



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

APLICACIÓN DE CONCEPTOS DE TERMODINÁMICA A MICROECONOMÍA

Rodrigo Antonio Trinidad Ortega

Asesorado por el Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, febrero de 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIÓN DE CONCEPTOS DE
TERMODINÁMICA A MICROECONOMÍA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

RODRIGO ANTONIO TRINIDAD ORTEGA

ASESORADO POR EL ING. JOSÉ RODOLFO SAMAYOA DARDÓN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, FEBRERO DE 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
VOCAL V	Br. Sergio Alejandro Donis Soto
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

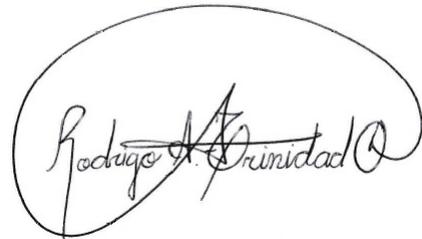
DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Amahán Sanchez Álvarez
EXAMINADOR	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
EXAMINADOR	Ing. Walter Giovanni Alvarez Marroquin
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

APLICACIÓN DE CONCEPTOS DE TERMODINÁMICA A MICROECONOMÍA

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ciencias, con fecha agosto de 2013.

A handwritten signature in black ink, enclosed within a large, hand-drawn oval. The signature is written in a cursive style and reads "Rodrigo A. Trinidad Ortega".

Rodrigo Antonio Trinidad Ortega



Facultad de Ingeniería

Guatemala, 04 de febrero del 2014

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERÍA
USAC, Ciudad.

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación "**Aplicación de conceptos de termodinámica a microeconomía**", presentada por el estudiante **Rodrigo Antonio Trinidad Ortega**, con carné No. 2007-14652; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación como asesor de dicho trabajo.

Muy atentamente,

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

RODOLFO SAMAYOA DARDON
INGENIERO CIVIL
COLEGIADO 1825


Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
Colegiado No. 1825
A S E S O R



Facultad de Ingeniería
Departamento de Física

Ref.Depto.fis.0014-2014
Guatemala, 04 de febrero del 2014

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERIA
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación **“Aplicación de conceptos de termodinámica a microeconomía”**, presentada por el estudiante **Rodrigo Antonio Trinidad Ortega**, con carné No. 2007-14652; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
Coordinador, Lic. En Física Aplicada
Departamento de Física
Facultad de Ingeniería

c.c. Archivo





El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **Rodrigo Antonio Trinidad Ortega**, titulado “APLICACIÓN DE CONCEPTOS DE TERMODINÁMICA A MICROECONOMÍA”, procede a la autorización del mismo.

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 24 de febrero de 2014

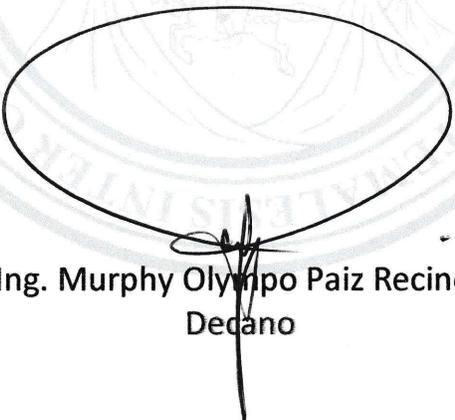
EABOP/scvs



DTG. 081.2014

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al Trabajo de Graduación titulado: **APLICACIÓN DE CONCEPTOS DE TERMODINÁMICA A MICROECONOMÍA**, presentado por el estudiante universitario **Rodrigo Antonio Trinidad Ortega**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE:



Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
Decano

Guatemala, 24 de febrero de 2014

/gdech



ACTO QUE DEDICO A:

Mi familia

Por ayudarme a seguir adelante.

AGRADECIMIENTOS A:

Dios	Por ayudarme en todo momento.
Mi familia	Por su apoyo incondicional.
Mis amigos	Por compartir su conocimiento.
Mi asesor	Por su apoyo durante mi carrera.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
GLOSARIO	XI
RESUMEN	XV
OBJETIVOS	XVII
INTRODUCCIÓN	XIX
1. TERMODINÁMICA	1
1.1. Conceptos básicos	2
1.1.1. Sistema termodinámico	2
1.1.2. Equilibrio termodinámico	3
1.1.3. Proceso termodinámico	4
1.1.4. Función de estado	4
1.1.5. Calor	5
1.1.6. Definiciones adicionales	5
1.2. Principios de la termodinámica	6
1.2.1. Principio cero	6
1.2.2. Primer principio	6
1.2.3. Segundo principio	11
1.2.4. Tercer principio	15
1.3. Proceso reversible	16
1.4. Criterios de equilibrio y espontaneidad	17
1.4.1. Sistema con paredes rígidas y diatérmicas	18
1.4.2. Sistema con paredes móviles y diatérmicas	19

1.4.3.	Esponaneidad	19
1.5.	Ecuación fundamental	20
1.5.1.	Sistemas abiertos	21
1.5.2.	Forma integrada	23
1.6.	Relaciones de Maxwell	25
1.7.	Ecuación de Gibbs-Duhem	27
2.	MECÁNICA ESTADÍSTICA	29
2.1.	Clasificación	30
2.2.	Conceptos básicos	31
2.2.1.	Estado del sistema	31
2.2.2.	Equilibrio de sistema	32
2.2.3.	Colectividades estadísticas	33
2.2.4.	Función de partición	33
2.3.	Postulado fundamental	34
2.4.	Distribución de Maxwell-Boltzmann	34
2.4.1.	Postulado de Boltzmann	37
2.4.2.	Estado de máxima probabilidad	37
2.4.3.	Energía del sistema	41
2.4.4.	Energía por partícula	42
2.4.5.	Entropía	43
2.4.6.	Determinación de la constante k	47
3.	MICROECONOMÍA	49
3.1.	Consumidor	50
3.2.	Bienes y servicios	51
3.2.1.	Precio	52
3.2.2.	Cesta de bienes y consumo	52

3.3.	Condiciones de elección	53
3.3.1.	Preferencias	54
3.3.2.	Restricción presupuestaria	56
3.4.	Curvas de indiferencia	57
3.4.1.	Continuidad	58
3.4.2.	Convexidad estricta	58
3.4.3.	Monotonicidad	59
3.5.	Función de utilidad	60
3.5.1.	Demostración	61
3.5.2.	Relación marginal de sustitución	63
3.5.3.	Utilidad marginal	64
3.6.	El problema del consumidor	64
4.	APLICACIÓN DE CONCEPTOS	67
4.1.	Termodinámica y economía	67
4.1.1.	Riqueza	67
4.1.2.	Excedente	68
4.1.3.	Ecuaciones importantes	69
4.1.4.	Analogías entre variables	70
4.1.5.	Función de estado de la utilidad	73
4.1.6.	Relaciones de Maxwell en la economía	74
4.1.7.	Relación de Gibbs-Dehum en la economía	74
4.1.8.	Resultados	75
4.2.	Mecánica estadística y economía	76
4.2.1.	Ecuaciones importantes	76
4.2.2.	Analogías entre variables	77
4.2.3.	Número de microestados	78
4.2.4.	Determinación del valor óptimo	79

4.2.5.	Entropía económica	80
CONCLUSIONES	81
RECOMENDACIONES	83
BIBLIOGRAFÍA	85
ANEXOS	89

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1.	Esquema general de un sistema termodinámico	2
2.	Sistema de calentamiento de agua	8
3.	Máquina térmica de Clausius	12
4.	Máquina térmica de Kelvin	13
5.	Ejemplo para la distribución de microestados	35
6.	Sistema dividido	43
7.	Curva de restricción presupuestaria	56
8.	Curvas de indiferencia tipo Coob-Douglas	57
9.	Existencia de la función de utilidad	62

TABLAS

I.	Convención de signos	9
II.	Número de microestados accesibles	36
III.	Ecuaciones termodinámicas	69
IV.	Analogía entre variables: termodinámica-microeconomía	72
V.	Resultados: termodinámica-microeconomía	75
VI.	Ecuaciones de mecánica estadística	76
VII.	Analogía entre variables: mecánica estadística-economía	77

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$+$	Adición
h	Altura
$f(\cdot)$	Aplicación de función
q	Calor
Δ	Cambio entre dos estados de una variable
x_i	Cantidad del i -ésimo bien en una cesta de consumo
l	Cantidad de bienes diferentes en la economía
N_i	Cantidad de partículas del i -ésimo componente
\mathbf{x}	Cesta de consumo
\geq	Comparación, mayor o igual que
$>$	Comparación, mayor que
\leq	Comparación, menor o igual que
$<$	Comparación, menor que
\wedge	Conjunción lógica
R_+^l	Conjunto de consumo
X	Conjunto de consumo factible
k_b	Constante de Boltzmann
K	Constante de proporcionalidad
α, β, ρ, t	Constantes arbitrarias
$\{\cdot\}$	Delimitadores de conjunto
d	Diferencial exacto
δ	Diferencial inexacto

∂	Diferencial parcial
\Leftrightarrow	Doble implicación
G	Energía de Gibbs
A	Energía de Helhomz
U	Energía interna
S	Entropía
\equiv	Equivalencia
R^l	Espacio vectorial de las cestas de bienes
Φ	Excedente del consumidor
$[\cdot]_{C_1, C_2, \dots, C_i}$	Expresión evaluada con C_1, C_2, \dots, C_i constantes
$!$	Factorial
\mathcal{Z}	Función de partición
u	Función de utilidad
$=$	Igualdad
\rightarrow	Implica tendencia
\Rightarrow	Implicación unilateral
i, j	Índices mudos
M	Ingresos del consumidor
\int	Integración
\oint	Integración cerrada
J	Joule
K°	Grados kelvin
\ln	Logaritmo natural
B, C, D, I, F	Macroestados del sistema termodinámico
max	Maximización
min	Mínimo
ϵ_i	Niveles de energía
ω_i	Niveles de riqueza

n	Número de componentes distintos en el sistema
Ω	Numero de microestado accesibles
L	Número de niveles de energía
n_i	Número de partículas en el i -ésimo nivel de energía
N	Número de partículas en un sistema
\in	Pertenencia de conjuntos
μ_i	Potencial químico del i -ésimo componente
p_i	Precio del i -ésimo bien.
P	Presión
\mathcal{P}_i	Probabilidad de que una partícula ocupe el i -ésimo nivel de energía
\amalg	Productoria
\succsim	Relación binaria de preferencia
\succ	Relación binaria de preferencia estricta
\sim	Relación binaria de indiferencia
\simeq	Relación binaria de indiferencia negada
$ $	Reluz, tal que
w	Riqueza
rev	Subíndice que denota una variable en un proceso reversible
ent	Subíndice que hace referencia a una variable en el entorno
uni	Subíndice que hace referencia a una variable en el universo
\sum	Sumatoria
e	Supraíndice que denota una variable económica
$*$	Supraíndice que denota un valor óptimo
$-$	Sustracción
T	Temperatura

W	Trabajo
u_{m_i}	Utilidad marginal del i -ésimo bien
$\langle \cdot \rangle$	Valor esperado
θ	Volatilidad estructural en la economía
V	Volumen

GLOSARIO

Cero absoluto	Temperatura teórica más baja posible.
Conjunto	Colección de elementos.
Conjunto abierto	Conjunto en el que todos sus elementos están rodeados por otros elementos que también pertenecen a dicho conjunto.
Conjunto cerrado	Conjunto cuyo complemento es abierto.
Conjunto vacío	Conjunto que no contiene ningún elemento.
Corolario	Consecuencia evidente de un principio que no necesita demostración.
Electromagnetismo	Rama de la física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría.
Energía	Capacidad para realizar un trabajo.
Equipartición	Distribución de una determinada propiedad o magnitud de modo idéntico para todos los componentes de un sistema.

Equiprobabilidad	De igual probabilidad.
Espacio vectorial	Es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna llamada suma y una operación externa llamada producto por un escalar, además cuenta con ocho propiedades fundamentales.
Fuerza normal	Tipo de fuerza de contacto ejercida por una superficie sobre un objeto, actúa perpendicular y hacia afuera de la superficie.
Infinitesimal	Cantidad infinitamente pequeña.
Juegos	Área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos y llevar a cabo procesos de decisión.
Macroscópico	Que se puede observar a simple vista.
Maquina térmica	Es un conjunto de elementos mecánicos que permite el intercambio de energía, generalmente a través de un eje, mediante la variación de energía de un fluido que varía su densidad significativamente al atravesar la máquina.
Mecánica cuántica	Rama de la física que se ocupa de los fenómenos físicos a escalas microscópicas, donde la acción es del orden de la constante de Planck.

Mecánica clásica	Rama de la física que estudia el comportamiento de cuerpos físicos macroscópicos en reposo, a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.
Medios continuos	Rama de la física que propone un modelo unificado para sólidos deformables, sólidos rígidos y fluidos.
Mercado	Conjunto de transacciones o acuerdos de intercambio de bienes o servicios entre individuos o asociaciones de individuos.
Permutación	Variación del orden o de la disposición de los elementos de un conjunto.
Postulado	Proposición no evidente por sí misma, ni demostrada, pero que se acepta ya que no existe otro principio del que pueda ser deducida.
Principio	Ley o regla que se cumple o debe seguirse con cierto propósito, como consecuencia necesaria de algo o con el fin de lograr cierto propósito.
Probabilidad	Método por el cual se obtiene la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.

Relación binaria	Es una relación matemática entre los elementos de dos conjuntos que puede ser representada mediante pares ordenados.
Relatividad	Compuesta por la teoría de la relatividad especial y la de la relatividad general, que pretende resolver la incompatibilidad existente entre la mecánica newtoniana y el electromagnetismo.
Reservorio	Sistema de gran tamaño con temperatura uniforme, la cual no varía aunque se extraiga o proporcione calor al mismo.
Subconjunto	Fracción o parte de un conjunto.
Teorema	Proposición que afirma una verdad demostrable.
Teoría del caos	Teoría que trata ciertos tipos de sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales.
Universo	Porción finita del espacio, formada por el sistema y el entorno que puede interactuar con él.

RESUMEN

El presente trabajo de graduación es una aplicación de los conceptos de termodinámica y mecánica estadística a la microeconomía. Está conformado por cuatro capítulos, de los cuales los primeros tres tienen una estructura similar, desarrollando una descripción teórica de cada una de las disciplinas utilizadas para la aplicación descrita en el cuarto capítulo. A continuación se describe el contenido de cada uno:

En el primer capítulo se desarrollan los principales conceptos de termodinámica. Primero se realiza una descripción de conceptos básicos que enmarcan todo el lenguaje utilizado a lo largo de este capítulo. Luego se describen los cuatro principios de esta disciplina, se presenta su ecuación fundamental para las diversas formas de energía y finalmente se exponen las relaciones de Maxwell y Gibbs-Duhem.

El segundo capítulo corresponde al desarrollo de la mecánica estadística. Primero se presenta un esquema general de esta disciplina, para luego centrar la atención en la distribución de Maxwell-Boltzmann, describiendo sus principales conceptos y resultados.

El tercer capítulo corresponde al estudio de la microeconomía desde la perspectiva de la teoría del consumidor. Se exponen los fundamentos sobre esta teoría, con especial énfasis en los conceptos necesarios para establecer la función de utilidad como representación de las preferencias del consumidor.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presenta la aplicación de los conceptos desarrollados en los capítulos precedentes a través de algunas analogías establecidas al inicio de cada sección. Básicamente este capítulo se divide en dos partes: la primera corresponde a la aplicación de la termodinámica sobre la microeconomía, obteniendo la ecuación de estado para la utilidad y las relaciones de Maxwell y Gibbs-Duhem de la economía. También se expone el concepto de temperatura y entropía económica como una medida del desarrollo y desorden en la economía respectivamente. En la segunda parte se hace uso de lo desarrollado del segundo capítulo para obtener una ecuación que exprese la distribución de la riqueza en las economías.

OBJETIVOS

General

Aplicar los conceptos de termodinámica y mecánica estadística sobre la microeconomía del consumidor, en referencia a su función de utilidad y riqueza, partiendo para ello de algunas analogías entre las variables de dichas disciplinas.

Específicos

1. Exponer los principales conceptos de cada una de las disciplinas utilizadas para la aplicación.
2. Establecer las analogías necesarias entre las disciplinas expuestas.
3. Determinar una función de estado para la utilidad que dependa de parámetros especificados por el sistema económico.
4. Establecer las relaciones de Maxwell en la economía.
5. Establecer la relación de Gibbs-Dehumen en la economía.
6. Explicar la distribución de la riqueza en las economías.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, gran parte de los planteamientos y técnicas de análisis desarrolladas en física, son en buena medida aplicables y extrapolables al ámbito de otras disciplinas como la economía, una ciencia joven en cuanto a su formalización pero cuya aplicación data desde los orígenes de la historia. Esto puede suponer una contribución importante para el avance y la reformulación de dicha disciplina, sin embargo, aunque esta posible proyección no es una hipótesis reciente, pareciera que el tema no está cimentado lo suficiente para que exista una base sólida.

En este trabajo, dos son las ramas de la física utilizadas para realizar dicha proyección. La primera corresponde a la termodinámica, disciplina que tuvo su origen en base a la experiencia y hallazgos casuales debido a la curiosidad sobre el uso del vapor, lo cual contribuyó a la formación de conocimientos que se fueron perfeccionando con el paso del tiempo, hasta dar forma a lo que hoy constituye una de las ramas de la física más completas, que ha contribuido en gran medida con el desarrollo de la humanidad. La segunda disciplina utilizada es la mecánica estadística, que, a diferencia de la termodinámica, surge como resultado de la formalización de algunos conceptos desarrollados hasta entonces.

La idea general es mostrar que mediante la aplicación de algunos conceptos de estas disciplinas sobre la economía, específicamente sobre la microeconomía como parte de esta, es posible obtener resultados equivalentes y además lograr establecer dos variables normalmente no especificadas en el estudio clásico: la temperatura y entropía económica, como medidas del desarrollo y desorden en la economía respectivamente.

1. TERMODINÁMICA

Es la rama de la física que estudia la relación entre el calor y las restantes formas de energía. Su objetivo principal, radica en obtener expresiones que modelen las propiedades macroscópicas de la materia, cuando esta se somete a distintos tipos de procesos, partiendo para ello de algunos postulados básicos denominados principios o leyes termodinámicas. Esto hace que dicha disciplina se constituya como una teoría fenomenológica.

Etimológicamente su nombre se deriva del latín y esta conformado por la unión de tres partes: el vocablo *thermos* que significa calor, el sustantivo *dinamos* que es fuerza o poder, y el sufijo *ico* que significa relativo a.

El origen de esta ciencia, nace de la experiencia y de hallazgos casuales que se perfeccionaron con el paso del tiempo, las primeras máquinas térmicas construidas fueron producto de la curiosidad y eran modificadas con el fin de realizar trabajos totalmente prácticos. No fue sino hasta 1650, que esta disciplina comenzara a formalizarse con la aparición de la primera bomba de vacío, inventada por Otto von Guericke con el fin de refutar la teoría de Aristóteles referente a la existencia del vacío. No obstante se debe destacar que se tenían algunos indicios formalizados por Galileo 60 años antes.

Posteriormente aparecieron varios estudios, como los realizados por James Joule, Sadi Carnot, Rudolf Clausius, Lord Kelvin, James Maxwell o Willard Gibbs, por mencionar algunos nombres de los grandes científicos que dieron forma a esta ciencia y cuyos principales aportes serán desarrollados a lo largo de este capítulo.

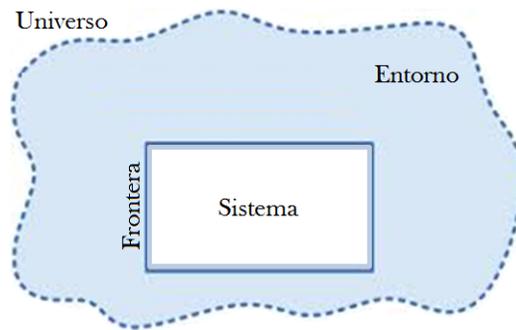
1.1. Conceptos básicos

Previo al desarrollo de los fundamentos de esta disciplina, existe una serie de conceptos básicos con los que se debe contar, a continuación se exponen los principales.

1.1.1. Sistema termodinámico

Se define como la parte del universo que es el objeto de estudio, la cual es aislada de su entorno a través de límites o fronteras. En la siguiente figura se muestra el esquema general de un sistema termodinámico.

Figura 1. Esquema general de un sistema termodinámico



Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

De acuerdo a su grado de aislamiento, el sistema puede ser clasificado como:

- Abierto: puede intercambiar materia y energía con el entorno
- Cerrado: únicamente puede intercambiar energía con el entorno
- Aislado: no se permite ningún tipo de intercambio con el entorno

Otra clasificación se debe a la homogeneidad del sistema, donde este puede ser homogéneo o no homogéneo. El primero presenta uniformidad en las propiedades macroscópicas en cada una de las partes individuales del sistema, mientras que el segundo no.

Finalmente, la última clasificación se debe a la disposición física y material con el que estén hechas las fronteras. Dicha clasificación es la siguiente:

- De acuerdo a la restricción que imponen
 - Adiabáticas: no permiten el flujo de calor
 - Diatérmicas: permiten el flujo de calor
 - Impermeables: no permiten el paso de materia
 - Permeables: permiten el paso de materia
- De acuerdo a la disposición física
 - Móviles: se pueden desplazar
 - Rígidas: no se pueden desplazar

1.1.2. Equilibrio termodinámico

Se define como el estado de un sistema que cumple de forma simultánea, las siguientes condiciones:

- Equilibrio mecánico: no existen fuerzas desequilibradas actuando sobre parte del sistema o sobre el sistema en conjunto.
- Equilibrio térmico: no hay diferencias de temperatura entre partes del sistema o entre el sistema y su entorno.
- Equilibrio químico: no tienen lugar reacciones químicas dentro del sistema ni movimiento de componente químico alguno de una parte del sistema a otra.

Cuando estas condiciones se cumplen, el equilibrio puede ser descrito en términos de coordenadas macroscópicas sin intervención del tiempo, es decir, en función de coordenadas termodinámicas. Los estados de equilibrio son fundamentales para el estudio termodinámico de un sistema, ya que toda esta teoría se refiere única y exclusivamente a dichos estados, por lo que todo postulado o concepto termodinámico, solo puede ser aplicado a estados en equilibrio.

1.1.3. Proceso termodinámico

Se define como el paso de un sistema termodinámico de un estado de equilibrio inicial a otro estado de equilibrio final. Según la naturaleza de los procesos, estos se pueden clasificar de la siguiente forma:

- De acuerdo a la reversibilidad del proceso
 - Reversibles
 - Irreversibles
- De acuerdo a la duración del proceso
 - Cuasiestático
 - Espontáneo
- De acuerdo al cambio en las variables
 - Isocórico: proceso a volumen permanece constante, $\Delta V = 0$
 - Isotérmico: proceso a temperatura permanece constante, $\Delta T = 0$
 - Isobárico: proceso a presión permanece constante, $\Delta P = 0$
 - Isoentrópico: proceso a entropía permanece constante, $\Delta S = 0$

1.1.4. Función de estado

También llamada variable de estado, es una magnitud física microscópica que caracteriza el estado de un sistema en equilibrio independientemente del proceso, a

través del cual se llevó al sistema a dicho estado. Ejemplo de variables de estado son: el volumen V , temperatura T , energía interna U , entropía S , entre otras.

1.1.5. Calor

Es la energía transferida entre sistemas, o partes de un mismo sistema, que se encuentran a diferente temperatura. El flujo de energía siempre se da del sistema con mayor temperatura hacia el de menor temperatura, hasta que se alcance el equilibrio térmico. Los mecanismos a través de los cuales se puede dicha transferencia son:

- Radiación: se da por la transferencia de energía en forma de ondas electromagnéticas.
- Conducción: la transferencia se da por contacto directo de los cuerpos.
- Convección: la transferencia se da a través de un fluido.

1.1.6. Definiciones adicionales

Finalmente, con el objetivo de evitar problemas de ambigüedad en algunos términos empleados a lo largo de este trabajo, se definen también los siguientes conceptos:

- Trabajo W : transferencia de energía a través de la frontera de un sistema termodinámico asociada a un cambio en las variables macroscópicas. De acuerdo a los mecanismos que utilice puede ser mecánico, eléctrico, magnético, entre otros.
- Presión P : fuerza normal sobre la frontera del sistema, ejercida por unidad de área.
- Volumen V : porción del universo ocupado por el sistema.

1.2. Principios de la termodinámica

Como se hizo mención al inicio de este capítulo, la termodinámica basa su estructura en sus leyes o principios, a continuación se exponen el desarrollo de cada uno de ellos.

1.2.1. Principio cero

Es también conocida con el nombre principio o ley del equilibrio térmico, fue enunciada por primera vez por Maxwell y llevada a ley por Ralph Fowler. Establece que si cuerpos separados se encuentran en equilibrio térmico con un tercer cuerpo, también están en equilibrio térmico entre sí. La importancia de esta ley, radica en el hecho de que permitió definir la temperatura como una propiedad termodinámica del sistema y no en función de las propiedades de sus componentes. Posteriormente esta nueva variable termodinámica fue definida como una magnitud escalar, relacionada con la energía interna de un sistema termodinámico.

Las aplicaciones de este principio constituyen un método para medir la temperatura de cualquier sistema. Lo cual se puede realizar escogiendo un sistema como base, caracterizado por tener una composición tal que su variación con la temperatura sea lo suficiente rápida y a la vez sea de fácil medición.

1.2.2. Primer principio

Es también conocido como principio o ley de la conservación de la energía, comúnmente es definido con la frase: la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma, que aunque parece explicar más una cuestión filosófica, pone en evidencia uno de los conceptos más fuertes de la física.

Para analizar de una mejor forma esta ley, considérese la siguiente situación: se cuenta con un sistema térmicamente aislado con un estado inicial denotado como I . Ahora se procede a realizar un proceso en el cual se hace trabajo sobre dicho sistema, hasta que se alcanza un estado final F . Si I y F son conocidos, se debe notar que la cantidad de trabajo necesario para obtener este cambio es independiente de la forma en que este sea suministrado y depende exclusivamente de dichos estados. Por lo tanto, es posible proponer la existencia de una función de estado U , denominada energía interna, para modelar este cambio de estado, debido a la variación de la energía en el sistema de la siguiente forma:

$$\Delta U = W$$

donde $\Delta U = U_B - U_A$ es la variación de energía y W es el trabajo realizado sobre el sistema.

Nuevamente considérese el mismo sistema pero bajo un escenario diferente, en este caso se elimina el aislamiento térmico y en lugar de aplicar trabajo de forma directa sobre el sistema, se suministra o retira calor al mismo, hasta obtener el mismo estado final F . La nueva expresión que modela el cambio de energía, es ahora:

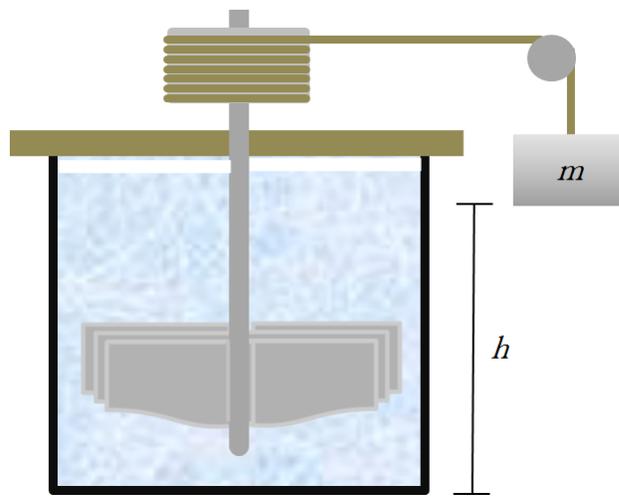
$$\Delta U = q$$

donde q representa la cantidad de calor aplicado. Lo anterior muestra una forma alternativa a través de la cual se obtiene el mismo estado final, pero por medios distintos.

Este experimento fue realizado por primera vez por Joule, quien observó que es posible elevar la temperatura del agua agitándola a través de algún medio mecánico o exponiéndola a alguna fuente de calor. La primera situación se ejemplifica en la

siguiente figura, donde el experimento consiste en dejar caer el bloque de masa m una altura h , de forma que mientras cae pone en movimiento las aspas, la cuales agitan el agua elevando su temperatura. Dado que el volumen esta fijo y la temperatura puede ser medida en todo momento, el sistema puede ser caracterizado antes y después de que el bloque caiga, caracterizando así el estado inicial y final del sistema.

Figura 2. Sistema de calentamiento de agua



Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

Para ejemplificar la segunda situación, solamente se debe eliminar el aislamiento y exponer el contenedor a una fuente de calor hasta obtener nuevamente la temperatura deseada.

Existen entonces dos procedimientos alternativos para obtener el mismo resultado. Sin embargo, estas no son las únicas formas en las que se puede realizar el proceso, por ejemplo: se podría agitar el agua al principio y después suministrar calor al sistema, o de forma inversa, o hacer ambos procesos de forma simultánea, o realizar una serie de combinaciones, es decir, no existe una única forma de obtener el mismo

estado final del sistema. Esto conlleva a una expresión más general que combina ambos mecanismos, la cual es denominada por algunos autores como la formulación matemática del primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = q + W \quad (1.1)$$

expresando así la equivalencia entre calor y trabajo como formas de energía, que pueden ser sumadas independientemente de la trayectoria.

Se debe tomar en cuenta que a pesar de que hasta el momento solamente se ha considerado la situación en la que el sistema recibe trabajo o calor del entorno, el análisis también se puede extender para el caso en que sea este el que realice trabajo y entregue calor al entorno. Para realizar esto, únicamente se debe de especificar, a través de los signos de las variables, la dirección en la que el proceso se lleva a cabo. Por convención dicha especificación se realiza según se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. **Convención de signos**

W	q	Descripción
+		El entorno realiza trabajo sobre el sistema
-		El sistema realiza trabajo sobre el entorno
	+	Flujo de calor hacia el sistema
	-	Flujo de calor hacia el entorno

Fuente: elaboración propia.

El uso de la expresión (1.1) depende de las características del proceso, si este se da en forma infinitesimal, se debe utilizar la forma diferencial de dicha expresión, la cual es la siguiente:

$$dU = \delta q + \delta W \quad (1.2)$$

Es necesario realizar algunas aclaraciones respecto a esta última expresión: primero, debido a que la energía es una función de estado, su valor es independiente de la trayectoria, por lo que un diferencial no expresa una cantidad pequeña de energía, sino un cambio en ella, matemáticamente esto significa que:

$$\int_I^F dU = U(I) - U(F) = \Delta U$$

Segundo, W y q no son funciones de estado sino de proceso, por lo que su valor si depende del camino seguido en el proceso y no de los estados inicial y final del mismo. Por tal razón, se utiliza el diferencial inexacto δ , para expresar así dicha dependencia de la trayectoria. Por lo tanto, para saber en un dU qué cantidad atribuir a la transferencia de calor y qué cantidad atribuir al trabajo realizado sobre el sistema, es preciso conocer la trayectoria seguida en el proceso, es decir, la totalidad de los estados intermedios.

Derivado de lo anterior, el primer principio puede también ser expresado en forma integral como:

$$\oint \delta q = \oint \delta w \quad (1.3)$$

donde \oint denota la integral cerrada sobre las variables.

Pero, ¿por qué se habría de expresar este principio con la frase citada al inicio de este capítulo o con su nombre alternativo y no con alguna de las ecuaciones encontradas?. La respuesta se debe a la equivalencia entre los argumentos. Esto fue observado por primera vez por Clausius, quien al considerar un sistema como el de la figura 1, analizó no solo el sistema, sino el universo de la siguiente forma: primero consideró un cambio de energía en el sistema debido a la realización de trabajo y transferencia de calor sobre el mismo, ecuación (1.1). Luego analizó el entorno, considerándolo como otro sistema que entrega trabajo y calor:

$$\Delta U_{ent} = q_{ent} - W_{ent} = -q - W$$

finalmente consideró el cambio total en el universo:

$$\Delta U_{uni} = \Delta U + \Delta U_{ent} = \Delta U - \Delta U = 0$$

expresión a través de la cual concluyó lo siguiente: la energía del universo se conserva, frase denominada como postulado de Clausius. Si bien esto es un corolario de la primera ley, es muy común que se use como forma alternativa nombrarla y definirla.

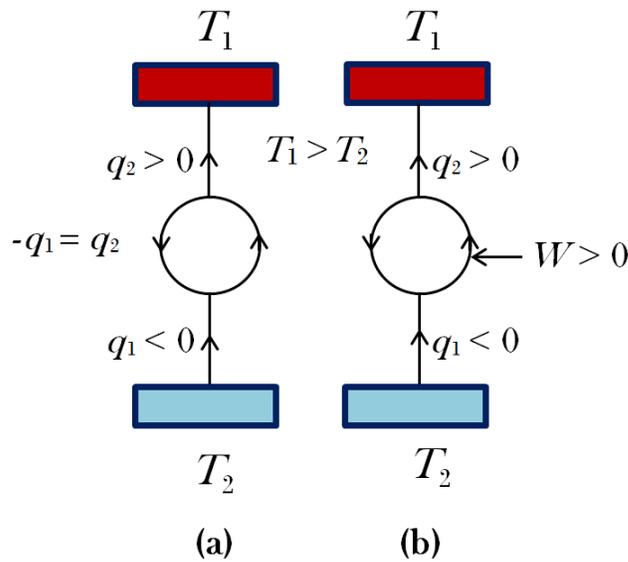
1.2.3. Segundo principio

Este principio pone restricciones sobre la conversión útil de calor en trabajo y provee un conjunto de supuestos para determinar la dirección de los procesos espontáneos y el estado de equilibrio de un sistema. Establece la existencia y propiedades de una nueva función de estado denominada entropía, la cual a pesar de su importancia, presenta una fundamentación que ha resultado muy difícil, hasta el punto de existir más de media docena de formulaciones distintas. Para este trabajo se consideran los enunciados clásicos de Kelvin y Clausius relativos a la operación de máquinas térmicas.

El primero en establecer un postulado para este principio fue Clausius, quien en 1850 basándose en los resultados del ciclo de Carnot lo enunció de la siguiente forma: “es imposible que una máquina, sin ayuda mecánica externa, transfiera calor de un cuerpo a otro más caliente.”¹

Este postulado implica la imposibilidad para los sistemas de tomar calor de un reservorio a menor temperatura y transferirlo a otro de mayor temperatura, figura 3, sin que de forma simultánea algo de trabajo se convierta en calor, figura 3b.

Figura 3. Máquina térmica de Clausius

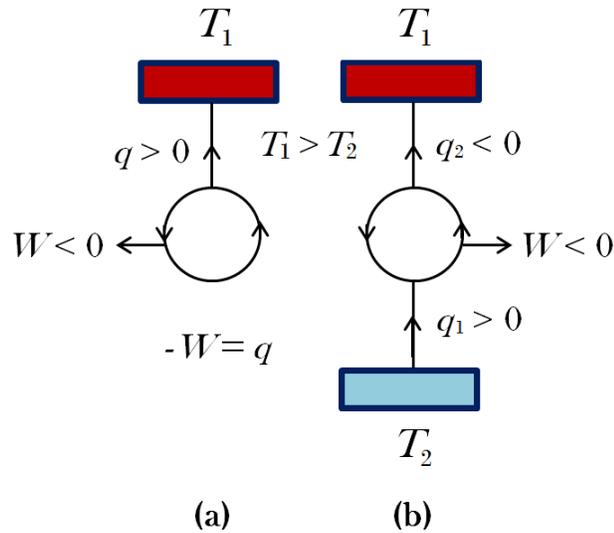


Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

¹Segundo principio de la termodinámica. <http://es.wikipedia.org/wiki/Segunda_ley_de_la_termodinámica> [Consulta: 1 de octubre de 2013.]

Posteriormente en 1851, Kelvin postula lo siguiente: “es imposible construir un dispositivo que, utilizando un fluido inerte, pueda producir trabajo efectivo causado por el enfriamiento del cuerpo más frío del que se disponga.”². Esto quiere decir que al tomar calor de un reservorio es imposible convertirlo todo en trabajo, figura 4, sin transferir calor a uno de menor temperatura, figura 4b.

Figura 4. Máquina térmica de Kelvin



Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

Matemáticamente, para la formulación de este principio, se empieza definiendo la siguiente expresión:

$$\oint \frac{\delta q}{T} \leq 0 \quad (1.4)$$

donde la igualdad se cumple solamente cuando el proceso es reversible. Análogamente al primer principio $\int \delta q_{rev}$ es una función de estado, en este caso igual a $\int dS$, donde

²Segundo principio de la termodinámica. <http://es.wikipedia.org/wiki/Segunda_ley_de_la_terminodinamica> [Consulta: 1 de octubre de 2013.]

S se denomina entropía del sistema. Un cambio para dicha variable, cuando el proceso es reversible, queda de la siguiente forma:

$$dS = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (1.5)$$

Para determinar como es S cuando el proceso es irreversible, considérese un ciclo que parte de un estado inicial I a un estado final F con un proceso irreversible, y después retorna I pero mediante un proceso reversible, esto es:

$$\int_I^F \frac{\delta q_{irrev}}{T} + \int_F^I \frac{\delta q_{rev}}{T} = \oint \frac{\delta q}{T}$$

debido a (1.4) la expresión anterior debe ser menor que cero y además sustituyendo en la segunda integral la expresión (1.5) se obtiene:

$$\int_I^F \frac{\delta q_{irrev}}{T} - \int_I^F dS < 0$$

finalmente, al derivar y reacomodar los términos:

$$dS > \frac{\delta q_{irrev}}{T} \quad (1.6)$$

Si se combina la ecuación (1.5) y (1.6), se obtiene:

$$dS \geq \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (1.7)$$

expresión que corresponde a la formulación matemática del segundo principio de la termodinámica, donde nuevamente la igualdad se cumple solamente cuando el proceso es reversible.

Es necesario aclarar que la termodinámica no ofrece ninguna interpretación directa de lo que es la entropía; la habitual identificación de entropía con desorden molecular, proviene de una muy simplificada interpretación de los resultados de la mecánica estadística, tema que se va a desarrollar en el siguiente capítulo. Para argumentar de una mejor manera la falta de explicación que tiene en la termodinámica, considérese la definición formal que es la que esta disciplina da para la entropía: en un estado de equilibrio, los valores que toman los parámetros característicos de un sistema termodinámico cerrado, son tales que maximizan el valor de una cierta magnitud que está en función de dichos parámetros. Como se observa, esta definición es un poco ambigua y no permite establecer un mayor desarrollo sobre dicha variable.

1.2.4. Tercer principio

A pesar de que este principio no tiene el carácter formal de los postulados presentados anteriormente, su existencia no afecta a la estructura planteada hasta ahora. Históricamente fueron apareciendo diferentes versiones para enunciarlo: Nernst en 1906, Planck en 1910, Simon en 1927, Falk en 1959, entre otros. A continuación se exponen los primeros dos, que son usualmente los más conocidos.

- Nernst estableció que los cambios en la entropía ΔS de los procesos isoterms en sistemas monocomponentes, se aproximan a cero cuando la temperatura a la que se verifica el proceso tiende a cero, $\Delta S \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$.
- Planck estableció que la entropía de cualquier sistema se anula en el estado en el que $[\partial E/\partial S]_{V,N} = 0$, es decir, en el cero absoluto.

En términos simples, la tercera ley indica que la entropía de una sustancia pura y cristalina en el cero absoluto es nula. Por consiguiente, la tercera ley provee de

un punto de referencia absoluto para la determinación de la entropía. La entropía relativa a este punto es la entropía absoluta.

1.3. Proceso reversible

En la sección anterior se hizo referencia a los procesos reversibles e irreversibles, sin embargo a pesar de que en la sección de conceptos básicos se presentó esta característica como una forma de clasificar los procesos, no se entró en mayor detalle sobre los mismos. Por ello, debido a la importancia que tienen, se va a dedicar esta sección a su desarrollo.

Un proceso reversible se define como aquel proceso realizado de modo que, al finalizar el mismo, tanto el sistema como el entorno inmediato pueden recuperar sus estados iniciales sin ocasionar ningún cambio en el resto del universo. Si el proceso no cumple con estos requisitos, se dice entonces que es irreversible. La reversibilidad en un proceso es una idealización de la realidad en general los procesos de la naturaleza no lo son.

Un proceso reversible es cuasiestático, esto quiere decir que el cambio en las variables de estado se da de forma infinitesimal, por lo que el sistema se encuentra en todo momento muy cerca del equilibrio. El costo en procesos de este tipo radica en que el número de pasos que se realizan para llegar al estado final es muy grande, por tanto, el tiempo que lleva realizar también lo es. La razón por la cual se clasifican por aparte los procesos reversibles y cuasiestáticos, se debe al sentido de la aplicación del concepto, ya que la reversibilidad implica necesariamente que el proceso sea cuasiestático, sin embargo, la relación inversa no siempre se cumple. En adelante se debe tomar muy en cuenta esta aclaración.

El hecho de que un proceso sea cuasiestático, permite reescribir el primer principio de una forma más específica en relación al diferencial de trabajo. En este caso dicho diferencial se expresa como:

$$\delta W = -P_{ent}dV \quad (1.8)$$

donde dV es la variación del volumen del sistema y P_{ent} corresponde a la presión del entorno. De modo que la expresión (1.2) se reescribe de la como:

$$dU = \delta q - P_{ent}dV \quad (1.9)$$

1.4. Criterios de equilibrio y espontaneidad

Considérese un sistema como el de la figura 1, donde las paredes que conforman su frontera son no restrictivas y la dimensión del entorno es bastante mayor que la del sistema, de forma que la temperatura y presión del entorno permanecen constantes para todo proceso que se lleve a cabo en el sistema. En un análisis para el cambio en la energía y entropía del universo, de forma análoga que en el postulado de Clausius, se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{cases} dU_{uni} = dU + dU_{ent} = 0 \\ dS_{uni} = dS + dS_{ent} \geq 0 \end{cases}$$

donde nuevamente los subíndices *uni* y *ent* hacen referencia al universo y entorno respectivamente.

Si se impone la condición de que los procesos en el entorno son cuasiestático y se aplica el primer y segundo principio expresados en las ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.5) a este, se obtiene un nuevo sistema de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W = -P_{ent}dV_{ent} = P_{ent}dV \\ dU_{ent} = \delta q_{ent} + \delta_{ent} = -\delta q + P_{ent}dV \\ dS_{ent} = \frac{\delta q_{ent}}{T_{ent}} = \frac{\delta q}{T_{ent}} \end{array} \right.$$

donde el cambio de signo obedece a lo establecido en la tabla 1. Resolviendo los dos sistemas de ecuaciones, se obtiene:

$$dU + P_{ent}dV - T_{ent}dS < 0 \quad (1.10)$$

ecuación que expresa el criterio de equilibrio general, descrito a partir de las propiedades del sistema, la temperatura y presión de su entorno.

De la expresión anterior se desprenden varios casos particulares, según se considere un cambio en cada una de sus variables al realizar un proceso, a continuación se analizarán los que resultan de importancia para el presente trabajo.

1.4.1. Sistema con paredes rígidas y diatérmicas

Debido a la rigidez que presenta las paredes del sistema, el cambio en el volumen de este es nulo, esto es $dV = 0$. Por lo tanto, la expresión (1.10) se reduce a la siguiente forma:

$$dU - TdS \leq 0$$

Ahora, como tampoco existe variación en la temperatura, $T = T_{ext}$, la expresión anterior puede ser factorizar como:

$$d(U - TS) \leq 0$$

donde la expresión dentro de paréntesis se denomina energía de Helmholtz y se designa con el símbolo A .

1.4.2. Sistema con paredes móviles y diatérmicas

En este caso si existe variación en el volumen del sistema y mientras que la temperatura y la presión permanecen constantes, es decir $T = T_{ext}$ y $P = P_{ext}$. Por lo tanto, la expresión (1.10) queda en su forma original, sin embargo esta puede ser factorizada de la forma:

$$d(U + PV - TS) \leq 0$$

donde ahora la expresión dentro de paréntesis se denomina energía de Gibbs y se identifica con el símbolo G .

1.4.3. Espontaneidad

Los dos casos presentados anteriormente fueron planteados de forma general, no obstante se debe hacer una distinción entre el equilibrio y la espontaneidad en los mismos.

Para cada caso, el equilibrio se presenta cuando se da la igualdad en cada una de las expresiones encontradas, ya que en este punto tanto la energía Helmholtz como la de Gibbs son mínimas. El sentido espontáneo se presenta cuando la desigualdad

es estricta, Por lo tanto, la espontaneidad depende de las condiciones en las que se desarrollan los procesos.

1.5. Ecuación fundamental

Considérese un proceso cuasiestático caracterizado por un sistema de dos ecuaciones, donde cada ecuación corresponde al primero y segundo principio para este tipo de proceso. Al resolver dicho sistema, lo cual no es más que realizar una sustitución de (1.5) en (1.9), se obtiene al siguiente expresión:

$$dU = TdS - PdV \quad (1.11)$$

la cual corresponde a la denominada ecuación fundamental de la termodinámica en su forma diferencial. Dicha ecuación puede ser representada también a través de la energía de Helmholtz y Gibbs. Para el primer caso, se parte de la definición presentada en la sección anterior:

$$A = U - TS \quad (1.12)$$

diferenciando:

$$\begin{aligned} dA &= dU - d(TS) \\ &= dU - TdS - SdT \end{aligned}$$

de donde al sustituir (1.11) se obtiene la ecuación fundamental expresada en términos de la energía de Helmholtz:

$$dA = -SdT - PdV \quad (1.13)$$

Para el segundo caso se procede de forma análoga. Partiendo entonces de la definición de la energía de Gibbs:

$$G = U + PV - TS \quad (1.14)$$

diferenciando:

$$\begin{aligned} dG &= dU + d(PV) - d(TS) \\ &= dU + PdV + VdP - TdS - SdT \end{aligned}$$

finalmente, sustituyendo (1.11) se obtiene:

$$dG = PdV - SdT \quad (1.15)$$

expresión que corresponde a la ecuación fundamental en términos de la energía de Gibbs.

1.5.1. Sistemas abiertos

Todo el estudio realizado hasta el momento, únicamente es válido para sistemas cerrados, por lo que las ecuaciones anteriores pierden su utilidad cuando existe variación en la cantidad de materia del sistema, es decir $dN_i \neq 0$. Esto se debe a que en el análisis para un sistema abierto, las ecuaciones de energía deben de incluir la cantidad de cada uno de los elementos del sistema dentro de sus variables.

Para ver el efecto de la variación de materia, considérese un sistema con n tipos distintos de componentes distribuidos por igual en el sistema, donde N_i representa cantidad de partículas del i -ésimo componente. Ahora, considérese un experimento en el cual se mide el cambio en la energía al agregar al sistema cierta cantidad del

primer componente, manteniendo S y V constantes. Notar que nada garantiza que S se mantenga constante, razón por la cual sería preferible trabajar con la energía de Gibbs, ya que en este caso se necesita que T y V sean constantes, lo que si se puede garantizar, sin embargo no existe un instrumento que pueda medir directamente dicha energía, por lo que de igual forma se obtiene indirectamente midiendo el cambio en U . Procediendo con el experimento planteado, al mantener lo demás constante, la variación de energía se debe exclusivamente al incremento del primer componente, esto es:

$$dU = dN_1 \left[\frac{\partial U}{\partial N_1} \right]_{S,V,N_2,\dots,N_n}$$

Si este proceso se realiza para cada uno de los componentes del sistema, el cambio total en la energía va a estar dado entonces por la suma de las variaciones individuales, es decir:

$$dU = dN_1 \left[\frac{\partial U}{\partial N_1} \right]_{S,V,N_2,\dots,N_n} + dN_2 \left[\frac{\partial U}{\partial N_2} \right]_{S,V,N_1,N_3,\dots,N_n} + \dots + dN_n \left[\frac{\partial U}{\partial N_n} \right]_{S,V,N_1,\dots,N_{n-1}}$$

Finalmente, si se considera la variación total de la energía debida al cambio en todas sus variables, se obtiene la siguiente expresión:

$$dU = TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (1.16)$$

donde μ_i se denomina potencial químico, término introducido por Gibbs en 1876, quien lo definió de la siguiente forma: si se supone que se añade una cantidad infinitesimal de cualquier sustancia a una masa homogénea, cualquiera en un estado de tensión hidrostática, que la masa permanece homogénea y su entropía y volumen permanecen constantes, el incremento de la energía interna de la masa dividida por

la cantidad de la sustancia añadida es el potencial para esa sustancia en la masa considerada. Matemáticamente esto significa:

$$\mu_i = \left[\frac{\partial U}{\partial N_i} \right]_{S, V, N_j \neq N_i} \quad (1.17)$$

De igual forma que en la sección anterior, es posible obtener las representaciones de esta nueva ecuación para los otros tipos de energía:

$$dA = -SdT - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (1.18)$$

$$dG = PdV - SdT + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (1.19)$$

1.5.2. Forma integrada

Antes de prestar la forma integrada de la ecuación fundamental es necesario realizar una distinción entre variables que conforman cada una de las ecuaciones expuestas, si bien algunas de ellas fueron utilizadas para ejemplificar el concepto de variable de estado no se dijo nada más sobre las mismas.

Según las características que presentan las variables, estas pueden ser clasificadas en dos grupos:

- Extensivas: dependen de la cantidad, son proporcionales al tamaño del sistema.
- Intensivas: su valor es independiente de la cantidad y tamaño del sistema, alternativamente se definen como variables no extensivas.

Una revisión de las diferentes formas expuestas para la ecuación fundamental, muestra que en general son seis las variables con las que se ha trabajado, donde tres de ellas: S , V y N son extensivas, mientras el resto: T , P y μ son intensivas. Realizada esta distinción se procede a resolver las ecuaciones diferenciales mencionadas. A continuación se mostrará el caso particular para la energía interna, ecuación (1.19), no obstante el procedimiento es el mismo para las ecuaciones (1.18) y (1.19).

Primero se obtienen los efectos parciales debido al cambio en cada variable en la ecuación (1.16):

$$T = \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{V,N} \quad (1.20a)$$

$$-P = \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,N} \quad (1.20b)$$

$$\mu_i = \left[\frac{\partial U}{\partial N_i} \right]_{S,V,N_j \neq N_i} \quad (1.20c)$$

Ahora se procede a analizar los términos que integran la ecuación (1.16). La principal característica que se debe destacar es que la variación de U depende solamente del cambio de variables extensivas, esto quiere decir que la solución debe ser de la forma $U = U(S, V, N)$. Conocida entonces la forma funcional de U , se procede a analizar la homogeneidad de dicha función. Notar que al ser todas las variables extensivas un incremento de θ unidades en dichas variables causa el mismo incremento en U :

$$\theta U = U(\theta S, \theta V, \theta N)$$

esta característica es propia de las funciones homogéneas de primer grado.

Por lo tanto, debido a lo establecido por el teorema de Euler³, U puede ser escrita como:

$$U = S \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{S,V,N} + V \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,V,N} + \sum_{i=1}^n N_i \left[\frac{\partial U}{\partial N_i} \right]_{S,V,N_j \neq N_i}$$

donde al sustituir las derivadas del sistema (1.20), se obtiene:

$$U = TS - PV + \sum_{i=1}^n \mu_i N_i \quad (1.21)$$

expresión que corresponde a la forma integrada de la ecuación fundamental de la termodinámica para el caso de la energía interna.

1.6. Relaciones de Maxwell

Se obtienen igualando las derivadas cruzadas de segundo orden de las relaciones establecidas en (1.20). Por ejemplo, al considerar la primera ecuación de dicho sistema, la cual se reescribe a continuación:

$$T = \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{V,N}$$

al derivar respecto de V se obtiene:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial V} \right]_{S,N} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \right]_N \quad (1.22)$$

Ahora considérese la segunda ecuación, es decir (1.20b):

$$-P = \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,N}$$

³Ver anexo, sección A

de nuevo al derivar, pero ahora respecto de S , se obtiene:

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial S}\right]_{V,N} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\right]_N \quad (1.23)$$

Por el teorema de Schwarz se sabe que las derivadas cruzadas de segundo orden son iguales, en este caso:

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\right]_N = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\right]_N$$

donde al sustituir (1.22) y (1.23), se obtiene:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial V}\right]_{S,N} = -\left[\frac{\partial P}{\partial S}\right]_{V,N} \quad (1.24a)$$

De forma análoga, trabajando con las ecuaciones (1.20a) y (1.20c):

$$\left[\frac{\partial T}{\partial N_i}\right]_{S,V,N_{j \neq i}} = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial S}\right]_{V,N_{j \neq i}} \quad (1.24b)$$

Finalmente trabajando con (1.20b) y (1.20c):

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial N_i}\right]_{S,V,N_{i \neq j}} = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial V}\right]_{S,N_{j \neq i}} \quad (1.24c)$$

ecuación que en conjunto con (1.24a) y (1.24b) se denomina como relaciones de Maxwell de la termodinámica.

La utilidad de estas expresiones radica en que permiten relacionar las variaciones de las magnitudes de entropía o temperatura con las variaciones de las magnitudes mecánicas como presión o volumen.

1.7. Ecuación de Gibbs-Duhem

Considerando la ecuación (1.16) y el diferencial de la expresión (1.21), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dU = TdS + VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \\ dU = -SdT + TdS - VdP - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i + \sum_{i=1}^n N_i d\mu_i \end{cases}$$

donde al restar ambas ecuaciones se obtiene:

$$SdT - VdP + \sum_{i=1}^n N_i d\mu_i = 0 \quad (1.25)$$

ecuación conocida como la ecuación de Gibbs-Duhem. Su importancia radica en que permite relacionar las variaciones entre los parámetros intensivos del sistema.

2. MECÁNICA ESTADÍSTICA

Es la rama de la física que, mediante el uso de la teoría de la probabilidad, deduce el comportamiento de los sistemas macroscópicos, partiendo para ello de algunas hipótesis básicas de los elementos que lo conforma. Su aplicación permite unir las teorías microscópicas; como la física cuántica, relatividad, electromagnetismo, con las macroscópicas; como la termodinámica y la teoría de medios continuos.

A diferencia de la termodinámica, la mecánica estadística no tuvo su origen en la experiencia o la casualidad, sino que fue el resultado de la formalización de algunos conceptos desarrollados hasta entonces. Históricamente el inicio de esta disciplina se puede situar en 1859, cuando Maxwell partiendo de algunos principios desarrollados por Bernulli en su obra Hidrodinámica, establece la teoría cinética de los gases, en la cual se describe el comportamiento y propiedades macroscópicas de los gases a partir de una descripción estadística de los procesos moleculares microscópicos.

Posteriormente Boltzman, inspirado por las publicaciones de Maxwell, continuó con el desarrollo de dicha teoría, estableciéndose como el mayor precursor de esta ciencia, presentando varios trabajos dentro de los que se destaca su interpretación estadística de la termodinámica, el teorema H, la teoría de transporte, el equilibrio térmico, la ecuación de estado de los gases, entre otros.

Finalmente Gibbs, a quién se le atribuye el término mecánica estadística, formalizó esta disciplina con un enfoque general para tratar completamente todos los sistemas mecánicos, inicialmente desde el marco de la mecánica clásica. Fue tal la generalidad que dicho enfoque pudo adaptarse fácilmente a la mecánica cuántica.

En la actualidad el alcance de la mecánica estadística es tal que redujo la categoría de la termodinámica, considerada como esencial, a ser una consecuencia de tratar estadísticamente un gran número de partículas que actúan bajo las leyes de la mecánica.

2.1. Clasificación

Generalmente el estudio de la mecánica estadística es clasificado en función del enfoque tratado, lo que suele variar según el autor. A continuación se presenta la clasificación más conocida:

- Según el estado de equilibrio
 - Física estadística del equilibrio: también llamada termodinámica estadística, esta bien fundamentada y es comúnmente aceptada. Comprende el estudio de sistemas en equilibrio termodinámico.
 - Física estadística del no equilibrio: tiene diferentes fundamentaciones según los problemas a tratar, en especial se ocupa del estudio de los fenómenos de transporte y de las reacciones químicas.
- Según la coherencia en la formulación
 - Clásica
 - Cuántica
- Según la fundamentación seguida
 - Teoría ergódica: iniciada por Eistein, explora todos los estados microscópicos posibles, mientras que el estado macroscópico se describe mediante promedios temporales.
 - Teoría de colectividades de Gibbs: presenta para su estudio una colección infinita de copias del sistema, cada una en un estado microscópico diferentes.

En adelante, solamente se va a trabajar con la fundamentación seguida por Gibbs, la cual es para estados de equilibrio. No obstante, la aplicación de algunos de los conceptos presentados puede ser extendida a las otras categorías mencionadas realizando algunas variaciones.

2.2. Conceptos básicos

De igual forma que en el capítulo anterior, se presentan los principales conceptos de esta disciplina, tomando en cuenta que también se hace uso de los descritos en dicho capítulo.

2.2.1. Estado del sistema

A diferencia de la termodinámica, en mecánica estadística, la descripción del estado del sistema termodinámico se divide en dos partes, según sea el enfoque de estudio:

- Estado macroscópico macroestado
- Estado microscópico o microestado

La definición del primero es la misma que la mencionada en el capítulo anterior, es decir, el estado del sistema se especifica por los valores de variables macroscópicas denominadas funciones de estado.

El microestado se refiere a la especificación detallada de una configuración microscópica de las N partículas del sistema termodinámico, la forma de dicha especificación depende del tipo de mecánica utilizada, la cual puede ser clásica o cuántica.

La idea general consiste en asociar a cada una de las partículas un nivel energía, en lugar de describir cada una con su energía específica. La razón de dicha asociación se debe a que en interacción microscópica del sistema, cada partícula puede presentar una energía diferente en cada período de observación, además debido que el número de estas es muy grande, el seguimiento específico sobre alguna partícula resulta imposible.

Finalmente, debido a que existen distintos microestados e incluso algunos tienen el mismo nivel de energía, se debe hacer la distinción entre microestados accesibles y no accesibles para denotar aquellos estados que el sistema puede o no ocupar.

2.2.2. Equilibrio de sistema

Debido a las interacciones entre las moléculas, el número de partículas que ocupan cada nivel energético están cambiando continuamente, sin embargo, para cada estado macroscópico del sistema existe una distribución asociada de partículas entre los diversos niveles, que es más probable que cualquier otra. Una vez alcanzada esta distribución se dice que el sistema está en equilibrio.

Para entender esto de una mejor forma, considérese el siguiente experimento: se cuenta con un sistema sobre el cual se realizó algún proceso los descritos en el capítulo anterior, posteriormente se realiza de forma periódica la medición de alguna de sus variables macroscópicas, por ejemplo la temperatura. Como es de esperar, una vez alcanzado el equilibrio en cada medición el valor observado debe ser el mismo. Entre el tiempo que transcurre en la toma de dos mediciones, el sistema pasa por un gran número de microestados, de los cuales no todos corresponden al equilibrio macroscópico, sin embargo, el número de estos que sí corresponde a dicho equilibrio es enormemente grande en comparación con el número de los que no. Por

lo tanto la probabilidad que se observen desviaciones apreciables desde el equilibrio, son absolutamente insignificantes.

2.2.3. Colectividades estadísticas

Constituyen la base fundamental del estudio de Gibbs y se definen como un conjunto hipotético de sistemas termodinámicos de características similares, que permiten realizar un análisis estadístico de dicho conjunto. También son conocidas como ensemble estadístico o simplemente ensemble.

De acuerdo a las características que presentan las distintas colectividades, se clasifican como:

- Colectividad microcanónica: describe un sistema completamente aislado, por lo tanto la energía y la cantidad de partículas permanecen constantes.
- Colectividad canónica: describe el sistema en equilibrio térmico con un reservorio exterior, permite el intercambio energía en forma de calor.
- Colectividad gran canónica: describe el sistema en equilibrio térmico, pero para un sistema abierto en el cual puede existir intercambio de energía y materia con el entorno.

2.2.4. Función de partición

Es un funcional de un sistema en equilibrio, se representa con el símbolo \mathcal{Z} . Su principal interés radica en que una vez se conoce esta función para el sistema, se pueden derivar las funciones de estado. Existe una función de partición asociada para cada una de las colectividades antes mencionadas.

2.3. Postulado fundamental

Constituye la hipótesis fundamental de la mecánica estadística, también es conocido como postulado de equiprobabilidad a *priori* y dice lo siguiente: dado un sistema aislado, el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los microestados accesibles.

De este postulado se deriva el hecho que un sistema en equilibrio no existe preferencia por ninguno de sus microestados disponibles, es decir, si existen Ω microestados a una energía particular, la probabilidad de encontrar el sistema en alguno de ellos es $1/\Omega$. El postulado es necesario para poder afirmar que cuando un sistema se encuentra en equilibrio, el macroestado que esta asociado a un mayor número de microestados es el más probable del sistema.

2.4. Distribución de Maxwell-Boltzmann

Fue establecida para modelar el comportamiento de sistemas regidos por la mecánica clásica en función de sus posibles valores de energía. A continuación se presenta su construcción y desarrollo.

Considérese un sistema aislado, constituido por un número muy grande de partículas idénticas N . Cada partícula puede encontrarse equiprobablemente en cualquiera de los microestados accesibles, los cuales se identifican por su valor de energía asociado ϵ_i . Por lo tanto, en cada instante exististe una distribución de las partículas para cada uno de los microestados accesibles, es decir que hay n_0 partículas en el microestado con energía ϵ_0 , n_1 en el de ϵ_1 y así sucesivamente, de forma que:

$$N = \sum_{i=0}^{L-1} n_i \quad (2.1)$$

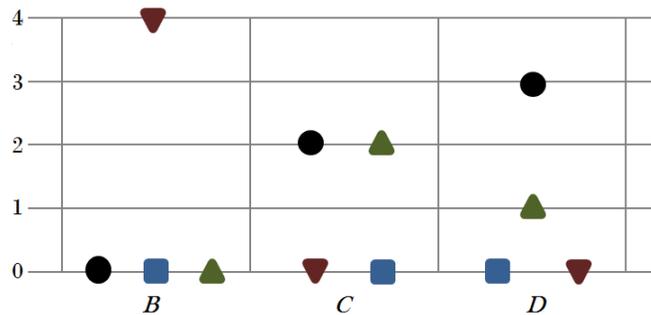
Si además se supone que la interacción entre las partículas es débil, entonces debido al aislamiento del sistema la energía de este esta dada por:

$$U = \sum_{i=0}^{L-1} n_i \epsilon_i \quad (2.2)$$

Ahora considérese por un instante que a pesar de que las partículas son idénticas, estas pueden distinguirse de algún modo, de forma que es posible indicar de forma específica cuales son las que se encuentran en cada nivel de energía. Notar que si se intercambian dos partículas que se encuentran en distintos niveles energéticos se obtiene un microestado diferente, pero el macroestado permanece invariante. Por lo tanto, un mismo macroestado que se caracteriza por tener un número n_i en el i -ésimo nivel de energía, puede obtenerse a nivel microscópico de tantas maneras diferentes como sea el número de permutaciones entre los diferentes estados accesible.

Para ejemplificar la situación anterior considérese la siguiente figura, en la cual muestra tres distintos macroestados con $U = 4$, formados con cuatro partículas, cada una identificada por una figura geométrica.

Figura 5. **Ejemplo para la distribución de microestados**



Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

Siguiendo con el ejemplo se procede a analizar cada uno de los macroestados presentados, en este caso solamente se va a analizar el macroestado B . Para simplificar el análisis resulta conveniente considerar un listado de la forma: $\{a, b, c, d\}$, donde cada una de las posiciones representa el nivel ocupado por cada partícula; por lo que $\{4, 0, 0, 0\}$ corresponde a la primer macroestado, $\{0, 4, 0, 0\}$ al segundo, $\{0, 0, 4, 0\}$ al tercero y $\{0, 0, 0, 4\}$ al cuarto. Notar que no existen más permutaciones en este caso, por lo tanto se concluye que el número de microestados accesibles para obtener B es cuatro. Al repetir este procedimiento para los estados C y D se obtienen los datos mostrados en la siguiente tabla:

Tabla II. **Número de microestados accesibles**

Macroestado	Microestados	Total Ω
B	$\{\{4, 0, 0, 0\}, \{0, 4, 0, 0\}, \{0, 0, 4, 0\}, \{0, 0, 0, 4\}\}$	4
C	$\{\{2, 2, 0, 0\}, \{0, 2, 2, 0\}, \{0, 0, 2, 2\}, \dots\}$	6
D	$\{\{3, 1, 0, \}, \{1, 3, 0, 0\}, \{0, 3, 1, 0\}, \dots\}$	12

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, si dicho procedimiento se generaliza, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{L-1} n_i!} \quad (2.3)$$

la cual especifica el número de microestados permitidos, determinados por el total de permutaciones entre las s N partículas del sistema general.

2.4.1. Postulado de Boltzmann

Constituye una modificación del postulado general de la mecánica estadística para los sistemas que cumplen con las características planteadas al inicio de esta sección. Este postulado establece lo siguiente: en un sistema en equilibrio que tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de sus microestados permitidos, entonces el macroestado que tenga el máximo número de microestados es el más probable.

Esto quiere decir que para determinar el macroestado del sistema se debe de encontrar el Ω de la expresión (2.3) más grande. Siguiendo con el ejemplo hipotético, figura 5, a través de la aplicación directa de este postulado se determina entonces que el macroestado D es el más probable.

2.4.2. Estado de máxima probabilidad

Dado que el sistema está aislado el número de partículas constata, por lo tanto $dN = 0$. Notar que por lo establecido del postulado anterior solamente se permiten las permutaciones que conformen un mismo macroestado, por lo que el número de partículas en cada estado debe permanecer constante, esto es $dn_i = 0$. Esto hace que la expresión (2.1) se establece como:

$$\sum_{i=0}^{L-1} dn_i = 0 \quad (2.4)$$

Derivado que no hay variación en la energía total del sistema, $dU = 0$, entonces (2.2) se puede expresar como:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i = 0 \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) constituyen las restricciones, debidas a la estructuración del sistema termodinámico, necesarias para la maximización del número de microestados.

Por cuestiones de cálculo se prefiere operar logaritmo de (2.3), en lugar de trabajar con la expresión original. Notar que no existe ningún problema en hacer este tipo de transformación, ya que la función aplicada es estrictamente creciente y además es sencillo obtener su función inversa. Aplicando entonces el logaritmo se obtiene:

$$\ln \Omega = \ln N! - \sum_{i=0}^{L-1} n_i!$$

utilizando la aproximación de Stirling⁴, la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= N \ln N - N - \sum_{i=0}^{L-1} n_i \ln n_i + \sum_{i=0}^{L-1} n_i \\ &= N \ln N - \sum_{i=0}^{L-1} n_i \ln n_i \end{aligned}$$

donde la última expresión se obtuvo sustituyendo (2.1) y simplificando. Ahora, derivando respecto a n_i :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn_i} \ln \Omega &= \frac{d}{dn_i} N \ln N - \frac{d}{dn_i} \sum_{i=0}^{L-1} n_i \ln n_i \\ &= - \sum_{i=0}^{L-1} \frac{d}{dn_i} n_i \ln n_i \\ &= - \sum_{i=0}^{L-1} (\ln n_i + 1) \end{aligned}$$

⁴Ver Anexos, sección B

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$d \ln \Omega = \sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_i) dn_i + \sum_i dn_i$$

sustituyendo (2.4) y aplicando la condición de maximización $d \ln \Omega = 0$:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_i^*) dn_i = 0 \quad (2.6)$$

donde n_i^* denota el valor óptimo para n_i .

La expresión anterior en conjunto con las restricciones (2.4) y (2.5), conforman el sistema de ecuaciones que se debe resolver para encontrar el número de partículas por nivel que determinan el valor máximo de Ω . Para resolver dicho sistema se aplica el método de multiplicadores de Lagrange. Al existir tres condiciones que deben ser cero simultáneamente, se procede a multiplicar dos de ellas por constantes arbitrarias, en este caso α y β .

Por lo tanto, introduciendo dichas constantes el sistema queda especificado de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_i^*) dn_i + \alpha \sum_{i=0}^{L-1} dn_i + \beta \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i = 0$$

de donde al factorizar dn_i se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{L-1} [\ln n_i^* + \alpha + \beta \epsilon_i] dn_i = 0$$

y como los dn_i son independiente debe cumplirse que:

$$\ln n_i^* + \alpha + \beta \epsilon_i = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior en función de n_i se obtiene:

$$\begin{aligned}\ln n_i^* &= -\alpha - \beta\epsilon_i \\ n_i^* &= e^{-\alpha} e^{-\beta\epsilon_i}\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde $e^{-\alpha}$ es una constante arbitraria positiva, por lo que puede ser sustituida por cualquier otra, en este caso K , de forma que se obtiene:

$$n_i^* = K e^{-\beta\epsilon_i}\tag{2.8}$$

expresión en la cual se puede observar que el número de partículas en un nivel de energía determinado disminuye exponencialmente con el aumento de la energía.

Falta determinar el valor de K , para ello se suma (2.8) sobre todos los niveles de energía:

$$\sum_{i=0}^{L-1} n_i^* = K \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta\epsilon_i}$$

al sustituir (2.1) y resolver para A se obtiene:

$$K = \frac{N}{\sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta\epsilon_i}}\tag{2.9}$$

En este punto es conveniente definir la función de partición del sistema, esto no se hizo antes debido que la comprensión de los términos no hubiese sido tan familiar como ahora. En esta caso \mathcal{Z} se define como:

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta\epsilon_i}\tag{2.10}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.9) se obtiene:

$$K = \frac{N}{\mathcal{Z}} \quad (2.11)$$

finalmente, al sustituir en (2.8) se obtiene:

$$n_i^* = \frac{N}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \epsilon_i} \quad (2.12)$$

expresión que corresponde a la llamada distribución de Maxwell-Boltzmann.

2.4.3. Energía del sistema

Una vez conocidos los valores óptimos para los n_i se puede determinar la energía del sistema, para ello se debe sustituir (2.12) en (2.2):

$$U = \frac{N}{\mathcal{Z}} \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

notar que la expresión en la suma no es más que el negativo de la derivada de la función exponencial respecto de β , por lo que U se puede reescribir como:

$$U = -\frac{N}{\mathcal{Z}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta \epsilon_i}$$

debido a que es lo mismo sumar las derivadas que derivar las sumas, se obtiene:

$$U = -\frac{N}{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta \epsilon_i}$$

ahora se sustituye (2.10):

$$U = -\frac{N}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta} \quad (2.13)$$

Alternativamente, debido a las propiedades del logaritmo, la expresión anterior se puede presentar como:

$$U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} \quad (2.14)$$

expresión que al igual que (2.13) especifica la energía del sistema en términos de su función de partición.

2.4.4. Energía por partícula

Una vez definido el macroestado del sistema termodinámico, cada partícula puede ocupar alguno de los niveles de energía con una probabilidad dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{P}_i = \frac{n_i^*}{N}$$

sustituyendo (2.12):

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \epsilon_i} \quad (2.15)$$

De la definición de esperanza matemática, el valor de energía esperado para cada partícula es:

$$\langle E_i \rangle = \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_i \epsilon_i$$

donde al sustituir (2.15) se obtiene:

$$\langle E_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta \epsilon_i} \epsilon_i$$

Procediendo de igual forma que se hizo en el apartado anterior, esta expresión se reescribe como:

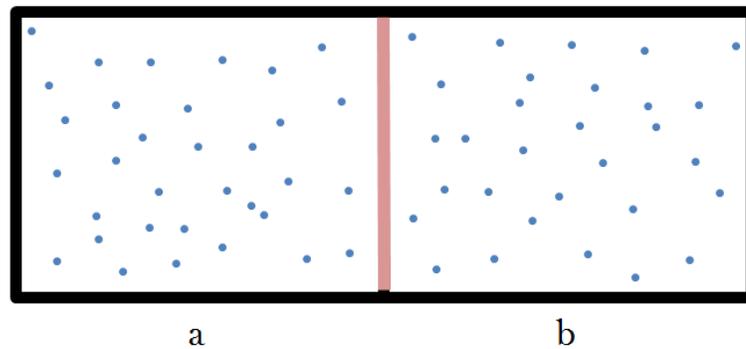
$$\langle E_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}$$

donde se debe notar que el resultado es el mismo si se divide (2.14) entre N . Esto se debe a que la energía a la equipartición de la energía.

2.4.5. Entropía

Considérese ahora que el sistema se divide en dos partes denotadas a y b , y que la división se hace a través una pared diatérmica, de forma que el subsistema a esta conformado por N_a partículas, mientras que en el b hay N_b partículas. Dicho sistema se representa en la siguiente figura:

Figura 6. Sistema dividido



Fuente: elaboración propia, con programa de Paint.

Análogamente al sistema general, en cada subsistema las partículas se distribuyen en distintos niveles de energía, los cuales por simplicidad se asume que son

iguales para cada sistema. De forma que el conjunto de ecuaciones para el subsistema a es el siguiente:

$$N_a = \sum_{i=0}^{L-1} n_{ai} \quad U_a = \sum_{i=0}^{L-1} n_{ai} \epsilon_i \quad \Omega_a = \frac{N_a!}{\prod_{i=0}^{L-1} n_{ai}!}$$

y para el subsistema b :

$$N_b = \sum_{i=0}^{L-1} n_{bi} \quad U_b = \sum_{i=0}^{L-1} n_{bi} \epsilon_i \quad \Omega_b = \frac{N_b!}{\prod_{i=0}^{L-1} n_{bi}!}$$

Notar que un mismo macroestado del sistema, ahora depende del número de permutaciones posibles en cada subsistema, de forma que para todo el sistema este número esta dado por:

$$\Omega = \frac{N_a!}{\prod_i n_{ai}!} \times \frac{N_b!}{\prod_i n_{bi}!} \quad (2.16)$$

donde se procede a aplicar el mismo procedimiento que se realizó al sistema general, pero ahora para el nuevo valor de Ω con las restricciones impuestas por cada subsistema. Para evitar redundar no se van a presentar todos los pasos realizados en dicho sistema, sin embargo se sobreentiende que estos son análogos a los ya realizados.

Primero se procede a establecer las restricciones. Como el sistema es aislado y no se permite el intercambio de materia entre subsistemas, se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{L-1} dn_{ai} = 0 \quad \sum_{i=0}^{L-1} dn_{bi} = 0$$

Debido a que la energía total del sistema permanece constante, debe de cumplir que:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_{ai} + \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_{bi} = 0$$

Al aplicar el logaritmo a la expresión (2.16), derivando y haciendo las sustituciones correspondientes se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_{ai}^*) dn_{ai} + \sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_{bi}^*) dn_{bi} = 0$$

expresión que en conjunto con las dos anteriores, conforman el nuevo sistema de ecuaciones que se debe resolver para determinar los valores óptimos de n_i para cada subsistema. Entonces al aplicar multiplicadores de Lagrange:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_{ai}^*) dn_{ai} + \sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_{bi}^*) dn_{bi} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{L-1} dn_{ai} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{L-1} dn_{bi} + \beta \sum_{i=0}^{L-1} (\epsilon_i dn_{ai} + \epsilon_i dn_{bi}) = 0$$

donde solo existe un β , esto debido a que la energía total es una combinación de las energías de los subsistemas y esta varía. Al agrupar términos semejantes se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{L-1} [\ln(n_{ai}^*) + \alpha_1 + \beta\epsilon_i] n_{ai} + \sum_{i=0}^{L-1} [\ln(n_{bi}^*) + \alpha_1 + \beta\epsilon_i] dn_{bi} = 0$$

ecuación que puede ser resuelta de forma independiente para cada subsistema, debido a que no hay flujo de partículas, obteniendo así las siguientes expresiones:

$$n_{ai}^* = K_a e^{\beta\epsilon_i} \quad n_{bi}^* = K_b e^{\beta\epsilon_i} \quad (2.17)$$

las cuales corresponden al número óptimo de partículas en cada nivel para el subsistema a y b respectivamente.

Estos resultados muestran que el análisis realizado para un sistema puede ser extendido para más sistemas, sin embargo, el principal objetivo de realizar esto es tratar otro aspecto importante del que no se ha hecho mención en este capítulo, la entropía.

Para empezar a analizar esto se debe notar que existe una correlación entre Ω y S debido a que ambas aumentan al llegar al equilibrio. Si S_a y S_b denotan la entropía de cada subsistema y dado que esta variable es extensiva, entonces la entropía para el sistema debe ser la suma de la entropía de cada subsistema, es decir:

$$S = S_a + S_b$$

y como ya se había hecho mención en (2.16), el número total de microestados corresponde al producto entre los microestados de los subsistemas:

$$\Omega = \Omega_a \Omega_b$$

por lo tanto, si S y Ω tiene una relación funcional de la forma $S = f(\Omega)$, dicha relación debe satisfacer la siguiente propiedad:

$$f(\Omega_A \Omega_B) = f(\Omega_A) + f(\Omega_B)$$

La única función que cumple con lo anterior es el logaritmo, de forma que la entropía queda definida como:

$$S = k \ln \Omega \tag{2.18}$$

donde k es una constante arbitraria positiva.

De la expresión anterior, se deriva el comentario realizado en el primer capítulo sobre la entropía como una medida del desorden. Esto se debe a que al incrementar N , el número de microestados Ω también lo hace, lo que se traduce en un mayor número posible de intercambios entre las partículas para cada nivel. A esto es a lo que se refiere el desorden del que se habla, ya que como consecuencia S también se incrementa. Se debe tener cuidado con este concepto ya que en este caso solamente se consideró el hecho de que N se incrementa, sin embargo independientemente de la modificación estructural que el sistema sufra, S sigue cumpliendo con lo propuestos planteados en el primer capítulo.

2.4.6. Determinación de la constante k

Para determinar el valor de esta constante se hace uso de la termodinámica, específicamente de la expresión (1.20a), la cual se reescribe a continuación:

$$T = \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{V,N}$$

expresión que establece la conexión entre la termodinámica y la mecánica estadística. Ahora si se mantiene V y N constantes, tal como en el sistema tratado, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$TdS = dU$$

sustituyendo (2.5) y (2.18):

$$Td(k \ln \Omega) = \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i$$

$$Tkd(\ln \Omega) = \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i$$

Al sustituir (2.6) en la expresión anterior se obtiene:

$$-Tk \sum_{i=0}^{L-1} \ln(n_i^*) dn_i = \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i$$

de la expresión (2.7), lo anterior se reescribe como:

$$-Tk \sum_{i=0}^{L-1} (-\alpha - \beta \epsilon_i) dn_i = \sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i dn_i$$

por igualdad de términos se tiene que:

$$Tk\beta\epsilon_i = \epsilon_i$$

finalmente, si se introducen valores adecuados para ϵ_i :

$$\beta = \frac{1}{kT} \tag{2.19}$$

Experimentalmente se puede determinar el valor de k y corresponde a la constante de Boltzman $k_b \approx 1,38 \pm 10^{-23} [J/K^\circ]$. Conocido este valor, se puede sustituir en todas las expresiones desarrolladas, sin embargo, usualmente se deja β y hace mención a la expresión (2.19).

3. MICROECONOMÍA

Es la rama de la economía que se encarga de estudiar el comportamiento económico de los agentes que la conforman; como las familias, empresas, comunidades, industrias asociadas, entre otras. Su principal objetivo radica en explicar y predecir el comportamiento de dichos agentes en base a la cantidad de recursos existentes y a la interacción de estos en el mercado. Para ello se utilizan algunos supuestos simplificadores para la elaboración de modelos formales, los cuales son analizados en situaciones de equilibrio.

Aunque la palabra microeconomía tiene un uso relativamente reciente, el proceso que designa tiene una historia de más de un siglo. Su origen se debe a la aparición de las teorías marginalistas a mediados del siglo XIX, en las cuales se propuso explicar el valor de los bienes a partir de la psicología individual, dejando a un lado las consideraciones de tipo histórico e institucional, así como la organización imperante en la producción. La concepción objetiva del valor se abandonó, dando lugar a un enfoque subjetivo basado en el comportamiento del consumidor determinado por sus preferencias y recursos. Marshall, Walras y Jevons son algunos de los grandes economistas que dieron lugar a la aparición y formalismo de esta ciencia.

En la actualidad la microeconomía constituye la base de cualquier otra rama de estudio económico, en especial de la macroeconomía, debido a que en los modelos modernos se suelen incluir fundamentos microeconómicos, ya que estos les otorgan mayor solidez en términos formales. El desarrollo de otras disciplinas, como la teoría de juegos o la teoría del caos, han sido de gran ayuda en la evolución de esta disciplina.

En su estudio la microeconomía tiene varias ramas de desarrollo, las más importantes son las siguientes:

- Teoría del consumidor
- Teoría del productor
- Teoría del equilibrio general
- Teoría de los mercados y activos financieros

Un estudio completo de esta disciplina comprende el desarrollo de cada rama mencionada. Sin embargo, para este trabajo solamente se va a desarrollar parte de la primera, debido a que esto es suficiente para cumplir con los objetivos planteados.

3.1. Consumidor

Se define como el agente en la economía, el cual puede ser una persona u organización, que demanda bienes o servicios proporcionados por algún productor o proveedor, con el fin de cubrir sus necesidades y así alcanzar su máximo bienestar. La decisión en cuanto a la cantidad y variedad de los bienes y servicios demandados, constituye su principal problema, quedando especificado de acuerdo a las siguientes características:

- Gustos o preferencias
- Restricción presupuestaria

Cuando un consumidor actúa de acuerdo a dichas características eligiendo la opción que resulta óptima, dado que conoce y valora todas las posibilidades de elección, se dice que está actuando de forma racional. Estos conceptos van a ser desarrollados con mayor detalle en las secciones posteriores.

3.2. Bienes y servicios

A partir de la definición de consumidor, es fácil establecer que los bienes y servicios como aquello que es capaz de satisfacer alguna necesidad. La distinción entre ambos se debe a su materialidad: los bienes son tangibles, mientras que los servicios no lo son. Su clasificación se puede realizar en base a distintos criterios, a continuación se presenta la más conocida:

- Según la propiedad y usufructo
 - Públicos: son aquellos en los que el consumo de cada individuo no evita que los demás también lo hagan, ejemplo: el alumbrado eléctrico.
 - Privados: su consumo limita de forma parcial o total el acceso de este bien a terceros, por ejemplo: una casa.
- Por la función que desempeñan
 - De capital: son utilizados para la producción, ejemplo: un horno industrial.
 - Intermedios: son utilizados como insumos en la elaboración final de otros bienes, ejemplo: el acero.
 - Finales: constituyen el producto o servicio final que se consume, ejemplo: un automóvil.
- Por su relación con los demás
 - Complementarios: tienen que ser utilizados o consumidos de manera simultánea, ejemplo: automóvil y combustible.
 - Sustitutos: tienden a utilizarse en conjunto o con cierta indiferencia entre uno y otro, ejemplo: café y té.
 - Independientes: no guardan ninguna relación en su consumo, ejemplo: azúcar y una consola de videojuegos.

En adelante, a menos que se indique lo contrario, se hará uso del término bien de forma indistinta para un bien o servicio. También se aclara que dichos bienes, de acuerdo a la clasificación de propiedad y usufructo, son privados.

3.2.1. Precio

Es la expresión de valor que tiene un bien, la cual debe de pagar el consumidor al productor para lograr el conjunto de beneficios que resultan de tener o utilizar dicho bien.

Usualmente el precio se establece en términos monetarios para manifestar así la cantidad de dinero que se le atribuye a cada bien. Sin embargo, desde un punto de vista más general se puede considerar al dinero como un tipo de bien privado, de forma que el pago no es más que un intercambio o trueque entre bienes, pero con la principal característica de que se evitan sus ineficiencias, ya que generalmente es aceptado en cualquier tipo de intercambio.

Cuando se trata de una economía denominada competitiva, los precios de los bienes constituyen una variable externa, puesto que ningún consumidor puede individualmente afectar con sus decisiones dichos precios. Ello equivale a suponer que los consumidores son tomadores de los precios del mercado, ya que para ellos este valor constituye un dato dado.

3.2.2. Cesta de bienes y consumo

Una cesta de bienes, es una lista ordenada y finita de números, que denotan la cantidad de unidades de cada bien diferente de la economía. Si existen l bienes diferentes, una cesta de bienes será un vector del espacio R^l cuya primera coordenada

representa la cantidad asignada en la cesta del bien uno, la segunda del bien dos y así sucesivamente hasta la l -ésima coordenada. Dependiendo del caso de estudio, estas cestas se limitan a un subconjunto del espacio; si los bienes solamente pueden adquirirse en cantidades positivas, se denomina como subconjunto de consumo R_+^l , y a sus elemento se les conoce como cestas de consumo.

Notar que en este nuevo subconjunto las coordenadas de los vectores pueden tomar valores infinitos, mientras que la cantidad de bienes en la economía es finita, por tal razón es necesario establecer un nuevo subconjunto en R_+^l denotado como X , para delimitar así las cestas que pueden ser consideradas en el estudio, denominándolas como cestas de consumo factible.

Los precios de los bienes también forman una lista de l coordenadas, donde la primera coordenada representa el precio unitario del bien uno y así sucesivamente, de forma análoga a las cestas de consumo. Por lo tanto, el valor de una cesta se determina de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^l p_i x_i$$

donde p_i y x_i hacen referencia al precio y cantidad del i -ésimo bien en la cesta \mathbf{x} , respectivamente.

3.3. Condiciones de elección

Como se hizo mención al inicio de este capítulo, el consumidor busca tomar una decisión racional, a continuación se describen las características bajo las cuales se establece dicha decisión.

3.3.1. Preferencias

Establecen un orden sobre las cestas debido a los gustos del consumidor. Para analizar esto, considérese que se pide a un consumidor que compare de dos en dos cada cesta a través de una relación de preferencia que solamente admite los siguientes resultados: indiferencia ante cualquiera de las dos cestas o si no, una debe de ser preferible a otra. El consumidor debe realizar este procedimiento para todas las cestas en X , de forma que al final se obtiene una lista que representa sus preferencias.

Formalmente, dadas las condiciones de elección anteriores, se puede establecer la preferencia como con una relación binaria sobre X , representada a través símbolo \succsim^5 , que satisface las siguientes propiedades:

- Reflexividad: para cualquier $\mathbf{x} \in X$, se verifica $\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$
- Completitud: dado cualquier par de cestas $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, se verifica $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, o bien $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$, o ambos
- Transitividad: dadas tres cestas cualesquiera $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in X$, si $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ entonces $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$

La primera propiedad es trivial y resulta una necesidad matemática, la segunda simplemente dice que dado un par de cestas es posible emitir un juicio claro sobre las mismas, es decir, se prefiere una u otra cesta o son indiferentes, descartando así la posibilidad de que existan opciones incomparables. El tercero es necesario para analizar la maximización de preferencias y establece la consistencia en las elecciones del consumidor, cuando no se cumple se pierde la lógica del criterio de ordenación y aparecen ciclos de preferencia que pueden hacer imposible la toma de decisiones. Cuando estas propiedades se cumplen, constituyen un preorden completo que refleja la valoración del consumidor sobre las distintas opciones de consumo posibles.

⁵Se lee: al menos tan preferido como

Partido de \succsim se puede definir una nueva relación sobre X . Se trata de la relación de indiferencia, la cual se representada por el símbolo \sim y establece que dado cualquier par de cestas $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, entonces se tiene que:

$$\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow [\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1]$$

lo cual indica que \mathbf{x}^1 y \mathbf{x}^2 , son igualmente valoradas por el consumidor.

Además de satisfacer la reflexividad, completitud y transitividad, esta nueva relación satisface también la propiedad de simetría. Dicha propiedad establece que para cualquier par $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, entonces:

$$\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}^2 \sim \mathbf{x}^1$$

por lo que \sim constituye una relación de equivalencia.

La principal ventaja de establecer esta relación es que permite formar conjuntos de indiferencia sobre X , esto quiere decir que dada una cesta de consumo es posible establecer un conjunto que contenga todas aquellas que son igualmente preferidas a esta, como se mostrará más adelante, esto constituye una curva de indiferencia.

Finalmente, a partir de \succsim y \sim se puede también definir otra relación de preferencia, denominada como preferencia estricta, simboliza a través de \succ ⁶. En esta realación la condición que se debe de cumplir es la siguiente:

$$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow [\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{x}^1 \not\sim \mathbf{x}^2]$$

donde $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ son dos cestas cualesquiera y $\not\sim$ ⁷ representa la negación de la

⁶Se lee: es preferido a

⁷Se lee: no es indiferente a

relación \sim . Notar que en este caso solamente de las propiedad expuestas, hasta el momento solamente se cumple con la transitividad, sin embargo es fácil verificar que la relación es antisimétrica y antireflexiva aplicando la negación de dichas propiedades. Cuando se aplica \succ sobre X , se dice entonces que se tiene una ordenación en el sentido estricto sobre el conjunto factible.

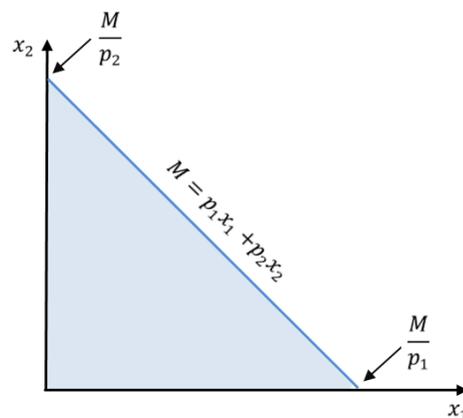
3.3.2. Restricción presupuestaria

Define la capacidad de gasto asociada a los ingresos de los consumidores. Una cesta es accesible a un consumidor si el precio de esta es como máximo igual a sus ingresos, es decir:

$$\sum_{i=1}^l p_i x_i \leq M \quad (3.1)$$

donde p_i y x_i representan el precio y cantidad de los bienes de la cesta \mathbf{x} y M corresponde al ingreso del consumidor.

Figura 7. Curva de restricción presupuestaria



Fuente: elaboración de propia, con programa de Paint.

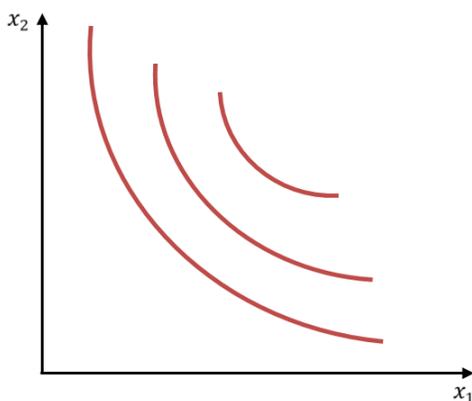
El conjunto de cestas que cumplen con la relación (3.1), se denomina conjunto de posibilidades de consumo. En la figura anterior se muestra el caso particular de uno de estos conjuntos, considerando una economía en la que solamente existen dos bienes, x_1 y x_2 . El área sombreada junto con las fronteras corresponden al conjunto de posibilidades de consumo. Un consumidor que busca maximizar su bienestar siempre va a consumir sobre algún punto de dicha curva.

3.4. Curvas de indiferencia

Constituyen la representación gráfica de las preferencias del consumidor. Cada una de sus curvas se denomina curva de indiferencia y representa el conjunto de cestas sobre las cuales el consumidor es indiferente.

En la siguiente figura se representan tres curvas de indiferencia, nuevamente para una economía con dos bienes. En este caso las curvas corresponden a una función de utilidad tipo Coob-Douglas, tema que va ser desarrollado en la siguiente sección.

Figura 8. **Curvas de indiferencia tipo Coob-Douglas**



Fuente: elaboración de propia, con programa de Paint.

En general, la forma de las curvas de esta gráfica se debe a las propiedades discutidas en la parte de preferencias en la sección 3.3.1 y a otras que falta por exponer, conocidas como propiedades analíticas de las preferencias. A continuación se describe cada una de ellas.

3.4.1. Continuidad

Esta propiedad, traduce la idea de que pequeños cambios en las cantidades consumidas suponen pequeños cambios en el bienestar del individuo. Por lo tanto, cestas de consumo muy parecidas serán valorados de forma similar.

Formalmente esta propiedad se establece que dado cualquier $\mathbf{x}^1 \in X$, los conjuntos:

$$\mathbf{X}^+ \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x}^1\}$$

$$\mathbf{X}_- \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}\}$$

son conjuntos abiertos.

Notar que el conjunto X^+ describe las cestas de consumo que resultan preferibles a \mathbf{x}^1 , mientras que X_- describe aquellas en las que \mathbf{x}^1 es preferible. Por lo tanto, de forma intuitiva esta propiedad establece que dado par de cestas $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, tales que $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, entonces aquellas cestas que se encuentran muy cerca de \mathbf{x}^1 también resultarán preferidos a \mathbf{x}^2 .

3.4.2. Convexidad estricta

Esta propiedad refleja la idea de la preferencia por la variedad, lo que quiere decir que un consumidor prefiere una cesta que contenga un poco de cada bien,

en lugar de una con una gran cantidad de un bien y poco o nada de los otros. Formalmente establece que dado el par $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ y una constante $\rho \in (0, 1)$, entonces:

$$\mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^2 \Rightarrow [\rho \mathbf{x}^1 + (1 - \rho) \mathbf{x}^1] \succ \mathbf{x}^2$$

de donde se observa que si el consumo de \mathbf{x}^1 es preferido o indiferente al de \mathbf{x}^2 , entonces todo consumo intermedio con ponderación positiva resulta preferido a \mathbf{x}^2 .

Geoméricamente esta propiedad implica que las curvas de indiferencia no pueden ser gruesas ni contener tramos lineales. Esto implica que una curva de consumo óptimo solamente puede ser tangente a un punto sobre la recta de restricción presupuestaria.

3.4.3. Monotonicidad

Constituye la última propiedad que se establece y hace referencia a una idea intuitiva importante: en todo problema económico los bienes de los que se dispone resultan escasos en relación a los deseos y aspiraciones de los consumidores, por tal razón los consumidores preferirán siempre elegir una cesta lo más grande posible. Dicho de otra forma, este principio puede resumirse con la siguiente frase: cuanto más, mejor.

Formalmente la monotonía se establece de que para cualquier par $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, entonces:

$$\mathbf{x}^1 > \mathbf{x}^2 \Rightarrow \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$$

por lo que el bienestar del individuo mejora si se aumentan las cantidades de todos los bienes en la cesta, excluyendo la posibilidad de indiferencia.

Geométicamente esta propiedad implica que las curvas de indiferencia no pueden cerrarse sobre sí mismas. Como resultado de esto y la convexidad, mientras un punto se encuentre más alejado del origen en cualquier dirección prefijada, dicho punto es preferible a algún otro más cercano.

3.5. Función de utilidad

Si el orden de las preferencias satisface todas las condiciones descritas anteriormente, estas pueden ser representadas a través de una función denominada función de utilidad, representada por la letra u . Dicha función suele ser más eficiente para describir las preferencias, su característica más importante es la ordinalidad ya, que a cada cesta en la lista le asigna un número cuyo valor refleja el orden de las preferencias del consumidor. Gráficamente cada curva de indiferencia en la figura 8, representa un nivel de utilidad.

Formalmente una función u_i , representa las preferencias del consumidor i si para cualesquiera dos cestas $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ se verifica lo siguiente:

$$u_i(\mathbf{x}^1) \geq u_i(\mathbf{x}^2) \Leftrightarrow \mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2.$$

donde por cuestiones de notación en adelante se omitirá el subíndice i , sin embargo se debe tomar en cuenta que cualquier análisis siempre está referido al i -ésimo consumidor en la economía.

Se debe aclarar que a pesar de que se cumplan todos los supuestos, no todas las relaciones de preferencia pueden ser representadas a través de funciones de utilidad, sin embargo para efectos prácticos en este trabajo, se van a considerar solamente las que sí, teniendo en cuenta que las excepciones suelen ser muy raras.

Para ejemplificar los distintos tipos de funciones de utilidad que existen, a continuación se presentan tres de estas:

- Función de utilidad tipo Cobb-Douglas: $u = \prod_{i=1}^l x_i^{\gamma_i}$, donde γ_i corresponde a la elasticidad de la utilidad respecto del i -ésimo bien.
- Leontief $u = \min\{x_1/c_1, \dots, x_l/c_l\}$, donde c_i corresponde a la cantidad necesaria del i -ésimo bien para incrementar en una unidad el valor de la utilidad.
- Sustitutos perfectos: $u = \sum_{i=1}^l \nu_i x_i$, donde ν_i corresponde a la utilidad marginal del i -ésimo bien.

3.5.1. Demostración

Considérese un vector \mathbf{e} que pertenece a R_+^l con todas sus componentes iguales a uno. Dada una cesta $\mathbf{x}^1 \in X$ y si $u(\mathbf{x}^1)$ es un número tal que $\mathbf{x}^1 \sim u(\mathbf{x}^1)\mathbf{e}$, se debe demostrar que este número existe y además en único. En la figura 9, se puede apreciar de forma gráfica la situación planteada. Notar \mathbf{x}^1 corresponde al punto de intersección entre la curva de indiferencia de \mathbf{x}^1 y la recta $t\mathbf{e}$.

Procediendo con la demostración es necesario definir el siguiente par de conjuntos:

$$\mathbf{O}^+ \equiv \{t \in R \mid t\mathbf{e} \succeq \mathbf{x}^1\}$$

$$\mathbf{O}_- \equiv \{t \in R \mid \mathbf{x}^1 \succeq t\mathbf{e}\}$$

donde se debe notar que debido a la propiedad de monotonicidad O_+ es un conjunto no vacío. El conjunto O_- tampoco lo es, ya que independientemente de los valores en \mathbf{x} al menos incluye al cero. Por la continuidad el complemento de cada conjunto es abierto, esto implica que estos conjuntos deben ser cerrados.

Ahora, dado que la recta te es continua, debe existir algún valor t_{x^1} tal que se cumpla que $t_{x^1}e \sim \mathbf{x}^1$. Ahora considérese otra cesta $\mathbf{x}^2 \in O_-$ de forma que $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, lo cual implica que implica que $t_{x^1} > t_{x^2}$. Si cada t_x el igual al valor que toma $u(\mathbf{x})$, es decir, $u(\mathbf{x}^1) = t_{x^1}$ con $t_{x^1}e \sim \mathbf{x}^1$ y $u(\mathbf{x}^2) = t_{x^2}$ con $t_{x^2}e \sim \mathbf{x}^2$, entonces:

$$u(\mathbf{x}^1)e \sim \mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \sim u(\mathbf{x}^2)e$$

por la propiedad de transitividad:

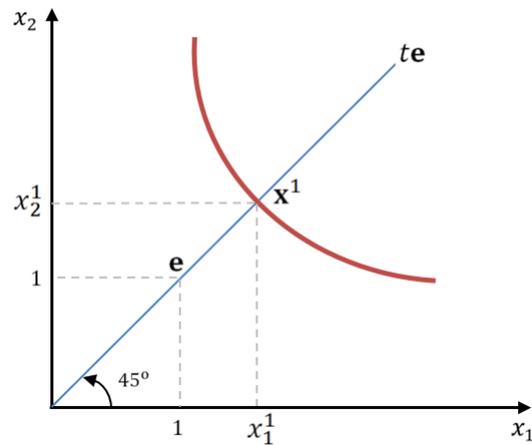
$$u(\mathbf{x}^1)e \succ u(\mathbf{x}^2)e$$

y debido a la monotonicidad:

$$u(\mathbf{x}^1) > u(\mathbf{x}^2)$$

lo cual demuestra lo que se buscaba.

Figura 9. Existencia de la función de utilidad



Fuente: elaboración de propia, con programa de Paint.

Para demostrar el otro caso, se debe tomar una cesta del conjunto O^+ conjunto y proceder de la misma forma. Finalmente para probar que el valor es único, basta con intercambiar la relación de preferencia estricta con la de indiferencia.

3.5.2. Relación marginal de sustitución

Indica las proporciones en las que pueden sustituirse los bienes, de manera que la utilidad se mantenga constante. A continuación se explica su cálculo.

Considérese un vector de pequeñas variaciones sobre las cantidades en dos bienes i y j , que se expresa de la siguiente manera: $d\mathbf{x} = (dx_i, dx_j)$. La variación correspondiente en la utilidad debida a la variación en dichos bienes esta dada por:

$$du = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j$$

dado que el nivel de utilidad permanece constante:

$$0 = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j$$

donde ordenando algunos términos, se obtiene:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = - \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}} \quad (3.2)$$

expresión que se denomina relación marginal de sustitución o RMS entre los bienes i y j . Se hace la aclaración de que es posible obtener el mismo resultado a través de la aplicación del teorema de la función implícita, en cuyo caso el procedimiento es más riguroso, sin embargo se prefiere la explicación mostrada debido a que es más intuitiva.

3.5.3. Utilidad marginal

Se define como el incremento de la utilidad total al consumir una unidad adicional de determinado bien. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$u_{m_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

donde u_{m_i} representa la utilidad marginal del i -ésimo bien.

Esta definición permite establecer la cantidad demandada de dicho bien, ya que esta se detiene precisamente en el momento en que la utilidad de la última unidad consumida se iguala con la pérdida de utilidad que al consumidor le supone el pago de su precio, bajo el supuesto de que la utilidad marginal del dinero se mantenga constante.

3.6. El problema del consumidor

Una vez expuestas las condiciones bajo las cuales el consumidor debe realizar su elección, se esta ya en condiciones de plantear la forma matemática del problema del consumidor. Dicho problema se expresara como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad u(\mathbf{x}) \\ s.a. \quad \sum_{i=1}^l p_i x_i \leq M \\ \mathbf{x} \in X \end{array} \right.$$

que da como resultado la cesta de consumo óptima \mathbf{x}^* .

Los métodos para encontrar dicha cesta, dependen de la forma de u . Si las funciones son derivables, como la Coob-Douglas por ejemplo, este problema se puede resolver a través del método de multiplicadores de Lagrange.

Notar que al multiplicar todos los precios y el ingreso por una constante positiva, no se altera el conjunto presupuestario, y por tanto la solución al problema es la misma. También se debe destacar que \mathbf{x}^* es independiente de la función de utilidad que se emplee para representar las preferencias, ya que dicha cesta siempre verifica $\mathbf{x}^* \succ \mathbf{x}$ para cualquier $\mathbf{x} \in X$.

4. APLICACIÓN DE CONCEPTOS

4.1. Termodinámica y economía

En el capítulo anterior se demostró como las preferencias del consumidor pueden ser representadas a través de una función de utilidad, cuya característica principal es la ordinalidad, no obstante en la mayoría de estudios económicos se asume que dicha función esta dada en alguna unidad que resulte conveniente, una vez se respeten sus propiedades. En este trabajo se va a suponer que u esta dado en unidades monetarias, por lo que resulta una cantidad medible. Realizada esta aclaración, es necesario definir un par de conceptos adicionales, referentes al consumidor: la riqueza y el excedente, a continuación se describe cada uno de ellos.

4.1.1. Riqueza

Considérese la situación en la que un consumidor dedica todos sus ingresos a la adquisición de bienes, de forma que en un período determinado posee una cierta cantidad de estos, los cuales análogamente a las cestas de consumo también pueden ser ordenados. Si en algún momento dicho consumidor decide vender todos sus bienes, obtendrá una cantidad de dinero equivalente al precio de cada uno de ellos, esto es:

$$w_b = \sum_{i=1}^l p_i N_i^e$$

donde N_i^e es la cantidad de cada bien perteneciente al individuo y p_i el precio de los mismos. Notar que esto es análogo al caso de las cestas de consumo, con la diferencia que ahora se asocia dicha cesta al consumidor mediante una relación de pertenencia.

Ahora considérese el caso opuesto, un consumidor que no gasta nada, de forma que en cualquier instante posee una determinada cantidad de dinero dada por:

$$w_d = \lambda M$$

en donde λ denota el valor o precio del dinero y M la cantidad del mismo.

Estas dos situaciones presentan comportamientos extremos, en realidad el comportamiento de los consumidores muestra una situación intermedia, teniendo entonces a su disposición una cantidad de bienes y dinero, se define entonces la riqueza del consumidor como:

$$w = \lambda M + \sum_{i=1}^l p_i N_i^e \quad (4.1)$$

4.1.2. Excedente

Considérese de nuevo al mismo individuo pero esta vez con el fin de estudiar su comportamiento en el momento de realizar alguna transacción en el mercado. En la mayoría de los casos, se observa que el precio que dicho consumidor paga por determinada cantidad de algún bien es inferior a la cantidad que el estaría dispuesto a dar, lo que se traduce en un incremento en su utilidad. A esta diferencia se le denomina excedente del consumidor, matemáticamente se expresa como:

$$\Phi = u - w \quad (4.2)$$

y constituye la base de la economía del bienestar y del análisis Costo-Beneficio. Este concepto no es más que una consecuencia directa de la utilidad marginal decreciente que las sucesivas unidades demandadas le reportan al consumidor, a precio constante.

4.1.3. Ecuaciones importantes

Con el fin de facilitar el desarrollo de esta sección, se presenta una tabla que contiene las ecuaciones referentes al capítulo uno que van a ser utilizadas.

Tabla III. Ecuaciones termodinámicas

Nombre	Ecuación	No.	Sección
Ecuación fundamental forma diferencial	$dU = TdS - VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$	(1.16)	1.5.1
Energía de Helmholtz	$A = U - TS$	(1.12)	1.5
Relaciones de primer orden	$T = \left[\frac{\partial U}{\partial S} \right]_{V,N}$ $-P = \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,N}$ $\mu_i = \left[\frac{\partial U}{\partial N_i} \right]_{S,V,N_j \neq N_i}$	(1.20)	1.5.2
Ecuación fundamental forma integrada	$U = TS - PV + \sum_{i=1}^n \mu_i N_i$	(1.21)	1.5.2
Relaciones de Maxwell	$-\left[\frac{\partial T}{\partial V} \right]_{S,N} = \left[\frac{\partial P}{\partial S} \right]_{V,N}$ $\left[\frac{\partial T}{\partial N_i} \right]_{S,V,N_j \neq i} = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial S} \right]_{V,N_j \neq i}$ $-\left[\frac{\partial P}{\partial N_i} \right]_{S,V,N_j \neq i} = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial V} \right]_{S,N_j \neq i}$	(1.24)	1.6
Relación de Gibbs-Duhem	$SdT - VdP + \sum_{i=1}^n N_i d\mu_i = 0$	(1.25)	1.7

Fuente: elaboración propia.

Es necesaria otra expresión que no fue especificada en dicho capítulo, sin embargo esta se obtiene de una forma sencilla, solamente se debe sustituir la ecuación (1.21) en (1.12):

$$A = -PV + \sum_{i=1}^n \mu_i N_i \quad (4.3)$$

4.1.4. Analogías entre variables

El supuesto fundamental para poder realizar la aplicación de la termodinámica a la microeconomía, se basa esencialmente en considerar a cada consumidor en la economía como un sistema termodinámico, por lo que es necesario realizar las analogías correspondientes entre las variables de dichas disciplinas.

La primera variable que se debe especificar es el análogo para la energía del sistema U , teniendo para ello dos opciones para hacerlo: ya sea a través de la utilidad u del individuo o mediante su riqueza w . Notar que cualquiera de dichas variables permite representar el estado del consumidor, sin embargo para esta sección se va a utilizar la primera, dejando la riqueza como análoga a la energía de Helmholtz debido a la gran similitud entre las ecuaciones (1.12) y (4.1).

Como análogos del potencial químico μ_i y de la cantidad de partículas N_i , se tienen el precio p_i y la cantidad de bienes N_i^e , especificados en la expresión (4.1), por lo que es necesario que el número de bienes distintos l sea igual al al número de partículas diferentes en el sistema termodinámico n . También se tiene que λ es el análogo de P , mientras que M lo es a V , para denotar así el producto $-\lambda M$ como el motor de la economía que utiliza el dinero en lugar de trabajo PV . El cambio en el signo de esta expresión, se establece para evitar resultados económicos incoherentes.

Estas analogías permite considerar una última comparación entre estas disciplinas, la cual se logra a través de las expresiones (4.1) y (4.3), obteniendo la siguiente expresión:

$$T^e S^e = u - w \quad (4.4)$$

donde T^e y S^e representan la temperatura y entropía económica respectivamente, conceptos no especificados de forma explícita en las ecuaciones tradicionales de la economía. Una condición directa establecida por esta comparación es:

$$\psi = T^e S^e \geq 0$$

lo cual se debe al tercer principio de la termodinámica, sección 1.2.4, ya que en cualquier caso tanto la temperatura como la entropía se definen únicamente en cantidades positivas. Económicamente esto no crea ningún inconveniente y siempre se cumple, debido a que solamente en economías que presentan subdesarrollo extremo el excedente de los consumidores es cero, siendo positivo para los demás casos.

Esta analogía permite entonces establecer una forma explícita para mostrar la relación entre desarrollo y bienestar. Para ello se define la temperatura económica como una medida del desarrollo de la economía, de donde es fácil notar que cumple con las mismas restricciones establecidas para T en la termodinámica. También se debe especificar S^e , en cuyo caso el significado no difiere de lo establecido en la termodinámica y explicado por la mecánica estadística, es decir, como una medida de desorden en la economía.

Como resultado de lo anterior, se tiene que según la temperatura de la economía, el bienestar de sus individuos evidenciado a través de un mayor excedente, va de la mano con un menor o mayor desorden. Por lo tanto, economías más desarrolladas

presentan un mayor desorden, el cual se manifestado a través de la variabilidad de los bienes en la misma.

Una vez establecidas estas analogías, las cuales se resumen en la siguiente tabla, se esta ya en condiciones de realizar el desarrollo termodinámico de la economía y con ello obtener la función de estado para la utilidad y las relaciones de Maxwell y Gibbs-Duhem para el sistema económico.

Tabla IV. **Analogía entre variables: termodinámica-microeconomía**

Termodinámica	Microeconomía
U	u
F	w
P	$-\lambda$
V	M
μ_i	p_i
N_i	N_i^e
n	l
N	N^e
TS	$\Phi = T^e S^e$

Fuente: elaboración propia.

Sin embargo, previo a proceder con el desarrollo, se debe hacer una aclaración y es que debido a que el procedimiento para encontrar estos resultados, ya fue realizado con detalle en el capítulo uno, solamente se hará uso de tal formalismo. De modo que los resultados se obtienen simplemente intercambiando las variables termodinámicas por las económicas.

4.1.5. Función de estado de la utilidad

Realizando las sustituciones correspondientes en la ecuación (1.16), se obtiene entonces la forma diferencial para la ecuación de estado de la utilidad:

$$du = T^e dS^e + \lambda M + \sum_{i=1}^l p_i dN_i^e \quad (4.5)$$

donde S^e , M y N_i^e son variables extensivas, mientras que T^e , λ y p son intensivas. Esto se debe a que el primer tipo de variable es controlado por el consumidor, mientras que el segundo no, ya que estas son especificadas por el sistema. Ahora, al tomar los efectos parciales de la expresión anterior, similar a (1.20), se obtiene:

$$\begin{aligned} T^e &= \left[\frac{\partial u}{\partial S^e} \right]_{M, N^e} \\ \lambda &= \left[\frac{\partial u}{\partial M} \right]_{S^e, N^e} \\ p_i &= \left[\frac{\partial u}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_j^e, j \neq i} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde la segunda y tercera expresión corresponden a la utilidad marginal del dinero y de los bienes respectivamente, sección 3.5.3, mientras que la primera manifiesta la relación discutida en el apartado anterior.

Finalmente, aplicando el teorema de Euler se obtiene la solución de (4.5), de forma análoga a (1.21):

$$u = T^e S^e + \lambda M + \sum_{i=1}^l p_i N_i^e \quad (4.7)$$

denominada como la función estado para la utilidad de un consumidor en el sistema económico. Básicamente el resultado es el mismo que el que se obtendría al trabajar

en marco puramente económico, con la diferencia que no aparecería el primer término, lo cual manifiesta el aporte de este desarrollo.

4.1.6. Relaciones de Maxwell en la economía

Si al igual que como se hizo en la sección 1.6, se procede a calcular las derivadas cruzadas de segundo orden de las relaciones (4.6), se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial T^e}{\partial M} \right]_{S^e, N^e} &= \left[\frac{\partial \lambda}{\partial S^e} \right]_{M, N^e} \\
 \left[\frac{\partial T^e}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_j^e \neq N_i^e} &= \left[\frac{\partial p_i}{\partial S^e} \right]_{M, N_j^e \neq N_i^e} \\
 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_j^e \neq N_i^e} &= \left[\frac{\partial p_i}{\partial M} \right]_{S^e, N_j^e \neq N_i^e}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

denominadas como las relaciones de Maxwell de la economía, que de igual forma que en termodinámica permite relacionar las variaciones de la entropía y temperatura con las demás magnitudes económicas. Esto resulta muy útil debido a que al ser magnitudes no especificadas en las ecuaciones comunes de la economía, dichas relaciones proveen un mecanismo para medirlas.

4.1.7. Relación de Gibbs-Dehum en la economía

Finalmente, análogo a (1.25) se obtiene la relación de Gibbs-Dehum de la economía, la cual relacionara los cambios en las variables intensivas del sistema:

$$S^e dT^e + M d\lambda + \sum_{i=1}^l N_i^e dp_i = 0 \tag{4.9}$$

relación que algebraicamente indica que una disminución en el precio de los bienes o el dinero, implica un incremento de la temperatura económica, para de esta forma

mantener la igualdad. Económicamente esto verifica el hecho de que una reducción en dichas variables, incrementa el desarrollo en la economía.

4.1.8. Resultados

A continuación se presenta una tabla que contiene un resumen de las expresiones obtenidas en esta sección.

Tabla v. **Resultados: termodinámica-microeconomía**

Nombre	Ecuación
Ecuación de estado de la utilidad	$u = T^e S^e + \lambda M + \sum_{i=1}^l p_i N_i^e$
Relaciones de primer orden	$T^e = \left[\frac{\partial u}{\partial S^e} \right]_{M, N^e}$ $\lambda = \left[\frac{\partial u}{\partial M} \right]_{S^e, N^e}$ $p_i = \left[\frac{\partial u}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_j^e \neq N_i^e}$
Relaciones de Maxwell en economía	$\left[\frac{\partial T^e}{\partial M} \right]_{S^e, N^e} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial S^e} \right]_{M, N^e}$ $\left[\frac{\partial T^e}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_j^e \neq N_i^e} = \left[\frac{\partial p_i}{\partial S^e} \right]_{M, N_i^e \neq N_i^e}$ $\left[\frac{\partial \lambda}{\partial N_i^e} \right]_{S^e, M, N_i^e \neq N_i^e} = \left[\frac{\partial p_i}{\partial M} \right]_{S^e, N_j^e \neq N_i^e}$
Relación de Gibbs-Duhem en economía	$S^e dT^e + M d\lambda + \sum_{i=1}^l N_i^e dp_i = 0$

Fuente: elaboración propia.

4.2. Mecánica estadística y economía

A diferencia de la sección anterior, ahora el enfoque radica en considerar al sistema económico como el análogo del termodinámico, de forma que cada individuo constituye el equivalente de las partículas en termodinámica.

4.2.1. Ecuaciones importantes

Nuevamente se presenta una tabla con las expresiones que van a ser utilizadas en esta sección, las cuales corresponden ahora al segundo capítulo.

Tabla VI. Ecuaciones de mecánica estadística

Nombre	Ecuación	No.	Sección
Número de partículas	$N = \sum_{i=0}^{L-1} n_i$	(2.1)	2.4
Energía total	$U = \sum_{i=0}^{L-1} n_i \epsilon_i$	(2.2)	2.4
Número de microestados	$\Omega = \frac{N!}{\prod_{i=0}^{L-1} n_i!}$	(2.3)	2.4
Cantidad óptima	$n_i^* = K e^{-\beta \epsilon_i}$	(2.12)	2.4.2
Función de partición	$\mathcal{Z} = \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta \epsilon_i}$	(2.10)	2.4.2
Cte. de proporcionalidad	$K = \frac{N}{\mathcal{Z}}$	(2.8)	2.4.2
Entropía	$S = k \ln \Omega$	(2.18)	2.4.5

Fuente: elaboración propia.

4.2.2. Analogías entre variables

Considérese una economía cerrada con una riqueza fija w dividida en L niveles ω_i , de forma que sus individuos se encuentran distribuidos en dichos niveles. Si hay n_i^e individuos en cada nivel, entonces el total de estos en la economía esta dado por:

$$N^e = \sum_{i=0}^{L-1} n_i^e \quad (4.10)$$

y la riqueza total del sistema:

$$w = \sum_{i=0}^{L-1} n_i^e \omega_i \quad (4.11)$$

Notar que bajo algunas diferencias, discutidas posteriormente, esta descripción corresponde a la realizada en el desarrollo de la distribución de Maxwell-Boltzmann, sección 2.4. Por lo tanto, es fácil deducir que las expresiones anteriores corresponden a las ecuaciones (2.1) y (2.2) de dicha sección. La tabla que se presenta a continuación, muestra un resumen sobre las analogías de las variables entre estas dos disciplinas.

Tabla VII. **Analogía entre variables: mecánica estadística-economía**

Mecánica	Economía
U	w
N	N^e
n_i	n_i^e
ϵ_i	ω_i

Fuente: elaboración propia.

4.2.3. Número de microestados

Prosiguiendo con el desarrollo de Maxwell-Boltzmann, ahora se debe especificar el número de microestados de riqueza accesibles para los individuos, para luego establecer el macroestado de la economía como el estado que tiene el máximo número de estos. Sin embargo, previo a este desarrollo se debe realizar una distinción entre los sistemas de estas disciplinas.

Derivado del postulado de la mecánica estadística, cada partícula en el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los estados accesibles y una vez alcanzado el equilibrio, dicha probabilidad puede ser calculada conociendo el valor de (2.3). Esto constituye en cierta medida un problema para el sistema económico debido a que en tal caso, lo anterior no se puede aplicar con todo rigor, ya que la variabilidad entre los niveles de riqueza para un mismo individuo no suele ser tan grande. No obstante, se va a suponer que el número de microestados es una fracción constante de (2.3), de forma que dicho número queda especificado por:

$$\Omega^e = \frac{\theta N^e!}{\prod_{i=0}^{L-1} n_i!} \quad (4.12)$$

donde $\theta \in (0, 1]$ y denota la volatilidad estructural para un individuo en la economía. Si el valor de esta constante es cero, la economía está estancada y su comportamiento es similar al de un sistema feudal donde los individuos nunca cambian de nivel de riqueza, por lo tanto no hay razón para analizar dicho caso. Si vale uno, la economía representada es extremadamente volátil, lo cual quiere decir que en cada instante se observaría a un mismo individuo en cualquier nivel de riqueza, de forma que el sistema económico se reduce al caso de la mecánica estadística. En la realidad es más razonable pensar que esta constante presenta un valor intermedio entre estos casos.

4.2.4. Determinación del valor óptimo

Ahora se procede a maximizar (4.12) tal y como se hizo en la sección (2.4.2). Notar que debido a que θ es un valor contante, el máximo obtenido debe ser el mismo que para (2.3), independientemente de dicho valor. Esto se puede entender mejor al considerar θ como una transformación sobre (2.3), la cual es estrictamente creciente de modo que al aplicarla, al igual que en el caso del logaritmo, no afecta el valor máximo obtenido. Por lo tanto, según el procedimiento mencionado el valor óptimo queda determinado como:

$$n_i^{e*} = K^e e^{-\beta^e \omega_i} \quad (4.13)$$

donde de igual forma que en mecánica estadística, se evidencia que el número de individuos en cada nivel de riqueza, disminuye de forma exponencial al aumentar dicho nivel. Esto constituye una conclusión importante, estableciendo una distribución piramidal para la riqueza tal y como lo muestran en la mayoría de economías.

Finalmente, la constante de proporcionalidad K , correspondiente al caso análogo de (2.11), queda de la siguiente forma:

$$K^e = \frac{N}{\mathcal{Z}^e}$$

donde:

$$\mathcal{Z}^e = \sum_{i=0}^{L-1} e^{-\beta^e \epsilon_i}$$

expresión denominada como la función partición económica que una vez conocida permite derivar las demás funciones de estado del sistema económico.

4.2.5. Entropía económica

Si ahora la economía se divide en dos regiones de forma similar a la sección 2.4.5, se puede extender este análisis al igual que se hizo en dicha sección, obteniendo al final una expresión análoga a (2.18):

$$S^e = k^e \ln \Omega^e \quad (4.14)$$

expresión a través de la cual queda especificado el valor de la entropía económica, la cual corresponde a una medida del desorden o variabilidad de los estados de riqueza de los individuos en la economía.

Este último concepto no debe de confundirse con el de la sección anterior, ya que su aplicación difiere en el enfoque, debido a la diferencia entre la analogía entre las variables. No obstante en ambos casos se establece como una medida de desorden en la economía. Esto no quiere decir que la entropía signifique dos cosas a la vez, simplemente se trato los sistemas de una forma diferente para exponer dos aspectos importantes en la economía.

CONCLUSIONES

1. La aplicación del formalismo matemático desarrollado para la termodinámica y mecánica estadística sobre la economía, mediante el establecimiento de algunas analogías básicas en los sistemas de dichas disciplinas, permitió derivar algunos resultados económicos interesantes.
2. A través de este formalismo fue posible introducir dos variables económicas, normalmente no contempladas en el estudio clásico de esta disciplina: la temperatura y entropía económica, como medida del desarrollo y desorden económico respectivamente.
3. Se determinó la función de estado para la utilidad, ecuación (4.7), la cual quedó especificada por las principales variables en el sistema económico, de donde es posible derivar las utilidades marginales de los bienes y del dinero, y la relación entre la utilidad de los individuos con el desarrollo y desorden en la economía.
4. Se determinaron las relaciones de Maxwell de la economía, ecuaciones (4.8), las cuales proveen un mecanismo que permite medir las variaciones en la temperatura y entropía económica en función de las demás variables del sistema cuya medición resulta factible.

5. Se determinó la relación de Gibb-Duhem de la economía, ecuación (4.9), la cual permite relacionar los cambios en las variables intensivas en el sistema económico. De esta relación se hace evidente como la disminución de los precios de los bienes y dinero aumentan la temperatura económica, lo que se traduce en un mayor desarrollo económico.

6. Finalmente, se estableció una expresión que muestra la distribución de los individuos en el sistema económico con referencia a la cantidad de la riqueza de estos, ecuación (4.13). En esta expresión muestra una forma piramidal para dicha distribución, tal y como lo muestran la mayor parte de las economías.

RECOMENDACIONES

1. Considerando la flexibilidad en algunos supuestos realizados en este estudio, las relaciones encontradas pueden ser verificadas a través de algún tipo de estudio econométrico.
2. Se puede considerar algún otro tipo de analogías entre otras ramas de la física y la economía para comparar así los resultados obtenidos entre estas aplicaciones.
3. Los resultados obtenidos en este trabajo, constituyen solo una parte de lo que es posible conseguir en base a las analogías propuestas, por lo que el desarrollo realizado puede ser extendido. Por ejemplo: se puede estudiar el caso en el que la economía se trata como un sistema abierto, lo que resulta una situación más realista, para lo cual puede convenir más seguir el trabajando con la mecánica, específicamente con los otros tipos de colectividades no tratados.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALBERTY, Robert; SILBEY, Robert. *Physical chemistry*. 4a. ed. Estados Unidos: Wiley, 2004. 960 p. ISBN: 04-7121-504-2.
2. COSIN, Luis. *Una lección de física estadística*. [en línea] <<http://crashoil.blogspot.com/2012/10/una-leccion-de-fisica-estadistica.html>> [Consulta: 5 de agosto de 2013.]
3. *Física estadística*. [en línea] <<http://www.lawebdefisica.com/apuntsfis/estadistica/>> [Consulta: 2 de diciembre de 2013.]
4. GAMERO, Rafael. *Termodinámica avanzada*. [en línea] <<http://www.sarecfiq.edu.ni/pmciq/che570/pdf/3a.pdf>> [Consulta: 1 de noviembre de 2013.]
5. GIL, Francisco. *Apuntes de termodinámica*. [en línea] <<http://www.dfists.ua.es/~gil/apuntes-termo.pdf>> [Consulta: 1 de noviembre de 2013.]
6. GRATTON, Julio. *Termodinámica e introducción a la mecánica estadística*. [en línea] <<http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notastermodinamica/Termodinamica.pdf>> [Consulta: 1 de noviembre de 2013.]
7. JEHLE, Geoffrey; RENY Philip. *Advanced microeconomic theory*. 3a. ed. Inglaterra: Pearson, 2011. 654 p. ISBN: 02-7373-191-7.

8. MEDEIROS, Milton. *Notas del curso: equilibrio termodinámico*. [en línea] <http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Materialdidacticoparaapoyodelcursodeequilibrioycinetica_14972.pdf> [Consulta: 25 de noviembre de 2013.]
9. *Microeconomics*. [en línea] <<http://en.wikipedia.org/wiki/Microeconomics>> [Consulta: 15 de diciembre de 2013.]
10. ROLLE, Kurt. *Termodinámica*. 6a. ed. España: Pearson Education, 2006. 611 p. ISBN 97-0260-757-4.
11. SASLOW, Wayne. *An economic analogy to thermodynamics*. [en línea] <<http://users.df.uba.ar/giribet/f4/economic.pdf>> [Consulta: 2 de agosto de 2013.]
12. *Statistical mechanics*. [en línea] <http://en.wikipedia.org/wiki/Statistical_mechanics> [Consulta: 2 de diciembre de 2013.]
13. *Stirling's approximation*. [en línea] <http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling%27s_approximation> [Consulta: 5 de diciembre de 2013.]
14. TENG, Leo. *Homogeneous & homothetic functions*. [en línea] <<http://people.stfx.ca/tleo/econ471lec5.pdf>> [Consulta: 20 de noviembre de 2013.]
15. *Thermodynamics*. [en línea] <<http://en.wikipedia.org/wiki/Thermodynamics>> [Consulta: 1 de octubre de 2013.]

16. VILLAR, Antonio. *Microeconomía*. 1a. ed. España: McGraw-Hill, 2006. 400 p. ISBN: 84-4814-652-2.
17. VARIAN, Hal. *Análisis microeconómico*. 3a. ed. España: Antoni Bosch Editor, 1992. 635 p. ISBN: 84-8585-563-9.
18. ZEMANSKY, Mark; DITTMAN Richard. *Calor y termodinámica*. 6a. ed. México: McGraw-Hill, 1986. 584 p. ISBN: 96-8451-631-2.

ANEXOS

A. Teorema de Euler sobre funciones homogéneas

Establece una caracterización sobre la homogeneidad de las funciones. Por definición, se dice que una función $f(\mathbf{y})$, con $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$, es homogénea de grado n si satisface la siguiente propiedad:

$$f(\alpha\mathbf{y}) = \alpha^n f(\mathbf{y}) \quad (\text{A.1})$$

donde α es una consten arbitraria. Al cumplirse dicha condición f puede ser especificada como:

$$nf(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial}{\partial y_i} f(\mathbf{y}) \quad (\text{A.2})$$

Demostración

Para demostrar lo anterior, primero se procede a diferenciar la expresión (A.1) respecto de α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} f(\alpha\mathbf{y}) &= \frac{d}{d\alpha} \alpha^n f(\mathbf{y}) \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} f(\alpha\mathbf{y}) \frac{d}{d\alpha} \alpha y_i &= n\alpha^{n-1} f(\mathbf{y}) \\ \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial}{\partial y_i} f(\alpha\mathbf{y}) &= n\alpha^{n-1} f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ahora, si $\alpha = 1$ entonces:

$$\sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial}{\partial y_i} f(\mathbf{y}) = n f(\mathbf{y})$$

quedando demostrado así la expresión (A.2).

B. Aproximación de Stirling

Establece una aproximación para el logaritmo de factoriales de números grandes. Para su cálculo, considérese el logaritmo de $N!$, el cual por propiedades de dicha función puede ser escrito como:

$$\ln(N!) = \sum_{i=2}^N \ln(i) \quad (\text{B.1})$$

Ahora considérese la figura B.1, la cual muestra el diagrama de una serie escalonada para $\ln(N)$. Notar que el área que se encuentra bajo cada escalón, no es más que el valor que toma el logaritmo en N , debido a que la anchura de estos es igual a uno. Por lo tanto, el área total bajo todos los escalones corresponde al valor que toma $\ln(N!)$.

Ahora, si N es lo bastante grande, dichos escalones pueden ser remplazados por una curva continua, curva roja en el gráfico. De modo que (B.1) puede ser aproximado por:

$$\ln(N!) \approx \int_1^N \ln(N) dy$$

integral que puede ser resuelta por partes.

Entonces, si $u = \ln(N)$ y $dv = 1$ la solución a dicha integral es de la forma:

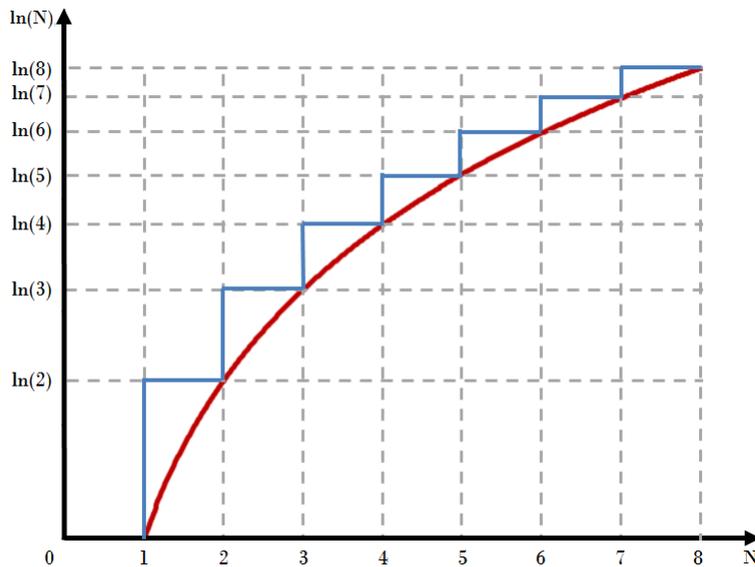
$$\begin{aligned} \ln(N!) &\approx N \ln(N) \Big|_1^N - \int_1^N \frac{1}{N} N dN \\ &\approx N \ln(N) \Big|_1^N - N \Big|_1^N \\ &\approx [N \ln(N) - \ln(1)] - [N - 1] \end{aligned}$$

donde al ser N mucho mayor que 1 se obtiene:

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N \tag{B.2}$$

expresión conocida como la aproximación de Stirling.

Figura B.1. **Aproximación Logarítmica**



Fuente: elaboración de propia, con programa de Paint.