



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ciencias

**APLICACIÓN DEL MECANISMO DE HIGGS A UN SISTEMA CONSTITUIDO  
POR CAMPOS DE WEYL Y CAMPOS GAUGE NO ABELIANOS**

**Rodrigo de León Ardón**

Asesorado por el M. Phil. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

Guatemala, mayo de 2013

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIÓN DEL MECANISMO DE HIGGS A UN SISTEMA CONSTITUIDO  
POR CAMPOS DE WEYL Y CAMPOS GAUGE NO ABELIANOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**RODRIGO DE LEÓN ARDÓN**

ASESORADO POR EL M. PHIL. EDGAR ANIBAL CIFUENTES ANLÉU

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**LICENCIADO EN FÍSICA**

GUATEMALA, MAYO DE 2013

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
VOCAL V	Br. Sergio Alejandro Donis Soto
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

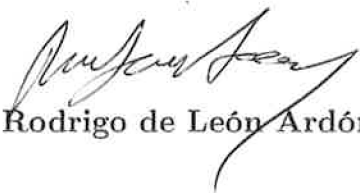
DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
EXAMINADOR	Ing. Otto Miguel Hurtarte Hernández
EXAMINADOR	Ing. Walter Giovanni Álvarez Marroquín
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### APLICACIÓN DEL MECANISMO DE HIGGS A UN SISTEMA CONSTITUIDO POR CAMPOS DE WEYL Y CAMPOS GAUGE NO ABELIANOS

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ciencias, con fecha 17 de noviembre de 2012.



Rodrigo de León Ardón



Facultad de Ingeniería  
Departamento de Física

Guatemala, 10 de septiembre del 2012

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte  
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS  
FACULTAD DE INGENIERIA  
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al protocolo de trabajo de graduación **“Aplicación del mecanismo de Higgs a un sistema constituido por campos de Weyl y campos gauge no Abelianos”**, presentada por el estudiante **Rodrigo de León Ardón**; con carné No. 200715096; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, acepto ser asesor de dicho trabajo.

Muy Atentamente,



“ID Y ENSEÑAD A TODOS”

  
Lic. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu  
A S E S O R

c.c. Archivo



Facultad de Ingeniería  
Departamento de Física

Ref.Depto.fis.0049-2012  
Guatemala, 12 de septiembre del 2012

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte  
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS  
FACULTAD DE INGENIERIA  
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Por medio de la presente me dirijo a usted, para informarle que he realizado la revisión al protocolo de trabajo de graduación **“Aplicación del mecanismo de Higgs a un sistema constituido por campos de Weyl y campos gauge no Abelianos”**, presentada por el estudiante **Rodrigo de León Ardón**; con carné No. 200715096; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar  
Coordinador, Lic. En Física Aplicada  
Departamento de Física  
Facultad de Ingeniería

C.c. Archivo



El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **Rodrigo de León Ardón**, titulado “**APLICACIÓN DEL MECANISMO DE HIGGS A UN SISTEMA CONSTITUIDO POR CAMPOS DE WEYL Y CAMPOS GAUGE NO ABELIANOS**”, procede a la autorización del mismo.



Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco  
Director Escuela de Ciencias

Guatemala, 28 de mayo de 2013

EABOP/scvs



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **APLICACIÓN DEL MECANISMO DE HIGGS A UN SISTEMA CONSTITUIDO POR CAMPOS DE WEYL Y CAMPOS GAUGE NO ABELIANOS**, presentado por el estudiante universitario: **Rodrigo de León Ardón**, procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

  
Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
Decano

Guatemala, mayo de 2013



/cc



# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
GLOSARIO	VII
RESUMEN	IX
OBJETIVOS	XI
INTRODUCCIÓN	XIII
<b>1. SIMETRÍAS</b>	<b>1</b>
1.1. Formalismo lagrangiano . . . . .	4
1.2. Simetrías globales . . . . .	7
1.3. Simetrías gauge . . . . .	10
<b>2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA</b>	<b>13</b>
2.1. Lagrangiano invariante . . . . .	15
2.2. Mecanismo de Higgs . . . . .	16
2.3. Campos gauge máxicos . . . . .	19
<b>3. APLICACIÓN DEL MECANISMO</b>	<b>21</b>
3.1. Aplicación a campos de Weyl . . . . .	22
3.2. Grados de libertad de espín . . . . .	24
<b>4. APLICACIÓN DEL MECANISMO AL MODELO ESTÁN-</b>	
<b>DAR</b>	<b>27</b>
4.1. Teoría electrodébil . . . . .	28
4.2. Masa del bosón de Higgs . . . . .	37

<b>CONCLUSIONES</b>	<b>41</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>43</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>45</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>47</b>
<b>APÉNDICES</b>	<b>49</b>

# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Diagramas de Feynman de la densidad gauge . . . . .	36
2.	Interacción del bosón de Higgs con los fermiones . . . . .	37
3.	Espectro de masas, canal $\gamma\gamma$ . . . . .	38
4.	Espectro de masas, canal $ZZ$ . . . . .	39
5.	Hipótesis de espín . . . . .	40



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$S$	Acción
$H$	Campo de Higgs
$\psi$	Campo de Weyl
$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a, \mathcal{G}_{\mu\nu}^a$	Campos de Yang-Mills
$\phi$	Campo escalar
$\Phi$	Campo genérico
$\mathcal{W}_\mu^a$	Campo vectorial no abeliano
$\mathcal{B}_\mu^a$	Campo vectorial abeliano
$Q$	Carga
$g, g'$	Constantes de acoplo
$J^\mu$	Densidad de corriente
$\mathcal{L}$	Densidad lagrangiana
$\mathcal{D}_\mu$	Derivada covariante
$g$	Elemento del grupo de simetrías
$\mathcal{G}$	Grupo de simetrías
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano
$\Lambda$	Matriz de Lorentz
$\sigma^i$	Matrices de Pauli
$\mathfrak{T}_a$	Operador generador
$\mathcal{U}(g)$	Operador que representa a un elemento $g$
$\mathbf{T}_a$	Representación matricial del operador $\mathfrak{T}$
$\mathbf{U}(g)$	Representación matricial del operador $\mathcal{U}(g)$
$T_\nu^\mu$	Tensor de <i>momentum</i> -energía



## GLOSARIO

<b><i>Boost</i> de Lorentz</b>	Transformación de Lorentz que relaciona a dos marcos de referencia inerciales en movimiento relativo traslacional uniforme.
<b>Bosones</b>	Partículas caracterizadas por la estadística Bose-Einstein. Poseen un valor de espín entero: $0, 1, 2, \dots$
<b>Diagramas de Feynman</b>	Representaciones gráficas de expresiones matemáticas, definidas por un conjunto preciso de reglas, las reglas de Feynman. Contienen la información física de las interacciones entre partículas.
<b>Espacio de Hilbert</b>	Es un espacio vectorial unitario de dimensión infinita que es separable y completo.
<b>Espín</b>	<i>Momentum</i> angular intrínseco de partículas.
<b>Fermiones</b>	Partículas caracterizadas por la estadística Fermi-Dirac que satisfacen el principio de exclusión de Pauli. Poseen un valor de espín fraccionario: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
<b>Luminosidad</b>	Medida del número de colisiones por centímetro cuadrado por segundo que pueden ser producidas en un detector.

**Luminosidad  
Integrada**

Medida del número de colisiones por centímetro cuadrado que indica el tamaño de los datos recolectados.



## RESUMEN

Se implementa el mecanismo de Higgs a un sistema constituido por campos de Weyl y campos gauge no abelianos. Se analiza el mecanismo como generador de grados de libertad de espín para los campos gauge. Con base en los resultados del estudio, se repasa la aplicación del mecanismo al Modelo Estándar y los resultados experimentales recientes del Large Hadron Collider.



# OBJETIVOS

## General

Aplicar el mecanismo de Higgs a un sistema constituido por fermiones, descritos mediante campos de Weyl, y campos gauge no abelianos.

## Específicos

1. Realizar una revisión del formalismo lagrangiano, simetrías globales, simetrías gauge y el mecanismo de Higgs.
2. Analizar los grados de libertad de espín de las partículas del sistema luego de aplicar el mecanismo.
3. Examinar los resultados del mecanismo de Higgs aplicado al Modelo Estándar de partículas y los datos experimentales obtenidos por el Large Hadron Collider, que indican los valores de masa y espín, de una partícula compatible con el bosón de Higgs.



# INTRODUCCIÓN

El origen de la masa de los constituyentes elementales de la materia sigue siendo una de las preguntas abiertas en la física. El Modelo Estándar de partículas propone un mecanismo de generación de masa, el mecanismo de Higgs. Dicho mecanismo predice la existencia de una nueva partícula fundamental, el bosón de Higgs. En la actualidad el Large Hadron Collider tiene como uno de sus objetivos encontrar dicho bosón y en consecuencia validar el mecanismo.

El Modelo Estándar se fundamenta en la Cromodinámica Cuántica, la cual describe las interacciones fuertes y la teoría electrodébil, que describe las interacciones electromagnéticas y débiles. Con base en el trabajo de Glashow, el mecanismo fue aplicado por primera vez por Weinberg y Salam al sector electrodébil.

El propósito del trabajo de graduación es repasar las bases de dicho sector. Éste se puede alcanzar aplicando el mecanismo de Higgs a fermiones elementales, descritos mediante campos de Weyl, y a bosones vectoriales gauge no abelianos.

Para ello el trabajo se compone de cuatro capítulos, en el primero se repasan brevemente los fundamentos de la teoría cuántica de campo y el principio gauge. En el segundo capítulo se repasa el mecanismo de Higgs, partiendo del teorema de Goldstone y finalizando con la aplicación a campos gauge no abelianos provenientes del grupo  $SU(2)$ .

En el tercer capítulo se desarrolla la aplicación a los campos de Weyl y se analiza el mecanismo como generador de grados de libertad de espín. En el último capítulo se trata la teoría electrodébil en el contexto de la generación de las masas y los resultados experimentales recientes de la búsqueda del bosón de Higgs.

Por último, en el primer apéndice se repasa brevemente la estructura de los grupos de Lie y sus representaciones. En el segundo apéndice se examinan las transformaciones espacio-temporales de los campos espinoriales, específicamente los campos de Weyl.

# 1. SIMETRÍAS

Una simetría se define como una transformación que deja invariante la acción de un sistema físico. La dinámica de un sistema que involucra un campo cuántico  $\Phi(x)$  se determina en términos de la acción, definida como

$$S = \int_{\Gamma} d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_{\mu}\Phi(x)) \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana y  $\Gamma$  una región del espacio-tiempo. Así, cualquier transformación que cumpla con la condición

$$S \rightarrow S' = S \quad (1.2)$$

se dice que es una transformación de simetría. La relación entre simetrías y leyes de conservación se encuentra descrita en el teorema de Noether (ver ref. 1, 3). Para cada transformación de simetría existe una densidad de corriente, llamada densidad de corriente de Noether o simplemente corriente de Noether, la cual se conserva si la simetría es exacta. Cada carga correspondiente, denotada por el operador  $Q$ , satisface la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

para simetrías exactas, esto conlleva a leyes de conservación para dicha carga. En electrodinámica y cromodinámica cuántica, la simetría gauge local es responsable de la conservación de la carga eléctrica y carga de color.

Las transformaciones de simetría se describen en términos de grupos. A cada simetría le corresponde un elemento, abstracto, de un grupo denominado grupo de simetría  $\mathcal{G}$ . Dicho grupo es representado por un grupo de operadores  $\mathcal{G}$ , los cuales actúan como operadores de cambio de base en el espacio de Hilbert de los campos cuánticos.

Las partículas son paquetes de energía y *momentum* de los campos. El estado de una partícula libre con cuadrimomento  $p$ , masa  $m$ , que satisfacen  $p^2 = m^2 > 0$ , espín  $s$ , siendo  $\sigma$  su proyección sobre el eje  $z$  respecto a un marco de referencia donde se encuentre en reposo, es creado al aplicar el operador de creación  $a_\sigma^\dagger(p)$  al estado de vacío, normalizado, del sistema  $|0\rangle$

$$|p, \sigma\rangle = a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle \quad (1.4)$$

donde  $p^0$  es la energía relativista de la partícula,  $p^0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Así, los estados de un sistema de partículas se construyen del vacío, creando un espacio de Hilbert, llamado espacio de Fock. Para calcular el producto interno

$$\langle q, \tau | p, \sigma \rangle = \langle 0 | a_\tau(q) a_\sigma^\dagger(p) | 0 \rangle \quad (1.5)$$

donde  $a_\tau(q)$  es el operador de aniquilación que satisface  $a_\tau(q)|0\rangle = 0$ , se necesitan las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación. Para un campo escalar real ( $s = 0$ ), éstas se definen como

$$\begin{aligned} [a(q), a(p)] &= 0 \\ [a^\dagger(q), a^\dagger(p)] &= 0 \\ [a(q), a^\dagger(p)] &= 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathcal{I} \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $\mathcal{I}$  es el operador identidad. El producto interno resulta

$$\langle q | p \rangle = 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \quad (1.7)$$

Si consideramos un sistema de partículas representadas por ondas planas, es decir, partículas libres; la función de onda de cada una de ellas posee la forma  $e^{\pm ipx}$ . Así, el campo escalar real libre se escribe en términos de una expansión de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p^0} [e^{-ipx} a(p) + e^{ipx} a^\dagger(p)] \quad (1.8)$$



Por lo tanto, las funciones de onda se determinan por medio de

$$\begin{aligned}\langle p|\phi(x)|0\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ipx} \\ \langle 0|\phi(x)|p\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Las simetrías se pueden clasificar en simetrías espacio-temporales e internas. Las simetrías espacio-temporales transforman las coordenadas de un punto en el espacio-tiempo y al campo de una manera particular, dependiendo de su clase (escalar, vectorial, espinorial). Las simetrías internas solamente transforman al campo. Ambas clasificaciones se pueden dividir en simetrías globales y locales. Así, las simetrías espacio-temporales globales se encuentran asociadas con la relatividad especial y las locales con la relatividad general; las simetrías internas globales con las simetrías aproximadas de sabor, isospín, etc. y las locales con las simetrías gauge de color y electrodébil.

La representación de cada elemento  $g$ , que pertenece al grupo de simetrías internas  $\mathcal{G}$ , es un operador lineal  $\mathcal{U}(g)$ . Si la simetría interna depende del parámetro  $\theta$ , entonces las transformaciones globales y locales están dadas por

$$\begin{aligned}\phi(x) &\xrightarrow{g(\theta)} \phi'(x) = \mathcal{U}(g(\theta))\phi(x) \\ \phi(x) &\xrightarrow{g(\theta(x))} \phi'(x) = \mathcal{U}(g(\theta(x)))\phi(x)\end{aligned}\tag{1.10}$$

respectivamente.

## 1.1. Formalismo lagrangiano

La variación de la acción ante las transformaciones infinitesimales

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad (1.11)$$

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \delta\Phi(x) \quad (1.12)$$

resulta

$$\delta S = \int [\delta(d^4x) \mathcal{L} + d^4x \delta\mathcal{L}] \quad (1.13)$$

donde la variación del diferencial de hipervolumen está dado por

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = d^4x \partial_{\mu}(\delta x^{\mu}) \quad (1.14)$$

y la variación de la densidad lagrangiana por

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)}\delta(\partial_{\mu}\Phi) \quad (1.15)$$

con  $\delta(\partial_{\mu}\Phi) \neq \partial_{\mu}(\delta\Phi)$  dado (1.11).

La variación total del campo está compuesta por

$$\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) + (\partial_{\rho}\Phi)\delta x^{\rho} \quad (1.16)$$

donde el primer término representa la variación directa del campo,  $\delta_0\Phi = \Phi'(x) - \Phi(x)$  y el segundo surge como consecuencia de la variación en  $x^{\rho}$ . La variación de la derivada del campo viene dada por

$$\begin{aligned} \delta(\partial_{\mu}\Phi) &= \partial'_{\mu}\Phi' - \partial_{\mu}\Phi \\ &= (\partial'_{\mu}x^{\nu})\partial_{\nu}\Phi' - \partial_{\mu}\Phi \\ &= (\partial'_{\mu}x^{\nu})\partial_{\nu}(\Phi + \delta\Phi) - \partial_{\mu}\Phi \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde  $\partial'_{\mu}x^{\nu}$  es un elemento de la matriz Jacobiana de la transformación  $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$ , el cual está dado por

$$\partial'_{\mu}x^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu}(\delta x^{\nu}) \quad (1.18)$$

Así, se obtiene la variación

$$\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi) - \partial_\mu(\delta x^\nu)(\partial_\nu \Phi) \quad (1.19)$$

Por lo tanto, la variación de la acción resulta

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right] \delta\Phi \right. \\ & - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} ((\partial_\nu \Phi)\delta x^\nu - \delta\Phi) - \delta x^\mu \mathcal{L} \right] \\ & \left. - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \partial_\nu \Phi \right] \delta x^\nu \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Para que las transformaciones infinitesimales representen simetrías, se requiere que  $\delta S = 0$ . En consecuencia, se obtiene la ecuación de movimiento del campo, denominada ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = 0 \quad (1.21)$$

Y se define la corriente de Noether como

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} ((\partial_\nu \Phi)\delta x^\nu - \delta\Phi) - \delta x^\mu \mathcal{L} \quad (1.22)$$

la cual satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (1.23)$$

Integrando dicha ecuación en un volumen finito  $V$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x \partial_\mu J^\mu(x) \\ &= \int_V d^3x \partial_0 J^0(x) + \int_V d^3x \partial_k J^k(x) \\ &= \frac{d}{dt} \int_V d^3x J^0(x) + \oint_{\partial V} d^3x n_k J^k(x) \end{aligned} \quad (1.24)$$

La integral de volumen se define como la carga

$$Q_V = \int_V d^3x J^0(x) \quad (1.25)$$

Y la integral de superficie el flujo de carga sobre  $\partial V$ , entonces si no existe un flujo de entrada o salida en la frontera (sistema aislado) se obtiene

$$0 = \frac{dQ_V}{dt} \quad (1.26)$$

es decir, la carga se conserva.

Las simetrías espacio-temporales globales se describen en términos del grupo de Poincaré (ver ref. 2). Una transformación general de Poincaré está dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = (\Lambda)^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.27)$$

donde  $(\Lambda)^\mu_\nu$  es un elemento de la matriz de transformación  $\Lambda$ , llamada transformación de Lorentz, la cual contiene *boost's* y rotaciones espaciales, y  $a^\mu$  la componente de un cuadrivector constante. La variación ante una transformación infinitesimal de Poincaré resulta

$$\delta x^\mu = (\omega)^\mu_\nu x^\nu + \epsilon^\mu \quad (1.28)$$

con  $(\omega)^\mu_\nu$ , que satisfacen  $(\omega)_{\mu\nu} = -(\omega)_{\nu\mu}$ , y  $\epsilon^\mu$  como infinitesimales. Todo campo, independientemente de su transformación ante Lorentz, se comporta como un campo escalar ( $\delta\Phi = 0$ ) ante traslaciones espacio-temporales, en consecuencia, la densidad de corriente resulta

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\partial_\nu \Phi) \epsilon^\nu - \epsilon^\mu \mathcal{L} \\ &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\partial_\nu \Phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \epsilon^\nu \end{aligned} \quad (1.29)$$

de donde se define el tensor de *momentum*-energía

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\partial_\nu \Phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.30)$$

Utilizando el tensor métrico  $\eta^{\nu\rho}$  para elevar el subíndice  $\nu$ ,  $T^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho}T_{\rho}^{\mu}$ , e integrando la ecuación de continuidad en un volumen espacial  $V$ , se obtiene

$$0 = \frac{d}{dt} \int_V d^3x T^{0\nu} + \oint_{\partial V} d^3x n_k T^{k\nu} \quad (1.31)$$

En consecuencia, la carga conservada asociada es el cuádrimomento, el generador de traslaciones espacio-temporales infinitesimales

$$P^\nu = \int_V d^3x T^{0\nu} \quad (1.32)$$

## 1.2. Simetrías globales

Sean los campo cuánticos  $\Phi_k(x)$  miembros de un multiplet, la transformación ante el elemento  $g(\theta^1, \dots, \theta^n)$  del grupo de simetría  $SU(N)$  resulta

$$\Phi'_k(x) = \sum_{l=1}^N (\mathbf{U})_{kl} \Phi_l(x) \quad (1.33)$$

siendo  $(\mathbf{U})_{kl}$  un elemento de la matriz que representa la transformación, consultar el apéndice A. Dado que la transformación finita siempre puede construirse mediante la composición de transformaciones infinitesimales, la variación ante la transformación global infinitesimal resulta

$$\delta_0 \Phi_k(x) = \sum_{l=1}^N (\delta_{kl} + i\theta^a (\mathbf{T}_a)_{kl}) \Phi_l(x) - \Phi_k(x) = i\theta^a \sum_{l=1}^N (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \quad (1.34)$$

con  $\theta^a$  como infinitesimales y  $a = 1, \dots, N^2 - 1$ . Así, a las corrientes de Noether

$$J_a^\mu(x) = \sum_l \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_k)} (-i (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x)) \right) \quad (1.35)$$

se les asocian las cargas

$$Q_{V,a} = -i \sum_l \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi_k)} (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \quad (1.36)$$

Sólo basta demostrar que las  $N^2 - 1$  cargas  $Q_{V,a}$ , son precisamente los generadores de las simetrías. Para ello recordamos que una operación de simetría representa un cambio de base. Las componentes del campo se transforman como

$$\mathcal{U}^\dagger(g)\Phi_k(x)\mathcal{U}(g) = \Phi'_k(x) = \sum_l (\mathbf{U})_{kl}\Phi_l(x) \quad (1.37)$$

Por lo tanto, para una transformación infinitesimal

$$(1 - i\theta^a \mathfrak{T}_a)\Phi_k(1 + i\theta^a \mathfrak{T}_a) = \sum_l (\mathbf{U})_{kl}\Phi_l(x) \quad (1.38)$$

se obtiene la expresión que indica cómo las componentes se transforman bajo el grupo

$$[\mathfrak{T}_a, \Phi_k] = - \sum_l (\mathbf{T}_a)_{kl}\Phi_l(x) \quad (1.39)$$

Para la demostración, primero se define el *momentum* conjugado como

$$\pi^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_k)} \quad (1.40)$$

y a continuación se evalúa el conmutador en tiempos iguales,  $x_0 = y_0$

$$\begin{aligned} [Q_{V,a}, \Phi_m(y)] &= \left[ -i \sum_l \int_V d^3x \pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x), \Phi_m(y) \right] \\ &= -i \sum_l \int_V d^3x [\pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x), \Phi_m(y)] \\ &= -i \sum_l \int_V d^3x \{ \pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} [\Phi_l(x), \Phi_m(y)] \\ &\quad + [\pi^k(x), \Phi_m(y)] (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \} \end{aligned} \quad (1.41)$$

En consecuencia, se necesitan las relaciones de conmutación de los campos  $\Phi_k$  y  $\pi^k$  para proseguir. Para campos bosónicos, éstas se definen como

$$\begin{aligned} [\pi^k(x), \Phi_l(y)]|_{x^0=y^0} &= \frac{1}{i} \delta_l^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\Phi_l(x), \Phi_m(y)]|_{x^0=y^0} &= 0 \\ [\pi^k(x), \pi^m(y)]|_{x^0=y^0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

el conmutador resulta

$$[Q_{V,a}, \Phi_m(y)] = - \sum_l (\mathbf{T}_a)_{ml} \Phi_l(y) \quad (1.43)$$

Por último se evalúa el conmutador

$$\begin{aligned}
[Q_{V,a}, Q_{V,b}] &= \left[ -i \sum_l \int_V d^3x \pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x), -i \sum_r \int_V d^3y \pi^s(y) (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(y) \right] \Big|_{x^0=y^0} \\
&= - \sum_{l,r} \int_V d^3x \int_V d^3y \left[ \pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x), \pi^s(y) (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(y) \right] \Big|_{x^0=y^0} \\
&= - \sum_{l,r} \int_V d^3x \int_V d^3y \left\{ -\pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} [\pi^s(y), \Phi_l(x)] \Big|_{x^0=y^0} (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(y) \right. \\
&\quad + \pi^k(x) \pi^s(y) (\mathbf{T}_a)_{kl} (\mathbf{T}_b)_{sr} [\Phi_l(x), \Phi_r(y)] \Big|_{x^0=y^0} \\
&\quad + [\pi^k(x), \pi^s(y)] \Big|_{x^0=y^0} (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(y) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \\
&\quad \left. + \pi^s(y) (\mathbf{T}_b)_{sr} [\pi^k(x), \Phi_r(y)] \Big|_{x^0=y^0} (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \right\} \\
&= i \sum_{l,r} \int_V d^3x \int_V d^3y \left\{ -\pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \delta_l^s \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(y) \right. \\
&\quad \left. + \pi^s(y) (\mathbf{T}_b)_{sr} \delta_r^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \right\} \\
&= i \sum_{l,r} \int_V d^3x \left\{ -\pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} \delta_l^s (\mathbf{T}_b)_{sr} \Phi_r(x) + \pi^s(x) (\mathbf{T}_b)_{sr} \delta_r^k (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \right\} \\
&= -i \sum_r \int_V d^3x \pi^k(x) (\mathbf{T}_a)_{kl} (\mathbf{T}_b)_{lr} \Phi_r(x) + i \sum_l \int_V d^3x \pi^s(x) (\mathbf{T}_b)_{sk} (\mathbf{T}_a)_{kl} \Phi_l(x) \\
&= -i \sum_r \int_V d^3x \pi^k(x) ([\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b])_{kr} \Phi_r(x) \\
&= i \sum_r \int_V d^3x \left\{ -\pi^k(x) (\mathbf{T}_a \mathbf{T}_b)_{kr} \Phi_r(x) + \pi^s(x) (\mathbf{T}_b \mathbf{T}_a)_{sr} \Phi_r(x) \right\} \\
&= -i^2 f_{ab}^c \sum_r \int_V d^3x \pi^k(x) (\mathbf{T}_c)_{kr} \Phi_r(x) \\
&= i f_{ab}^c Q_{V,c}
\end{aligned}$$

Con este resultado y comparando (1.39) con (1.43) se concluye que las cargas son en

sí los generadores. Si  $\mathcal{H}$  es el hamiltoniano de la teoría, la ecuación de Heisenberg implica

$$\frac{dQ_{V,a}}{dt} = [\mathcal{H}, Q_{V,a}] = [\mathcal{H}, \mathfrak{T}_a] = 0 \quad (1.44)$$

lo cual expresa la invarianza de la teoría ante las transformaciones del grupo  $\mathcal{G}$ .

### 1.3. Simetrías gauge

Si consideramos que los parámetros de la transformación global dependen del espacio-tiempo, estamos tratando una transformación local.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(g(\theta^a(x))) \quad (1.45)$$

Para una transformación global se tiene

$$\partial_\mu \Phi_k \rightarrow \partial_\mu \Phi'_k = \sum_{l=1}^N (\mathbf{U})_{kl} \partial_\mu \Phi_l(x) = (\partial_\mu \Phi_k)' \quad (1.46)$$

Para una transformación local

$$\partial_\mu \Phi_k \rightarrow \partial_\mu \Phi'_k = \sum_{l=1}^N ((\mathbf{U})_{kl} \partial_\mu \Phi_l(x) + \partial_\mu (\mathbf{U})_{kl} \Phi_l(x)) = (\partial_\mu \Phi_k)' + \sum_{l=1}^N (\partial_\mu (\mathbf{U})_{kl}) \Phi_l(x) \quad (1.47)$$

Si se demanda que la teoría sea invariante ante una transformación local, se introduce la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$

$$\mathcal{D}_\mu \Phi_k = \sum_{r=1}^N (\delta_{kr} \partial_\mu - ig(\mathbf{T}_a)_{kr} \mathcal{W}_\mu^a) \Phi_r \quad (1.48)$$

donde los  $N^2 - 1$  campos cuánticos  $\mathcal{W}_\mu^a$  se denominan campos gauge y  $g$  la constante de acoplo. Al exigir

$$\mathcal{D}'_\mu \Phi'_k = (\mathcal{D}_\mu \Phi_k)' \quad (1.49)$$

se obtiene la transformación infinitesimal de los campos  $\mathcal{W}_\mu^a$

$$\mathcal{W}_\mu^a \rightarrow \mathcal{W}'_\mu{}^a = \mathcal{W}_\mu^a + f_{bc}^a \mathcal{W}_\mu^b \theta^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a \quad (1.50)$$



Esta transformación es conocida como la transformación gauge de  $\mathcal{W}_\mu^a$ , la cual solamente depende del grupo  $\mathcal{G}$  y no de cómo se transforman los campos  $\Phi_k$ , denominados campos materiales. Considerando una transformación global infinitesimal, los campos gauge se transforman como

$$\mathcal{W}_\mu^a \rightarrow \mathcal{W}'^a_\mu = \mathcal{W}_\mu^a + f_{bc}^a \mathcal{W}_\mu^b \theta^c \quad (1.51)$$

y dado que las constantes de estructura generan la representación adjunta, se tiene

$$\mathcal{W}'^a_\mu = \mathcal{W}_\mu^a + i\theta^c (\mathbf{A}_b)_c^a \mathcal{W}_\mu^b \quad (1.52)$$

Por lo tanto, se concluye que los campos materiales se transforman en la representación fundamental y los campos gauge en la representación adjunta.

Generalizando el tensor de intensidad electromagnético, se define el campo de Yang-Mills como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{W}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu^a + g f_{bc}^a \mathcal{W}_\mu^b \mathcal{W}_\nu^c \quad (1.53)$$

el cual, ante la transformación gauge local

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a \rightarrow \mathcal{F}'^a_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^a + f_{bc}^a \mathcal{F}_{\mu\nu}^b \theta^c \quad (1.54)$$

se transforma directamente en la representación adjunta. Se concluye que para una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi_k(x), \partial_\mu \Phi_k(x))$  invariante ante transformación global, ésta puede ser invariante ante una transformación gauge local si se introducen los campos gauge  $\mathcal{W}_\mu^a$ , los cuales ingresan en las derivadas covariantes  $\mathcal{D}_\mu \Phi_k$ , y el campo de Yang-Mills  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a$ . La densidad de lagrangiana resulta

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_k(x), \mathcal{D}_\mu \Phi_k(x)) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \quad (1.55)$$

donde la última contribución contiene los términos de la energía cinética y las autointeracciones de los campos gauge no abelianos  $\mathcal{W}_\mu^a$ . En general, la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi_k(x), \mathcal{D}_\mu \Phi_k(x))$  contiene los términos de la energía cinética  $\mathcal{L}_0(\Phi_k(x), \partial_\mu \Phi_k(x))$  y las interacciones entre las partículas  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi_k(x), \mathcal{W}_\mu^a)$ .

Por lo tanto, las simetrías determinan las interacciones entre los campos por medio del principio gauge (ver ref. 9). Al promover una simetría global a una local, los campos gauge introducidos inducen los términos de las interacciones, por consiguiente, éstos se interpretan como los mediadores de las interacciones.

## 2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA

Dado que para una simetría global los generadores satisfacen

$$[\mathfrak{T}_a, \mathcal{H}] = 0 \quad (2.1)$$

éstos, no necesariamente dejan invariante el estado de vacío. La simetría tipo Wigner-Weyl deja invariante el vacío y en consecuencia el espectro de masas de las partículas en la teoría es degenerado. La simetría tipo Nambu-Goldstone no deja invariante el vacío y por lo tanto el espectro de partículas debe contener una partícula sin masa, conocida como el bosón de Goldstone. La simetría tipo Nambu-Goldstone se dice que es una simetría espontáneamente rota.

Tomando el valor de expectación del vacío a (1.39) se obtiene

$$\langle 0 | [\mathfrak{T}_a, \Phi_k] | 0 \rangle = - \sum_l (\mathbf{T}_a)_{kl} \langle 0 | \Phi_l(x) | 0 \rangle \quad (2.2)$$

Para una simetría tipo Wigner-Weyl se tiene que los generadores

$$\mathfrak{T}_a | 0 \rangle = 0 \quad (2.3)$$

en consecuencia

$$\langle \Phi_k \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi_k(x) | 0 \rangle = 0 \quad (2.4)$$

Para una simetría espontáneamente rota

$$\mathfrak{T}_a | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.5)$$

al menos para un generador, entonces

$$\langle \Phi_k \rangle_0 \neq 0 \quad (2.6)$$

Los bosones de Goldstone son consecuencia del teorema de Goldstone (ver ref. 4). El cual se basa en la conservación de las corrientes

$$\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0 \quad (2.7)$$

La expresión (2.2) se reescribe en términos de la corriente

$$\int_V d^3y \{ \langle 0 | J_a^0(y) \Phi_k(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \Phi_k(x) J_a^0(y) | 0 \rangle \} = - \sum_l (\mathbf{T}_a)_{kl} \langle 0 | \Phi_l(x) | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.8)$$

Dado que la corriente se puede escribir en términos de los operadores de traslación del grupo de Poincaré

$$J_a^0(y) = e^{-iy^\mu P_\mu} J_a^0(0) e^{iy^\mu P_\mu} \quad (2.9)$$

los cuales dejan invariante el estado del vacío, entonces

$$0 \neq \int_V d^3y \{ \langle 0 | J_a^0(0) e^{iy^\mu P_\mu} \Phi_k(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \Phi_k(x) e^{-iy^\mu P_\mu} J_a^0(0) | 0 \rangle \} \quad (2.10)$$

Insertando la *eigenbase* de  $P_\mu$

$$\sum_{n^G} |n^G\rangle \langle n^G| = 1 \quad (2.11)$$

El lado derecho de (2.10) resulta

$$\sum_{n^G} \left\{ \langle 0 | J_a^0(0) | n^G \rangle \langle n^G | \Phi_k(x) | 0 \rangle e^{iy^0 p_0^G} \int_V d^3y e^{-iy \cdot \mathbf{p}^G} - \langle 0 | \Phi_k(x) | n^G \rangle \langle n^G | J_a^0(0) | 0 \rangle e^{-iy^0 p_0^G} \int_V d^3y e^{-iy \cdot (-\mathbf{p}^G)} \right\} \quad (2.12)$$

Se define el coeficiente

$$c_{n^G} = \langle 0 | J_a^0(0) | n^G \rangle \langle n^G | \Phi_k(x) | 0 \rangle \quad (2.13)$$

y dado que

$$\int_V d^3y e^{-iy \cdot (\pm \mathbf{p}^G)} = (2\pi)^3 \Delta_V(\pm \mathbf{p}^G) \quad (2.14)$$

con  $\Delta_V^3(\mathbf{p})$  como una aproximación de la delta de Dirac. La expresión (2.10) resulta

$$0 \neq \lim_{V \rightarrow \infty} (2\pi)^3 \sum_{n^G} \left\{ c_{n^G} e^{iy^0 p_0^G} - c_{n^G}^* e^{-iy^0 p_0^G} \right\}_{\mathbf{p}^G=0} \quad (2.15)$$

Dado que el lado izquierdo es independiente de  $y^0$  se deduce que

$$p_0^G|_{\mathbf{p}^G=0} = 0 \quad (2.16)$$

Así, los estados sin masa  $|n^G\rangle$  corresponden a los bosones de Goldstone. El número de bosones de Goldstone es igual al número de generadores que no aniquilan el estado de vacío.

Para satisfacer el principio gauge, se debe promover la transformación global a una local. En el caso de Nambu-Goldstone, los bosones de Goldstone asociados con los generadores que rompen espontáneamente la simetría desaparecen por medio de una transformación gauge local y los campos gauge correspondientes adquieren masa.

## 2.1. Lagrangiano invariante

Con el objetivo de aplicar el mecanismo de Higgs a campos gauge no abelianos se propone la densidad lagrangiana invariante ante una transformación gauge local

$$\mathcal{L}_{Local} = \mathcal{L}_{Higgs}(\phi_k(x), \mathcal{D}_\mu \phi_k(x)) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \quad (2.17)$$

Donde los  $\phi_k$  representan a campos escalares complejos. La densidad de Higgs posee la forma

$$\mathcal{L}_{Higgs} = - \sum_k^N (\mathcal{D}_\mu \phi_k(x))^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_k(x)) - V(|\phi|) \quad (2.18)$$

donde  $V(|\phi|)$  es una función denominada el potencial de Higgs

$$V(|\phi|) = \lambda \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2}f \right)^2 \quad (2.19)$$

con  $\lambda > 0$ . Los máximos y mínimos se determinan a partir de

$$V'(|\phi|) = 4\lambda \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2}f \right) |\phi| = 0 \quad (2.20)$$

Resultan tres posibilidades

$$|\phi| = 0 \quad |\phi| = \pm \sqrt{\frac{f}{2}} \quad (2.21)$$

Sustituyendo en la segunda derivada

$$V''(|\phi|) = 8\lambda|\phi|^2 + 4\lambda \left( |\phi|^2 - \frac{1}{2}f \right) \quad (2.22)$$

se concluye que

1. Para  $|\phi| = 0$  se tiene que  $V'' = -2\lambda f$ . Por lo tanto,  $V(|\phi| = 0) = \lambda \frac{f^2}{4}$  es un máximo local si  $f > 0$  o un mínimo local si  $f < 0$ .
2. Para  $|\phi| = \pm \sqrt{f/2}$  se tiene que  $V'' = 4\lambda f$ . Por lo tanto,  $V(|\phi| = \pm \sqrt{f/2}) = 0$  son mínimos locales si  $f > 0$

El signo de  $f$  determina si la simetría es del tipo Wigner-Weyl ( $f < 0$ ) o del tipo Nambu-Goldstone ( $f > 0$ ).

## 2.2. Mecanismo de Higgs

Dado que en la simetría tipo Nambu-Goldstone

$$\sum_k^N \phi_k^* \phi_k = \frac{f}{2} \quad (2.23)$$

los campos del multiplete pueden expandirse a partir del estado base

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{f}{2N}} e^{i\gamma} + \dots \quad (2.24)$$

Dado que la densidad de Higgs es invariante ante una transformación de fase  $\phi_k \rightarrow e^{i\gamma} \phi_k$ , por conveniencia se toma  $\gamma = 0$ . Así, los campos se parametrizan como

$$\phi_k(x) = \left( \sqrt{\frac{f}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_k(x) \right) e^{i\sqrt{\frac{N}{f}} \xi_k(x)} = \sqrt{\frac{f}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_k(x) + i\xi_k(x)) + \dots \quad (2.25)$$

donde los campos reales  $\rho_k(x)$  y  $\xi_k(x)$  son perturbaciones alrededor del estado base. Bajo dicha parametrización el potencial resulta

$$\begin{aligned} V &= \lambda \left( \sum_k^N \left[ \sqrt{\frac{f}{N}} \rho_k(x) + \frac{1}{2} \rho_k^2(x) \right] \right)^2 \\ &= \frac{\lambda}{N} \sum_k^N f \rho_k^2(x) + \frac{\lambda}{N} \sum_{k,k' \neq k}^N f \rho_k(x) \rho_{k'}(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde se reconoce el término de la masa de los campos  $\rho_k(x)$

$$m_\rho^2 = \frac{2\lambda f}{N} > 0 \quad (2.27)$$

Dado que los campos  $\xi_k(x)$  no aparecen en el potencial, no poseen un término de masa y se concluye que  $m_\xi^2 = 0$ .

Los campos  $\xi_k(x)$  pueden eliminarse por completo si se exige que para la transformación infinitesimal gauge local, conocida como gauge unitaria

$$\phi'_k = \sum_l^N (\mathbf{U})_{kl} \left( \sqrt{\frac{f}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_l(x) \right) e^{i\sqrt{\frac{N}{f}} \xi_l(x)} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{W}_\mu'^a = \mathcal{W}_\mu^a + f_{bc}^a \mathcal{W}_\mu^b \theta^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a \quad (2.29)$$

se cumpla, en primer lugar

$$(\mathbf{U})_{kl} e^{i\sqrt{\frac{N}{f}} \xi_l(x)} = \delta_{kl} \quad (2.30)$$

donde se propone

$$(\mathbf{U})_{kl} = \delta_{kl} e^{-i\sqrt{\frac{N}{f}}\xi_l(x)} \quad (2.31)$$

y se obtiene

$$\xi_k(x) = -\sqrt{\frac{f}{N}}\theta^a(x) \sum_l^N (\mathbf{T}_a)_{kl} \quad (2.32)$$

En segundo lugar, utilizando la transformación gauge de los campo  $\mathcal{W}_\mu^a$  para absorber a los  $N^2 - 1$  bosones de Goldstone,  $\theta^a(x)$ , se obtiene la derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu \phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu \rho_k) - ig \sum_r (\mathbf{T}_a)_{kr} \mathcal{W}_\mu^a \left( \sqrt{\frac{f}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_r \right) \quad (2.33)$$

Por lo tanto, la densidad de Higgs se expande como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= -\frac{1}{2} \sum_r^N (\partial_\mu \rho_r(x)) (\partial^\mu \rho_r(x)) - \frac{1}{N} \sum_r^N \lambda f \rho_r^2(x) \\ &\quad - g^2 \sum_{r,r'}^N \left( \sum_k^N (\mathbf{T}_a^*)_{rk} (\mathbf{T}_b)_{kr'} \right) \mathcal{W}_\mu^a \mathcal{W}^{\prime b\mu} \frac{f}{2N} \\ &\quad - g^2 \sum_{r,r'}^N \left( \sum_k^N (\mathbf{T}_a^*)_{rk} (\mathbf{T}_b)_{kr'} \right) \mathcal{W}_\mu^a \mathcal{W}^{\prime b\mu} \left( \sqrt{\frac{f}{N}} (\rho_r(x) + \rho_{r'}(x)) \right) \\ &\quad - g^2 \sum_{r,r'}^N \left( \sum_k^N (\mathbf{T}_a^*)_{rk} (\mathbf{T}_b)_{kr'} \right) \mathcal{W}_\mu^a \mathcal{W}^{\prime b\mu} \frac{\rho_r(x) \rho_{r'}(x)}{2} - V \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde se reconoce el término de la masa de los campos gauge

$$m_{\mathcal{W}}^2 \propto \frac{g^2 f}{N} > 0 \quad (2.35)$$

Éste es el resultado del mecanismo de Higgs, el mecanismo más sencillo por el cual los  $N^2 - 1$  campos gauge adquieren masa. Las  $N$  partículas restantes con masa  $m_\rho$  se denominan bosones de Higgs.



### 2.3. Campos gauge másicos

Para el caso más sencillo no abeliano  $SU(2)$  se tiene el doblete

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

y la representación matricial de los generadores

$$\mathbf{T}_a = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_a \quad (2.37)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^2 (\mathbf{T}_a^*)_{rk} (\mathbf{T}_b)_{kr'} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}_a^*)_{rk} (\boldsymbol{\sigma}_b)_{kr'} = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\sigma}_a \boldsymbol{\sigma}_b)_{rr'} \quad (2.38)$$

De la identidad

$$\boldsymbol{\sigma}_a \boldsymbol{\sigma}_b = \delta_{ab} \mathbf{1} + i\epsilon_{abc}^c \boldsymbol{\sigma}_c \quad (2.39)$$

se obtiene

$$(\boldsymbol{\sigma}_a \boldsymbol{\sigma}_b)_{rr'} = \delta_{ab} \delta_{rr'} + i\epsilon_{abc}^c (\boldsymbol{\sigma}_c)_{rr'} \quad (2.40)$$

Por lo tanto, la densidad de Higgs resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs}^{SU(2)} &= -\frac{1}{2} \sum_r^2 (\partial_\mu \rho_r(x)) (\partial^\mu \rho_r(x)) \\ &- \lambda \sum_{k,k'}^2 \left( \frac{f}{2} \rho_k(x) \rho_{k'}(x) + \sqrt{8f} \rho_k(x) \rho_{k'}^2(x) + \frac{\rho_k^2(x) \rho_{k'}^2(x)}{4} \right) \\ &- \frac{g^2 f}{8} \sum_a^3 \mathcal{W}_\mu^{a\prime} \mathcal{W}^{a\prime\mu} \\ &- \frac{g^2}{4} \sum_a^3 \sum_r^2 \mathcal{W}_\mu^{a\prime} \mathcal{W}^{a\prime\mu} \left( \sqrt{2f} \rho_r(x) + \frac{\rho_r^2(x)}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Así, los 2 bosones de Higgs poseen la masa

$$m_\rho^2 = \lambda f \quad (2.42)$$

y los 3 campos gauge no abelianos

$$m_{\mathcal{W}}^2 = \frac{g^2 f}{4} \tag{2.43}$$

### 3. APLICACIÓN DEL MECANISMO

Los campos que poseen una lateralidad, izquierda o derecha, bien definida se denominan campos quirales. Los campos quirales mínimos son los campos espinoriales con dos componentes independientes, campos de Weyl con lateralidad izquierda y campos de Weyl con lateralidad derecha. Los campos espinoriales libres con lateralidad izquierda poseen helicidad negativa, es decir, la proyección del espín respecto a la dirección del *momentum* es  $-1/2$ . La helicidad es Lorentz invariante si la partícula se mueve a la velocidad de la luz, por lo tanto los campos quirales describen partículas sin masa.

Los campos espinoriales másicos deben contener ambas componentes de lateralidad. El término de la masa debe ser de la forma

$$\alpha(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (3.1)$$

Por ejemplo, en el Modelo Estándar, el neutrino se define con helicidad negativa, es decir, lo describe un campo de Weyl con lateralidad izquierda y por lo tanto no posee masa por la ausencia de la otra componente.

A partir de las matrices  $\sigma^\mu$  y  $\bar{\sigma}^\mu$ , con

$$\sigma^0 = \mathbf{1} \quad \bar{\sigma}^0 = \mathbf{1} \quad \bar{\sigma}^i = -\sigma^i \quad (3.2)$$

se obtiene la forma de la densidad lagrangiana cinética para el campo de Weyl con lateralidad izquierda

$$\mathcal{L}_L = -i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (3.3)$$

y para los campos de Weyl con lateralidad derecha

$$\mathcal{L}_R = -i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (3.4)$$

Así, la densidad de Dirac se define como

$$\mathcal{L} = -i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L) \quad (3.5)$$

la cual es invariante ante la transformación de paridad  $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$ ,  $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \leftrightarrow \sigma^\mu \partial_\mu$ . Dicha densidad es utilizada en el Modelo Estándar para representar a los fermiones fundamentales, es decir, los leptones y quarks son partículas de Dirac.

Para que el mecanismo de Higgs sea el responsable de la generación de las masas de los fermiones, se deben introducir las constantes de acoplo de Yukawa (ver ref. 10). Estas constantes son parámetros libres, por lo tanto, las masas de los fermiones dependen de ellas y de los parámetros definidos en el potencial de Higgs, esto introduce un grado mayor de arbitrariedad comparada con la parametrización de la masa de los campos gauge.

### 3.1. Aplicación a campos de Weyl

De la parametrización de los campos escalares complejos y la transformación gauge unitaria, se tiene que

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{f}{2N}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_k(x) \quad (3.6)$$

De los multipletes de los campos de Weyl  $\psi_{j,L}$ ,  $\psi_{j,R}$  con  $j = 1 \dots M$  y del término de la masa (3.1), se propone que los campos espinoriales adquieran masa por medio de

$$\sum_k^N \sum_{j,j'}^M \left( (\mathbf{G}_k)_{jj'} \psi_{j,L}^\dagger \phi_k(x) \psi_{j',R} + (\mathbf{G}_k)_{j'j}^* \psi_{j',R}^\dagger \phi_k^*(x) \psi_{j,L} \right) \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{G}_k$  se denomina matriz de Yukawa. Sustituyendo (3.6) en la expresión anterior se obtiene

$$\sum_k^N \sum_{j,j'}^M (\mathbf{G}_k)_{jj'} \left( \sqrt{\frac{f}{2N}} \psi_{j,L}^\dagger \psi_{j',R} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{j,L}^\dagger \rho_k(x) \psi_{j',R} \right) + \text{c.h.} \quad (3.8)$$

donde c.h. representa el conjugado hermitico. Definiendo los vectores columna

$$\mathbf{\Psi}_L = \begin{pmatrix} \psi_{1,L} \\ \psi_{2,L} \\ \vdots \\ \psi_{M,L} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Psi}_R = \begin{pmatrix} \psi_{1,R} \\ \psi_{2,R} \\ \vdots \\ \psi_{M,R} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

el término de la masa se reescribe como

$$\sqrt{\frac{f}{2N}} \sum_k \mathbf{\Psi}_L^\dagger \mathbf{G}_k \mathbf{\Psi}_R + \text{c.h.} \quad (3.10)$$

Para diagonalizar la matriz de Yukawa se introduce la transformación biunitaria

$$\mathbf{V}_L^\dagger \mathbf{G}_k \mathbf{V}_R = \mathbf{Y}_k \quad (3.11)$$

con  $(\mathbf{Y}_k)_{jj'} = y_{kj} \delta_{jj'}$ ,  $\mathbf{V}_{L/R}^\dagger = \mathbf{V}_{L/R}^{-1}$  y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Psi}}_L &= \mathbf{V}_L^\dagger \mathbf{\Psi}_L \\ \tilde{\mathbf{\Psi}}_R &= \mathbf{V}_R^\dagger \mathbf{\Psi}_R \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por lo tanto

$$\sqrt{\frac{f}{2N}} \sum_k \mathbf{\Psi}_L^\dagger \mathbf{G}_k \mathbf{\Psi}_R + \text{c.h.} = \sqrt{\frac{f}{2N}} \sum_j \left( \sum_k y_{kj} \right) \tilde{\psi}_{j,L}^\dagger \tilde{\psi}_{j,R} + \text{c.h.} \quad (3.13)$$

Así, se obtiene la masa del  $j$ -ésimo fermión

$$m_j = \sqrt{\frac{f}{2N}} \sum_k y_{kj} \quad (3.14)$$

Por último se observa otro producto del acople, segundo término en (3.8), la interacción del campo escalar  $\rho_k$  con los campos de Weyl.

### 3.2. Grados de libertad de espín

Los grados de libertad de espín para el sistema, constituido por  $N$  campos escalares complejos y  $N^2 - 1$  campos gauge no abelianos, donde todos los generadores rompen espontáneamente la simetría

$$[1 \cdot N]_\rho + [1 \cdot (N^2 - 1)]_\theta + [2 \cdot (N^2 - 1)]_{\mathcal{H}} = [1 \cdot N]_\rho + [3 \cdot (N^2 - 1)]_{\mathcal{H}} \quad (3.15)$$

es invariante luego de aplicar el mecanismo de Higgs, los grados de libertad de los bosones de Goldstone son transferidos a los medidores vectoriales.

Para estudiar los detalles de dicha transferencia, consideremos la ecuación de movimiento de un campo vectorial abeliano sin masa es

$$\square \mathcal{B}_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu \mathcal{B}_\nu) = 0 \quad (3.16)$$

la cual se puede reducir a

$$\square \mathcal{B}_\mu = 0 \quad (3.17)$$

empleando la transformación gauge

$$\mathcal{B}_\mu \rightarrow \mathcal{B}'_\mu = \mathcal{B}_\mu + \partial_\mu \chi \quad (3.18)$$

y

$$\square \chi = 0 \quad (3.19)$$

La solución se expresa en términos de la expansión de Fourier

$$\mathcal{B}_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k^0} \left[ a_\lambda(k) \epsilon_\mu^\lambda(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) (\epsilon_\mu^\lambda(k))^* e^{ikx} \right] \quad (3.20)$$

con  $\epsilon_\mu^\lambda$  como los cuatro cuadvectores de polarización. La condición impuesta por la transformación gauge,  $\partial^\mu \mathcal{B}_\mu = 0$ , implica que

$$k^\mu \epsilon_\mu^\lambda(k) = 0 \quad (3.21)$$

y la ecuación de movimiento

$$k^2 = 0 \quad (3.22)$$

Analizando el movimiento en el marco de referencia donde

$$k = (|\mathbf{k}|, 0, 0, |\mathbf{k}|) \quad (3.23)$$

se escoge la base  $\epsilon_\mu^\lambda(k) = \delta_\mu^\lambda$  y así  $\epsilon_\mu^{1,2}(k)$  son transversos. De la transformación del campo se tiene

$$\sum_{\lambda=0}^3 a_\lambda(k) \epsilon_\mu^\lambda(k) \rightarrow \sum_{\lambda=0}^3 (a_\lambda(k) \epsilon_\mu^\lambda(k) - ik_\mu \tilde{\chi}(k)) \quad (3.24)$$

para soluciones de (3.19) del tipo  $\tilde{\chi}(k)e^{\pm ikx}$ . Por lo tanto, se puede escoger  $\tilde{\chi}(k)$  de tal forma que se eliminen  $a_0(k)$  y  $a_3(k)$ , así, las componentes restantes solamente se encuentran asociadas a los cuadvectores de polarización transversos. Representan polarizaciones lineales en cada uno de los ejes del plano de polarización, realizando la rotación

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^+ &= \epsilon_\mu^1 + i\epsilon_\mu^2 \\ \epsilon_\mu^- &= \epsilon_\mu^1 - i\epsilon_\mu^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

se obtiene una descripción en términos de polarizaciones circulares con lateralidad derecha e izquierda, las cuales corresponden a la helicidad +1 y -1, respectivamente.

Luego de haber aplicado el mecanismo de Higgs, la ecuación de movimiento del campo se transforma en

$$(\square + m^2)\mathcal{B}_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu \mathcal{B}_\nu) = 0 \quad (3.26)$$

Para este caso se obtiene

$$k^\mu \epsilon_\mu^\lambda(k) = 0 \quad (3.27)$$

y

$$k^2 = m^2 \quad (3.28)$$

Analizando el movimiento en el marco de referencia donde

$$k = (\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, 0, 0, |\mathbf{k}|) \quad (3.29)$$

se escoge la base

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^0(k) &= (0, 0, 0, 0) & \epsilon_\mu^1(k) &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_\mu^2(k) &= (0, 0, 1, 0) & \epsilon_\mu^3(k) &= (|\mathbf{k}|, 0, 0, \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Así, el cuadrivector  $\epsilon_\mu^3(k)$  representa la polarización longitudinal y le corresponde la helicidad 0.

Por lo tanto, se demostró, para el caso más sencillo, que el mecanismo de Higgs se puede interpretar como un mecanismo generador de grados de libertad de espín de las partículas mediadoras.



## 4. APLICACIÓN DEL MECANISMO AL MODELO ESTÁNDAR

El Modelo Estándar describe las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles de los constituyentes básicos de la materia. Es una teoría cuántica de campo gauge invariante basada en el grupo de simetría

$$G_{MS} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (4.1)$$

La teoría de las interacciones fuertes, Cromodinámica Cuántica, se basa en el grupo de color  $SU(3)_C$  y la teoría de las interacciones electrodébiles en el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , el cual sufre un rompimiento espontáneo de simetría a  $U(1)_{EM}$ .

El mecanismo de rompimiento de simetría tuvo origen en la física de la materia condensada, al observar que las ecuaciones de movimiento de fotones que se encuentran dentro de un superconductor, describen partículas con masa. Sus consecuencias fueron exploradas en 1961 por Nambu <sup>1</sup> y Goldstone <sup>2</sup>, y su generalización e interpretación fue desarrollada en 1964 de forma independiente por Higgs <sup>3</sup>, Brout y Englert <sup>4</sup>, Guralnick, Hagen y Kibble <sup>5</sup>.

La teoría electrodébil es el resultado de los trabajos de Glashow <sup>6</sup>, Weinberg <sup>7</sup> y Salam

---

<sup>1</sup>*Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. Physical Review* **122**: 345.

<sup>2</sup> *Field theories with "Superconductor" solutions. Il Nuovo Cimento* **19**: 154–164.

<sup>3</sup>*Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, Physical Review Letters* **13** (16): 508.

<sup>4</sup>*Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, Physical Review Letters* **13** (9): 321.

<sup>5</sup>*Global Conservation Laws and Massless Particles, Physical Review Letters* **13** (20): 585.

<sup>6</sup>*Partial symmetries of weak interactions, Glashow, Nucl. Phys.* **22** (1961) 579-588.

<sup>7</sup>*A model of leptons, Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264-1266.

<sup>8</sup>. Esta teoría, llamada también teoría GWS, basada en el grupo de simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , asume la existencia de bosones vectoriales medidores cargados  $W^\pm$  y neutrales  $Z^0, B$  con fermiones elementales sin masa. Como consecuencia de aplicar el mecanismo a la simetría, los leptones, quarks y los bosones  $W^\pm, Z^0$  adquieren masa, dando como resultado una nueva partícula fundamental, el bosón de Higgs.

La evidencia experimental comienza con las corrientes neutras débiles que fueron observadas por primera vez en 1973, en el Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN), en la cámara de burbujas Gargamelle. En ésta, se analizaron los procesos de dispersión neutrino-electrón,  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ , los cuales la teoría GWS indica que se encuentran mediados por el bosón  $Z^0$ . Posteriormente en 1983, mediante el acelerador Super Proton Synchrotron (SPS) del CERN, los experimentos UA1 y UA2 observaron los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  a través de sus decaimientos, confirmando las predicciones del modelo electrodébil. Las masas de dichos bosones y el parámetro electrodébil de mezcla fueron medidos en el siguiente experimento del CERN, en el colisionador Large Electron Positron (LEP).

Finalmente, el CERN construye el Large Hadron Collider (LHC), con el propósito, entre otros, de observar el mecanismo de Higgs por medio del bosón de Higgs. El LHC está constituido por siete detectores, siendo los más generales A Toroidal LHC Apparatus (ATLAS) y Compact Muon Solenoid (CMS).

#### 4.1. Teoría electrodébil

En el Modelo Estándar los fermiones fundamentales, partículas con espín 1/2, se dividen en dos categorías: quarks y leptones. Éstos a su vez son agrupados en generaciones

---

<sup>8</sup> *Weak and electromagnetic interactions, Proc. of the 8th Nobel Symposium on 'Elementary Particle Theory, Relativistic Groups and Analyticity', Stockholm, Sweden, 1968, edited by N. Svartholm, p. 367-377.*

$$\begin{aligned}
\text{Quarks} & \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \\
\text{Leptones} & \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Se distinguen por el hecho de que los quarks participan en las interacciones fuertes y electrodébiles, mientras que los leptones solamente en las interacciones electrodébiles. Las interacciones electrodébiles pueden estudiarse de forma separada a las interacciones fuertes, dado que la simetría de color  $SU(3)_C$  no se rompe y no existe una mezcla entre los sectores  $SU(3)_C$  y  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

El grupo de simetría  $SU(2)_L$  es llamado isoespín débil. El subíndice  $L$  indica que los elementos del grupo actúan de una forma no trivial solamente en las componentes con lateralidad izquierda (Left). Este grupo posee tres generadores  $I_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ). En la representación irreducible del grupo se definen los dobletes

$$\mathbf{l}_{e,L} = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_{\mu,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_{\tau,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{q}_{1,L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{2,L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{3,L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Los dobletes de los leptones se definen respecto a la base

$$\mathbf{l}_{\alpha,L} = \nu_{\alpha,L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l + \alpha_L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_l \tag{4.5}$$

con  $\alpha = e, \mu, \tau$ , los dobletes de los quarks

$$\mathbf{q}_{\kappa,L} = \chi_{\kappa,L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_q + \eta_{\kappa,L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_q \tag{4.6}$$

con  $\kappa = 1, 2, 3$  y

$$\chi_{1,L} = u_L, \quad \chi_{2,L} = c_L, \quad \chi_{3,L} = t_L, \quad \eta_{1,L} = d_L, \quad \eta_{2,L} = s_L, \quad \eta_{3,L} = b_L \quad (4.7)$$

Así, la representación matricial del operador  $I_3$  es la misma para ambas clases de dobletes

$$\mathbf{I}_{3,l}\mathbf{l}_{\alpha,L} = \frac{\sigma_3}{2}\mathbf{l}_{\alpha,L} \quad \mathbf{I}_{3,q}\mathbf{q}_{\kappa,L} = \frac{\sigma_3}{2}\mathbf{q}_{\kappa,L} \quad (4.8)$$

El grupo de simetría  $U(1)_Y$  es llamado hipercarga débil. Su generador  $Y$  conmuta con los generadores de la simetría de isospín débil y sus representaciones matriciales están dadas por

$$\mathbf{Y}_l = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

entonces

$$\mathbf{Y}_l\mathbf{l}_{\alpha,L} = -\mathbf{l}_{\alpha,L} \quad \mathbf{Y}_q\mathbf{q}_{\kappa,L} = \frac{1}{3}\mathbf{q}_{\kappa,L} \quad (4.10)$$

La carga eléctrica está dada por la relación de Gell-Man-Nishijima

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3 + \frac{\mathbf{Y}}{2} \quad (4.11)$$

donde

$$\mathbf{Q}_l\mathbf{l}_{\alpha,L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{l}_{\alpha,L} \quad \mathbf{Q}_q\mathbf{q}_{\kappa,L} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{q}_{\kappa,L} \quad (4.12)$$

Para las componentes de lateralidad derecha (Right) se definen los singletes

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R, \quad u_R, \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R \quad (4.13)$$

Éstos son eigenestados de los operadores  $I_3$  y  $Y$ , los cuales satisfacen

$$I_{3,l/q}f_R = 0 \quad (4.14)$$

con  $f = e, \mu, \tau, u, d, c, s, t, b$ , y para la hipercarga débil

$$Y_l f_R = -2f_R \quad \text{para } f = e, \mu, \tau \quad (4.15)$$

$$Y_q f_R = \frac{4}{3}f_R \quad \text{para } f = u, c, t \quad (4.16)$$

$$Y_q f_R = -\frac{2}{3}f_R \quad \text{para } f = d, s, b \quad (4.17)$$

Para generar la masa de los mediadores se introduce el doblete de Higgs

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

donde los bosones de Goldstone han sido absorbidos por los campos gauge por medio de la transformación gauge unitaria y el campo  $H(x)$  se denomina el campo de Higgs. El valor de expectación del vacío está dado por

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Así, el potencial de Higgs resulta

$$V = \lambda \left( \frac{1}{2}(v + H)^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (4.20)$$

$$= \frac{2\lambda v^2}{2} H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \quad (4.21)$$

de donde se obtiene el término de masa del bosón de Higgs

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} \quad (4.22)$$

y los autoacoples.

La densidad gauge, la cual incluye a los campos gauge, se define como

$$\mathcal{L}_{Gauge} = \mathcal{L}_{Higgs} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu} \quad (4.23)$$

donde

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{W}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu^a + g\varepsilon_{bc}^a \mathcal{W}_\mu^b \mathcal{W}_\nu^c \quad (4.24)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{B}_\nu - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu \quad (4.25)$$

siendo los campos  $\mathcal{W}_\nu^a$  no abelianos y  $\mathcal{A}_\nu$  abeliano. Las interacciones de dichos campos con el campo de Higgs provienen de la derivada covariante, definida en forma matricial como

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{1}\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\sigma}_a \mathcal{W}_\mu^a - i\frac{g'}{2}\mathbf{1}\mathcal{B}_\mu^a \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

con las representaciones matriciales

$$\mathbf{I}_{a,\phi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_a, \quad \mathbf{Y}_\phi = \mathbf{1}, \quad \mathbf{Q}_\phi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Desarrollando la derivada, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H - i\frac{g}{2}(\mathcal{W}_\mu^1 - i\mathcal{W}_\mu^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) + \frac{i}{2}(g\mathcal{W}_\mu^3 - g'\mathcal{B}_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H) \quad (4.28)$$

La densidad de Higgs resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{m_H^2}{2}H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 \\ &+ g^2(\mathcal{W}_\mu^1 \mathcal{W}^{1\mu} + \mathcal{W}_\mu^2 \mathcal{W}^{2\mu}) \frac{(v+H)^2}{8} \\ &+ \left[ (\mathcal{W}_\mu^3, \mathcal{B}_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{3\mu} \\ \mathcal{B}^\mu \end{pmatrix} \right] \frac{(v+H)^2}{8} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donde se reconocen los términos de masa

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v}{2} \right)^2 \left[ g^2(\mathcal{W}_\mu^1 \mathcal{W}^{1\mu} + \mathcal{W}_\mu^2 \mathcal{W}^{2\mu}) + (\mathcal{W}_\mu^3, \mathcal{B}_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{3\mu} \\ \mathcal{B}^\mu \end{pmatrix} \right] \quad (4.30)$$

Los campos físicos se introducen por medio de las transformaciones

$$\mathcal{W}^{\pm\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{W}^{1\mu} \mp i\mathcal{W}^{2\mu}) \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}^\mu \\ \mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{3\mu} \\ \mathcal{B}^\mu \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

donde los campos gauge  $\mathcal{W}^{\pm\mu}$  representan a los medidores cargados  $W^\pm$ ,  $\mathcal{Z}^\mu$  a  $Z$ ,  $\mathcal{A}^\mu$  al fotón y  $\theta_W$  se denomina ángulo de mezcla débil. Por lo tanto, el término de masa para los  $\mathcal{W}^{\pm\mu}$  resulta

$$\frac{1}{2} \left(\frac{vg}{2}\right)^2 (\mathcal{W}_\mu^+ \mathcal{W}^{-\mu} + \mathcal{W}_\mu^- \mathcal{W}^{+\mu}) \quad (4.33)$$

y para los  $\mathcal{Z}^\mu, \mathcal{A}^\mu$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 (\mathcal{Z}_\mu, \mathcal{A}_\mu) \begin{pmatrix} (g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W)^2 & h(\theta_W) \\ h(\theta_W) & (g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^\mu \\ \mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

con

$$h(\theta_W) = \cos^2 \theta_W [(g^2 - g'^2) \tan \theta_W + gg'(\tan^2 \theta_W - 1)] \quad (4.35)$$

Dado que el fotón no posee masa, se deduce que

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (4.36)$$

y en consecuencia

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (4.37)$$

Así, la matriz resulta

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 (\mathcal{Z}_\mu, \mathcal{A}_\mu) \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}^\mu \\ \mathcal{A}^\mu \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Por lo tanto, se obtienen las masas de los mediadores

$$m_{\mathcal{W}\pm} = \frac{vg}{2} \quad (4.39)$$

$$m_{\mathcal{Z}} = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \quad (4.40)$$

$$m_{\mathcal{A}} = 0 \quad (4.41)$$

La densidad de Higgs, reescrita en términos de los campos físicos, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{m_H^2}{2}H^2 - \lambda vH^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 \\ & + \frac{m_{\mathcal{W}\pm}}{2}(\mathcal{W}_\mu^+\mathcal{W}^{-\mu} + \mathcal{W}_\mu^-\mathcal{W}^{+\mu}) + \frac{g^2v}{4}(\mathcal{W}_\mu^+\mathcal{W}^{-\mu} + \mathcal{W}_\mu^-\mathcal{W}^{+\mu})H \\ & + \frac{g^2}{8}(\mathcal{W}_\mu^+\mathcal{W}^{-\mu} + \mathcal{W}_\mu^-\mathcal{W}^{+\mu})H^2 + \frac{m_{\mathcal{Z}}}{2}\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}^\mu + \frac{g^2v}{4}\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}^\mu H \\ & + \frac{g^2}{8}\mathcal{Z}_\mu\mathcal{Z}^\mu H^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para reescribir la densidad cinética gauge, en términos de los campos físicos, se propone la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_\mu^1 \\ \mathcal{W}_\mu^2 \\ \mathcal{W}_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_W & \sin\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\mu^+ \\ \mathcal{W}_\mu^- \\ \mathcal{Z}_\mu \\ \mathcal{A}_\mu \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Las componentes están dadas por

$$\mathcal{W}_\mu^a = (\mathbf{R})_d^a \mathcal{O}_\mu^d \quad (4.44)$$

con  $\mathcal{O}_\mu^1 = \mathcal{W}_\mu^+$ ,  $\mathcal{O}_\mu^2 = \mathcal{W}_\mu^-$ ,  $\mathcal{O}_\mu^3 = \mathcal{Z}_\mu$  y  $\mathcal{O}_\mu^4 = \mathcal{A}_\mu$ . Así los campos de Yang-Mills resultan

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \mathcal{C}_{\mu\nu}^a + g\eta_{ef}^a \mathcal{O}_\mu^e \mathcal{O}_\nu^f \quad (4.45)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = -\sin\theta_W \mathcal{C}'_{\mu\nu} + \cos\theta_W \mathcal{C}''_{\mu\nu} \quad (4.46)$$

con  $\mathcal{C}_{\mu\nu}^a = (\mathbf{R})_d^a (\partial_\mu \mathcal{O}_\nu^d - \partial_\nu \mathcal{O}_\mu^d)$ ,  $\eta_{ef}^a = \varepsilon_{bc}^a (\mathbf{R})_e^b (\mathbf{R})_f^c$ ,  $\mathcal{C}'_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{O}_\nu^3 - \partial_\nu \mathcal{O}_\mu^3$  y  $\mathcal{C}''_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{O}_\nu^4 - \partial_\nu \mathcal{O}_\mu^4$ .



La densidad, en una notación compacta, resulta

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \left[ \mathcal{C}_a^{\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu}^a + \text{sen}^2 \theta_W \mathcal{C}'^{\mu\nu} \mathcal{C}'_{\mu\nu} + \text{cos}^2 \theta_W \mathcal{C}''^{\mu\nu} \mathcal{C}''_{\mu\nu} - \text{sen} \theta_W \text{cos} \theta_W (\mathcal{C}'^{\mu\nu} \mathcal{C}''_{\mu\nu} + \mathcal{C}''^{\mu\nu} \mathcal{C}'_{\mu\nu}) \right] \\
& -\frac{g}{4} \left[ \eta_{ef}^a \mathcal{C}_a^{\mu\nu} \mathcal{O}_\mu^e \mathcal{O}_\nu^f + \eta_{af}^e \mathcal{O}_e^\mu \mathcal{O}^{f\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu}^a \right] - \frac{g^2}{4} \left[ \eta_{af}^e \eta_{e'f'}^a \mathcal{O}^{e\mu} \mathcal{O}^{f\nu} \mathcal{O}_\mu^{e'} \mathcal{O}_\nu^{f'} \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Desarrollando los coeficientes  $\eta$ , se observan los términos de las interacciones entre los mediadores y las autointeracciones de  $\mathcal{W}^\pm$  y  $\mathcal{Z}$ . De los resultados (4.42) y (4.47), se reconocen las interacciones elementales de la densidad gauge, las cuales se muestran en la figura 1.

El término de masa para los fermiones está dado por

$$-\sum_f \frac{y_f v}{\sqrt{2}} (f_L^\dagger f_R + f_R^\dagger f_L) - \sum_f \frac{y_f}{\sqrt{2}} (f_L^\dagger f_R + f_R^\dagger f_L) H \tag{4.48}$$

con  $f = e, \mu, \tau, u, d, c, s, t, b$ . Así, las masas de los fermiones están dadas por

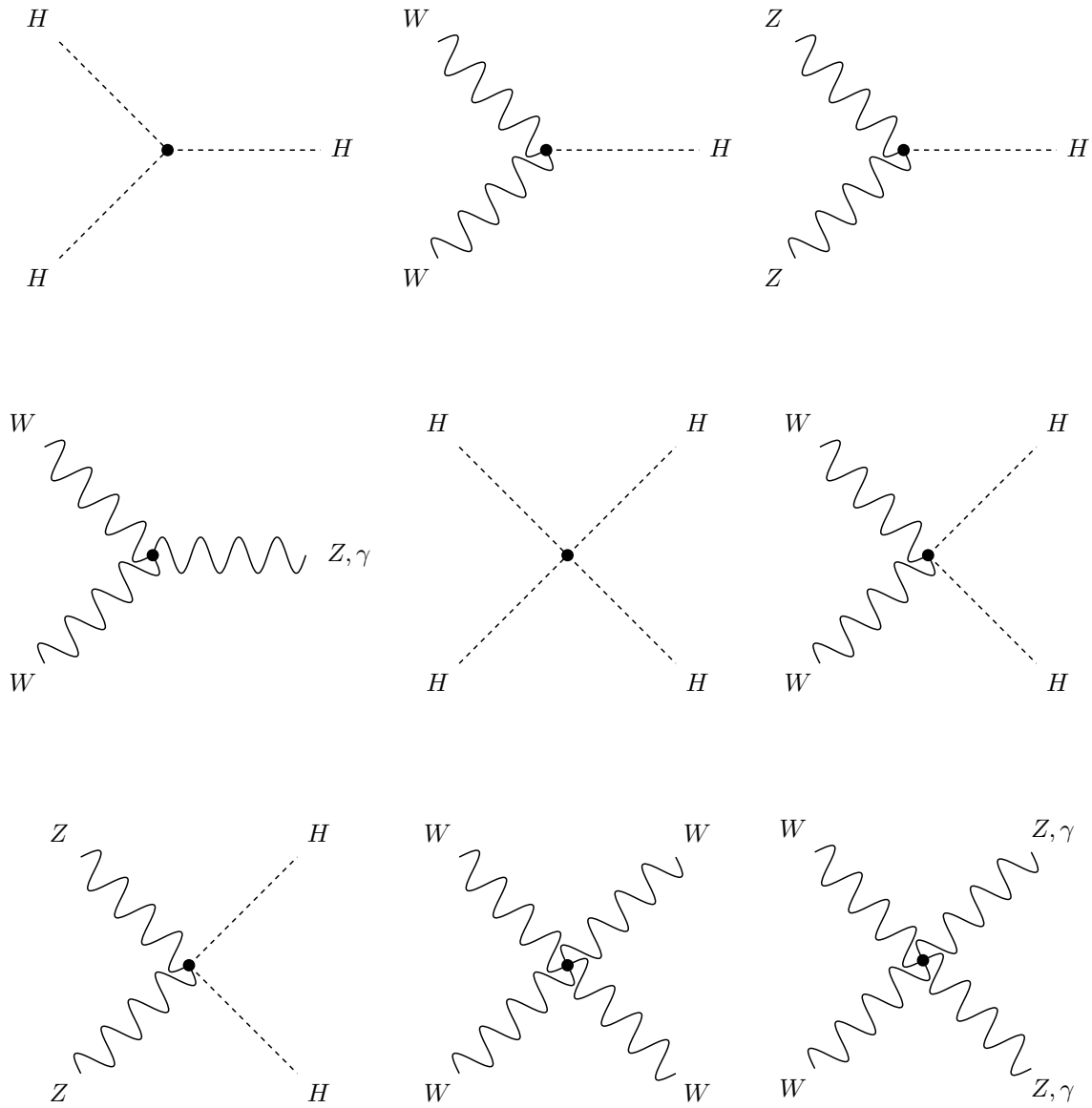
$$m_f = \frac{y_f v}{\sqrt{2}} \tag{4.49}$$

y en la figura 2 se indica la interacción del bosón de Higgs con los fermiones. Así los parámetros libres, a determinar mediante experimentos, del sector electrodébil son

$$\lambda, v, g, \theta_W, y_e, y_\mu, y_\tau, y_u, y_d, y_t, y_b, y_c, y_s \tag{4.50}$$

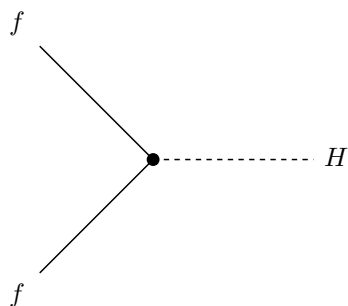
y cuatro parámetros restantes de la matriz de mezcla Cabibbo–Kobayashi–Maskawa provenientes de la transformación biunitaria.

Figura 1. Diagramas de Feynman de la densidad gauge



Fuente: elaboración propia, con programa de PyFeyn.

Figura 2. **Interacción del bosón de Higgs con los fermiones**



Fuente: elaboración propia, con programa de PyFeyn.

## 4.2. Masa del bosón de Higgs

Los resultados de las colisiones protón-protón en el experimento CMS en el LHC indican la existencia de un bosón (ver ref. 11). Este bosón posee una masa de (ver ref. 12)

$$M = 125,8 \pm 0,4 \text{ (est.)} \pm 0,4 \text{ (sis.) GeV} \quad (4.51)$$

proveniente de la combinación de los resultados de los canales de decaimiento

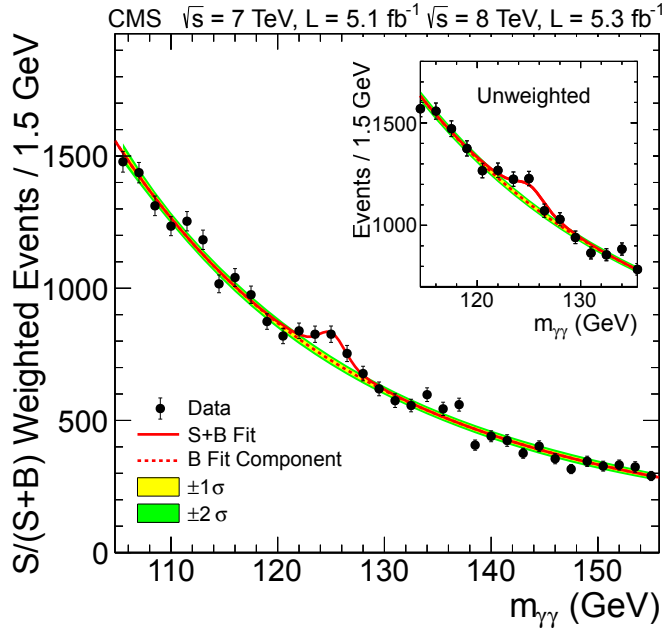
$$H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l \quad H \rightarrow \gamma\gamma \quad (4.52)$$

donde  $l = e, \tau$ . La masa se determina por medio de la resonancia en el espectro. La resonancia usualmente se describe por la fórmula relativista de Breit–Wigner

$$N(E) = \frac{k}{(E^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \quad (4.53)$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad,  $E$  la energía en un marco donde  $H$  se encuentra en reposo y  $\Gamma$  la anchura. La resonancia sucede cuando  $E = M$ , por lo tanto, si el histograma de energía de los productos del decaimiento es conocido, se puede calcular la masa de  $H$ . En la figura 3 se observa la resonancia para el proceso  $H \rightarrow \gamma\gamma$  en 125 GeV, donde  $\sqrt{s}$  representa la energía del protón, la cual corresponde a la mitad de la energía máxima del LHC y  $L$  la luminosidad integrada.

Figura 3. Espectro de masas, canal  $\gamma\gamma$



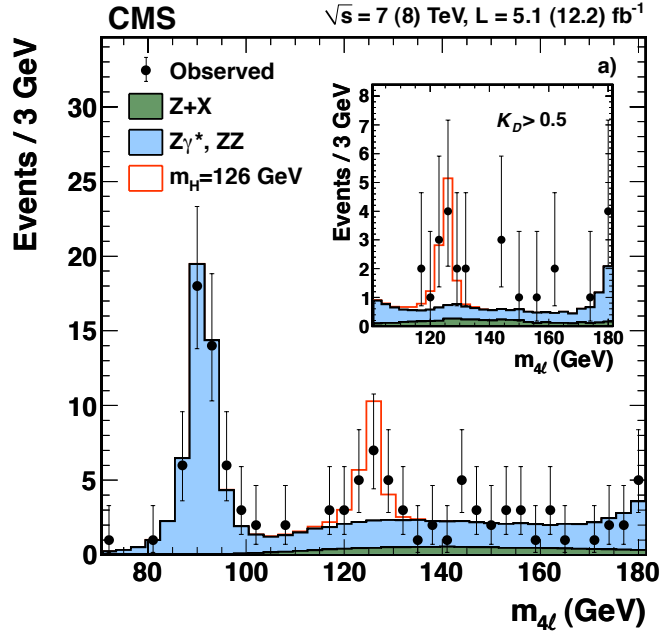
Fuente: The CMS Collaboration. "Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC". *arXiv*. 2013, hep-ex/1207.7235.

La observación del bosón en el canal  $\gamma\gamma$  implica que la resonancia corresponde a un bosón con espín 0 ó 2, el teorema de Landau-Yang (ver ref. 15) excluye el espín 1. La figura 4 muestra la resonancia para el proceso  $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l$  en

$$M_{ZZ} = 126,2 \pm 0,6 \text{ (est.)} \pm 0,2 \text{ (sis.) GeV} \quad (4.54)$$

En dicho espectro se observa la señal de fondo de fuentes reducibles  $Z + X$  e irreducibles  $ZZ/Z\gamma^*$ , la resonancia en  $\approx 90$  GeV corresponde al valor de la masa del bosón Z. La cinemática de la producción y decaimiento del bosón en este canal es sensible a su espín y paridad. Bajo la suposición del espín 0, la prueba de razón de verosimilitud (ver ref. 7) con

Figura 4. Espectro de masas, canal  $ZZ$



Fuente: The CMS Collaboration. "Study of the mass and spin-parity of the Higgs boson candidate via its decays to  $Z$  boson pairs". 2013. arXiv, hep-ex/1212.6639v2.

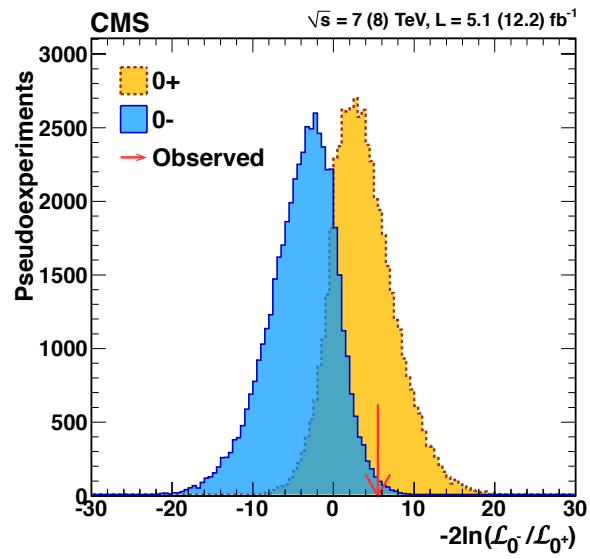
$$\lambda = \mathcal{L}_{0^-} / \mathcal{L}_{0^+} \quad (4.55)$$

de las hipótesis  $0^-$  (pseudoescalar puro) y  $0^+$  (escalar puro) genera un valor  $p$  de 0,072% para  $0^-$  y 0,7 para  $0^+$ , con

$$-2 \ln \lambda = 5,5 \quad (4.56)$$

así, favoreciendo a  $0^+$ . La figura 5 muestra las distribuciones esperadas de  $-2 \ln \mathcal{L}_{0^-} / \mathcal{L}_{0^+}$  bajo las hipótesis (histogramas)  $0^-$  y  $0^+$ , la flecha indica el valor determinado de los datos observados.

Figura 5. Hipótesis de espín



Fuente: The CMS Collaboration. "Study of the mass and spin-parity of the Higgs boson candidate via its decays to  $Z$  boson pairs". 2013. arXiv, hep-ex/1212.6639v2.

## CONCLUSIONES

1. El lenguaje con el que se describe la física de las partículas elementales es el de la teoría cuántica de campo. El formalismo Lagrangiano permite integrar las características básicas: simetrías, causalidad e interacciones locales.
2. Las simetrías determinan las interacciones entre los campos por medio del principio gauge.
3. El mecanismo de Higgs genera las masas de las partículas en el Modelo Estándar.
4. El mecanismo de Higgs genera la masa a las combinaciones de los campos de Weyl con lateralidad derecha e izquierda, por medio de los acoples de Yukawa.
5. El mecanismo de Higgs también se puede interpretar como un mecanismo generador de grados de libertad de espín de las partículas mediadoras, conservando los grados totales del sistema.
6. Los resultados experimentales recientes del LCH indican la existencia de una partícula con masa  $\approx 125$  GeV y  $J^P = 0^+$ . Partícula compatible con el bosón de Higgs.





## RECOMENDACIONES

1. Dado que el desarrollo de los temas es básico, se sugiere la continuación del estudio de la teoría cuántica de campo para cálculos posteriores, por ejemplo: secciones eficaces.
2. Varios temas del sector electrodébil no fueron mencionados o desarrollados (corrientes neutras, cargadas y la transformación de sabor de los quarks ante la interacción débil). Por lo tanto, se sugiere un estudio de dichos temas.
3. Evidencia experimental indica que el Modelo Estándar es incompleto, en consecuencia, se sugiere informarse respecto a este tema, por ejemplo: la oscilación de sabor de los neutrinos.
4. Dado que la teoría de grupos es un constructo matemático fundamental para la física de partículas, se sugiere la introducción al tema en el *pensum* de estudio de pregrado.



## REFERENCIAS

1. BRANDING, Kathering, Harvey R. Brown. "Noether's Theorems and Gauge Symmetries". *arXiv*. 2002, hep-th/0009058v1.
2. COSTA, Giovanni, Gianluigi Fogli. *Symmetries and Group Theory in Particle Physics*. Primera edición. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 306 p. ISBN 978-3-642-15481-2
3. DANOS, Michael. "Ward-Takahashi identities and Noether's theorem in Quantum Field Theory". *arXiv*. 1997, hep-th/9702096v1.
4. GURALNIK G.S., et al. "Broken Symmetries and the Goldstone Theorem". *Advances in Physics*, 1967, vol. 2, p. 567-708.
5. HOLLIK, W. "Quantum field theory and the Standard Model". *arXiv*. 2010, hep-ph/1012.3883v1.
6. PECCEI, R.D. "Exact and Broken Symmetries in Particle Physics". *arXiv*. 2000, hep-ph/0002225v1.
7. RAMACHANDRAN, Kandethody M., Chris P.Tsokos. *Mathematical Statistics with Applications*. USA: Elsevier Academic Press, 2009. 849p. ISBN 13: 978-0-12-374848-5
8. REINA, Laura. "TASI 2004 Lecture Notes on Higgs Boson Physics". *arXiv*. 2005, hep-ph/0512377v1.
9. SALAM, Abdus, J.C. Ward. "On a Gauge Theory of Elementary Interactions".

*IL NUOVO CIMENTO*, 1961. vol. XIX, No. 1. p. 165-170.

10. SANTAMARIA, Arcadi. "Masses, mixings, Yukawa couplings and their symmetries". *Physics Letters B*, 1993. vol. 205, No. 1 y 2. p. 90-97.
11. The CMS Collaboration. "Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC". *arXiv*. 2013, hep-ex/1207.7235.
12. The CMS Collaboration. "Study of the mass and spin-parity of the Higgs boson candidate via its decays to Z boson pairs". *2013*. arXiv, hep-ex/1212.6639v2.
13. WEINBERG, Steven. "What is Quantum Field Theory, and What Did We Think It Is?". *arXiv*. 1997, hep-th/9702027v1.
14. WILCZEK, Frank. "Origins of Mass". *arXiv*. 2012, hep-ph/1206.7114.
15. YANG, C.N. "Selection Rules for the Dematerialization of a Particle in Two Photons". *Physical Review*. 1950, vol. 77, No 2, p. 242-245.

## BIBLIOGRAFÍA

1. BILENKY, S.M., J. Hosek. "Glashow-Weinberb-Salam theory of electroweak interactions and the neutral currents". *Physics Reports*, 1982, No. 2, 104 p.
2. GEORGI, Howard. *Lie Algebras in Particle Physics: From isospin to Unified Theories*. Segunda edición. USA: Westview Press, 1999. 331 p. ISBN 0-7382-0233-9
3. GIUNTI, Carlo, Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. New York: Oxford University Press, 2007. 727 p. ISBN 978-0-19-850871-7 (Hbk)
4. GRIFFITHS, David. *Introduction to elementary particles*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1987. 400 p. ISBN 0-471-60386-4
5. MAGGIORE, Michele. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. New York: Oxford University Press, 2005. 307 p. ISBN 0 19 852073 5 (Hbk)
6. MARATECK, Samuel. "The Yang-Mills Field Strength Revisited". *arXiv*. 2009, math-th/0712.2623v3.
7. MOHAPATRA, Rabindra. *Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-Lepton Physics*. Tercera edición. New York: Springer-Verlag, 2003. 441 p. ISBN 0-387-95534-8
8. QUEVEDO, Fernando, et al. "Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions". *arXiv*. 2010, hep-th/1011.1491.

9. TUNG, Wu-Ki. *Group Theory in Physics: An Introduction to Symmetry Principles, Group Representations, and Special Functions in Classical and Quantum Physics*. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1985. 364 p. ISBN 9971-966-56-5
10. VAUGHN, Michael. *Introduction to Mathematical Physics*. Alemania Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH, 2007. 539 p. ISBN 978-3-527-40627-2
11. WILCZEK, Frank. "Quantum Field Theory". *arXiv*. 1998, hep-th/9803075v2.

# APÉNDICES

## APÉNDICE A

### Representación de Grupos

Un grupo es un conjunto  $\mathcal{G}$  de elementos  $g, g', g'' \dots$  con una ley de composición, denominada multiplicación, que asocia a cada par de elementos  $g, g' \in \mathcal{G}$  otro elemento  $g \circ g'$  en  $\mathcal{G}$  satisfaciendo los siguientes axiomas:

1. Asociatividad. Para cualquier  $g, g', g'' \in \mathcal{G}$  se cumple que  $(g \circ g') \circ g'' = g \circ (g' \circ g'')$ .
2. Elemento identidad. El conjunto contiene el elemento identidad  $e$ , tal que, para cada elemento  $g \in \mathcal{G}$ ,  $e \circ g = g \circ e$ .
3. Elemento inverso. Para cada elemento  $g \in \mathcal{G}$  existe un elemento  $g^{-1}$  contenido en  $\mathcal{G}$  tal que  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .

El grupo es abeliano si la ley de composición es conmutativa. En física, las simetrías continuas se describen por medio de grupos de Lie. Éstos combinan tres estructuras matemáticas distintas, dado que

1. Satisfacen los axiomas de grupo.
2. Los elementos del grupo forman un espacio topológico.

3. Los elementos del grupo constituyen una variedad analítica.

Para estudiar los detalles se recomienda revisar la referencia 2. Los grupos de Lie son grupos cuyos elementos se encuentran caracterizados por un conjunto continuo de parámetros con una ley de multiplicación que depende suavemente de los parámetros. Si  $\theta$  representa el conjunto de parámetros, entonces

$$g(\theta) = g'(\theta') \circ g''(\theta'') \quad (\text{A.1})$$

con

$$\theta = f(\theta', \theta'') \quad (\text{A.2})$$

El grupo es continuo si se escogen los parámetros para que la función  $f(\theta', \theta'')$  sea continua en cada una de sus variables. El grupo es un grupo de Lie si se escogen los parámetros para que  $f(\theta', \theta'')$  posea derivadas en todos los órdenes en sus variables.

Es de interés el estudio de los grupos de Lie compactos, grupos cuyos espacios topológicos son compactos, dado que cualquier representación del grupo es equivalente a una representación por operadores unitarios. El espacio topológico está constituido por los parámetros que caracterizan los elementos del grupo, así, en un grupo de Lie compacto, estos parámetros poseen un dominio compacto.

La representación de un grupo  $\mathcal{G}$  es un mapeo que asigna a todo elemento  $g \in \mathcal{G}$  un operador lineal  $\mathcal{U}$  que pertenece al grupo de operadores  $\mathcal{G}$

$$g \mapsto \mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g) \quad (\text{A.3})$$

con las propiedades que

1.  $\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(e) = 1$ , siendo 1 el operador identidad y
2.  $\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g) = \mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g')\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g'')$ , es decir, el mapeo preserva la estructura de grupo



El mapeo es un homomorfismo y por lo tanto la correspondencia, en general, no es uno a uno. Los operadores que pertenecen a  $\mathcal{G}$  actúan sobre un espacio vectorial  $N$ -dimensional  $\mathcal{V}^N$ . La dimensión de la representación es la dimensión del espacio vectorial donde los operadores actúan.

Utilizando la notación de Dirac, si  $\{|a_k\rangle\}$  es una base en  $\mathcal{V}^N$ , entonces cualquier vector abstracto, denominado *ket*, se expresa como  $|\alpha\rangle = \sum_{k=1}^N |a_k\rangle\langle a_k|\alpha\rangle$ . El operador  $\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)$  se expresa respecto a dicha base de la forma

$$\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g) = \sum_{l,m} |a_l\rangle\langle a_l|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_k\rangle\langle a_k| \quad (\text{A.4})$$

donde los  $N^2$  números de la forma  $\langle a_l|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_k\rangle$  se pueden arreglar en una matriz cuadrada de  $N \times N$  donde el índice de fila se le asocia al *bra* y el índice de columna al *ket*. Así se obtiene la representación matricial del operador

$$\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g) = \begin{pmatrix} \langle a_1|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_1\rangle & \langle a_1|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_2\rangle & \dots & \langle a_1|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_N\rangle \\ \langle a_2|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_1\rangle & \langle a_2|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_2\rangle & \dots & \langle a_2|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_N\rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle a_N|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_1\rangle & \langle a_N|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_2\rangle & \dots & \langle a_N|\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)|a_N\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto podemos definir el mapeo  $g \mapsto \mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g)$ , es decir, se define la representación matricial del grupo  $\mathcal{G}$ .

Dos representaciones  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  de  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathcal{V}^N$  son equivalentes si existe un operador  $S$  en  $\mathcal{V}^N$ , tal que

$$\mathcal{U}^{\mathcal{G}_2}(g) = S\mathcal{U}^{\mathcal{G}_1}(g)S^{-1} \quad (\text{A.6})$$

para cada  $g$  en  $\mathcal{G}$ , esta transformación se denomina de similaridad. Si ésta se cumple,  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  difieren solamente por un cambio de base en  $\mathcal{V}^N$ . El espacio  $\mathcal{V}^N$  contiene un subespacio  $\mathcal{W}^{N_1}$  invariante respecto a  $\mathcal{G}$  para todo elemento  $g$ , si escogemos una base en  $\mathcal{V}^N$ ,  $\{|a_k\rangle\}$ , donde los primeros  $N_1$  *kets* se encuentren en  $\mathcal{W}^{N_1}$ . Así para cualquier  $|\alpha'\rangle \in \mathcal{W}^{N_1}$  se tiene

que  $\mathcal{U}(g)|\alpha' \in \mathcal{W}^{N_1}$  para todo  $\mathcal{U}(g) \in \mathcal{G}$ . Se concluye que la representación matricial del operador es de la forma

$$\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g) & \mathbf{U}_{12}^{\mathcal{G}}(g) \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

donde  $\mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g)$  es una matriz cuadrada de  $N_1 \times N_1$ ,  $\mathbf{U}_{12}^{\mathcal{G}}(g)$  una matriz rectangular de  $N_1 \times (N - N_1)$ ,  $\mathbf{0}$  una matriz rectangular nula de  $(N - N_1) \times N_1$  y  $\mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g)$  una matriz cuadrada de  $(N - N_1) \times (N - N_1)$ . Si esto se cumple se dice que la representación es reducible. Si además el subespacio  $\mathcal{W}^{N-N_1}$  es invariante, la representación matricial posee la forma

$$\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

y se dice que la representación es completamente reducible. En este caso la representación se descompone en la suma directa de las representaciones  $\mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g), \mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g)$

$$\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g) = \mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g) \oplus \mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g) \quad (\text{A.9})$$

Una representación es irreducible si no existe un subespacio no trivial invariante con respecto a  $\mathcal{U}(g)$ . Un subespacio invariante trivial es aquel que corresponde al espacio mismo o el subespacio que solamente contenga al *ket* nulo. En general, si la representación  $\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g)$  se puede expresar como la suma directa de  $l$  submatrices  $\mathbf{U}_1^{\mathcal{G}}(g), \mathbf{U}_2^{\mathcal{G}}(g), \dots, \mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(g)$ , cada una de ellas siendo una representación irreducible,  $\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g)$  es completamente reducible.

La prueba de irreducibilidad la provee el lema de Schur, si  $\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)$  pertenece a una representación irreducible y se cumple

$$\mathcal{A}\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g) = \mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)\mathcal{A} \quad (\text{A.10})$$

para todo  $g \in \mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{A}$  es múltiplo del operador identidad. Además, la representación es unitaria si

$$\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)^\dagger \mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g) = \mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)^\dagger = 1 \quad (\text{A.11})$$

donde  $\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g)^\dagger$  es denominado del adjunto.

Cualquier elemento en la representación  $\mathcal{G}$  de un grupo de Lie compacto, que puede ser obtenido de la identidad por cambios continuos en los parámetros, se escribe como

$$\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)) = e^{i\theta^a \mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}}} \quad (\text{A.12})$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales  $\theta^a \mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}}$  junto al operador nulo forman un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $\mathcal{E}^n$  y los  $\mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}}$ , denominados generadores, forman una base en dicho espacio. Como consecuencia de la ley de multiplicación del grupo  $\mathcal{G}$ , los generadores satisfacen el álgebra de Lie

$$[\mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}}, \mathfrak{T}_b^{\mathcal{G}}] = i f_{ab}^c \mathfrak{T}_c^{\mathcal{G}} \quad (\text{A.13})$$

donde las constantes reales  $f_{ab}^c$  se denominan constantes de estructura del grupo. El operador se expresa en términos de la base  $\{|f_k\rangle\}$  en  $\mathcal{V}^N$  como

$$\mathcal{U}^{\mathcal{G}}(g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)) = \sum_{k,l} (|f_l\rangle \langle f_l| f_k\rangle \langle f_k| + i\theta^a |f_l\rangle \langle f_l| \mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}} |f_k\rangle \langle f_k|) \quad (\text{A.14})$$

con los parámetros como infinitesimales. Dado que existen  $N^2$  elementos de la forma  $\langle f_l| \mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}} |f_k\rangle$  y  $n$  parámetros, se obtiene la relación entre las dimensiones de los espacios vectoriales  $\mathcal{V}^N$  y  $\mathcal{E}^n$

$$n = N^2 \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto, en la representación matricial los elementos  $\mathbf{U}^{\mathcal{G}}(g) = e^{i\theta^a \mathbf{T}_a^{\mathcal{G}}}$  pertenecen al grupo de matrices unitarias  $U(N)$ , con  $\mathbf{T}_a^{\mathcal{G}}$  como la representación matricial de  $\mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}}$ .

En el espacio  $\mathcal{E}^n$  podemos definir un tensor métrico por medio de las constantes de estructura

$$g_{ak} = f_{ab}^c f_{kc}^b \quad (\text{A.16})$$

Si la matriz que representa al tensor métrico,  $\mathbf{g}$ , es no singular, posee su inversa y el álgebra de Lie es denominado semisimple. Así, el operador de Casimir  $\mathfrak{T}^2$  se define como

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{G}}^2 = g^{ab} \mathfrak{T}_a^{\mathcal{G}} \mathfrak{T}_b^{\mathcal{G}} \quad (\text{A.17})$$

con  $g^{ab}$  como elementos de  $\mathfrak{g}^{-1}$ . Este operador conmuta con todos elementos de la base en  $\mathcal{E}^n$

$$[\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2, \mathfrak{I}_a^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{A.18})$$

El álgebra de Lie es compacto dado que los *eigenvalores* de la matriz real  $\mathfrak{g}$  son positivos. El rango del álgebra de Lie semisimple es el número máximo de elementos linealmente independientes que conmutan en el álgebra. Para un álgebra de Lie semisimple compacto de rango  $r$  existen  $r$  operadores Casimir independientes.

De la expresión

$$[\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2, \mathcal{W}^{\mathcal{G}}(g)] = i\theta^a [\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2, \mathfrak{I}_a^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{A.19})$$

y considerando que  $\mathcal{W}^{\mathcal{G}}(g)$  pertenece a una representación irreducible, el operador de Casimir es múltiplo del operador identidad como consecuencia del lema de Schur. Si  $\{\kappa_{\mathcal{G}}(j)\}$  son los *eigenvalores* del operador de Casimir y el conjunto de *kets*  $\{|h_j\rangle\}$  corresponden a los *eigenkets*, entonces

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2 |h_j\rangle = \kappa_{\mathcal{G}}(j) |h_j\rangle \quad (\text{A.20})$$

Del lema de Schur se deduce que  $\mathcal{W}^{\mathcal{G}}(g)|h_j\rangle$  es otro *eigenket*. Así, estos *eigenkets* junto al *ket* nulo forman un subespacio invariante llamado *eigenespacio* de  $\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}$  asociado a  $\kappa_{\mathcal{G}}(j)$ ,  $\mathcal{V}^M(\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}, \kappa_{\mathcal{G}})$ . La dimensión de dicho espacio corresponde a la multiplicidad geométrica, es decir, el número de *eigenkets* linealmente independientes, denominados multiplotes. Entonces  $M \leq N$ , para  $M < N$  implica que existe una representación reducible a menos que el subespacio sea el espacio  $\mathcal{V}^N$  o el *ket* nulo. La primera posibilidad implica que el operador de Casimir posee solamente un *eigenvalor*,  $\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2 = \kappa_{\mathcal{G}}(j)1$  y el segundo  $\mathfrak{I}_{\mathcal{G}}^2 = 0$ . Así, el operador de Casimir posee un valor numérico fijo en una representación irreducible, y su valor puede usarse para caracterizar la representación irreducible.

En el Modelo Estándar de partículas se estudian las representaciones matriciales del grupo no abeliano  $SU(N)$ , en este caso  $n = N^2 - 1$ , dado que la condición  $\det \mathbf{U} = +1$

reduce por una unidad el número de generadores. El rango del álgebra de Lie  $SU(N)$  es  $r = N - 1$ . La simetría de isoespín se basa en el grupo  $SU(2)$ , el cual posee  $n = 3$  generadores  $I_1^{\mathcal{G}}, I_2^{\mathcal{G}}, I_3^{\mathcal{G}}$  y su rango es de  $r = 1$ , por lo tanto, solamente existe un operador de Casimir

$$I_{\mathcal{G}}^2 = (I_1^{\mathcal{G}})^2 + (I_2^{\mathcal{G}})^2 + (I_3^{\mathcal{G}})^2 \quad (\text{A.21})$$

Dado que

$$[I_{\mathcal{G}}^2, I_a^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{A.22})$$

los *eigenkets* del operador de Casimir son *eigenkets* compartidos de cualquier generador. Se escoge  $I_3^{\mathcal{G}}$  y su *eigenbase*  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , así, cualquier *ket* de estado se puede expresar como

$$|\alpha\rangle = |+\rangle\langle +|\alpha\rangle + |-\rangle\langle -|\alpha\rangle \quad (\text{A.23})$$

en notación vectorial, el doblete está dado por

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

con  $\alpha_+ = \langle +|\alpha\rangle, \alpha_- = \langle -|\alpha\rangle$ . La representación matricial de los generadores son las matrices de Pauli  $\{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3\}$

$$\mathbf{I}_1^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_3^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Así, el operador Casimir resulta

$$\mathbf{I}_{\mathcal{G}}^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}_1^2 + \boldsymbol{\sigma}_2^2 + \boldsymbol{\sigma}_3^2) = \frac{3}{4}\mathbf{1} \quad (\text{A.26})$$

con  $\frac{3}{4}$  como el valor numérico de su *eigenvalor*.

Por otra parte, si  $X$  pertenece a  $\mathcal{E}^n$  y  $\{\boldsymbol{\mathfrak{T}}_a\}$  forma una base, entonces este vector se puede expresar en términos de la base  $X = \theta^a \boldsymbol{\mathfrak{T}}_a$  con  $\theta^a$  como sus coordenadas. La representación adjunta se define como

$$[X, \boldsymbol{\mathfrak{T}}_b] = -(\mathbf{R})_b^c \boldsymbol{\mathfrak{T}}_c \quad (\text{A.27})$$

donde  $\mathbf{R}$  es una matriz de  $n \times n$ . En términos de las constantes de estructura

$$(\mathbf{R})_b^c = -\theta^a i f_{ab}^c \quad (\text{A.28})$$

o bien

$$(\mathbf{A}_a)_b^c = -i f_{ab}^c \quad (\text{A.29})$$

Las constantes de estructura generan una representación del álgebra, de la identidad de Jacobi

$$f_{ab}^r f_{cr}^s + f_{bc}^r f_{ar}^s + f_{ca}^r f_{br}^s = 0 \quad (\text{A.30})$$

se deduce que las matrices  $\mathbf{A}_a$  satisfacen

$$[\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b] = i f_{ab}^c \mathbf{A}_c \quad (\text{A.31})$$

Para el caso de la representación adjunta, la dimensión es el número de generadores, el cual es el número de los parámetros reales necesarios para describir el elemento del grupo. Las constantes de estructura dependen de la base escogida en  $\mathcal{E}^n$ . En la representación adjunta los generadores son matrices hermitianas y el tensor métrico está dado por

$$g_{ak} = \text{Tr}\{\mathbf{A}_a \mathbf{A}_k\} = \lambda \delta_{ak} \quad (\text{A.32})$$

donde  $\lambda > 0$ , dado que el álgebra es compacto. Las constantes de estructura se encuentran dadas por

$$f_{ab}^c = -\frac{i}{\lambda} \text{Tr}\{[\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b] \mathbf{A}^c\} \quad (\text{A.33})$$

Así, las constantes son antisimétricas ante una permutación de los subíndices  $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ .

Fuente: elaboración propia.

## APÉNDICE B

### Representación espinorial

Las transformaciones propias de Lorentz, aquellas con  $\det \mathbf{\Lambda} = +1$  forman un subgrupo,  $SO(3,1)$ . Cualquier elemento en la representación  $\mathcal{G}$  está dado por

$$\mathcal{D}^{\mathcal{G}}(g) = e^{-\frac{i}{2}(\boldsymbol{\omega})^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^{\mathcal{G}}} \quad (\text{B.1})$$

con la matriz  $\boldsymbol{\omega}$  y los generadores  $M_{\mu\nu}$  como objetos antisimétricos. El álgebra de Lie está dada por

$$[M_{\lambda\rho}^{\mathcal{G}}, M_{\mu\nu}^{\mathcal{G}}] = -i(\eta_{\lambda\nu} M_{\rho\mu}^{\mathcal{G}} - \eta_{\rho\nu} M_{\lambda\mu}^{\mathcal{G}} - \eta_{\lambda\rho} M_{\mu\nu}^{\mathcal{G}} - \eta_{\rho\mu} M_{\lambda\nu}^{\mathcal{G}}) \quad (\text{B.2})$$

Localmente, se tiene la correspondencia  $SO(3,1) \cong SU(2) \oplus SU(2)$ , por lo tanto, es conveniente ordenar las seis componentes de  $M_{\mu\nu}^{\mathcal{G}}$  en

$$J_i^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \varepsilon_i^{jk} M_{jk}^{\mathcal{G}}, \quad K_i^{\mathcal{G}} = M_{i0}^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.3})$$

con  $\varepsilon^{ijk}$  como el símbolo de Levi-Civita, los  $J_i^{\mathcal{G}}$  son generadores hermitianos y  $K_i^{\mathcal{G}}$  anti-hermitianos. En términos de  $J_i^{\mathcal{G}}$  y  $K_i^{\mathcal{G}}$ , el álgebra de Lie del grupo de Lorentz se convierte en

$$[J_i^{\mathcal{G}}, J_j^{\mathcal{G}}] = i\varepsilon_{ij}^k J_k^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.4})$$

$$[J_i^{\mathcal{G}}, K_j^{\mathcal{G}}] = i\varepsilon_{ij}^k K_k^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.5})$$

$$[K_i^{\mathcal{G}}, K_j^{\mathcal{G}}] = -i\varepsilon_{ij}^k J_k^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.6})$$

donde (B.4) es el álgebra de Lie  $SU(2)$  y esto indica que  $J_i^{\mathcal{G}}$  definido en (B.3), es el *momentum* angular. El generador  $K_i^{\mathcal{G}}$  corresponde a los *boost's* de Lorentz. También se introducen los parámetros

$$\theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^i (\boldsymbol{\omega})^{jk} \quad \eta^i = (\boldsymbol{\omega})^{i0} \quad (\text{B.7})$$

Así, el elemento se reescribe de la forma

$$\mathcal{D}^{\mathcal{G}}(g) = e^{-i\theta^i J_i^{\mathcal{G}} + \eta^i K_i^{\mathcal{G}}} \quad (\text{B.8})$$

Para la clasificación de la representación irreducible, se introducen las combinaciones lineales de los  $J_i^{\mathcal{G}}, K_i^{\mathcal{G}}$

$$M_i^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}(J_i^{\mathcal{G}} + iK_i^{\mathcal{G}}) \quad N_i^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}(J_i^{\mathcal{G}} - iK_i^{\mathcal{G}}) \quad (\text{B.9})$$

los cuales son hermitianos. El álgebra se transforma en

$$[M_i^{\mathcal{G}}, M_j^{\mathcal{G}}] = i\varepsilon_{ij}^k M_k^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.10})$$

$$[N_i^{\mathcal{G}}, N_j^{\mathcal{G}}] = i\varepsilon_{ij}^k N_k^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.11})$$

$$[M_i^{\mathcal{G}}, N_j^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{B.12})$$

Éstas  $SU(2)$  álgebras no son independientes, dado que bajo una transformación de paridad ( $x^0 \mapsto x^0, x^i \mapsto -x^i$ )

$$J_i^{\mathcal{G}} \mapsto J_i^{\mathcal{G}} \quad K_i^{\mathcal{G}} \mapsto -K_i^{\mathcal{G}} \quad (\text{B.13})$$

y la operación de la conjugación hermitiana que cambia el signo de  $i$ , intercambian  $M_i^{\mathcal{G}}$  a  $N_i^{\mathcal{G}}$ . Por otra parte, se tiene

$$[M_{\mathcal{G}}^2, M_i^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$[N_{\mathcal{G}}^2, N_i^{\mathcal{G}}] = 0 \quad (\text{B.15})$$

con los operadores de Casimir

$$M_{\mathcal{G}}^2 = (M_1^{\mathcal{G}})^2 + (M_2^{\mathcal{G}})^2 + (M_3^{\mathcal{G}})^2 \quad N_{\mathcal{G}}^2 = (N_1^{\mathcal{G}})^2 + (N_2^{\mathcal{G}})^2 + (N_3^{\mathcal{G}})^2 \quad (\text{B.16})$$

Dado que  $J_i^{\mathcal{G}} = M_i^{\mathcal{G}} + N_i^{\mathcal{G}}$  se interpreta como el espín físico, se utilizan los *eigenvalores* de los operadores  $M_{\mathcal{G}}^2, M_3^{\mathcal{G}}, N_{\mathcal{G}}^2, N_3^{\mathcal{G}}$  para etiquetar los elementos de la representación



irreducible. El grupo en general es no compacto y por lo tanto su representación irreducible de dimensión finita no puede ser unitaria. Ésto es consecuencia de la no hermiticidad del generador  $K_i^{\mathcal{G}}$ .

Para el subgrupo de rotaciones, los *eigenvalores* de los operadores de Casimir se encuentran dados en términos de los números  $m, n$ . A cada par  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  le corresponde  $(2m + 1)(2n + 1)$  *eigenestados*, los cuales se toman como la base de la representación irreducible. Las representaciones de interés físico son las tensoriales,  $m + n = 0, 1, 2, \dots$  y espinoriales  $m + n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ . Las representaciones significativas son las siguientes

1.  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ : espín 0, corresponde a la representación escalar y posee una paridad bien definida, puede aparecer como escalar o pseudoescalar.
2.  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$ : espín 1/2, corresponde a un espinor con lateralidad izquierda, por definición.
3.  $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ : espín 1/2, corresponde a un espinor con lateralidad derecha.

Estos espinores poseen dos componentes, espín arriba y espín abajo; son denominados espinores de Weyl. Cuando la paridad debe ser tomada en cuenta, se considera la combinación lineal de los espinores de Weyl  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ , obteniendo así un espinor de Dirac. Multiplicando estas representaciones espinoriales podemos generar otras representaciones, por ejemplo:  $(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) \otimes (\mathbf{0}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , espín 1, corresponde a la representación vectorial.

La forma matricial de los generadores de los espinores con lateralidad izquierda de Weyl se determina por medio  $\mathbf{M}_i^{\mathcal{G}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$  y  $\mathbf{N}_i^{\mathcal{G}} = 0$ , así

$$\mathbf{J}_i^{\mathcal{G}} = \mathbf{M}_i^{\mathcal{G}} + \mathbf{N}_i^{\mathcal{G}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{2} \quad \mathbf{K}_i^{\mathcal{G}} = -i(\mathbf{N}_i^{\mathcal{G}} - \mathbf{M}_i^{\mathcal{G}}) = i\frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{2} \quad (\text{B.17})$$

Así, el espinor con lateralidad izquierda (Left) de Weyl contravariante

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L^+ \\ \psi_L^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

se transforma ante el grupo de Lorentz como

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \mathbf{U}_L(\theta^i, \eta^i) \psi_L = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta^i \boldsymbol{\sigma}_i - \frac{1}{2}\eta^i \boldsymbol{\sigma}_i\right) \psi_L \quad (\text{B.19})$$

y el espinor con lateralidad derecha (Right) de Weyl como

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \mathbf{U}_R(\theta^i, \eta^i) \psi_R = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta^i \boldsymbol{\sigma}_i + \frac{1}{2}\eta^i \boldsymbol{\sigma}_i\right) \psi_R \quad (\text{B.20})$$

Fuente: elaboración propia.