UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

"COSTOS MINIMOS EN LA INDUSTRIA NACIONAL POR PROGRAMACION LINEAL"

TESIS

Presentada a la Junta Directiva
de la
Facultad de Ingeniería
de la
Universidad de San Carlos de Guatemala

por

FRANCISCO RODOLFO SARAVIA CASTILLO

Previo a optar el Título de:

INGENIERO QUIMICO

Guatemala, febrero de 1971

BIBLIOTECA CENTRAL-USAC
DEPOSITO LEGAL
PROHIBIDO EL PRESTAMO EXTERNO

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

DL 08
T (16)

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano ..... Ing. Mauricio Castillo Contoux

Vocal 1° ..... Ing. Marco Antonio Cuevas

Vocal 2° ..... Ing. Rodolfo González Morasso

Vocal 3° ..... Ing. Adolfo Behrens

Vocal 4° ..... Br. Gustavo Adolfo Sierra

Vocal 5° ..... Br. Guido Cocenza

Secretario..... Ing. Héctor A. Centeno B.

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Decano ..... Ing. Amando Vides Tobar

Examinador ..... Ing. Leonel Flores E.

Examinador ..... Ing. Juan J. Méndez

Examinador ..... Dr. Pedro Solé

Secretario..... Ing. Héctor A. Centeno B.

DEDICATORIA:

"A mis padres"

I N D I C E

		Página
I	Introducción	1
II	Sumario	3
III	Descripción del Programa	5
IV	Conclusiones	19
V	Resultados y Discusión	21
VI	Apéndice I (Aplicaciones)	23
VII	Bibliografía	53
VIII	Apéndice II	55

RECONOCIMIENTO:

A los ingenieros Roberto Palacios y José Manuel Samayoa

Al Personal del Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería

A todas aquellas personas que de una forma u otra hicieron posible la realización de este trabajo

I INTRODUCCION:

El objetivo fundamental de este trabajo fue desarrollar un programa para resolver, por el Método Simplex Modificado y con la ayuda de una computadora IBM 1620, problemas tipos de minimización de costos o maximización de utilidades, que se presentan en la Industria.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

II SUMARIO:

El programa fue escrito en FORTRAN y procesado (compilado) en CARLETRAN, utilizando una computadora IBM 1620.

Está basado en el cálculo por la Forma General de la Inversa del Método Simplex Modificado, desarrollada por Dantzig y Orchar-Hays, siguiendo el procedimiento dado por S. Gass en el libro: "Linnear Programming, Methods and Applications".

Sus límites son n = 17 y m = 8, donde "n" es el número de variables reales positivas o cuando menos iguales a cero y "m" las condiciones o requerimientos que deben cumplirse.

El objetivo del programa es optimizar la solución de un sistema, en nuestro caso, encontrar el máximo o el mínimo de una función económica (objetivo) ya sea de costos o utilidades.

Por otra parte, se utilizó el programa No. 10.3.042, "Corrugator Trim and Schedule Program" del Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería, para la optimización en la operación de una corrugadora, para una fábrica de Cajas de Cartón.

Está basado en el Método Simplex Modificado, dando como resultado la programación óptima y total de la producción.

III DESCRIPCION DEL PROGRAMA

El Programa está Escrito en Fortrán y compilado en CARLE-TRAN.

Objetivo:

Encontrar la solución óptima de un problema tanto de minimización como de maximización, en el cual se conocen la función objetivo y sus requerimientos o condiciones.

Limitaciones:

1) En caso de Degeneración del Problema, se obtendrán valores absurdos ya que no se introdujo una función de disturbio para su solución, sin embargo, se siguió el criterio recomendado por Dantzig para evitar en lo posible que un sistema degenere.

2) En caso que la solución del problema se encuentre ilimitada, o sea que tienda a +00 ó -00, los resultados serán los obtenidos en la iteración anterior de la que nos hace infinita la función.

3) No permite la re-entrada de una variable de holgura después que ha sido eliminada de la solución.

Datos:

1) Número de condiciones o requerimientos en punto fijo.
2) Número total de variables reales en punto fijo.
3) Coeficientes de las condiciones o requerimientos en

punto flotante.

Para facilidad es recomendable colocarlos en forma de matriz, llenando con ceros aquellos lugares donde no aparezcan coeficientes. El orden que se sigue es por filas.

4) Coeficientes de la función objetivo en punto flotante, teniendo en cuenta que cuando el problema es de maximización se darán con el signo cambiado, mientras si es de minimización conservarán el original.

Luego la función objetivo se introduce en la matriz.

5) Los valores límites de las condiciones o requerimientos en punto flotante.

Los datos deben darse en el orden anterior, pudiendo perforarse en una tarjeta, dejando únicamente un espacio en blanco entre cada uno.

Para mayor facilidad de comprensión de los ejemplos dados en este trabajo, damos los datos en punto fijo en la primera tarjeta y los de punto flotante en la siguiente o siguientes.

Resultados:

Formatos I4 y E14.8

Las variables que aparecen en la solución son identificadas por su subíndice en punto fijo, mientras que su valor aparece a la derecha en punto flotante.

1) Cuando en la solución final aparece una o varias variables de holgura, significa que aún quedan disponi-

bles los recursos que identifican.

2) El valor óptimo de la función aparece identificado con el número de punto flotante igual a n + m + 1. El signo del valor alcanzado será positivo cuando es un problema de maximización y negativo cuando es de minimización.

3) El valor de la función redundante aparece identificado con el número de punto fijo igual a n + m + 2.

Cuando su valor es cero indica que se alcanzó la Fase II del Cálculo (ver apéndice II) e implica que la solución es óptima.

Cuando su valor es positivo o negativo indica que se ha alcanzado un máximo o mínimo, pero que con las condiciones dadas es imposible obtener la solución óptima.

4) Cuando el sistema degenera los valores serán absurdos.

5) Cuando la solución es ilimitada, aparecerá la indicación DEG SISTEMA y a continuación los valores obtenidos antes de producir este fenómeno.

Ejemplos ilustrativos:

1) Maximizar: $X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_4$

Sujeta a: $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 15$

$2X_1 + X_2 + 5X_3 = 20$

$X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 10$

Reordenando con las variables de holgura incluídas:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_5 = 15$$

$$2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_6 = 20$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_7 = 10$$

$$\text{Max } X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_4 + X_8 = 0$$

Colocando los coeficientes en forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Vemos que:

$m = 3$ y $n = 4$

Datos para la computadora:

Primera tarjeta: 3 4

Segunda tarjeta:

```
 1.   2.   3.   0.   2.   1.   5.
 0.   1.   2.   1.   1.  -1.  -2.
-3.  -1.  15.  20.  10.
```

Es importante notar el orden y la forma en que son dados los datos, así como el signo con que aparecen los coeficientes de la función objetivo.

Resultados:

```
2       .24999999E+01
3       .25000001E+01
1       .25000000E+01
8       .14999999E+02
9       .00000000E-99
STOP
```

Interpretación de los Resultados:

Las variables se encuentran identificadas por sus subíndices, que aparecen a la izquierda en punto fijo con su valor a la derecha en punto flotante, es decir, en este ejemplo tenemos:

$X_1 = 2.50$

$X_2 = 2.499 \approx 2.500$

$X_3 = 2.500$

El siguiente valor corresponde a la variable Xn + m + 1 ó sea el valor de la función objetivo. Como estamos maximizándola aparece con signo positivo, o sea:

$X_8 = 14.999 \approx 15.000$

El máximo valor de la función es igual a 15.000 cumpliendo con las restricciones establecidas anteriormente en el problema.

El último subíndice identifica a la función redundante cuyo valor es igual a cero en este caso, interpretándose como que la solución obtenida es la óptima.

2) Minimizar: $6X_1 + 21X_2$

Sujeta a: $2000X_1 + 4000X_2 \geq 6000$

$50X_1 + 200X_2 \geq 200$

transformando las restricciones: (Apéndice II)

$$2000X_1 + 4000X_2 - X_3 = 6000$$

$$50X_1 + 200X_2 - X_4 = 200$$

$$1950X_1 + 3800X_2 - X_3 + X_4 = 5800$$

Reordenando:

$$1950X_1 + 3800X_2 - X_3 + X_4 = 5800$$

$$2000X_1 + 4000X_2 - X_3 + X_5 = 6000$$

$$\text{Min } 6X_1 + 21X_2 + X_6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1950 & 3800 & -1 \\ 2000 & 4000 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5800 \\ 6000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nótese el signo de los coeficientes de la función objetivo así como que por la transformación realizada se ha incrementado el número de variables.

Tenemos que $m = 2$ $n = 3$

Datos para la computadora:

Primera tarjeta: 2 3

Segunda tarjeta:

1950.	3800.	-1.	2000.
4000.	-1.	6.	2.
0.	5800.	6000.	0.

Resultados:

2	.50000000E+00
1	.20000000E+01
7	-.22500000E+02
8	.00000000E-99
STOP	

Interpretación de los Resultados:

Los valores de las variables son:

$X_1 = 2.000$

$X_2 = 0.500$

Como el problema era de minimización el signo de la función objetivo será negativo. Esto es importante, ya que podría ser mal interpretado si se tomara como un signo válido, pues iría contra la base de la Programación Lineal que establece que todas las variables deben ser mayores o cuando menos iguales a cero.

La solución óptima para este caso será:

$X_7 = 22.500$

O sea que es el valor correspondiente a la variable Xn+m+1

que identifica a la función objetivo o económica.

Los últimos valores, al igual que en el caso anterior, significan que el valor de la función redundante es igual a cero, lo que implica que la solución obtenida es la óptima que puede lograrse cumpliendo todas las condiciones del problema.

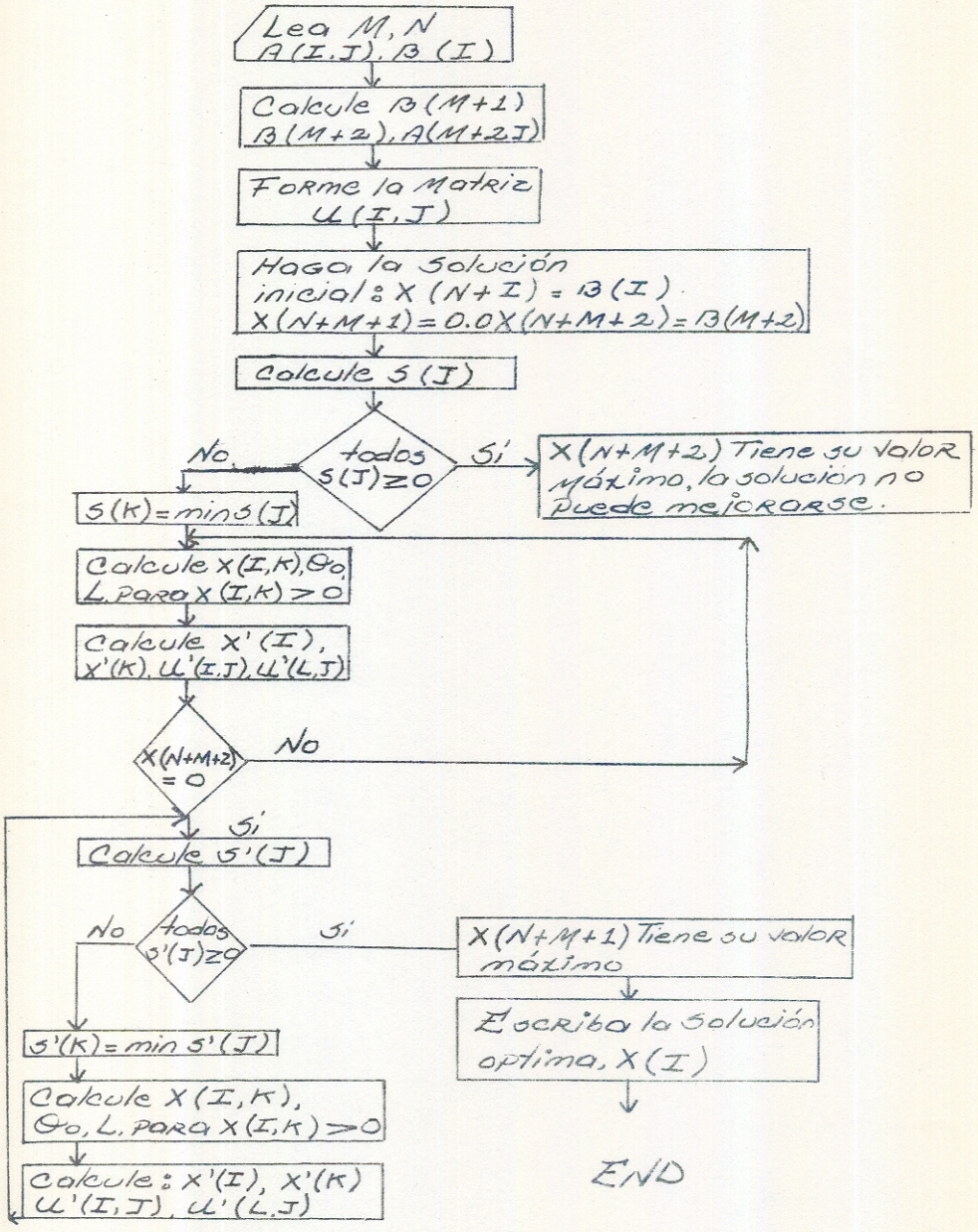
LISTADO DEL PROGRAMA

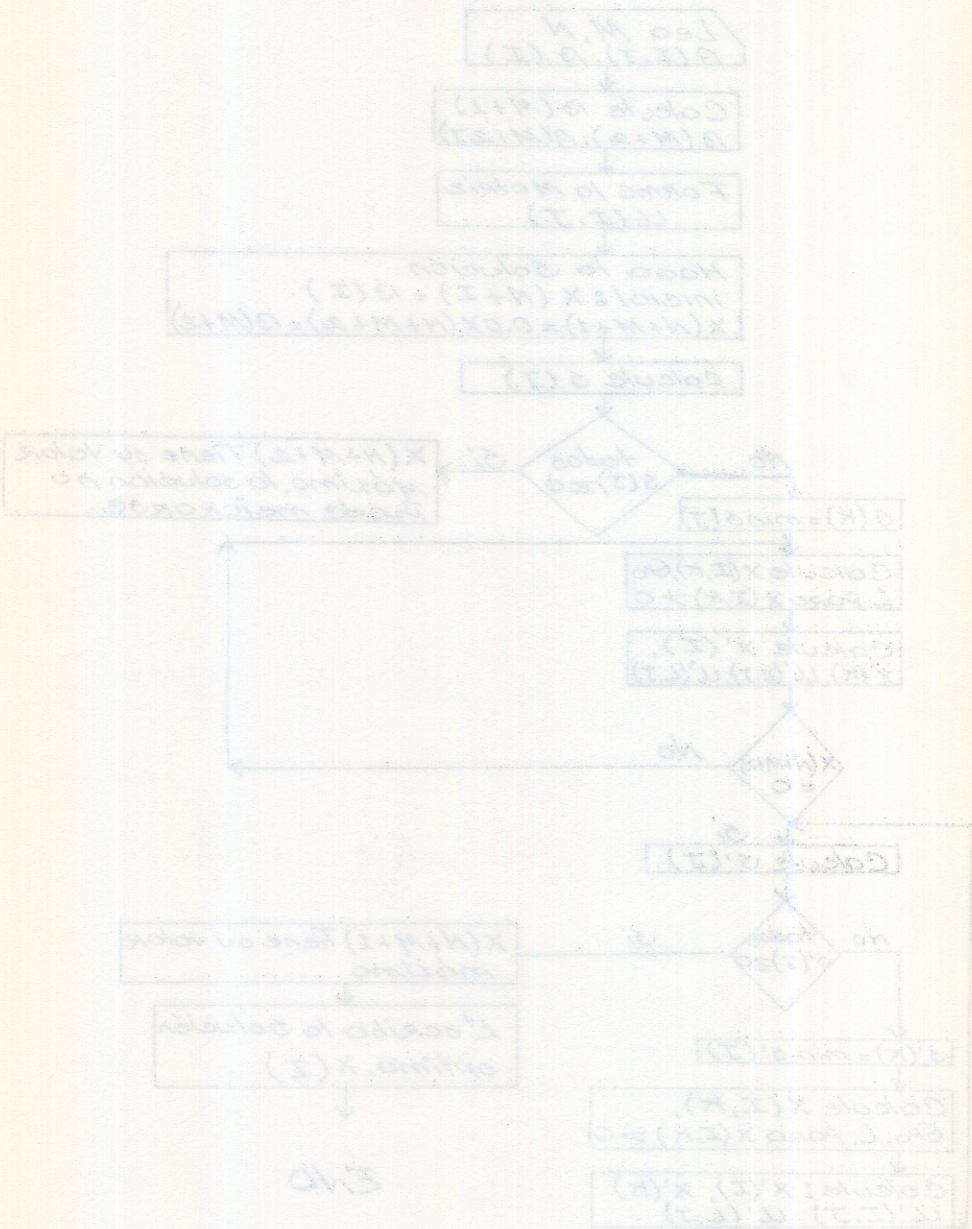
```
C       METODO SIMPLEX MODIFICADO   FORMA GENERAL DE LA INVERSA
        DIMENSION A(10,17),U(10,10),X(10,27),IDF(10),S(17),XX(10)
        READ,M,N
        MA=M+1
        NA=N+1
        MB=M+2
        NB=N+2
        MN=M+N+2
        DO 2 I=1,MA
        DO 2 J=1,N
2       READ,A(I,J)
        DO 4 I=1,M
4       READ,XX(I)
        XX(MA)=0.0
        DO 6 J=1,N
        Y=0.
        DO 7 I=1,M
7       Y=Y+A(I,J)
6       A(MB,J)=-Y
        Y=0.
        DO 8 I=1,M
8       Y=Y+XX(I)
        XX(MB)=-Y
        DO 9 I=1,MB
        DO 9 J=1,MB
        IF (I-J)10,11,10
10      U(I,J)=0.0
        GO TO 9
11      U(I,J)=1.0
9       CONTINUE
        DO 13 I=1,MB
        NN=N+1
        IF((MN-1)-NN)131,132,133
131     X(I,NN)=XX(MB)
        GO TO 13
132     X(I,NN)=0.0
        GO TO 13
133     X(I,NN)=XX(I)
13      IDF(I)=I-NN
19      IF(X(MB,MN))191,190,191
191     DO 20 J=1,N
        Y=0.
        DO 21 I=1,MB
        SA=U(MB,I)*A(I,J)
21      Y=Y+SA
20      S(J)=Y
        GO TO 96
190     DO 200 J=1,N
        Y=0.
        DO 201 I=1,MB
        SA=U(MA,I)*A(I,J)
201     Y=Y+SA
200     S(J)=Y
96      Y=0.
```

```
      IJ=0
      JS=0
22    IJ=IJ+1
      IF(N-IJ)29,222,222
222   IF(0.000001+S(IJ))23,24,24
23    IF(N-IJ)101,26,27
27    IF(S(IJ)-Y)30,22,22
30    Y=S(IJ)
      KIX=IJ
      GO TO 22
26    IF(S(IJ)-Y)28,29,29
28    K=IJ
      GO TO 35
24    JS=JS+1
266   IF(N-JS)105,105,22
29    K=KIX
35    DO 40 I=1,MB
      Y=0.
      DO 41 J=1,MB
      XI=U(I,J)*A(J,K)
41    Y=Y+XI
40    XX(I)=Y
      JSF=0
      DEG=0.
      DO 785 I=1,M
      IF(XX(I))701,701,785
701   JSF=JSF+1
      IF(M-JSF)702,702,785
702   DEG=1.
785   CONTINUE
      IF(DEG)101,435,101
435   Y=0.
      L=0
      DO 50 I=1,M
      JSF=0
500   JSF=JSF+1
      IF((I-JSF)-IDF(I))500,501,500
501   IF(XX(I))513,513,999
999   IF(XX(I)-0.0001)513,513,43
513   IF(M-I)50,514,50
514   IF(L)50,481,50
43    IF(M-I)50,45,46
46    IF(Y-(X(I,JSF)/XX(I)))44,411,411
44    IF(Y)50,411,50
411   Y=X(I,JSF)/XX(I)
      JSA=JSF
      LK=I
      GO TO 50
45    IF(Y-(X(I,JSF)/XX(I)))48,47,47
47    L=JSF
      LK=I
      AT=X(LK,L)/XX(LK)
      GO TO 50
48    IF(Y)481,47,481
```

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

```
481   L=JSA
      AT=X(LK,L)/XX(LK)
50    CONTINUE
      DO 80 I=1,MB
      JR=0
700   JR=JR+1
      IF((I-JR)-IDF(I))700,82,700
82    IF((MN-1)-JR)81,81,83
83    IF(JR-L)81,84,81
81    X(I,JR)=X(I,JR)-AT*XX(I)
      IDF(I)=I-JR
      IF(ABS(X(MB,MN))-.00001)810,810,80
84    X(I,K)=AT
      IDF(I)=I-K
      GO TO 80
810   X(MB,MN)=0.0
80    CONTINUE
      DO 333 I=1,MB
333   S(I)=U(LK,I)
      DO 52 J=1,MB
      IM=0
53    IM=IM+1
      IF(MB-IM)52,60,60
60    IF(J-LK)61,62,61
61    U(J,IM)=U(J,IM)-(S(IM)/XX(LK))*XX(J)
      GO TO 53
62    U(LK,IM)=S(IM)/XX(LK)
      GO TO 53
52    CONTINUE
      GO TO 19
101   PRINT 110
110   FORMAT(12H DEG SISTEMA)
105   DO 140 I=1,MB
      JFF=0
130   JFF=JFF+1
      IF((I-JFF)-IDF(I))130,140,130
140   PRINT 121,JFF,X(I,JFF)
121   FORMAT(I4,4X,E14.8)
863   STOP
      END
```


Lea M, N
A(I,J), B(I)
Calcule B(M+1)
B(M+2), A(M+2J)
Forme la Matriz
U(I,J)
Haga la solución
inicial: X(N+I) = B(I)
X(N+M+1) = 0.0 X(N+M+2) = B(M+2)
Calcule S(J)
todos S(J) ≥ 0
No
Si
X(N+M+2) Tiene su valor máximo, la solución no puede mejorarse.
S(K) = min S(J)
Calcule X(I,K), Θo, L, para X(I,K) > 0
Calcule X'(I), X'(K), U'(I,J), U'(L,J)
X(N+M+2) = 0
No
Si
Calcule S'(J)
todos S'(J) ≥ 0
No
Si
X(N+M+1) Tiene su valor máximo
Escriba la solución optima, X(I)
END
S'(K) = min S'(J)
Calcule X(I,K), Θo, L, para X(I,K) > 0
Calcule: X'(I), X'(K) U'(I,J), U'(L,J)



IV CONCLUSIONES

1) Facilidad de substitución total o parcial de uno o varios factores que intervienen en un problema, por otro u otros.

2) Reducción del desperdicio incorporando materias primas u otros factores que, anteriormente no eran tomados en cuenta.

3) La aplicación de la Programación Lineal en la industria, con ayuda de las computadoras digitales, constituye un medio fácil y eficaz para ahorrar tiempo y dinero.

V RESULTADOS Y DISCUSION

1) La facilidad de poder efectuar substituciones en un proceso es fundamental en la industria, sobre todo, cuando se producen variaciones en los costos de producción y/o de materias primas.

La industria de alimentos sufre constantemente estos problemas a causa de la oscilación del precio de los productos agrícolas, como maíz, maicillo, etc. Este fenómenos conduce a grandes alteraciones en lo que a costos se refiere, haciéndose necesario buscar procedimientos que permitan expresar el costo total en función de los costos parciales.

Con la aplicación del método Simplex Modificado se obtiene rápidamente la combinación óptima deseada, efectuando substituciones de unas materias primas por otras o bien alterando sus proporciones, pero siempre se conservarán las especificaciones del caso. Si a esto sumamos la velocidad de cálculo de una computadora digital, el resultado final será que para cada variación en los costos se tendrá una solución óptima en un tiempo increiblemente corto. De otra forma el proceso de cálculo sería muy largo y tedioso, donde fácilmente se cometen errores, obteniéndose muchas veces los resultados cuando ya se ha producido una nueva variación en los costos.

2) Muchas veces se descartan materias primas que por po

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

seer en menor cantidad ciertos factores, son considera dos como no utilizables. Esto es, por lo general, pro- ducto de los métodos empíricos y aproximados que se usan para el cálculo de diversas fórmulas.

Si nos concretamos a la fabricación de alimentos con- centrados para animales, vemos que se pierden gran can tidad de materias primas que podrían emplearse, elevan do de esta manera el costo de los productos que son in naccesibles para la mayor parte de los criadores.

Un ejemplo de estos es el rastrajo de maíz que se des- perdicia en los campos, cuando debería molerse y uti- lizarse como un componente de bajo costo; lo mismo - podría decirse del olote de maíz, etc. Si se lograra aprovechar los desechos agrícolas en estos alimentos su costo no sería prohibitivo.

El programa desarrollado permite el cálculo de un ali- mento concentrado de hasta 17 componentes, los cua- les pueden ser aumentados en caso necesario, dividien do el programa en dos partes.

3) La aplicación de la Programación Lineal en nuestro me dio se hace ya una necesidad, pues la competencia en tre industrias similares tanto nacionales como interna- cionales, obligan a trabajar con el mínimo costo posi- ble para poder mantener sus productos en el mercado.

El uso de las técnicas modernas exigirá personal más capacitado y un mayor control en todas las operacio- nes que se realizan en una empresa.

VI APENDICE I

Aplicaciones:

1) Mezcla de Materias Primas:

Siendo ésta una de las operaciones más comunes en la industria, así como la substitución parcial o total de las mismas por otra u otras, viene a constituir un campo de aplicación ideal para la Programación Lineal, ya que además de optimizar la solución del problema nos da las substituciones del caso.

Por otra parte, cualquier variación en el costo de uno o varios componentes de una mezcla, será fácilmente cambiado en la función objetivo original, obteniendo luego un nuevo valor óptimo.

Los primeros ejemplos serán sencillos para facilitar su comprensión, presentando luego problemas más complejos.

Ejemplo No. 1:

Para la fabricación de cierto tipo de alimentos concentrados para aves, se cuenta con cuatro materias primas.

Se trata de producir una tonelada métrica de concentrado cuyo contenido mínimo de proteína sea por lo menos del 18%, con el mínimo costo posible.

Tabla No. 1

Materia Prima	Contenido de Proteina %	Costo por Kg en centavos	Costo de la mezcla de X Kg en cts.
A	51	4.0	$4X_1$
B	11	2.0	$2X_2$
C	14	2.4	$2.4X_3$
D	36	3.0	$3X_4$

La ecuación costo es:

$$(\text{Min})\ \text{Costo} = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4$$

Requisitos:

1) Producir una tonelada métrica (1000 Kg)

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1000$$

2) Contenido de Proteina por lo menos de 18%

Base: 1000 Kg.
Kgs. de Proteina mínimos = 180

De acuerdo a tabla No. 1 tenemos:

$$0.51X_1 + 0.11X_2 + 0.14X_3 + 0.36X_4 \geq 180$$

El problema queda así:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1000$$

$$0.51X_1 + 0.11X_2 + 0.14X_3 + 0.36X_4 \geq 180$$

$$\text{Min (Costo)} = 4X_1 + 2X_2 + 2.4X_3 + 3X_4$$

Agregando las Variables de holgura:

$$0.51X_1 + 0.11X_2 + 0.14X_3 + 0.36X_4 - X_5 + X_6 = 180$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 0.X_5 + X_7 = 1000$$

Finalmente tenemos:

$$0.51X_1 + 0.11X_2 + 0.14X_3 + 0.36X_4 - X_5 + X_6 = 180$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 0.X_5 + X_7 = 1000$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2.4X_3 + 3X_4 + 0.X_5 + X_8 = 0$$

Colocando en forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} 0.51 & 0.11 & 0.14 & 0.36 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2.4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 180 \\ 1000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Datos para la Computadora:

Primera tarjeta: 2 5

Segunda tarjeta:

```
0.51 0.11 0.14 0.36 -1. 1.  1.
1.   1.   0.   4.   2.  2.4 3. 0.
180. 1000.
```

Resultados:

```
 1      .10000000E+04
 5      .33000004E+03
 8     -.40000001E+04
 9     -.40000000E+04
STOP
```

Interpretación de los Resultados:

La variable X_1 identifica en este caso a la materia prima A o sea que para producir la tonelada métrica de concentrado:

$A = X_1 = 1000.oo$

O sea que se utilizará únicamente A. La variable X_5 no tiene significado material y se interpreta como recurso disponible.

El costo mínimo de producción $Xn + m + 1 = X_8 = 4000.oo$

La función Redundante $Xn + m + 2 = X_9 = -.4 \times 10^{-4}$

Si por ejemplo, la materia prima A es el maíz, cuyo precio sube de 4. cts/Kg a 6. cts/Kg solamente se substituiría en la función Costo, quedando de la siguiente forma:

$$(Min)\ Costo = 6X_1 + 2X_2 + 2.4X_3 + 3X_4 + 0X_5$$

De esta manera obtendríamos una nueva solución óptima para el problema.

Ejemplo No. 2:

Cierta empresa ganadera durante el verano, acostumbra proporcionar a sus animales cierta cantidad de alimentos concentrados, con el fin de suministrarles una dieta básica, logrando así un aumento constante de peso. Suponiendo que se cuenta con dos materias primas únicamente, se desea saber las cantidades a suministrar de las mismas, con el mínimo costo posible.

Tabla No. 2

Materia Prima	Unidades de Carbohidratos	Unidades de Vitaminas	Unidades de Proteina	Costo por Unidad de Materia Prima	Costo de X Unidad de Materia Prima
A	1	3	3	50	$50X_1$
B	3	4	1	25	$25X_2$

Requerimientos Mínimos Diarios

Unidades Carbohidratos = 8
Unidades Vitaminas = 19
Unidades Proteinas = 7

La función Costo es: (Min) Costo = $50X_1 + 25X_2$

Requisitos:

1) Carbohidratos:

$$X_1 + 3X_2 \geq 8$$

2) Vitaminas:

$$3X_1 + 4X_2 \geq 19$$

3) Proteinas:

$$3X_1 + X_2 \geq 7$$

El problema total:

$$X_1 + 3X_2 \geq 8$$

$$3X_1 + 4X_2 \geq 19$$

$$3X_1 + X_2 \geq 7$$

(Min.) Costo = $50X_1 + 25X_2$

Colocando las Variables de holgura:

$$X_1 + 3X_2 - X_3 = 8$$

$3X_1 + 4X_2 - X_4 = 19$

$3X_1 + X_2 - X_5 = 7$

Transformando:

$$\begin{array}{l} 3X_1 + 4X_2 \quad - X_4 = 19 \\ -(X_1 + 3X_2 - X_3 \quad) = -(8) \\ \hline 2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3X_1 + 4X_2 - X_4 \quad = 19 \\ -(3X_1 + X_2 \quad - X_5) = -(7) \\ \hline 0X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 12 \end{array}$$

Finalmente tenemos:

$0X_1 + 3X_2 + 0X_3 - X_4 + X_5 = 12$

$3X_1 + 4X_2 + 0X_3 - X_4 + X_6 = 19$

$2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_7 = 11$

(Min) Costo $= 50X_1 + 25X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_8 = 0$

Colocando los coeficientes en forma de Matriz:

$$\begin{vmatrix} 0. & 3. & 0. & -1. \\ 3. & 4. & 0. & -1. \\ 2. & 1. & 1. & -1. \\ 50. & 25. & 0. & 0. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12. \\ 19. \\ 11. \\ 0. \end{vmatrix}$$

Datos para la Computadora:

Primera tarjeta: 3 4

Segunda tarjeta:

```
 0. 3.  0. -1. 3.  4. 0. -1. 2. 1. 1. -1.
50.    25. 0. 0. 12.    19. 11.
```

Resultados:

```
2       .40000000E+01
1       .10000000E+01
3       .50000000E+01
8      -.15000000E+03
9       .00000000E-99
STOP
```

Interpretación de los Resultados:

Por los subíndices identificamos las variables con sus - valores correspondientes:

$X_1 = 1.oo$

$X_2 = 4.oo$

$X_3 = 5.oo$

Donde X_3 es recurso disponible y el costo mínimo es de 150.oo Q.

Ejemplo No. 3

La empresa del ejemplo anterior seleccionó 10 materias primas para la alimentación de su ganado. Desea darles una dieta básica con el mínimo costo posible.(1)

Base para Costo y Contenido de Nutrientes: 100 lbs c/u

Tabla No. 3

Materia Prima.	Nutrientes Digestibles	Proteina Digestible	Calcio	Fósforo	Costo	Costo de X_i
Maíz	78.6	6.5	0.02	0.27	2.40	$2.40X_1$
Avena	70.1	9.4	0.09	0.34	2.52	$2.52X_2$
Maicillo	80.1	8.8	0.03	0.30	2.18	$2.18X_3$
Afrecho	67.2	13.7	0.14	1.29	2.14	$2.14X_4$
Harina de Sangre	78.9	16.1	0.09	0.71	2.44	$2.44X_5$
Malaza con Urea	77.0	30.4	0.41	0.86	3.82	$3.82X_6$
Semilla de Algodón	70.6	32.8	0.20	1.22	3.55	$3.55X_7$
Harina de Soya	78.5	37.1	0.26	0.59	3.70	$3.70X_8$
Gluten de Maíz	76.3	21.3	0.48	0.82	2.60	$2.60X_9$
Maíz con Olote	84.5	8.	0.22	0.71	2.54	$2.54X_{10}$

La función Costo es:

$$(\text{Min}) \text{ Costo} = 2.40X_1 + 2.52X_2 + 2.18X_3 + 2.14X_4 + 2.44X_5 + 3.82X_6 + 3.55X_7 + 3.70X_8 + 2.60X_9 + 2.54X_{10}$$

Requisitos:

1) Nutrientes Digestibles:

$$78.6X_1 + 70.1X_2 + 80.1X_3 + 67.2X_4 + 78.9X_5 + 77.0X_6 + 70.6X_7 + 78.5X_8 + 76.3X_9 + 84.5X_{10} \geq 74.2$$

2) Proteina Digestible:

$$6.5X_1 + 9.4X_2 + 8.8X_3 + 13.7X_4 + 16.1X_5 + 30.4X_6 + 32.8X_7 + 37.1X_8 + 21.3X_9 + 8.0X_{10} \geq 14.7$$

3) Calcio:

$$0.02X_1 + 0.09X_2 + 0.03X_3 + 0.14X_4 + 0.09X_5 + 0.41X_6 + 0.20X_7 + 0.26X_8 + 0.48X_9 + 0.22X_{10} \geq 0.14$$

4) Fósforo:

$$0.27X_1 + 0.34X_2 + 0.30X_3 + 1.29X_4 + 0.71X_5 + 0.86X_6 + 1.22X_7 + 0.59X_8 + 0.82X_9 + 0.71X_{10} \geq 0.55$$

Agregando las Variables de holgura:

1) $78.6X_1 + 70.1X_2 + 80.1X_3 + 67.2X_4 + 78.9X_5 + 77.0X_6$

$+ 70.6X_7 + 78.5X_8 + 76.3X_9 + 84.5X_{10} - X_{11} = 74.2$

2) $6.5X_1 + 9.4X_2 + 8.8X_3 + 13.7X_4 + 16.1X_5 + 30.4X_6 +$

$32.8X_7 + 37.1X_8 + 21.3X_9 + 8.0X_{10} - X_{12} = 14.7$

3) $0.02X_1 + 0.09X_2 + 0.03X_3 + 0.14X_4 + 0.09X_5 + 0.41X_6$

$+ 0.20X_7 + 0.26X_8 + 0.48X_9 + 0.22X_{10} - X_{13} = 0.14$

4) $0.27X_1 + 0.34X_2 + 0.30X_3 + 1.29X_4 + 0.71X_5 + 0.86X_6$

$+ 1.22X_7 + 0.59X_8 + 0.82X_9 + 0.71X_{10} - X_{14} = 0.55$

En este caso es mas fácil sumar una serie de nuevas variables de holgura que realizar las transformaciones utilizadas en los ejemplos anteriores. La desventaja principal, es que prácticamente estamos en el límite de variables y por lo tanto, si agregásemos unas 3 materias primas extras habría que transformar el planteo para su solución, de lo contrario sería imposible por las limitaciones del programa.

Sumando las nuevas variables:

1) $78.6X_1 + 70.1X_2 + 80.1X_3 + 67.2X_4 + 78.9X_5 + 77.0X_6$

$+ 70.6X_7 + 78.5X_8 + 76.3X_9 + 84.5X_{10} - X_{11} + X_{15} =$

74.2

2) $6.5X_1 + 9.4X_2 + 8.8X_3 + 13.7X_4 + 16.1X_5 + 30.4X_6 +$

$32.8X_7 + 37.1X_8 + 21.3X_9 + 8.0X_{10} - X_{12} + X_{16} = 14.7$

3) $0.02X_1 + 0.09X_2 + 0.03X_3 + 0.14X_4 + 0.09X_5 + 0.41X_6$

$$+ 0.20X_7 + 0.26X_8 + 0.48X_9 + 0.22X_{10} - X_{13} + X_{17} = 0.14$$

4) $$0.27X_1 + 0.34X_2 + 0.30X_3 + 1.29X_4 + 0.71X_5 + 0.86X_6 + 1.22X_7 + 0.59X_8 + 0.82X_9 + 0.71X_{10} - X_{14} + X_{18} = 0.55$$

La función costo nos queda:

$$\text{(Min) Costo} = 2.40X_1 + 2.52X_2 + 2.18X_3 + 2.14X_4 + 2.44X_5 + 3.82X_6 + 3.55X_7 + 3.70X_8 + 2.60X_9 + 2.54X_{10} + 0.X_{11} + 0.X_{12} + 0.X_{13} + 0.X_{14}$$

Colocando los coeficientes en forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} 78.6 & 70.1 & 80.1 & 67.2 & 78.9 & 77.0 & 70.6 & 78.5 & 76.3 & 84.5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6.5 & 9.4 & 8.8 & 13.7 & 16.1 & 30.4 & 32.8 & 37.1 & 21.3 & 8.0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.09 & 0.03 & 0.14 & 0.09 & 0.41 & 0.20 & 0.26 & 0.48 & 0.22 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.27 & 0.34 & 0.30 & 1.29 & 0.71 & 0.86 & 1.22 & 0.59 & 0.82 & 0.71 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 74.2 \\ 14.7 \\ 0.14 \\ 0.55 \\ 0.0 \end{vmatrix}$$

Datos para la Computadora:

Primera tarjeta: 4 14

Siguientes tarjetas:

```
 78.6 70.1 80.1 67.2 78.9  77.0 70.6 78.5 76.3 84.5
 -1.   0.   0.   0.   6.5   9.4  8.8 13.7 16.1 30.4
 32.8 37.1 21.3  8.0  0.   -1.   0.   0.  0.02 0.09
 0.03 0.14 0.09 0.41 0.20  0.26 0.48 0.22  0.   0.
-1.   0.   0.27 0.34 0.30  1.25 0.71 0.86 1.22 0.59
 0.82 0.71  0.   0.   0.   -1.   2.40 2.52 2.18 2.14
 2.44 3.82 3.55 3.70 2.60  2.54  0.   0.   0.   0.
 74.2 14.7 0.14 0.55
```

Resultados:

```
          3     .18771008E+00
          9     .17019501E+00
          5     .58527963E+00
         14     .61421244E-01
         19    -.22797969E+01
         20     .00000000E-99
       STOP
```

Interpretación de los Resultados:

Las variables son identificadas por sus subíndices:

X_3 = Maicillo = 0.187 lbs.

X_5 = Harina de Sangre = 0.585 lbs.

X_9 = Gluten de Maíz = 0.170 lbs.

O sea que cada ración deberá tener las cantidades establecidas anteriormente, siendo el costo mínimo X_{19} = 2.279 quetzales.

La variable X_{14} se interpreta como que existirá un exceso de Fósforo igual a 0.06 lbs./100 lbs. conc.

(1) Nota:

Este problema fue originalmente propuesto por Waugh, luego formulado y resuelto por Goldstein.

2) Planificación de la Producción:

Cierto tipo de empresas se encuentran con el problema de producir una serie de artículos que difieren tanto en costo como en utilidad unitaria, llegando a tal punto, que es imposible prácticamente saber cual o cuales o no, tienen que mantenerse en el mercado.

Las fábricas de cosméticos, productos alimenticios y farmaceúticos son las que se enfrentan con esta dificultad mas corrientemente.

A continuación se desarrolla un problema, más o menos simple, de una fábrica de pastas alimenticias, basado en un estudio de la demanda de cada producto así como de su costo.

Ejemplo No. 4

Se producen 4 tipos diferentes de pastas con dos clases diferentes de Harina. Se desea establecer que cantidades de cada producto hay que producir para obtener utilidades máximas.

El estudio de mercado dió los siguientes resultados:

Base 1 arroba

Tabla No. 4

Tipo de Pasta	Demanda Estimada	Utilidades por Unidad	Utilidad por X
A	40	12	$12X_1$
B	130	5	$5X_2$
C	30	15	$15X_3$
D	10	10	$10X_4$

Tabla No. 5

Tipo de Pasta	Harina tipo A	Harina tipo B	Horas Hombre Empleados hasta Empaque
A	5	2	3
B	1	3	2
C	9	4	5
D	12	1	10

Se dispone de un total de 800 Horas-hombre así como de 1500 arrobas de Harina tipo A y 1000 de Harina tipo B

La función objetivo será:

(Max) Gan = $12X_1 + 5X_2 + 15X_3 + 10X_4$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

Condiciones:

1) Horas hombre:

$$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 \leq 800$$

2) Materias Primas:

a) Harina tipo A

$$5X_1 + X_2 + 9X_3 + 12X_4 \leq 1500$$

b) Harina tipo B

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 1000$$

3) Demanda:

a) $X_1 \geq 40$

b) $X_2 \geq 130$

c) $X_3 \geq 30$

d) $X_4 \leq 10$

El problema final:

$$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 \leq 800$$

$$5X_1 + X_2 + 9X_3 + 12X_4 \leq 1500$$

$$X_1 \geq 40$$

$$X_2 \geq 130$$

$$X_3 \geq 30$$

$$X_4 \leq 10$$

$$(\text{Max})\ \text{Gan} = 12X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4$$

Transformando:

$$X_1 - X_5 = 40$$

$$X_2 - X_6 = 130$$

$$X_3 - X_7 = 30$$

Por lo que:

a) $X_2 - X_6 = 130$

$-(X_1 - X_5) = -(40)$

$$-X_1 + X_2 + X_5 - X_6 = 90$$

b) $X_2 - X_6 = 130$

$-(X_3 - X_7) = -(30)$

$$X_2 - X_3 - X_6 + X_7 = 100$$

Ordenando nuevamente:

$$\begin{aligned}
X_2 - X_3 - X_6 + X_7 &= 100 \\
X_1 + X_2 + X_5 - X_6 + X_8 &= 90 \\
X_2 - X_6 + X_9 &= 130 \\
3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 + X_{10} &= 800 \\
5X_1 + X_2 + 9X_3 + 12X_4 + X_{11} &= 1500 \\
2X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 + X_{12} &= 1000 \\
X_4 + X_{13} &= 10
\end{aligned}$$

$$(\text{Max})\ \text{Gan} = 12X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

Colocando los coeficientes en forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 12 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & -5 & -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \\ 800 \\ 1500 \\ 1000 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nótese que en esta matriz los coeficientes de la función objetivo aparecen con su signo cambiado, ya que en este caso vamos a maximizar la solución y sabemos que Min f (X)= - Max f (X).

Datos para la Computadora

Primera tarjeta: 7 6

Siguientes tarjetas:

```
0.     1.    -1.     0.     0.   -1.   -1.    1.    0.   0.
1.    -1.     0.     1.     0.    0.    0.   -1.    3.   2.
5.    10.     0.     0.     5.    1.    9.   12.    0.   0.
2.     3.     4.     1.     0.    0.    0.    0.    0.   1.
0.     0.   -12.    -2.    -5.  -10.    0.    0.  100.  90
130.  800.  1500.  1000.   10.
```

Resultados:

7	.34000000E+02
2	.13000000E+03
1	.40000000E+02
3	.64000000E+02
11	.47400000E+03
12	.26400000E+03
4	.10000000E+02
14	.11600000E+04
15	-.77200000E+03
STOP	

Interpretación de los Resultados:

Las variables se identifican por sus subíndices:

X_1 = Pasta tipo A = 40 arrobas

X_2 = Pasta tipo B = 130 "

X_3 = Pasta tipo C = 64 "

X_4 = Pasta tipo D = 10 "

Recursos disponibles:

X_7 Para producir pasta tipo C = 34.oo arrobas

X_{11} Cantidad de Harina tipo A = 474.oo "

X_{12} Cantidad de Harina tipo B = 264.oo "

Como en este caso maximizamos las utilidades, la variable

Xn + m + 1 aparece con signo positivo.

La utilidad máxima es:

X_{14} = 1160.oo quetzales.

5) Caso Especial:

Una fábrica de Cajas de Cartón desea programar su corrugadora, con el fin de obtener el mínimo costo de producción posible.

La complejidad del problema hace necesario un programa específico, que sea capaz de contemplar un gran número de posibilidades.

Es necesario tomar en cuenta una gran cantidad de variables como Costo del papel y pegamento, forma y unidades de las cajas a cortar, tiempo y velocidad de operación, características propias de la corrugadora, anchos de los rollos existentes, etc.

Se ha establecido que actualmente se tienen los siguientes anchos; con sus costos de producción por cada 1000 pies de long.

Ancho en pulg.	Costo en Q/1000 pies	Trim en pulg.	Seguridad	Long. Mínima de corrida en pies
75	16.89	3/4		600
65	15.13	3/4		600
61	14.43	3/4		600
55	13.38	3/4		600

Se tiene un pedido de 12 tipos de cajas, cuyas dimensiones

y cantidades son:

Caja	Ancho en pulg.	Largo en pulg.	Unidades
A	21 1/5	41	2500
B	53 3/4	92 1/2	3000
C	19 3/4	21 1/4	1500
D	20	21 1/4	1500
E	33	41 1/2	1800
F	23 3/4	26 1/4	2000
G	15 2/5	48	2500
H	26 2/5	31 1/5	3000
I	11 3/4	46	1000
J	12 4/5	16 1/5	1000
K	18 1/5	66 1/2	500
L	17 2/5	26 3/5	500

Los datos restantes han sido omitidos por ser considerados exclusivos de la empresa. Son ordenados de acuerdo con el manual 10.3.042 del Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería.

STOCK 03 UNUSED

CAJAS Y EMPAQUES DE GUATEMALA MULLEN 200

STOCK SIZES AVAILABLE

STOCK WIDTH	COST	MAX PCS	SAFETY TRIM	SET UP LENGTH	MINIMUM RUN	MINIMUM PATTERN	LENGTH USED
75	16.8900	4	3/4	6.000	6.000	.050	16.465
65	15.1300	4	3/4	6.000	6.000	.050	6.121
61	14.4300	4	3/4	6.000	6.000	.050	.000
55	13.3800	4	3/4	6.000	6.000	.050	13.958

SHEET SIZES ORDERED

ORDER	ORDER WIDTH	ORDER LENGTH	PIECES	U L UP	END TRIM	MAX OUT	SHEET LENGTH	FEET	SPECIAL INSTRUCTIONS
ORDB	53 3/4	92 1/2	3000	1	1/4	20	92 3/4	23.187	
ORDE	33	41 1/2	1800	1	1/4	20	41 3/4	6.262	PARAF 2 LDOS
ORDHT	26 2/5	31 1/5	3000	2	1/4	20	62 1/2	7.812	PARAF LDO IN
ORDE	23 3/4	26 1/4	2000	2	1/4	20	52 3/4	4.395	
ORDA	21 1/5	41	2500	1	1/4	20	41 1/4	8.593	
ORDDT	20	21 1/4	1500	2	1/4	20	42 3/4	2.671	PARAF LDO IN
ORDCT	19 3/4	21 1/4	1500	2	1/4	20	42 3/4	2.671	PARAF LDO IN
ORDK	18 1/5	66 1/2	500	1	1/4	20	66 3/4	2.781	
ORDL	17 2/5	26 3/5	500	2	1/4	20	53	1.104	
ORDG	15 2/5	48	2500	1	1/4	20	48 1/4	10.052	
ORDJ	12 4/5	16 1/5	1000	2	1/4	20	32 1/2	1.354	COLOR BLANCO
ORDI	11 3/4	46	1000	1	1/4	20	46 1/4	3.854	COLOR BLANCO

RUN ON STOCK WIDTH 75

KNIFE	FEET	ORDER	SHEET WIDTH	OUT-UP W-L	SHEET LENGTH	CUTS	PIECES	TIMING	SPECIAL INSTRUCTIONS
LO	0.451	ORDE	33	1- 1	41 3/4	129	129	DELAY	PARAF 2 LDOS
UP		ORDJ	12 4/5	3- 2	32 1/2	166	996		COLOR BLANCO
LO	0.499	ORDG	15 2/5	2- 1	48 1/4	124	248	DELAY	

UP		ORDA	21 1/5	2– 1	41 1/4	145	290	
LO	1.104	ORDL	17 2/5	1– 2	53	249	498	DELAY
UP		ORDB	53 3/4	1– 1	92 3/4	142	142	
LO	1.284	ORDE	33	1– 1	41 3/4	369	369	DELAY PARAF 2 LDOS
UP		ORDI	11 3/4	3– 1	46 1/4	333	999	COLOR BLANCO
LO T	2.197	ORDH	26 2/5	1– 2	62 1/2	421	842	DELAY PARAF LDO IN
UP		ORDF	23 3/4	2– 2	52 3/4	499	1996	
LO T	2.671	ORDD	20	1– 2	42 3/4	749	1498	DELAY PARAF LDO IN
UP		ORDB	53 3/4	1– 1	92 3/4	345	345	
LO T	2.671	ORDC	19 3/4	1– 2	42 3/4	749	1498	DELAY PARAF LDO IN
UP		ORDB	53 3/4	1– 1	92 3/4	345	345	
LO	2.781	ORDK	18 1/5	1– 1	66 3/4	500	500	DELAY
UP		ORDB	53 3/4	1– 1	92 3/4	359	359	
LO	2.807	ORDA	21 1/5	1– 1	41 1/4	816	816	DELAY
UP T		ORDH	26 2/5	2– 2	62 1/2	538	2152	PARAF LDO IN

RUN ON STOCK WIDTH 65

KNIFE	FEET	ORDER	SHEET WIDTH	OUT–UP W–L	SHEET LENGTH	CUTS	PIECES	TIMING	SPECIAL INSTRUCTIONS
UP	1.595	ORDA	21 1/5	3– 1	41 1/4	464	1392	DELAY	
LO	4.526	ORDG	15 2/5	2– 1	48 1/4	1125	2250	DELAY	
UP		ORDE	33	1– 1	41 3/4	1300	1300		PARAF 2 LDOS

RUN ON STOCK WIDTH 55

KNIFE	FEET	ORDER	SHEET WIDTH	OUT–UP W–L	SHEET LENGTH	CUTS	PIECES	TIMING	SPECIAL INSTRUCTIONS
UP	13.958	ORDB	53 3/4	1– 1	92 3/4	1805	1805		

PROGRAM STATISTICS

COST OF SOLUTION	557.57
LENGTH OF ORDER	2335.18
LENGTH OF SOLUTION	2373.49
PERCENT TRIM WASTE	1.63
UTILIZATION	64.94
ITERATIONS	17

LINEAR PROGRAMMING PRICES

WIDTH	PRICE
53 3/4	13.3800
33	8.3266
26 2/5	5.9233
23 3/4	5.4833
21 1/5	5.0433
20	3.5100
19 3/4	3.5100
18 1/5	3.5100
17 2/5	3.5100
15 2/5	3.4016
12 4/5	2.8544
11 3/4	2.8544

VII BIBLIOGRAFIA

1) Dantzig George B.
Linear Programming and Extensions.
Santa Mónica Calif. RAND Corp. 1959

2) Espinoza Berriel, Héctor
Programación Lineal, Edit. Pax-México 1966

3) Gass Saul. I
Linear Programming, Methods and Applications
2 ed. N.Y. Mac Graw Hill, 1964

4) Simonnard, Michel
Linear Programming. Translated by W.S. Jewel.
Englewood Cliffs. N.J. Prentice. Hall, 1966

5) Garvin, Walter W.
Introduction to Linear Programming. N.Y. Mac Graw Hill, 1960

6) Smythe, William R.
Introduction to Linear Programming, with Applications.
Englewood Cliffs. N.J. Prentice Hall, 1966

7) Germain, Clarence B.
Programación IBM 1620. México Limusa Wiley

8) IBM 1620 FORTRAN
Manual, IBM, Systems Reference Library

9) Mc Cracken Daniel D.
Numerical Methods and Fortran Programming.
N.Y. John Wiley Sons Inc. 1966

10) Manual del Programa 10.3.042, Corrugator Trim and Schedule Program, Centro de Cálculo de la Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala.

VIII APENDICE II

El objetivo fundamental de este apéndice es introducir al lector directamente al Método Simplex Modificado, sin definir una serie de teoremas y principios matemáticos que, además de alargar innecesariamente este trabajo, constituyen suficiente material para escribir varios libros.

Considero que, con lo que se expone a continuación, es suficiente para comprender la mecánica del cálculo a seguir. Pero, para aquellos que deseen profundizar en el tema, encontrarán al final una lista de lecturas recomendadas, en las cuales podrán satisfacer ampliamente su curiosidad.

PROGRAMACION LINEAL

1.- HISTORIA:

Se remonta a los últimos años de la Segunda Guerra Mundial, cuando fue necesario desarrollar un proceso matemático que pudiera ser utilizado para planear grandes acciones de guerra, movimiento y abastecimiento de hombres y equipos, en una forma económica.

Así, coincidiendo con el aparecimiento de las computadoras digitales, la Programación Lineal se convierte en uno

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

de los procesos más eficientes en el cálculo de costos mínimos, ganancias máximas, selección de rutas de distribución, substitución de materias primas en las mezclas, etc.

En el año de 1947 George B. Dantzig publica el denominado Método Simplex que, desde ese momento viene a ser un proceso fundamental para el mejor funcionamiento económico de las industrias. Sin embargo, presentaba el inconveniente de utilizar una serie de elementos que, no siendo necesarios, eran empleados muchas veces, con el consiguiente gasto de tiempo, aún en las rápidas computadoras y que por otra parte ocupaban posiciones de memoria inútilmente.

Este problema fue solucionado con el aparecimiento del Método Simplex Modificado, desarrollado por Dantzig, Orden y Wolfe, que se caracteriza por el uso de los elementos indispensables exclusivamente.

2.- CARACTERISTICAS:

Todos los problemas de Programación Lineal tienen en común:

A) Un "Objetivo" que alcanzar, ya sea costos mínimos, ganancias máximas, tiempo mínimo, etc.

B) Existe siempre un gran número de Variables que manejar simultáneamente.

C) Las Variables tienen un gran número de interacciones entre sí.

D) Muchos de los problemas presentan además, ciertos objetivos que están en conflicto con el objetivo principal. Por ejemplo: en una mezcla donde tiene que cum

plirse que por lo menos cierta cantidad de una materia prima debe estar presente, no importando el costo. Lo que estaría en conflicto si estamos maximizando ganancias o minimizando costos.

E) Todos los problemas de Programación Lineal tienen prácticamente un número infinito de soluciones válidas o verdaderas, ya no digamos si agregamos las no-verdaderas.

Una simplificación inicial se logra al considerar que solo se admiten aquellas que son reales positivas o cuando menos iguales a cero.

Siendo el objeto, no el de conocer todas las soluciones posibles, sino que únicamente aquella que es la "Solución Optima" del problema.

3.- CONCEPTOS BASICOS:

A) Proporcionalidad:

Todas las cantidades de flujo de un modelo siempre serán proporcionales. Es decir, si transportar un tonel un metro nos cuesta Q 0.01, transportarlo dos costará: Q 0.02, (2× 0.01), transportarlo diez metros costará Q 0.10, (10× 0.01).

B) No Negatividad:

Todas las cantidades serán siempre positivas o al menos iguales a cero. La razón fundamental es que como los modelos son reales, no puede concebirse una producción de $-\overline{X}$ unidades, ya que esto implicaría, la destrucción de las X unidades mencionadas. O de otra forma más sencilla, es im-

posible producir -X libras de un producto.

C) Aditividad:

Siempre se requiere que para cada elemento, el total especificado por el sistema sea igual a la suma de las cantidades del mismo que salen, más las que entran a dicho Sistema. En otras palabras siempre debe caracterizarse al sistema con una ecuación de balance de materiales para cada elemento.

D) Función Objetivo:

Es la combinación lineal de todas las variables y es la función que debe ser optimizada.

Resumiendo:

"Para que un sistema, sea un modelo de Programación Lineal, debe satisfacer las condiciones de proporcionalidad, no-negatividad y aditividad".

4.- METODO SIMPLEX MODIFICADO:

El problema inicial consiste en encontrar la función objetivo, a la cual denominaremos "Fob" y que tiene la forma general:

$$Fob = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n X_n$$

Por otra parte se tienen que cumplir una serie de condiciones que pueden ser de tres formas distintas:

1) $A_{m1} X_1 + A_{m2} X_2 + A_{m3} X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn} X_n \leq b$

2) $A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + A_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}\,X_n = b$

3) $A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + A_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}\,X_n \geq b$

En los problemas reales se presentan por lo general los tres tipos de combinaciones, por lo que es necesario el uso de Variables Artificiales que convertirán las inecuaciones en ecuaciones y por otra parte servirán como valores iniciales en el proceso interativo.

1) Cuando se tiene el tipo:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n \leq b$$

Se define la Variable Artificial X_{n+1}, Transformando la inecuación así:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n + X_{n+1} = b$$

2) Cuando se tiene el tipo:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n = b$$

Se define solamente una Variable Artificial X_{n+1}, cuyo único objeto es de servir como valor inicial en el proceso iterativo; quedando la ecuación así:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n + X_{n+1} = b$$

3) Cuando se tiene el tipo:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n \geq b$$

Se define la variable X_{n+1} que nos dará:

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n - X_{n+1} = b$$

Por ciertas condiciones que no se explican en este resumen, el procedimiento a seguir es el siguiente:

Sea el problema general:

$$\text{Min}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

Con las condiciones:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{1n}X_n \geq b_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2n}X_n \geq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n \geq b_m$$

Restando las variables de holgura se tiene:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{1n}X_n - X_{n+1} = b_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2n}X_n - X_{n+2} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n - X_{m+n} = b_m$$

Luego se selecciona la restricción que tenga la mayor b_i y se substituye cada una de las restricciones restantes por la diferencia entre la restricción de mayor b_i y la restricción de que se trate y se agregan las variables artificiales necesarias.

El siguiente problema aclarará el procedimiento:

$$\text{Min}(Z) = 4X_1 + 6X_2$$

Con las condiciones:

$$X_1 + X_2 \geq 260$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 190$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 200$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 340$$

Restando las variables de holgura:

$$X_1 + X_2 - X_3 = 260$$

$$4X_1 + 2X_2 - X_4 = 190$$

$$X_1 + 3X_2 - X_5 = 200$$

$$X_1 + 2X_2 - X_6 = 340$$

La restricción cuyo b_i es mayor es la última:

1.- Restricción: $X_1 + 2X_2 - X_6 = 340$

$$-(X_1 - X_2 - X_3 = 260)$$

$$X_2 - X_6 + X_3 = 80$$

2.- Restricción: $X_1 + 2X_2 - X_6 = 340$

$$-(4X_1 + 2X_2 - X_4 = 190)$$

$$-3X_1 - X_6 + X_4 = 150$$

3.- Restricción: $X_1 + 2X_2 - X_6 = 340$

$$-(X_1 + 3X_2 - X_5 = 200)$$

$$-X_2 - X_6 + X_5 = 140$$

4.- Restricción: como es la seleccionada se incluye sin cambio alguno.

Las restricciones son:

$$X_2 - X_6 + X_3 = 80$$

$$-3X_1 - X_6 + X_4 = 150$$

$$-X_2 - X_6 + X_5 = 140$$

$$X_1 + 2X_2 - X_6 = 340$$

Donde puede apreciarse que solamente en la cuarta restricción hace falta una variable de holgura X_7 necesaria para formar la matriz unidad de las variables artificiales.

Quedando las restricciones finalmente así:

$$X_2 - X_6 + X_3 = 80$$

$$-3X_1 - X_6 + X_4 = 150$$

$$-X_2 - X_6 + X_5 = 140$$

$$X_1 + 2X_2 - X_6 + X_7 = 340$$

Este procedimiento tiene como objetivo fundamental, reducir el número de variables artificiales a usar, con lo que se economiza tiempo en el proceso de Cálculo.

Como por lo general se presentan los tres tipos, debe tener se cuidado de transformarlos correctamente.

El problema tomará la siguiente forma:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1$$

$$A_{22}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m$$

Luego la función objetivo, la cual será optimizada, es modificada al definir una nueva Variable Artificial X_{n+m+1} así:

$$Fob = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n + X_{n+m+1} = 0$$

Por ordenación, para la formación de la matriz inicial, cambiamos los coeficientes C_n por otros del tipo $A_{m+1,n}$, así:

$$Fob. = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_nX_n + X_{n+m+1} = 0$$

$$Fob = A_{m+1,1}X_1 + A_{m+1,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{m+1,n}X_n + X_{n+m+1} = 0$$

donde:

$$C_1 = A_{m+1,1}$$

$$C_2 = A_{m+1,2}$$

$$C_n = A_{m+1,n}$$

Luego calculamos una ecuación redundante, a la que defi-

nimos:

$$A_{m+2,1}X_1 + A_{m+2,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{m+2,n}X_n + X_{m+n+2} = b_{m+2}$$

donde:

$$A_{m+2,j} = -\sum_{i=1}^{m} A_{ij} \qquad j = 1,2 \ldots\ldots\ldots, n$$

$$b_{m+2} = -\sum_{i=1}^{m} b_i$$

X_{m+n+2} Variable Artificial para esta ecuación.

Reescribamos ahora el problema donde minimizaremos Fob, obteniendo como resultado final su solución óptima:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{m+1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m$$

$$A_{m+1,1}X_1 + A_{m+1,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + A_{m+1,n}X_n + X_{n+m+1} = 0$$

$$A_{m+2,1}X_1 + A_{m+2,2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + A_{m+2,n}X_n + X_{n+m+2} = b_{m+2}$$

Donde todas $X_i \geq 0$ para $i = 1,2 \ldots\ldots\ldots, n + m + 2$.

Cuando el problema que se presenta es maximizar Fob, simplemente debe recordarse que:

Dada una función objetivo Fob (X) la cual hay que maximizar:

Max Fob(X) = -Min Fob(X)

Como ejemplo sea:

Fob = $2X_1 + 4X_2 - 3X_3$ Maximizar Fob:

es igual a Minimizar Fob = $-2X_1 - 4X_2 + 3X_3$

Luego se forma la matriz $\overline{A}$ así:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & A_{12} \cdots\cdots & A_{1K} \cdots\cdots & \overline{A_{1n}} \\ A_{21} & A_{22} \cdots\cdots & A_{2K} \cdots\cdots & A_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{L1} & A_{L2} & A_{LK} & A_{Ln} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{m1} & A_{m2} \cdots\cdots & A_{mK} \cdots\cdots & A_{mn} \\ A_{m+1,1} & A_{m+2,2} \cdots\cdots & A_{m+1,K} \cdots\cdots & A_{m+1,n} \\ \underline{A_{m+2,1}} & \underline{A_{m+2,2}} \cdots\cdots & \underline{A_{m+2,K}} \cdots\cdots & \underline{A_{m+2,n}} \end{bmatrix}$$

Donde puede apreciarse que A tendrá siempre M+2 filas y N columnas, es decir, una matriz (M + 2) x N.

Es necesario que nuestra base inicial sea una matriz identidad U, que posee la propiedad que su inversa es otra matriz identidad.

Siendo para nuestro caso que U será siempre una matriz (M + 2) x (M + 2)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego iniciamos las iteraciones haciendo:

$X_{n+i} = b_i \qquad i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots m$

$X_{n+m+1} = 0$

$X_{n+m+2} = b_{m+2}$

Donde se infiere que hemos dado un valor real a nuestras Variables Artificiales, mientras las reales son igualadas a cero.

Consistiendo el proceso iterativo en destruir las variables artificiales dándole valores óptimos a las reales.

El método Simplex Modificado se divide aquí en dos fases:

FASE I:

Se refiere a la etapa de cálculo que determina la factibilidad.

FASE II:

Etapa que proporciona la solución óptima.

FASE I:

Variables Artificiales en la solución con valores positivos.

Etapa I: Si X_{m+n+2} 0 Calcular:

$$S_i = U_{m+2,1}A_{1i} + U_{m+2,2}A_{2i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_{m+2,m+2}A_{m+2,i}$$

$i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots, n$

Si $X_{m+n+2} = 0$ Continuar con Etapa I de FASE II.

Etapa 2: si todos los $S_i \geq 0$ implica que: X_{n+m+2} se encuentra en su valor máximo o mínimo, según el caso, y que no existe solución factible al problema. Si al menos un $S_i \leq 0$, la variable que será introducida en la solución, X_K, corresponde a: $S_K = \text{Min } S_i$

En caso que dos o más S_i sean iguales, se seleccionará al de menor índice.

Etapa 3:

$$X_{iK} = U_{i1}A_{1K} + U_{i2}A_{2K} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_{i,m+2}A_{m+2,K}$$

$i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots m, m+1, m+2$

La variable X_L, que será eliminada de la solución corresponde al radio:

$$\theta_0 = \frac{\text{Min}}{i} \frac{X_i}{X_{iK}} = \frac{X_L}{X_{LK}} \qquad i = 1,2 \ldots\ldots, m$$

Donde el radio θ_0 será formado únicamente por aquellos $X_{iK} > 0$.

Si hay dos valores iguales, se seleccionará el de índice menor.

Los radios X_i/X_{iK}, son tomados de aquellos i cuyos correspondientes X_i se encuentran en la solución básica.

Etapa 4: el nuevo valor de las variables en la solución básica son obtenidos de las siguientes fórmulas:

$$X'_i = X_i - \frac{X_L}{X_{Lk}} \cdot X_{ik} \qquad \text{para } i \neq k$$

$$X'_k = \frac{X_L}{X_{Lk}}$$

Los nuevos elementos de la matriz U son transformados por:

$$U'_{ij} = U_{ij} = \frac{U_{Lj}}{X_{Lk}} \cdot X_{ik} \qquad \text{para } i \neq L$$

$$U'_{Lj} = \frac{U_{Lj}}{X_{Lk}}$$

Las etapas de la FASE I, son repetidas hasta que se determina que no existe solución factible o que $X_{m+n+2} = 0$

Cuando $X_{m+n+2} = 0$ ir a FASE II.

FASE II:

Solución sin Variables Artificiales con valores positivos.

Etapa I: Aquí $X_{m+n+2} = 0$

$$G_j = U_{m+1,1}A_{1j} + U_{m+1,2}A_{2j} + \cdots\cdots + U_{m+1,m+2}A_{m+2,j}$$

$j = 1,2 \ldots\ldots, n.$

Etapa 2: si todos $G_j \geq 0$, implica que X_{n+m+1} se encuentra en su valor máximo y que corresponde a la solución óptima. Si la función fue minimizada el valor negativo de X_{n+m+1} será su valor óptimo.

Si al menos un $G_j < 0$

$G_k = \text{Min } G_j$

Donde la variable X_k es seleccionada para ser introducida en la solución. Si hay dos o más valores iguales, se seleccionará el de menor índice.

Etapa 3: Calcular:

$$X_{ik} = U_{i1}A_{1k} + U_{i2}A_{2k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_{i,n+2}A_{n+2,k}$$

$i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots m, m+1, m+2.$

La variable X_L que será eliminada de la solución, se determina por el radio:

$$= \frac{\text{Min}}{i} \frac{X_i}{X_{ik}} = \frac{X_L}{X_{Lk}} \qquad i = 1,2 \ldots\ldots\ldots, m$$

para aquellos $X_{ik} > 0$

Si existen valores iguales será seleccionado el que posea el índice menor.

Si todos los $X_{ik} \leq 0$, el proceso a llegado a determinar una solución de la función objetivo cuyo valor podrá ser arbitrariamente muy grande.

Etapa 4: los nuevos valores de las variables son obtenidos así:

$$X'_i = X_i - \frac{X_L}{X_{Lk}} X_{ik} \qquad \text{para } i \neq k$$

$$X'_k = \frac{X_L}{X_{Lk}}$$

Los elementos de la matriz U son transformados por:

$$U'_{ij} = U_{ij} - \frac{U_{Lj}}{X_{Lk}} X_{ik} \qquad \text{para } i \neq L$$

$$U'_{Lj} = \frac{U_{Lj}}{X_{Lk}}$$

Estas etapas son repetidas hasta que se alcanza la solución deseada o se determina que la función objetivo alcanza un valor infinitamente grande.

Todas las etapas anteriores pueden ordenarse en forma de tabla, para mayor claridad o cuando el problema piensa resolverse sin el uso de una computadora, siendo esto último práctico solamente cuando el número de variables y de restricciones no pase de 4 ó 5, de lo contrario, el proceso consumirá gran cantidad de tiempo y propiciará el cometer errores al tener que efectuar un número de operaciones tan grande.

Indice de las Filas de la Tabla	Indice de las Variables en Solución	Valor de las Variables	Matriz U	$U_1\overline{A}_k$ (X_{ik})
		TABLA INICIAL		
1	$n+1$	$X_{n+1} = b_1$	1 0 .....0 .....0 0 0	X_{1k}
2	$n+2$	$X_{n+2} = b_2$	0 1	X_{2k}
.	.	.	.....	.
.	.	.	.....	.
L	$n+L$	$X_{n+L} = b_L$	0 0 .....1 .....0 0 0	X_{Lk}
.	.	.	.....	.
.	.	.	.....	.
m	$n+m$	$X_{n+m} = b_m$	0 0 .....0 .....1 0 0	X_{mk}
$m+1$	$n+m+1$	$X_{n+m+1} = 0$	0 0 .....0 .....0 1 0	$X_{m+1,k}$
$m+2$	$n+m+2$	$X_{n+m+2} = b_{m+2}$	0 0 .....0 .....0 0 1	$X_{m+2,k}$
		TABLA TRANSFORMADA		
1	$n+1$	X'_{n+1}	U'_{11} U'_{12} U'_{1L} U'_{1m} 0 0	X'_{ik}
2	$n+2$	X'_{n+2}	U'_{21} U'_{22} U'_{2L} U'_{2m} 0 0	
.	.	.	.....	
.	.	.	.....	
L	K	X'_k	U'_{L1} U'_{L2} U'_{LL} U'_{Lm} 0 0	
.	.	.	.....	
.	.	.	.....	
m	$n+m$	X'_{n+m}	U'_{m1} U'_{m2} $U'_{m,L}$ $U'_{m,n}$ 0 0	
$m+1$	$n+m+1$	X'_{n+m+1}	$U'_{m+1,1}$ $U'_{m+1,2}$ $U'_{m+1,L}$ $U'_{m+1,m}$ 1 0	
$m+2$	$n+m+2$	X'_{n+m+2}	$U'_{m+2,1}$ $U'_{m+2,2}$ $U'_{m+2,L}$ $U'_{m+2,m}$ 0 1	

Lecturas Recomendadas

1) Gass, Saul I.
Linear Programming, Methods and Applications,
2d ed. NY. Mc Graw Hill, 1964

2) Garvin, Walter W.
Introduction to Linear Programming, NY. Mc Graw
Hill, 1960

3) Hewellyn, Robert W.
Linear Programming, Holt, Rinehart and Winston, 1964

Francisco Rodolfo Saravia Castillo

Vo Bo

Ing. J. Manuel Samayoa

Asesor.

Vo Bo

Ing. Roberto Palacios

Asesor.

Vo Bo

Ing. Leonel Flores E.

Director.

ESCUELA DE INGENIERIA QUIMICA
DIRECCION
GUATEMALA, C. A.

Imprímase:

Ing. Mauricio Castillo Contoux

Decano.