UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

República de Guatemala, C. A.

"MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS"

TESIS

Presentada a la Junta Directiva de la

Facultad de Ingeniería

de la

Universidad de San Carlos de Guatemala

por:

RONY ARMANDO SARMIENTO G.

Al conferírsele el Título de:

INGENIERO CIVIL

*

* *

Guatemala, Diciembre de 1966.

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

Cumpliendo con lo establecido por la ley Universitaria, presento ante vosotros mi trabajo de tesis titulado:

"MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS
AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS"

tema que me fuera asignado por la Junta Directiva de esta facultad.

JUNTA DIRECTIVA DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DE LA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:	Ing. Amando Vides Tobar
Vocal Primero:	Ing. Otto E. Becker M.
Vocal Segundo:	Ing. Francisco Ubieto B.
Vocal Tercero:	Ing. Leonel Pinot L.
Vocal Cuarto:	Br. Roberto Orantes T.
Vocal Quinto:	Br. Alfonso Padilla J.
Secretario:	Ing. José Massanet

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN

GENERAL PRIVADO

Decano:	Ing. Enrique Godoy S.
Vocal Segundo:	Ing. Emilio Beltranena M.
Examinador:	Ing. Enrique Azmitia
Examinador:	Ing. Carlos Quintero
Secretario:	Ing. Eduardo Martínez B.

DEDICO ESTE ACTO:

AL SUPREMO CREADOR

A MIS PADRES:

Ezequiel Sarmiento L.
María G. de Sarmiento

A MI ESPOSA:

Beatriz Cáceres de Sarmiento

A MIS HIJOS:

Jorge Rolando y
Juan José

A MIS HERMANOS:

Dora
René
Edmundo

AL SEÑOR: Jorge Echeverría L., y
Sra. Cecil de Echeverría

A MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS DE ESTUDIO

A LA FACULTAD DE INGENIERÍA

INTRODUCCIÓN

Trataré de desarrollar este trabajo con el objeto de que sea de alguna utilidad a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil en el estudio de la resistencia de materiales y estructuras.

Pretendo en él reunir varios métodos de análisis de estructuras, tratando también de dar un cierto número de ejemplos para que sea apreciado, sino en cada caso en particular, tal vez si un conjunto de los diferentes métodos aquí tratados.

Trataré pues, de aportar aunque sea en mínima parte, algunos problemas que se le presentan corrientemente al estudiante de Ingeniería Civil.

No está también demás llamar la atención a los métodos aquí usados para resolver ecuaciones simultáneas lineales, métodos que están siendo estudiados actualmente en la carrera y que considero merecen mayor importancia.

*

* *

*

CAPITULO I

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR MÉTODOS NUMÉRICOS

El interés y el deseo de simplificar la resolución de ecuaciones lineales simultáneas ha sido la causa para que en las últimas décadas haya habido un gran crecimiento en el estudio de este tema. Esto nos ha dejado como consecuencia varios y mejores métodos que nos permiten la resolución de ecuaciones, ya sea a mano o bien con el auxilio de máquinas electrónicas. Podemos opinar que los problemas analíticos que antes nos presentaban mucha dificultad para encontrar su respuesta, hoy con el auxilio de máquinas se resuelven rápida y correctamente.

Esto es lo que ha dado popularidad al estudio de los métodos numéricos, y además indica la necesidad de insistir en su estudio en colegios y universidades. De esta forma se podrá contar en un futuro con personal adecuado que tenga conocimiento de estos métodos.

A continuación presentaré algunos de estos métodos, en forma muy simplificada, para dar la oportunidad de conocerlos.

Se verán, como primera parte, los métodos algebráicos, para luego entrar de lleno a los métodos de relajación, iteración y matrices, dando en cada uno los ejemplos necesarios para el mejor entendimiento de los mismos.

1.1 Métodos Algebráicos

Antes de entrar de lleno a tratar los diferentes métodos algebráicos, daré algunas definiciones y conceptos básicos.

a) Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son "simultáneas" cuando se satisfacen para iguales valores de las mismas. Así las ecuaciones $X + y = 4$

$$X - y = 2$$

Son simultáneas porque $X = 3$; $y = 1$ satisfacen ambas ecuaciones.

b) Ecuaciones equivalentes son las que se obtienen una de la otra, así:

$$X + y = 10$$

$$3X + 3y = 30$$

Son equivalentes porque dividiendo por 3 la segunda nos da como resultado la primera ecuación. Las ecuaciones equivalentes tienen "infinitas soluciones comunes".

c) Ecuaciones independientes son las que no se obtienen una de la otra. Cuando las ecuaciones independientes tienen "una sola" solución común, son simultáneas. Así las ecuaciones $X + y = 5$

$$X - y = 1$$

son independientes porque no se obtienen una de la otra y simultáneas porque el único par de valores que satisface ambas ecuaciones son $X = 3$ $y = 2$.

d) Ecuaciones incompatibles son ecuaciones independientes que no tienen solución común. Así las ecuaciones

$$X + 2y = 10$$

$$2X + 4y = 5$$

son incompatibles pues no hay ningún par de valores de X e y que verifiquen ambas ecuaciones.

e) Sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Así: $2X + 3y = 13$

$$4X = y = 5$$

Solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas, que satisface todas y cada una de las ecuaciones del sistema.
Un sistema de ecuaciones es posible o compatible cuando tiene solución, y es imposible o incompatible cuando no tiene solución.
Un sistema de ecuaciones compatible es determinado cuando tiene una solución e indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.

f) Métodos algebráicos más usados para resolver ecuaciones simultáneas lineales. Para resolver un sistema de esta clase es necesario obtener de las ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita, a esta operación se le llama eliminación.

Los métodos más usuales son los siguientes:

1.1.1 Método de igualación:

Se quiere resolver el siguiente sistema:

$$X + 4y = 8 \qquad (1)$$
$$X - 5y = 10 \qquad (2)$$

Despejemos una cualquiera de las incógnitas de las dos ecuaciones, por ejemplo X en ambas ecuaciones

$$X = 8 - 4y$$
$$X = 10 + 5y$$

Si igualamos las dos ecuaciones tendremos:

$$8 - 4y = 10 + 5y, \text{ en la que } y = -\frac{2}{9}$$

Si substituimos el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones tendremos que

$X = \frac{80}{9}$. Si procedemos

a la comprobación de los resultados, para lo cual aconsejo que se efectúe en todas las ecuaciones con el objeto de ver si el resultado es correcto, tendremos:
en la ecuación (1)

$$\frac{80}{9} + 4\left(\frac{-2}{9}\right) = 8$$

$$\frac{80}{9} - \frac{8}{9} = 8 \quad \frac{72}{9} = 8 \quad \text{correcto}$$

en la ecuación (2)

$$\frac{80}{9} - 5\left(\frac{-2}{9}\right) = 10$$

$$\frac{80}{9} + \frac{10}{9} = 10 \qquad \frac{90}{90} = 10 \quad \text{correcto}$$

1.1.2 Método de Substitución:

Se quiere resolver el siguiente sistema:

$$2X + 5y = -24 \qquad (1)$$
$$8X - 3y = 19 \qquad (2)$$

Despejemos cualquiera de las dos incógnitas, por ejemplo X en una de las ecuaciones. Si hacemos uso de la ecuación (1)

$$\frac{-24 - 5y}{2} = X$$

Si substituímos este valor en la ecuación (2) tendremos:

$$\frac{8(-24 - 5y)}{2} - 3y = 19$$ tendremos una ecuación con una sola incógnita que nos da como resultado $Y = -5$.

Si substituímos y en (1) tendremos que $X = \frac{1}{2}$

1.1.3 Método de Reducción:

Este método es el que considero más apropiado para la resolución de un sistema de ecuaciones. Lo único que recomiendo es que cuando se trabaje con este método, se tenga el cuidado de comprobar los valores que se encuentren, pues es un método bastante largo y tedioso cuando se trabajan más de 4 ecuaciones.

Para la aplicación de este método basta decir que se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas, y luego por simple suma o resta se procede a su eliminación.

Se quiere resolver el siguiente sistema:

$$X + y + z + u = 10 \qquad (1)$$

$$2X - y + 3z - 4u = 9 \qquad (2)$$

$$3X + 2y + z + 5u = 13 \qquad (3)$$

$$X - 3y + 2z - 4u = -3 \qquad (4)$$

Combinando (1) y (2) eliminamos la X, multiplicando (1) por (2) y restando

$$\begin{array}{rrrrcr} 2X & + 2y & + 2z & + 2u & = & 20 \\ -2X & + y & 3z & + 4u & = & 9 \\ \hline & 3y & - z & + 6u & = & 11 \end{array} \qquad (5)$$

Combinando (1) y (3) eliminamos la X, multiplicando (1) por (3) y restando

$$\begin{array}{rrrrcr} 3X & + 3y & + 3z & + 3u & = & 30 \\ -3X & - 2y & + z & - 5u & = & -13 \\ \hline & y & + 4z & - 2u & = & 17 \end{array} \qquad (6)$$

Combinando (1) y (4) eliminamos la X restando

$$\begin{array}{rrrrcr} X & + y & + z & + u & = & 10 \\ -X & + 3y & + 2z & + 4u & = & 3 \\ \hline & 4y & - z & + 5u & = & 13 \end{array} \qquad (7)$$

Reuniendo las ecuaciones (5), (6), (7) tendremos un sistema de 3 ecuaciones, el cual lo podremos resolver por el mismo sistema, es decir, multiplicando (5) por 4 y sumando con (6) tendremos una ecuación (8) que será:

$$13\,y + 22u = 61 \qquad (8)$$

Luego combinando (5) y (7) eliminamos la Z restándolos y tendremos una ecuación (9) que será: $-y + u = -2$ (9)

Si resolvemos (8) y (9) tendremos que $u = 1$, $y = 3$-

Si substituímos en la ecuación (5) estos valores, obtendremos que $Z = 4$. Luego, substituyendo estos valores de nuevo en la ecuación (1) tendremos que $X = 2$

Para cotejar substituyamos los valores en todas las ecuaciones y se verá si la igualdad es demostrada.

$2 + 3 + 4 + 1 = 10$	correcto	$10 = 10$
$4 - 3 + 12 - 4 = 9$	"	$9 = 9$
$6 + 6 - 4 + 5 = 13$	"	$13 = 13$
$2 - 9 + 8 - 4 = 3$	"	$-3 = -3$

Las igualdades se cumplen, lo que nos demuestra que los resultados están bien. Otra cosa que nos demuestra este ejemplo es que para resolver este sistema fue necesario hacer uso de 8 ecuaciones. Si a estas ecuaciones le pusiéramos valores numéricos decimales, el trabajo se complicaría enormemente, teniendo a veces que usar una máquina calculadora para poder llegar, ya no a resultados exactos, sino a resultados aproximados, teniendo que trabajar a veces hasta con siete decimales para que el error no sea apreciable.

1.1.4 Método de Determinantes:

Si al producto ab restamos el producto cd, tendremos la expresión ab-cd. Esta expresión puede escribirse con la siguiente anotación:

$$ab - cd = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

La expresión $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ es una determinante

Las columnas de una determinante están constituídas por las cantidades que están en una misma línea vertical.

En el ejemplo anterior $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ es la primera columna y $\begin{matrix} d \\ b \end{matrix}$ es la segunda columna. Las filas están constituídas por las cantidades que están en una misma fila horizontal. En el dado, a d es la primera fila y c b la segunda fila. En la determinante $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ la línea que une a con b es la diagonal principal y la línea que una c con d es la diagonal secundaria. Los elementos de esta determinante son los productos ab y cd a cuya diferencia equivale esta determinante.

Resolución de ecuaciones por determinantes.

Vea el siguiente sistema:

$$a_1 u - b_1 y = C_1 \qquad (1)$$

$$a_2 X + b_2 y = C_2 \qquad (2)$$

Si resolvemos el sistema por el método de substitución podremos ver que

$$X = \frac{c_1 b - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} (3) \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Nótese que el denominador es común a ambas fracciones y esta expresión es el desarrollo de la determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (5) formado con los coeficientes de la ecuación (1) y (2). Esta es la determinante del sistema.

El numerador de X es el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

El numerador de y es el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, los valores de X y y, igualdades (3) y (4) pueden escribirse:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Por todo lo anteriormente explicado podemos escribir lo siguiente con relación a la resolución de ecuaciones con los incógnitos por determinantes:

I) El valor de u de una fracción cuyo denominador es la determinante formada con los coeficientes de X c y (determinante del sistema) y cuyo numerador es la determinante que se obtiene substituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de X por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

II) El valor de y es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante que se obtiene substituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de y por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

Para terminar con el método de determinantes, solo deseo agregar que para ecuaciones en un número mayor de (3) se tendrá que estudiar los métodos que existen para la resolución de determinantes tales como: la regla de Jarrus, la regla de Kramer, etc.

1.2 Método de Relajación:

Relajación es un método para resolver ecuaciones lineales por aproximaciones sucesivas, en el cual el conocimiento aritmético e intuición del operador pueden ser usados en diferentes maneras para acelerar la convergencia de proceso. Los puntos básicos del proceso del método de relajación pueden ser fácilmente explicables, si hacemos uso de un par de ecuaciones lineales; la simpleza de las ecuaciones servirá para demostrar no sólo los conceptos básicos del sistema, sino también para ver todas las modificaciones que se pueden efectuar. Podemos decir que no basta conocer sólo la base del sistema sino también las modificaciones, ya que este método ha sido usado cada vez más para resolver problemas de lo más complejo.

La regla base del proceso es la aritmética, pero si sólo contamos con esta base y no con las modificaciones, podremos ver que los problemas, como cuando son varías ecuaciones, sería el uso de este método impráctico y prohibitivo. Este método necesita de cierta aptitud del operador en la aritmética y en su destreza del uso de ella, para así volver la resolución de ecuaciones mucho más sencillas.

Como dijimos anteriormente, pues, los conceptos básicos y las modificaciones al sistema podrán ser fácilmente explicables con un simple par de ecuaciones:

Sea el sistema siguiente

$$-3X + y + 117 = 0 \qquad (1)$$

$$X - 2y + 51 = 0 \qquad (2)$$

Estas ecuaciones, si las resolviéramos por el método de eliminación, podríamos fácilmente decir que $X = 54$. Así pues, este ejemplo ha sido escogido únicamente para demostrar las técnicas de la relajación, y no porque sea compleja la resolución del sistema. Debemos agregar también que todavía para sistemas de ecuaciones de 4 incógnitas puede resultar más fácil el método de eliminación, pero para sistemas de 10 a 50 ecuaciones el método de relajación es apropiado y útil.

Veamos ahora los conceptos básicos para la aplicación del método.

1.2.1 Residuo:

Una serie de ecuaciones que se van a resolver tendrán que ser puestas primero como se ve en las ecuaciones (1) y (2), es decir, que sean iguales a cero. Introduciremos una nueva cantidad que la llamaremos residuo, que será siempre identificada con la letra F y la pondremos en vez del cero, quedándonos las ecuaciones de la siguiente forma:

$$FX = -3 + y + 117 \qquad (3)$$

$$Fy = X - 2y + 51 \qquad (4)$$

Ahora bien, cualquier valor que nosotros le demos a X e y, tendremos calculados valores de FX y Fy. El operador que está usando el método de relajación buscará aquellos valores que hagan que FX y Fy sean igual a cero, para tener las ecuaciones (1) y (2) cumplidas.

La importancia que tiene el concepto residuo, y las operaciones aritméticas a realizar, serán de los conceptos que el operador siempre tendrá que tener en mente en un primer plano para la mejor aplicación del método.

1.2.2 Unidad de Operaciones Básicas:

El proceso para la solución comienza con la selección de el par de valores de X e y. Cualquier valor que se le de es bueno, pero por lo regular empezaremos con el valor cero para X e y. Si en el ejemplo le damos a X e y un valor igual a cero, tendremos que FX = 117, y Fy = 51. Este residuo tendrá que ser llevado a ser cero para tener el problema resuelto. El sistema de relajación lo que nos da es un método para hacer que este residuo sea cero.

Cada paso representa únicamente operaciones fáciles de efectuar y que se puedan llevar en una forma tabulada. Las operaciones que se efectúan es a lo que le llamamos "unidad de operaciones básicas" y no consiste más que en darle incrementos a los valores de X e y tales como $\triangle X$ y $\triangle y$ que harán que FX y Fy sean cero.

Si vemos las ecuaciones (3) y (4), es fácil ver qué cambios tienen los valores de FX, Fy para $\triangle X = 1$ $\triangle y = \overline{1}$, por lo que si en la ecuación (4) hacemos $\triangle y = n$ entonces FX variará en función de n y Fy en función de 2n.

1.2.3 **Tabla de Operaciones** (tabulación)

Un número n de operaciones puede ser escrito fácil y claramente, más aún cuando el problema envuelve un número n de ecuaciones con n incógnitas. Para las dos ecuaciones usadas en el ejemplo, su tabla de operaciones será la siguiente:

	Fx	Fy
$\triangle x = 1$	-3	1
$\triangle y = 1$	1	-2

Nótese que se usa $\triangle$ siempre para determinar incrementos.

1.2.4 Regla Básica para Relajación:

El proceso de la relajación consiste entonces en la aplicación de las unidades básicas de operación, repetida y correctamente en un orden graduado que nos hace variar de valor, FX, Fy, hasta un valor cero. El término de estas operaciones es lo que se llama relajación o bien liquidación del residuo, llevado a cabo en un cierto número de pasos determinados, por la unidad de operaciones básicas.

Todo lo anterior nos da la ley de la relajación que en su lectura es muy simple y dice: EL OBJETO DE CADA PASO ES CAMBIAR EL VALOR CORRIENTEMENTE DE UN GRAN RESIDUO A CERO.

La ley nos da como principal objeto que nosotros no podremos decir cuántos pasos tendremos que dar, pero sí que la relajación tiene que ser terminada hasta tener todos los residuos igual a cero o con una aproximación cercana en caso que sean decimales las ecuaciones.

1.2.5 Tabla de Relajación:

Para poder aplicar el método de relajación, es conveniente aplicarlo en forma tabulada en la cual tendremos los valores de los residuos y los valores al ΔX que estemos usando:

	Fx	Fy
x = y = 0	117	51

El primer paso a dar será aquel que nos haga FX = 0, es decir, que le restemos 117 siendo este valor de 39 (si vemos en 1.2.3), ya que $\frac{-117}{-3} = 39$ por lo que el siguiente paso será:

	Fx	Fy
$x=y=0$	117	51
$\triangle x$	0	90

Nótese que el valor de $\triangle X = 39$ nos volvió $FX = 0$, pero nos dio un valor de $Fy = 90$. Si hacemos ahora $\triangle y = 45$ tendremos $Fy = 0$, y así sucesivamente. A continuación pondré todos los pasos necesarios para la resolución del sistema de las dos ecuaciones dadas.

	Fx	Fy
$x=0=y$	117	51
$x=39$	0	90
$y=45$	45	0
$x=15$	0	15
$y=7$	7	1
$x=2$	1	3
$y=1$	2	1
$x=1$	-1	2
$y=1$	0	0
$x=57$, $y=54$	0	0

La respuesta final para X e y será la suma aritmética de todos los incrementos, además en la última línea horizontal tenemos $FX = 0$; $Fy = 0$.

$$X = 0 + 39 + 15 + 2 + 1 = 57$$
$$y = 0 + 45 + 7 + 1 + 1 = 54$$

Con todo lo explicado anteriormente tenemos terminado el proceso de relajación, pero podemos ver que si este proceso se quisiera aplicar en su forma a unas 10 ecuaciones, las operaciones que habría que efectuar harían el proceso lento y tedioso, por lo que nos toca ahora introducir algunas modificaciones. Estas modificaciones podrán ponerse en práctica únicamente cuando el operador tenga el proceso bien conocido; así sabrá cual de las modificaciones usará o bien si las efectúan en conjunto.

1.2.6 Sobre Relajación:

Es ésta la primera modificación que puede también ser fácilmente explicada en las ecuaciones (1) y (2). En consecuencia, pondremos de nuevo aquí la tabla de unidad básica de operaciones:

	$\triangle$ Fx	$\triangle$ Fy
x = 1	-3	1
y = 3	1	-2

Podemos ver en esta tabla que cuando usamos un incremento para reducir un residuo, automáticamente hacemos crecer el otro residuo. Así, si hacemos $\triangle y = 1$ usado para decrecer Fy en 2, también incrementamos FX en 1. Esta circunstancia sería ideal si los residuos fueran de diferente signo, pero en el ejemplo vemos que los dos residuos iniciales son positivos e iguales a Fy = 51; FX = 117. Si nos olvidamos por un momento de las consideraciones numéricas, está claro que sí usamos la regla básica, es decir, si le damos un valor a $\triangle$ X en el primer paso para que FX sea cero; incrementamos Fy, para luego en el segundo paso dar un valor a $\triangle$ y que nos haga F y igual a cero, pero de nuevo incrementamos FX y así sucesivamente.

Mucho trabajo puede ser ahorrado si nos anticipamos al efecto del segundo paso antes de dar el primero. Si conocemos que en el segundo paso FX será incrementado al reducir FY, nos será muy beneficioso si FX puede ser negativo y no puramente cero, al comienzo del segundo paso.

Para hacer uso de esto es necesario, por supuesto, modificar la regla usada en el primer paso; como será el no hacer que FX = 1, sinó que sea un valor que nos dé F X negativo.

Esto es lo que es conocido como sobre-relajación. Sin embargo, es necesario decidir en cuánto es apropiado sobre-relajar o bien qué valor será el de FX negativo. En general podemos decir que es imposible determinarlo, esto depende de la experiencia y facilidad que tenga el operador para resolver ecuaciones. Como un consejo, y no como una regla, puedo decir que el uso de la sobre-relajación, para la solución de una serie de ecuaciones, reducirá el trabajo a la mitad.

En el ejemplo usado sabemos que nuestro primer paso fue darle un valor de $\triangle$ X = 39; si sobre-relajamos y le damos a $\triangle$ X un valor de 60, que es más o menos el doble de 39, y sólo seguimos luego la regla de relajación, tendremos en nuestra nueva tabla de solución del sistema, lo siguiente:

* * * * * * *

	Fx	Fy
$x = y = 0$	117	51
$\triangle x = 60$	-63	111
$\triangle y = 55$	-8	1
$\triangle x = 3$	1	-2
$\triangle y = -1$	0	0
$x = 57,\ y = 54$	0	0

Como podemos apreciar, el número de operaciones se redujo casi a la mitad con el paso de la sobre-relajación.

1.2.7 Relajación en Bloque:

Esto es una modificación muy importante porque crea una serie de operaciones nuevas en la tabla de unidad básica de operaciones.

Usaremos para explicarlo el mismo ejemplo que hemos usado hasta aquí. Nosotros hemos estado suponiendo separadamente que $\triangle X = 1$ y $\triangle y = 1$ para cada ecuación. Ahora bien, si hacemos $\triangle X = \triangle y = 1$ en ambas ecuaciones, esto variará nuestra tabla de la siguiente forma:

	Fx	Fy
$\triangle x = 1$	-3	1
$\triangle y = 1$	1	-2
$\triangle x = \triangle y = 1$	-2	1

Veamos ahora cuál es la aplicación de esta modificación. En el ejemplo, nosotros tenemos 117 y 51 de residuo. Si sumamos ésto nos da 168. Ahora bien, si sumamos el residuo del bloque tendremos -2 + (-1) = 3, así en nuestra primera operación si le damos a X = y un valor de $\frac{-168}{-3} = 56.$ Esto hará que el residuo en este bloque sea igual a cero, lo que nos simplifica el proceso quedándonos la resolución en la siguiente forma:

	Fx	Fy
x = y = 0	117	51
x = y = 56	5	-5
y = -2	3	-1
x = 1	0	0
x=57, y=54	0	0

Con estos elementos y modificaciones al sistema considero que el método de relajación puede darse por terminado en su explicación, quedando únicamente el insistir que para poder ver mejor la aplicación del sistema, se tiene que hacer un sinnúmero de ejemplos para así poder tener la práctica necesaria para la mejor aplicación del método.

Para terminar con el punto de relajación, veremos un ejemplo que tiene respuesta decimal, pero que es muy fácil de solucionar.

Sea el siguiente sistema:

$$+7X - y - 5z = 171$$

$$X - 6y + 4z = -49$$

$$5X + 4y - 8z = -90$$

Anotaremos con números los pasos que hay que seguir, para el mejor ordenamiento y solución al problema.

1. $-7x + y + 5z + 171 = Fx$

   $x - 6y + 4z + 49 = Fy$

   $5x + 4y - 8z + 90 = Fz$

2.

	ΔFx	ΔFy	ΔFz
$\Delta x = 1$	-7	1	5
$\Delta y = 1$	1	-6	4
$\Delta z = 1$	5	4	-8
$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$	-1	-1	1

3.

	Fx	Fy	Fz
$x = y = z = 0$	171	49	90
$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 310$	-139	-261	400
$\Delta z = 50$	111	-61	0
$\Delta x = 16$	-1	-45	80
$\Delta z = 15$	74	15	-40
$\Delta x = 8$	18	23	0
$\Delta y = 3$	21	5	12
$x = 334,\ y = 313,\ z = 375$	21	5	12
$x = 380,\ y = 356.8,\ z = 427.5$	-0.3	1.0	1.2
$\Delta z = 0.2$	0.7	-0.2	-0.4
$\Delta x = 0.1$	0	-0.1	0.1
$x = 380.9,\ y = 356.8,\ z = 427.7$	0.00	0.10	0.10
$\Delta z = 0.02$	0.10	0.02	-0.06
$\Delta x = 0.01$	0.03	0.01	-0.01

1.3 Método de Iteración de Gauss-Siedel

Un sistema de ecuaciones simultáneas lineales es llamado un sistema diagonal cuando en cada ecuación un coeficiente de cada diferente incógnita es mayor en valor absoluto que la suma de los coeficientes de las demás incógnitas. El coeficiente grande tiene que ser localizado para una explicación mejor en la diagonal del sistema de ecuaciones. En muchos de los sistemas de problemas físicos y analíticos puede ponerse las ecuaciones en este orden.

Los sistemas diagonales tienen la gran ventaja de poder ser resueltos por métodos de aproximaciones sucesivas, entre los cuales el método de Gauss-Siedel presenta muchas ventajas y es de simpleza en su aplicación. Para la aplicación del método tendrá que ponerse primero la ecuación igual a la incógnita de mayor coeficiente, y así sucesivamente todas. Entonces tendremos el siguiente sistema:

$$X_1 = b_{12} X_2 + b_{13} x 3 + \dots\dots\dots\dots b_1 nxn + k_1$$

$$X_2 = b_{21} X_1 + b_{23} x 3 + \dots\dots\dots\dots b_2 nxn + k_2$$

$$X_n = bn_1 X_1 + bn_2 X_2 + \dots\dots\dots\dots bn.nxn-1 + k_3$$

Si substituimos en el miembro del lado derecho de la ecuación (1) cualquier valor inicial de $X^{(o)}$ por las incógnitas, obtendremos un nuevo valor para $X^{(1)}$, en los miembros del lado izquierdo. Si luego substituímos el valor $X^{(1)}$ en el miembro del lado derecho obtendremos un nuevo valor $X^{(2)}$. Si continuamos el proceso $X^{(m)}$ será igual a $X^{(m+1)}$ siempre dentro de los límites de exactitud que se requieran. El valor $X^{(m)}$ es el principio del sistema.

En el método de Gauss cada aproximación, desde el principio, es obtenida con una operación rutinaria. Si se cometieron errores en el proceso de la iteración, esto no importa ya que él solo se corrige con las siguientes iteraciones, siendo esto lo que simplifica este proceso. Es esta la enorme ventaja del método de iteración sobre el método de relajación, ya que en el método de relajación el operador debe tener el cuidado de no cometer errores numéricos, que si no se corrigen le afectarán el resultado final. La serie, si es convergente, convergirá con cualquier valor inicial que se le de a la iteración; si se usa el término constante como el primer valor de la iteración, la serie converge más rápidamente. Luego, si en el desarrollo de la iteración se quisiera sobre-iterar, es decir, dar un valor mayor o menor, esto puede hacerse, pero el operador deberá fijarse en cuanto sobre-itera, ya que puede acortar el proceso o bien alargarlo.

Para dar a comprender mejor el método, resolveré un ejemplo que es fácil pero que nos permite ver sus bondades y rapidez.

Sea el sistema siguiente:

$$10X_1 + 1X_2 + 1X_3 = 12 \qquad (1)$$

$$2X_1 + 10X_2 + 1X_3 = 13 \qquad (2)$$

$$2X_1 + 2X_2 + 10X_3 = 14 \qquad (3)$$

1. Se pondrán las 3 ecuaciones en forma lista para proceder a la iteración:

$$X_1 = 1.2 - 0.1X_2 - 0.1X_3 \qquad (4)$$

$$X_2 = 1.3-0.2X_1-0.\ 1X_3 \qquad (5)$$

$$X_3 = 1.4-0.2X_1-0.\ 2X_2 \qquad (6)$$

2. Se comenzará el proceso dando en la ecuación (4) a X_1 y X_2 un valor igual a cero y tendremos entonces que $X = 1.2$.

Luego en la ecuación (5) dejemos $X_3 = 0$ y $X_2 = 1.2$ tendremos $X_2 = 1.06$ con $X_1 = 1.2$ y $X_2 = 1.06$. En la - (6) tendremos que $X_3 = 0.95$.

Esto no implica que el sistema esté ya resuelto, ya que los valores obtenidos no son los verdaderos valores de X_1, X_2 y X_3. Seguimos el proceso en el mismo orden anterior, sólo que ahora X y X ya no serán cero sino que tienen un valor determinado. Tendremos:

$$X_1 = 1.2-0.1 \times 1.06-0.1 \times 0.95 = 1.20-0.11-0.10 = 0.99$$

$$X_2 = 1.3-0.2 \times 0.99-0.1 \times 0.95 = 1.20-0.20-0.10 = 1.00$$

$$X_3 = 1.4-0.2 \times 0.99-0.2 \times 1.00 = 1.40-0.20-0.20 = 1.00$$

Si repetimos de nuevo la operación:

$$X_1 = 1.2-0.1 \times 1.00-0.2 \times 2.00 = 1.2-0.1-0.1 = 1.00$$

$$X_2 = 1.2-0.2 \times 1.00-0.1 \times 1.00 = 1.2-0.1-0.1 = 1.00$$

$$X_3 = 1.4-0.1 \times 1.00-0.2 \times 1.00 = 1.4-0.20-0.20 = 1.00$$

Lo que nos da por terminado el problema diciéndonos que $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, y $X_3 = 1$.

Como podemos ver, este es un método sencillo en aplicar y rápido en su resolución. Además, para que el operador no tenga que efectuar tantas repeticiones de la suma y resta de las ecuaciones, lo puede hacer en una forma tabulada como a continuación se enseña, dándose después de la tabla la explicación necesaria.

	(4)	(5)	(6)
X_1 X_2 X_3	1 -0.1 -0.1	-0.2 1 -0.1	-0.2 -0.2 1.0
C	1.20	1.30	1.40
I	(1.20) -0.11 -0.10	-0.24 (1.06) -0.10	-0.24 -0.21 0.95
II	(0.99) -0.10 -0.10	-0.20 (1.00) -0.10	-0.20 -0.20 (1.00)
III	(1.00) -0.10 -0.10	-0.20 (1.00) -0.10	-0.20 -0.20 (1.00)
IV	(1.00)	-0.20 (1.00)	-0.20 -0.20 (1.00)

La tabla contiene varias columnas y líneas las cuales son:

a) La línea harizontal que nos permite colocar la identificación de cada ecuación (4), (5) y (6).

b) La primera columna que nos indica cuántas y cuáles incógnitas tendremos que encontrar.

c) Las siguientes 3 columnas, los coeficientes de las cuales están afectadas cada incógnita.

d) La línea horizontal "c" para los valores constantes en cada ecuación.

e) Luego las líneas horizontales I, II, III, IV, las iteraciones que se han efectuado para resolver el sistema. Estas se separan con una línea para indicarnos que el proceso ha sido terminado, y que se debe sumar o restar para encontrar el valor de la incógnita en el valor de C.

f) El valor de X quedará dado en la columna (4), el de X_2 en la (5) y el de X_3 en la (6). Una nota muy importante es que los valores con que se esté trabajando se deben colocar entre paréntesis para que así no haya lugar a error cuando se opere.

Como podemos ver, este proceso es muy sencillo y bastará que el operador tenga suficiente velocidad con la regla de cálculo, en suma y resta, para sacarle el mejor provecho.

A continuación resolveremos un ejemplo de 5 ecuaciones con 5 incógnitas, en el cual veremos el método y los pasos que hay que seguir para su resolución.

Sea el siguiente sistema:

$$8.00\,X_1 - 2.40\,X_2 - 1.60\,X_3 + 2.00\,X_4 + 0\,X_5 = 12.00 \quad (1)$$

$$10.00\,X_2 + 0.00\,X_3 - 4.00\,X_4 - 2.30X_5 = 21.06 \quad (2)$$

$$3.20\,X_2 + 8.00\,X_3 + 1.60\,X_4 + 3.20X_5 = -23.28 \quad (3)$$

$$-3.20\,X_1 + 0.00\,X_2 + 4.80\,X_3 + 10.00\,X_4 + 2.10X_5 = -14.06 \quad (4)$$

$$-1.60\,X_1 + 0.00\,X_2 + 1.60\,X_3 + 2.40\,X_4 + 8.00X_5 = -22.32 \quad (5)$$

1. Pondremos las ecuaciones en su forma para iteración:

$$X_1 = 1.5 + 0.30\,X2 + 0.20\,X\,3 - 0.25\,X\,4 \qquad (1)$$

$$X_2 = 2.11 - 0.00\,X1 - 0.00\,X\,3 + 0.40x\,4 + 0.23\,X\,5 \qquad (2)$$

$$X_3 = 2.91 - 0.00\,X1 - 0.40\,X\,2 - 0.20X4 - 0.40X\,5 \qquad (3)$$

$$X_4 = 1.41 + 0.32\,X1 - 0.02\,X\,2 - 0.48X3 - 0.21X\,5 \qquad (4)$$

$$X_5 = 2.79 + 0.20\,X1 + 0.00\,X\,2 - 0.20X3 - 0.30X\,4 \qquad (5)$$

2. Construyamos nuestra tabla de operación y procedamos a la primera iteración en la ecuación (1) con $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$ y así sucesivamente.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
x1	1.00	0	0	0.32	0.20
x2	0.30	1.00	-0.40	0.00	0.00
x3	0.20	0	1.00	-0.48	-0.20
x4	-0.25	0.40	-0.20	1.00	-0.30
x5	0	0.23	-0.40	-0.21	1.00
C	1.50	2.11	-2.91	-1.41	-2.79
	(1.50)	0	0	0.48	0.30
	0.63	(2.11)	-0.84	0	0
	-0.75	0	(-3.75)	1.80	0.75
	-0.22	0	0	(0.87)	-0.26
	0	0.35	-0.80	0.37	(-2.00)
	(1.16)	-0.46	-0.17	0	0.23
	0.60	(2.00)	0.80	1.48	0
	-0.62	0	(-3.08)	0.42	0.62
	-0.22	0	0	(0.86)	-0.25
	0	0.34	-0.79	0.40	(-2.10)
	(1.26)	-0.48	-0.17	0	0.25
	0.59	(1.97)	0.84	1.46	0
	-0.61	0	(-3.03)	0.44	0.61
	0.22	0	0	(0.89)	-0.27
	0	0.36	-0.79	0.40	(-2.20)
	(1.26)	-0.51	-0.18	0	0.25
	0.59	(1.96)	0.84	1.45	0
	-0.61	0.00	(-3.03)	0.46	0.61
	-0.23	0	0	(0.90)	0.27
	0	0.36	-0.79	0.40	(-2.20)
	(1.25)	-0.50	-0.18	0	0.25
		(1.97)	0.84	1.46	0
			(-3.04)	0.46	0.61
				(0.91)	-0.27
					(-2.20)

Como podemos ver, ya los resultados están variando muy poco lo que nos indica que podemos dar por encontradas las incógnitas. Claro está que lo ideal sería seguir hasta que se comenzaran todas a repetir, como en el caso de 2.20, pero eso dependerá de qué exactitud desee el operador en sus resultados. Por ejemplo, si con los valores encontrados comprobamos las ecuaciones iniciales, vamos a encontrar que existe el siguiente error:

Ecuación (1) error - 0.044
Ecuación (2) error - 0.06
Ecuación (3) error - 0.032
Ecuación (4) error - 0.048
Ecuación (5) error - 0.04

Si se considera la rapidez del método creo que el error es despreciable. Cuando la iteración comienza a repetirse puede dejarse sin efectuar y así ganar más tiempo aún.

1.4 Matrices:

Las notaciones del álgebra ordinaria constituyen un sistema conveniente de abreviación, una clase compacta bien adaptada para expresar las relaciones lógicas entre los números. La notación de las matrices es simplemente una de las últimas etapas en el desarrollo de estas abreviaturas, mediante las cuales ciertas operaciones y resultados del sistema primitivo pueden ser expresadas de una manera aún más corta. Las ecuaciones al ordenarse en este nuevo sistema, hacen aparecer propiedades antes desconocidas, que se verán más adelante.

Sería intolerablemente aburrido que, siempre que tuviéramos ocasión de manejar sistemas de ecuaciones o de referirnos a propiedades de los coeficientes, tuviéramos que escribir, o todas las ecuaciones o el esquema completo de los coeficientes. La necesidad de una notación abreviada se sintió muy pronto y en el último siglo Cayley y otros algebristas utilizaron notaciones abreviadas tales como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Tales notaciones abreviadas se utilizaron para un sistema de ecuaciones lineales, destacando el esquema rectangular de los coeficientes a_{ij} de los variables X_j correspondientes. Más tarde Cayley consideró dicho esquema de coeficientes ordenados como un "operador" que actúa sobre X para producir aX. Investigando además las reglas de tales operaciones, formuló el "álgebra de matrices", entendiendo por matrices aquellos esquemas de coeficientes destacados de las ecuaciones del sistema, considerados como operadores. En este pequeño resumen sobre matrices veremos únicamente la suma, resta y multiplicación de matrices, así como la matriz diagonal, ya que considero que esto es suficiente para nuestro objetivo. Si alguno desea estudiar toda el álgebra de matrices, recomiendo el libro titulado "Determinantes y Matrices" por A.C. Aitken, de la editorial Dossat S.A.

1.4.1 Definición de una Matriz:

Un esquema de coeficientes destacados a_{ij} dispuestos en m filas y n columnas como a la izquierda de (1), será llamado una matriz de orden m x n. Los números

a_{ij} se llaman elementos de la matriz, siendo a_{ij} el elemento situado en la i-ésima fila y en la j-ésima columna. El subíndice de filas i toma los valores 1, 2, ... m, las columnas j los valores 1, 2, ... n. La matriz como un todo será denotada por A o por a_{ij} ; en ocasiones se escribirá el cuadro completo. El elemento a_{ij} será designado con frecuencia como el (i, j) -ésimo elemento de A.

Veremos ahora el conjunto de reglas que existen para sumar y multiplicar las matrices A y B, reglas que son también las que crean el álgebra de matrices.

1.4.2 Suma

Consideramos como ilustración las ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

y

$$\begin{aligned} Z_1 &= b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 \\ Z_2 &= b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 \end{aligned}$$

Supongamos que se introducen nuevas variables w y w_2, sumando a las y_1 y las z_1 correspondientes:

$$W_1 = Y_1 + Z_1 \ ; \quad Wz = Y_2 + Z_2$$

Tendremos entonces en definitivo:

$$W_1 = (a_{11}\,b_{11})\,X_1 + (a_{12}\quad{}_{12})\,X_2 + (a_{13}\quad{}_{13})\,X_3$$

$$W_2 = (a_{21}\,b_{21})\,X_1 + (a_{22}\quad{}_{22})\,X_2 + (a_{23}\quad{}_{23})\,X_3$$

El proceso de obtener (4) de (1) y (2) puede ser considerado lógicamente como la adición de las ecuaciones lineales, y evidentemente puede ser extendido a dos sistemas de m ecuaciones que contengan las mismas variables $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{12}$ a la derecha. Este nos sugiere la regla de suma matricial que es la siguiente: SUMA DE MATRICES: Para sumar dos matrices A y B del mismo orden m x n, sumamos sus elementos correspondientes, y tomamos las sumas obtenidas, como los elementos correspondientes de la matriz, suma que se denota por A + B.

En símbolos tendremos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}$$

Para aclarar el concepto anterior pondremos un ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

1.4.3 Multiplicación:

La transformación lineal homogénea más sencilla es de la forma $y = ax$, que es una multiplicación ordinaria. -- Cuando en el álgebra elemental tenemos que efectuar sucesivamente dos de ellas, tales como $y = ax$, $z = by$, el resultado puede ser representado por la única transformación $z = bax$ en la que se ve que los coeficientes b y a de las transformaciones aisladas se han combinado por producto, para darnos el coeficiente ba de la transformación resultante.

Cuando efectuamos sucesivamente transformaciones lineales análogas a éstas, pero no sobre una variable sino que sobre varias a la vez, es perdonable pensar en una extensión natural del lenguaje que nos hará decir también que las transformaciones han sido multiplicadas todas en un cierto orden. Podremos llamar después de esto a la matriz de la única transformación resultante, la matriz producto BA, por analogía con ba.

Para descubrir la regla apropiada que nos permita -- construir los elementos de B A, consideremos las dos transformaciones:

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3$$

$$Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3$$

$$Z_1 = b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2$$

$$Z_2 = b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2$$

$$Z_3 = b_{31}\, y_1 + b_{32}\, y_3$$

$$Z_4 = b_{41}\, y_1 + b_{42} \cdot y_4$$

o o o o o o o o o o o

Estos, como se puede ver inmediatamente sustituyendo los "y" por sus expresiones mediante las "x", nos dan la transformación siguiente:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
Z_1 &= (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})\,X_1 + (b_{11}a_{12}+b_{21}a_{22})\,X_2 + (b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23})\,X_3\\
Z_2 &= (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})\,X_1 + (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})\,X_2 + (b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23})\,X_3\\
Z_3 &= (b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21})\,X_1 + (b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22})\,X_2 + (b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23})\,X_3\\
Z_4 &= (b_{41}a_{11}+b_{42}a_{21})\,X_1 + (b_{41}a_{12}+b_{42}a_{22})\,X_2 + (b_{41}a_{13}+b_{42}a_{23})\,X_3
\end{aligned}
$$

Es natural, por consiguiente, considerar la matriz de la transformación (2) a saber:

$$
\begin{bmatrix}
b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{21}a_{22} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}\\
b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}\\
b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23}\\
b_{41}a_{11}+b_{42}a_{21} & b_{41}a_{12}+b_{42}a_{22} & b_{41}a_{13}+b_{42}a_{23}
\end{bmatrix}
$$

Como el producto en el sentido descrito de los matri- ces:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Tomados en el orden BA. El principio que rige la elec ción del orden es éste: una transformación es una "operación u operador" que actúa sobre ciertos variables. El símbolo de la operación siempre procederá inmediatamente a los variables afectados por él, es decir, el operando. Así cuando los variables x son transformados por A, los variables resultantes se simbolizan naturalmente por Ax; y cuando estos nuevos variables a su vez se transforman mediante B, es natural escribir $B(Ax)$ para el resultado y, por consiguiente, es natural también designar por BA la matriz resultante de las dos transformaciones efectuadas en dicho orden.

Por todo lo dicho anteriormente podremos ahora dar la regla para "Multiplicación de Matrices":

El elemento de la i-ésima fila de j-ésima columna de la matriz producto BA se obtiene multiplicando los elementos de la i-ésima fila de B por los correspondientes elementos de la j-ésima columna de A, sumando después los productos así obtenidos.

En símbolos, si B es de orden $m \times n$ y A es de orden $n \times p$, entonces $BA = C$, donde C es de orden $m \times p$, y :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{kj}$$

Es importante notar que la multiplicación sólo es posible si el número de columnas de B es igual al número de filas de A.

Para entender mejor lo apuntado al respecto de la multiplicación pondremos algunos ejemplos.

1.
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} = C$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora ya conociendo los métodos de suma y multiplicación podemos proceder a la creación de la matriz de un sistema, por ejemplo de 3 ecuaciones.

Sea el siguiente:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = C_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = C_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = C_3$$

Podemos escribirla como matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

O si queremos en la forma más simple:

$$A\,X = C$$

1.4.4 **Matriz Diagonal**

Los pasos fundamentales en cualquier método de resolución de ecuaciones simultáneas será reducir, por eliminación, el sistema a la unidad en una forma diagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 1 & T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

O bien:

$$T\,X = K$$

Por lo que el sistema:

$$\begin{aligned} X_1 + T_{12} X_2 + T_{13} X_3 &= K_1 \\ X_2 + T_{23} X_3 &= K_2 \\ X_3 &= K_3 \end{aligned}$$

puede ser fácil e inmediatamente resuelto por una substitución en sentido inverso, es decir, conociendo X_3, luego X_2 y por último X_1.

Creo que esto se entenderá mejor si resolvemos un sistema de ecuaciones. Sea el sistema siguiente:

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 - 5x_3 = -350 \qquad (2)$$

$$x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -700 \qquad (3)$$

1. Pongamos nuestro sistema en forma de una matriz:

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -350 \\ -700 \end{bmatrix}$$

2. Forma que nos queda la matriz diagonal (ver las operaciones necesarias para llegar a ella).

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.333 & -0.666 \\ 0 & 1.00 & -3.251 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -263.158 \\ 139.043 \end{bmatrix}$$

$-6 + 2 + 4 = 0$ dividiendo por -6, $1 - 0.333 - 0.666 = 0$

$$\begin{array}{lr}
1\ -0.333\ -\ 0.666 & =\ \ 0 \\
1\ +1.000\ -\ 5.000 & =-350 \\
\hline
0\ -1.333\ +\ 4.334 & =+350 \\
\ \ +1.00\ \ -\ 3.251 & =-263.158 \\
\hline\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
1\ -6.000+2.000 & =-700.00 \\
1\ -0.333\ -\ 0.666 & =\ \ 0 \\
\hline
-5.667+2.666 & =-700 \\
-1.000+0.470 & =-123.522 \\
1.000-3.251 & =-263.158 \\
\hline
-\ 2.781 & =-386.680 \\
1.00 & =\ \ 139.043 \\
\hline\hline
\end{array}$$

En la matriz diagonal ya conocemos el valor de X_3 = 139.043, encontremos ahora los demás valores.

$$1.00\, x_2 - 3.251 \times 139.043 = -263.158$$

$$x_2 = 188.871$$

$$x_1 - 0.333 \times 188.871 - 0.666 \times 139.043 = 0$$

$$x_1 = 155.497$$

Si cotejamos las ecuaciones:

error en (1) = 0.0932
error en (2) = 0.0840
error en (3) = 0.153

CAPITULO II

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

2.1 Definiciones y conceptos básicos para el análisis de estructuras.

Antes de entrar a ver los métodos de análisis de estructuras daremos algunos conceptos básicos que el analista tendrá que tener siempre presentes para un desarrollo mejor en su trabajo.

2.1.1 Bases y limitaciones de la teoría elástica.

El material a usarse tiene las siguientes características: homogéneo, isotrópico y contínuo.

Se cumple la hipótesis de Navier: Las secciones planas antes de deformarse siguen siendo planas después de la acción de deformación.

La sección analizada está sometida a los siguientes esfuerzos, para los cuales diseña su resistencia:

Tensión
Compresión
Corte
Flexión
Torsión

Como el material es considerado elástico, sigue la ley de Hooke: los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones.

El módulo de elasticidad en tensión (E) será igual al módulo de elasticidad en compresión.

Bases y limitaciones al respecto de las deformaciones.

Las deformaciones en una estructura son pequeñas, y no afectan la acción de las cargas externas.

Las deformaciones por flexión se consideran perpendiculares a los miembros.

Las deformaciones por carga axial y por corte pueden ser despreciables.

Bases y limitaciones al respecto de las cargas.

Las cargas se consideran estáticas y aplicadas gradualmente.

Las cargas son perpendiculares al plano del eje neutro de la sección, y aplicadas en los ejes de simetría.

Consideramos que los esfuerzos residuales anteriores creados por fraguado, temperatura, etc., no existen.

Bases y limitaciones al respecto de los miembros.

Los miembros no tendrán cambios bruscos de sección ya que al tener estos cambios no se cumpliría la teoría de Navier. Luego, en estos puntos tendríamos una concentración de esfuerzos de regular cuantía.

Para que se cumpla la condición de carga de compresión, es decir $\frac{P}{A} = F$ se necesita que el miembro sea recto y que la carga sea axial.

Para que se cumpla la condición de flexión, es decir

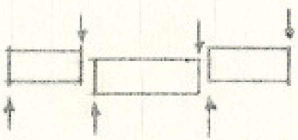
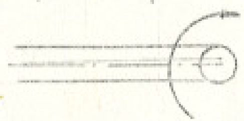
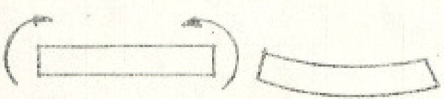
$F = \frac{Mc}{I}$ se necesita que el miembro esté sujeto a flexión pura y no existan esfuerzos de corte importantes. Las vigas deberán estar diseñadas de tal forma que el esfuerzo predominante sea el de flexión, y además que este esfuerzo sea cierto sólo en el plano de la carga. Por último, la viga tendrá que ser recta.

Para que se cumpla la condición de torsión $F = \frac{Tc}{J}$ la barra deberá ser circular.

*

* *

Como resultado de las consideraciones anteriores la teoría elástica nos da una variación lineal entre causas y efectos, por lo que es válido el principio y método de superposición de efectos.

Resistencia		Deformación
	Tensión	Alargamiento de fibras
	Compresión	Acortamiento de fibras
	Corte	Deslizamiento de planos
	Torsión	Giro
	Flexión	Acortamiento de fibras y alargamiento de otras

Constantes Físicas

Momento de Inercia:

Como es sabido, el valor de momento de inercia que se usa para madera, acero estructural y concreto, tiene ciertas variaciones, ya que en la madera y en el acero estructural se puede determinar cuál será el momento de Inercia a usar. Por ejemplo, en el caso de una sección de madera rectangular sería $\frac{1}{2}$ bh^3. En una sección de acero estructural, el libro de la AISC nos proporciona todos los momentos de Inercia, dependiendo de la forma a usarse, es decir, si es una I, un canal, etc. Para el concreto se ha querido dar a I diversos valores. Algunos consideran para secciones rectangulares el momento de inercia total de la sección transformada. Otros prescinden de la armadura y emplean el valor $1/12\ bh^3$ en la que b = base; h = altura del miembro. Otros recurren a la fórmula $1/12\ bh^{2.5}$. En este trabajo usaremos $1/12\ bh^3$.

Las mayores incertidumbres aparecen al determinar el valor de I que se debe usar para vigas y columnas. Algunos emplean el momento de inercia del total de la sección transformada, compuesta de la viga y sus recubrimientos en su ancho total. Este último es el criterio que recomendamos.

Módulo de Elasticidad:

Durante mucho tiempo se ha creído que el módulo de elasticidad del hormigón en estado próximo a la ruptura por compresión variaba aproximadamente igual que en las tensiones. Los reglamentos y especificaciones actuales están basados en esto. No hay duda de que existe una relación entre los dos valores, pero no una relación constante. Podemos decir que el valor de E varía de un modo libre ya que oscila entre 180,000 Kg/cm^2 y los 300,000 Kg/cm^2. Es decir, están dentro de un límite del $\pm$ 33% del valor medio de 240,000 Kg/cm^2.

Es un problema el saber decir la variación que tenga el módulo de elasticidad, incertidumbre que se refleja a veces en la posición de las grietas, e incertidumbres introducidas por la acción del tiempo.

Si agregamos esto a la incertidumbre de cuál valor de I se selecciona, veremos que el problema de analizar una estructura es un tanto desalentador, pero es aquí donde el analista deberá usar su criterio. El módulo de elasticidad del acero depende únicamente del tipo de acero que se esté usando; así también el de la madera.

A continuación aparece un cuadro que nos muestra el efecto de I y de E en los diferentes tipos de estructuras.

	MOMENTO DE CONTINUIDAD	MOMENTO ISOSTATICO	DEFORMACIONES	ESFUERZO
ISOSTATICAS	No AFECTA E o I	No AFECTA	Si AFECTA E, I	= Mc/I AFECTA I
HIPERESTATICAS	AFECTA E e I	Si AFECTA	Si AFECTA E, I	AFECTA I

Rigidez

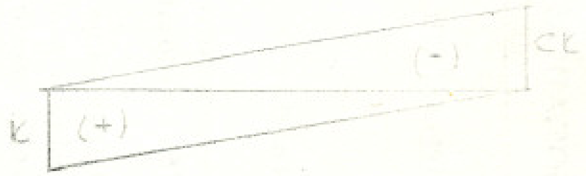
Podemos decir que "rigidez" es la resistencia que ofrece la barra al deformarse bajo la acción de solicitaciones externas (solicitaciones = momentos, fuerzas, cargas).

Rigidez en un sentido más restringido es la fuerza o momento necesarios para producir, en cualquier miembro, un desplazamiento o giro unitario. Sabemos que la barra podrá tener condiciones fijadas de antemano.

Resistencia	Rigidez elemental
Tensión Compresión	$\frac{AE}{ds}$
Corte	$\frac{AG}{ds}$
Torsión	$\frac{JG}{ds}$
Flexión	$\frac{IE}{ds}$

Rigidez angular absoluta a flexión

Rigidez angular absoluta a flexión es el momento necesario para producir un giro unitario en un extremo articulado de una viga, estando el otro extremo empotrado, v.g:



Estudiemos las ecuaciones por Area Momento

$$\Delta \theta_{A/B} = 1 \qquad (1)$$

$$\Delta_{yA/tgB} = 0 \qquad (2)$$

Si hacemos uso de la ecuación No. 2

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{KL^2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{CKL^2}{EL} = 0$$

Si anulamos términos semejantes, es decir: $\frac{L^2 K}{EI}$

$$C = 1/2$$

Si hacemos ahora uso de la ecuación No. 1

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{KL}{EI} - \frac{1}{2} \frac{CKL}{EI} = 1$$

ubstituimos $C = 1/2$

$$K = \frac{4EI}{L}$$

Rigidez transferida

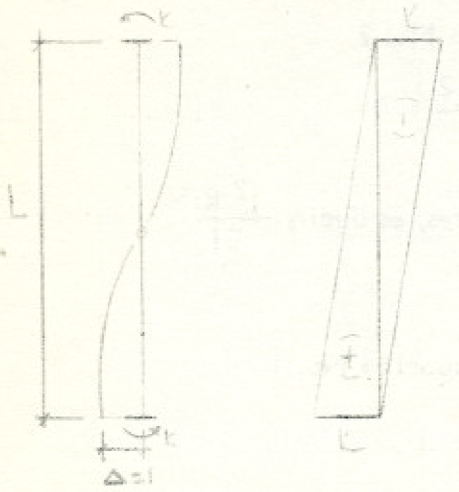
Rigidez transferida es el momento que aparece en B, o sea:

$$CK = \frac{1}{2} \frac{4EI}{L}$$

$$CK = \frac{2EI}{L}$$

Rigidez lineal absoluta a flexión

Rigidez lineal absoluta a flexión es el momento producido por un desplazamiento unitario cuando la barra está doblemente empotrada.



CONDICIONES

$\Delta = 1$

$K = K$

EI = CONSTANTE

$\Delta \theta_{A/B} = 0$ (1) $\Delta x_{A/tg\,B} = \Delta = \Sigma$ AREAS $\frac{M}{EI}\,\bar{x}_A$

$\Delta = -1/6\ \frac{KL^2}{EI}$ El signo solo indica dirección

$K = \frac{6\,EI\,\Delta}{L^2}$

La rigidez transferida = la rigidez absoluta.

Flexibilidad

Flexibilidad es lo contrario a rigidez y se define como la deformación o rotación producida por una causa unitaria, ya sea fuerza o momento. La denominamos con la letra λ.

$$\lambda = 1/K$$

Resistencia	Flexibilidad elemental
Tensión o compresión	$ds/\Delta E$
Corte	$ds/\Delta G$
Torsión	$ds/J\ G$
Flexión	$ds/E\ I$

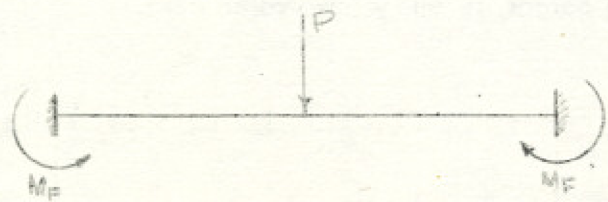
Momento fijo de flexión

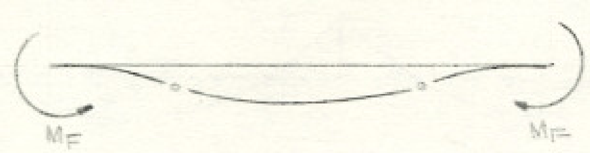
Varias de las definiciones del Momento Fijo son:

a) Momentos de empotramiento en una viga doblemente empotrada.

b) Momento que es necesario aplicar para mantener en cero las pendientes en los apoyos.

c) Momento necesario para producir un giro igual y del signo opuesto en los extremos de la barra, al producido por la carga.



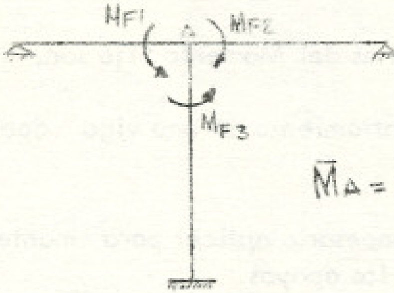


Punto de Inflexión

Se llama punto de inflexión a aquel punto en el cual el momento flexionante tiene un valor igual a cero. Es decir, la lĩnea de deformación de la viga pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Momento de Sujeción = $\overline{M}_A$

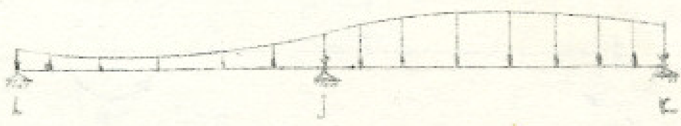
Momento de sujeción se le llama a la suma algebráica de los momentos fijos en un nudo.

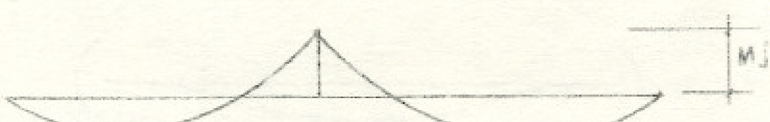


$$\overline{M}_A = M_{F1} + M_{F2} + M_{F3}$$

Momento Inicial

Momento inicial es el momento flector en " j " (ver figura) debido a las cargas, si mi y mk valen cero.



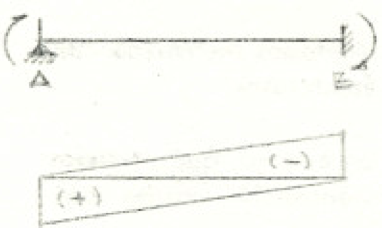


Coeficiente de Transmisión

Coeficiente de transmisión es la relación de efecto a causa para determinadas condiciones de una barra:

Forma de resistencia	Coeficiente de transmisión
Tensión o compresión	- 1
Corte	- 1
Torsión	- 1
Flexión	1/2 (Si EI = Constante)

Veamos por qué en flexión $c = \frac{1}{2}$



$M_{AB} = C M_{BA}$

$\Delta y_A / t_{gB} = 0 = \frac{1}{2} \frac{M_{AB} L^2}{3EI} - \frac{1}{2} \frac{2 C_{AB} M_{AB} L}{3EI}$

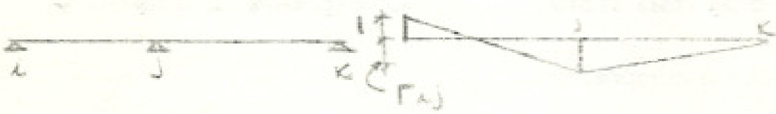
$\therefore \; C = 1/2$

Coeficiente de distribución a flexión

Si vemos un nudo x en cualquier estructura, veremos que el coeficiente de distribución es el porcentaje de momento que le toca o absorbe una barra al aplicar un momento externo M. Para encontrarlo se divide la rigidez de la barra bajo consideración entre la suma de las rigideces de las barras que concurren al nudo.

Factor de Transferencia

Se le llama factor de transferencia al momento flector en j (ver figura -) debido a un momento unitario aplicado - en i si el momento en k = 0.



Logrando entender los conceptos anteriormente expuestos - veremos ahora los métodos de análisis de estructuras que - aquí se presentan.

Antes deseo aclarar que los análisis y distribución de momentos que se indica más adelante, solo se refieren a flexión, y no a otras formas de resistir como corte por ejemplo.

2.2 Aplicación de los Diferentes Métodos Numéricos más usados en el Análisis de Estructuras.

Veremos ahora, por medio de un cuadro, qué métodos son los que se aplican para los diferentes sistemas de análisis. (Página siguiente).

Es de hacer notar que todos los sistemas del análisis de ecuaciones son aplicables a las ecuaciones dadas por pendiente de flexión, no así para el método de Cross y el de Kani, que tienen implícitos ya en su resolución, únicamente la aplicación de relajación, e iteración respectivamente. Esto podrá darnos una conclusión: es preferible conocer los sistemas numéricos para la resolución de ecuaciones, para así luego poder optar por el método de análisis de la estructura. Ya conociendo los diferentes métodos de resolución de ecuaciones notaremos que los sistemas de análisis de estructuras pueden simplificarse en su estudio y en sus operaciones.

		METODOS DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS			
		PENDIENTE DEFLEXION	CROSS	MOMENTOS TRANSFERIDOS	KANI
METODOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES	ALGEBRAICOS	X			
	RELAJACION	X	X	X	
	ITERACION	X			X
	MATRICES	X			
	COMPUTADORES ELECTRONICOS	X	X	X	X

2.3 METODO DE PENDIENTE DE FLEXION

2.3.1 Generalidades:

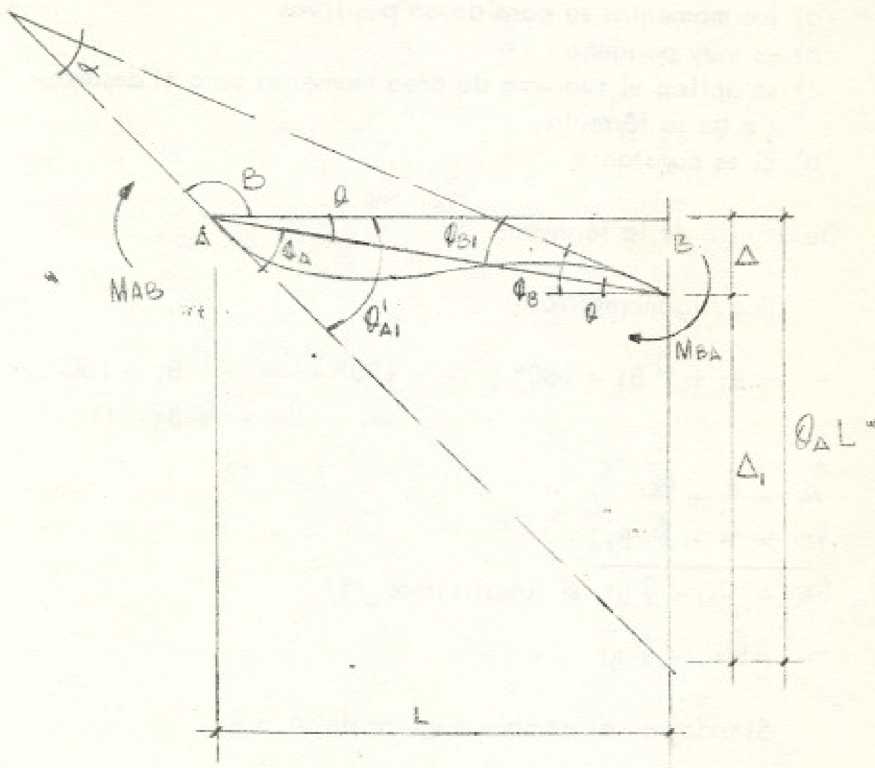
Durante la época anterior a la introducción de la distribución de momentos, casi todos los marcos contínuos que requerían afinamiento en su análisis, se calculaban por el método de pendiente deflexión. Muchos ingenieros aún están de acuerdo en que este método es el mejor de los dos, y rara vez emplean distribución de momentos.

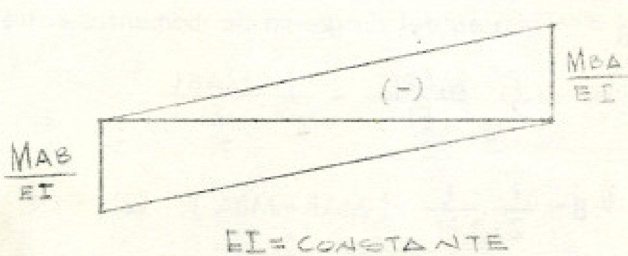
Por nuestra parte queremos agregar que es el método más apropiado para cálculos que se realicen con el auxilio de computadores electrónicos. Debemos anotar que, para cualquier método con el que se esté trabajando, es conveniente dibujar la forma que la elástica tome por la acción de las cargas a las cuales está sometido, para tener una idea ligera de como serán nuestros resultados.

2.3.2 Desarrollo de la Fórmula General:

Como su nombre lo indica, el método de pendiente de flexión es un método que combina la pendiente de la elástica y la deflexión del miembro al ser sometido a la acción de cargas. Entonces pues, la fórmula general tendrá involucrado la pendiente en el punto considerado, la deflexión y las constantes físicas del miembro considerado.

A continuación se desarrolla la fórmula general, base de este método.





EI= CONSTANTE

Consideraciones necesarias:

a) los momentos se consideran positivos
b) es muy pequeño θ_A
c) se aplica el teorema de área momento para el desarrollo de la fórmula
d) EI es constante

Desarrollo de la fórmula:

Por trigonometría:

$$\alpha + B_1 + \theta B_1 = 180° \; ; \; \alpha + 180° - \theta_{A1} + \theta B_1 = 180° \; \therefore$$

$$\alpha = \theta_{A1} - \theta B_1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \theta + \theta_{A1} \\ \theta_B &= \theta + \theta B_1 \end{aligned}\right\} +$$

$\theta_A - \theta_B = \theta_{A1} - \theta B_1$ si substituimos (1)

$$\alpha = \theta_{A1} - \theta_{B1}$$

Siendo α el cambio angular de A a B

podemos decir que:

$\theta A/_B = \alpha$ = area del diagrama de momentos entre A y B

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{MABL}{EI} - \frac{1}{2}\,\frac{MABL}{EI}$$

$$\theta_A - \theta B = \frac{1}{2}\,\frac{L}{EI}\,(MAB - MBA) \quad (2)$$

en esta ecuación tenemos ya relacionado momentos y rotaciones

$$\theta_A\, L = \Delta + \Delta_1$$

$\Delta_1 =$ yB/A = momento del área del diagrama de momentos entre A y B

con respecto a B.

$$= \frac{1}{\ } \frac{L^2}{EI} \left(2\,MAB - MBA \right) \qquad (3)$$

en esta ecuación tenemos ya relacionado momentos y deflexiones

$$L = \quad + \qquad \text{Substituyendo} \quad \text{por} \quad (3)$$

$$= \frac{\ }{L} + \frac{1}{\ } \frac{L}{EI} \left(2\,MAB - MBA \right)$$

restando ahora las ecuaciones (2) y (4) tendremos:

$$\frac{MAB\,L}{2\,EI} = \quad + \quad B - \frac{3}{\ }$$

por lo que:

$$MAB = \frac{I}{L} (4\,E \quad + 2E\,\theta\,B - \frac{E}{L}$$

Esta ecuación podría considerarse como el teorema de Area momento, expresado en una forma práctica y de fácil operación

siendo ésta la ecuación final para encontrar el momento de A a B. Esta ecuación puede escribirse en una forma más simplificada, si hacemos:

$$\frac{I}{L} = K$$

$$4\,E \quad A = A$$

$$E \quad B = B$$

$$\frac{E}{L} = R$$

tendremos la ecuación en la siguiente forma:

$$MAB = K(A + B/2 - R)$$

Si en el miembro existen cargas intermedias al superponer efectos tenemos:

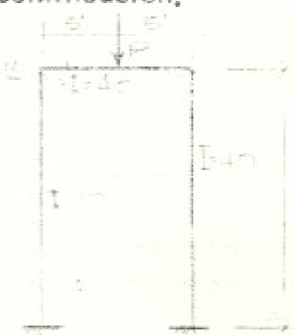
$$MAB = K(A + B/2 - R) \pm M\,Fijo$$

Con esta fórmula podemos ya resolver cualquier estructura indeterminada, pero tenemos que tomar en cuenta que los momentos se han considerado positivos.

Para la mejor comprensión del uso de la fórmula se resolverán los siguientes ejemplos.

2.3.3 Ejemplos

1. Encontrar los momentos y cortes del pórtico rectangular mostrado a continuación:



Antes de entrar de lleno a la resolución del problema, trataré de dar la metodología del cálculo para la simplificación de la resolución del mismo.

a) Planteamiento de la fórmula general.

b) Datos proporcionados.
c) Cálculo de valores constantes.
d) Puntos donde la ecuación puede ser aplicada.
e) Incógnitas por resolver.
f) Planteamiento y resolución de ecuaciones.
g) Determinación de momentos y cortes.
h) Diagramas de corte y momento, elástica.

Siguiendo este ordenamiento resolveré el ejemplo anterior.

a) $MAB = K(\triangle + B/2 - R) \pm M_F$

b) Momento Inercia, longitud de miembros, carga aplicada.

c) $K = \frac{I}{L} \therefore K \text{ vigas} = \frac{40}{10} = 4$

$$K \text{ columna} = \frac{40}{20} = 2$$

Momento Fijo de a $B = \frac{PL}{8} = \frac{16 \times 10}{8} = 20$ Kip-pie

d) En A, B, C, D

e) Incógnitas:

$R = 0, \; A = 0, \; D = 0, \; B = -C$ (por simetría)

f) Ecuaciones:

$MB\triangle + MBC = 0$

$MB\triangle = K(\triangle + B/2 - R) = 2B$

$MBC = K(B + C/2 - R) = 2B - 20$

$4B - 20 = 0 \therefore B = 5$

g) Determinación de momentos

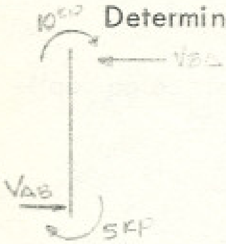
$$MAB = K\,(A + B/2 - R) = 2 \times 5/2 = 5 \text{ Kip-pie}$$

$$MBA = 2\,B = 10 \text{ Kip-pie}$$

$$MCD = \text{Por simetría} = -10 \text{ Kip-pie}$$

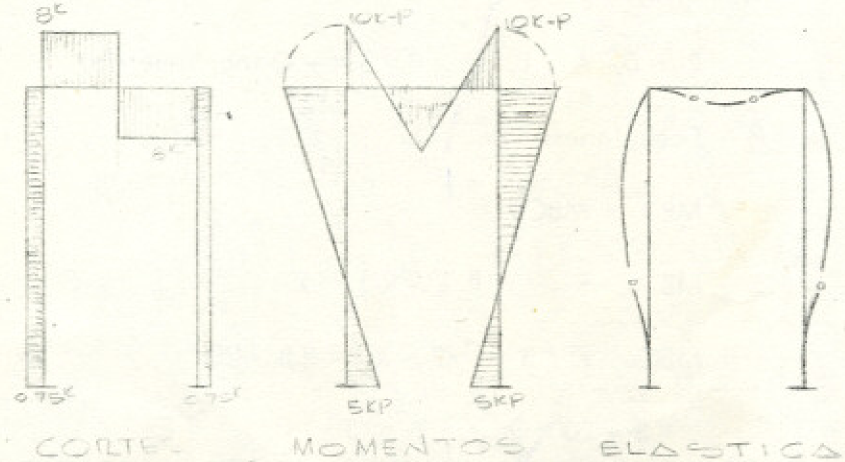
$$MDC = -5 \text{ Kip-pie}$$

Determinación de cortes:

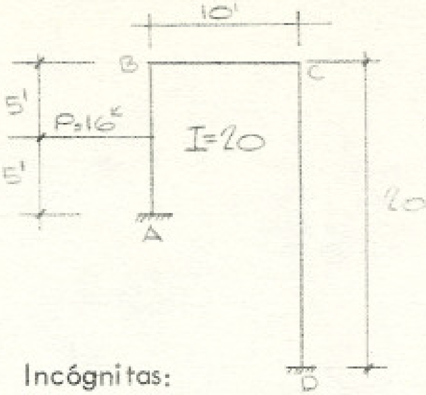


$$VAB = VBA = \frac{10+5}{20} = 0.75 \text{ Kip}$$

h) Diagramas de corte y de momentos y elástica



Ejemplo No. 2.



Incógnitas:

B

C

$$\left.\begin{matrix} RAB \\ RDC \end{matrix}\right\} R$$

Ecuaciones:

Junta en B

Junta en C

Σ F horizontales = 0

$$R_{AB} = \frac{6E\Delta}{L_{AB}} = \frac{6E\Delta}{10}$$

$$R_{CD} = \frac{6E\Delta}{L_{CD}} = \frac{6E\Delta}{20}$$

$$\frac{R_{AB}}{R_{CD}} = \frac{20}{10} = 2$$

$R_{AB} = 2\, R_{CD}$ Si $R_{CD} = R$

$R_{AB} = 2R$

$$K \text{ viga} = \frac{I}{L} = \frac{20}{10} = 2$$

$$K \text{ columna} = \frac{20}{20} = 1$$

$$K \text{ columna} = \frac{20}{10} = 2$$

$$M\,FAB = \frac{16 \times 10}{8} = 20 \text{ Kip-pie}$$

Ecuaciones:

Junta en B.

$$MBA + MBC = 0$$

$$MBA = 2B - 4R + 20$$

$$MBC = 2B + C$$

$$4B + C - 4R + 20 = 0 \qquad (1)$$

Junta en C.

$$MCB = 2C + B$$

$$MCD = C - R$$

$$3C + B - R = 0 \qquad (2)$$

haciendo cuerpos libres de

$$-H = + \frac{MAB + MBA}{10} - 8$$

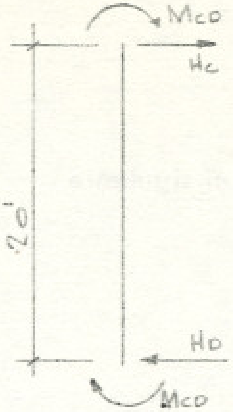
$$MAB = B - 4R - 20$$

$$MBA = 2B - 4R + 20$$

$$3B - 8R$$

$$HA = -0.3B + 0.8R + 8.0 \qquad (3)$$

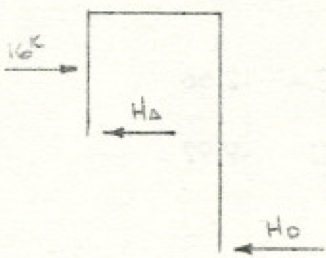
haciendo cuerpo libre de C - D.



$$-HD = \frac{MDC + MCD}{20}$$

$$HD = -0.075C + 0.1R \qquad (4)$$

hagamos un cuerpo libre total



$$H_A + HD = 16 \qquad \text{de (3) y (4)}$$

$$0.3B + 0.075C - 0.9R = -8.0 \quad (5)$$

en (1), (2) y (5) tenemos las 3 ecuaciones necesarias para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 4B + C - 4R &= -20.00 \\ B + 3C - R &= 0 \\ 0.3B + .075C - 0.9R &= -8.00 \end{aligned}$$

Notemos que éste es un sistema diagonal que podemos resolverlo por iteraciones sucesivas.

$$B = -5 - 0.25C + R$$

$$C = 0 - 0.33B + 0.33R$$

$$R = 8.89 + 0.33B + 0.082\,C$$

De las tres ecuaciones anteriores, obtenemos el siguiente resultado:

$$B = 5.37$$

$$C = 1.82$$

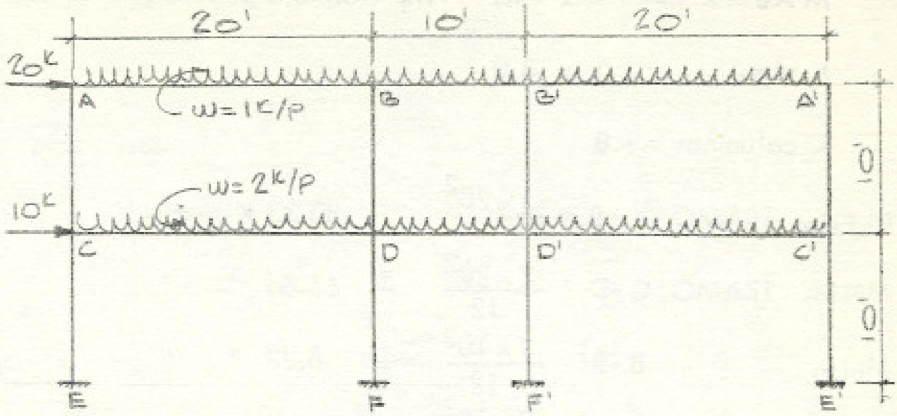
$$R = 10.83$$

Teniendo ya estos valores podemos encontrar los valores de momentos:

$MAB = -57.95$, $MBA = -12.58$, $MBC = 12.56$

$MCB = 9.01$, $MCD = 9.01$, $MDC = -9.92$

Ejemplo No. 3



I VIGAS = 30 p^4, I COLUMNAS = 18 p^4

Este problema puede ser separado en dos para trabajar lo más fácilmente, pero si se quisiera podría trabajarse en conjunto. Por fines didácticos lo resolveremos como sigue:

1. Sólo con carga vertical, ya que es simétrico y no sufre desplazamiento.
2. Sólo con cargas horizontales pues sí sufre desplazamiento horizontal.

1. Trabajando el caso sólo de carga vertical.

Incógnitas	Ecuaciones
$A = A^1$	Junta en A
$B = B^1$	Junta en B
$C = C^1$	Junta en C
$D = D^1$	Junta en D

$$M_{AB} = K\,(\Delta + B/2 - R) \pm M_F$$ (fórmula general)

K vigas = 1,5 y 3,0

K columnas = 1,8

$$M\ \text{Fijos TRAMO } A-B = \frac{1\times 20^2}{12} = \pm\ 33.33 \text{ Kip-pie}$$

$$M\text{Fijos TRAMO } C-D = \frac{2\times 20^2}{12} = \pm\ 66.66 \text{ '' ''}$$

$$M\text{Fijo '' } B-B^1 = \frac{1\times 10^2}{12} = \pm\ 8.33 \text{ '' ''}$$

$$M\text{Fijo '' } D-D^1 = \frac{2\times 10^2}{12} = \pm\ 16.66 \text{ '' ''}$$

Junta en A.

$$M_{AB} = 1.50\,\Delta + 0.75B - 33.33$$

$$\underline{M_{AC} = 1.80\,\Delta + 0.90C - 0.00}$$

$$M_A = 0 = 3.30\,\Delta + 0.75B + 0.90C - 33.33 \qquad (1)$$

Junta en B.

$$M_{BA} = 1.50\,B + 0.75\,A + 33.33$$

$$M_{BB^1} = 1.50\,B \qquad - 8.33 \qquad B = -B$$

$$\underline{M_{BD} = 1.80\,B + 0.90D}$$

$$M_B = 0 = 4.80\,B + 0.75\,\Delta + 0.90D + 25.00 \qquad (2)$$

Junta en C.

$$MCA = 1.80C + 0.90\Delta$$

$$MCE = 1.80C$$

$$MCD = 1.50C + 0.75D - 66.66$$

$$MC = 0 = 5.10C + 0.90\Delta + 0.75D - 66.66 \quad (3)$$

Junta en D.

$$MDB = 1.80D + 0.90B$$

$$MDF = 1.80D$$

$$MDC = 1.50D + 0.75C + 66.66$$

$$MDD' = 1.50D \qquad - 16.66 \qquad (D = -D')$$

$$MD = 0 = 6.60D + 0.90B + 0.75C + 50.00 \quad (4)$$

Tenemos ahora un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que son:

$$3.30\Delta + 0.75B + 0.90C + 0.00D - 33.33 = 0 \quad (1)$$
$$0.75\Delta + 4.80B + 0.00C + 0.90D + 25.00 = 0 \quad (2)$$
$$0.90\Delta + 0.00B + 5.10C + 0.75D - 66.66 = 0 \quad (3)$$
$$0.00\Delta + 0.90B + 0.75C + 6.60D + 50.00 = 0 \quad (4)$$

En el sistema anterior podemos ver que tenemos un sistema diagonal que puede ser resuelto por el método de iteraciones sucesivas.

$$A = 10.10 - 0.227B - 0.273C - 0.00D$$

$$B = -5.208 - 0.156A + 0.00C - 0.187D$$

$$C = 13.071 - 0.176A + 0.00B - 0.147D$$

$$D = 7.576 - 0.00A - 0.136B - 0.114C$$

Ya con las ecuaciones ordenadas en la forma necesaria para su resolución, procedamos a resolverlas.

A	1.000	-0.156	-0.176	0
B	-0.227	1.000	0	-0.136
C	-0.273	0	1.000	-0.114
D	0	-0.187	-0.147	1.000
K	10.100	-5.208	13.071	-7.576
	(10.100)	-1.576	-1.778	0.00
	1.540	(-6.784)	0	0.923
	3.083	-1.335	(11.293)	-1.287
	0	0	-1.506	(-7.940)
	(8.557)	1.4885	0	0
	1.148	(-5.058)	1.167	0.688
	-3.476	-1.212	(12.733)	-1.451
	0	0	-1.368	(-8.339)
	(7.772)	1.559	0	0
	1.103	(-4.861)	1.226	0.661
	-3.530	-1.197	(12.929)	-1.474
	0	0	-1.350	0
	(7.673)	(-4.837)	0	(-8.389)
	1.098	-1.195	1.223	0
	-3.536	0	(12.954)	0.656
	0	+1.570	-1.349	-1.477
	(7.662)	(-4.833)	0	(-8.397)
			1.234	0
			(12.956)	0.658
				-1.477
				(-8.395)

Comprobando los valores encontrados de:

A = 7.662   -B = 4.833

C = 12.956   -D = 8.395

Podemos ver que el error es despreciable.

Conociendo ya que nuestros valores son correctos, apliquémoslos en las ecuaciones necesarias para encontrar nuestros momentos:

MAB =	1.50x7.662+0.75(-4.833)-33.33	=	- 25.46	Kip-pie
MAC =	1.80x7.662+0.90(12.956)	=	25.45	"
MBA =	1.50(-4.833)+0.75x7.662+33.33	=	31.83	"
MBB =	1.50(-4.833) - 8.33	=	- 15.58	"
MBA =	1.50(-4.833)+0.90 (-8.395)	=	- 16.25	"
MCA =	1.80x12.956+0.90x7.662	=	30.22	"
MCE =	1.80x12.956	=	23.32	"
MCD =	1.50x12.956+0.75(-8.395)-66.66	=	-53.52	"
MDB =	1.80(-8.395)+0.90(-4.833)	=	- 19.46	"
MDF =	1.80(-8.395)	=	- 15.11	"
MDC =	1.50(-8.395)+0.75x12.956+66.66	=	63.78	"
MDD =	1.50(-8.395) -16.66	=	- 29.25	"

MEC = 11.66 Kip-pie
MFD = -7.55   "

Teniendo nuestros momentos por carga vertical, procedamos a encontrar los momentos por carga horizontal, sabiendo desde ya que nuestros momentos finales serán la suma de los dos.

2. Trabajando ahora para carga horizontal:

Recordemos que en este caso sí tenemos desplazamiento horizontal, al cual llamaremos G al nivel II y R al nivel I. No tenemos momentos fijos pero nuestro número de incógnitas se incrementará, así es que tendremos que hacer uso de una ecuación más que será

Incógnitas	Ecuaciones
A	Junta en A
B	Junta en B
C	Junta en C
D	Junta en D
R	= 0
G	

Nuestra fórmula general para el nivel II será:

$$MAB = K\left(A + {}^{B}/2 - G\right)$$

y para el nivel I, será:

$$MAB = K\left(A + {}^{B}/2 - R\right)$$

Todos los datos numéricos tales como K no varían, así que podemos aplicar ya la fórmula en cada nivel para encontrar nuestras ecuaciones. La variante que tendrá con respecto al problema de carga vertical es que tendremos desplazamiento horizontal causado por las cargas horizontales.

Ecuaciones a resolver

Junta en A

$$MAB = 1.50A + 0.75B$$
$$MAC = 1.80A + 0.90C - 1.80R$$

$$3.30A + 0.75B + 0.90C - 1.80R = 0$$

Junta en B

$$MBA = 1.50B + 0.75A$$
$$MBB = 4.50B$$
$$MBD = 1.80B + 0.90D - 1.80R$$

$$7.80B + 0.75A + 0.90D - 1.80R$$

Junta en C

$$MCA = 1.80C + 0.90A - 1.80R$$
$$MCE = 1.80C - 1.80G$$
$$MCD = 1.50C + 0.75D$$

$$5.10C + 0.75D + 0.90A - 1.80R - 1.80G$$

Junta en D

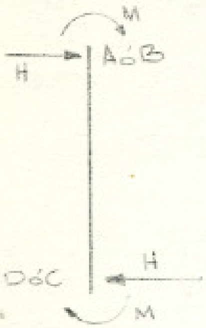
$$MDB = 1.80D + 0.90B - 1.80R$$
$$MDR = 1.80D - 1.80G$$
$$MDC = 1.50D + 0.75C$$
$$MDD = 4.50D$$

$$9.60D + 0.90B + 0.75C - 1.80R - 1.80G$$

Tenemos ya 4 ecuaciones y tenemos 6 incógnitas, pero conocemos la condición de que

$\Sigma F_{horizontales} = 0$

Haciendo cuerpo libre en el piso Nivel II.



$$-H_C L = 2.70A + 2.70C - 3.60R$$

$$-H_D L = 2.70B + 2.70C - 3.60R$$

$$\Sigma FH = 0$$

$$-\frac{F}{2} + HD + HC = 0$$

$$HD + HC = \frac{F}{2}$$

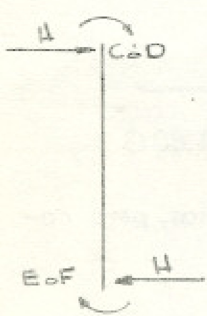
$$-L\,(HD + HC) = 2.70A + 2.70B + 2.70C + 2.70D - 7.20R$$

F para el nivel II tendrá un valor de 20K por lo que

$$\frac{F}{2} = 10$$

$$-100 = 2.70A + 2.70B + 2.70C + 2.70D - 7.20R$$

Cuerpo libre para nivel I.



$$-HEL = 2.70C - 3.60\,G$$
$$-HFL = 2.70C - 3.60\,G$$

$$-15 + HE + HF = \Sigma FH = 0$$

$$-150 = 2.70C + 2.70D - 7.20\,G$$

Tenemos ya un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas pudiendo ya resolver el sistema, resolución que se hará por el método de matrices. Estas matrices bien podrían invertirse en la máquina electrónica, pero para mostrar la forma de transformar en matriz diagonal, normalmente una matriz, lo haremos en este ejemplo.

Nuestra matriz inicial será:

$$\begin{bmatrix} 3.30+0.75+0.90+0.00-1.80-0.00 \\ 0.75+7.80+0.00+0.90-1.80-0.00 \\ 0.90+0.00+5.10+0.75-1.80-1.80 \\ 0.00+0.90+0.75+9.60-1.80-1.80 \\ 2.70+2.70+2.70+2.70-7.20-0.00 \\ 0.00+0.00+2.70+2.70-0.00-7.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ R \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100.oo \\ -150.oo \end{bmatrix}$$

la matriz diagonal quedará así:

$$\begin{bmatrix} 1.000+0.227+0.273+0.00-0.545-0.000 \\ 0\ +1.000-0.027+0.118-0.182-0.000 \\ 0\ +1.000+0.160-0.278-0.370 \\ 0\ +1.000-0.152-0.161 \\ 0\ +1.000-0.273 \\ 0\ +1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ R \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22.407 \\ 30.372 \end{bmatrix}$$

G = 30.372, R = 30.698, D = 9.556

C = 18.243, B = 4.952, A = 10.626

Operaciones necesarias para llegar a matriz diagonal.

Conociendo ya nuestros valores de las incógnitas, procedamos a calcular nuestros momentos:

MAB =	1.50x10.626+0.75x4.952	= 19.65 Kip pie
MAC =	1.80x10.626+0.90x18.243-1.80x30.698	= -19.71 "
MBA =	1.50x4.952+0.75x10.626	= 15.40 "
MBB =	4.50x4.952	= 22.28 "
MBD =	1.80x4.952+0.90x9.556-1.80x30.698	= -37.74 "
MCA =	1.80x18.243+0.90x10.626-1.80x30.698	= -12.86 "
MCE =	1.80x18.243-1.80x30.372	= -21.83 "
MCD =	1.50x18.243+0.75x9.556	= 34.53 "
MDB =	1.80x9.556+0.90x4.952-1.80x30.698	= -33.60 "
MDF =	1.80x9.556-1.80x30.372	= -37.47 "
MDC =	1.50x9.556+0.75x18.243	= 28.02 "
MDD =	4.50x9.556	= 43.00 "

MEC = 1.80 (9.12-30.372) = -38.25 Kip-pie
MFD = 1.80 (4.78-30.372) = -46.07 " "

Ya teniendo nuestros momentos por carga vertical y por carga horizontal, podemos poner un cuadro resumen que nos dará los momentos finales en la estructura ejemplo.

Escribiremos primero los de carga vertical, luego los de carga horizontal y por último el momento resultante. Ver lámina A.

Una forma rápida de comprobar si el marco está bien resuelto es la siguiente:

1.000	+ 10.400	+ 0.000	+ 1.200	− 2.400	− 0.00	= 0.000	
−1.000	− 0.227	− 0.273	− 0.000	+ 0.545	+ 0.000	= 0.000	
0	+ 10.173	− 0.273	+ 1.200	− 1.855	+ 0.000	= 0.000	
	+ 1.000	− 0.027	+ 0.118	− 0.182	+ 0.000	= 0.000	(2)

1.000	+ 0.000	+ 5.667	+ 0.833	− 2.000	− 2.000	= 0.000	
−1.000	− 10.400	+ 0.000	− 1.200	+ 2.400	− 0.000	= 0.000	
	− 10.400	+ 5.667	− 0.367	+ 0.400	− 2.000	= 0	
	− 1.000	+ 0.545	− 0.035	+ 0.038	− 0.192	= 0	
	+ 1.000	+ 0.027	+ 0.118	− 0.182	+ 0.000	= 0	
	0.000	+ 0.518	+ 0.083	− 0.144	− 0.192	= 0	
		+ 1.000	+ 0.160	− 0.278	− 0.370	= 0	(3)

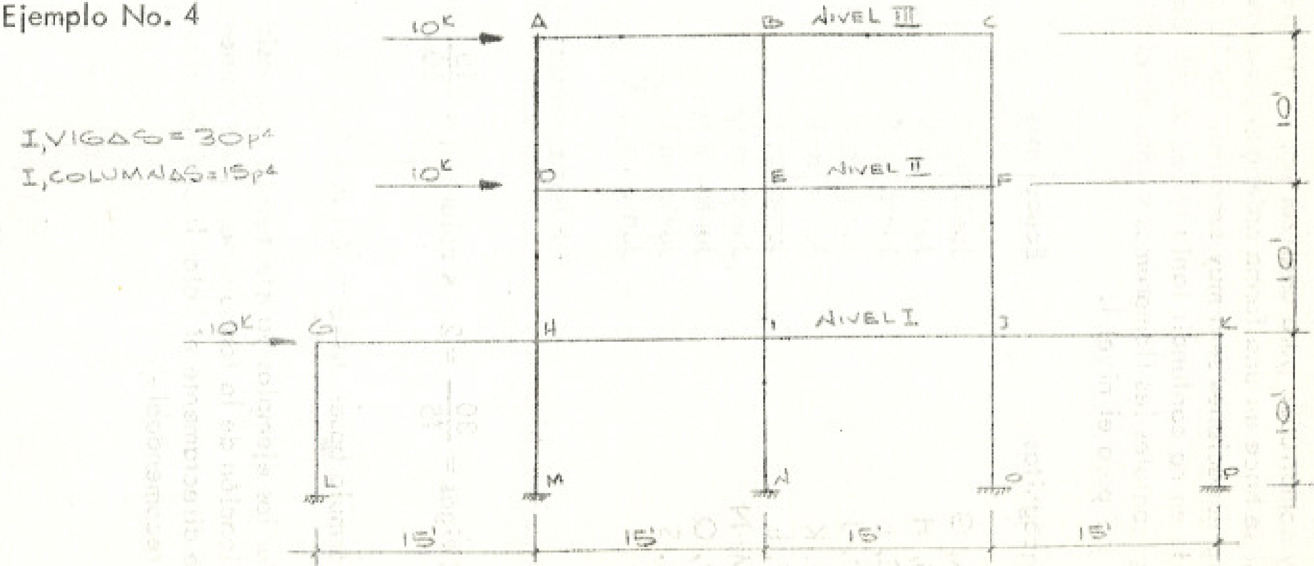
0.000	+ 1.000	+ 0.833	+ 10.667	− 2.000	− 2.000	= 0	
	− 1.000	+ 0.027	− 0.118	+ 0.182	+ 0.000	= 0	
	0	+ 0.860	+ 10.549	− 1.818	− 2.000	= 0	
		− 1.000	− 12.266	+ 2.114	+ 2.326	= 0	
		+ 1.00	+ 0.160	− 0.278	− 0.370	= 0	
		0	− 12.106	+ 1.836	+ 1.956	= 0	
			1.000	− 0.152	− 0.161	= 0	(4)

1.000	+ 1.000	+ 1.000	+ 1.000	− 2.667	− 0.000	= −37.037	
−1.000	− 0.277	− 0.273	− 0.000	+ 0.545	− 0.000	= 0	
	+ 0.773	+ 0.727	+ 1.000	− 2.122	− 0.000	= −37.037	
	1.000	+ 0.940	+ 1.294	− 2.745	− 0.000	= −47.913	
	− 1.000	+ 0.027	− 0.118	+ 0.182	− 0.000	= 0	
	0	+ 0.967	+ 1.176	− 2.563	− 0.000	= −47.913	
		+ 1.000	+ 1.216	− 2.650	− 0.000	= −49.548	
		− 1.000	− 0.160	+ 0.278	+ 0.370	= 0	
			+ 1.056	− 2.378	+ 0.370	= −49.548	
			+ 1.000	− 2.246	+ 0.350	= −46.920	
			− 1.000	+ 0.152	+ 0.161	= 0	
				− 2.094	+ 0.571	= −46.920	
				1.000	− 0.273	= +22.407	(5)

1.000	+ 1.000	− 0.000	− 2.667	= −55.556	
−1.000	− 0.160	+ 0.278	+ 0.370	= 0	
	+ 0.840	+ 0.278	− 2.383	= −55.556	
	1.000	+ 0.342	− 2.837	= −66.138	
	− 1.000	+ 0.152	+ 0.161	= 0	
		+ 0.494	− 2.676	= − 66.138	
		+ 1.000	− 5.417	= −133.826	
		− 1.000	− 0.273	= − 22.407	
			+ 5.144	= −156.233	
			1.000	= + 30.372	

a) Que la suma de momentos en todos los nudos sea cero.
b) Que la suma de cortes en cada piso sea igual a cero, o bien a la fuerza aplicada en cada piso. (En nuestro caso nos da con aproximación, debido al error que tuvimos en la resolución de las ecuaciones. Para lograr una exactitud mayor, las ecuaciones tendrían que trabajarse con siete decimales.)

Ejemplo No. 4



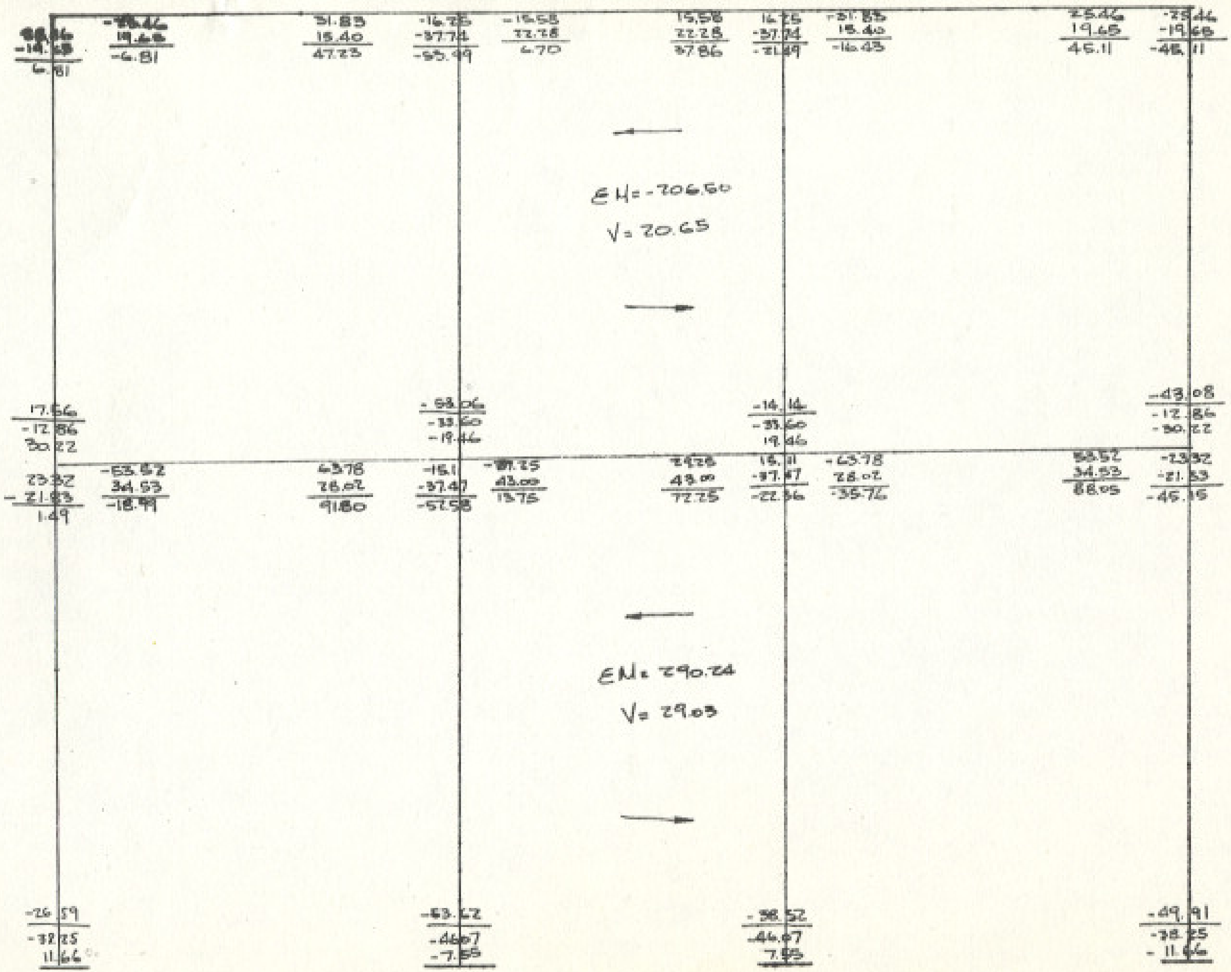
Este marco a simple vista nos puede dar la idea de que será muy complicado para analizar por pendiente deflexión, pero si se hace en una forma ordenada veremos que el plantear las ecuaciones será muy sencillo. Lo único es tener cuidado en no confundir tanta letra. A los desplazamientos horizontales les llamaremos R para nivel III, S para nivel II y T para el nivel I.

1. Incógnitas	Ecuaciones
A, G	Junta en A
B, H	Junta en B
C, I	Junta en C
D, J	Junta en D
E, K	Junta en E
F, L	Junta en F
M, N	Junta en G
P, Q	Junta en H
R, S	Junta en I
T	Junta en J, K
	ΣF horizontales = 0

2.
$$K\,\text{vigas} = \frac{30}{15} = 2 \qquad K\,\text{columnas} = \frac{15}{10} = 5$$

Fórmula base: $MAB = K\,(A + B/2 - R)$

3. Por los ejemplos ya efectuados no considero necesario la aplicación de la fórmula para cada momento; así es que pondré directamente el valor literal de ellas (aunque esto no es recomendable).



LAMINA Δ

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

Tenemos planteados aquí las 11 ecuaciones. Sin embargo, recordemos que tenemos 14 incógnitas, lo que nos indica que nos hacen falta 3 ecuaciones más, que son la suma de las fuerzas horizontales en cada piso. Estas ecuaciones pueden ser planteadas también fácilmente con sólo notar que la suma de momento en las columnas es igual a la fuerza por su brazo.

$$10 \times 10 + MAD + MDA + MBE + MEB + MCF + MFC = 0$$

$$\begin{aligned} MAD &= 1.50A + 0.75D - 1.50R \\ MDA &= 1.50D + 0.75A - 1.50R \\ MBE &= 1.50B + 0.75E - 1.50R \\ MEB &= 1.50E + 0.75B - 1.50R \\ MCF &= 1.50C + 0.75F - 1.50R \\ MFC &= 1.50F + 0.75C - 1.50R \end{aligned}$$

Para Nivel III:

$$2.25A+2.25B+2.25C+2.25D+2.25E+2.25F - 9.00R = -100$$

Para Nivel II:

$$2.25D+2.25E+2.25F+2.25H+2.25I+2.25J - 9.00S = -200$$

Para Nivel I:

$$2.25G+2.25H+2.25I+2.25J+2.25K - 15.00T = -300$$

Teniendo ya las 14 ecuaciones podemos pasar al siguiente paso que será su resolución.

Esta resolución se hará con calculadora electrónica, a continuación trataré de escribir, en una forma muy concisa cuales son las operaciones que se tienen que efectuar, para obtener la respuesta:

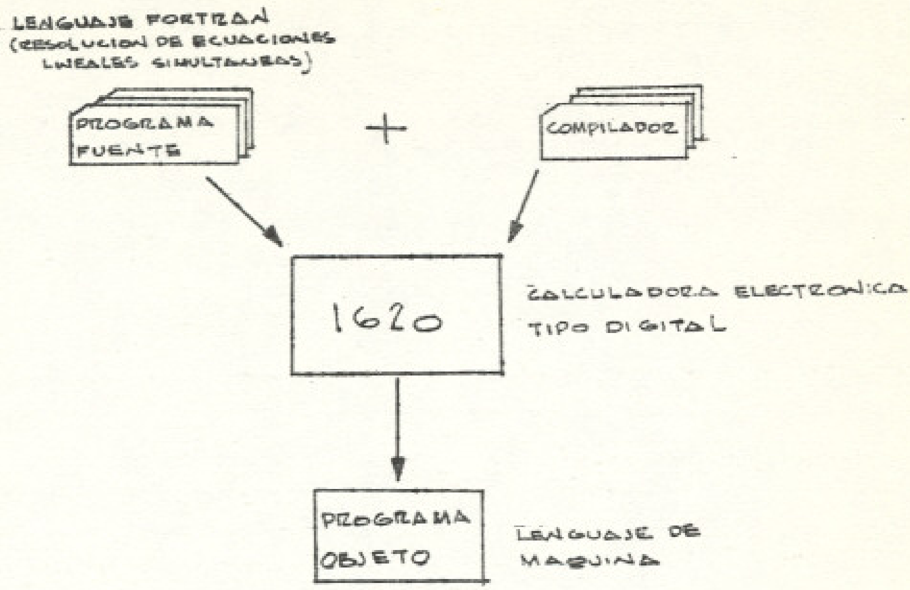
a) escribir las ecuaciones en forma matricial,
b) a la calculadora se le pone un programa fuente en -

Lenguaje Fortran, que nos dará, ya en lenguaje de máquina el programa objeto, para resolver ecuaciones lineales -ver dibujo 1- (programa ya existente en el centro de cálculo).

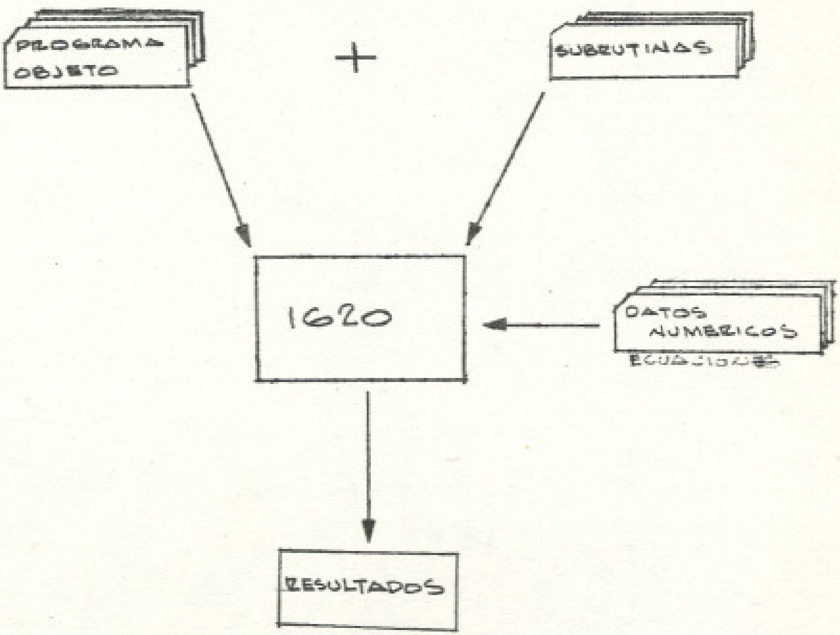
c) Luego con el programa objeto, y con las tarjetas de cada ecuación ya perforadas, se meten a la calculadora, obteniendo nuestros resultados, -ver dibujo 2-.

Quiero agradecer al centro de cálculo de la Facultad de Ingeniería la colaboración que me prestó para resolver estas ecuaciones.

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA



DIBUJO 1



DIBUJO 2

La calculadora electrónica nos proporcionó la siguiente respuesta:

A = 6.3766089	H = 9.8601952
B = 3.3459811	I = 10.605559
C = 6.3766093	J = 9.8601963
D = 15.216663	K = 8.8403718
E = 7.8939917	R = 24.717738
F = 15.216663	S = 39.385536
G = 8.8403714	T = 27.200997

Para encontrar el valor de nuestros momentos, usaremos solamente 2 decimales.

		Kip pie
Momento de	A - B = 2x6.38+335	= 16.11
	A - D = 1.5x6.38+0.75x15.22-15x24.72	= -16.10
	B - A = 2x3.35+6.38	= 13.08
	B - C = 2x335+6.38	= 13.08
	B - E = 1.5x3.35+0.75x7.89-1.5x24.72	= -26.14
	D - A = 0.75x6.38+1.50x15.22-1.50x24.72	= - 9.46
	D - H = 1.50x15.22+0.75x9.86-1.50x39.40	= -28.88
	D - E = 2.00x15.22+1.00x7.89	= 38.33
	E - B = 1.50x7.89+0.75x3.35-1.50x24.72	= -22.73
	E - I = 1.50x7.89+0.75x10.61-1.50x39.40	= -39.31
	E - D = 2.00x7.89+15.22	= 31.00

			Kip pie
Momento de	E - F	= 2.00x7.89+15.22	= 31.00
	G - H	= 2.00x8.84+1.00x9.86	= 27.54
	G - L	= 1.50x8.84-1.50x27.20	= -27.54
	H - D	= 1.50x9.86+0.75x15.22-1.50x39.40	= -32.90
	H - M	= 1.50x9.86-1.50x27.20	= -26.01
	H - G	= 2.00x9.86+1.00x8.84	= 28.56
	H - I	= 2.00x9.86+1.00x10.61	= 30.33

2.4 METODO DE CROSS

2.4.1 Generalidades:

El método de la distribución de momentos fue introducido por el profesor Hardy Cross en el año de 1924. La idea de la distribución de momentos atrajo inmediata atención. Durante años después de su introducción, los boletines de varias sociedades profesionales en los Estados Unidos, publicaron numerosos artículos sobre el método, muchos de los cuales presentaban por si mismos valiosas contribuciones. Lo anterior contribuyó a afinar el método para su estudio posterior. Ello es, por si solo, un notable tributo al espléndido maestro e ingeniero, gracias a cuya percepción se concibió el método.

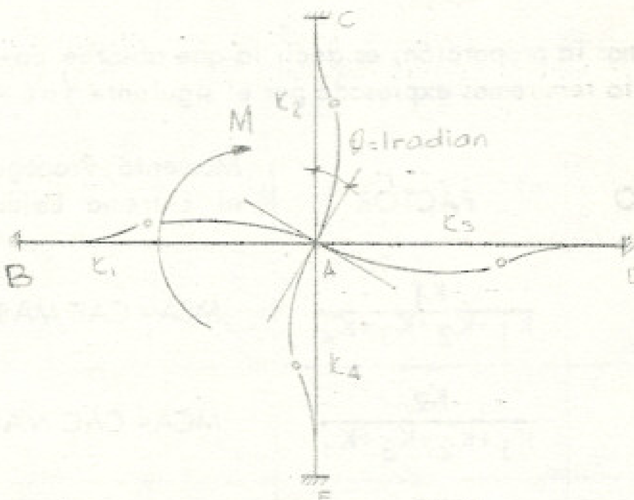
Algunos ingenieros consideran que la distribución de momentos constituye la mayor contribución individual que se haya hecho a la teoría del análisis de estruc -

turas hiper-estáticas. Esto naturalmente, es cuestión de opinión.

2.4.2 Conceptos básicos:

No debemos olvidar en ningún momento que para la aplicación de este método deben tenerse en cuenta los conceptos de rigidez absoluta, coeficiente de transmisión, ambos indicados en el punto 2.2. Además, las ecuaciones básicas aplicables son las de pendiente y flexión, resueltas directamente por el método de relajación.

2.4.3 Distribución de momentos en una junta:



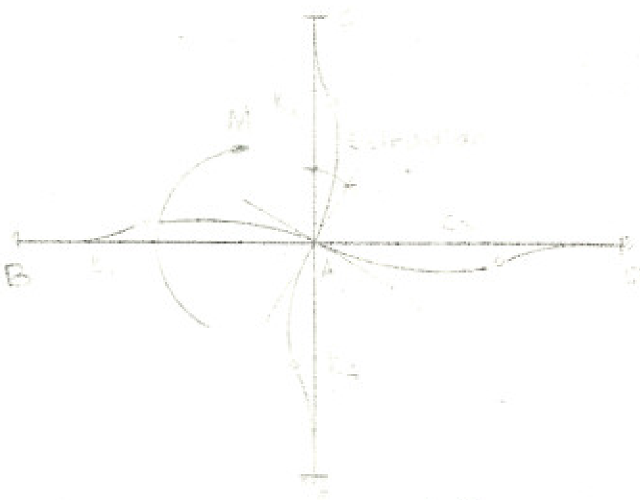
Supongamos que tomamos una junta A de cuatro miembros, cuyos extremos lejanos están empotrados. Vamos a aplicarle un momento externo "M", de manera que se produzca un giro unitario en A. En este caso en particular, por haber un giro unitario y existir las condiciones especiales de los puntos B, C, D, E (empotrados), esos momentos internos son iguales a las rigideces absolutas de los miembros, -

turas hiper-estáticas. Esto naturalmente, es cuestión de opinión.

2.4.2 Conceptos básicos:

No debemos olvidar en ningún momento que para la aplicación de este método deben tenerse en cuenta los conceptos de rigidez absoluta, coeficiente de transmisión, ambos indicados en el punto 2.2. Además, las ecuaciones básicas aplicables son las de pendiente y flexión, resueltas directamente por el método de relajación.

2.4.3 Distribución de momentos en una junta:



Supongamos que tomamos una junta A de cuatro miembros, cuyos extremos lejanos están empotrados. Vamos a aplicarle un momento externo "M", de manera que se produzca un giro unitario en A. En este caso en particular, por haber un giro unitario y existir las condiciones especiales de los puntos B, C, D, E (empotrados), esos momentos internos son iguales a las rigideces absolutas de los miembros, -

es decir, K_1, K_2, K_3, K_4.

$$MA = 0$$

$$M = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Si el momento extremo aplicado es mayor o menor que M, los momentos resultantes internos serán mayores o menores en forma proporcional, y por consiguiente, el giro será mayor o menor también en forma proporcional, siempre que no se exceda el límite proporcional.

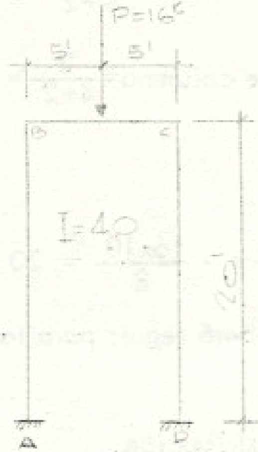
Lo anterior nos indica que al aplicar un momento externo en una junta, éste se distribuye proporcionalmente a las rigideces absolutas de los miembros.

Si establecemos la proporción, es decir la que absorbe cada miembro, lo tendremos expresado por el siguiente factor:

MOMENTO	FACTOR	Momento Propagado al Extremo Lejano
MAB	$\frac{K_1}{K_1+K_2+K_3+K_4}$	MBA= CAB MAB
MAC	$\frac{K_2}{K_1+K_2+K_3+K_4}$	MCA= CAC MAC
MAD	$\frac{K_3}{K_1+K_2+K_3+K_4}$	MDA= CAD MAD
MAE	$\frac{K_4}{K_1+K_2+K_3+K_4}$	MEA= CAE MAE
	$\frac{K}{\Sigma K}$	

Nótese que al distribuir los momentos en A, o al girar A, aparecen o se propagan momentos en los puntos B, C, D, E, cuyos valores podemos conocer por definición de coeficiente de transmisión (c). Entendido lo anterior, procedamos ahora a resolver el primer ejemplo.

Ejemplo No. 1



Con este ejemplo trataré de explicar la metodología de cálculo que se deberá seguir para resolver un pórtico rectangular, por el método del Profesor Hardy Cross.

a) Rigidez relativa:

Como en la ecuación de rigidez absoluta $\frac{4EI}{L}$, 4 E es una constante, trabajaremos únicamente con rigidez relativa.

$$K = \frac{I}{L} \qquad K\,viga = 40/10 = 4$$

$$K\,columna = 40/20 = 2$$

b) Factor de distribución:

Notemos que en A y en B los factores de distribución son iguales, y por lo tanto su valor será:

$$\text{Factor distribución de viga} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = 0.666$$

$$\text{Factor distribución de columna} = \frac{2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{0.333}{1.000}$$

c) Momentos fijos:

$$\pm \text{ Momentos Fijos} = \frac{16 \times 10}{8} = 20 \text{ Kip-pie}$$

d) Orden que se deberá seguir para la aplicación del método:

d. 1 primera distribución
d. 2 primera contribución
d. 3 segunda distribución
d. 4 segunda contribución
d. 5 tercera distribución
d. 6 tercera contribución, etc.

La suma de estos pasos, más el momento fijo, nos indican el valor del momento final.

Debe tenerse cuidado de obtener el valor del momento final hasta que se haya terminado el proceso, es decir, después de la operación de contribución y nunca cuando se esté efectuando la operación de distribución.

e) Convención de signo:

La convención de signos a usarse deberá ser la siguiente:

Momentos positivos: los que su sentido sea el de las agujas de un reloj.

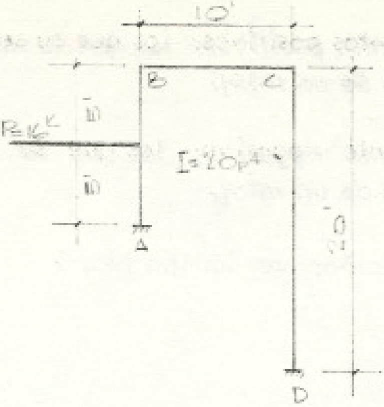
Momento negativo: los que su sentido sea al de las agujas de un reloj.

f) Resolución: ver lámina No. 1

*

* *

Ejemplo No. 2



Este ejemplo lo tendremos que trabajar en dos pasos, a saber:

M) rotación de juntas

M^1) traslación de juntas

Es necesario efectuar estos dos pasos, ya que sabemos que el método del profesor Hardy Cross no nos ofrece un medio para trabajar los dos pasos juntos. En este caso, por tener carga horizontal, sabemos que el marco no sólo rotará sino que se desplazará horizontalmente. A continuación se estudiará la solución:

M) Para efectuar este paso, imaginemos que colocamos en el punto C_x un tope horizontalmente, permitiéndonos únicamente la acción de rotación, que es un problema fácil de resolver. La acción de rotación la encontramos al sumar los cortes en las columnas, que es el valor que tendrá nuestro tope (llamémoslo F).

M^1) Luego efectuamos el paso de traslación, en función de

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

la rigidez de las columnas, encontrando también aquí un valor de suma de cortes (llamémoslo V).

Ahora bien, si el valor de F lo igualamos al valor de V, multiplicado por cierto factor "f", podremos encontrar el valor de f con una simple división. Si los momentos del paso M^1) los multiplicamos por el valor f, y los sumamos a los momentos del paso M, habremos encontrado los momentos finales en el marco.

La comprobación será que la suma de cortes en las columnas sea igual a la carga aplicada, y además, que los nudos están en equilibrio.

Resolución:

a) Rigidez relativa:

$$K\,\text{viga} = \frac{20}{10} = 2$$

$$K\,\text{columna corta} = \frac{20}{10} = 2$$

$$K\,\text{columna larga} = \frac{20}{20} = 1$$

b) Factores de distribución:

En B : $\frac{2}{4} = 0.5$ para viga y columna

En C : $\frac{2}{3} = 0.670$ para la viga

$\frac{1}{3} = 0.33$ para la columna

c) Momento fijo:

$$M_F = \frac{PL}{8} = \frac{16 \times 10}{8} = 20$$

d) Resolviendo el paso M (ver lámina Nº 2).

Encontremos el valor de F por suma de cortes.

$$MB = -25.45 + 10VA - 80 + 9.09 = 0$$

$$VA = 9.636$$

$$MC = 0.91 - 20V0 + 1.82$$

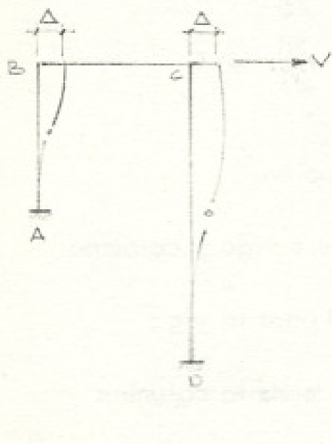
$$VA = 0.137$$

$$F = 0.137 - 9.636 + 16.00$$

$$F = 6.501 \text{ Kip.}$$

(nótese que se confirma que el marco sufre desplaza - miento horizontal)

Efectuemos ahora el paso M^1.



momentos fijos para trabajar:

$$MAB = MBA = K_1 \frac{6E\Delta}{L}$$

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

$$MCD = MDC = K_2 \frac{6E\Delta}{L} \quad \therefore \quad \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{20 \times 2}{10 \times 1} = 4$$

Si MAB= 40 MCD = 10

Con estos momentos fijos trabajaremos el siguiente paso. (Ver lámina Nº 3).

Encontremos el valor de V por suma de cortes:

VA = 5 Kip.
VD = 1 Kip.
V = 5+1 = 6 Kip.

Tendremos la siguiente ecuación:

$$M = f\, M'$$

$$f = \frac{M}{M'} = \frac{6.501}{6.00} = 1.0834$$

Sabemos ya cual será el valor de nuestros momentos fina - les, y no es más que la suma de los momentos del paso M más los del paso M^1 multiplicados por el factor f.

Valores de los momentos del paso $M^1 \times f$:

MAB = -32.505 MBC = 21.67 MCD = -10.835

MBA = -21.670 MCB = 10.835 MDC = -10.84

Tenemos ya estos valores que, sumados a los del paso M nos darán los momentos finales que tienen los valores si -

MAB = -57.96

MBA = 12.58

MBC = -12.58

MCB = 9.01

MCD = - 9.01

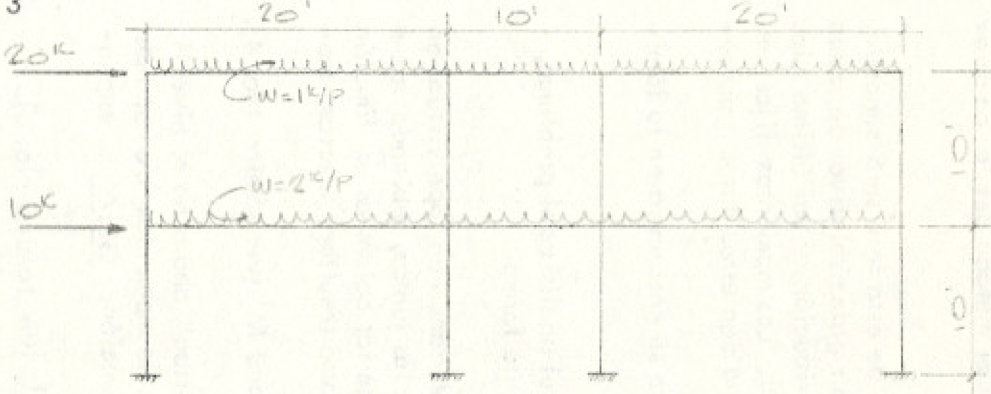
MDC = - 9.93

.50	.50	.670	.330
-40.00	0	0	-10.00
20.00	20.00	6.70	3.30
0	3.35	10.00	0
-1.67	+1.67	-6.70	-3.30
0	-3.35	-0.83	0
1.67	1.67	0.56	+0.28
0	0.28	0.83	0
-0.14	-0.14	-0.56	-0.28
0	-0.28	-0.07	0
-20.00	+20.00	10.00	-10.00

	-10.00
-30.00	-0.14
+ 0.83	0.14
- 0.83	-1.67
10.00	+1.67
-30.00	-10.00

LAMINA Nº 3

Ejemplo No. 3



I para vigas = 30

L para columnas = 18

Para la solución de este problema se dividirá en 3 pasos que son:

a) solución para carga vertical
b) solución para cargas horizontales
c) momentos finales, suma de a + b

a) La solución de esta fase del problema no presenta ninguna dificultad. Si estudiamos detenidamente el marco notaremos que éste es simétrico, por lo que no sufrirá desplazamiento horizontal por carga vertical. A este caso sí puede ser aplicado directamente el método del profesor Hardy Cross.

La metodología de solución de esta fase será sencilla, ya que encontraremos primero la rigidez relativa de cada miembro, luego el factor de distribución, y por último los momentos fijos por carga vertical. Los momentos fijos no son más que el valor $\frac{WL^2}{12}$ y ya con estos datos procedemos a la solución, solución que se encuentra en la lámina No. 4.

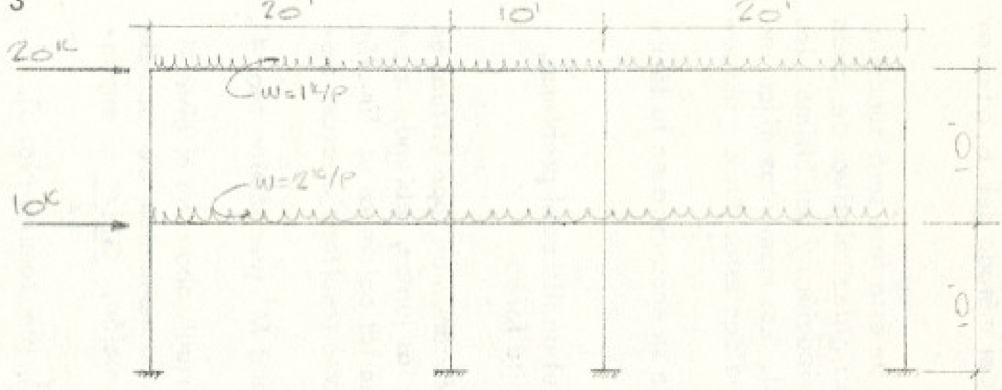
b) Esta es la fase compleja en el análisis del problema, - la cual se efectuará en la siguiente forma:

1. Se trabajará primero colocando un tope virtual en el nivel I. Luego rotaremos las juntas, sabiendo que el valor de momentos fijos en las columnas es función de $\frac{6EI\Delta}{L^2}$. Esto nos dará como resultado ciertos momentos a los cuales llamaremos M^{I} (ver lámina No. 4).

2. Si colocamos un tope virtual, ahora en el nivel II, y efectuamos la distribución de momentos colocando también momentos fijos en función, $\frac{6EI\Delta}{L^2}$, encontraremos otros momentos M^{II}, (ver lámina No. 5).

Si con los valores encontrados de M^{I} y M^{II} procedemos a encontrar los cortes en las columnas para cada caso, podremos plantear las ecuaciones necesarias para encontrar los factores de cada piso. Si estos factores de piso los mul-

Ejemplo No. 3



I para vigas = 30

L para columnas = 18

Para la solución de este problema se dividirá en 3 pasos que son:

a) solución para carga vertical

b) solución para cargas horizontales

c) momentos finales, suma de a + b

a) La solución de esta fase del problema no presenta ninguna dificultad. Si estudiamos detenidamente el marco notaremos que éste es simétrico, por lo que no sufrirá desplazamiento horizontal por carga vertical. A este caso sí puede ser aplicado directamente el método del profesor Hardy Cross.

La metodología de solución de esta fase será sencilla, ya que encontraremos primero la rigidez relativa de cada miembro, luego el factor de distribución, y por último los momentos fijos por carga vertical. Los momentos fijos no son más que el valor $\frac{WL^2}{12}$ y ya con estos datos procedemos a la solución, solución que se encuentra en la lámina No. 4.

b) Esta es la fase compleja en el análisis del problema, la cual se efectuará en la siguiente forma:

1. Se trabajará primero colocando un tope virtual en el nivel I. Luego rotaremos las juntas, sabiendo que el valor de momentos fijos en las columnas es función de $\frac{6EI\Delta}{L^2}$. Esto nos dará como resultado ciertos momentos a los cuales llamaremos M^I (ver lámina No. 4).

2. Si colocamos un tope virtual, ahora en el nivel II, y efectuamos la distribución de momentos colocando también momentos fijos en función, $\frac{6EI\Delta}{L^2}$, encontraremos otros momentos M^{II}, (ver lámina No. 5).

Si con los valores encontrados de M^I y M^{II} procedemos a encontrar los cortes en las columnas para cada caso, podremos plantear las ecuaciones necesarias para encontrar los factores de cada piso. Si estos factores de piso los multiplicamos por sus respectivos momentos y los sumamos, tendremos encontrado los momentos por carga horizontal.

A continuación las fórmulas para encontrar los factores:

$$V' + V''_A = F \text{ piso superior}$$

$$V'_B + V''_B = F \text{ piso inferior}$$

Si vemos las láminas Nos. 5 y 6, en las cuales se encuentran hechos los correspondientes pasos A y B y en las cuáles a su vez se encuentran los valores de sus cortes correspondientes, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$9.10\,A - 2.34\,B = 20$$

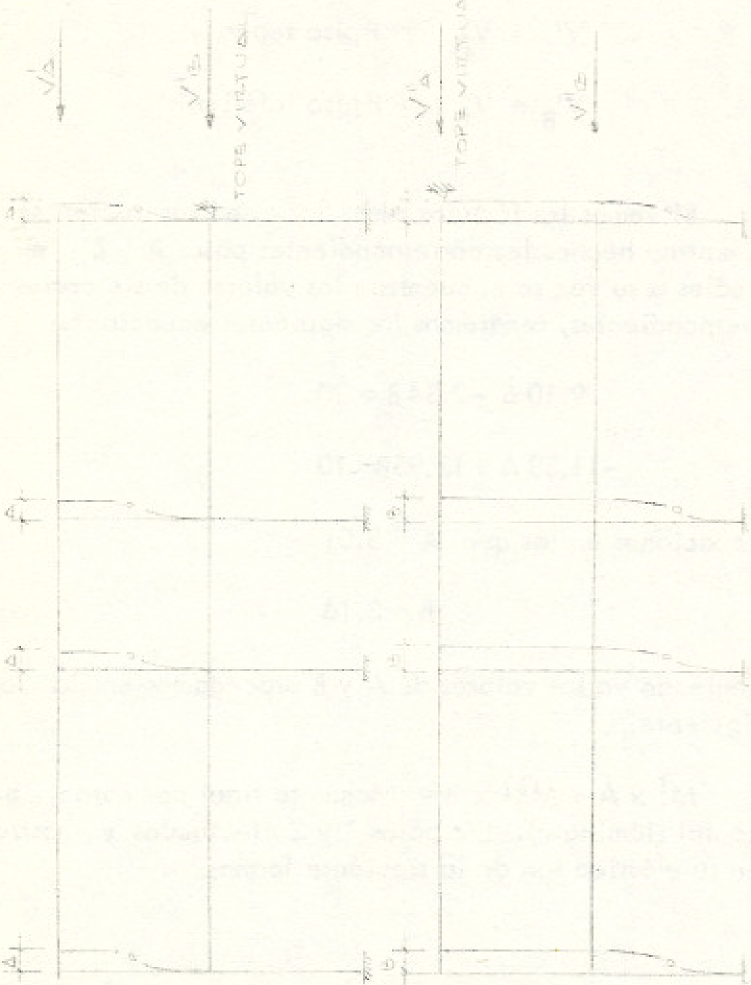
$$-11.33\,A + 13.95\,B = 10$$

ecuaciones en las que $A = 3.01$

$B = 3.16$

Teniendo ya los valores de A y B procedamos en la forma siguiente:

$M^{1} \times A + M^{11} \times B =$ Momento final por carga horizontal (lámina 6). Los pasos 1 y 2 efectuados y mostrados en su elástica son de la siguiente forma:


TOPE VIRTUAL
TOPE VIRTUAL

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

Los valores de momentos fijos serán:

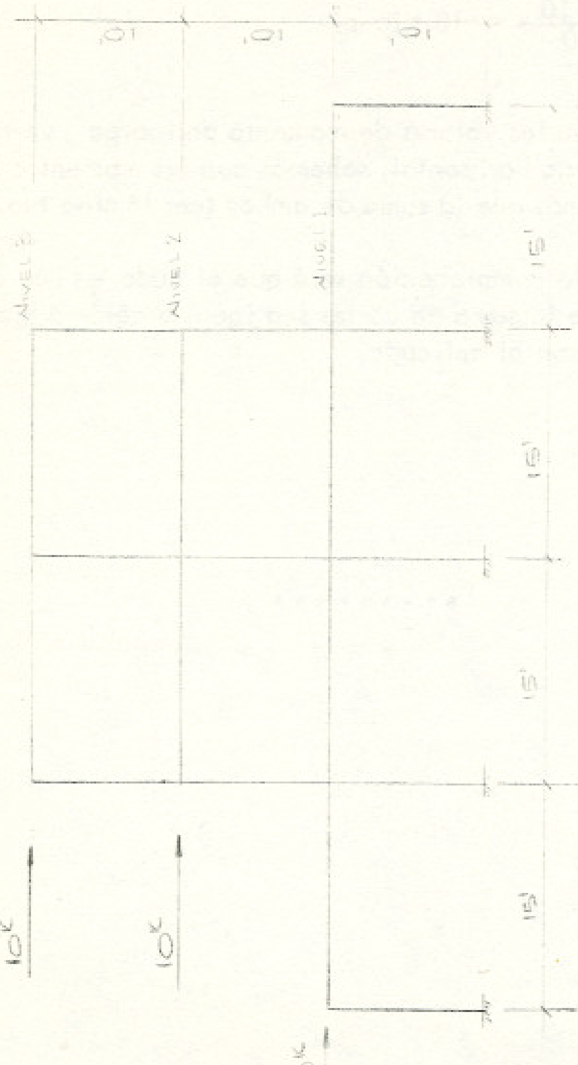
$$M = \frac{GI\Delta E}{L^2} \qquad Si\ \frac{GE\Delta}{L^2} = \text{constante} = 10$$

$$M = \frac{18 \times 10}{10} = 18 \text{ Kip-pie}$$

c) Teniendo ya los valores de momento por carga vertical y los de carga horizontal, sabemos que los momentos finales no serán más que la suma de ambos (ver lámina No.7).

De nuevo la comprobación será que el nudo esté en equilibrio y que la suma de cortes sea igual a cero; o bien, a la carga horizontal aplicada.

* * * * * * * * * * *



I = Columnas = 15

I vigas = 30

Para la resolución de este problema recordemos lo dicho en el ejemplo 3 para cargas horizontales. Es decir, que tendremos que efectuar una serie de distribución de momentos, uno para cada piso (nivel) en particular. Teniendo ya los valores de los momentos, causados por cada desplazamiento horizontal, podremos plantear las siguientes ecuaciones:

$$V_1 A + V_1 B + V_1 C = -10$$

$$V_2 A + V_2 B + V_2 C = -10$$

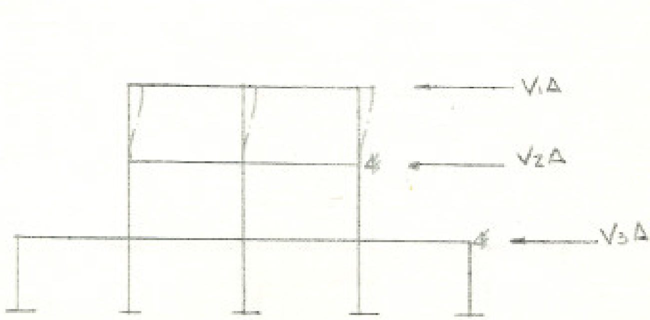
$$V_3 A + V_3 B + V_3 C = -10$$

Resolviendo este sistema encontramos los valores de A, B, C que, multiplicados por sus correspondientes momentos y sumados, nos dan los valores de momentos finales.

Desarrollo:

a) Los factores de distribución no serán más que $\frac{K}{\Sigma K}$

b) El primer paso de distribución de momentos a realizar, será el siguiente:



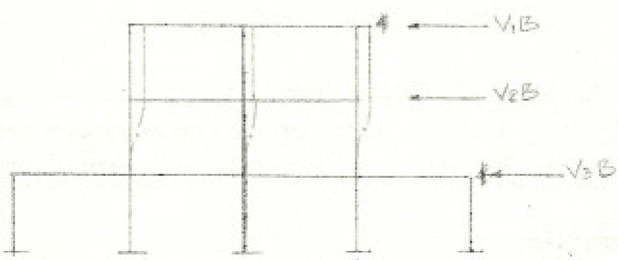
Los momentos fijos a aplicarse en las columnas

$$M = \frac{6\,EI\triangle}{L^2} \qquad Si \quad \frac{6\,E\triangle}{L} = 10$$

$$M = \frac{15 \times 10}{10} = 15 \text{ Kip-pie}$$

Este paso se encuentra resuelto en lámina No. 8.

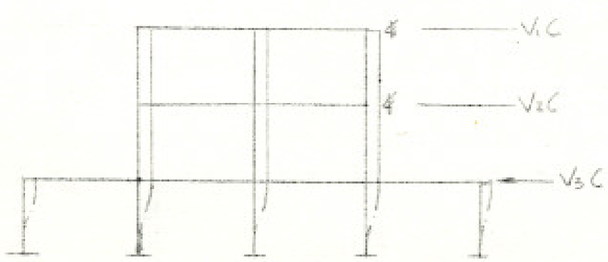
c) Segundo paso



Momentos fijos a aplicarse = 15 Kip-pie.

Este paso se encuentra resuelto en lámina No. 9.

d) Tercer paso



Momentos fijos = 15 Kip-pie.

Este paso se encuentra resuelto en lámina No. 10.

e) Teniendo ya resueltos los 3 pasos y encontrados nuestros valores de corte, planteamos ahora las siguientes ecuaciones:

$$-5.59\,A + 1.34B - 0.03\,C = -10.00$$
$$6.93\,A - 7.47B + 1.01\,C = -10.00$$
$$-1.35\,A + 7.52B - 13.16C = -10.00$$

ecuaciones en las que $A = 2.82$

$B = 4.35$

$C = 2.96$

Ya con estos valores, procedamos a multiplicarlos por sus correspondientes valores de momentos, los cuales sumados nos darán los valores de momento final (ver lámina No. 11).

Para terminar, deseo hacer ciertas aclaraciones al respecto de este problema:

1. Se trabajará cada paso únicamente con 3 distribuciones, lo cual puede arrojar error en el cierre de los nudos y en los valores de corte. Sin embargo, se ha tomado el valor de momento en la columna y se ha corregido lo de las vigas.

2. Debido a la aproximación en el método, el error en los cortes es cercano al 10%.

3. Los momentos finales no son más que el producto de

$$M_A\,A + M_B\,B + M_c\,C = \text{Momento Final}$$

4. **Si analizamos de nuevo el ejemplo 3 y este ejemplo, podremos lograr una regla para trabajar problemas por el método de la distribución de momentos, cuando estos sufran desplazamientos horizontales.**

La regla será la siguiente:

Tendrá que efectuarse un paso por cada piso que tenga el marco por analizar. Se deberán encontrar los valores de los momentos y luego los valores de cortes; plantear las ecuaciones que sean necesarias, determinar luego los valores de los factores y multiplicarlos por sus respectivos momentos. La suma de estos nos dará el momento final.

2.5.4 Para poder simplificar al proceso de traslación, el profesor Morris, nos ofrece una variante del método de Cross, y es la que une el proceso de rotación con el de traslación.

Las operaciones a efectuarse son las siguientes:

a) Momentos fijos,
b) efectuar la primera distribución,
c) efectuar la primera contribución,
d) en este momento comprobamos si nuestra suma algebraica de fuerzas horizontales son iguales a cero,
e) si la suma de fuerzas horizontales, no son iguales a cero, se agregan momentos correctivos que se distribuyen proporcionalmente, a las rigideces de las columnas, haciendo la suma de fuerzas horizontales iguales a cero. Es esta la corrección de Morris que corresponde a la traslación de juntas,
f) efectuaremos de nuevo la distribución, y conti-

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

nuaremos con el proceso en el número de pasos que queramos.

Al aplicar esta variante notaremos que la convergencia es demasiado lenta, para corregir esto hacemos uso de la operación de sobre relajar, que nos puede acortar el proceso y darnos una solución rápida.

2.5 METODO DE KANI

2.5.1 Generalidades

El método del profesor G. Kani es de reciente introducción al campo de análisis de estructuras en Guatemala. Sobre todo, es reciente su introducción en el curso de resistencia de materiales.

Este método no es más, por decir así, que una nueva concepción de la forma de resolver directamente las ecuaciones de pendiente y flexión, por el método de iteraciones sucesivas. Este método nos permite, como vimos anteriormente, resolver las ecuaciones en cualquier orden, sin seguir un orden como el que debemos aplicar en el método de relajación (Hardy Cross).

Inicialmente se resolverán tres ejemplos sencillos que considero nos permitirán el estudio del método y su aplicación a problemas más complejos, tales como lo serán los problemas No. 4 y No. 5.

2.5.2 Despejamos la fórmula de Kani partiendo de la -- ecuación base de Pendiente Deflexión y de rigidez transferida.

Ecuación base de Pendiente Deflexión

$$MAB = KAB\,(A + B/2 - R) \pm MF_{AB}$$

$$MAB = \frac{I}{L}\left(4E\theta A + 2E\theta B - 6E\frac{\Delta}{L}\right) + MF_{AB}$$

$$MAB = 2.x\ 2E\frac{I}{L}\theta_A + 2E\frac{I}{L}\theta B + MF_{AB} - \frac{6E\Delta I}{L^2}$$

Si no hay desplazamiento $\frac{6.EI\Delta}{L^2} \longrightarrow 0$

$\frac{2EI}{L}$ = rigidez transferidad = C. $4E\frac{I}{L}$

$$K^T_{AB} = \frac{2EI}{L}$$

$$MAB = 2K^T\theta_A + 2K^T\theta B + MF$$

Ahora bien

$K^T_{AB}\theta_A = M'_{AB}$ o sea la influencia de momento debido al giro en el punto extremo.

$K^T_{BA}\theta B = M'_{BA}$ influencia de momento debido al giro en el otro extremo.

Si son varios miembros tendremos:

$MAB = 2\ M'AB + M'BA + MFAB$ . . . . (1)

$MAC = 2\ M'AC + M'CA + MFAC$

$MAD = 2\ M'AD + M'DA + MFAD$

Si hacemos suma de momentos igual a cero en A tendremos

$$0 = 2 \sum_A M'AB + \sum_A M'BA + \sum_A MFAB$$

despejando $\sum_A M'AB$ y sabiendo que $\sum_A MFAB = \overline{M}_A$ = al momento de sujeción en A

$$\sum_A M'BA = -1/2 \left(\overline{M}A + \sum_A M'AB \right) \quad (2)$$

Si recordamos que:

$$\sum M'AB = \sum K^T_{AB} \theta_A = \theta_A \sum K^T \qquad (3)$$

lo que nos da los momentos proporcionales a K^T

Tendremos en resumen:

a) En la fórmula (2) se desconoce $\sum M'AB$; para encontrarlo resolvamos por iteraciónes sucesivas (influencia de giro en el extremo).

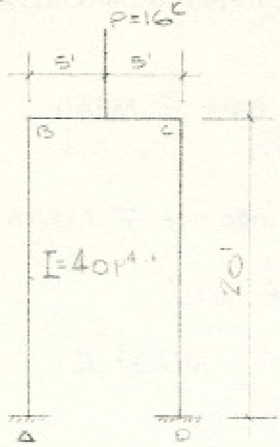
b) Se encuentra el valor de $\sum_A M'AB$ y para cada miembro establecemos proporción.

c) Se repiten los ciclos de iteración.

d) Al tener nuestra última iteración se aplica la ecuación (1).

Veamos ahora el primer ejemplo con el que considero se entenderá mejor todo lo expuesto anteriormente.

Ejemplo No. 1



1. $K = \frac{I}{L}$ $\quad$ $K \text{ columna} = \frac{40}{20} = 2$

$$K \text{ viga} = \frac{40}{10} = 4$$

2. Momentos fijos

$$\frac{PL}{8} = \frac{16 \times 10}{8} = 20 \text{ Kip-pie}$$

3. Factores de distribución

DE A a B = 0

" D a C = 0

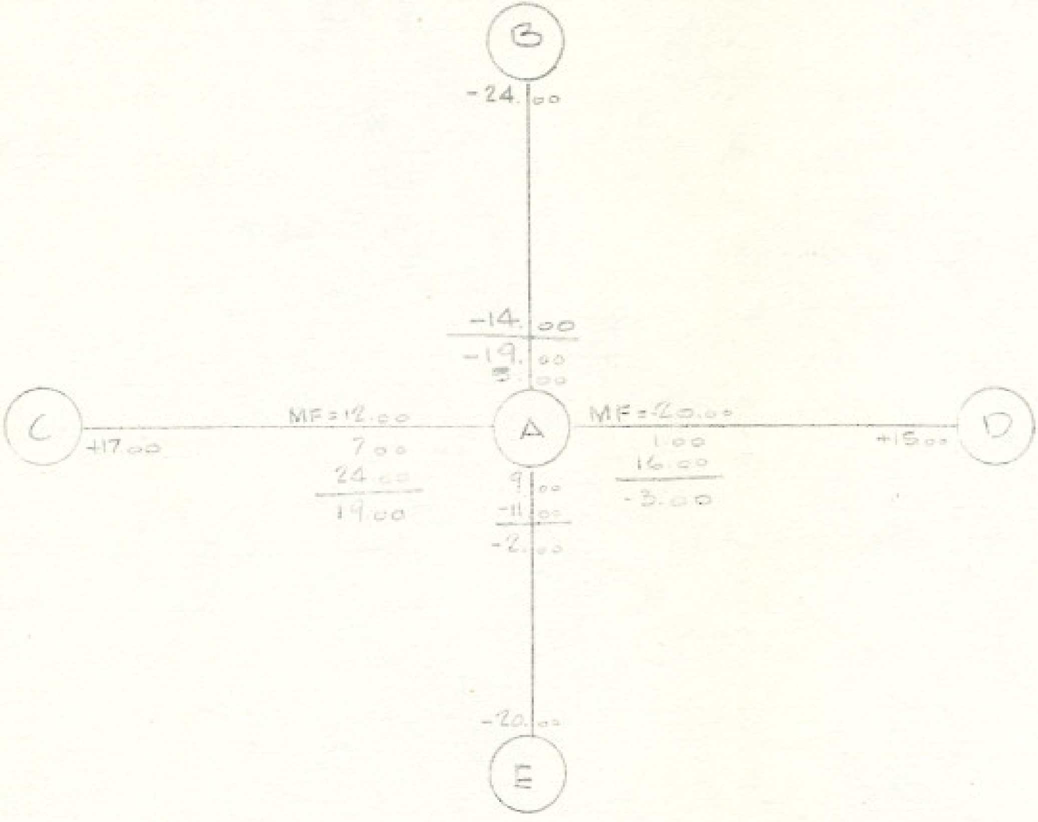
" B a C = $-1/2 \times 4/6 = -0.333$

" C a B = $-1/2 \times 4/6 = -0.333$

" B a A = $-1/2 \times 2/6 = -0.167$ = DE C a D

4. Solución: ver lámina No. 11.

La regla que hemos escrito en la solución del ejemplo No. 1 es aplicable a todos los casos, aún en nudos complicados. Veamos, por ejemplo, el siguiente nudo para el cual consideramos que los números apuntados son ya la última iteración.



Momento final de A a B = 5.00+ (-24.00+5.oo) = -14.00

" " " A a C = 7.00+ (7.oo + 17.oo) - 12.00 = +19.00

" " " A a D = 1.00+ (1.oo + 15.oo) -20.00 = - 3.00

" " " A a E = 9.00+ (9.oo - 20.oo) = - 2.00

nuaremos con el proceso en el número de pasos que queramos.

Al aplicar esta variante notaremos que la convergencia es demasiado lenta, para corregir esto hacemos uso de la operación de sobre relajar, que nos puede acortar el proceso y darnos una solución rápida.

2.5 METODO DE KANI

2.5.1 Generalidades

El método del profesor G. Kani es de reciente introducción al campo de análisis de estructuras en Guatemala. Sobre todo, es reciente su introducción en el curso de resistencia de materiales.

Este método no es más, por decir así, que una nueva concepción de la forma de resolver directamente las ecuaciones de pendiente y flexión, por el método de iteraciones sucesivas. Este método nos permite, como vimos anteriormente, resolver las ecuaciones en cualquier orden, sin seguir un orden como el que debemos aplicar en el método de relajación (Hardy Cross).

Inicialmente se resolverán tres ejemplos sencillos que considero nos permitirán el estudio del método y su aplicación a problemas más complejos, tales como lo serán los problemas No. 4 y No. 5.

2.5.2 Despejamos la fórmula de Kani partiendo de la ecuación base de Pendiente Deflexión y de rigidez transferida.

Ecuación base de Pendiente Deflexión

$$MAB = KAB\,(A + B/2 - R) \pm MF_{AB}$$

$$MAB = \frac{1}{L}\left(4E\theta A + 2E\theta B - 6E\frac{\Delta}{L}\right) + MF_{AB}$$

$$MAB = 2.x\ 2E\frac{I}{L}\theta_A + 2E\frac{I}{L}\theta B + MF_{AB} - \frac{6E\Delta I}{L^2}$$

Si no hay desplazamiento $\frac{6 \cdot EI\Delta}{L^2} \longrightarrow 0$

$\frac{2EI}{L}$ = rigidez transferidad = C. $4E\frac{I}{L}$

$$K^T_{AB} = \frac{2EI}{L}$$

$$MAB = 2K^T\theta_A + 2K^T\theta B + MF$$

Ahora bien

$K^T_{AB}\theta_A = M'_{AB}$ o sea la influencia de momento debido al giro en el punto extremo.

$K^T_{BA}\theta B = M'_{BA}$ influencia de momento debido al giro en el otro extremo.

Si son varios miembros tendremos:

$$MAB = 2\,M'AB + M'BA + MFAB \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

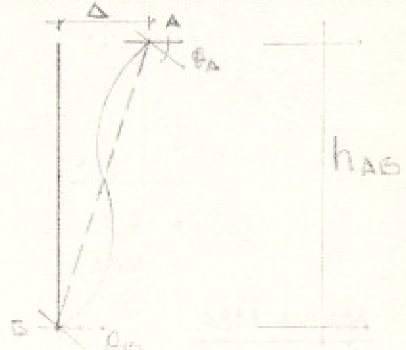
$$MAC = 2\,M'AC + M'CA + MFAC$$

$$MAD = 2\,M'AD + M'DA + MFAD$$

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

2.5.3

Vamos a proceder a ver a continuación los pórticos con nudos desplazables en sentido horizontal,



Cuando los nudos de una estructura se desplazan además de girar, podremos descomponer la deformación de la barra vertical de la siguiente manera:

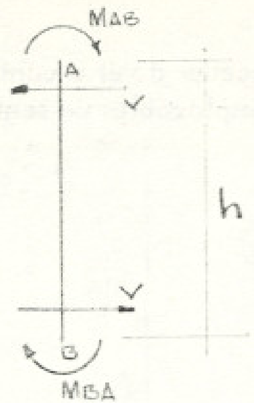
1) Los extremos A - B se desplazan entre ellos un valor Δ, sin que dichos extremos experimenten un nuevo giro.

Si tomamos en cuenta que los pasos son iguales a los de una estructura con nudos no desplazables, bastará agregar el paso 1, a la fórmula ya conocida y nos quedará así:

$$MAB = MFAB + 2\ M'AB + M'BA + M''AB$$

Para poder determinar el valor $M^{11}AB$, hagamos lo siguiente:

Si tenemos una columna en la cual sabemos que el valor del corte es igual a $\frac{\varepsilon N}{h}$ tendremos:



$$V = - \frac{MAB + MBA}{h}$$

$$V = - \frac{1}{h} (2\,M'AB + M'BA + M''AB + 2\,M'BA + M'AB + M''AB)$$

Sabemos que para que un marco esté en equilibrio, la suma de sus cortes tiene que ser igual a cero.

$$\varepsilon V = 0 = - \frac{1}{h} \varepsilon (2M'AB + M'BA + M''AB + 2M'BA + M'AB + M''BA)$$

de donde

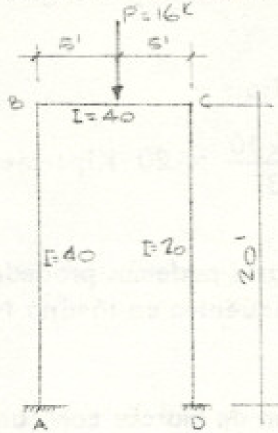
$$\varepsilon M''AB = - \frac{3}{2} \varepsilon (M'AB + M'BA)$$

Esta nueva fórmula nos permite conocer las influencias del desplazamiento de la columna, por medio de la suma de las influencias en la cabeza de las mismas. La influencia se repartirá proporcionalmente al valor $- \frac{3}{2} \frac{K}{\varepsilon K}$

siendo ésta K, el K de la columna. Para poder entender lo dicho anteriormente, resolvamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo No. 2

Resolver el siguiente marco rectangular:



a) $K\,viga = \frac{40}{10} = 4$

$K\,columna\ A-B = \frac{40}{20} = 2$

$K\,columna\ D-C = \frac{20}{20} = 1$

b) Factores de distribución de nudos:

Factor de B a A $= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = -0.167$

" " B a C $= -\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = -0.333$

" " C a B $= -\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = -0.400$

" " C a D $= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = -0.100$

c) Factores de distribución en columnas:

$$\text{Columna A B} = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = -1.00$$

$$\text{Columna C D} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = -0.500$$

d) Momentos fijos:

$$MF = \frac{16 \times 10}{8} = 20 \text{ Kips-pie}$$

Con estos datos podemos proceder a la solución del marco, la cual se encuentra en lámina No. 12.

2.5.4 Resolución de marcos con cargas horizontales.

Para la resolución de marcos con cargas horizontales, el único concepto nuevo que tiene el método del profesor Kani, además de los ya estudiados, es el llamado "momento de Piso". El "momento de Piso", consiste en los valores con los cuales comienza el proceso de iteración.

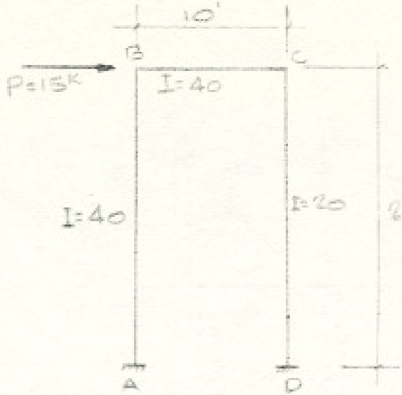
El proceso a seguir es el mismo que para el ejemplo No. 2, agregando únicamente el valor del momento de Piso el cual es igual a:

$$M \text{ piso} = \frac{ph}{3}$$

El momento de Piso es positivo si la fuerza aplicada de derecha a izquierda, y negativo si la fuerza aplicada va de izquierda a derecha.

Para la mejor comprensión de este caso resolvamos el pórtico del ejemplo No. 1, con la variante que la carga aplicada será horizontal.

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR
UNICAMENTE EN TESIS FISICA



a) Todos los datos calculados en el ejemplo No. 1.

b) Factor distribución de columnas

$$\text{Columnas } AB = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = -1.00$$

c) Momento de piso

$$Mp = -\frac{1}{3} \times 15 \times 20 = 100 \text{ Kips-pie}$$

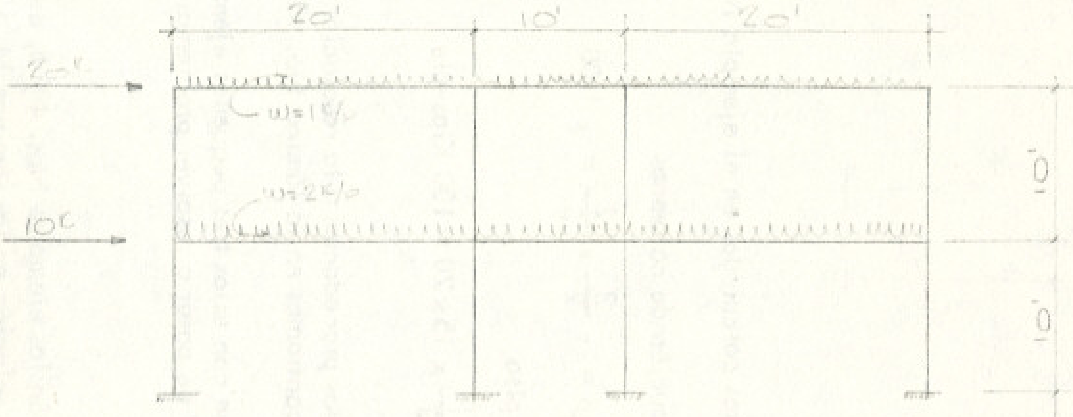
Con estos datos procedamos a la resolución del pórtico, la cual la encontramos en la lámina No. 13.

Considero que con estos tres pequeños ejemplos estamos en capacidad de pasar a resolver problemas de marcos más complejos.

A continuación los ejemplos Nos. 4 y 5, de los cuales sólo se muestra la solución en las láminas 14, 15 y 16, ya que por ser un proceso repetitivo, no considero necesaria mayor explicación.

El ejemplo No. 4 se resuelve en dos pasos: 1o. carga vertical, 2o. carga horizontal. Si se quisiera, se podría resolver todo el conjunto.

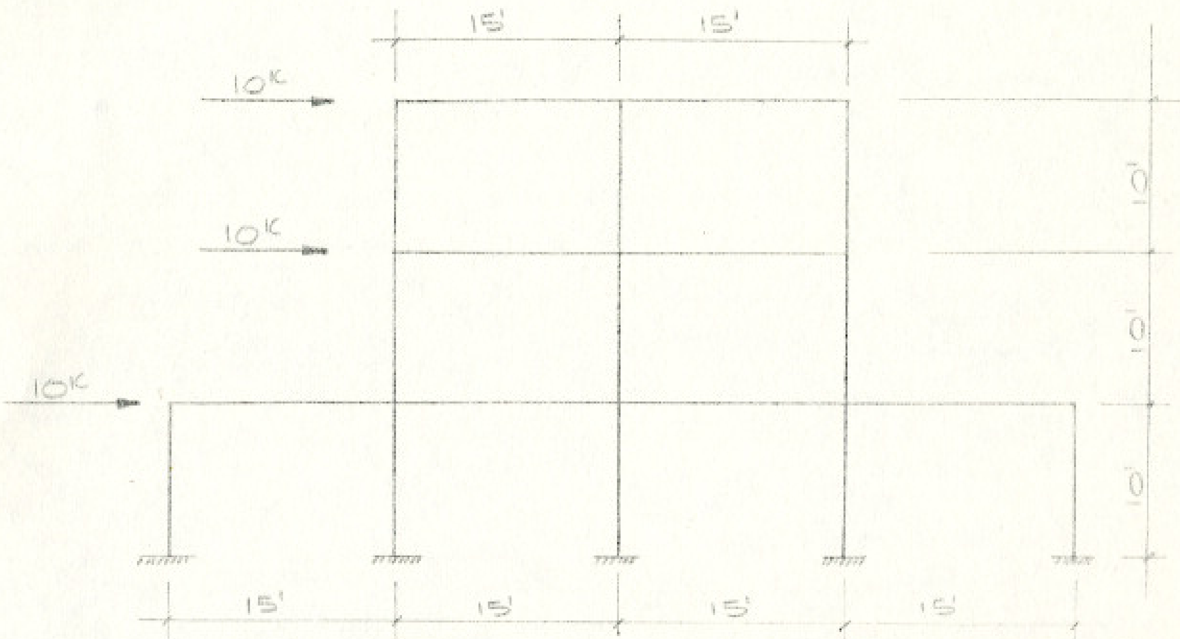
Ejemplo No. 4



I vigas = 30

I columnas = 18

Ejemplo No. 5



I vigas = 30
I columnas = 15

ILUSTRACIONES Y ANEXOS, CONSULTAR UNICAMENTE EN TESIS FISICA

CAPITULO III

PROBLEMAS ADICIONALES.

Al Ingeniero Civil se le presentan una serie de problemas adicionales a los indicados anteriormente, y los cuales considero podrían ser tratados en el contenido de algún curso que se imparte en la Facultad, o bien constituir la base para la elaboración de una futura tesis de graduación.

A continuación algunos de dichos problemas

1. Cargas dinámicas

   Los métodos anteriormente vistos no son aplicables a cargas dinámicas, solamente son aplicables a cargas estáticas. Como bien sabemos, Guatemala está ubicada en la zona sísmica de América, y las cargas de sismo son cargas dinámicas. He aquí el por qué considero la importancia que se le debe dar a los métodos de análisis dinámicos.
   Al hablar de cargas dinámicas se nos presentan nuevos conceptos que no hemos considerado en los capítulos anteriores. A continuación algunos de ellos:

   a) Modos de vibración.
   b) Módulo de elasticidad dinámico.
   c) Distribución dinámica de momentos, ya que anteriormente sólo hemos visto distribución estática de momentos.
   d) Efectos de diafragma en un edificio, ya sea causado por paredes de ladrillo, o bien por un muro de concreto, como por ejemplo la caja de elevadores del mismo.
   e) Efecto de torsión. Como bien sabemos, en un edi-

ficio podemos tener torsión real o torsión accidental, lo que nos puede dar una influencia bastante grande en la estructura.

f) Al efectuar un análisis dinámico se sobre pasa el límite elástico, por lo que los métodos elásticos no son aplicables en algunos casos, y será necesario - comprobar por medio del método de absorción de - energía.

2. **Momento de Inercia.** Al efectuar el análisis de una estructura, determinamos el momento de inercia de los miembros únicamente por la sección bruta de concreto. Ahora bien, si después de diseñada la sección involucramos en el valor del momento de inercia el valor del acero de refuerzo, qué efecto nos dará en el momento de inercia y cómo afectará nuestro análisis inicial?

3. **Cartela Infinita.** La cartela infinita es una de las incertidumbres más corrientes en el análisis de estructuras, ya que la información para aclararnos este problema es muy pequeña, y no podemos decir cuándo y en qué relación de viga a columna debemos tomar en cuenta su efecto. Hay que considerar que su influencia en el factor de distribución, de transmisión, es importante, y al final podemos tener variación en el valor de los momentos finales.

4. **Empotramiento.** Al efectuar un análisis nosotros consideramos que la estructura está empotrada en las zapatas, hasta donde es cierta esta condición. Sino qué factor o qué condición son necesarios para lograr un resultado más realista.

5. **Longitud de Miembros.** Corrientemente se acostumbra usar las distancias de centro de una estructura pa-

ra analizarla. Sin embargo, hay casos en que los - - miembros son bastante grandes en relación a la distancia de sus ejes, y como bien sabemos, los momentos varían por la longitud entre ejes al cuadrado. Ahora bien, en estos casos, ¿qué distancia es aconsejable usar? Es decir, de centro a centro, de rostro a rostro, o si hacemos uso de las distancias de centro a centro, bastará únicamente efectuar la corrección recomendada por la Asociación del Cemento Portland P. C. A. que nos da los valores de momento en el rostro de las columnas.

-ooOoo-

CAPITULO IV

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. A través del desarrollo de este trabajo hemos podido apreciar la importancia que tiene el conocimiento de los métodos de resolución de ecuaciones aquí estudiados. Considero que a estos métodos se les debe dar mayor importancia en su estudio, ya que son parte primordial en los métodos de análisis de estructuras. Además, se pueden aplicar estos métodos en otros cursos en los que el estudiante tenga que resolver ecuaciones lineales.

   Si estudiamos detenidamente los tres métodos de análisis de estructuras aquí explicados, notaremos que en sí no son métodos diferentes, sino que atacan el problema en distinta forma. Es decir, el método de pendiente deflexión plantea ecuaciones que se resuelven por relajación, iteración o matrices. El método de Cross resuelve ecuaciones directamente por relajación, y el método de Kani las resuelve directamente por iteración. No está demás indicar que no son sólo estos tres los únicos métodos de análisis de estructuras, ya que existen varios más.

   Como podemos ver en el resultado de los ejemplos, los tres métodos son métodos exactos, dependiendo su exactitud únicamente del analista. La exactitud del método de pendiente deflexión depende únicamente del número de decimales con que se trabajan las ecuaciones. La exactitud del método de Cross depende del número de distribuciones que se realicen, y el de Kani en el número de iteraciones que se efectúen.

   Ahora bien, si la diferencia en cualquier problema trabajado por cualquiera de estos métodos fuera de un $\pm$ 10%, esta diferencia podría ser despreciable para el analista.

2. A continuación deseo apuntar, según mi opinión, cuáles son las ventajas de cada método en particular.

a) **Pendiente deflexión.**

a.1) Método rápido para marcos pequeños y con miembros inclinados.
a.2) Adecuado para el uso de calculadora electrónica, ya que se resuelven directamente las ecuaciones.
a.3) Sin el auxilio de calculadoras electrónicas puede ser un método largo y tedioso para edificios de varios pisos, en el análisis de cargas verticales y más aún para cargas horizontales.

b) **Método de Cross.**

b.1) Método didáctico, ya que enseña el comportamiento de los nudos de una estructura.
b.2) Adecuado para marcos pequeños con miembros inclinados.
b.3) Bastante lento y trabajoso para edificios que sufran desplazamiento horizontal.
b.4) Ideal para un conocimiento rápido del valor de momentos en una estructura para poder hacer una estimación de la sección a usarse.
b.5) Ideal para vigas contínuas.
b.6) Ofrece la ventaja de poder elaborar programas para la resolución de marcos con calculadora electrónica.

c) Método de Kani.

c.1) Ideal para marcos pequeños con desplazamiento horizontal.
c.2) Su principal ventaja es para edificios que su-

fran desplazamiento horizontal.

c.3) Para cargas horizontales simplifica y da velocidad al análisis.

c.4) Cuando existan en la estructura miembros muy desequilibrados para los cuales la convergencia de iteración es demasiada lenta, pueden efectuarse únicamente rotación de juntas para luego plantear las ecuaciones usadas en el Método de Cross. Sólo los pasos de rotación de juntas son de convergencia rápida.

Para terminar me permito hacer las siguientes recomendaciones a los estudiantes de Ingeniería Civil para el estudio de análisis de estructuras:

1. Estudio de métodos de resolución de ecuaciones.

2. Estudio de los conceptos básicos del comportamiento de las estructuras para la introducción al estudio de los diferentes métodos de análisis.

3. Combinación de los métodos de resolución de ecuaciones y los métodos de análisis de estructuras.

*

* *

*

Rony Armando Sarmiento G.

Vo. Bo.

(f) Ing. Mauricio Castillo Contoux
Asesor

IMPRÍMASE:

(f) Ing. Amando Vides Tobar
Decano

BIBLIOGRAFIA

1. Baldor, Aurelio, "Algebra Elemental"; Editorial Cultural S.A.

2. Aitken, Alexander, "Determinantes y Matrices"; Editorial Dossat S.A.

3. de G. Allen, D. N., "Relaxation Methods in Engineering and Science"; Editorial McGraw-Hill.

4. Salvador Mario, Baron Melvin "Numerical Methods in Engineering"; Editorial Prentice Hall.

5. Seely, Frank, "Resistencia de Materiales"; Editorial Uteha.

6. Cross y Morgan, "Estructuras Contínuas de Hormigón Armado"; Editorial Dossat S.A.

7. Kani, G., "Cálculo de Pórticos de Varios Pisos"; Editorial Reverté S.A.

8. Kinney, "Análisis de Estructuras Indeterminadas"; Editorial Uteha.

9. Castillo Contoux, Mauricio, "Apuntes del Curso de Estabilidad IV"; Editorial AEI.

10. Christiansen, Vance, "Apuntes de Clase"; Universidad de Ockland.

11. Rogers, L. Grover, "Dinamics of Framed Estructures"; Editorial John Wiley and Sons.

—ooOoo—

INDICE

MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS
AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

I N D I C E

II

INDICE

III