descrita. $\square$

Demostración algebraica. Se hace el desarrollo algebraico de $(x+y)^m$ usando el teorema de Newton y aplicando una serie de transformaciones algebraicas basadas en las propiedades de los coeficientes binomiales:

$$\begin{aligned}
(x+y)^m &= (x+y)^{m-1}(x+y) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^n y^{m-n-1}\right)(x+y) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^{n+1} y^{m-n-1} + \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^n y^{m-n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{m-1} \binom{m-1}{n-1} x^n y^{m-n} + \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^n y^{m-n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \right) x^n y^{m-n}.
\end{aligned}
$$

De la igualdad de polinomios se sigue el resultado. □

Demostración geométrica. El número de caminos ascendentes desde el origen hasta el punto $(m-n, n)$ es $\binom{m}{n}$. Ahora bien, estos caminos tienen como penúltimo vértice a $(m-n-1, n)$ o $(m-n, n-1)$. Así, se puede hacer una partición de los caminos según si terminan en $(m-n-1, n)$ o $(m-n, n-1)$. El número de caminos que terminan en $(m-n-1, n)$ es $\binom{m-1}{n}$ y el de los que terminan en $(m-n, n-1)$ es $\binom{m-1}{n-1}$. Al aplicar el principio de la suma sobre estas particiones se obtiene el resultado. □

2.2. Otras identidades

Luego de exponer las identidades combinatorias más básicas, en esta sección se presentan otras un poco más complejas. De especial interés es la identidad presentada en el teorema 2.2.2, la cual es útil para reducir los términos de los coeficientes binomiales.

Teorema 2.2.1 (Identidad de Vandermonde).

$$
\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.
$$

Demostración combinatoria. Considérese los conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Entonces de $A \cup B$ se pueden elegir $\binom{n+m}{k}$ subconjuntos de k elementos cada uno. Para cada elección de los subconjutos de

$A \cup B$ hay r elementos que pertenecen a A y $k-r$ elementos que pertenecen a B, donde $r = 0, \ldots, k$. Luego hay $\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$ formas de formar estos subconjuntos. Al usar el principio del producto

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}. \qquad \square$$

Teorema 2.2.2.

$$m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}.$$

Demostración. La función generatriz de los coeficiente binomiales es $(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m$. Derivando la función anterior

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m} x^{m-1}. \tag{2.1}$$

El lado izquierdo de esta ecuación se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} n(1+x)^{n-1} &= n\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} x^m \\ &= \sum_{m=1}^{n} n\binom{n-1}{m-1} x^{m-1} \end{aligned}$$

De donde se sigue inmediatamente que $n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m}$. $\square$

Teorema 2.2.3.

$$m\binom{n}{m} = (n-m+1)\binom{n}{m-1}.$$

Demostración. Usando la función generatriz para los coeficientes binomiales y el teorema 2.1.2 se obtiene

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{n-m} x^{n-m},$$

al derivar y aplicar nuevamente el teorema 2.1.2 se obtiene

$$\begin{aligned} n(1+x)^{n-1} &= \sum_{n=1}^{n} (n-m) \binom{n}{n-m} x^{n-m-1} \\ &= \sum_{n=0}^{n} (n-m+1) \binom{n}{n-m+1} x^{n-m}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue de comparar los coeficientes de este último polinomio con los coeficientes de $n(1+x)^{n-1}$ dados por la ecuación 2.1. □

Propiedad 2.2.1.

$$\sum_{m=1}^{n} m \binom{n}{m} = n2^{n-1}.$$

Demostración. El resultado es inmediato al hacer $x = 1$ en la ecuación 2.1, esto es

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} m \binom{n}{m} (1)^{m-1}. \qquad \square$$

3. DESARROLLO DE UNA FORMA CERRADA PARA LA EXPRESIÓN COMBINATORIA $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

El tema central de este trabajo es hallar una forma cerrada para la expresión $N(n,r)$. De esto surge la duda natural, ¿qué es una forma cerrada para una expresión matemática?

Una definición aceptada es: "Se dice que una ecuación es una solución en forma cerrada si resuelve un problema dado en términos de funciones y operaciones matemáticas elegidas de un conjunto limitado y generalmente aceptado"[4]. En esencia, lo que se busca en las formas cerradas es tener una fórmula que sea fácil de calcular.

Se debe considerar que pasa con $\binom{j}{r}$ cuando $j < r$. Es evidente que el número de subconjuntos de r elementos que se puede formar de un total de j elementos cuando $j < r$ es cero, esto es $\binom{j}{r} = 0$ si $j < r$.

3.1. Un lema muy importante

Se pretende desarrollar una forma cerrada para la expresión $N(n,r)$. Un primer paso hacia este objetivo es determinar una identidad de una expresión similar a la anterior, pero más sencilla, tal como $R(n,r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{r}$. Por ello, se buscará hallar una forma cerrada para la expresión $R(n,r)$.

[4] *Forma cerrada(matemática)*.http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_cerrada_%28matem%C3%A1tica%29[Consulta: 2 de octubre de 2014].

Para ello considérese el conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ y B el conjunto de todos los subconjuntos de A de $r+1$ elementos. Sea P_i el conjunto formado por subconjuntos de $r+1$ elementos de A, donde a_i es el elemento de mayor subíndice. La familia de conjuntos $\{P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_{n+1}\}$ es una partición de A. En efecto, sea $X \in P_i$ y $Z \in P_j$ donde $i \neq j$, entonces $X \neq Y$ ya que al menos difieren en el elemento que posee el mayor índice, por construcción de los P_i.

Por definición, se sigue que $\cup_{i=r+1}^{n+1} P_i \subset B$, por otro lado, sea $Y \subset B$, entonces Y es un subconjunto de $r+1$ elementos de A, sea a_i el elemento de mayor índice de Y, dicho índice debe existir ya que el conjunto de índices $1, \ldots, n+1$ es un subconjunto de los naturales acotado por $n+1$. De esto, $Y \in P_i$ y por lo tanto $B \subset \cup_{i=r+1}^{n+1} P_i$.

La cardinalidad de cada P_i es, por el principio del producto, $1 \times \binom{i-1}{r}$, y al aplicar el principio de la suma se tiene:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{i=r+1}^{n+1} \binom{i-1}{r},$$

con lo que se ha demostrado el siguiente:

Lema 3.1.1.

$$R(n,r) = \binom{n+1}{r+1}.$$

3.2. La forma cerrada

Utilizando la teoría hasta ahora desarrollada, es posible determinar una forma cerrada para la expresión combinatoria $N(n,r) = \sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$, que es el objetivo principal de este trabajo de graduación. La forma cerrada, se presenta en el teorema siguiente:

Teorema 3.2.1. Si $n \geq 0$ y $r \geq 0$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r} = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}.$$

La demostración de este teoremá se hará mediante tres métodos distintos, los cuales se exponen en las subsecciones siguientes.

3.2.1. Primera demostración

Esta demostración es de carácter algebraica. La estrategia de la misma es utilizar varias veces la identidad $R(n,r) = \binom{n+1}{r+1}$ hasta alcanzar la expresión deseada. Para ello considérese la matriz N de $n \times n$ definida por:

$$\mathsf{N} = \begin{pmatrix} \binom{1}{r} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{r} & \binom{2}{r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{r} & \binom{3}{r} & \binom{3}{r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \binom{n}{r} & \binom{n}{r} & \binom{n}{r} & \binom{n}{r} & \cdots & \binom{n}{r} \end{pmatrix}.$$

N es un matriz triangular inferior tal que $N(n,r) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}$, donde $n_{ij} = \binom{i}{j}$ si $j \leq i$ y cero en cualquier otro caso. De esta manera, se observa que la suma de los elementos de la k-ésima columna es:

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{r} - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i}{r} \\ &= R(n,r) - R(k,r) \\ &= \binom{n+1}{r+1} - \binom{k}{r+1}. \end{aligned}$$

De esto:

$$\begin{aligned} N(n,r) &= \sum_{k=1}^{n} S^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{k}{r+1} \right) \\ &= n\binom{n+1}{r+1} - \binom{n+1}{r+2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

La última igualdad puede ser simplificada aplicando el teorema 2.2.3, con lo cual la expresión queda como:

$$\begin{aligned} N(n,r) =& n\binom{n+1}{r+1} - \frac{n-r}{r+2}\binom{n+1}{r+1} \\ =& \left(n - \frac{n-r}{r+2}\right)\binom{n+1}{r+1} \\ =& \left(\frac{n(r+2)-n+r}{r+2}\right)\binom{n+1}{r+1} \\ =& \frac{nr+n+r}{r+2}\binom{n+1}{r+1} \\ =& \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}. \end{aligned}$$

3.2.2. Segunda demostración

La idea para esta demostración es encontrar una función generatriz para la suceción $\left(\binom{r+t}{r}\right)_{t\in\mathbf{N}}$. A prueba y error se encuentra que $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, lo cual se comprueba como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{r+1}{(1-x)^{r+2}} & f^{(3)}(x) &= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{(1-x)^{r+4}} \\ f''(x) &= \frac{(r+1)(r+2)}{(1-x)^{r+3}} & f^{(t)}(x) &= \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+t)}{(1-x)^{r+t+1}}. \end{aligned}$$

Así que:

$$f^{(t)}(0) = \frac{(r+t)!}{r!},$$

por lo que el t-ésimo coeficiente en la expansión como serie de Maclaurin viene dado por:

$$a_t = \frac{(r+t)!}{t!r!} = \binom{r+t}{r},$$

esto es:

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{r+t}{r} x^t. \tag{3.2}$$

Ahora se necesita hacer un corrimiento de r unidades hacia la derecha en la función generatriz anterior, lo cual se logra multiplicando por x^r, como sigue:

$$\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{r+t}{r} x^{r+t}.$$

Al derivar la ecuación anterior y hacer un corrimiento hacia la derecha se obtiene:

$$\frac{x^r(r+x)}{(1-x)^{r+2}} = \sum_{t=1}^{\infty}(r+t)\binom{r+t}{t} x^{r+t}. \tag{3.3}$$

La ecuación anterior es la función generatriz para la sucesión $\left((r+t)\binom{r+t}{r}\right)$, aplicando lo expuesto en el capítulo uno se puede encontrar la función generatriz de la sucesión de series parciales, esto es:

$$\frac{x^r(r+x)}{(1-x)^{r+3}} = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{t}(r+k)\binom{r+k}{k}\right) x^{t+r}. \tag{3.4}$$

De la ecuación 3.2 se tiene que:

$$\frac{r}{(1-x)^{r+3}} = \sum_{t=0}^{\infty} r\binom{r+2+t}{r+2} x^t$$

y

$$\frac{x}{(1-x)^{r+3}} = \sum_{t=0}^{\infty}\binom{r+2+t}{r+2} x^{t+1} = \sum_{t=1}^{\infty}\binom{r+1+t}{r+2} x^t.$$

Al sumar estas dos últimas ecuaciones y multiplicarlas por x^r:

$$\frac{x^r(r+x)}{(1-x)^{r+3}} = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\binom{r+t+1}{r+2} + r\binom{r+t+2}{r+2}\right) x^{r+t}.$$

Comparando los coeficientes de esta última serie con los de la ecuación 3.4 se obtiene, el resultado

$$\begin{aligned}
N(r+t,r) &= \binom{r+t+1}{r+2} + r\binom{r+t+2}{r+2} \\
&= \frac{t}{r+2}\binom{r+t+1}{r+1} + \frac{r(r+t+2)}{r+2}\binom{r+t+1}{r+1} \\
&= \left(\frac{t+nr+2r}{r+2}\right)\binom{r+t+1}{r+1} \\
&= \left(\frac{n-r+nr+2r}{r+2}\right)\binom{r+t+1}{r+1} \\
&= \left(\frac{n+nr+r}{r+2}\right)\binom{r+t+1}{r+1}.
\end{aligned}$$

Donde $n = t + r$, entonces se obtiene:

$$N(n,r) = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}.$$

3.2.3. Tercera demostración

Para esta demostración se utilizará el método de inducción matemática. La demostración por inducción matemática es una de las técnicas más utilizadas para probar proposiciones matemáticas en las que intervienen números enteros.

El caso base es trivial, por lo que ahora se debe suponer que:

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r} = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}.$$

Entonces:

$$\sum_{j=0}^{n+1} j\binom{j}{r} = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1} + (n+1)\binom{n+1}{m}.$$

Usando el teorema 2.2.2 y 2.2.3 se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} j\binom{j}{r} &= \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1} + (n+1)\binom{n+1}{m} \\
&= \left(\frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\right)\left(\frac{n-r+1}{r+2}\right)\binom{n+2}{r+1} + (n+1)\frac{r+1}{n+2}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \left[\left(\frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\right)\left(\frac{n-r+1}{r+2}\right) + \frac{r+1}{n+2}\right]\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{[(n+1)(r+1)-1](n-r+1)+(n+1)(r+1)(r+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+1)(r+1)(n-r+1)-n+r-1+(n+1)(r+1)(r+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+1)(r+1)(n-r+1+r+2)-n+r-1}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+1)(r+1)(n+3)-n-1+r+1-1}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+1)(r+1)(n+3)+(r+1)-(n+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(r+1)[(n+1)(n+3)+1]-(n+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(r+1)(n^2+4n+4)-(n+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(r+1)(n+2)^2-(n+2)}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+2)[(n+2)(r+1)-1]}{(n+2)(r+2)}\binom{n+2}{r+1} \\
&= \frac{(n+2)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+2}{r+1}.
\end{aligned}$$

Luego, por el principio de inducción matemática la expresión es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

Es importante mencionar que la demostración por inducción tiene la gran desventaja que se necesita saber previamente el resultado para luego demostrarlo.

4. PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LA IDENTIDAD COMBINATORIA DESARROLLADA

En este capítulo se trabaja con la expresión $N(n, r)$ tanto en su forma cerrada como en su definición natural a fin de encontrar que propiedades satisface la expresión.

4.1. Algunas propiedades de los números $N(n, r) = \sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$

Se comenzará por hacer unos cálculos para mostrar algunos valores que puede tomar la expresión $N(n, r)$.

Explorando los resultados de la tabla I, tabla II, figura 3 y figura 4 se puede intuir los siguientes resultados:

Propiedad 4.1.1. Para $n \geq 2$ y r números naturales se cumple:

- $N(n, 0) < N(n, 1) < N(n, 2) < \cdots < N(n, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil) = N(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

- $\sum_{r=0}^{n} N(n, r) = \sum_{j=1}^{n} j2^j$

- $\sum_{r=0}^{n} N(n, r) = 2[2^n(n-1) + 1]$

Tabla I. **Algunos valores de** $N(n, r)$

n \ r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	3	5	2	0	0	0	0	0
3	6	14	11	3	0	0	0	0
4	10	30	35	19	4	0	0	0
5	15	55	85	69	29	5	0	0
6	21	91	175	189	119	41	6	0
7	28	140	322	434	364	188	55	7
8	36	204	546	882	924	636	279	71
9	45	285	870	1638	2058	1770	1035	395
10	55	385	1320	2838	4158	4290	3135	1595
11	66	506	1925	4653	7788	9372	8217	5225
12	78	650	2717	7293	13728	18876	19305	14729
13	91	819	3731	11011	23023	35607	41613	37037
14	105	1015	5005	16107	37037	63635	83655	85085
15	120	1240	6580	22932	57512	108680	158730	181610
16	136	1496	8500	31892	86632	178568	286858	364650
17	153	1785	10812	43452	127092	283764	497250	695266
18	171	2109	13566	58140	182172	437988	831402	1268098
19	190	2470	16815	76551	255816	658920	1346910	2225470
20	210	2870	20615	99351	352716	969000	2122110	3775870
21	231	3311	25025	127281	478401	1396329	3261654	6217750
22	253	3795	30107	161161	639331	1975677	4903140	9969718
23	276	4324	35926	201894	842996	2749604	7224921	15608329
24	300	4900	42550	250470	1098020	3769700	10455225	23914825
25	325	5525	50050	307970	1414270	5097950	14882725	35932325
26	351	6201	58500	375570	1802970	6808230	20868705	53035125
27	378	6930	67977	454545	2276820	8987940	28860975	77011935
28	406	7714	78561	546273	2850120	11739780	39409695	110165055
29	435	8555	90335	652239	3538899	15183675	53185275	155427675

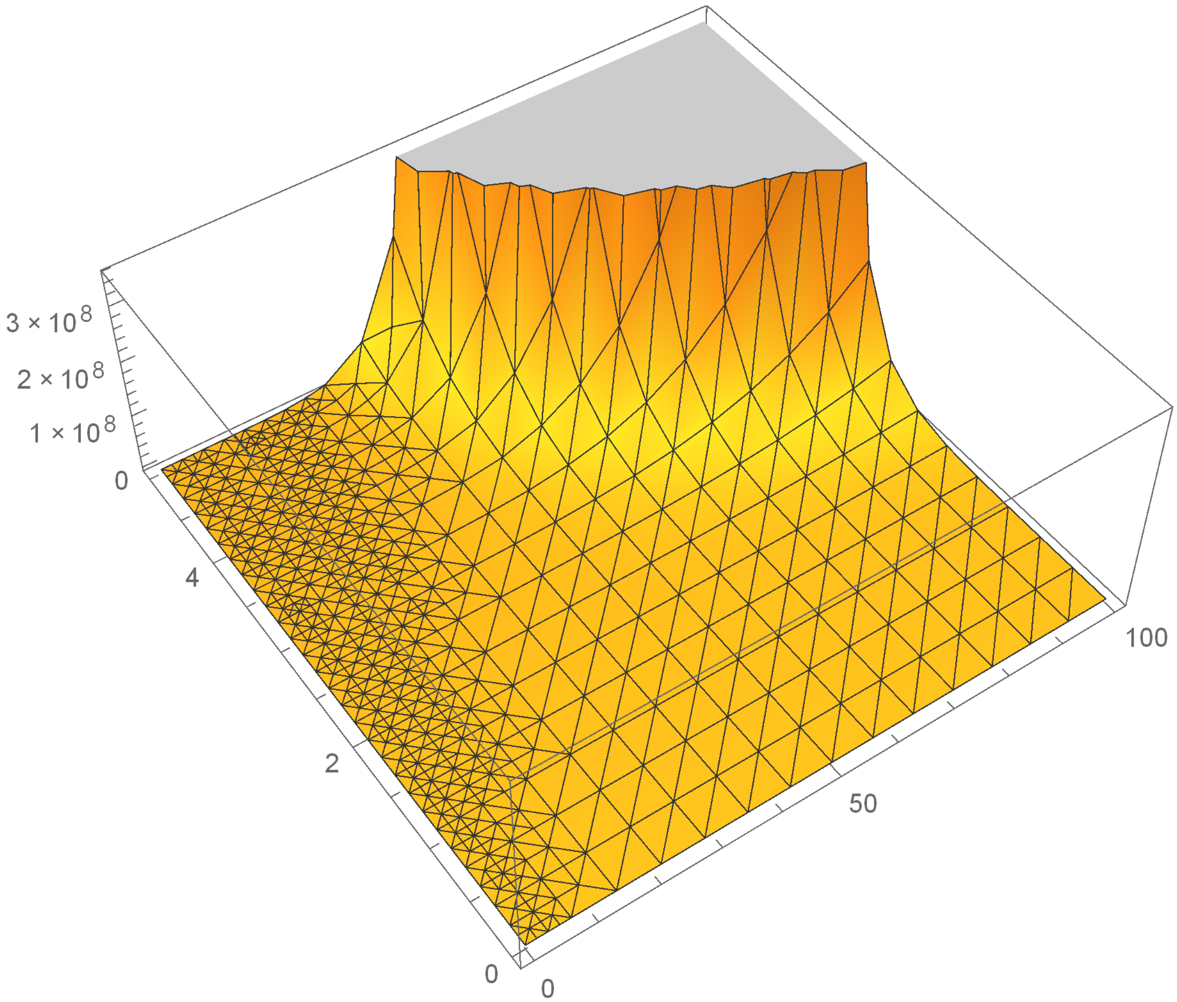
Fuente: elaboración propia.

Tabla II. **Valores de** $\sum_{r=0}^{n} N(n,r)$ **hasta** $n = 30$

n	$\mathbf{\sum_{r=0}^{n} N(n,r)}$
0	0
1	2
2	10
3	34
4	98
5	258
6	642
7	1538
8	3586
9	8194
10	18434
11	40962
12	90114
13	196610
14	425986
15	917506
16	1966082
17	4194306
18	8912898
19	18874370
20	39845890
21	83886082
22	176160770
23	369098754
24	771751938
25	1610612738
26	3355443202
27	6979321858
28	14495514626
29	30064771074
30	62277025794

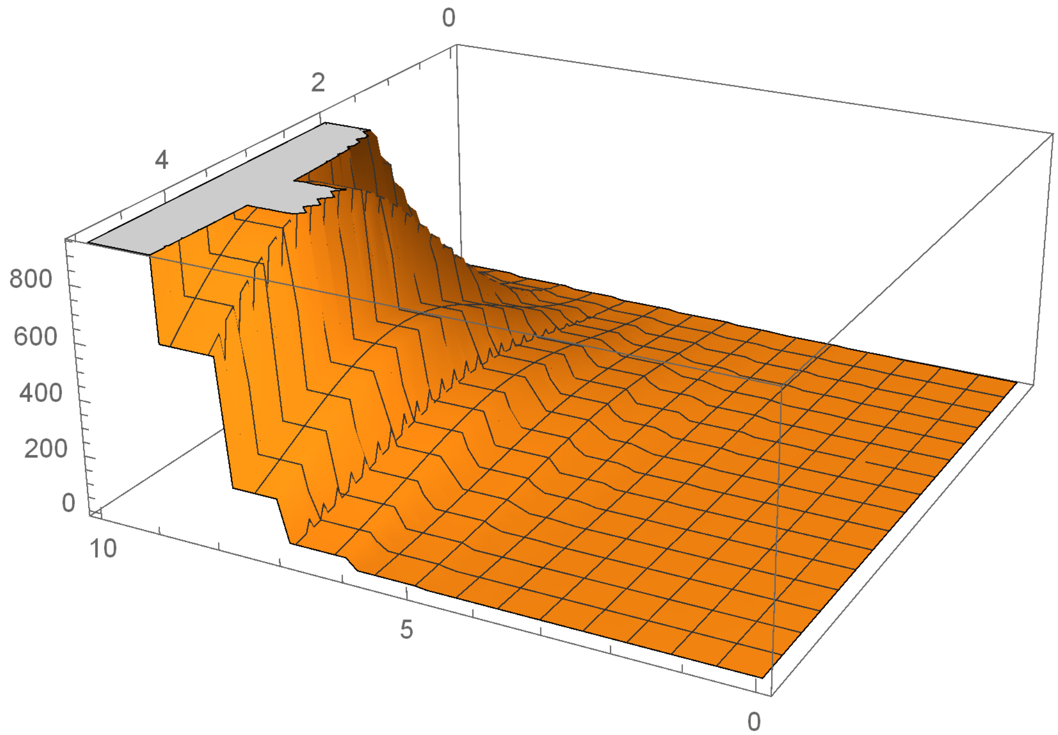
Fuente: elaboración propia.

Figura 3. **Gráfica para** $N(n, r)$**,** $0 \leq n \leq 100$**,** $0 \leq r \leq 5$



Fuente: elaboración propia.

Figura 4. **Gráfica para $N(n,r)$, $0 \leq n \leq 10$, $0 \leq r \leq 5$**



Fuente: elaboración propia.

Demostración. Para demostrar la primera propiedad basta con analizar el cociente de $N(n,r)$ y $N(n,r+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{N(n,r)}{N(n,r+1)} &= \frac{\frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}}{\frac{(n+1)(r+2)-1}{r+3}\binom{n+1}{r+2}} \\ &= \frac{r+3}{n-r}\frac{(n+1)(r+1)-1}{(n+1)(r+2)-1}. \end{aligned}$$

Nótese, que el resultado es válido si la última expresión es menor o igual que uno. Efectivamente $\frac{(n+1)(r+1)-1}{(n+1)(r+2)-1} < 1$ para todo n y $\frac{r+3}{n-r} \leq 1$ si y sólo si $r \leq \frac{n-3}{2}$, de lo cual se sigue inmediatamente el resultado.

Para la segunda propiedad, se sabe por definición de $N(n,r)$ que:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} N(n,r) &= \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} j \binom{j}{r} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} j \binom{j}{r} \\
&= \sum_{j=0}^{n} j \sum_{r=0}^{n} \binom{j}{r} \\
&= \sum_{j=0}^{n} j 2^j,
\end{aligned}$$

esta última igualdad se debe a la propiedad 1.5.1.

Por último, la tercera propiedad se obtiene usando la ecuación 3.1 como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} N(n,r) &= \sum_{r=0}^{n} \left(n\binom{n+1}{r+1} - \binom{n+1}{r+2} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{n} n\binom{n+1}{r+1} - \sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{r+2} \\
&= n\sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{r+1} - \sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{r+2} \\
&= n(2^{n+1} - 1) - [2^{n+1} - (n+1) - 1] \\
&= n2^{n+1} - n - 2^{n+1} + n + 2 \\
&= 2^{n+1}(n-1) + 2 \\
&= 2[2^{n+}(n-1) + 1]. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.2. Aplicaciones a sumatorias

A partir de la forma cerrada de $N(n, r)$ se pueden deducir algunas formas cerradas para la sumatorias de elementos de subconjuntos de números naturales.

Si se considera $N(n, r)$ con $r = 0$ se debe observar que, según la proposición 1.3.5, los coeficientes binomiales $\binom{j}{0} = \frac{j!}{0!(j-0)!} = 1$ para $j \in \mathbb{N}$. De esta manera:

$$\begin{aligned} N(n, 0) &= 1\binom{1}{0} + 2\binom{2}{0} + \cdots + n\binom{n}{0} \\ &= 1 + 2 + \cdots + n. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la forma cerrada de $N(n, r)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} N(n, 0) &= \frac{(n+1) - 1}{2}\binom{n+1}{1} \\ &= \frac{n}{2}\binom{n+1}{1}. \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema 2.2.2 la expresión $N(n, 0)$ se simplifica a $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$. Comparando esta última expresión con la definición de $N(n, 0)$ se tiene la famosa expresión cerrada para la sumatoria de los primeros n números naturales, esto es:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

De manera similar, se puede calcular la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales al calcular $N(n, r)$ con $r = 1$. En efecto, los coeficientes binomiales

$\binom{j}{1}$ se reducen a j, esto es $\binom{j}{1} = j$ para $j \in \mathbb{N}$. Así, por un lado:

$$\begin{aligned} N(n,1) &= 1\binom{1}{1} + 2\binom{2}{1} + \cdots + n\binom{n}{1} \\ &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \end{aligned}$$

y por otro lado:

$$\begin{aligned} N(n,1) &= \frac{(n+1)(1+1)-1}{3}\binom{n+1}{2} \\ &= \frac{2n+1}{3}\binom{n+1}{2} \\ &= \frac{2n+1}{3}\frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Igualando la expresión $N(n,1)$ calculada a partir de su definición con lo obtenido con la forma cerrada se tiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esto demuestra los primeros dos incisos del siguiente:

Teorema 4.2.1. Dado n un número natural se cumple que:

- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$

- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1}\binom{n}{j} = \frac{2^n(n-1)+1}{n+1}$

- $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\binom{n}{j} = \frac{2(2^n-1)-n}{n+1}$

Demostración. Los primeros dos incisos ya han sido demostrados. Para el tercero se tiene:

$$\sum_{r=1}^{n-1} N(n-1,r-1) = 2[2^{n-1}(n-2)+1], \tag{4.1}$$

pero:

$$\begin{aligned} N(n-1,r-1) &= \frac{nr-1}{r+1}\binom{n}{r} \\ &= n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \frac{1}{r+1}\binom{n}{r} \\ &= n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \frac{1}{r+1}\binom{n}{r}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

haciendo la suma:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} N(n-1,r-1) &= \sum_{r=1}^{n}\left(n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \frac{1}{r+1}\binom{n}{r}\right) \\ &= \sum_{r=1}^{n} n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r+1}\binom{n}{r} \\ &= \sum_{r=1}^{n} n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r+1}\binom{n}{r} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r} - \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r} \\ &= n\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} + \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} - \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r} \\ &= (1+n)\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} + (2^n-1). \end{aligned}$$

Comparando la última ecuación y la 4.1:

$$(1+n)\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} + (2^n-1) = 2[2^{n-1}(n-2)+1] \iff$$

$$
\begin{aligned}
(1+n)\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} &= 2[2^{n-1}(n-2)+1]-2^n+1 \iff\\
(1+n)\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} &= 2^n(1+n)-2^{n+1}+1 \iff\\
\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{r+1}\binom{n}{r} &= \frac{2^n(n-1)+1}{1+n}. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

El último inciso sigue de usar el anterior y la ecuación 4.2:

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}N(n-1,r-1) &= \sum_{r=1}^{n}\left(n\frac{r}{r+1}\binom{n}{r}-\frac{1}{r+1}\binom{n}{r}\right)\\
&= n\frac{2^n(n-1)+1}{1+n}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r+1}\binom{n}{r}.
\end{aligned}
$$

De esta cuenta:

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r+1}\binom{n}{r} &= 2[2^{n-1}(n-2)+1]-n\frac{2^n(n-1)+1}{1+n}\\
&= \frac{2(2^n-1)-n}{n+1}
\end{aligned}
$$

□

4.3. Aplicaciones a la resolución de problemas de olimpiadas de matemáticas

Las olimpiadas de matemática son competencias que tienen como objetivos promover el estudio de las matemáticas y descubrir talentos de manera temprana. A nivel mundial, la olimpiada internacional de matemática, IMO, por sus siglas en inglés, es la más importante del mundo con más de 50 ediciones celebradas; en la última edición de 2014 celebrada en Sudáfrica, participaron 106 países.

A continuación se plantea una solución para el problema 2 propuesto para la vigésimo primera edición de la IMO.

Problema 4.3.1. Sea $1 < r < n$ y considere todos los subconjuntos de r elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Cada uno de estos subconjuntos tiene un elemento mínimo. Sea $F(n, r)$ la media aritmética de estos elementos mínimos. Pruebe que:

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

Para la solución de este problema se debe notar que al hacel la elección de los subconjuntos, en total el 1 es el elemento mínimo de $\binom{n-1}{r-1}$ subconjuntos, el 2 es el mínimo de $\binom{n-2}{r-1}$ y así, en general, el número k, $1 \leq k \leq n$ será el mínimo de $\binom{n-k}{r-1}$ subconjuntos. De esta cuenta, la suma de los elementos mínimos es:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-k}{r-1} &= \sum_{k=1}^{n}(n-k)\binom{k}{r-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{r-1} - \sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{r-1}\end{aligned}$$

Al aplicar el lema 3.1.1 para el primer sumando:

$$n\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{r-1} = n\binom{n+1}{r},$$

además al aplicar la forma cerrada de $N(n, r-1)$:

$$\begin{aligned} N(n, r-1) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{k}{r-1} \\ &= \frac{(n+1)r-1}{r+1} \binom{n+1}{r}. \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones anteriores

$$\begin{aligned} n \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{r-1} - \sum_{k=1}^{n} k \binom{k}{r-1} &= n \binom{n+1}{r} - \frac{(n+1)r-1}{r+1} \binom{n+1}{r} \\ &= \left(n - \frac{(n+1)r-1}{r+1} \right) \binom{n+1}{r} \\ &= \left(\frac{n(r+1)-(n+1)r-1}{r+1} \right) \binom{n+1}{r} \\ &= \frac{rn+n-nr-r-1}{r+1} \binom{n+1}{r} \\ &= \frac{n-r-1}{r+1} \binom{n+1}{r}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $F(n, r)$ es el promedio de los elementos mínimos, es decir:

$$\begin{aligned} F(n, r) &= \frac{\dfrac{n-r-1}{r+1} \dbinom{n+1}{r}}{\sum_{k=1}^{n} \dbinom{n-k}{r-1}} \\ &= \frac{\dfrac{n-r-1}{r+1} \dbinom{n+1}{r}}{\sum_{k=1}^{n-1} \dbinom{k}{r-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{n-r-1}{r+1}\dbinom{n+1}{r}}{\dbinom{n}{r}}$$

$$= \frac{\dfrac{n-r-1}{r+1}\dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}.$$

Simplificando la última igualdad se llega al resultado:

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

4.4. Aplicación a computación

Para calcular $N(n,r)$ por medio de una computadora es necesario programar un algoritmo. Cuando se hace esto es de mucha importancia tener en cuenta que los recursos de la computadora no son ilimitados, así que se debe tener especial cautela en el diseño de este.

Para medir la eficiencia de un algoritmo se suele hacer un ánalisis a priori para saber si es factible su implementación en una computadora del mundo real. En este análisis a priori se hace el conteo del número de operaciones necesarias para calcular la salida, y en general, se prefiere que este número de operaciones sea un polinomio que depende de las entradas del algoritmo.

En particular, para este caso, se hará un ánalisis a posteriori de la implementación del algoritmo para calcular $N(n,r)$, primero a partir de su definición y luego a partir de la forma cerrada.

La implementación del algoritmo se hará en Sage, que es un sistema algebraico computacional (en inglés CAS) escrito en Python y que soporta escritura de nuevos programas usando el mismo lenguaje.

4.4.1. Algoritmo para el cálculo de $\mathbf{N(n,r)}$ a partir de su definición

Como punto de partida, es necesario desarrollar un algoritmo para calcular la expresión $N(n,r)$ utilizando su definición. Para este cálculo es necesario utilizar bucles. A continuación se muestra el código elaborado en Sage con lenguaje de programación Python:

```
def calculoDefinicion(n,r):
        var = 0
        for i in range(n+1):
                var = var + i*binomial(i,m)
        return var
```

4.4.2. Algoritmo para el cálculo de $\mathbf{N(n,r)}$ a partir de su forma cerrada

En esta ocasión se hace la implementación del algoritmo para calcular $N(n,r)$ usando la forma cerrada de esta expresión, evitando de esta manera hacer bucles para el cálculo.

```
def calculoForCerrada(n,r):
        resul = (((n+1)*(m+1)-1)/(m+2))*binomial(n+1,m+1)
        return resultado
```

4.4.3. Comparación de tiempos de ejecución real

En la tabla III los tiempos están dados en segundos y en ella se puede observar que el algoritmo que utiliza la forma cerrada es superior en el tiempo de ejecución que el algoritmo que usa la definición. Además, conforme n crece, el tiempo para el cálculo también tiende a crecer. Tanto crece el tiempo de ejecución del algoritmo que para valores del orden de 10^9 la computadora no arroja ningún resultado en un tiempo promedio de 2 horas.

El análisis de este algoritmo se ejecutó en una computadora con procesador Intel® core™ i5 en sistema operativo Windows™ 8 de 64 bits y con el lenguaje de programación Python, en su vesión 2.7.

De esta manera se evidencia que, para efectos computacionales, contar con una forma cerrada para cualquier expresión matemática reduce considerablemente el uso de recursos, lo cual es valioso en el ámbito laboral.

Tabla III. **Algunos tiempos de ejecución**

Entrada		**Tiempo de algoritmo**	**Tiempo de algoritmo**
n	**r**	**calculoDefinicion(n,r)**	**calculoForCerrada(n,r)**
10	0	0,012	0,003
	1	0,011	0,001
	2	0,011	0,001
	3	0,012	0,002
	4	0,007	0,001
	5	0,01	0,003
	6	0,005	0,001
	7	0,014	0,001
	8	0,008	0,002
	9	0,005	0,002
100	0	0,047	0,001
	10	0,049	0,006
	20	0,033	0,001
	30	0,04	0,0
	40	0,039	0,001
	50	0,038	0,0
	60	0,033	0,0
	70	0,035	0,001
	80	0,041	0,003
	90	0,044	0,001
1000	0	0,365	0,001
	100	0,4	0,002
	200	0,442	0,001
	300	0,558	0,001
	400	0,509	0,001
	500	0,409	0,001
	600	0,395	0,0
	700	0,369	0,001
	800	0,364	0,001
	900	0,346	0,001

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIONES

1. Se determinó una forma cerrada para la expresión $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$ la cual es la siguiente:

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r} = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}.$$

2. Usando $N(n,r) = \sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$, se demostró:

- $N(n,0) < N(n,1) < N(n,2) < \cdots < N(n,\lceil\frac{n-1}{2}\rceil) = N(n,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$

- $\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = \sum_{j=1}^{n} j2^j$

- $\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = 2[2^n(n-1)+1]$

3. Utilizando la forma cerrada de $N(n,r)$ es posible demostrar:

- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$

- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1}\binom{n}{j} = \frac{2^n(n-1)+1}{n+1}$

- $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\binom{n}{j} = \frac{2(2^n-1)-n}{n+1}$

4. Al utilizar la forma cerrada –algoritmo 1–, se disminuye el tiempo computacional necesario para calcular la expresión $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r}$ respecto del algoritmo diseñado a partir de la definición de la sumatoria –algoritmo 2-. Específicamente, para $n = 1\,000$ y $r = 900$, el algoritmo 1 es en términos absolutos 0,345 segundos más rápido y en términos relativos 34 500 por ciento más veloz.

RECOMENDACIONES

1. Para efectos teóricos, sería interesante que se encontrara una demostración combinatoria para la identidad $\sum_{j=0}^{n} j\binom{j}{r} = \frac{(n+1)(r+1)-1}{r+2}\binom{n+1}{r+1}$, ya que no fue posible determinarla en el desarrollo del presente trabajo de graduación.

2. Es necesario indagar sobre más propiedades de los números $N(n, r)$.

3. Es posible determinar más sumatorias u otras expresiones matemáticas a partir de la identidad desarrollada, lo cual supone un campo de investigación para futuros trabajos.

4. Dada la mejora en los tiempos de ejecución de algoritmos, es de suma importancia que la identidad desarrollada sea conocida por informáticos, debido a que puede ser utilizada en algún caso de programación concreto.

BIBLIOGRAFÍA

1. ANDREESCU, Titu. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: counting Strategies*. Estados Unidos de América: Birkhäuser, 2004. 228 p. ISBN: 9780817642884.

2. ANDREESCU, Titu. *102 Combinatorial Problems*. Estados Unidos de América: Birkhäuser, 2003. 115p. ISBN: 9780817643171.

3. BOURBAKI, Nicolas. *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial, 1976. 377 p.

4. DJUKIC, Dusan, et al. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2004*. Estados Unidos de América: Springer Verlang, 2006. 823 p. ISBN: 9781441998545

5. ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies*. Estados Unidos de América: Springer Velang, 1998. 403 p. ISBN: 978-0387982199.

6. FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3a ed. Estados Unidos: John Wiley & Sons, 1968. 704 p. ISBN: 9780471257097.

7. FINK, Alex. “A Generalization of an IMO Problem”. *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*. 2006, vol 17, num 6, p. 1-14.

8. *Forma cerrada(matemática).* [en línea] <http://es.m.wikipedia.org/wiki/Forma_cerrada(matemática).> [Consulta: 2 de octubre de 2014].

9. KNUTH, Donald. *El arte de programar ordenadores.* España: Editorial Reverte, 1980. 672 p. ISBN: 9788429126624.

10. NIETO, José Heber. *Teoría Combinatoria.* Venezuela: La Universidad del Zulia, 1996. 172 p. ISBN: 9802325732.

11. NIVEN, Ivan. *Mathematics of Choice: Or, How to Count Without Counting.* Estados Unidos de América: MMA, 1965. ISBN: 0883856158

12. RIORDAN, John. *Introduction to Combinatorial Analysis.* Estados Unidos de América: Dover Publications, 2002. 256 p. ISBN: 978-048-642-536-8.

13. RIBNIKOV, K. *Análisis Combinatorio.* Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas: Editorial Mir, 1988. 368 p. ISBN: 503-000-610-9

14. VILENKIN, Naum. *¿De cuántas formas?* Tolosa, Juan José (trad.). Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas: Editorial Mir, 1972. 220 p.