Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA EN MECÁNICA CLÁSICA

Luis Pedro Castellanos Moscoso
Asesorado por Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, Noviembre de 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA EN MECÁNICA CLÁSICA

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

LUIS PEDRO CASTELLANOS MOSCOSO
ASESORADO POR ING. JOSÉ RODOLFO SAMAYOA DARDÓN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Dr.Enrique Pazos Ávalos
EXAMINADOR	Ing. Otto Miguel Hurtarte
EXAMINADOR	Ing. Walter Giovanni Álvarez Marroquín

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA EN MECÁNICA CLÁSICA,

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Física, el 1 de Octubre de 2015.

Luis Pedro Castellanos Moscoso

Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. DTG. 003-2015

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del coordinador de la Licenciatura de Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: Geometría Simpléctica en Mecánica Clásica presentado por el estudiante universitario **LUIS PEDRO CASTELLANO MOSCOSO**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

Msc. Edgar Aníbal Cifuentes Anleu
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
ESCUELA DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DIRECCIÓN
DE GUATEMALA

Guatemala, 10 de noviembre de 2015

/pec.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mis mamá, familia y amigos.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi mamá Magali Moscoso.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\in$	pertenece a
$\subseteq$	contenido en
$\times$	producto cartesiano
$\otimes$	producto tensorial
V^*	espacio dual de V
T_s^r	espacio de tensores de tipo (r,s)
$dimV$	dimensión del espacio vectorial V
$\wedge$	producto cuña
$tr(A)$	traza de la matriz A
$det(A)$	determinante de la matriz A
A^T	Transpuesta de la matriz A
$\|\|v\|\|$	norma de v
$W^\perp$	complemento ortogonal de W
S^w	complemento w-ortogonal de S
$\emptyset$	conjunto vacío
T_pM	espacio tangente en p
T_pM^*	espacio cotangente en p
$\bigotimes_s^r T_pM$	espacio tensorial de tipo (r,s) en p
$F^\infty(M)$	espacio de funciones C^∞ en la variedad M
df	diferencial de la función f
f_*	tangente de la función f
f^*	cotangente de la función f
$d(X)$	derivada exterior de X
$i(X)$	Producto interior de X
DF	derivada de F o matriz de Jacobi
δ_j^i	delta de Kronecker

OBJETIVOS

General

Evidenciar la estructura simpléctica de la mecánica clásica.

Específicos

1. Definir los conceptos básicos de la geometría diferencial necesarios para la geometría simpléctica.
2. Definir los conceptos de espacio de configuración y espacio de fase en el contexto de la geometría simpléctica.
3. Obtener las ecuaciones de Hamilton en el contexto de la geometría simpléctica.
4. Discutir las transformaciones canónicas en el espacio de fase en el contexto de la geometría simpléctica.

INTRODUCCIÓN

La geometría diferencial, de la cual forma parte la geometría simpléctica, es una rama de la matemática que utiliza técnicas del análisis y del álgebra lineal para estudiar problemas de geometría. Su origen está en el estudio de las curvas y superficies planas en el espacio euclidiano. Actualmente su principal objeto de estudio son las variedades diferenciables y las estructuras geométricas definidas en ellas.

La mecánica clásica es una rama de la física que describe las leyes que gobiernan el movimiento de cuerpos macroscópicos bajo la influencia de un sistema de fuerzas, cuando se mueven a velocidades lejanas a la velocidad de la luz. La mecánica clásica describe el movimiento de sistemas astronómicos como naves espaciales, planetas, estrellas, galaxias etc. También el movimiento de proyectiles, rotación de cuerpos rígidos e incluso de líquidos, gases o cuerdas.

Al inicio de la mecánica clásica con Newton (1687) esta era muy geométrica, los argumentos de Newton utilizaban cálculo (del cual Newton fue también uno de los fundadores) y geometría euclidiana. Luego con las formulaciones de la mecánica clásica de Lagrange (1788) y Hamilton (1833) esta perdió su «espíritu geométrico». Finalmente a finales del siglo XIX, con los trabajos de Poincaré y Birkhoff, la geometría ha vuelto a tener un rol importante en la mecánica clásica, pero ahora no es la geometría euclideana, sino otro tipo de geometría que «preserva áreas»: la geometría simpléctica.

El propósito de este trabajo de graduación es presentar los fundamentos de la geometría simpléctica y evidenciar su profunda relación con la mecánica clásica. En el capítulo 1 se desarrolla la teoría de espacios vectoriales con énfasis en los tensores. En el capítulo 2 se analizan dos estructuras sobre un campo vectorial una simétrica y otra antisimétrica; y se hace una comparación entre ambas. En el capítulo 3 se desarrollan las ideas básicas de topología y de geometría diferencial. En el capítulo 4 se estudian la geometría simpléctica y se establece la relación con la mecánica clásica.

1. Espacios Vectoriales

Es este capítulo se estudia una de las estructuras algebraicas más utilizadas en física. Se desarrollan de manera breve los conceptos necesarios para los siguientes capítulos (Para más detalles se ver [6] o [8]).

Un *espacio vectorial* V sobre un campo R es un conjunto con dos operaciones. Si $v, w \in V$ y $a \in R$

1. $+ : V \times V \to V$ que se denota $v + w$.
2. $\bullet : R \times V \to V$ que se denota av .

Llamadas *suma* y *multiplicación escalar* respectivamente. Además existe un elemento denotado por $0 \in V$ tal que se cumplen los siguientes axiomas. Si $v, w, z \in V$ y $a, b \in R$:

1. $v + w = w + v$.
2. $(v + w) + z = v + (w + x)$.
3. $v + 0 = v$.
4. Existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.
5. $a(v + w) = av + aw$.
6. $(a + b)v = av + bv$.
7. $(ab)v = a(bv)$.
8. $1v = v$.

A los elementos de un espacio vectorial se le llama *vectores*, a los elementos de R se le llaman *escalares*.

Definición 1.1. Si V es un espacio vectorial, $W \subset V$ es un *subespacio* de V si W es cerrado respecto a la suma y a la multiplicación por escalar, o sea que para todo $x, y \in W$ y $a \in R$:

1. $x + y \in W$.

2. $ax \in w$.

1.1. Independencia Lineal

Sea V un espacio vectorial. $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ son *linealmente dependientes* si existen escalares $a^1, ..., a^n$ no todos iguales a cero tales que $a^i v_i = 0$. Un conjunto (finito) de vectores es linealmente independiente si no es linealmente dependiente. A una suma de la forma $a^i v_i$ se le llama *combinación lineal*.

Definición 1.2. El número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V se llama la *dimensión de* V y se denota $dimV$.

De aquí en adelante supondremos $dimV < \infty$.

Definición 1.3. Un conjunto $S = \{e_1, ..., e_n\} = \{e_i\} \subset V$ es una *base* de V si y solo si

1. S es linealmente independiente.

2. Cualquier elemento de $v \in V$ es una combinación lineal de elementos de S

$$v = a^i e_i \tag{1.1}$$

Proposición 1.1. *Todas las bases tienen la misma cantidad de elementos: la dimensión de V.*

Proposición 1.2. *Si S es una base de V, entonces para cada $v \in V$, la combinación lineal de la ecuación 1.1 es única.*

1.2. Cambio de base

Es obvio que un espacio vectorial puede tener varias bases. Sean $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$ dos bases de V y $dimV = d$. Entonces cada e_i tiene una expresión en términos de las f_i y viceversa

$$e_i = a_i^j f_j \tag{1.2}$$

$$f_i = b_i^j e_j \tag{1.3}$$

Los d^2 números a_i^j se arreglan en una matriz $d \times d$ llamada la *matriz de cambio de base* de $\{f_i\}$ a $\{e_i\}$, de tal forma que i sea constante en las columnas y j constante en las filas. De igual forma para b_i^j.

Proposición 1.3. *Las matrices de cambio de base de una base a otra y de regreso son inversas entre ellas, esto es*

$$a_i^k b_k^j = b_i^k a_k^j = \delta_i^j \tag{1.4}$$

1.3. El espacio vectorial R^n

El espacio vectorial más elemental es $R^n = R \times ... \times R$, n veces, donde R es el campo de los números reales. Un elemento x de R^n se denota $x = (x_1, ..., x_n)$. Si $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$ y $a \in R$ entonces la suma y multiplicación por escalar se definen de la siguiente forma

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., y_n + y_n) \tag{1.5}$$

$$ax = (ax_1, ..., ax_n) \tag{1.6}$$

Se puede demostrar que R^n con estas operaciones es un espacio vectorial.

Proposición 1.4. $dim R^n = n$

Lo anterior es de demostrar pues es obvio que el conjunto

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, ...0, 0\} \\ e_2 &= \{0, 1, ...0, 0\} \\ &\vdots \\ e_n &= \{0, 0, ...0, 1\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

es una base de R^n. Esta base es la *base estándar* de R^n.

1.4. Funciones Lineales

Sean V y W espacios vectoriales, consideremos una función $f : V \to W$. f es una *función lineal* de V hacia W si para todo $v_1, v_2 \in V$ y $a \in R$:

- $f(v_1 + v_2) = fv_1 + fv_2$
- $f(av_1) = afv_1$

Una función lineal f se dice que es un *isomorfismo* de V en W si es $1-1$ y el rango de f, $R(f)$, es W.

Teorema 1.4.1. *Una función lineal está determinada de manera única por sus valores en una base.*

1.5. El espacio $L(V, W)$

Sean V y W espacios vectoriales. El conjunto de funciones lineales de V hacia W forman un espacio vectorial que denotaremos por $L(V, W)$ con las siguientes operaciones. Si $f, g \in L(V, W)$ y $a \in R$:

- $(f + g)v = fv + gv$
- $(af)v = a(fv)$

Teorema 1.5.1. *El espacio $L(V, W)$ cumple*

1. *Si $dimV = d_2$ y $dimW = d_1$, entonces $dimL(V, W) = d_1 d_2$.*
2. *Si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{\bar{e}_\alpha\}$ es una base de W. Construimos una base $\{E^j_\beta\}$ de $L(V, W)$ como*
$$E^j_\beta e_i = \delta^j_i \bar{e}_\beta \tag{1.8}$$

1.6. Espacio Dual

El espacio vectorial $L(V, R)$ se llama el *espacio dual de V* y se denota como V^* (R es el espacio vectorial contenido en el campo de los números reales, $dimR = 1$). Del teorema 1.5.1

$$dimV^* = dimV \tag{1.9}$$

Existe una base natural para R: $\{1\}$. Del teorema 1.5.1, para cada base $\{e_i\}$ de V podemos construir una base única $\{\varepsilon^i\}$ de V^*, tal que

$$\varepsilon^i e_j = \delta^i_j \tag{1.10}$$

A esta base de V^* se le conoce como la *base dual* de $\{e_i\}$.

1.6.1. Cambio de base dual

Supongamos que $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$ son dos bases de V, con $\{\varepsilon^i\}$ y $\{\phi^i\}$ las respectivas bases duales. Entonces usando la ecuación 1.10 y la sección 1.2

$$\begin{aligned} \varepsilon^i f_j &= \varepsilon^i a^k_j e_k \\ &= a^k_j \delta^i_k \\ &= a^i_j \end{aligned} \tag{1.11}$$

También

$$a^i_k \phi^k f_j = a^i_k \delta^k_j = a^i_j \tag{1.12}$$

Dado que $\{\varepsilon^i\}$ y $\{a^i_k \phi^k\}$ tienen los mismos valores en la base f_j entonces por el teorema 1.4.1

$$\varepsilon^i = a^i_k \phi^k \tag{1.13}$$

De misma manera se obtiene

$$\phi^k = b^k_i \varepsilon^i \tag{1.14}$$

Entonces las bases duales también se relacionan usando las matrices de cambio de base, pero se utilizan las inversas y la suma es en el índice inferior.

1.7. Encrustamiento Natural

Si V es un espacio vectorial y $\tau \in V^*$, entonces por definición τ es una función con dominio V. Podemos cambiar nuestro punto de vista y considerar a $v \in V$ como una función con dominio V^* con valor τv para todo $\tau \in V^*$. De esta manera construimos una función lineal $v \in V^{**}$, esto es al espacio de funciones lineales $L(V^*, R)$. Lo que acabamos de hacer es construir una forma de ir de cada elemento de V a un elemento de V^{**}. Esta identificación de V con V^{**} se llama *encrustamiento natural* de V hacia V^{**}. En virtud del siguiente teorema ignoramos la diferencia entre V y V^{**} y no distinguiremos en notación entre sus elementos.

Teorema 1.7.1. *El encrustamiento natural de V hacia V^{**} es un isomorfismo de V con V^{**}.*

1.7.1. Emparejamiento natural

También podemos tomar otro punto de vista y pensar en una función $\langle , \rangle : V \times V^* \to R$ definida como

$$\langle v, \tau \rangle = \tau v \tag{1.15}$$

para todo $v \in V$ y $\tau \in V^*$. Esta función es lineal en cada componente, es una función *bilineal.*

Si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{\varepsilon^i\}$ es su base dual, $v = a^i e_i$, $T = b_i \varepsilon^i$ entonces

$$\langle v, T \rangle = b_i \varepsilon^i (a^j e_j) = b_i a^j \delta^i_j = b_i a^i \tag{1.16}$$

En términos de una base y su base dual, evaluar el emparejamiento natural corresponde a la suma de los productos de sus componentes correspondientes.

1.8. Funciones Multilineales

Una función es *multilineal* si es lineal en cada componente. Si $V_1, V_2, ..., V_n$ y W son espacios vectoriales $f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to W$ es multilineal si

$$f(v_1, ..., av_i + b\bar{v}_i, .., v_n) = af(v_1, ..., v_i, .., v_n) + bf(v_1, ..., \bar{v}_i, .., v_n) \tag{1.17}$$

para cualquier i. Si se define la suma y multiplicación de manera análoga que para $L(W, V)$, se puede demostrar que se forma un espacio vectorial denominado $L(V_1, V_2, ..., V_n, W)$.

1.9. Espacios tensoriales

Sea V un espacio vectorial. Las funciones multilineales con valores reales y dominio en productos cartesianos V y V^* se llaman tensores sobre V y los espacios vectoriales que forman se llaman espacios tensoriales sobre V.

- El número de Variables de V^* es el grado *contravariante.*

- El número de Variables de V es el grado *covariante.*

Por convención se colocan primero todas las variables de V^* y luego las variables de V. En general un tensor de tipo (r,s) forma un espacio vectorial que consiste en funciones multilineales en $V^* \times ... \times V^* \times V \times .... \times V$ ($V^* : r\ veces, V : s\ veces$) y se denota por

$$T^r_s = V \otimes V \otimes .... \otimes V \otimes V^* \otimes .... \otimes V^* \tag{1.18}$$

($V^* : s\ veces, V : r\ veces$). El cambio de orden en 1.18 se debe al encrustamiento natural, esto es V se puede considerar como V^{**}.

Un tensor de tipo $(0,0)$ se define como un escalar $T^0_0 = R$. Un tensor de tipo $(1,0)$ se conoce como *vector contravariante* y un tensor de tipo $(0,1)$ se conoce como *vector covariante*. Un tensor de tipo $(r,0)$ se conoce *tensor contravariante* y un tensor de tipo $(0,s)$ se llama *tensor covariante*. A continuación se define una operación entre tensores el *producto tensorial*, que justifica la notación utilizada en la ecuación (1.18).

1.9.1. Producto Tensorial

El *producto tensorial* de un tensor A de tipo (r,s) y un tensor B de tipo (t,u) es un tensor $A \otimes B$ de tipo $(r+t, s+u)$, definido como:

$$\begin{aligned} &A \otimes B\left(\tau^1, ..., \tau^{r+t}, v_1, ..., v_{s+u}\right) \\ &= A(\tau^1, ..., \tau^r, v_1, ..., v_s) B(\tau^{r+1}, ..., .\tau^{r+t}, v_{s+1}, ..., v_{s+u}) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Si A, B y C son tensores, el producto tensorial cumple con las siguientes propiedades cuando tienen sentido

1. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
2. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
3. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.

El producto tensorial no es conmutativo.

1.10. Cambio de base en espacios tensoriales

En los libros introductorios al tema de tensores y en los libros de física se suele presentar la definición «clásica» de tensores, esta parece diferente a la presentada en la sección 1.9. Esta definición «clásica» tiene aplicaciones muy directas y elementales en física, pero algunas aplicaciones más sofisticadas, como la geometría simpléctica en mecánica clásica o la relatividad general, necesitan el tratamiento más general de la sección 1.9 . En la definición «clásica» un tensor se presenta como un «objeto» con superíndices (contravariantes) y subíndices (covariantes), el cual obedece ciertas leyes de transformación cuando se cambia la base. En el siguiente teorema se establece la equivalencia de la definición «clásica» y la definición de la sección 1.9: el «objeto» con índices aparece como las componentes de un tensor respecto a una base formada por productos tensoriales de bases y bases duales.

Teorema 1.10.1. *Sea V un espacio vectorial con $\{e_i\}$ y $\{\varepsilon^i\}$ una base de V y su base dual respectivamente. Un tensor $A \in T_s^r$ está determinado por sus valores en la base y su base dual. Estos valores son las componentes de un tensor respecto a los productos tensoriales de bases y bases duales, que forman una base del espacio tensorial T_s^r.*

Demostración

Sea $A \in T_s^r$ y $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = A(\varepsilon^{i_1}, ..., \varepsilon^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})$. Para cualquier $\tau^1, ..., \tau^r \in V^*$ y $v_1, ..., v_s \in V$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\tau^p &= a_i^p \varepsilon^i \qquad p = 1, .., r \\
v_q &= b_q^i e_i \qquad q = 1, .., s \\
A(\tau^1, ...\tau^r, v_1, ..., v_s) &= a^1_{i_1} ... a^r_{i_r} b^{j_1}_1 ... b^{j_s}_s A(\varepsilon^{i_1}, ..., \varepsilon^{i_r}, e_{j_1}, ..., e_{j_s}) \\
&= a^1_{i_1} ... a^r_{i_r} b^{j_1}_1 ... b^{j_s}_s A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \\
&= A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \langle e_{i_1}, \tau^1 \rangle .. \langle e_{i_r}, \tau^r \rangle \langle v_1, \varepsilon^{j_1} \rangle ... \langle v_s, \varepsilon^{j_s} \rangle \\
&= A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_s} (\tau^1, ...\tau^r, v_1, ..., v_s) \\
&\Longrightarrow A = A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_s} \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad surge de que ambos lados toman los mismos valores en todo los elementos de su dominio.

Los tensores de la forma

$$e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \varepsilon^{j_s} \qquad (1.21)$$

pertenecen a T_s^r, son linealmente independientes y cualquier tensor $A \in T_s^r$ se puede expresar como una combinación lineal, entonces forman una base de T_s^r.

Corolario 1.1. *La dimensión de T_s^r es d^{r+s}.*

1.10.1. Leyes de transformación

La componentes de un tensor A son funciones de la base y de los índices. La forma en que estas componentes dependen de la base está determinado por la matriz de cambio de base (sección 1.2) y algunas reglas para el uso de estas matrices que dependen del tipo de tensor y que llamaremos *reglas de transformación de tensores*. Determinaremos esta regla de transformación para un tensor de tipo $(1,2)$ y la generalización resultará evidente. Para un tensor de tipo $(1,2)$, las componentes respecto a una base $\{e_i\}$ y su base dual $\{\varepsilon^i\}$ se denotan por

$$A^{e,i}_{jk} = A(\varepsilon^i, e_j, e_k) \tag{1.22}$$

Vemos que de un lado A es una función de cuatro variables: la base $\{e_i\}$ y los tres índices $\{i,j,k\}$. Ahora supongamos otra base $\{f_i\}$ y su respectiva base dual $\{\phi^i\}$. Recordemos las relaciones

$$\begin{aligned} f_i &= a^j_i e_j \\ \phi^i &= b^i_j \varepsilon^j \end{aligned} \tag{1.23}$$

Las componentes de A respecto a la nueva base son

$$\begin{aligned} A^{f,i}_{jk} &= A(\phi^i, f_j, f_k) \\ &= A(b^i_m \varepsilon^m, a^n_j e_n, a^p_k e_p) \\ &= b^i_m a^n_j a^p_k A(\varepsilon^m, e_n, e_p) \\ &= b^i_m a^n_j a^p_k A^{e,m}_{np} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Es generalizar esta regla para cualquier tensor de tipo (r,s). Las componentes de un tensor junto con estas reglas de transformación son la definición «clásica» de un tensor.

1.11. Invariantes

Supongamos que tenemos una función cuyo dominio son tensores, muchas veces para definir la función se utilizan las componentes del tensor respecto a una base. La pregunta es si la función que construimos es independiente de la base que elijamos para definirla. Si el valor de la función no depende de la base decimos que la función es un *invariante*, más específicamente *invariante escalar* si los valores de la función son escalares e *invariante tensorial* si los valores de la función son tensores. La invarianza explicada anteriormente es referida al grupo lineal general (Ver [8]). Por ejemplo supongamos que para una base $\{e_i\}$ definimos una función f en T_0^1 tal que para todo τ en V

$$f(\tau) = \tau^{e,1} \tag{1.25}$$

Claramente esto no es un invariante escalar pues si $\{k_i\}$ es otra base

$$\tau^{k,1} = b_t^1 \tau^{e,t} \tag{1.26}$$

Un ejemplo de un invariante escalar es la *traza* de un tensor.

Definición 1.4. Sea $A \in T_1^1$ y $\{e_i\}$ una base. La *traza* de A es un escalar, se denota $Tr(A)$, y se define como

$$Tr(A) = A_i^{e,i} \tag{1.27}$$

Si $A_j^{e,i}$ lo interpretamos como una matriz, entonces la traza es la suma de la diagonal de la matriz. No es obvio que esta definición sea un invariante, para demostrar que es un invariante se usan las reglas de transformación.

Proposición 1.5. *La traza de un tensor es un invariante.*

Otro invariante muy utilizado es la *contracción de un tensor*, esta es una generalización de la traza .

Definición 1.5. Si $A \in T_s^r$ la contracción de este tensor respecto a un índice contravariante k y un índice covariante t es un tensor $B \in T_{s-1}^{r-1}$ definido en una base $\{e_i\}$ por

$$B_{j_1 \ldots j_{s-1}}^{e,i_1 \ldots i_{r-1}} = A_{j_1 .. j_{q-1} w i_q .. j_{s-1}}^{e,i_1 .. i_{p-1} w i_p .. i_{r-1}} \tag{1.28}$$

Proposición 1.6. *La contracción de un tensor es un invariante.*

El número de contracciones diferentes de un tensor de tipo (r, s) es $r \times s$.

Un ejemplo de invariante en física es el *Escalar de Ricci* R que aparece en las ecuaciones de campo de Einstein. Este resulta de la contracción de un tensor de tipo $(2, 2)$

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{1.29}$$

, donde g^{ij} es el tensor métrico y R_{ij} el tensor de Ricci (Para mas información sobre este tensor ver [3]).

1.12. Simetría

Un tensor es simétrico en la q-ésima y la p-ésima variable si sus valores como función multilineal no cambian cuando estas variables se intercambian, por supuesto las variables intercambiadas deben ser del mismo tipo. También se puede definir simetría en los índices de las componentes de un tensor. Decimos que un tensor es simétrico en el q-ésimo y el p-ésimo índice (ambos índices del mismo tipo) si las componentes del tensor, con respecto a cualquier base, no cambian cuando estos índices se intercambian. Estos dos tipos de simetría son equivalentes.

Teorema 1.12.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) A es simétrico en la q-ésima y la p-ésima variable.

b) A es simétrico en el q-ésimo y p-ésimo índice respecto a cualquier base.

c) Las componentes de A respecto una base no cambian cuando el q-ésimo y p-ésimo índice del mismo tipo se intercambian.

Del teorema 1.12.1 vemos que no hay diferencia entre la simetría en los índices y la simetría en las variables por lo que solo se utilizará la palabra simetría. Dado que las variables de V^* se colocan primero que las de V, cuando hay simetría en el p-ésimo y q-ésimo índice covariante significa la simetría en la $(r+p)$-ésima y $(r+q)$-ésima variable en el caso de un tensor de tipo (r, s).

Un tensor es *contravariante simétrico* si es simétrico en cualquier par de índices contravariantes, de igual forma un tensor es *covariante simétrico* si es simétrico en cualquier par de índices covariantes. Un tensor es *simétrico* si es contravariante simétrico y covariante simétrico. Los tensores de grado 0 o 1 son simétricos.

1.13. Álgebra simétrica

Los tensores simétricos de tipo $(r, 0)$ forman un subespacio S^r de T_0^r. De igual manera los tensores de tipo $(0, s)$ forman un subespacio S_s de T_s^0. Para dar las componentes de un tensor simétrico de tipo $(r, 0)$ basta con dar las componentes de la forma $A^{i_1 \dots i_r}$, con $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_r$. Es claro que todas las demás componentes se pueden obtener intercambiando índices y que aplica un regla similar para un tensor de tipo $(0, s)$. Para contar cuantas componentes independientes tiene un tensor simétrico se puede usar la siguiente técnica. Veamos un caso específico, supongamos un tensor de tipo $(5, 0)$ que está definido en un espacio vectorial de dimensión 4. Cada una de las sucesiones de índices no decrecientes se puede representar como una sucesión de 5 puntos y 3 barras donde las 4 regiones delimitadas por las barras corresponde, de izquierda a derecha, a $1, ..., 5$ y cada punto leído de izquierda a derecha corresponde a $i_1, ..., i_r$ con los valores asignados dependiendo de la región donde este el punto. Además, cualquiera de estas sucesiones de barras y puntos corresponde a una sucesión no decreciente. Por ejemplo

$$\bullet\bullet \mid\mid \bullet \mid \bullet\bullet = 1, 1, 3, 4, 4$$
$$\mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid = 2, 2, 3, 3, 3$$

Entonces contar cuantas componentes independientes tiene este tensor se traduce en contar de cuantas formas puedo ordenar 5 puntos y 3 barras, o que es lo mismo de $5+3$ símbolos escoger 5 para que sean puntos y esto es $\binom{5+3}{5}$. Es generalizar para un tensor de tipo $(r, 0)$ o $(0, r)$. En un espacio de dimensión d necesito $d-1$ barras y r puntos para razonar de la misma forma, entonces el número de componentes independientes es

$$\binom{d-1+r}{r} \tag{1.30}$$

Supongamos otra vez un tensor de tipo $(r, 0)$ y una base $\{e_i\}$

$$A = A^{i_1 i_2 \ldots i_r} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \tag{1.31}$$

Todas las componentes cuyos índices son permutación de una secuencia no decreciente $i_1, ..., i_r$ son iguales y se pueden factorizar. Cada una de estas componentes queda multiplicada por una suma de productos tensoriales de todas las permutaciones de la secuencia, claramente cada una de estas sumas es un tensor simétrico. Entonces A se puede expresar como una combinación lineal de estos tensores simétricos los cuales son linealmente independientes y tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.13.1. *La dimensión de S^r (o S_r) sobre un espacio vectorial V con $dimV = d$ es*

$$\binom{d-1+r}{r} \tag{1.32}$$

El producto tensorial de dos tensores simétricos no es necesariamente simétrico. Para definir una operación con tensores simétricos que de tensores simétricos definimos primero una operación de simetrización. Dado un tensor A de tipo $(r, 0)$, el tensor A_s se define como

$$A_s(\tau^1, ..., \tau^r) = \frac{1}{r!} \sum_{(i_1,...i_r)} A(\tau^{i_1}, ..., \tau^{i_r}) \tag{1.33}$$

Donde $\tau^1, ..., \tau^r \in V^*$ y la suma se hace en las $r!$ permutaciones de $\{1, ..., r\}$. A_s es simétrico pues independientemente de la permutación de las variables en el lado derecho de la ecuación (1.33) siempre aparecen los mismos $r!$ términos.

Ahora podemos definir el producto simétrico de tensores simétricos $A, B \in S^p$ de tal manera que nos de un tensor simétrico.

Definición 1.6. Sean $A, B \in S^p$. Denotamos el producto simétrico como AB y definido como

$$AB = (A \otimes B)_s \tag{1.34}$$

Es inmediata la modificación de las definiciones anteriores para tensores de tipo $(0, r)$. El producto simétrico cumple las siguientes propiedades:

1. $AB = AB$ Conmutatividad
2. $(AB)\,C = A\,(BC)$ Asociatividad
3. $(A + B)\,C = AC + BC$ Distributividad

1.14. Tensores Antisimétricos

Un tensor es antisimétrico en la q-ésima y la p-ésima variable si sus valores como función multilineal cambian de signo cuando estas variables se intercambian, por supuesto las variables intercambiadas deben ser del mismo tipo. Decimos que un tensor es simétrico en el q-ésimo y el p-ésimo índice (ambos índices del mismo tipo) si las componentes del tensor, con respecto a cualquier base, cambian de signo cuando estos índices se intercambian. Existe un teorema análogo al teorema 1.12.1

Teorema 1.14.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) A es antisimétrico en la q-ésima y la p-ésima variable.

b) A es antisimétrico en el q-ésimo y p-ésimo índice respecto a cualquier base.

c) Las componentes de A respecto una base cambian de signo cuando el q-ésimo y p-ésimo índice (del mismo tipo) se intercambian.

De nuevo solo se usara la palabra antisimetría. Los tensores antisimétricos tienen una propiedad que no tiene análogo en los tensores simétricos. Supongamos un tensor A de tipo $(0,2)$ antisimétrico en sus dos variables covariantes, entonces $A(v,v) = -A(v,v)$ lo que implica $A(v,v) = 0$ y que todas las componentes del tensor con índice repetido son 0.

Teorema 1.14.2. *Un tensor A es antisimétrico en las q-ésima y la p-ésima variable si y solo si para todo $v \in V$ (o $\tau \in V^*$), al insertar el mismo elemento en ambas posiciones, el valor de A es 0 independientemente del resto de variables.*

Un tensor es *covariante antisimétrico* si es antisimétrico en todos los pares de índices covariantes y *contravariante simétrico* si es antisimétrico en todos los pares de índices contravariantes. Un tensor es *antisimétrico* si es antisimétrico en todos los pares de índices del mismo tipo. Los tensores antisimétricos de tipo $(r,0)$ forman un subespacio de T_0^r denotado por $\bigwedge^r V$ Los tensores antisimétricos de tipo $(s,0)$ forman un subespacio de T_r^0 denotado por $\bigwedge^r V^*$.

Todas las componentes de un tensor $A \in \bigwedge^r V$ se pueden obtener de las componentes de la forma $A^{i_1 \cdots i_r}$ con $i_1 < .... < i_r$. El resto de componentes se pueden obtener con permutaciones de los índices. Si el tensor está definido en un espacio vectorial de dimensión d, el número de formas de escoger los r índices en una sucesión no decreciente es igual al número de formas en que se pueden escoger de d números, r números distintos. Razonando igual que para el caso de los tensores simétricos tenemos:

Teorema 1.14.3. *La dimensión de $\bigwedge^r V$ (o $\bigwedge^r V^*$)definido sobre un espacio vectorial V con $dimV = d$ es*

$$\binom{d}{r} \tag{1.35}$$

1.15. Álgebra exterior

La idea es crear una operación análoga al producto simétrico para tensores antisimétricos de tipo $(r,0)$ o $(0,r)$.

Si $j_1, ..., j_r$ es una permutación de $i_1, ..., i_r$ la componente $A^{j_1, ..., j_r}$ es igual o el negativo de $A^{i_1, ..., i_r}$. Una permutación se puede lograr con una serie de transposiciones, esto es el intercambio de un par de índices. Para lograr una permutación se puede necesitar un número par o impar de transposiciones, en cuyo caso diremos que el *signo de la permutación* es 1 o -1 respectivamente y la denotaremos por $sgn\sigma$, donde σ es la permutación. De esta manera un tensor antisimétrico se puede caracterizar diciendo que una permutación de los índices (del mismo tipo) tiene el efecto de multiplicar el valor de la componente por el signo de la permutación.

De la misma manera que definimos una operación de simetrización en los tensores simétricos podemos definir una operación de antisimetrización llamada operador alternante. En el caso covariante tenemos un operador de $T_s^0 \longrightarrow \bigwedge^s V^*$ definido por

$$A_a(v_1, ..., v_s) = \frac{1}{s!} \sum_{(i_1,...,i_s)} sgn(i_1, ..., i_s) A(v_{i_1}, ..., v_{i_s}) \tag{1.36}$$

Donde $v_1, ..., v_s \in V$ y la suma es sobre las $s!$ permutaciones de $(1, ..., r)$. Este nuevo tensor es antisimétrico pues al hacer una transposición de las variables todas los elementos del lado derecho cambian de signo pero no de valor. Ahora definiremos un producto de tensores antisimétricos que da como resultado un tensor antisimétrico.

Definición 1.7. Sean $A, B \in \bigwedge^s V^*$. El *producto exterior* o *producto cuña* de A y B se denota como $A \wedge B$ y se define como

$$A \wedge B = (A \otimes B)_a \tag{1.37}$$

Es inmediata la modificación de las definiciones anteriores para tensores antisimétricos de tipo $(s, 0)$.

El producto exterior obedece las siguientes propiedades. Si A es un tensor de grado q y B un tensor de grado p:

1. $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$ Anticonmutatividad.
2. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ Asociatividad.
3. $(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$ Distributividad.

Como caso especial de la propiedad 1 para todos $\alpha, \beta \in V^*(o\ V), \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ Al trabajar con tensores antisimétricos es mejor utilizar la notación del producto exterior y sus propiedades que regresar a la notación de productos tensoriales.

Si ϵ^i es una base de V^* de dimensión d entonces una base de $\bigwedge^r V^*$ está dada por $\{\varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon^{i_r}\}$, donde $i_1, i_2, ..., i_r$ es una secuencia creciente, o sea

$$1 \leq i_1 < ... < i_r \leq d$$

De la misma forma para $\bigwedge^r V$.

1.16. Determinantes

El determinante de una matriz aparece de manera natural utilizando álgebra exterior. Por eso se utiliza en la teoría de integración, pues el determinante jacobiano de una transformación aparece de manera automática. Recordemos que si tenemos un espacio vectorial W con $dimW = 1$, una transformación lineal de W hacia W es equivalente multiplicar por un escalar. Lo que vamos a hacer es aplicar esta idea al espacio $\bigwedge^d V$ con d la dimensión de V, recordando de la ecuación (1.35) que la $dim \bigwedge^d V = 1$.

Definición 1.8. Si $A : V \longrightarrow V$ es una función lineal, entonces la extensión homomórfica de A al espacio de tensores antisimétricos de grado r es un función lineal $A : \bigwedge^r V \longrightarrow \bigwedge^r V$ tal que

$$A(v_1 \wedge .... \wedge v_r) = Av_1 \wedge ... \wedge Av_r \tag{1.38}$$

Para todos $v_1, ..., v_p \in V$. Y definimos $A\beta = \beta$ para todo $\beta \in \bigwedge^0 V = R$.

No distinguimos en la notación entre los dos usos de A.

Teorema 1.16.1. *Para cada función lineal $A : V \longrightarrow V$ existe una única extensión homomórfica A para cada $\bigwedge^r V$, $r \leq d = dimV$.*

Teorema 1.16.2. *Si la $dimV = d$. La extensión homomórfica $A : \bigwedge^d V \longrightarrow \bigwedge^d V$ consiste en multiplicar por el determinante de la matriz de A respecto a cualquier base. Entonces, si $t \in \bigwedge^d V$*

$$At = det(A^i_j)t \tag{1.39}$$

Recordemos que el *determinante de una matriz* A^i_j esta definido como

$$det(A^i_j) = \sum_{(i_1,...,i_d)} A^{i_1}_1 ... A^{i_d}_d sgn(i_1, ..., i_d), \tag{1.40}$$

Donde la sumatoria es sobre las permutaciones de $(1, ..., d)$.

De la ecuación (1.40) el determinante es una función multilineal covariante de rango d, totalmente antisimétrica, sobre el espacio vectorial R^d. Por lo tanto el determinante pertenece a $\bigwedge^d R^d$.

2. Formas bilineales

Una *forma bilineal* g es un tensor de tipo $(0, 2)$, o sea una función bilineal

$$g : V \times V \to R \tag{2.1}$$

Supongamos una base $\{e_i\}$ de un espacio vectorial V, la base dual $\{\varepsilon^i\}$, $v = v^i e_i \in V$ y una forma bilineal $g = g_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$. g se puede interpretar como una función $g_1 : V \to V^*$ de la siguiente forma

$$g_1 v = g_{ij}(\varepsilon^i v)\varepsilon^j = (g_{ij}v^i)\varepsilon^j \tag{2.2}$$

Esta operación que pasa de un vector v con componentes v^i a un miembro del dual con componentes $g_{ij}v^i$ se le conoce como *bajar los índices de v usando g*. Si g_1 tiene una inversa decimos que g es *no degenerado*.

Teorema 2.0.3. *Una forma bilineal g es no degenerada si y solo si:*

1. *Para todo $v \in V$, $v \neq 0$, existe un $w \in V$ tal que $b(w, v) \neq 0$.*

2. *La matriz de componentes (g_{ij}) tiene inversa.*

Ahora agregaremos a un espacio vectorial una forma bilineal y obtendremos nuevas propiedades en el espacio, específicamente veremos lo que sucede cuando se agrega una forma bilineal simétrica (sección 2.1) y una forma bilineal antisimétrica (sección 2.2) y se definen, de ser posible, conceptos básicos como distancia y ortogonalidad. (Para más detalles sobre las formas bilineales ver [4])

2.1. Espacios prehilbertiano

Un *producto interno* es una forma bilineal simétrica g, por lo que $g \in S_2$, que además es *positiva definida*, esto es para todo $v \in V$

$$g(v, v) \geq 0,\ g(v, v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \tag{2.3}$$

Al par (V, g) se le llama *espacio prehilbertiano*. Estas condiciones implican que la matriz $A = A_{ij}$ de componentes de g es simétrica, i.e $A = A^T$ (A^T es la transpuesta de la matriz A).

Teorema 2.1.1. *Todo espacio vectorial V de dimensión finita tiene al menos un producto interno.*

Teorema 2.1.2. *Una forma bilineal positiva definida es no degenerada.*

Ahora definimos, usando el producto interno, conceptos geométricos usuales como la magnitud de un vector y la distancia entre vectores.

Definición 2.1. La *magnitud* o *norma* de un vector $v \in V$, denotada como $\|v\|$, se define

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)} \tag{2.4}$$

Definición 2.2. Si $v, w \in V$. La *distancia* entre v y w denotada $d(v, w)$ está definida como

$$d(v, w) = \|v - w\| \tag{2.5}$$

Una propiedad muy importante en un espacio prehilbertiano es una desigualdad entre las distancia de dos vectores y el producto de sus normas

Proposición 2.1. *Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz*

$$|g(v, w)| \leq \|v\|\|w\| \tag{2.6}$$

Definición 2.3. Dos vectores son *ortogonales* si $g(v, w) = 0$.

Con el concepto de ortogonalidad podemos encontrar un tipo especial de subespacios vectoriales.

Teorema 2.1.3. *Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. El conjunto $W^\perp$ definido como*

$$W^\perp = \{v \in V | \forall w \in W, g(v, w) = 0\} \tag{2.7}$$

es un subespacio de V, llamado complemento ortogonal de W*.*

Proposición 2.2. *Si W es un subespacio de V y $W^\perp$ su complemento ortogonal se cumple que*

$$W \cap W^\perp = \{0\} \tag{2.8}$$

$$dimW + dimW^\perp = dimV \tag{2.9}$$

2.1.1. Espacio euclideano

Un espacio euclideano E^n es un ejemplo de espacio prehilbertiano, definido como el espacio vectorial R^n junto con el producto interno típico g. Si $x = (a_1, a_2, ...a_n), y = (b_1, b_2......, b_n) \in R^n$

$$g(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{2.10}$$

Se puede comprobar que E^n es un espacio prehilbertiano. La matriz A $(n \times n)$ de g respecto de la base estándar de R^n es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

2.1.2. Bases ortonormales

Cuando agregamos una forma bilineal a un espacio vectorial tenemos una forma de seleccionar bases con ciertas características especiales de entre todas las bases del espacio. En un espacio prehilbertiano podemos un encontrar un tipo especial de bases llamadas *bases ortonormales*, estas bases tienen la propiedad de que todos los miembros son ortogonales entre ellos y además la norma de cada vector de la base es 1. Tenemos la siguiente definición:

Definición 2.4. Sea (V, g) un espacio prehilbertiano. Una base $\{e_i\}$ es ortonormal si y solo si:

1. $g(e_i, e_j) \neq 0$ si y solo si $i = j$.

2. $\|e_i\| = 1$ para todo i.

2.1.2.1. Cambio de bases ortogonales

Una situación muy importante en un espacio prehilbertiano es el cambio entre dos bases ortonormales. Supongamos dos bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$. Recordemos de la sección 1.2, la matriz $A = a^i_j$ de cambio de base está definida como

$$f_j = a^i_j e_i \tag{2.12}$$

Pero como $\{f_i\}$ es una base ortonormal se obtiene que

$$g(f_k, f_l) = \sum_i a_i^k a_i^l = a_i^k (b)_l^i = \delta_l^k$$

$$AA^t = A^t A = I \tag{2.13}$$

donde $A^t = (a^t)_l^i$. A las matrices que cumplen la propiedad del teorema anterior se llaman *matrices ortogonales*. Para una matriz ortogonal $A^t = A^{-1}$. La matriz de cambio de entre bases ortonormales es una matriz ortogonal. También toda matriz ortogonal es la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.

Teorema 2.1.4. *Una matriz A es ortogonal si y solo si es la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.*

Proposición 2.3. *El determinante de una matriz ortogonal A solo puede ser 1 o -1.*

$$detA = \pm 1 \tag{2.14}$$

2.1.3. Isomorfismos isométricos

En un espacio prehilbertiano (V, g) podemos considerar las funciones lineales que *preservan la métrica*, esto es cualquier función linear $Q : V \to V$, tales que se cumple que para todo $v, w \in V$

$$g(Qv, Qw) = g(v, w) \tag{2.15}$$

Q es un isomorfismo. A todos las funciones lineales Q que cumplen lo anterior se llaman *Isomorfismos isométricos*. Hay una relación entre las bases ortonormales (y entonces las matrices ortogonales) y los isomorfismos isométricos que se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.5. *Una función Q es un isomorfismo isométrico si y solo si mapea bases ortonormales en bases ortonormales. La matriz de un isomorfismo isométrico respecto a una base ortonormal es una matriz ortogonal.*

2.2. Espacios simplécticos

Una *forma simpléctica* w es una forma bilineal antisimétrica no degenerada, por lo que $w \in \bigwedge^2 V^*$. Al par (V, w) se le llama un *espacio vectorial simpléctico*, pero se suele decir unicamente *el espacio vectorial simplectico* V con la forma w sobreentendida.

Por ejemplo supongamos en el espacio vectorial R^{2n} se puede definir una forma simpléctica. Si $v = (a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ y $w = (e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ pertenecen a R^{2n} definimos w_0 como

$$w_0(v, w) = (a_1 f_1 - b_1 e_1) + ... + (a_n f_n - b_n e_n) \tag{2.16}$$

Se puede demostrar que w_0 si es una forma simpléctica. El par (R^{2n}, w_0) se llamará el *espacio simpléctico estándar*. Si $n = 1, R^2$ vemos que w_0 es muy parecido al llamado *producto cruz* que se estudia en análisis vectorial, entonces w_o mide el área orientada de dos vectores.

Con esta estructura no es posible definir satisfactoriamente la longitud de un vector o la distancia entre vectores, pero si se puede utilizar el concepto de área y rescatar una idea correspondiente a la ortogonalidad.

Definición 2.5. Si (V, w) es un espacio vectorial simpléctico. Dos vectores $v, z \in V$ son *w-ortogonales* si $w(v, z) = 0$. En particular todo vector es w-ortogonal a el mismo.

Teorema 2.2.1. *Sea V un espacio vectorial simpléctico y S un subespacio de V. El conjunto S^w definido como*

$$S^w = \{z \in V | \forall v \in S, g(v, z) = 0 \tag{2.17}$$

es un subespacio de V llamado complemento w-ortogonal de S

Teorema 2.2.2. *Si S es un subespacio de V y S^w su complemento ortogonal se cumple que*

$$dim(S) + dimS^w = dimV \tag{2.18}$$

Sin embargo la intersección entre S y su S^w no es trivial, identificamos varios casos.

Definición 2.6. Sea S un subespacio de un espacio vectorial simpléctico y S^w su complemento ortogonal entonces se cumple uno de los siguientes casos:

a) isotrópico si $S \subset S^w$.

b) coisotrópico si $S^w \subset S$.

c) lagrangiano si $S = S^w$.

d) simpléctico si $S \cap S^w = \{0\}$.

Teorema 2.2.3. *Sea W un subespacio de un espacio vectorial simpléctico V si $dimV = 2n$. Entonces*

1. *Si W es isotrópico, entonces $dim(W) \leq n$.*

2. *Si W es coisotrópico, entonces $dim(W) \geq n$.*

3. *Si W es lagrangiano, entonces $dim(W) = n$.*

4. *Si W es simpléctico, entonces $dim(W) = 2m, m \leq n$.*

2.3. Bases simplécticas

Una diferencia muy grande con la estructura de la sección anterior es que un espacio simpléctico no puede tener cualquier dimensión, solo puede tener dimensión par. Asi como en un espacio hilbertiano existen bases ortonormales, existe un concepto equivalente en un espacio vectorial simpléctico.

Teorema 2.3.1. *Supongamos una espacio vectorial simpléctico (V, w) de dimensión d.*

1. *$d = 2r$ donde r es un número natural.*

2. *Existen una base $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^r, \phi^1, ..., \phi^r\}$ tal que*

$$w = \varepsilon^1 \wedge \phi^1 + ... + \varepsilon^r \wedge \phi^r \tag{2.19}$$

Cada base simpléctica $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^r, \phi^1, ..., \phi^r\}$ es la base dual de una base $\{e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_r\}$. Esta base de V también se llamará *base simpléctica*. De la ecuación (2.19) se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea (V, w) un espacio vectorial simpléctico. Entonces una base simpléctica $\{e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_r\}$ de V cumple con:*

1. *$w(e_i, f_i) = \frac{1}{2}$ para todo $i = 1, .., r$.*

2. *$w(e_i, f_j) = 0$ para todo $i \neq j$.*

3. *$w(f_i, f_j) = 0$ para todo $i, j = 1, ..., r$.*

4. $w(e_i, e_j) = 0$ *para todo* $i, j = 1, ..., r$.

Lo anterior es cierto en el sentido contrario. Es decir en un espacio vectorial simpléctico (V, w), la base dual de una base simpléctica en V, es una base simplectica en V^*.

Teorema 2.3.2. *Sea* (V, w) *una espacio vectorial simpléctico una base* $\{e_1, ..., e_r, f_1, ..., f_r\}$ *de* V *es simpléctica si y solo si su base dual* $\{\varepsilon^1, ..., \varepsilon^r, \phi^1, ..., \phi^r\}$ *es simpléctica.*

2.3.1. Cambio de base simpléctica

Supongamos dos bases simplécticas en un espacio simpléctico (V, w) de dimensión $d = 2r$: $\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_d\}$ y $\{f_1, ..., f_r, f_{r+1}, ..., f_d\}$. La matriz $A = a^i_j$ de cambio de base (sección 1.2) está definida como

$$f_j = a^i_j e_i \tag{2.20}$$

Además w es bilineal, entonces

$$w(f_i, f_j) = a^k_i a^l_j w(e_k, e_l) \tag{2.21}$$

Ahora es conveniente introducir una matriz J que será de mucha utilidad

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Note que $J^{-1} = J^t = -J$. Además si $\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_d\}$ y $\{f_1, ..., f_r, f_{r+1}, ..., f_d\}$ cumplen con la proposición 2.4, entonces

$$J = J^i_j = 2w(f_i, f_j) = 2w(e_i, e_j) \tag{2.23}$$

Ahora podemos reescribir la ecuación (2.21)

$$\begin{aligned} J^i_j &= a^k_i J^k_l a^l_j \\ J^i_j &= (a^t)^i_k J^k_l a^l_j \\ J &= A^t J A \end{aligned} \tag{2.24}$$

y finalmente

$$A^{-1} = J^{-1}A^tJ \tag{2.25}$$

Si una matriz cumple con la ecuación (2.25) se llama *matriz simpléctica*. La matriz de cambio de entre bases simplécticas es una matriz simpléctica. También toda matriz simpléctica es la matriz de cambio de base entre dos bases simplécticas.

Teorema 2.3.3. *Sea (V, w) un espacio vectorial simpléctico. Una matriz A es simpléctica si y solo si es la matriz de cambio de base entre dos bases simplécticas en V (o en V^*).*

2.3.2. Simplectomorfismo lineal

En un espacio simpléctico (V, g) podemos considerar las funciones que preservan la forma bilineal, esto es cualquier función linear $Q : V \to Q$ tales que se cumple que para todo $v, w \in V$

$$w(Qv, Qw) = g(v, w) \tag{2.26}$$

Se puede probar que Q es un isomorfismo. A todos las funciones lineales Q que cumplen lo anterior se llaman *simplectomorfismo lineal*. Hay una relación entre las bases simplécticas (y entonces las matrices simplécticas) y los simplectomorfismos lineales que se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4. *Una función Q es un simplectomorfismo lineal si y solo si mapea bases simplécticas en bases simplécticas. La matriz de un simplectomorfismo lineal respecto a una base simpléctica es una matriz simpléctica.*

Nótese la gran similitud entre los conceptos de base ortonormal en un espacio prehilbertiano y una base simpléctica en un espacio vectorial simpléctico.

3. Topología y Geometría diferencial

A continuación se exponen de manera breve los fundamentos de la geometría diferencial. Un tratamiento mas completo se encuentra en [3],[6] y [10].

Una *topología* en un conjunto X es un subconjunto T del conjunto potencia $P(X)$, $T \subseteq P(X)$, tal que:

1. Si $G_1, G_2 \in T$, entonces $G_1 \cap G_2 \in T$.

2. Si tenemos una colección $G = \{G_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq T$, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \in T$.

3. $\emptyset, X \in T$.

La combinación (X, T) se llama *espacio topológico*. Un mismo espacio puede tener diferentes topologías. Si se habla de un espacio topológico X, T está sobrentendida. Los elementos de T se llaman los conjuntos abiertos del espacio topológico y los complementos de los elementos de T se llaman conjunto cerrados. Abierto y cerrado no son negaciones o contrarios, un conjunto puede ser abierto y cerrado, solo abierto, solo cerrado o ninguno.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El *interior de* A, denotado por A^0, es el conjunto definido como

$$A^0 = \cap\{B \mid B \subseteq A \ y \ B \in T\} \tag{3.1}$$

El interior de A es abierto, es el conjunto abierto más grande contenido en A.

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. La *cerradura de* A, denotada por A^-, es el conjunto definido como

$$A^- = \cap\{B \mid A \subseteq B \ y \ B \in X - T\} \tag{3.2}$$

La cerradura de A es cerrada, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

Proposición 3.1. *Se cumplen las siguientes enunciados:*

- $A \in T \iff A = A^0$.
- $A \in X\text{-}T \iff A = A^-$.

Definición 3.3. Sea $x \in X$, X un espacio topológico. A es una *vecindad de x* si $x \in A^0$.

En particular, cualquier conjunto abierto conteniendo a x es una vecindad de x. Una base de vecindades de x es una colección de vecindades de x tal que cualquier vecindad de x contiene una de los miembros de la base. Una base de vecindades de X es una especificación de una base de vecindades para cada $x \in X$. Se puede utilizar una base de vecindades para definir una topología en X. Una vecindad de x es entonces cualquier conjunto que contiene una un base de x. Un conjunto abierto es un conjunto que es vecindad de cada uno de sus elementos.

Definición 3.4. Espacios de Hausdorff

Un espacio topológico X es un *Espacio de Hausdorff* si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existen vecindades U y V de x y y respectivamente, tales que $U \cap V = \oslash$.

Definición 3.5. Espacio Separable

Un espacio topológico es separable si tiene una base de vecindades contable.

Definición 3.6. Espacio conexo

Un espacio topológico X es conexo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados simultáneamente son X y $\emptyset$.

3.1. Espacio métrico

Un espacio métrico es un par (X, d), con X un conjunto cualquiera y d una función $d : X \times X \to R$, llamada métrica, que además cumple con los siguientes axiomas para todos $x, y, x \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

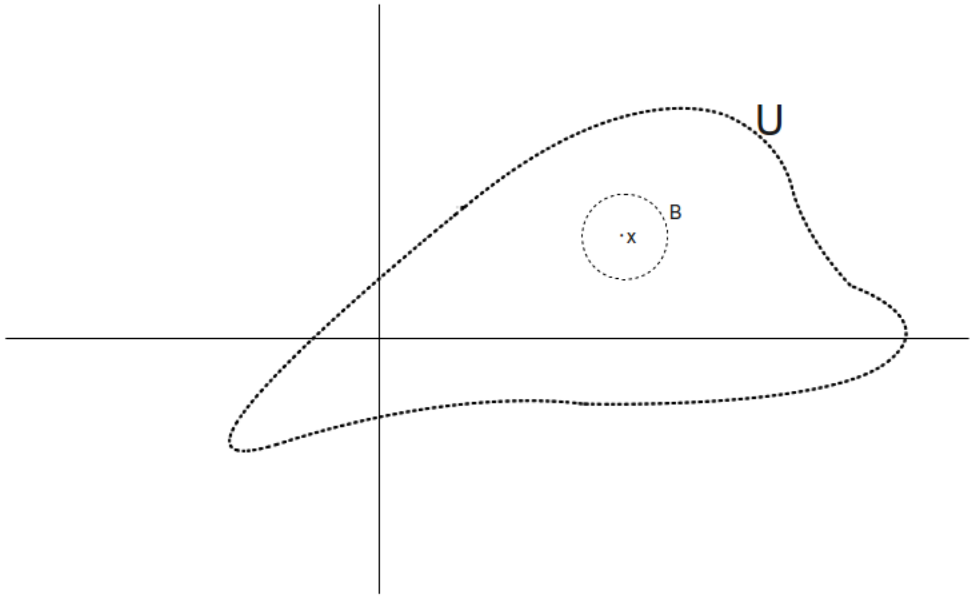

Figura 3.1. La figura muestra un conjunto abierto U en E^2 y una bola de radio r centrada en un elemento $x \in E^n$.

Definición 3.7. La bola abierta con centro en x y radio $r \geq 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y|d(x, y) < r\} \tag{3.3}$$

Se puede demostrar que estas bolas abiertas sirven como una base de vecindades para definir una topología en X llamada la topología métrica de d. Con esta topología un espacio métrico es un espacio de Hausdorff. Es sencillo ver que esto es cierto ya que al escoger 2 elementos x, y, distintos, que están a una distancia r, podemos escoger bolas centradas en estos elementos de radio $\frac{r}{2}$ y obtenemos dos vecindades cuya intersección es $\emptyset$.

3.2. Topología métrica en un espacio Euclideano

Se puede demostrar que la función de distancia (2.2) definida en E^n es una métrica y con ella podemos definir la topología métrica de E^n, también conocida como *topología estándar de* E^n (Ver figura 3.1) . A partir de ahora cuando se mencione el espacio E^n se supondrá que es un espacio topológico con la topología estándar.

Proposición 3.2. *E^n es un espacio de Hausdorff separable.*

3.3. Topología producto

Sean X y Y dos espacios topológicos, podemos construir una topología en $X \times Y$ especificando una base de vecindades usando las vecindades de X y Y. Una base de vecindades de $(x, y) \in X \times Y$ será el conjunto

$$V = \{G \times H | G \textit{ vecindad de } x \textit{ y } H \textit{ vecindad de } y\} \tag{3.4}$$

Se puede probar que V es realmente una base de vecindades. Si $X \times Y$ está equipado con esta topología diremos que es el *Producto topológico de X y Y*. Se puede repetir el mismo procedimiento para cualquier número finito de espacios topológicos.

Proposición 3.3. *E^n es el producto topológico de E^1 n veces.*

3.4. Subespacios

Si $A \subset X$ y X tiene una topología T, entonces A puede convertirse en un espacio con topología T_A al «heredar» la topología de X. La topología T_A se define de la siguiente forma

$$T_A = \{w \cap A | w \in T\} \tag{3.5}$$

Se puede comprobar que T_A es una topología de A. Cuando A tiene esta topología se le conoce como *subespacio topológico de X*. A T_A se le conoce como la *topología inducida o relativa.*

3.5. Continuidad

Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si para todo conjunto abierto G en Y, $f^{-1}G$ es abierto en X.

Esta definición de función continua describe el concepto de continuidad de una manera muy simple y con la máxima generalidad posible.

Proposición 3.4. *La composición de funciones continuas es continua.*

Definición 3.8. Un *homeomorfismo* entre dos espacios topológicos es una función f que tiene las siguientes tres propiedades:

1. Es biyectiva.

2. f es continua.

3. f^{-1} es continua.

En topología los homeomorfismos son las funciones que preservan la estructura del espacio topológico. Cuando existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos, desde el punto de vista de la topología, estos dos espacios son iguales.

Puede ser que una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos sea 1-1 pero no sobreyectiva. En este caso a f se le llama de igual manera un *homeomorfismo* si es un homeomorfismo entre X y fX, donde fX tiene la topología inducida de Y.

3.6. Variedades diferenciables

Una variedad es a grandes rasgos un espacio topológico en que una vecindad de cada punto admite un sistema de coordenadas que consiste en funciones de coordenadas reales en los puntos de la vecindad, se dice entonces que el espacio es *localmente cartesiano*, además se exige que el paso de un sistema coordenado a otro sea suave en la región de traslape. El concepto de variedad generaliza e incluye los casos especiales de la línea, el plano, el espacio cartesiano y las superficies que se estudian en cálculo avanzado, no incluye las nociones de distancia entre puntos y lineas rectas (distancia más corta entre dos puntos) estas surgen de definir estructuras adicionales. Una variedad tiene una dimensión. Las variedades se pueden utilizar para representar los espacios de configuración de un sistema mecánico, como modelo de un sistema físico la dimensión es el número de grados de libertad.

Antes de definir una variedad diferenciable se necesitan varios conceptos fundamentales que se definen a continuación.

Definición 3.9. Cartas

Sea X un espacio topológico, una carta en X es una función $\mu : U \to V$, donde U es un conjunto abierto en X, V es un conjunto abierto de E^d y μ es un homeomorfismo hacia V (Ver figura 3.2) . La dimensión de μ es d.

Las *funciones coordenadas* de una carta son la funciones de variable real en U definidas como $x^i : u^i \circ \nu : U \to E$, donde $u^i : E^d \to E$ son las coordenadas estándar en E^d, esto quiere decir $u^i(a_1, a_2, .., a_i, ..a_d) = a_i$. Al conjunto $(x^1, ..., x^d)$ se le llama *sistema de coordenadas*, entonces a una carta μ también la podemos denotar como $\mu = (x^1, ..., x^d)$. Si p pertenece al dominio de una carta μ, se suele decir que μ es una *carta en* p y que $(x^1, ..., x^d)$ es un *un sistema de coordenadas en* p. A los dominios U de las cartas los llamaremos *vecindades coordenadas*.

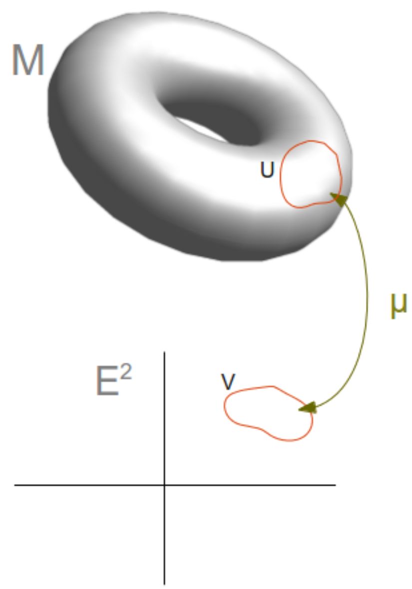

Figura 3.2. Una *carta* μ de dimensión 2 de un conjunto abierto U en M hacia un conjunto abierto V en E^2.

Definición 3.10. Atlas

Supongamos un espacio topológico X y supongamos una colección de cartas $\{\nu : U_\alpha \to R^d | \alpha \in I\}$ tal que $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ es una cubierta de X, esto quiere decir que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$. A esta colección de cartas se le llama *atlas*.

Definición 3.11. Variedad topológica.

Una *variedad topológica* es un espacio de Haussdorf separable con un atlas definido.

3.6.1. Diferenciabilidad

El concepto de variedad topológica solo incluye la continuidad, es necesario considerar también la diferenciabilidad de las funciones. La diferenciabilidad de las funciones no se puede definir en espacios topológicos generales. Sin embargo es muy fácil de definirla en espacios euclidianos.

Sea $F : V \to E^m$ una función donde $V \subset E^n$ abierto hacia un subconjunto de E^m. F es diferenciable en $x \in V$, si y solo si existe una transformación lineal $T : U \to E^m$, donde U es una vecindad de x, tal que

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\|F(x + \Delta x) - F(x) - T(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \tag{3.6}$$

Si F es diferenciable en x, a la transformación lineal T se le llama la derivada de F en x y se escribe de la siguiente forma:

$$DF(x) = T \tag{3.7}$$

3.6.2. Representación matricial de la derivada

De la definición anterior, la derivada de una función es una transformación lineal T. Esta transformación lineal puede ser representada en forma matricial si elegimos una base para E^n y para E^m: elegimos las bases estándar. Si escribimos la función F en sus funciones coordenadas

$$F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x)) \tag{3.8}$$

y $x = (x_1, x_2, ...x_n)$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Esta matriz es conocida como la *matriz de Jacobi.*

La existencia de la derivada en un punto garantiza la existencia de las derivadas parciales en ese punto, pero no al revés. Se pueden agregar condiciones extra la relación vaya en los dos sentidos.

Teorema 3.6.1. *Si las derivadas parciales de una función F existen en la vecindad de un punto p y son continuas en p entonces F es diferenciable en p.*

Definición 3.12. Funciones C^∞

Una función $F : V \to E^1$ es C^∞ si V es un conjunto abierto en E^d y F tiene derivadas parciales continuas de todos los tipos (mixtas o no) de cualquier orden en todos los puntos de V.

Definición 3.13. Mapeo C^∞

Una función $\phi : V \to E^d$ es un mapeo C^∞ si las componentes $x^i : u^i \circ \phi : U \to E$ son C^∞.

En una variedad topológica el traslape de los dominios de dos cartas no tiene ninguna condición, en una *variedad diferenciable* el traslape debe ser suave para

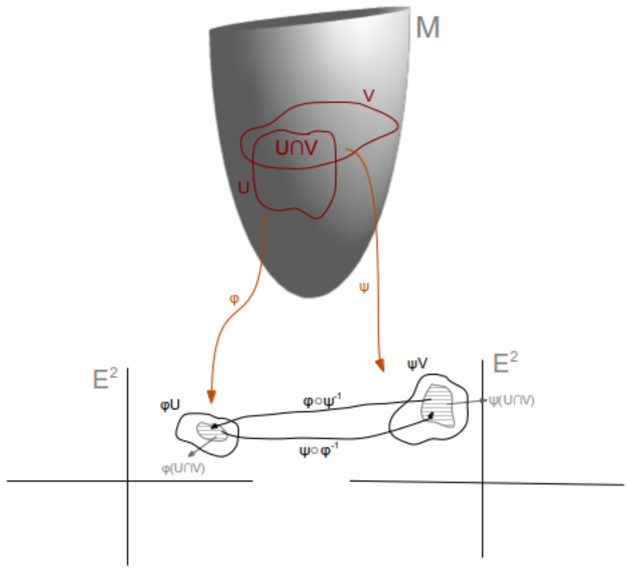

Figura 3.3. Una variedad M, dos cartas φ y ψ definidas en U y V respectivamente.

permitir el paso continuo de un sistema de coordenadas a otro. Ahora se formalizara esta idea y se definirá el concepto de *variedad diferenciable*.

Definición 3.14. C^∞-relacionados

Sea X un espacio topológico. Dos cartas $\varphi : U \to E^d$ y $\psi : V \to E^e$ están C^∞-relacionadas si $d = e$ y se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $U \cap V = \emptyset$.

2. $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son mapeos C^∞ (Ver figura 3.3).

Definición 3.15. Atlas C^∞.

Un atlas C^∞ es aquel en que cualquier par de cartas son C^∞-relacionados.

Una carta es *admisible* a un atlas C^∞ si es C^∞-relacionado con todas las cartas del atlas (en particular todos los miembros de un atlas C^∞ son admisibles en su propio atlas).

Definición 3.16. Variedad diferenciable.

Una *variedad diferenciable* es una variedad topológica junto con todas las cartas admisibles a un atlas C^∞

Se incluyen todas las cartas admisibles a un atlas por dos razones: para no preferir un sistema coordenadas sobre otro y para que quede claro qué es una variedad pues dos diferentes atlas pueden tener el mismo conjunto de cartas admisible y queremos que en este caso se tenga la misma variedad y no dos diferentes.

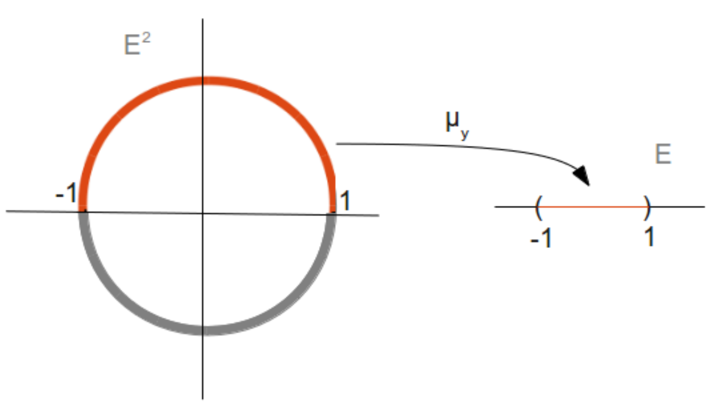

Figura 3.4. S^1 y la carta μ_y.

3.7. Ejemplos de variedades diferenciables

3.7.1. La variedad E^n

Podemos definir una estructura de variedad en el espacio cartesiano E^n tomando como atlas una única carta $I : E^n \longrightarrow E^n$ (la identidad).

3.7.2. Variedades de dimensión 1

Las únicas variedades de dimensión 1 que son conexas son E^1 y el círculo S^1.

3.7.2.1. El circulo S^1

Definimos un atlas con cuatro cartas en S^1. Para el semicírculo superior U_y , sin incluir puntos que queden sobre el eje x, definimos la carta $\mu_y : U_y \longrightarrow E$ como $\mu_y(x, y) = x$. Para el semicírculo inferior U_{-y}, una vez mas sin incluir los puntos sobre el eje x, definimos la carta $\mu_{-y} : U_{-y} \longrightarrow E$ como $\mu_{-y}(x, y) = x$. De forma análoga para el semicírculo izquierdo U_{-x} y el semicírculo derecho U_x, solo que las cartas proyectan las coordenadas sobre y. Se puede demostrar que las anteriores funciones realmente forman una atlas de S^1 y entonces que S^1 es una variedad diferenciable de dimensión 1. (Ver figura 3.4)

3.7.3. Subvariedad abierta

Si M es una variedad diferenciable y N un conjunto abierto de M, entonces N puede heredar la estructura de variedad. N con la topología heredada y las cartas

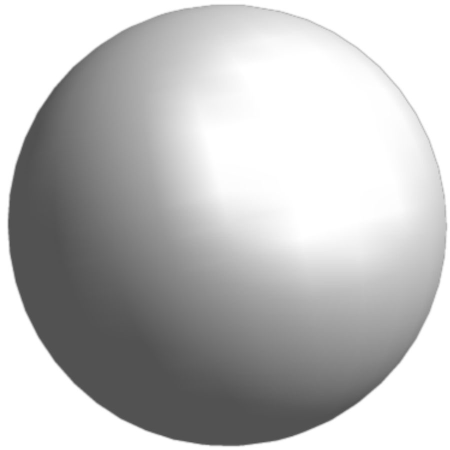

Figura 3.5. La esfera S^2 es una variedad de dimensión 2. Se puede encontrar un atlas formado por 6 cartas, una por cada hemisferio

restringidas a N forman una variedad. La llamaremos una *subvariedad abierta* de M.

3.7.4. Superficies en E^n

Una variedad de dimensión 2 se puede llamar una superficie, aunque hay algunas variedades que no se pueden colocar en E^3 y además hay que remover ciertos puntos singulares. Hay dos formas en la que se suelen dar superficies en E^3: como curvas de nivel de una función C^∞ y como una superficie dada de manera paramétrica.

3.7.4.1. Superficies de nivel

Si la superficie es la superficie de nivel de una función C^∞ $f : E^3 \longrightarrow E$ los puntos singulares son aquellos en que $df \neq 0$, esto es aquellos en que las tres derivadas parciales de f son cero. Para cada $c \in R$, el conjunto de puntos no singulares tales que $f(x, y, z) = c$ son una variedad.

Como ejemplo la función $f = x^2 + y^2 + z^2$ es C^∞ y no tiene puntos singulares. Entonces la esfera S^2 es una variedad. (Ver figura 3.5)

3.7.4.2. Superficies paramétricas

La superficies se definen a veces de forma paramétrica, esto es tres funciones C^∞: $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$. Definidas en una región abierta del plano

uv. Los puntos singulares son aquellos en que los dos tripletes de derivadas parciales $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}\right)$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}\right)$ son proporcionales (incluyendo que una o ambas tengan todas las entradas iguales a cero). Una parametrización puede no ser 1-1 incluso en la parte no singular. El conjunto de puntos no singulares de una parametrización forman una variedad.

Un *toroide* (ver figura 3.2) en E^3 se puede parametrizar sin ningún punto singular como

$$\begin{aligned} x &= [a + bsen(v)]\, cos(u) \\ y &= [a + bsen(v)]\, sen(u) \\ z &= bcos(v) \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.7.4.3. Hipersuperficies

Las ideas anteriores se pueden generalizar a dimensiones más altas. De manera similar que para las superficies de nivel tenemos que el conjunto

$$M = \{m | fm = c, df_m \neq 0\} \tag{3.11}$$

Donde f es una función C^∞ y c una constante, es una variedad de dimensión $d-1$.

3.7.5. Producto de Variedades

Si M y N son variedades de dimensión d y e. Podemos darle una estructura de variedad a $M \times N$ de la siguiente forma: 1) Como topología de $M \times N$ tomamos la topología producto. 2) Como cartas del atlas de $M \times N$ tomamos los productos de cartas de M y N, o sea si $\mu : U \to E^d$ y $\tau : V \to E^e$ son cartas de $m \in M$ y $n \in N$ respectivamente, entonces su producto $(\mu, \tau) : U \times V \to E^{d+e}$ es una carta de (m, n) tal que para todo $t \in U$ y $w \in V$

$$(\mu, \tau)(t, w) = (\mu(t), \tau(w)) \tag{3.12}$$

A esta variedad se le conoce como la *variedad producto de M y N o la variedad $M \times N$*. Esta operación se puede repetir para cualquier número finito de variedades. De esta manera la variedad $E^n = E^1 \times ... \times E^1$, n veces (sección 3.7.1).

En mecánica clásica a un sistema físico le corresponde un *espacio de configuración*, que es el conjunto de todas las posibles posiciones que puede tener el sistema. Al considerar los espacios de configuración como variedades, de tal forma que a cada punto de la variedad de corresponde una configuración del sistema, dejamos de preferir un sistema de coordenadas sobre otro y además podemos aplicar las técnicas de la geometría diferencial y revelar estructuras subyacentes (Capitulo 4).

3.7.5.1. Partícula libre

Para una partícula libre el espacio de configuración corresponde a la variedad E^k con $k = 1, 2, 3$, dependiendo si la partícula se mueve en 1, 2 o 3 dimensiones respectivamente.

3.7.5.2. Péndulo doble

Supongamos un péndulo doble formado por dos barras rígidas en una configuración tal que ambas barras pueden dar una vuelta completa. El espacio de configuración de la primera barra es S^1(sección 3.7.2.1) y el espacio de configuración de la segunda barra es también S^1, entonces el espacio de configuración del péndulo doble es $S^1 \times S^1$. Este espacio se puede considerar como el toroide (Ver figura 3.2).

3.7.5.3. Un sistema libre formado por un resorte y dos masas

Supongamos un sistema formado por un resorte cuya longitud L está restringida $L_1 < L < L_2$, con una masa en cada extremo y tal que el sistema es libre de moverse en tres dimensiones. Necesitamos una variedad tal que a cada punto le corresponda una configuración del sistema. Supongamos la posición de una de las masas, su espacio de configuración seria E^3. Si ahora consideramos la distancia de la otra masa respecto a la primera su espacio de configuración puede darse por la subvariedad abierta (L_1, L_2): las posibles distancias del resorte. Ahora para considerar las posibles inclinaciones del sistema podemos utilizar la variedad S^2. Entonces la variedad que corresponde a este sistema es $E^3 \times (L_1, L_2) \times S^2$.

3.8. Funciones diferenciables entre variedades diferenciales

Sean M y N dos variedades diferenciable y $F : M \to N$. F es C^∞ diferenciable si y solo si para cualquier carta ϕ de M y cualquier carta ψ de N se tiene que $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es un mapeo C^∞. A la función $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ se le llama *expresión coordenada* $\psi\phi$ (Ver figura 3.6).

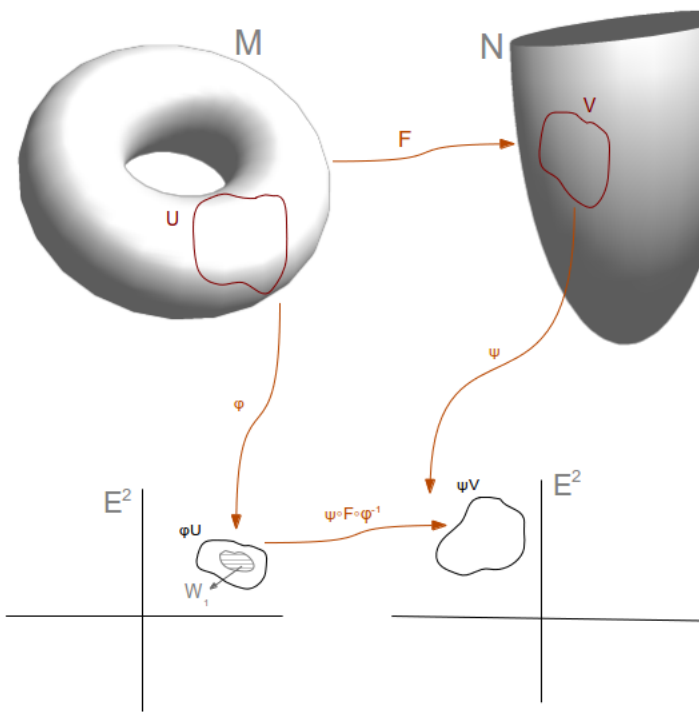

Figura 3.6. Una función F diferenciable entre dos variedades M y N. ψ y ϕ cartas de M y N respectivamente.

Proposición 3.5. *Una función $F : M \to N$, con M y N variedades diferenciables, es diferenciable si la expresión $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es una mapeo C^∞ para cualquier carta ϕ en un atlas de M y cualquier carta ψ en un atlas de N.*

3.9. Tangentes

Sea M una variedad diferenciable definimos $F^\infty(M) = \{f : M \to R \mid f$ es $C^\infty\}$. A esta colección la dotamos de un álgebra. Si $f, g \in F^\infty(M)$ y $p \in M$, definimos $f + g : M \to R$ y $fg : M \to R$ como

1. $(f + g)p = fp + gp$.

2. $(fg)p = (fp)(gp)$.

En particular tenemos la función constante $k : M \to R$, definida como $kn = k$ para todo $k \in R$. Es inmediata la definición de la multiplicación por un escalar y no habrá distinción en la notación entre $k \in R$ y k la función constante.

Ahora definimos la idea de tangente en un punto de un variedad diferenciable

Definición 3.17. Una *tangente* en $p \in M$ es un operador $v_p : F^\infty(M) \to R$, tal que para todo $f, g \in F^\infty(M)$, $a, b \in R$ y $p \in M$ se cumplen que

1. $t(af + bg) = a(tf) + b(tg)$.

2. $t(fg) = (tf)gp + fp(tg)$.

A una tangente también se le llama *vector tangente*, *vector* o *vector contravariante*. Al conjunto de todas las tangentes en p lo denotamos como T_pM y se le conoce como *espacio tangente en p*.

Al espacio tangente en p le podemos dar la estructura algebraica de un espacio vectorial definiendo la suma, la multiplicación y el vector nulo de la manera tradicional para funciones. A la unión de todas las tangentes en todos los puntos p de la variedad le denotaremos TM, entonces $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. Tenemos además la siguientes proposición.

Proposición 3.6. *Para todo $v_p \in T_pM$ y función constante $k \in F^\infty(M)$, $v_pk = 0$.*

3.9.1. Campos vectoriales coordenados

Sea $\mu = (x^1, ..., x^d)$ una carta en un punto p de una variedad M y $f \in F^\infty(M)$. f tiene una expresión coordenada $f \circ \mu^{-1} = g : U \to R$ donde U es un conjunto abierto en R^d y $f = g \circ \mu$. g es C^∞ entonces existen las derivadas parciales respecto a las coordenadas cartesianas u^i. Con estas derivadas parciales podemos construir nuevos miembros de $F^\infty(U)$.

Definición 3.18. Para cada función coordenada x^i de un sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^d)$ en $p \in M$ con dominio U tenemos un operador $\partial_i : F^\infty(M) \to F^\infty(U)$ definido como

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial u^i} \circ \mu = \frac{\partial f \circ \mu^{-1}}{\partial u^i} \circ \mu \tag{3.13}$$

Donde U es una subvariedad abierta de M. Al conjunto de operadores ∂_i se le llama *campos vectoriales coordenados* del sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^d)$. La notación simplificada ∂_i es clara cuando solo existe un sistema de coordenadas involucrado y en el caso de E^3 o E^2 usamos la notación $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Si existen varios sistemas de coordenadas involucrados se utiliza la notación $\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial y^i}$ para distinguir entre las funciones coordenadas.

Si luego de aplicar ∂_i se sigue la evaluación en p, construimos una tangente en p que denotaremos por $\partial_i(p) \in T_pM$ tal que $\partial_i(p)f = \partial_i f(p)$ para toda $f \in F^\infty(M)$.

Que de esta manera realmente se construya una tangente de p es consecuencia de que la operación de derivar parcialmente cumple con las propiedades que debe cumplir una tangente.

El conjunto de tangentes que acabamos de construir es bastante especial, con ellas se puede construir cualquier otra tangente de T_pM y además son linealmente independientes, entonces tenemos que el conjunto $\partial_i(m)$ es una base de T_pM. Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.9.1. *Para cualquier tangente $v_p \in T_pM$ existen constantes únicas a^i tales que*

$$v_p = \sum_{i=1}^{d} a^i \partial_i(m) \quad ; \quad a^i = tx^i \tag{3.14}$$

3.10. Diferencial de $f \in F^\infty(M)$

El espacio tangente T_pM en un punto p de una variedad M es un espacio vectorial. Si $dimM = d$ entonces del teorema 3.9.1 tenemos que $dimT_pM = d$. Podemos considerar el espacio dual (sección 1.6) T_pM que denotaremos como T_pM^* y el cual cumple con $dimT_pM^* = d$. En particular tenemos los siguientes miembros de T_pM^*.

Definición 3.19. Si $f \in F^\infty(M)$ y $v_p \in T_pM$. Definimos $df_p : T_pM \to R$ como

$$(df_p)v_p = v_p f \tag{3.15}$$

A df_p la llamamos el *diferencial de f en p*. Se puede ver que $df_p \in T_pM^*$. Aunque no todos los miembros de T_pM^* son el diferencial de una función todos los miembros de T_pM^* se pueden escribir como combinaciones lineales de diferenciales.

Teorema 3.10.1. *Sea x^i una función coordenada de un sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^d)$ en $p \in M$. El conjunto de diferenciales dx^i_p forman una base de T_pM^*. Además se cumple*

$$(dx^i_p)\partial_i(p) = \delta^i_j \tag{3.16}$$

Entonces, el conjunto dx^i es la base dual de ∂_i.

Al conjunto de elementos de T_pM^* le llamaremos *espacio cotangente en p*, *espacio de diferenciales en p* o *espacio de vectores covariantes en p*. Además denotamos como TM^* a la unión de todos los espacios cotangentes de p, entonces $TM^* = \bigcup_{p\in M} T_pM^*$.

3.11. El espacio $\bigotimes_s^r T_pM$

Sea M una variedad diferenciable, para cada $p \in M$ tenemos un espacio vectorial T_pM y su dual T_pM^*, entonces para cada $p \in M$ podemos construir los espacios tensoriales de cualquier tipo. Al espacio vectorial de tipo (r, s) en p lo denominaremos $\bigotimes_s^r T_pM$. Para cada sistema de coordenadas que incluye a p tenemos una base (teorema 3.9.1) y una base dual (teorema 3.10.1). Supongamos dos sistemas de coordenadas en p $\mu = (x^1, ..., x^d)$ y $\phi = (y^1, ..., y^d)$ entonces del teorema 3.9.1 obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(p) = \frac{\partial x^i}{\partial y^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) \tag{3.17}$$

Esta la *ley de transformación de tangentes*, obsérvese el parecido con la regla de la cadena.

3.11.1. Leyes te transformación en $\bigotimes_s^r T_pM$

Con la ecuación (3.17) obtener las leyes de transformación para los tensores definidos en $\bigotimes_s^r T_pM$ entre dos sistemas de coordenadas $\mu = (x^1, ..., x^d)$ y $\phi = (y^1, ..., y^d)$. Utilizamos el mismo ejemplo de la sección 1.10.1, notamos que, en la notación para espacios tangentes

$$\begin{aligned}
e_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}(p) & \varepsilon^i &= dx_p^i \\
f_i &= \frac{\partial}{\partial y^i}(p) & \varepsilon^i &= dy_p^i \\
a_i^j &= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) & b_j^i &= \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Haciendo las sustituciones en la ecuación (1.24) obtenemos

$$A_{jk}^{y,i} = A_{np}^{x,m}\frac{\partial y^i}{\partial x^m}(p)\frac{\partial x^n}{\partial y^j}(p)\frac{\partial x^p}{\partial y^k}(p) \tag{3.19}$$

3.12. Campos tensoriales

En cada espacio tangente de un punto p, T_pM, podemos considerar los espacios tensoriales de tipo (r, s), ahora a cada punto de la variedad diferenciable tiene asignados tensores de cualquier rango. Cuando se elige un tensor para cada punto de la variedad diferenciable M, se obtiene un campo tensorial. Definiremos los campos tensoriales de dos formas equivalentes.

Definición 3.20 (Primera definición de Campo Tensorial)**.** Sea M una variedad diferenciable. Un *campo tensorial* T de tipo (r,s) es una función

$$T : M \to \bigcup_{p\in M} \bigotimes_{s}^{r} T_pM \qquad (3.20)$$

Tal que para cada $p \in M$ se tiene que $T(p) \in \bigotimes_s^r T_pM$.

Un campo tensorial T es *simétrico* si en cualquier punto p, $T(p)$ es un tensor simétrico. Un campo tensorial T es *antisimétrico* si en cualquier punto p, $T(p)$ es un tensor antisimétrico.

3.12.1. Campos vectoriales

Un *campo vectorial* es un campo tensorial de tipo $(1,0)$, o sea una función $X : M \to TM$. Un campo vectorial X se puede conceptualizar como una función sobre $F^\infty(M)$ de la siguiente forma. Si $f \in F^\infty(M)$ y $p \in M$, $V : F^\infty(M) \longrightarrow F^\infty(M)$ definida como $(Xf)p = X(p)f$. Visto de esta manera la función X cumple con propiedades parecidas a las de una tangente. Para toda $f, g \in F^\infty(M)$ y $a, b \in R$

1. $X(af + bg) = aXf + bXg$.
2. $X(fg) = f(Xg) + (Xf)g$.

Decimos que un campo vectorial es C^∞ si $Xf \in F^\infty(M)$ para toda $f \in F^\infty(M)$. Definimos el conjunto $\mathcal{H}(M)$ como el conjunto de todos los campos vectoriales C^∞ sobre M.

3.12.2. 1-formas

Las $1-formas$ son un tipo especial de campo tensorial de rango $(0,1)$. Un campo tensorial de rango $(0,1)$ se puede conceptualizar como una función sobre $\mathcal{H}(M)$ de la siguiente forma. Si $X \in \mathcal{H}(M)$, $p \in M$, θ un campo tensorial de rango $(0,1)$, entonces $\theta : \mathcal{H}(M) \longrightarrow F(M)$ definida como $(\theta V)p = (\theta p)(Vp)$. Donde $F(M)$ es un conjunto de funciones con valores reales y dominio M. θ es una $1-$*forma* si $F(M) \subseteq F^\infty(M)$.

Si $f \in F^\infty(M)$ entonces para todo $p \in M$, $df_p \in \bigotimes_1^0 T_pM$, entonces el *diferencial de* f, $df : M \to \bigcup_{p\in M} \bigotimes_1^0 T_pM = TM^*$ es una $1-forma$. Definimos el conjunto $\mathcal{H}^*(M)$ como el conjunto de todas las $1-formas$ sobre M.

Con las definiciones anteriores podemos conceptualizar un campo tensorial de como una función sobre productos cartesianos de $\mathcal{H}^*(M)$ y $\mathcal{H}(M)$.

Definición 3.21 (Segunda definición de campo tensorial)**.** Un campo tensorial T de tipo (r, s) es una función diferenciable $T : (\mathcal{H}^*(M))^r \times (\mathcal{H}(M))^s \to F(M)$, donde $F(M)$ son funciones de valores reales y rango en M, tal que si $\theta_1, ..., \theta_r \in \mathcal{H}^*(M)$, $X_1, ..., X_s \in \mathcal{H}(M)$ y $p \in M$

$$T(\theta_1, ..., \theta_r, X_1, ..., X_s)p = T(p)(\theta_1(p), ..., \theta_r(p), X_1(p), ..., X_s(p)) \tag{3.21}$$

Un campo Tensorial T es C^∞ si $F(M) \subseteq F^\infty(M)$ en la definición anterior.

3.12.3. Componentes de Campos Tensoriales

Supongamos un campo tensorial T de tipo (r, s) y un sistema de coordenadas $\mu = (x_1, ..., x_i)$ con dominio U. Recordemos que las componente de un tensor son sus valores en las bases y bases duales (sección 1.10). Entonces las *componentes de un campo tensorial respecto al sistema de coordenadas μ* son las funciones de variable real $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} : U \to E^1$ tales que si $p \in U$

$$\begin{aligned} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}(p) &= T(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_1})(p) \\ &= T(p)(dx^{i_1}_p, ..., dx^{i_r}_p, \partial_{j_1}(p), ..., \partial_{j_1}(p)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Proposición 3.7. *Un campo tensorial T es C^∞ si y solo si todas sus componentes respecto a cualquier sistema de coordenadas son funciones C^∞.*

Las componentes de un campo tensorial se pueden transformar de un sistema de coordenadas a otro para todos los puntos que pertenecen al dominio de ambos sistemas. Las *leyes de transformación de campos vectoriales* están dadas por la ecuación 3.19, pero sin la evaluación en un punto p.

En el caso especial de un campo vectorial X

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.23}$$

donde $X^i = Xx^i$. Y si tenemos otro sistema de coordenadas $(y_1, ..., y_n)$

$$Y^i = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \tag{3.24}$$

3.13. $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_s^r T_pM$ como variedad C^∞

Se puede dotar naturalmente a $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_s^r T_pM$ con la estructura de una variedad C^∞. La idea es definir las vecindades coordenadas en $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_s^r T_pM$ como los conjuntos de todos los tensores definidos en los espacios tangentes de todos los puntos de una vecindad coordenada U de M. Como coordenadas en estas vecindades utilizamos las d coordenadas de U más las d^{r+s} componentes del tensor respecto de las coordenadas en U y luego definimos la topología de $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_s^r T_pM$ de tal manera que estas funciones que construimos sean un homeomorfismo con su rango, que es un conjunto abierto de $E^{d+d^{r+s}}$. Cuando se considere cualquier espacio $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_s^r T_pM$ como variedad C^∞ se supondrá la estructura descrita en esta sección. En el siguiente capítulo veremos como la variedad diferenciable $\bigcup_{p\in M}\bigotimes_1 T_pM = TM^*$ tiene una estructura intrínseca que es muy importante . Presentamos a continuación la construcción detallada de esta variedad, el caso general es fácil de deducir.

3.13.1. La variedad diferenciable TM^*

Si $p\in M$, $dimM = d$ y $f_p \in T_pM^*$. Supongamos una carta $\mu = (x_1, ..., x_d)$ de M, con U su vecindad coordenada. Definimos una vecindad coordenadas V en TM^* como $V = \{f_p|p\in U\}$. Las $2d$ coordenadas y^i en V se definen de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
y^i f_p &= x^i p \quad i = 1, ..., d\\
y^i f_p &= f_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right) \quad i = d+1, ..., 2d
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Entonces construimos una carta $\mu' = (y^1, ..., y^{2d})$ que claramente es 1-1 en V. Repitiendo este procedimiento para un atlas de M obtenemos un atlas de TM^*, pero aún debemos darle a TM^* una topología y asegurarnos que todas las cartas construidas son homeomorfismos por lo que realmente forman un atlas. Para un carta μ' de TM^* su rango es el conjunto abierto $W\times R^d \in R^{2d}$, donde W es el rango de μ. Un conjunto $C\in TM^*$ es abierto si las imágenes de las intersecciones de C con todas las vecindades coordenadas de TM^* bajo la acción de la respectiva carta son conjuntos abiertos en el rango de la carta. En el caso que C este contenido en una vecindad coordenada basta con que la imagen respecto de C bajo la respectiva carta de la vecindad sea abierta. Se puede ver que las vecindades coordenadas son abiertas. Se puede demostrar que con esta construcción TM^* es una variedad C^∞.

Definición 3.22. Sean TM y TM^* variedades C^∞, $t_p\in T_pM$ y $f_p\in T_pM^*$. Definimos dos proyecciones $\pi : TM \to M$ y $p : TM^* \to M$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\pi t_p &= p \\ p f_p &= p \end{aligned} \tag{3.26}$$

Proposición 3.8. *Las funciones π y p son C^∞ diferenciables.*

3.13.2. Tangente de una función diferenciable

Sean M y N dos variedades diferenciable y $\mu : M \to N$ una función C^∞ diferenciable. Esta función induce una función $\mu_* : TM \to TN$ que llamaremos el *tangente de* μ. Si $f \in F^\infty(N)$, entonces $f \circ \mu \in F^\infty(M)$. Para definir μ_* establecemos como actúa sobre cualquier $f \in F^\infty(N)$. Si $t \in T_pM$

$$(\mu_* t)\, f = t(f \circ \mu) \tag{3.27}$$

Proposición 3.9. *$\mu_* t$, $t \in T_pM$, es una tangente en T_nN donde $n = \mu p$.*

Proposición 3.10. *Si μ es una función C^∞ diferenciable entonces μ_* es C^∞ diferenciable.*

3.13.3. Cotangente de una función diferenciable

Sean M y N dos variedades diferenciables y $\mu : M \to N$ una función C^∞ diferenciable. La idea es construir de manera análoga una función inducida por μ pero entre TM^* y TN^*. Utilizando la tangente de μ podemos construir funciones $\mu_{*m} : M_m \to N_{\mu m}$ para cada $m \in M$. Para cada μ_{*m} podemos construir el *adjunto* $\mu^*_m : TN^*_{\mu m} \to TM^*_m$. Definido de la siguiente forma

$$\langle v, \mu^*_m \tau \rangle = \langle \mu_{*m} v, \tau \rangle, \tag{3.28}$$

para todo $v \in T_mM$ y $\tau \in T_{\mu(m)}N^*$. El adjunto va en sentido contrario a μ. Para extender esta función a una única para todo TN^*, tenemos el problema que el rango de μ no es necesariamente todo N.

Ahora supongamos que μ es un difeomorfismo, en este caso si es posible extender la construcción anterior. Definimos el *cotangente* $\mu^* : TN^* \to TM^*$ definido como en la ecuación 3.28 para todo $\tau \in TN^*$.

Proposición 3.11. *μ^* es una función C^∞ diferenciable.*

3.14. Curvas diferenciable

Una *curva diferenciable o curva* C^∞ es un mapeo C^∞ $\gamma : I \to M$, donde I es un intervalo abierto en E^1 y M una variedad C^∞. El intervalo I puede ser acotado en ambos extremos, no acotado en un extremo o todo E^1.

3.14.1. Tangentes en una curva diferenciable

Si γ es una curva diferenciable cuyo rango esta en una variedad M tal que $\gamma c = p \in M$, definimos $\gamma_* c$, *la tangente de* γ *en* c, tal que para cada $f \in F^\infty(M)$

$$(\gamma_* c)\, f = \frac{d(f \circ \gamma)}{du}(c) \tag{3.29}$$

Proposición 3.12. *La tangente de* γ *en* c *pertenece a* T_pM.

3.14.2. Curvas integrales

Sea M una variedad C^∞ y X un campo vectorial C^∞. Una curva diferenciable γ en M es una *curva integral de* X si para cada c en el dominio de γ se cumple que $\gamma_* c = X(\gamma c)$. Si $\gamma 0 = p$ decimos que γ empieza en m.

En términos de coordenadas encontrar curvas integrales se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales. Supongamos un sistema de coordenadas $\mu = (x^1, ..., x^d)$. Al combinar el teorema 3.9.1 con la ecuación 3.29 obtenemos

$$\gamma_* = \frac{d(x^i \circ \gamma)}{du}\,(\partial_i \circ \gamma) \tag{3.30}$$

Por otro lado $X = X^i \partial_i$ donde X^i son las componentes de X que son funciones C^∞ con valores reales. Entonces

$$X \circ \gamma = X^i \circ \gamma\,(\partial_i \circ \gamma) \tag{3.31}$$

Dado que ∂_i son una base

$$\frac{d(x^i \circ \gamma)}{du} = X^i \circ \gamma \tag{3.32}$$

Recordemos de la seccion 3.8. La función coordenada F^i de X^i estaría dada por $F^i = X^i \circ \mu^{-1}$, donde F^i es una función de valores reales definida en E^n. Entonces $X^i = F^i(x^1, ..., x^n)$. Definimos $g^i = x^i \circ \gamma$.

Teorema 3.14.1. *Una curva diferenciable γ es una curva integral de X si y solo si para cualquier sistema de coordenadas se satisface el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{dg^i}{du} = F^i(g^1, ..., g^d) \tag{3.33}$$

Sobre la existencia y unicidad de las curvas integrales se remite a los theoremas en la existencia y soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. (Ver por ejemplo [9]).

3.15. Formas diferenciales

Una $p-forma$ es un campo tensorial antisimétrico C^∞ de tipo $(0,s)$. Si $p=1$ coincide con la definición que teníamos de $1-forma$, si $p=0$ tenemos un miembro de $F^\infty(M)$. Si la dimensión de la variedad es d, no existen ninguna $p-forma$ con $p>d$. El conjunto de todas las $p-formas$ en una variedad M lo denotaremos $\Omega^k(M)$. Específicamente $\Omega^1(M) = \mathcal{H}^*(M)$.

Si $\mu = (x^1, ..., x^d)$ es un sistema de coordenadas con dominio U entonces una base local para las $p-formas$ esta dada por (sección 1.15).

$$\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_r}\} \tag{3.34}$$

Donde $i_1, i_2, ..., i_r$ es una secuencia creciente, o sea $1 \leq i_1 < ... < i_r \leq d$.

En el caso de una $1-forma$ el conjunto $\{dx^i\}$ forma una base, para una $2-forma$ el conjunto $\{dx^i \wedge dx^j | i<j\}$ es una base y para una $d-forma$ (d la dimensión de la variedad) el único elemento de la base es $\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^d\}$.

Cuando se trabaja con formas diferenciales es conveniente redefinir el concepto de componentes, entonces las *componentes de una $p-forma$* son las componentes respecto a las bases mencionadas en el párrafo anterior. También es conveniente hacer unos par de cambios de notación para simplificar. Primero omitiremos la cuña entre diferenciales de funciones de coordenadas, por ejemplo $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1dx^2$. Y segundo modificamos la convención de suma pues a veces se necesitan sumas que nos den términos con índices crecientes, este tipo especial de suma lo indicaremos utilizando un paréntesis en una de las apariciones del conjunto de símbolos en los cuales queremos aplicar esta suma especial. Para ejemplificar estas modificaciones supongamos una $2-forma$ θ en una variedad de dimensión d entonces la expansión de θ respecto del sistema de coordenadas $\mu = (x^1, ..., x^d)$ es

$$\theta = a_{(i_1 i_2)} dx^{i_1} dx^{i_2} = a_{12} dx_1 dx_2 + a_{13} dx_1 dx_3 + a_{23} dx_2 dx_3 \tag{3.35}$$

Las componentes de θ son $a_{12}, a_{13}, a_{23} \in F^{\infty}$.

3.15.1. *Pull back* de una $p - forma$

Se puede extender el cotangente de una función para que actué sobre $p - formas$. Sean M y N variedades, $\mu : M \to N$ una función C^{∞} diferenciable. Si $w \in \Omega^k(N)$ definimos la función $\mu^* w \in \Omega^k(M)$ como

$$\mu^* w(p) = \mu_p^* \circ w \circ \mu(p) \tag{3.36}$$

Donde μ_p^* es la extensión homomórfica de el adjunto de μ_p y $p \in M$. A $\mu^* w$ se le llama *el pull-back de* w.

Proposición 3.13. $\mu^* w$ *es una* $2 - forma$ *en* N.

Proposición 3.14. *Si* $v_1, ..., v_n \in T_p M$

$$F^* w(p)(v_1, ..., v_n) = w(\mu_{*p} v_1, ..., \mu_{*p} v_n) \tag{3.37}$$

3.16. Derivada exterior

Ya definimos en la sección 3.12.2 una función $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, el diferencial *df* de $f \in F^{\infty}(M) = \Omega^0(M)$. Ahora generalizaremos esto para funciones $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ para cualquier k.

Definición 3.23. Existe una única familia d de funciones

$$d^k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M) \tag{3.38}$$

para todo k, tal que

1. d is una $\wedge-$antiderivación. Esto es d es lineal (multiplicación por funciones constantes de valor real y suma definida de la manera usual) y para $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^l(M)$
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$
2. Si $f \in F^{\infty}(M)$, entonces *df* se define como en la sección 3.12.2

3. $d^2 = d \circ d = 0$

A esta familia d la llamamos *derivada exterior en M*. Al inciso 3 de la definición anterior se le conoce como *lema de Poincaré*.

Teorema 3.16.1. *Si* $\theta \in \Omega^k(M)$.

$$\theta = a_{(i_1 \dots i_k)} dx^{i_1} \dots dx^{i_k}$$

Entonces

$$d\theta = \left(da_{(i_1 \dots i_k)}\right) \wedge dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \tag{3.39}$$

Definición 3.24. Una $p - forma$ θ es *cerrada* si $d\theta = 0$.

Definición 3.25. Una $p - forma$ θ es *exacta* si existe una $(p-1) - forma$ τ tal que $d\tau = \theta$. En el caso de una $0 - forma$ diremos que es exacta si es constante. Una $p - forma$ θ es *localmente exacta* si para todo m en la variedad existe una vecindad abierta U de m tal que la restricción de θ a U $,\theta|_U$, es exacta.

Supongamos que $M = E^3$ y coordenadas cartesianas x, y, z. Si $f, g, h \in F^\infty(E^3)$, entonces

1. $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$
2. $d(fdx + gdy + hdz) = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$
3. $d(fdydz + gdzdx + dxdy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right).$

Obsérvese el gran parecido con el gradiente, el producto cruz y la divergencia.

3.17. Producto interior

El *producto interior de* X es un operador $i(X)$ sobre las $p - formas$ para cada campo vectorial X. Al contrario que la derivada exterior, $i(X)$ transforma una $p - forma$ en una $(p-1) - forma$. Recordemos que una $p - forma$ actúa sobre campos vectoriales, para definir el producto interior se deja fija la primera variable de esta usando X y el resto de variables se dejan libres. Si X es un campo vectorial y θ una $p - forma$ entonces la $(p-1) - forma$ $i(X)\theta$ se define como

$$i(X)\theta\left(X_1, ..., X_{p-1}\right) = p\theta\left(X, X_1, ..., , X_{p-1}\right) \tag{3.40}$$

Para las $0 - formas$ f definimos $i(X)f = 0$.

Proposición 3.15. *El operador $i(X)$ es una $\wedge-$antiderivación, o sea que satisface la regla del producto. Si θ es una $p-forma$ y τ una $q-forma$*

$$i(X)(\theta \wedge \tau) = [i(X)\theta] \wedge \tau + (-1)^p \theta \wedge [i(X)\tau] \tag{3.41}$$

4. Geometría Simpléctica en Mecánica Clásica

El origen de la mecánica clásica se remonta al trabajo de Isaac Newton y sus tres leyes de movimiento publicadas en su libro Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), publicado en 1687. Entre las cuales se encuentra la famosa *ley de newton*

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{4.1}$$

Donde $\vec{F}$ son las fuerzas que actúan sobre un objeto, m su masa y $\vec{a}$ su aceleración (del centro de masa). La ley de newton es la ecuación de movimiento de un sistema (relación entre aceleraciones, velocidades y coordenadas), es una ecuación diferencial de segundo orden.

En 1788 el matemático Joseph-Louis Lagrange introdujo una reformulación de la mecánica clásica: la mecánica lagrangiana. En esta formulación a cualquier sistema mecánico le corresponde una función $L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t)$, donde $q_1, ..., q_n$, llamadas *coordenadas generalizadas*, son cualquier conjunto de cantidades independientes que completamente definen la posición del sistema. Las ecuaciones de movimiento son las *ecuaciones de Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{4.2}$$

Que son n ecuaciones de segundo orden. Definimos los *momentos generalizados* como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.3}$$

Además tenemos una función H que llamaremos el *hamiltoniano o la energía del sistema*

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{4.4}$$

Se puede probar que si H (o L) no dependen explícitamente del tiempo, esto es cuando un sistema es cerrado, entonces $\frac{dH}{dt} = 0$, lo que se conoce como conservación de la energía.

En 1833 surgió otra reformulación de la mecánica clásica: la mecánica hamiltoniana, originada por el matemático y astrónomo William Rowan Hamilton. En esta formulación a un sistema le corresponde el hamiltoniano $H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ y las ecuaciones de movimiento se convierten en un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden, las llamadas *ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas*

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{p}^i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}^i \qquad i = 1, ..., n \tag{4.5}$$

Con esta formulación de la mecánica la estructura simpléctica se asoma fácilmente. (Para un desarrollo de la mecánica desde el punto de vista físico ver por ejemplo [5])

Supongamos F la trasformación entre las coordenadas (q^i, p^i) y (Q^i, P^i). F puede ser, por ejemplo, un cambio de coordenadas cartesianas a esféricas. Un cambio de coordenadas en de un sistema físico esperamos que sea suave, esto es continuo y que además sea $1-1$, o sea que tenga inversa. Obtenemos una representación matricial de F. De la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} &= \frac{\partial H}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial P^j}\frac{\partial P^j}{\partial q^i} \\ \frac{\partial H}{\partial p^i} &= \frac{\partial H}{\partial Q^j}\frac{\partial Q^j}{\partial p^i} + \frac{\partial H}{\partial P^j}\frac{\partial P^j}{\partial p^i} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Utilizando 4.5 en 4.6

$$\begin{aligned} -\dot{p}^i &= -\frac{\partial Q^j}{\partial q^i}\dot{P}^j + \frac{\partial P^j}{\partial q^i}\dot{Q}^j \\ \dot{q}^i &= -\frac{\partial Q^j}{\partial p^i}\dot{P}^j + \frac{\partial P^j}{\partial p^i}\dot{Q}^j \end{aligned} \tag{4.7}$$

Esto se puede escribir matricialmente como

$$
\begin{pmatrix} -\dot{p}^1 \\ \vdots \\ -\dot{p}^n \\ \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^1} & \frac{\partial P^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial q^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^n} & \frac{\partial P^1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial q^n} \\ \frac{\partial Q^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial p^1} & \frac{\partial P^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial p^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^1}{\partial p^n} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial p^n} & \frac{\partial P^1}{\partial p^n} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial p^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{P}^1 \\ \vdots \\ -\dot{P}^n \\ \dot{Q}^1 \\ \vdots \\ \dot{Q}^n \end{pmatrix} \tag{4.8}
$$

Definimos

$$
\begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \\ \dot{p}^1 \\ \vdots \\ \dot{p}^n \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \dot{Q}^i \\ \dot{P}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}^1 \\ \vdots \\ \dot{Q}^n \\ \dot{P}^1 \\ \vdots \\ \dot{P}^n \end{pmatrix} \tag{4.9}
$$

Recordamos la matriz J de la sección y la matriz DF de Jacobi de la sección

$$
J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}^i \end{pmatrix} = DF^T J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{Q}^i \\ \dot{P}^i \end{pmatrix} \tag{4.10}
$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena a las coordenadas (Q^i, P^i)

$$
\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p^j}\dot{p}^j \\ \dot{P}^i &= \frac{\partial P^i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial P^i}{\partial p^j}\dot{p}^j \end{aligned} \tag{4.11}
$$

Entonces

$$
\begin{pmatrix} \dot{Q}^1 \\ \vdots \\ \dot{Q}^n \\ \dot{P}^1 \\ \vdots \\ \dot{P}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial q^n} & \frac{\partial Q^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial Q^1}{\partial p^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial q^n} & \frac{\partial Q^n}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial Q^n}{\partial p^n} \\ \frac{\partial P^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P^1}{\partial q^n} & \frac{\partial P^1}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial P^1}{\partial p^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P^n}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial q^n} & \frac{\partial P^n}{\partial p^1} & \cdots & \frac{\partial P^n}{\partial p^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \\ \dot{p}^1 \\ \vdots \\ \dot{p}^n \end{pmatrix} \tag{4.12}
$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}^i \\ \dot{P}^i \end{pmatrix} = DF \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}^i \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Sustituimos el resultado de (4.10)

$$J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}^i \end{pmatrix} = DF^T J^{-1} DF \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}^i \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Y finalmente obtenemos las siguientes ecuación

$$\begin{aligned} J^{-1} &= DF^T J^{-1} DF \\ DF^{-1} &= JDF^T J^{-1} \\ DF^{-1} &= J^{-1} DFJ \end{aligned} \tag{4.15}$$

Entonces la matriz de Jacobi de una transformación entre coordenadas de un sistema mecánico es una matriz simpléctica. Recordemos de la sección 2.3.1 que la matriz de cambio de base entre bases simplécticas es una matriz simpléctica. Esto ya sugiere que una simplectización de la mecánica.

Ahora aplicaremos los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores a la mecánica clásica. La idea básica es ver un sistema mecánico no como un sistema complicado de muchos puntos en E^3 sino como un único punto en un espacio de más dimensiones, de esta forma obtenemos el espacio de configuración: una variedad tal que a cada punto le corresponde una configuración del sistema. Al espacio de configuración le corresponde un espacio de fase: una variedad donde a cada punto le corresponde la posición y los momentos del sistema. Esta variedad, de dimensión par, tiene de manera natural una $2-forma$.

El objetivo de aplicar los métodos de la geometría diferencial a la mecánica no es tanto resolver problemas particulares, sino profundizar nuestro entendimiento de la mecánica y formalizar las ideas físicas. Al hacer esto se revela una hermosa estructura.

4.1. Variedades Hamiltonianas

Una *Variedad Hamiltoniana* es un par (M, w) donde M es una variedad de dimensión $d = 2r$ y θ una $2-forma$ no degenerada. θ se conoce como *forma fundamental*. Si nos referimos a una variedad hamiltoniana M, θ está sobrentendida.

Recordemos el teorema 2.3.1, ahora establecemos una versión «global» de este importante teorema.

Teorema 4.1.1. *Sea* (M, θ) *una variedad hamiltoniana de dimension* $d = 2r$*. En la vecindad de cada punto* $p \in M$ *existe un sistema de coordenadas* $\mu = q^1, ..., q^r, p^1, ..., p^r$ *tal que*

$$\theta = dq^i \wedge dp^i \tag{4.16}$$

Al sistema de coordenadas del teorema anterior lo llamaremos *coordenadas hamiltonianas.*

La condiciones topológicas para la existencia de esta estructura en una variedad son bastante severas, sin embargo hay una clase importante de variedades hamiltonianas: la variedad diferenciable T^*M (sección 3.13.1)

4.2. Estructura Hamiltoniana canonica en T^*M

El espacio $N = T^*M$ tiene una estructura hamiltoniana de manera natural. La $2-forma$ se puede construir de la siguiente forma.

Recordemos las proyecciones 3.22, podemos definir una $1-forma$ $\theta : TN \to R$, tal que para todo $x \in TN$

$$\theta(x) = \langle p_* x, \pi x \rangle \tag{4.17}$$

Proposición 4.1. θ *es una* $1 - forma$*.*

Supongamos un sistema de coordenadas $\mu = (x^1, ..., x^d)$ en M a este le corresponde un sistema de coordenadas en T^*M (ver sección 3.13.1). A esta coordenadas coordenadas correspondientes las denotaremos $\mu' = (q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$. Tenemos también que $q^i = x^i \circ p$.

Proposición 4.2. *Si* $\mu' = (q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$ *es el sistema de coordenadas de* T^*M *que le corresponde a un sistema de coordenadas en* M*. Entonces la* $1 - forma$ θ *se puede expresar como*

$$\theta = p^i dq^i \tag{4.18}$$

Ahora para obtener una $2 - forma$ en T^*M usamos la derivada exterior de θ. Definimos la $2 - forma$ $w = -d\theta$.

Proposición 4.3. *Si* $\mu' = (q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$ *es el sistema de coordenadas de* T^*M *que le corresponde a un sistema de coordenadas en* M*. Entonces la* $2 - forma$ w *se puede expresar como*

$$\theta = dq^i \wedge dp^i \tag{4.19}$$

Llamamos a la $1-forma$ θ la $1-forma\ canónica$ y a $w=-d\theta$ la $2-forma\ canónica$. Se puede demostrar que w es no degenerada. Entonces vemos la variedad T^*M es hamiltoniana y que las coordenadas hamiltonianas del teorema 4.1.1 corresponden a un sistema de coordenadas de M.

4.3. Transformaciones simplécticas

Dado una variedad hamiltoniana es natural considerar funciones diferenciables que preserven la estructura.

Definición 4.1. Sea (M,w) una variedad hamiltoniana. Una función C^∞ diferenciable $f:M\to M$ es llamada canónica o simpléctica si $f^*w=w$ o de manera equivalente si $w(v_1,v_2)=w(f_*v_1,f_*v_2)$.

Cuando la variedad simpléctica es T^*M, las transformaciones simplécticas se originan de manera natural de un difeomorfismo en M.

Teorema 4.3.1. *Sea $f:M\to M$ un difeomorfismo. Entonces $f^*:TM^*\to TM^*$ es simpléctica Y de hecho $(f^*)^*\theta_1=\theta_2$.*

Ahora analicemos el caso especial el de del difeomorfismo $I:V\to V$. Si escribimos $I(x^1,...,x^d)\to(X^1,...,X^d)$ entonces I^* tiene el efecto

$$(q^1,...,q^d,p^1,...,p^2)\to(Q^1,...,Q^d,P^1,...,P^d) \tag{4.20}$$

Recordemos que las coordenadas p^i son las componentes de un tensor, entonces siguen las leyes de transformación y al cambiar la base cambian las coordenadas

$$p^i=\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}P^i \tag{4.21}$$

Que esta transformación es simpléctica y mantiene la $1-forma$ se puede ver al sustituir en la ecuación (4.18).

$$P^idQ^i=P_i\frac{\partial Q^i}{\partial q^k}dq^k=p^idq^i \tag{4.22}$$

4.3.1. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton aparecen de manera natural en la variedad hamiltoniana TM^*.

Definición 4.2. Sea (M, w) una variedad hamiltoniana. Un campo vectorial C^∞ se llama hamiltoniano si hay una función $H \in F^\infty(M)$ tal que

$$i(X)w = dH \tag{4.23}$$

Supongamos un sistema de coordenadas canónicas $(q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$

$$X = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial p^i} \tag{4.24}$$

Utilizando la ecuación 4.19 y la proposición 3.15

$$i(X)w = i(X)(dq^i \wedge dp^i) = \left[i(X)dq^i\right] \wedge dp^i - dq^i \wedge \left[i(X)dp^i\right] \tag{4.25}$$

Utilizando la ecuación 4.24

$$X = A^i dp^i - B^i dq^i \tag{4.26}$$

Por otro lado

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p^i} dp^i \tag{4.27}$$

Entonces se obtiene

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \qquad ; \qquad B^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{4.28}$$

Y el campo vectorial X se puede expresar como

$$X = \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \tag{4.29}$$

Del teorema 3.14.1, con t el parámetro y con cierta libertad de notación obtenemos las siguientes ecuaciones

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{p}^i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}^i \qquad i = 1, ..., n \tag{4.30}$$

Que son precisamente que las ecuaciones de Hamilton (ecuaciones 4.5).

Teorema 4.3.2. *Supongamos la variedad hamiltoniana TM^* y un sistema de coordenadas canónico $(q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$. Entonces*

$$(q^1(t), ..., q^d(t), p^1(t), ..., p^d(t)) \tag{4.31}$$

es una curva integral de un campo hamiltoniano X_H si y solo si cumplen con las *ecuaciones (4.30).*

Un resultado muy importante es el siguiente

Teorema 4.3.3. *Sea X_H un campo hamiltoniano entonces H es constante a lo largo de las curvas integrales. Este resultado se conoce como* conservación de la energía

Ahora podemos interpretar el resultado de la introducción de este capítulo. Supongamos que para todo punto p en una variedad M existe un sistema de coordenadas $(q^1, ..., q^d, p^1, ..., p^d)$ tal que las curvas integrales obedecen las ecuaciones (4.5) y que induce la base $(dp^1, ..., dq^d, dp^1, ..., dp^d)$ en T_pM^*. Si este mismo punto p tiene otro sistema de coordenadas $(Q^1, ..., Q^d, P^1, ..., P^d)$ que también obedece las ecuaciones (4.5) e induce otra base $(dQ^1, ..., dQ^d, dP^1, ..., dP^d)$. La matriz DF, que es la matriz de cambio de base entre estas dos bases inducidas en T_pM^*, es una matriz simpléctica. Entonces (M, w) con w una $2 - forma$ definida en la vecindad de cada punto p como en la ecuación (4.19) es una variedad simpléctica.

La «simplectización» de la mecánica clásica continúa más allá de lo presentado en este capítulo. Para ver mas sobre este tema e incluso algunas aplicaciones se puede ver [12] o [14].

CONCLUSIONES

1. La geometría simpléctica es el escenario natural para la mecánica clásica: la mecánica clásica es simpléctica.

2. El espacio de configuración de un sistema mecánico se puede modelar como una variedad diferenciable M.

3. A la variedad M del espacio de configuración le corresponde la variedad diferenciable TM^* que modela el espacio de fase de un sistema mecánico.

4. La ecuaciones de Hamilton aparecen como las ecuaciones de las curvas integrales de un campo hamiltoniano en el espacio de fase.

5. Las ecuaciones de Hamilton son invariantes a los cambios de coordenadas en el espacio de configuración.

6. La antisimetría de las ecuaciones de Hamilton está directamente relacionada con la estructura de la geometría simpléctica.

RECOMENDACIONES

1. Dado que se buscó evidenciar la estructura simpléctica de la mecánica clásica de la forma más directa posible, no se definieron conceptos muy importantes como por ejemplo la derivada de Lie o flujo de un campo vectorial, que son parte importante de la geometría simpléctica en mecánica clásica. Se sugiere, para un estudio posterior.

2. La aplicación de la geometría simpléctica y sus métodos a la mecánica clásica va mucho mas allá de lo presentado en este trabajo, esto incluye aplicaciones, por ejemplo, a sistemas gravitatorios. Se sugiere continuar el estudio y discutir estas aplicaciones.

3. La geometría simpléctica es una rama activa de la matemática, con mucha relación con otras áreas. Además sus aplicaciones en física no se restringen a mecánica clásica, existen aplicaciones en mecánica cuántica y en teoría de cuerdas. Se sugiere investigar sobre estas otras aplicaciones.

4. Para una mejor comprensión de la estructura simpléctica de la mecánica clásica se recomienda usar conceptos y la notación desarrollada en la geometría diferencial.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Mark J. Gotay, James A.Isenberg, R. Mazzeo y P. Piazza. The Symplectization of science: symplectic geometry lies at the very foundations of physics and mathematics. *Gazette des Mathématiciens*, **54**,59-79 (1992).

[2] Alan Weinstein. Symplectic Geometry *American Mathematical Society*, Volume 5, Number 1, July 1981.

[3] Barret O'Neil. *Semi-riemannian geometry, with applications to relativity.* . Academic Press, New York, 1983.

[4] Andrew McInerney. *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic.* (Undergraduate Texts in Mathematics). Springer Science, New York, 2013.

[5] L.D Landau y E.M. Lifshitz. *Mechanics.* (Course of Theoretical Physics). Butterworth-Heinenann, Oxford, 1999.

[6] Richard L.Bishop y Samuel I. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds.* Dover Publications, New York, 1980.

[7] Robert G. Bartle y Donald R. Sherbert. *The elements of real analysis.* John Wiley & Sons,Inc., New York, 1964.

[8] Georgi E. Shilov. *An introduction to the theory of linear spaces.* Tr. Richard A. Silverman. Dover publications, Inc., New York, 1974.

[9] Lester R. Ford. *Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1955.

[10] Jerrold E. Marsden y Tudor Ratiu . *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* Springer-Verlag Publishing Company, Inc., New York, 1983.

[11] Y. Choquet-Bruhat y otros. *Analysis, manifolds and physics. (volumen 1)* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1996.

[12] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden *Foundations of mechanics* Addison-Wesley Publishing, Inc., California, 1987.

[13] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing, Inc., California, 2001.

[14] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York, 1997.