

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERIA

**ANALISIS DE CAMPOS AXIALES EN MOTORES DC CONSTRUIDOS
CON MAGNETOS PERMANENTES**

TESIS

Presentada a la Junta Directiva de la

FACULTAD DE INGENIERIA

por

MARVIN LEONEL CHUM SANCHEZ

Al conferírsele el título de

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA



08
T(3867)
C.A

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

**ANALISIS DE CAMPOS AXIALES EN MOTORES DC CONSTRUIDOS
CON MAGNETOS PERMANENTES**

tema que me fuera asignado por la dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica-Eléctrica, con fecha 5 de marzo de 1996, Ref. EIME.066.96

Atentamente,



Marvin Leonel Chum Sánchez



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MIEMBROS DE LA JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Herbert René Miranda Barrios
VOCAL 1o.	Ing. Miguel Angel Sánchez Guerra
VOCAL 2o.	Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano
VOCAL 3o.	Ing. Juan Adolfo Echeverría Méndez
VOCAL 4o.	Br. Victor Rafael Lobos Aldana
VOCAL 5o.	Br. Wagner Gustavo López Cáceres
SECRETARIO	Ing. Gilda Marina Castellanos de Illescas

**TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN
GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Julio Ismael González Podszueck
EXAMINADOR	Ing. Miguel Angel Sánchez Guerra
EXAMINADOR	Ing. Gustavo Benigno Orosco Godinez
EXAMINADOR	Ing. Pedro Enrique Kubes Zacek
SECRETARIO	Ing. Francisco Javier González López

Guatemala 13 de agosto de 1996

Ing. Angel García
Coordinador del Area de Potencia
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala

Ingeniero Coordinador:

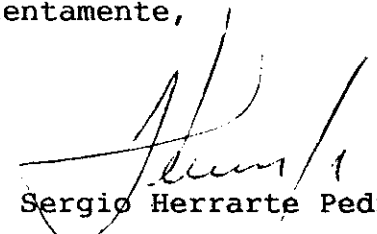
Lo saludo cordialmente deseándole éxitos en todas sus labores.

El motivo de la presente es para informarle que he asesorado el trabajo de tesis titulado **"ANÁLISIS DE CAMPOS AXIALES EN MOTORES D.C. CONSTRUIDOS POR MAGNETOS PERMANENTES"**, que previó a obtener el título de Ingeniero Mecánico Eléctricista, ha desarrollado el alumno Marvin Leonel Chum Sánchez. Es mi deseo manifestarle que he encontrado el trabajo satisfactorio, y en mi opinión llena los requisitos para su aceptación.

Por lo anteriormente expuesto, le agradecería que revise el trabajo, a fin de dar el visto bueno para que el estudiante Marvin Chum pueda someterse al examen de tesis respectivo.

Es oportuno indicar que el presente trabajo es responsabilidad del autor y asesor.

Atentamente,


Ing. Sergio Herrarte Pedroza
ASESOR

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, 11 de noviembre de 1,996

Señor Director
Ing. Edgar F. Montúfar Urizar
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica.

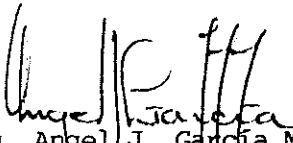
Señor Director.

Me permito dar aprobación al trabajo de tesis titulado: **Análisis de campos axiales en motores D.C. construidos con magnetos permanentes**, desarrollado por el señor **Marvin Leonel Chum Sánchez**, ya que considero que llena los objetivos planteados.

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarlo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS


Ing. Angel J. Garcia Martínez
Coordinador Área de Potencia

AJGM/sdem.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

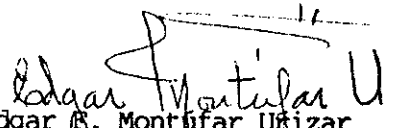


FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria,

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Area, al trabajo de tesis del estudiante **Marvin Leonel Chum Sánchez**, titulado: **Análisis de campos axiales en motores DC construidos con magnetos permanentes**, procede a la autorización del mismo.


Ing. Edgar E. Montufar Uñizar

Director

Guatemala, 20 de noviembre de 1,996.



FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Decano de la Facultad de Ingeniería, luego de conocer la autorización por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, al trabajo de tesis: **Análisis de campos axiales en motores DC** construidos con magnetos permanentes, del estudiante **Marvin Leonel Chum Sánchez**, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:


Ing. Herbert René Miranda Barrios
Decano

Guatemala, 23 de noviembre de 1,996.



ACTO QUE DEDICO

A DIOS

Proverbios 9:10

A MIS PADRES

Simeón Chum
Victoria Sánchez

A MIS HERMANOS

César, Gloria, Alma Rubidia,
Elizabeth, y en especial a Otoniel.

A MIS SOBRINOS

A MIS AMIGOS

AL PROYECTO TARSO

AL DEPARTAMENTO DE EL QUICHE

AGRADECIMIENTO

A mi asesor:

Ing. Sergio Herrarte Pedroza

A mis colaboradores:

Lic. en Física Oscar Castañeda

Lic. en Física Amahan Sánchez

Ing. Edgar Montúfar

Por su ayuda en la elaboración del presente proyecto

INDICE GENERAL

	Página
LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABLAS.....	ii
GLOSARIO.....	iv
INTODUCCION.....	v
CAPITULO 1 MÁQUINAS D.C. DE CAMPOS AXIALES	
1.1 Armadura del motor d.c. de campo axial.....	1
1.2 Teoría de la armadura del motor d.c. de campo axial.....	4
1.3 Ventajas y aplicaciones del motor d.c. de Campo axial.....	14
1.4 Modelo del magneto permanente.....	19
CAPITULO 2 MATERIALES PARA MAGNETOS PERMANENTES Y SUS CARACTERÍSTICAS	
2.1 Estructuras cristalinas.....	22
2.2 Materiales para magnetos permanentes.....	27
2.3 Anisotropía en materiales de magnetos permanentes.....	31
2.4 Operación de magnetos permanentes.....	34
2.5 Curvas B-H.....	40

CAPITULO 3 ANISOTROPÍA MAGNÉTICA.....	43
3.1 Anisotropía de forma.....	44
3.2 Anisotropía de cristal.....	66
3.3 Anisotropía mixta.....	67
3.4 Rotación en la magnetización.....	73
CAPITULO 4 CALCULOS DE CAMPO.....	79
4.1 Cálculo directo de campo magnético.....	80
4.2 Cálculos de forma cerrada.....	81
4.3 Distribución de potencial sobre el magneto permanente.....	82
4.4 Modelo de magneto permanente.....	85
4.5 Condiciones de frontera.....	97
4.6 Resumen del método matemático utilizado para los cálculos de campo, considerando la distribución no uniforme de la magnetización en el volumen de los magnetos permanentes de las máquinas d.c de campo axial.....	102
CONCLUSIONES.....	112
RECOMENDACIONES.....	113
REFERENCIAS.....	114
BIBLIOGRAFIA.....	116
APENDICES.....	117
ANEXO 1	126

PROPIEDAD DE LA
BIBLIOTECA

PROPIEDAD DE LA
BIBLIOTECA

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.1	Vista de la armadura en forma de disco de una máquina de campo axial	2
1.2	Sección de el circuito magnético de una máquina de campo axial	3
1.3	F.e.m. en un conductor simple	5
1.4	Dispositivo electromecánico	12
1.5	Sección del circuito magnético de una máquina de campo axial, con un anillo de retorno de flujo rotativo	18
2.1	Representaciones de las celdas unitarias de los 14 látices espaciales	23
2.2	Representación de la celda unitaria cúbica que muestra cuatro planos en el sistema de coordenadas cartesianas	25
2.3	Direcciones del cristal en el sistema cúbico	26
2.4	Desarrollo de la aleación Alnico	28
2.5	Curvas de desmagnetización de los cuatro materiales para magnetos más importantes	32
2.6	Punto de operación de un magneto permanente	35
2.7	Sección horizontal a través de un espécimen de disco en el campo de un electroimán	38
2.8	Variación de J vs. θ_0 en un disco de Alnico 5-7 con un campo de saturación de 211 kA/m	39
2.9	Ejemplos de cubos cortados en un incremento de 10^0 del material magnético Alnico 5-7	42
2.10	(a) B vs. J con $\theta_0 = 0^0$ (b) B vs. J con $\theta_0 = 10^0$ (c) B vs. J con $\theta_0 = 20^0$ (d) B vs. J con $\theta_0 = 30^0$ (e) B vs. J con $\theta_0 = 40^0$ (f) B vs. J con $\theta_0 = 50^0$ (g) B vs. J con $\theta_0 = 60^0$ (h) B vs. J con $\theta_0 = 70^0$	

	(i) B vs. J con $\theta_0 = 80^\circ$	
	(j) B vs. J con $\theta_0 = 90^\circ$	
2.11	Variación de J en un campo de saturación en los ejemplos de los cubos de Alnico 5-7	132
2.12	Variación de la remanencia en los ejemplos de los cubos de Alnico 5-7	133
3.1	Elipsoide de revolución	45
3.2	Rotación de magnetización de un elipsoide	46
3.3	Relación entre M, M_s y ϕ	51
3.4	Circuito de histéresis por anisotropía de forma	55
3.5	La orientación del eje [100] después que ha sido rotado un ángulo θ distante de M_s por un campo aplicado H	57
3.6	Rotación de la magnetización en un elipsoide debido a la anisotropía de cristal	61
3.7	Variación de la energía anisotrópica de cristal	63
3.8	Circuito de histéresis por anisotropía de cristal	65
3.9	Circuito de histéresis por anisotropías de forma y de cristal	72
3.10	Magnetización por rotación	74
3.11	Curvas de θ a medida que H varía de cero a saturación y θ_0 varía de cero a 80°	77
3.12	Curvas de θ a medida que H varía de cero a saturación θ_0 varía de 120° a 180°	78
4.1	Rango típico de operación de un magneto sobre la curva mayor de magnetización	83
4.2	Estator de una máquina de 6 polos de forma circular	84
4.3	Vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} colineales	87
4.4	Vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} no colineales	87
4.5	Vector de magnetización J resuelto en dos ejes mutuamente perpendiculares	88
4.6	Rotación de J debido a la auto-desmagnetización del campo H	94

4.7	Distancia, r , de la cara del magneto	95
4.8	Frontera aire/acero y frontera magneto/acero	98
4.9	El sistema magnético "visto" por los dos platos de acero	99
4.10	Transformación del polo adyacente	101
4.11	Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro del magneto para 2mm de entrehierro	106
4.12	Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 2mm de entrehierro	107
4.13	Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro del magneto para 3mm de entrehierro	108
4.14	Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 3mm de entrehierro	109
4.15	Variación de la densidad del flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro de magneto para 4mm de entrehierro	110
4.16	Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 4mm de entrehierro	111

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
2.1	Sistemas cristalinos.....	20
3.1	Propiedades de materiales para magnetos permanentes de aleación Alnico (Fundición).....	30
3.2	Propiedades de materiales para magnetos permanentes de aleación Alnico (Sinterización)....	30
3.3	Propiedades de los materiales ferritas de magnetos permanentes.....	30

GLOSARIO**ANISOTROPÍA**

Propiedad característica de la materia cristalina según la cual la intensidad de una o varias propiedades varía según las diferentes direcciones.

ANISOTROPÍA MAGNÉTICA

Por anisotropía magnética se entiende la dependencia de la energía interna sobre la dirección de la magnetización espontánea o que las propiedades magnéticas dependen de la dirección en las cuales estas estén medidas.

CONDICIONES DE FRONTERA

Valores de \underline{B} y \underline{H} en la entrecara de dos materiales diferentes.

HOMOGENEIDAD

Calidad de homogéneo.

HOMOGENEO

Dícese del compuesto cuyos elementos son de igual naturaleza.

METALES DE TRANSICION

Elementos pertenecientes a la fila 4 y a las columnas VII Y VIII, en la tabla periódica de los elementos.

VECTORES COLINEALES

Dícese de los vectores con una misma dirección, aunque pueden tener diferente sentido.

INTRODUCCION

Las máquinas eléctricas de magnetos permanentes con campos axiales y armaduras formadas por discos ofrecen mejorar la eficiencia potencia a peso, torque alto a baja velocidad y alta velocidad con baja inercia, todo esto comparado con los motores dc convencionales.

A fin de optimizar el diseño y funcionamiento de estas máquinas, es claramente necesario determinar con exactitud la distribución de campo a través de todo el entrehierro, de manera que es necesario conocer un método rápido para modelar los magnetos permanentes en los cálculos de campo.

El método tradicional usado hasta ahora en Guatemala para modelar un magneto permanente, no considera la distribución no uniforme que existe en todo el volumen del material, es decir, un método que se puede aplicar a materiales con características de desmagnetización lineal, tal como los materiales de ferritas y tierras raras, sin embargo, en materiales que tienen curvas de desmagnetización no lineales, como los Alnicos, este método no es aplicable para los cálculos de campo, debido a que en estos materiales existe una distribución de magnetización no uniforme.

En el presente trabajo se estudia una nueva técnica que considera la distribución no uniforme de la magnetización en los materiales magnéticos para los cálculos de la distribución de campo. Esta nueva técnica permite a una distribución no uniforme ser determinada, y, se determina en relación a los campos de desmagnetización propia que se han calculado usando una magnetización uniformemente distribuida.

Esta nueva técnica permite hacer cálculos de distribuciones de campos cercanos a la realidad y puede ser aplicada en materiales magnéticos, utilizados para fabricar motores eléctricos.

CAPITULO 1

MÁQUINAS DC DE CAMPOS AXIALES

El motor d.c. de campo axial ha encontrado aplicación porque tiene una armadura con menos hierro y las pérdidas de potencia son menores que en un motor d.c. convencional.

Se han desarrollado varios tipos diferentes de discos (armaduras) del motor d.c. de campo axial así como componentes avanzados, aunque hay ciertos principios fundamentales de estas máquinas que no están totalmente comprendidos. Uno de estos principios fundamentales es el efecto que una magnetización con distribución no uniforme dentro del material del magneto permanente tiene sobre los cálculos de campo. Esto es, particularmente, evidente en altos remanentes de magnetos de Alnico y es causado por el entrehierro inherente en este motor.

1.1 Armadura del motor D.C. de campo axial

La armadura o inducido del motor de campo axial [1]* tiene forma de disco con conductores radiales activos (Figura 1.1). El alambre de las bobinas y el conmutador dan rigidez mecánica por encapsulación en resina epóxica y como se incluye hierro en el rotor, resulta un entrehierro de unos pocos milímetros (Figura 1.2). La f.m.m. requerida es suplida usando magnetos permanentes de alta coercitividad.

Hay muchas ventajas como resultado de este diseño particular del motor. Si no hubiera hierro en el inducido no habrían

* Las cifras que aparecen entre corchetes de traducción se refieren a las referencias que se incluyen al final de la tesis. El número entre corchetes es el correspondiente a la obra citada.

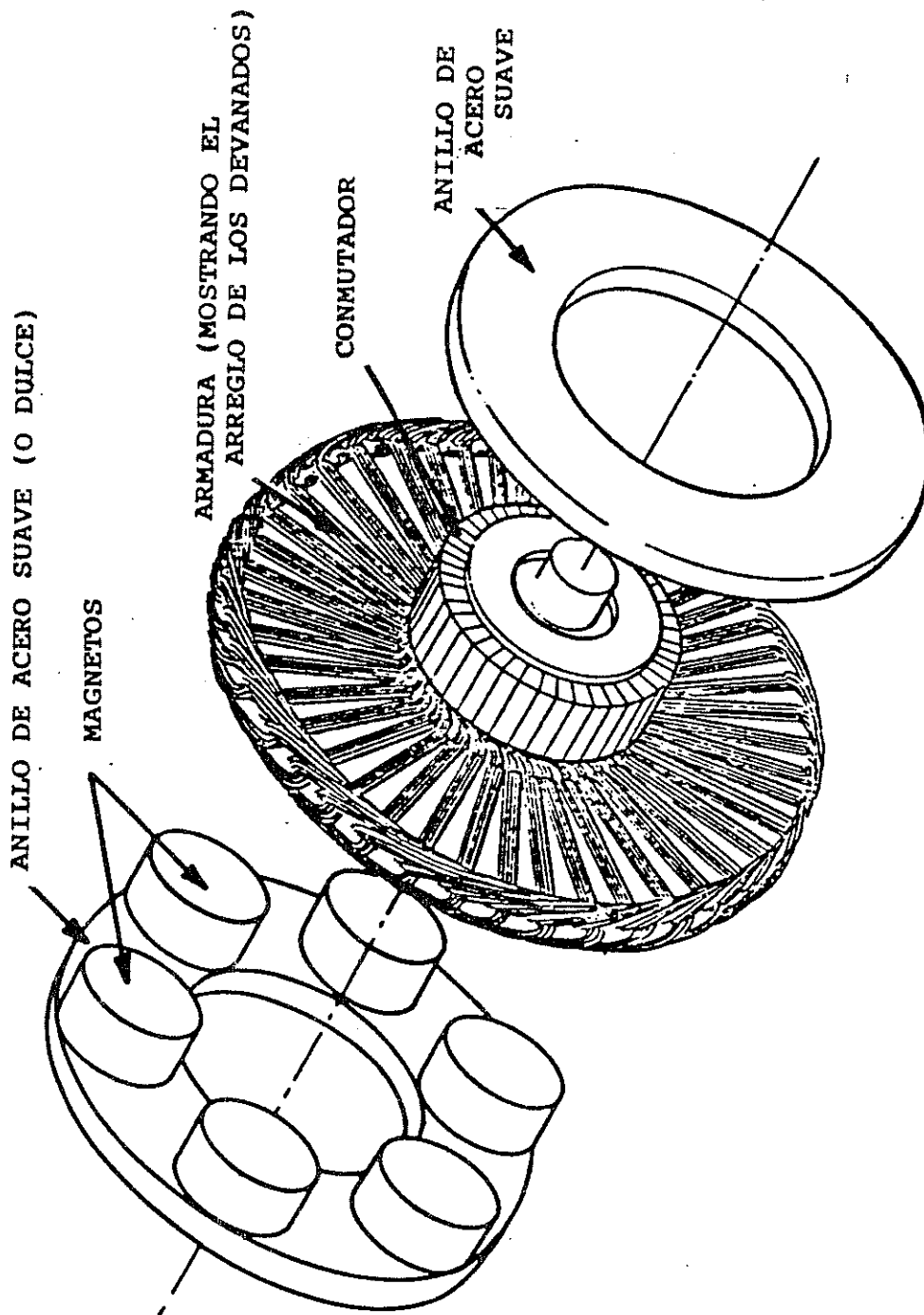


Figura 1.1. Vista de la armadura en forma de disco de una máquina de campo axial

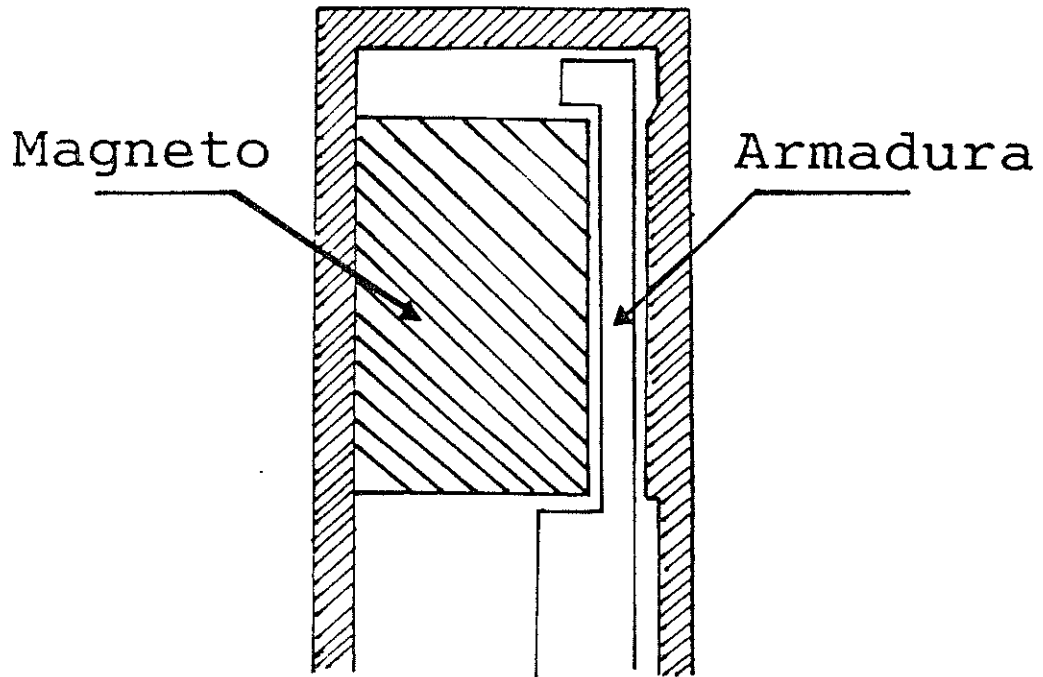


Figura 1.2. Sección de el circuito magnético de una máquina de campo-axial

corrientes de eddy ni histéresis, y, debido a que este motor tiene menos hierro en la armadura que un motor d.c convencional para una potencia dada, la eficiencia del inducido del motor puede, por consiguiente, ser muy grande dependiendo, inicialmente, sobre las pérdidas de potencia I^2R en el inducido.

1.2 Teoría de la armadura del motor D.C. de campo axial

1.2.1 Diseño de un circuito eléctrico

Por conductor simple de la armadura, Figura (1.3)

$$e = B \ell v \quad (1.1)$$

(siendo B , ℓ y v ortogonales entre sí)

donde

e = f.e.m. inducida (V)

\underline{B} = densidad de flujo promedio (T)

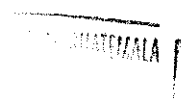
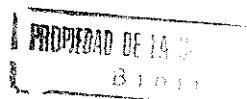
en el entrehierro

= carga magnetica especifica

= C.M.E.

ℓ = longitud activa del conduc- (m)

tor en la armadura



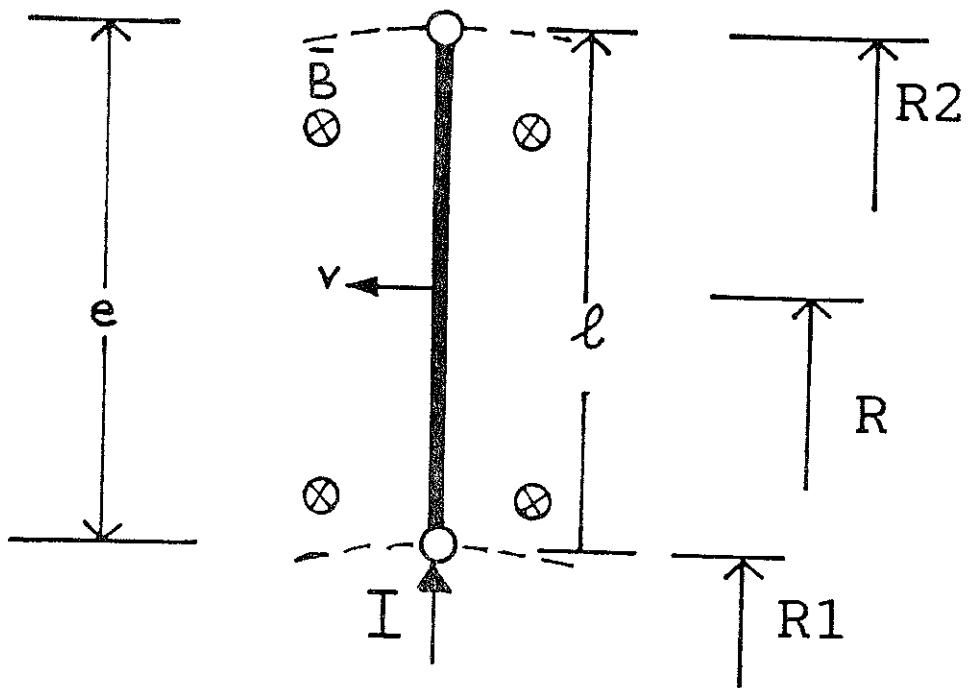


Figura 1.3. F.e.m. en un conductor simple

v = velocidad del conductor ac- (m/s)
tivo de la armadura.

Para la armadura la f.e.m. inducida es

$$E = eZ_s \quad (1.2)$$

donde

Z_s = número de conductores en la armadura en un camino en medio de las escobillas.

Sin embargo

$$\ell = \frac{(D_2 - D_1)}{2}$$

$$v = \pi D n$$

$$= \pi n \frac{(D_2 + D_1)}{2}$$

$$Z_s = (Z/a)$$

donde

D_2 = diámetro exterior del disco de la armadura (m)

D_1 = diámetro interior del disco de la armadura (m)

D = diámetro promedio (m)

n = velocidad de rotación (rev/s)

Z = número de conductores en la armadura

a = número de trayectorias paralelas a través de la armadura.

Sustituyendo l , v y Z_s en la ecuación (1.2)

$$E = \underline{B} \frac{(D_2 - D_1)}{2} \cdot \pi n \frac{(D_2 + D_1)}{2} \cdot \frac{Z}{a}$$

$$= (\pi/4a) \underline{B} Z (D_2^2 - D_1^2) n$$

sin embargo,

$$P\emptyset = \pi \frac{(D_2^2 - D_1^2)}{4} \underline{B}$$

$$\omega = 2\pi n$$

donde

P = número de polos

\emptyset = flujo promedio por polo (wb)

ω = velocidad angular (rad/s)

Sustituyendo en la ecuación (1.3) se tiene:

$$E = P\emptyset \frac{Z}{2\pi a} \omega \quad (1.4)$$

$$= K_a \omega \quad (1.5)$$

donde

K_g = constante de la f.e.m. inducida en la armadura

$$K_g = \frac{P\phi Z}{2\pi a} .$$

Si el voltaje en terminales es V , entonces:

$$V = E + IR + L \frac{dI}{dt} \quad (1.6)$$

donde:

I = corriente total en la armadura (A)

R = resistencia total (Ω)

L = inductancia total (H)

La ecuación anterior es aplicable para el régimen transitorio, cuando el motor está en régimen permanente la ecuación 1.6 se reduce a:

$$V = E + IR$$

1.2.2 Diseño de un circuito magnético

Ley de ampere

Para cualquier circuito magnético:

$$\oint \underline{H \cdot dl} = I \quad (1.7)$$

donde

\underline{H} = intensidad de campo magnético (A/m)

= fuerza magnetizante

I = corriente encerrada por un camino (A)

de integración

$$\oint \underline{H} \cdot d\underline{l} = \text{fuerza magnetomotriz}$$

$$= \text{f.m.m.}$$

En un circuito de magneto permanente, la corriente encerrada I , es cero, por consiguiente,

$$\oint \underline{H} \cdot d\underline{l} = 0. \quad (1.8)$$

Para un circuito magnético estático, en el cual el campo \underline{H} , es constante en el magneto, el entrehierro y en los anillos de retorno de acero suave (dulce),

$$H_m \ell_m + H_g \ell_g + H_s \ell_s = 0$$

por lo que:

$$H_m \ell_m = -(H_g \ell_g + H_s \ell_s) \quad (1.9)$$

$$= -H_g \ell_g \left(1 + \frac{H_s \ell_s}{H_g \ell_g} \right)$$

$$= -K_1 H_g \ell_g \quad (1.10)$$

donde:

K_1 = factor de pérdidas

$$= 1 + \frac{H_s \ell_s}{H_g \ell_g} > 1.$$

El flujo y la densidad de flujo se relacionan por

$$\oint \underline{B} \cdot \underline{dA} = \phi.$$

En magnetismo, la ley de Gauss se puede escribir como

$$\oint \underline{B} \cdot \underline{dA} = 0. \quad (1.11)$$

Por consiguiente:

$$\phi_m = \phi_g + \phi_\ell \quad (1.12)$$

$$= \phi_g \left(1 + \frac{\phi_\ell}{\phi_g} \right)$$

$$= K_2 \phi_g \quad (1.13)$$

donde:

ϕ_m = flujo magnético (wb)

ϕ_g = flujo en el entrehierro (wb)

ϕ_ℓ = flujo de escape (wb)

fuga de flujo

K_2 = coeficiente de pérdidas

$$= 1 + \frac{\phi_{\ell}}{\phi_g} = \frac{\phi_m}{\phi_g} > 1.$$

Sobre un área dada A_r ,

$$\oint \underline{B} \cdot \underline{A} = \phi$$

por lo que la ecuación (1.13) pasa a ser

$$B_m A_m = K_2 B_g A_g \quad (1.14)$$

también en el entrehierro

$$\underline{B} = \mu_0 H_g \quad (1.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \text{constante magnética} \\ &= 4\pi 10^{-7} \quad (\text{H/m}) \end{aligned}$$

Potencia

La potencia electromecánica de la armadura en la Figura 1.4 es dada por:

$$P = EI = T\omega \quad (1.16)$$

Sustituyendo para E de la ecuación (1.3)

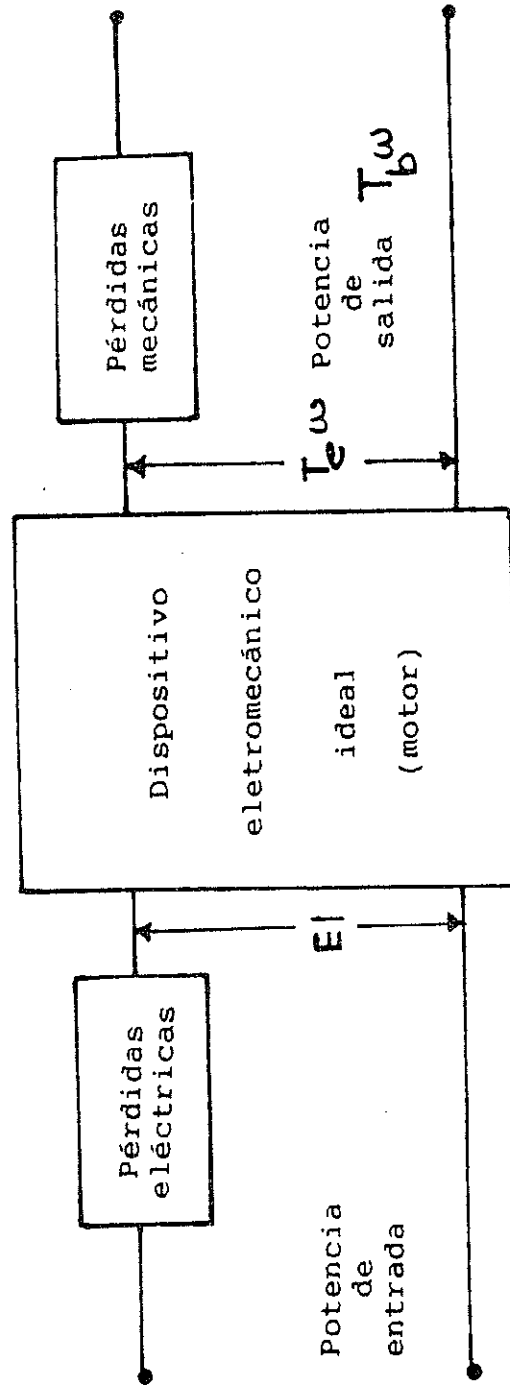


Figura 1.4. Dispositivo electromecánico

Torque.

De la potencia electromecánica, ecuación (1.16) torque total, T , desarrollado es

$$T = \frac{EI}{\omega} \quad (\text{N.m}) \quad (1.20)$$

Sustituyendo de la ecuación (1.5) el valor de E

$$T = K_p I. \quad (1.21)$$

De nuevo se ve que aparece la constante K_p .

El torque en un motor d.c. convencional viene dado por la ecuación:

$$T = K\phi I.$$

A diferencia de la ecuación anterior, la ecuación (1.21) involucra a la constante K y a ϕ en una sola constante, es decir, $K_a = K\phi$, esto se debe a que en un motor d.c. de campo axial ϕ es constante.

1.3 Ventajas y aplicaciones el motor D.C. de campo axial

Hay dos áreas de aplicación con esta máquina, si se utiliza un magneto permanente, tal como el Alnico 5-7. Este material es favorecido, ya que éste permite gran densidad de flujo B .

Gran densidad de flujo B , incrementa el valor de K_a , por el incremento en el flujo total, $P\phi$. Un torque T dado, resultaría de una I más baja para una K_p más grande.



El torque T en un motor de magnetos permanentes y la corriente I están relacionados con la ecuación (1.21), también la f.e.m., E , y, la velocidad ω , se relacionan por la ecuación (1.5) donde

$$K_a = \frac{T}{I} = \frac{E}{\omega} = \frac{P\phi Z}{2\pi a} .$$

Un valor grande para la constante K_a es necesario para lograr un torque alto T , para una corriente I dada o una velocidad baja, para una f.e.m. E dada. Una K_a alta asegurará que una corriente I excesiva, no sea inducida en un alto torque-baja velocidad en máquinas de este tipo y de esta forma disminuirán las pérdidas por calentamiento I^2R . Este calentamiento es un factor de límite crítico, particularmente, en la fabricación de la armadura de los motores. Es preferible aumentar K_a vía $P\phi$ antes que a través de los conductores por trayectoria, Z/a , los cuales incrementan, directamente la resistencia R .

Al aumentar K_a aumentando $P\phi$ por medio de un magneto permanente y adoptando un arreglo de campo axial, se obtiene una máquina más eficiente que el motor d.c. convencional debido a la reducción de pérdidas.

Otra ventaja que ofrece el motor d.c. de campo axial, es un tiempo menor para cambiar su velocidad desde el reposo a su máximo valor [2] es decir, tiene una mejor aceleración que el motor d.c. convencional, esto se debe a lo siguiente: la aceleración de la armadura depende de la inercia y de sus propiedades magnéticas y eléctricas; para el siguiente análisis se supone un motor ideal sin carga.

El voltaje en terminales V , y la f.e.m. inducida, se relacionan por

$$V = E + IR + L \frac{dI}{dt} . \quad (1.6)$$

En este diseño particular la inductancia, L , es muy pequeña y el término LdI/dt es despreciable, por lo que

$$V = E + IR. \quad (1.24)$$

El torque total resultante (como este análisis, es sobre un motor ideal, $T_e = T_b$ en la Fig. 1.4) T , y, el cambio de velocidad angular, $d\omega/dt$, se relacionan por

$$T = J \frac{d\omega}{dt} . \quad (1.25)$$

Sustituyendo la ecuación (1.5) y la ecuación (1.21) en la (1.24) se obtiene:

$$V = K_a \omega + \frac{T}{K_a} R.$$

Sustituyendo para el torque, T , de la ecuación (1.25) da

$$V = K_a \omega + \frac{JR}{K_a} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\dots \quad \frac{JR}{K_a^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{V}{K_a} \quad (1.26)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de primer grado cuya solución es:

$$\omega = \frac{V}{K_a} \left[1 - e^{-t/(JR/K_a^2)} \right]$$

por lo que la constante de tiempo para la relación de cambio de velocidad angular, $d\omega/dt$, es

$$\tau = \frac{JR}{K^2 a}$$

Claramente, la inercia de la armadura, J , debe, también, ser muy baja, por lo que la configuración de discos con menos hierro se adapta, adecuadamente.

Una vez más de nuevo, se desea un valor alto para K_a , el cual se logra mejor al incrementar $P\emptyset$ del entrehierro. Operando el magneto a la densidad de flujo más grande posible dará la más pequeña constante de tiempo para el motor y la mejor aceleración. Con el motor d.c. de campo axial se obtiene una constante de tiempo menor que un motor d.c. convencional, debido a que éste tiene menor inercia.

También una aplicación para esta máquina ha sido considerada cuando se requiere una longitud muy corta y una construcción simple. Esto puede ser logrado si se incorpora el anillo de retorno de flujo (Figura 1.5), así que, se reintroducen pérdidas rotacionales y una fuerza axial entre rotor y estator.

Ademas, en el motor d.c. de campo axial se puede obtener una mejor relación de potencia a peso si se utilizan magnetos de tierra rara, los cuales tienen gran densidad de energía (BH) esto se debe a lo siguiente:

El volumen de un magneto es

$$V_m = A_m \ell_m$$

Sustituyendo (1.14) y (1.10) en (1.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{K_2 B_g A_g}{B_m} \cdot \frac{-K_1 H_g \ell_g}{H_m} \\ &= -K_1 K_2 \frac{B_g H_g}{(B_m H_m)} A_g \ell_g \end{aligned}$$

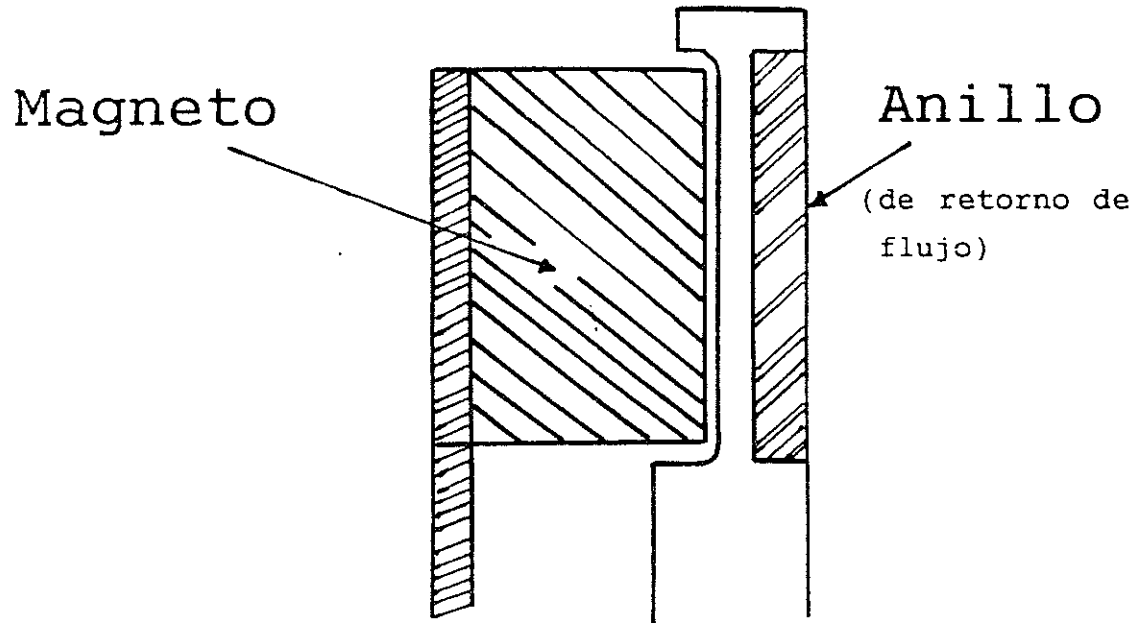


Figura 1.5. Sección de el circuito magnético de la máquina de campo axial, con un anillo de retorno de flujo rotativo.

Para que el volumen del magneto, V_m , sea mínimo, el producto ($B_0 H_0$) deberá ser al máximo, lo que indica que se debe utilizar un magneto de tierra rara debido a que, a pesar de tener una remanencia menor que el Alnico (Figura 3.2) su densidad de energía es mayor, lo que hará que las dimensiones de la máquina sean menores.

1.4 Modelo del magneto permanente

Con el fin de alcanzar lo óptimo en el diseño de esta máquina particular, es claramente necesario determinar con exactitud la distribución del campo a través de todo el entrehierro. El campo en el entrehierro se calcula de la distribución de potencial, la cual se debe encontrar en la superficie de los polos de magnetos permanentes.

El potencial, ψ , en cualquier punto, debido a un magneto permanente está dado por [3]

$$4\pi\psi = \int_A \frac{M_s}{r} dA - \int_V \frac{\text{div}M}{r} dv. \quad (1.27)$$

La integración de la magnetización \underline{M} , es ejecutada a través de todo el volumen del magneto, cada elemento, dv , está a una distancia, r , del punto deseado y , también, para la magnetización, M_s , normal a la superficie del magneto, cada elemento, dA , está a r desde el punto.

Para los magnetos anisotrópicos, tales como los de tierra rara y tipo ferrita, es buena aproximación asumir que la magnetización, \underline{M} , es uniforme, siendo constante en magnitud y

dirección y , por consiguiente $\text{div} \underline{M}$ es cero en la ecuación (1.27) entonces, se simplifica unicamente al primer término y

$$4\pi\psi = \int_A \frac{M_S}{r} dA. \quad (1.28)$$

Para ciertas aplicaciones se prefiere utilizar un magneto con aleación, tal como el Alnico 5-7, para estos tipos, no es posible asumir una magnetización \underline{M} uniforme a través de todo el material y de esta forma, ambos términos de la ecuación (1.27) están presentes.

Debido a las condiciones de frontera impuestas por un dispositivo (montaje) la magnetización no es constante en todo el volumen del material Alnico 5-7. Esto indica que se requiere un método matemático para modelar un magneto que considere la distribución no uniforme de la magnetización en los cálculos de campo, por lo tanto, se debe analizar las características físicas y operativas de un magneto permanente antes de intentar resolver la ecuación (1.27).

CAPÍTULO 2

MATERIALES PARA MAGNETOS PERMANENTES Y SUS CARACTERÍSTICAS

El propósito de un magneto permanente es proveer un campo magnético, H , en un volumen particular de espacio, como la alternativa a usar un electroimán. Para varias aplicaciones, la mejor opción es un magneto permanente, porque éste, provee un campo constante, H , sin el continuo gasto de potencia eléctrica y sin generar calor [4]. Un magneto es, fundamentalmente, un dispositivo que almacena energía. Esta energía es puesta dentro de éste cuando es magnetizado y permanece en el magneto, si se le maneja, apropiadamente, casi indefinidamente.

Para el cálculo de la distribución del campo debido a un magneto permanente anisotrópico, se podría asumir una magnetización uniforme sólo en materiales de ferritas y tierras raras. No obstante, con el Alnico, debe encontrarse primero, la distribución no uniforme de la magnetización intrínseca, J , a través de todo el magneto. Por tanto, un conocimiento de las propiedades direccionales del material es esencial.

Para determinar qué propiedades del material son importantes, se deben examinar las condiciones en las cuales opera un magneto. En razón de que la función de un magneto es proveer un campo externo, H , éste debe tener polos libres. Un magneto siempre opera dentro del entrehierro. El resultado de polos libres crea un campo desmagnetizante, H_d , el cual hace que la inducción, B , tenga un valor más bajo que la inducción remanente, B_r , en un circuito cerrado.

2.1 ESTRUCTURAS CRISTALINAS

La mayor parte de los materiales estructurales y tecnológicos, a excepción de la mayoría de los vidrios y los polímeros, son de naturaleza cristalina. Esto es, poseen un arreglo ordenado repetitivo o periódico de átomos enlazados en las tres dimensiones.

2.1.2 Tipos De Estructuras Cristalinas

Existen siete sistemas cristalinos los cuales se indican en la tabla 2.1, el sistema cúbico incluye al material principal que se analizará.

El arreglo espacial de los puntos equivalentes en un sistema de cristal se llama *látice espacial*; en un sólido cristalino, estos puntos son las posiciones de los átomos en un *látice espacial*. Cuando este arreglo comprende el entramado repetitivo más pequeño de sitios en el cristal, se le llama *celda unitaria*. De los siete sistemas cristalinos se pueden construir 14 *látices espaciales* [5]. En otras palabras, sólo existen 14 formas de arreglar espacialmente a los puntos (o a los átomos localizados en estos puntos) de modo que cada sitio tenga entornos semejantes. En la Figura 2.1.1 se muestran los 14 *látices espaciales*.

2.1.2 Planos cristalinos

Debido a la simetría y la naturaleza repetitiva, los materiales cristalinos contienen planos de átomos que se pueden definir con coordenadas cartesianas. La identificación de los planos en ciertas estructuras cristalinas y de los átomos

TABLA 2.1 SISTEMAS CRISTALINOS

Tipo de Sistema	Longitud de los ejes	Angulos axiales
cubico	$a_1 = a_2 = a_3$	todos = 90 grados
tetragonal	$a_1 = a_2 \neq a_3$	todos = 90 grados
ortorrombico	$a \neq b \neq c$	todos = 90 grados
monoclinico	$a \neq b \neq c$	$2 \neq 90, 1 \neq 90$
triclínico	$a \neq b \neq c$	todos diferentes, ninguno = a 90
hexagonal	$a_1 = a_2 \neq a_3 = c$	angulos = 90 y 120 grados
romboidal	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	todos iguales, pero no de 90

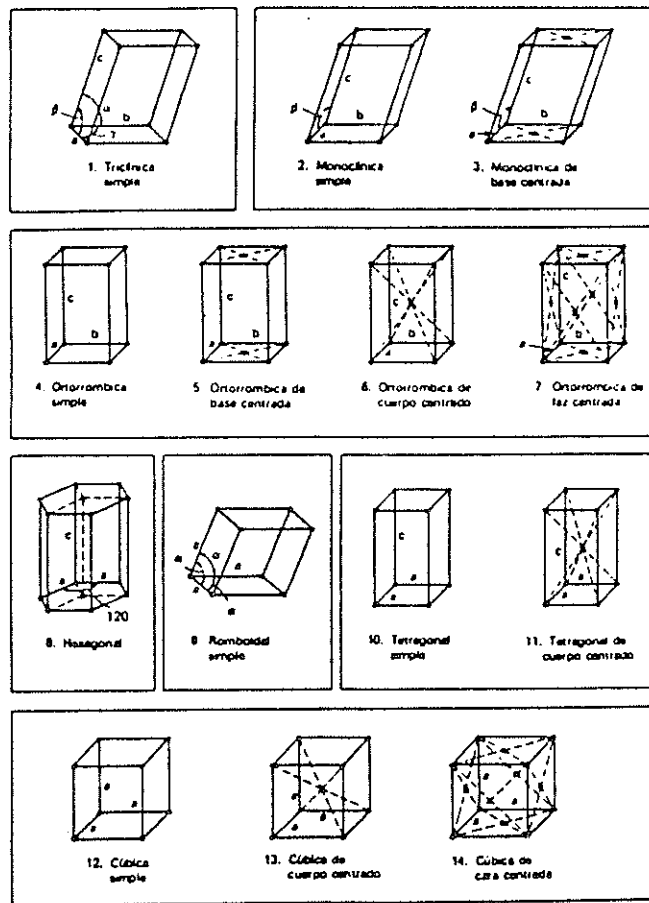


Figura 2.1. Representación de las celdas unitarias de los 14 latices espaciales

asociados con estos planos pueden ayudar a la comprensión de la influencia que ejercen los átomos y las estructuras cristalinas en las propiedades físicas o mecánicas de los materiales de ingeniería.

2.2.1 Identificación de los planos

Se logra una identificación rápida de los planos en un cristal, utilizando los índices Miller. Por definición, los índices Miller de un plano son los valores recíprocos sin fracciones de las intersecciones del plano con los ejes x , y , y z . Estas intersecciones se miden en términos de las distancias de las celdas unitarias al origen cartesiano, donde quiera que esté localizado. Los números de identificación de un plano, sus índices Miller, se expresan en paréntesis como (hkl) en donde, h , k y l son los recíprocos de las intersecciones en los ejes x , y y z , respectivamente. También se pueden designar familias de planos cristalinos por medio de los índices Miller. En este sentido, los planos que pertenecen a la misma familia son idénticos, excepto por su orientación respecto de los ejes cartesianos. Los planos que pertenecen a la misma familia se indican entre corchetes como sigue: $\{hkl\}$, para diferenciarlos de los planos solos.

Un ejemplo ayudará a aclarar estos puntos. Considérese la celda unitaria cúbica que se ilustra en la Figura 2.2, sin átomos para mayor claridad. Se describe en términos de los índices de Miller el plano designado como a . Los índices de Miller del ejemplo se pueden escribir como sigue:

Plano a :

$$h = \frac{1}{\text{intersección } x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$k = \frac{1}{\text{intersección } y} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$l = \frac{1}{\text{intersección } z} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto, se puede decir que el plano a es el plano (001).

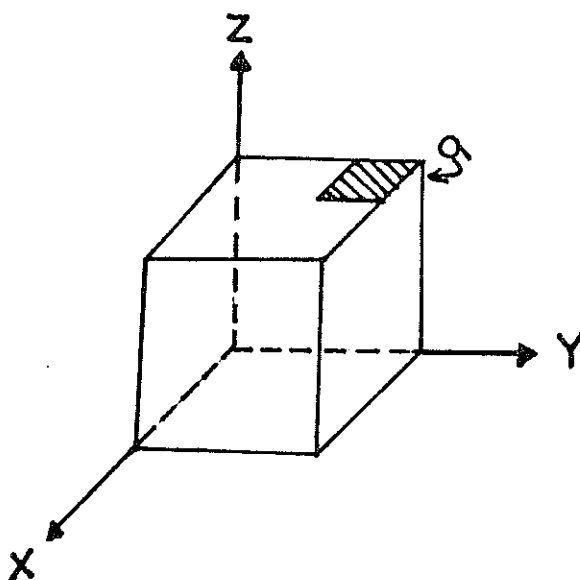


Figura 2.2. Representación de la celda unitaria cúbica que muestra un plano en el sistema de coordenadas cartesianas

El concepto de la identificación de planos cristalinos es benéfico porque ahora se puede estudiar y comunicar información relacionada con estos planos sin confusión sobre su localización y orientación.

2.1.3 Direcciones del cristal

De un modo semejante al de la identificación de planos en un cristal, también se pueden identificar direcciones en estas estructuras. Las direcciones en el cristal se pueden visualizar o representar con flechas que se extienden a partir de un origen $0, 0, 0$ y que pasan a través de puntos en el látice, estos puntos se miden en términos de las dimensiones de la celda unitaria. En la Figura 2.3 se muestra un ejemplo de las direcciones del cristal a lo largo de los ejes de las coordenadas cartesianas (x , y , z).

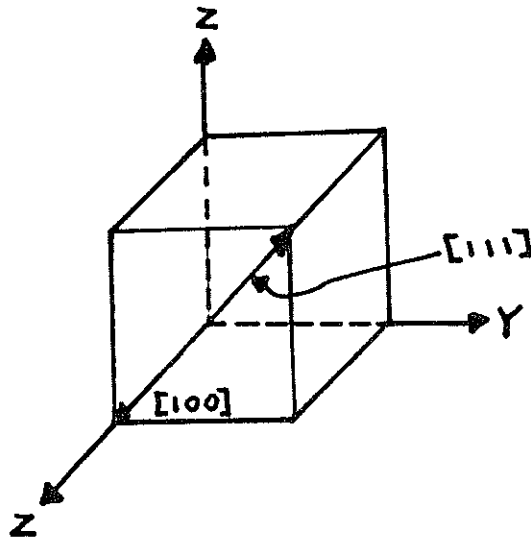


Figura 2.3. Direcciones del cristal en el sistema cúbico

En este ejemplo, una flecha se extiende a lo largo del eje x hasta una distancia de una celda unitaria a partir del origen.

Esta dirección se denomina como la [100]. Nótese que se usa paréntesis rectangulares [] para las direcciones de los cristales con el objeto de diferenciarlas de los planos. Obsérvese, también, que no se usan los recíprocos de las intersecciones. De modo similar, la flecha que se extiende a una celda unitaria de distancia de los tres ejes se denomina la [111], las direcciones equivalentes o familias de direcciones se representan por paréntesis angulares < >.

2.2 Materiales para magnetos permanentes

2.2.1 Alnico

El Alnico es, actualmente, una familia de aleaciones, conteniendo una cantidad sustancial de tres materiales ferromagnéticos, hierro (Fe), cobalto (Co), y níquel (Ni), más una cantidad menor de aluminio (Al), cobre (Cu) y algunas veces otros elementos [6]. Estos son los materiales de un magneto más ampliamente utilizados.

El desarrollo del Alnico data desde 1,931 cuando Mishima en Japón descubrió que una aleación de 58% Fe, 30% Ni y 12% Al (Figura 2.4) tenía una coercitividad de 30 kA/m.

Pronto se descubrió que agregar Co y Cu mejoraba las propiedades de la aleación de Mishima. En 1,938-1,940 se logró un mejoramiento dramático en sus propiedades, hecho por Dutch [6], quien

- a) incrementó el contenido de Co.
- b) calentó el proceso de la aleación en un campo magnético.

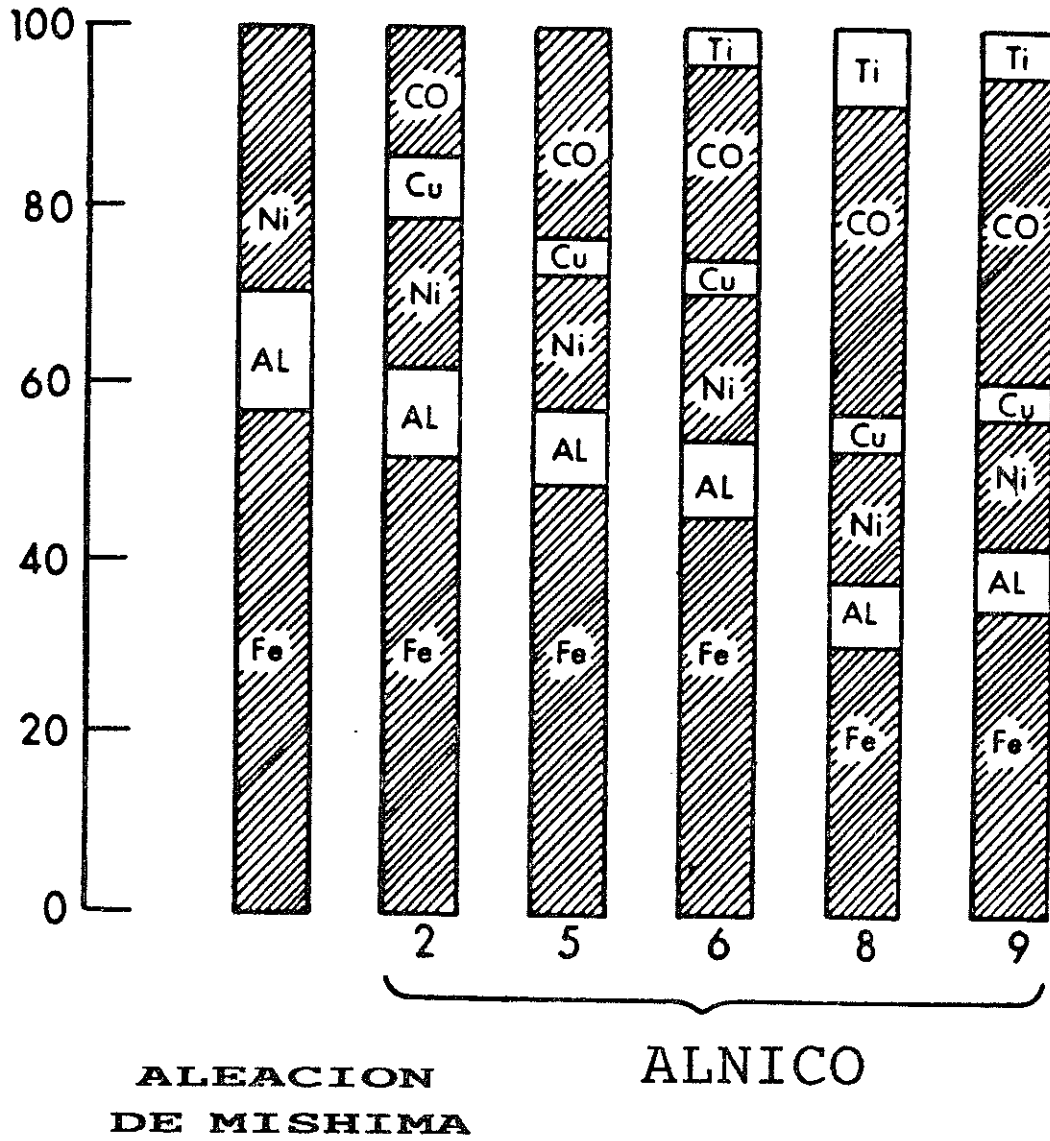


Figura 2.4. Desarrollo de la aleación Alnico

Se obtuvo un incremento modesto en la coercitividad, pero, la remanencia se incrementó marcadamente. A el material resultante se le llamó Alnico 5 en USA, Ticonal en Europa y TK7 en Japón. Los Alnicos 6, 8 y 9 a diferencia de los otros Alnicos, se les agrega titanio a su composición química, para incrementar la coercitividad y disminuir la remanencia . En la tabla 2.2 se indican los valores de las remanencias y coercitividades de los Alnicos, también se indica el porcentaje de titanio agregado a los Alnicos 6, 8 y 9. De todas las series el más usado es el Alnico 5 debido a que ofrece una mayor densidad de flujo magnético.

Durante el enfriamiento de una solución sólida homogénea en un campo magnético, la aleación mostró tener una estructura bifásica, extremadamente fina. La solución es llamada α' ; si es rica en Ni y Co, esta es magnética fuerte y tiene un orden de $300 \times 300 \times 1200 \text{ \AA}^0$ (volumen de su celda unitaria). La solución es llamada α ; si es rica en Ni y Al, ésta es magnética fuerte. Ambas α y α' tienen estructuras cúbicas de cuerpo centrado, con muy poca diferencia en sus parámetros de látice.

Todos los Alnicos son duros y frágiles, demasiado frágiles para ser trabajados en frío, toda la producción es por fundición de aleaciones líquidas o por presión y sinterización de metal pulverizado [7]. La composición y propiedades magnéticas de fundir y sinterizar Alnico se indican en las Tablas 2.2 y 2.3, respectivamente.

2.2.2 Ferritas de bario

Esta sustancia tiene la fórmula $\text{BaO} \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$, un cristal de estructura hexagonal, con una moderada anisotropía de cristal. La ferrita de bario fue desarrollada en materiales de magnetos

TABLA 2.2 PROPIEDADES DE MATERIALES PARA MAGNETOS PERMANENTES [8] DE ALEACION ALNICO (FUNDICION)

MATERIAL	ESTADO	COMPOSICION (PESO%)						REMANENCIA Br (T)	COERCITIVIDAD H _{ci} (KA/m)	ENERGIA (BH) _{max} (KJ)
		Al	Ni	Co	Cu	Ti	Fe			
alnico 1	isotrópico	12	23	5	-	-	60	0.66	43.00	11.14
alnico 2	isotrópico	10	18	13	3	-	63	0.70	51.73	13.53
alnico 3	isotrópico	12	26	-	-	-	59	0.64	44.56	11.14
alnico 4	isotrópico	12	28	5	3	-	55	0.55	58.00	11.14
alnico 5	anisotrópico	8	15	24	3	-	50	1.20	57.30	39.80
alnico 5DG	anisotrópico	8	15	24	3	-	50	1.31	55.70	51.73
alnico 5-7	anisotrópico	8	14	24	3	-	51	1.34	58.90	59.68
alnico 6	anisotrópico	8	17	23	3	4	45	0.75	77.60	22.28
alnico 8	anisotrópico	8	14	38	3	8	29	0.71	159.15	43.77
alnico 9	anisotrópico	7	15	34	4	5	34	1.04	127.32	67.64

TABLA 2.3 PROPIEDADES DE MATERIALES PARA MAGNETOS [8] PERMANENTES DE ALEACION ALNICO (SINTERIZACION)

MATERIAL	ESTADO	COMPOSICION (PESO%)						REMANENCIA Br (T)	COERCITIVIDAD H _{ci} (KA/m)	ENERGIA (BH) _{max} (KJ)
		Al	Ni	Co	Cu	Ti	Fe			
alnico 2	isotrópico	10	17	13	6	-	54	0.72	43.77	11.95
alnico 4	isotrópico	12	28	5	-	-	55	0.55	58.00	10.35
alnico 5	anisotrópico	8	14	24	3	1	50	1.05	47.75	30.24

TABLA 2.4 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES FERRITAS [8] DE MAGNETOS PERMANENTES

MATERIAL	ESTADO	COMPOSICION	REMANENCIA Br (T)	COERCITIVIDAD H _{ci} (KA/m)		ENERGIA (BH) _{max} (KJ)
				H _{ci} (KA/m)	H _{ci} (KA/m)	
Cerámica 1	isotrópico	BaO.6Fe2O3	0.2250	147.22	318.31	9.55
Cerámica 5	anisotrópico	BaO.6Fe2O3	0.3950	191.00	196.56	27.85
cerámica 6	anisotrópico	BaO.6Fe2O3	0.3600	230.77	246.69	24.67
cerámica 7	anisotrópico	SrO.6Fe2O3	0.3425	265.00	326.27	23.00

comerciales en 1,952, en Holanda, por la compañía Philips, a este material se le llamó Ferroxdure. Otros nombres son Indox, Ferrimag, etc. En años recientes éste ha sido remplazado en algunas extensiones por ferrita de estroncio, la cual tiene la fórmula $\text{Sr} \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$ y propiedades casi idénticas (Tabla 2.4 Página anterior). Comparado con el Alnico, las ferritas de bario tienen menos remanencia y más coercitividad.

2.2.3 Tierra-rara

Este material está compuesto de R (metal de tierra-rara) y M (un metal de transición tal como el manganeso, hierro, cobalto, ó níquel). Los componentes de RCO_5 son magneticamente los más atractivos y de estos, el componente Samario combinado con Co, es decir, el SmCo_5 , corrientemente, parece ofrecer las mejores características tal como un metal de magneto permanente práctico.

El interés extenso en los componentes de RCo data desde 1,966 [9], cuando se reportó que sus fuerza coercitivas eran muy grandes.

Aunque muchos de los componentes de RCo son atractivos como materiales magnéticos, la mayoría del trabajo desarrollado se ha concentrado en el SmCo_5 , porque ha dado, consistentemente, resultados mejores que otros de componentes totalmente similares. Todos los componentes del RCo tienen estructura Hexagonal. En la Figura 2.5 se muestra una comparación entre cuatro de los materiales para magnetos más importantes.

2.3 Anisotropía en materiales de magnetos permanentes.

Brevemente, se introducirá la anisotropía, porque en todo el capítulo 4 se aplica un comprensivo y detallado acercamiento.

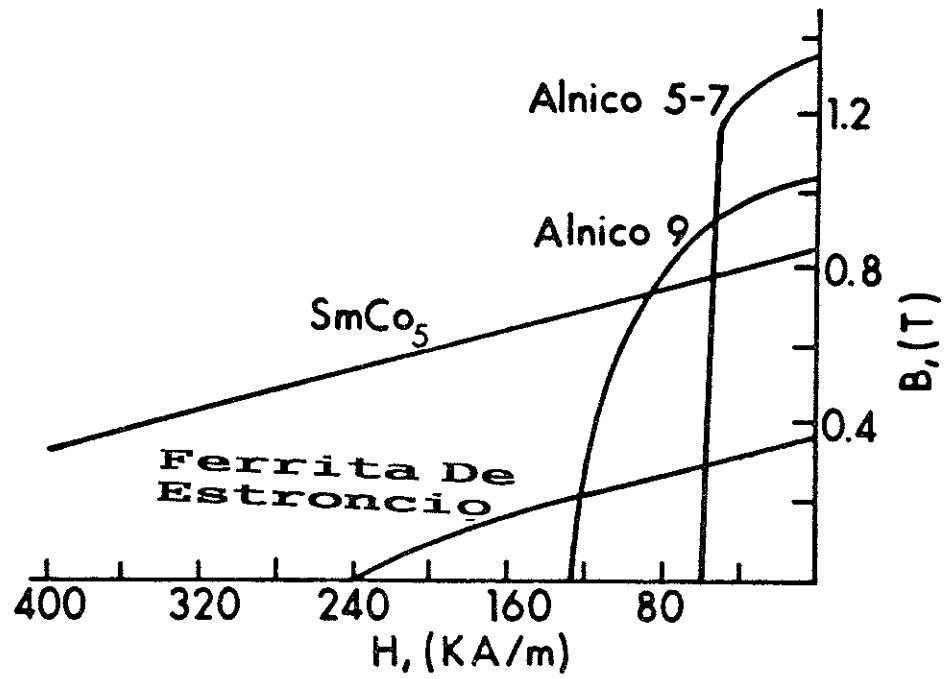


Figura 2.5. Curvas de desmagnetización de de los cuatro materiales para magnetos más importantes

La introducción de no homogeneidad estructural dentro de un material magnético impide dominar movimiento de contorno. Los primeros magnetos permanentes, tal como el acero duro templado, deriva sus propiedades de una inclusión no magnética la cual sirve a este propósito.

Un efectivo intento de impedir movimiento de contorno es preparar partículas suficientemente pequeñas con diámetro menor que 10^{-6} y 10^{-7} m. Tales partículas serán muy pequeñas para contener un contorno y tenderán a ser un dominio simple. La magnetización puede entonces tomar lugar sólo por la rotación del momento magnético, un proceso más difícil que movimiento simple de dominio-contorno. Mientras más grandes sean las fuerzas que resisten la rotación del dominio, más grandes serán las fuerzas coercitivas, H_{cj} , del material.

Estas fuerzas resistivas se llaman fuerzas anisotrópicas y pueden ser aplicadas por uno de los siguientes mecanismos o una combinación de ambos.

1. Anisotropía de forma, debido a una dirección preferida de magnetización a lo largo de la longitud de una partícula de dominio simple.
2. Anisotropía de cristal, debido a un plano cristalográfico preferido de magnetización fácil.

Todos los materiales modernos con fuerzas coercitivas grandes tales como los Alnicos, Ferritas y tierras raras derivan sus propiedades magnéticas de partículas magnéticas finas cuya fuerza coercitiva se desarrolla por uno o ambos de los mecanismos mencionados anteriormente.

2.4 Operación de magnetos permanentes

Después que un magneto es fabricado, un campo de saturación, H_s , se le aplica y se remueve, causando que B , siga el camino que se muestra en la Figura 2.6. El punto de operación, P , del magneto se determina por la interacción de la línea de carga, OC , con el segundo cuadrante de la curva de desmagnetización. El coeficiente de permeancia del circuito magnético, PC , determina la inclinación de la línea de carga.

$$PC = \frac{B_m}{H_m} \quad (2.1)$$

Usando la ecuación (1.10) y (1.14) da,

$$\begin{aligned} \frac{B_m}{H_m} &= \frac{K_2 B_g A_g}{A_m} * \frac{\ell_m}{-K_1 H_g \ell_g} \\ &= - \frac{K_2 B_g \ell_m A_g}{K_1 H_g \ell_g A_m} \\ &= -\mu_0 \frac{K_2 \ell_m A_g}{K_1 \ell_g A_m} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Asumiendo

$$A_g = A_m$$

entonces:

$$\frac{B_m}{H_m} = -\mu_0 \frac{\ell_m}{\ell_g} = \text{constante.} \quad (2.3)$$

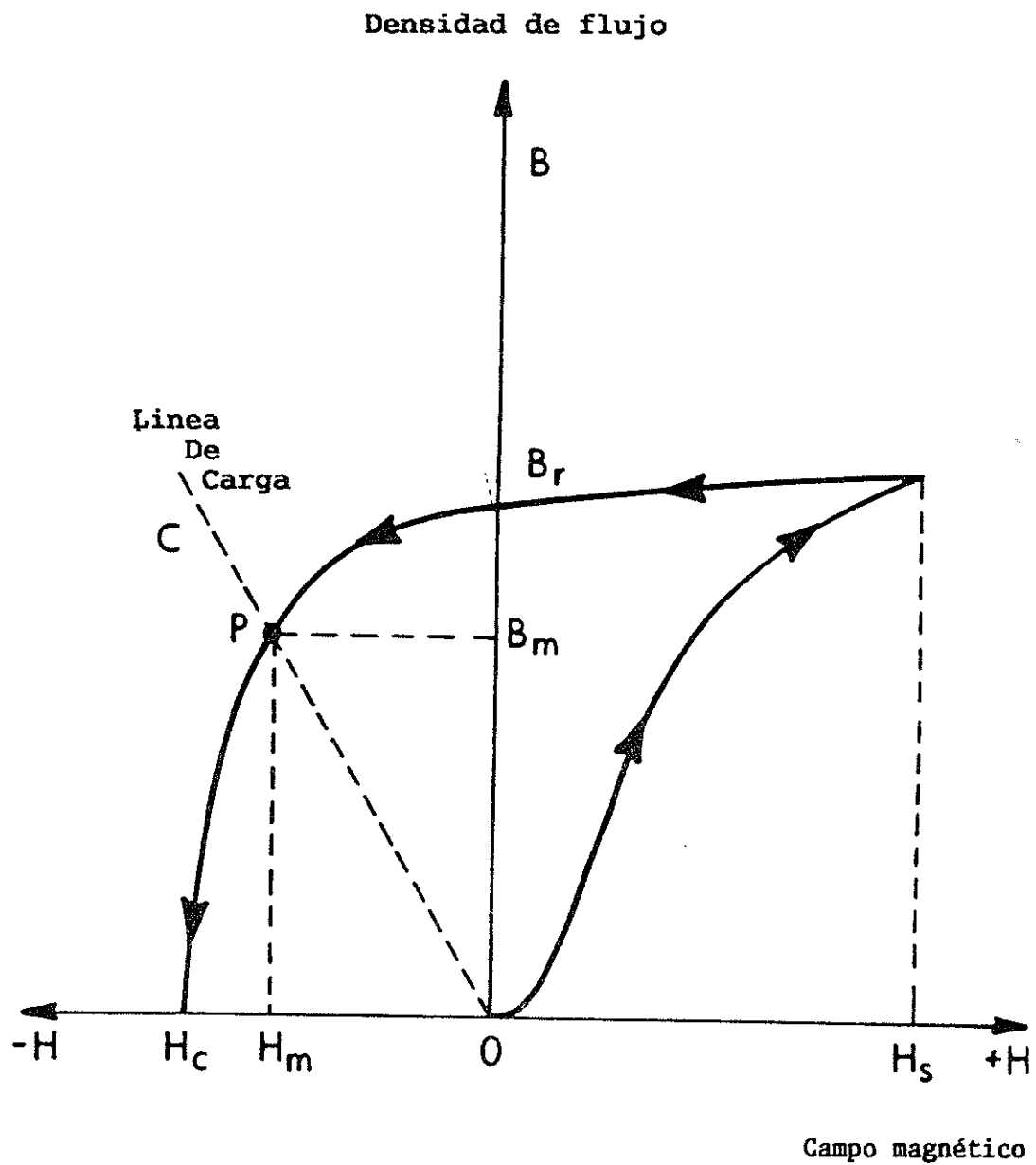


Figura 2.6. Punto de operación de un magneto permanente

La ecuación para el campo en un magneto permanente es

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{J} \quad (2.4)$$

en la cual la magnetización intrínseca, \underline{J} , es una función del campo y la relación entre \underline{B} y \underline{H} se representa, simplemente, en la forma de las curvas. La inclinación de la curva de desmagnetización está dada por

$$\frac{d\underline{B}}{d\underline{H}} = \mu_0 + \frac{d\underline{J}}{d\underline{H}} \quad (2.5)$$

Si \underline{J} es uniforme,

$$\frac{d\underline{J}}{d\underline{H}} = 0 \quad (2.6)$$

y la ecuación (2.5) viene a ser

$$\frac{d\underline{B}}{d\underline{H}} = \mu_0 \quad (2.7)$$

Sin embargo, en el Alnico se puede ver de la Figura 2.5 que

$$\frac{d\underline{B}}{d\underline{H}} \neq \text{constante},$$

y así

$$\frac{d\underline{J}}{d\underline{H}} \neq 0.$$

Esto significa que, en los cálculos de la distribución de los campos, debido a los magnetos anisotrópicos permanentes, se podría asumir una magnetización uniforme solamente para materiales de ferrita y tierra rara (Figura 2.5). Sin embargo, con el Alnico, primero, se debe encontrar la distribución no uniforme de \underline{J} a través de todo el magneto, la cual dependerá de la topología del circuito magnético completo. Esto requiere una relación local entre la magnetización intrínseca, \underline{J} , y el campo magnético, \underline{H} , a través de las características del material. Se deben considerar: la desmagnetización y la rotación de, \underline{J} , ambas debido a la autodesmagnetización del campo, \underline{H} , siendo dirigida, generalmente, dentro del magneto y, probablemente, teniendo una componente transversal.

Tradicionalmente, la rotación de la magnetización intrínseca, \underline{J} , aparte de la dirección preferida, a , debido a un campo magnético, \underline{H} , es estudiada por un magnetómetro (Figura 2.7). Un disco delgado de un material magnético particular es suspendido de su centro por un alambre de torsión, de manera que el plano del disco éste horizontal y paralelo al campo fuerte aplicado, \underline{H} , por un electroimán. Si la parte final superior del alambre de torsión gira, según las manecillas del reloj, el eje, a , rotara un ángulo θ_0 respecto de la dirección del campo, tal como se muestra. Si el campo es suficientemente grande para saturar el cristal, entonces, \underline{J} , está paralela a, \underline{H} , y el ángulo entre el eje, a , y, \underline{J} , será también θ_0 .

Se hicieron pruebas con el Alnico 5-7, las cuales consistieron en saturar el material a un ángulo θ_0 respecto de la dirección preferida, a . La magnetización intrínseca, \underline{J} , estuvo relacionada a sus valores J_x en la dirección a , y J_t , en la dirección transversal (Figura 2.8) por la empírica expresión [10].

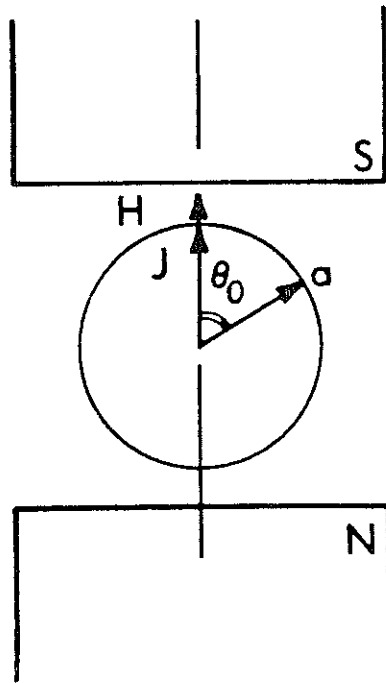


Figura 2.7. Sección horizontal a través de un espécimen de disco en el campo de un electroimán

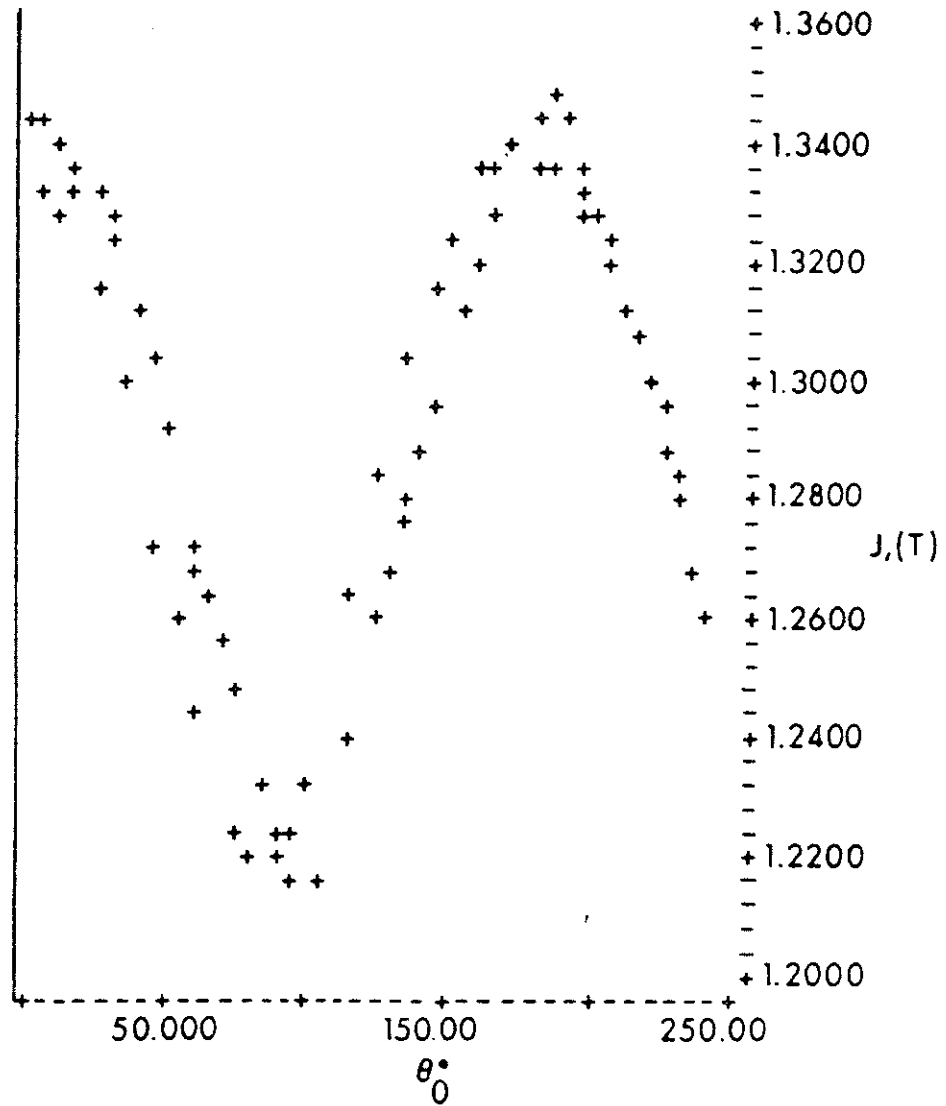


Figura 2.8. Variación de \underline{J} vs. θ_0 en un disco de Alnico 5-7 con un campo de saturación de 211 KA/m

$$2J = (J_x + J_t) + (J_x - J_t)\cos 2\theta_0 \quad (3.8)$$

donde:

$$J_x = 1.344 \quad (\text{T})$$

$$J_t = 1.216 \quad (\text{T})$$

con

$$H_s = 211 \quad (\text{kA/m})$$

Este campo de saturación, H_s , se requiere para alinear \underline{J} y \underline{H} para para estas pruebas.

Para usar el método en modelos de cualquier material magnético requeriría tales resultados para un amplio rango de \underline{H} . Es tedioso y no es práctico. Además, no representa la condición típica de carga del magneto a ser modelado. El método práctico para modelar un magneto, permanente, generalmente involucra mediciones de las características B-H.

2.5 Curvas B-H

Las características magnéticas de diferentes materiales magnéticos varían grandemente. Una forma útil de presentar información acerca del comportamiento magnético es midiendo las curvas B-H. Sin embargo, para materiales de magnetos permanentes, es suficiente usar el segundo cuadrante del lazo de histéresis. Este segundo cuadrante es llamado curva de desmagnetización del material. Para usar las curvas B-H como una herramienta de modelo, se muestra una equivalencia entre los resultados del magnetómetro y los resultados tomados de las curvas B-H.

Para mostrar esta equivalencia, cubos pequeños de 1cm del mismo Alnico 5-7 examinado en el magnetómetro, eran cortados en 10° de incremento desde la dirección preferida a la transversal (Figura 2.9). Estos fueron medidos en un permeámetro. Las curvas características, B-H, y J-H, de estos cubos fueron ploteadas, y se muestran en la Figura 2.10 del anexo 1.

A la misma saturación de campo, 211 kA/m, aplicado en el magnetómetro, fueron ploteados valores de la magnetización intrínseca, J, tomados de las curvas B-H a diferentes ángulos (Figura 2.11 de el anexo 1). También, fueron ploteados los valores de la magnetización intrínseca, J_r , a un campo cero aplicado (Figura 2.12 de el anexo 1).

Es claro que la variación de $\cos 2\theta_0$ existe y, en consecuencia, hay una equivalencia como se esperaba entre los resultados del magnetómetro y los resultados de la curva B-H, para los dos valores extremos de los campos aplicados, H.

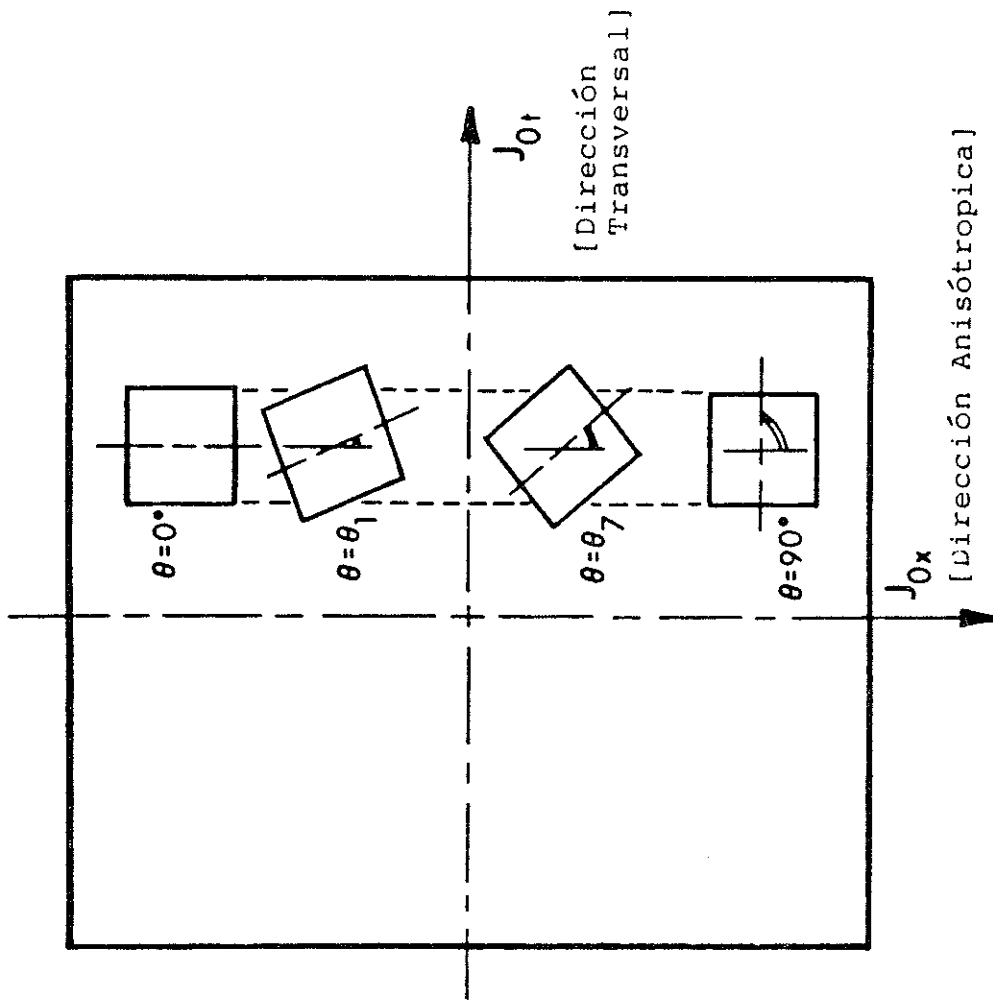


Figura 2.9. Ejemplos de cubos cortados con un incremento de 10° del material magnético Alnico 5-7

CAPÍTULO 3

ANISOTROPÍA MAGNÉTICA

Las características de magnetización de un magneto permanente de Alnico anisotrópico han sido medidas en 10 grados de incremento del eje de referencia al eje transversal como se muestra en la Figura 2.10 (anexo 1), pero los resultados no representan la condición típica de operación de un magneto como se verá en el capítulo siguiente. Aunque la magnetización varía en magnitud y dirección en todo el volumen del magneto de Alnico, la rotación de la magnetización se gobierna con la ecuación derivada

$$\frac{J_s H}{K_f} \left[\frac{\sin(\theta_0 - \theta)}{\sin 2\theta} \right] - \frac{K_1}{K_f} \cos 2\theta = 1.$$

La magnetización intrínseca, J_s , rota un ángulo θ , debido a un campo aplicado, H , a un ángulo θ_0 , K_1 y K_f son constantes del material. Las características del material en la dirección x junto con las características en la dirección transversal derivada de la ecuación de arriba, están incorporadas en un método rápido para modelar estos magnetos.

En este capítulo se analizará la influencia de la anisotropía magnética sobre la magnetización espontánea, se deducirá la ecuación anterior y se determinarán los valores de las constantes K_1 y K_f con la ayuda de los circuitos de histéresis por anisotropía de forma y de cristal.

3.1 Anisotropía de forma

Para comprender el comportamiento de los magnetos se debe analizar de forma, cuantitativa, la influencia de la anisotropía magnética sobre las características de los magnetos. Se puede producir anisotropía magnética aplicando tensión mecánica al material, también por trato térmico del material en un campo magnético. A esta se le llama anisotropía magnética inducida. En este análisis, de aquí en adelante, se considerará solamente la anisotropía de forma y la anisotropía de cristal, de estas sólo la anisotropía de cristal es intrínseca al material. Estrictamente, entonces, todas las demás son extrínsecas o inducidas.

La anisotropía de forma es una propiedad inducida asociada con la forma y tamaño de las partículas. Cualquier cuerpo magnético que tenga forma elongada posee anisotropía debido a que, si rota libre, éste alinea su longitud más grande, paralelo a un campo externo, H . Aún más, significativamente, un campo magnético más grande, H , se requiere para magnetizar este cuerpo magnético para saturación, paralelo a una dimensión corta antes que a una larga.

Dejando que las partículas tengan la forma de un elipsoide de revolución, se incluyen todas las formas de interés físico, rodo (esferoide elongado), esfera y disco (esferoide achatado). Tal elipsoide (Figura 3.1) tiene factores de desmagnetización propia, N_a , paralelo a su eje mayor, a , y N_b paralelo a cualquier eje menor, b . Es decir, hay una fuerza autodesmagnetizante, $N_a M_s$, cuando la saturación de magnetización, del elipsoide, M_s , está dirigida junto con su eje mayor, a , y $N_b M_s$ cuando ésta se dirige junto con su eje menor b .

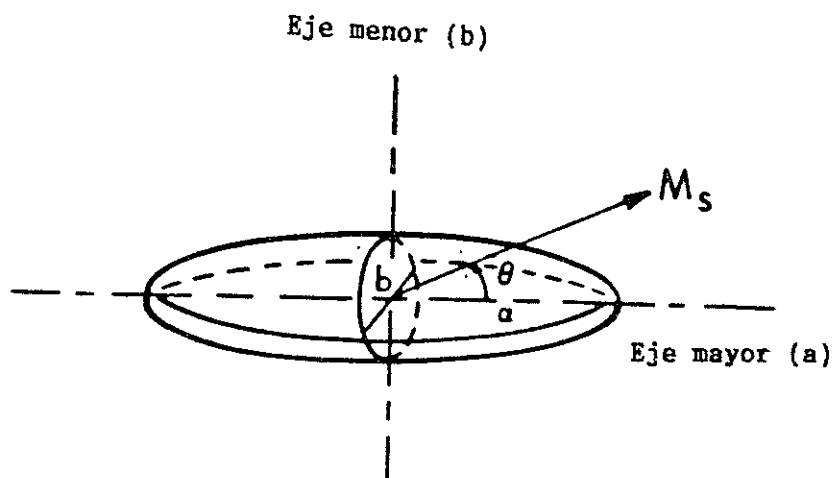


Figura 3.1. Elipsoide de revolución

Para tratar de forma cuantitativa la energía anisotrópica que se está considerando (energía anisotrópica de forma) se necesita una expresión para la energía magnetostática E_{ms} de un cuerpo magnetizado. Si un cuerpo es magnetizado por un campo aplicado, \underline{H} , hasta la saturación, \underline{M}_s , y \underline{H} se remueve, entonces, la energía magnetostática por valor unitario es

$$E_{ms} = \frac{1}{2} \mu_0 N d M_s^2 \quad (3.1)$$

donde

Nd = factor de desmagnetización propia ≤ 1 .

Para el elipsoide de la Figura 3.2, dejando la magnetización, \underline{M}_s , estar a un ángulo, θ , del eje mayor, a . Entonces tomando componentes de magnetización, \underline{M}_s , paralela y en ángulo recto con a , se tiene:

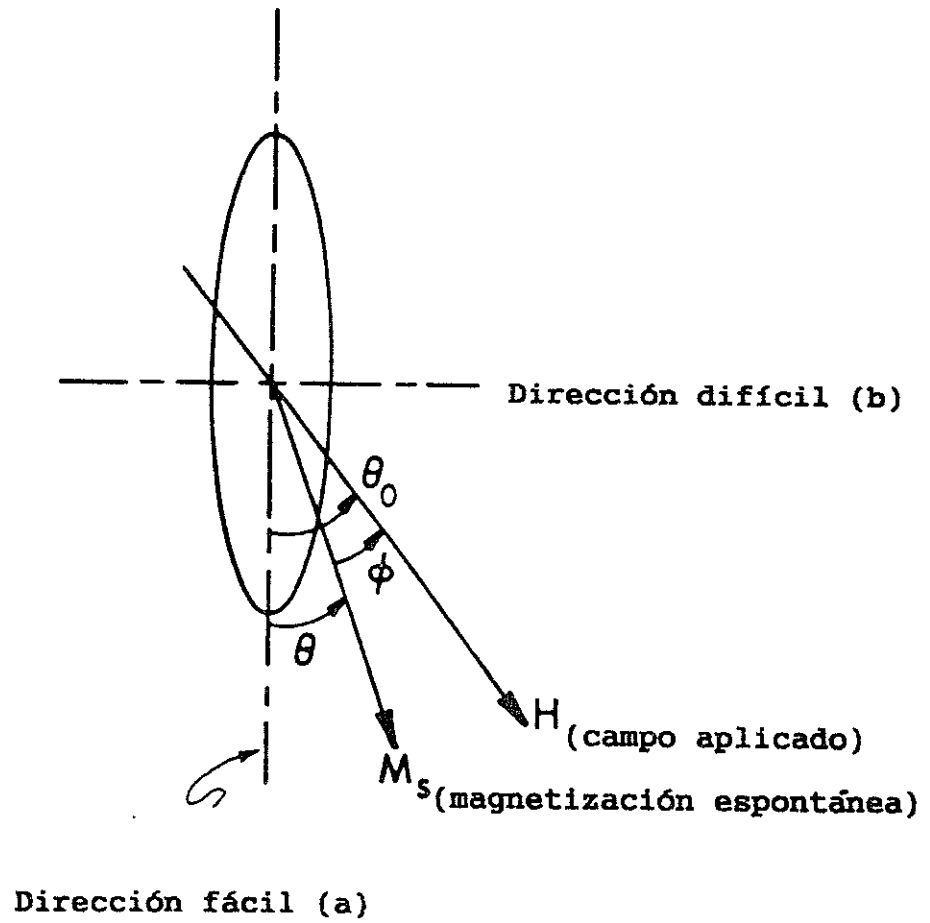


Figura 3.2. Rotación de la magnetización en un elipsoide

$$E_{ms} = \frac{1}{2} \mu_0 [(M_s \cos \theta)^2 Na + (M_s \sin \theta)^2 Nb] \quad (3.2)$$

usando la identidad

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.2) y reordenando se obtiene:

$$E_{ms} = \frac{1}{2} \mu_0 Na M_s^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (Nb - Na) M_s^2 \sin^2 \theta \quad (3.4)$$

Esta expresión, para la energía magnetostática, tiene términos dependientes de un ángulo. Usando la identidad

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad (3.5)$$

y sustituyendo la ecuación (3.5) en la (3.4) se obtiene

$$\begin{aligned} E_{ms} &= \frac{1}{2} \mu_0 Na M_s^2 + \frac{1}{4} \mu_0 M_s^2 (Nb - Na) (1 - \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 Na M_s^2 + \frac{1}{4} \mu_0 M_s^2 (Nb - Nb \cos 2\theta - Na + Na \cos 2\theta) \end{aligned}$$

$$E_{ms} = \frac{1}{4} \mu_0 M_s^2 [(Na + Nb) - (Nb - Na) \cos 2\theta]. \quad (3.6)$$

Ademas, la energía potencial, E_p , por unidad de volumen, de un magneto en un campo aplicado, \underline{H} , está dada por [11]

$$E_p = -\mu_0 \underline{H} M_s \cos \theta \quad (4.7)$$

donde \varnothing es el ángulo entre la magnetización espontánea, \underline{M}_s , y el campo aplicado, \underline{H} (Figura 3.2). Por consiguiente, considerando solamente la energía anisotrópica de forma, la energía total interna de un cuerpo magnetizado por unidad de volumen, E_t , es

$$E_t = E_{as} + E_p. \quad (3.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.6) y (3.7) en la ecuación (3.8) da,

$$E_t = (1/4)\mu_0 M_s^2 [(Na+Nb) - (Nb-Na)\cos 2\theta] - \mu_0 H M_s \cos \varnothing. \quad (3.9)$$

3.1.1 Circuito de histéresis por anisotropía de forma

La ecuación (3.9) enuncia que \underline{M}_s está girando a través de θ hasta que alcanza el equilibrio. La posición de equilibrio ocurre cuando

$$\frac{\partial E_t}{\partial \theta} = 0 \quad (3.10)$$

Dejando que θ_0 sea el ángulo que el campo aplicado, \underline{H} , hace con la dirección preferida, a (Figura 3.2) entonces

$$\theta_0 = \theta + \varnothing \quad (3.11)$$

Sustituyendo el valor de \varnothing , de la ecuación (3.11) en la ecuación (3.9) se tiene

$$E_t = (1/4)\mu_0 M_s [(Na+Nb) - (Nb-Na)\cos 2\theta] - \mu_0 H M_s \sin(\theta_0 - \theta). \quad (3.12)$$

Y

$$\frac{\partial E_t}{\partial \theta} = (1/2) \mu_0 M_s^2 (Nb-Na) \sin 2\theta - \mu_0 H M_s \sin(\theta_0 - \theta). \quad (3.13)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.10) se obtiene

$$0 = (1/2)\mu_0 M_s^2 (Nb-Na) \sin 2\theta - \mu_0 H M_s \sin(\theta_0 - \theta).$$

Por lo tanto,

$$H = \frac{(Nb-Na)M_s \sin 2\theta}{2 \sin \theta}. \quad (3.14)$$

Para encontrar la coercitividad se puede aplicar

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.15)$$

Diferenciando de nuevo la ecuación (3.13) respecto de θ y sustituyendo en la ecuación (3.15), teniendo en mente que en el punto donde la magnetización cambia de dirección, θ y θ_0 , vienen a ser θ_c y θ_{0c} respectivamente, por lo que,

$$0 = \mu_0 M_s^2 (Nb-Na) \cos 2\theta_c + \mu_0 H_c M_s \cos(\theta_{0c} - \theta_c)$$

Y,

$$H_c = - \frac{(N_b - N_a) M_s \cos 2\theta_c}{\cos \theta_c} . \quad (3.16)$$

Para ángulos pequeños

$$H_c = -(N_b - N_a) M_s$$

el cual es el campo para invertir el vector de magnetización M_s , por ejemplo, la coercitividad debido a la anisotropía de forma, H_{ci_f} , por consiguiente,

$$H_{ci_f} = (N_b - N_a) M_s . \quad (3.17)$$

Aunque existe anisotropía de forma en un cuerpo de cualquier tamaño, una forma simétrica tal como una esfera, no muestra anisotropía de forma porque $N_b = N_a$. Un material consistente de partículas finas, como el Alnico 5-7, puede tener anisotropía según la forma de dichas partículas. Si las partículas son lo suficientemente pequeñas para ser elongadas como partículas de dominio simple, éstas pueden tener coercitividades grandes, H_{ci_f} , como resultado de su tamaño y forma, y cualquier otra forma de anisotropía. Para coercitividad grande, también es preferible que los muros de dominio no existan. Sustituyendo el valor de la ecuación (3.17) en (3.14) da

$$H = \frac{H_{ci_f} \sin 2\theta}{2 \sin \theta} .$$

Sustituyendo el valor de θ [ecuación(3.11)] arriba, da

$$H = \frac{Hci_f \text{sen}2(\theta_0 - \phi)}{2\text{sen}\phi} \quad (3.18)$$

Normalizando la ecuación (3.18) se obtiene

$$h = \frac{H}{Hci_f} = \frac{\text{sen}2(\theta_0 - \phi)}{2\text{sen}\phi} \quad (3.19)$$

La componente de la magnetización, M_s , en la dirección del campo aplicado, H , es (Figura 3.3)

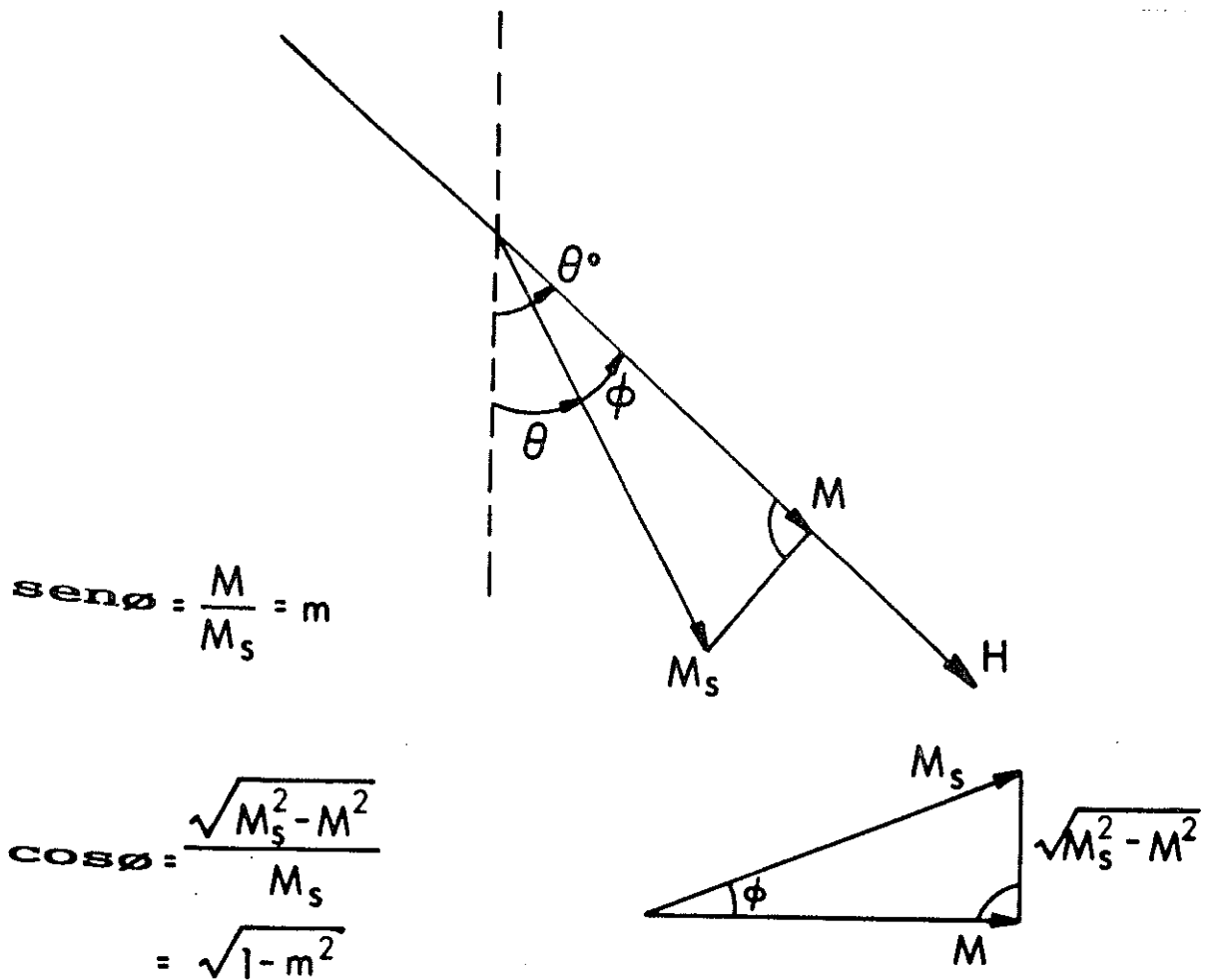


Figura 3.3. Relación entre M , M_s y ϕ

$$M = M_s \cos\theta. \quad (3.20)$$

Normalizando la ecuación (3.20), se obtiene

$$m = \frac{M}{M_s} = \cos\theta \quad (3.21)$$

Usando la ecuación (3.3) o Figura 3.3

$$\text{sen}\theta = \sqrt{1-m^2} \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.21) y (3.22) en (3.19), da

$$h = \frac{\text{sen}2(\theta_0 - \cos^{-1}m)}{2\sqrt{1-m^2}} \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) relaciona el campo normalizado, h , con la magnetización normalizada, m , si la anisotropía magnética considerada es sólo anisotropía de forma. Esta ecuación da \underline{H} como una función de \underline{M} : sin embargo, en realidad, \underline{M} es una función de \underline{H} . La magnetización residual, M_r , ocurre cuando el campo aplicado, \underline{H} , es cero.

Sustituyendo $H = 0$ en la ecuación (4.23) da,

$$0 = \frac{\text{sen}2(\theta_0 - \cos^{-1} m_r)}{2\sqrt{1-m_r^2}}$$

$$\theta_0 = \cos^{-1} m_r$$

$$m_r = \cos\theta_0 \quad (4.24)$$

$$M_r = M_s \cos\theta_0 \quad (3.25)$$

como se esperaba y como se muestra en la Figura 3.3.

Para encontrar H_c para ángulos grandes, se puede usar la ecuación (3.14), la cual da el valor de H para cualquier ángulo. En el punto donde cambia de dirección la magnetización, ϕ y θ son ϕ_c y θ_c respectivamente, por lo que la ecuación (3.14) viene a ser

$$H_c = \frac{(N_b - N_a)M_s \sin 2\theta_c}{2 \sin \phi_c} \quad (3.26)$$

resolviendo las ecuaciones (3.26) y (3.16) para θ_c se obtiene

$$\frac{\sin 2\theta_c}{2 \sin \phi_c} = - \frac{\cos 2\theta_c}{\cos \phi_c}$$

por lo tanto:

$$\tan 2\theta_c = -2 \tan \phi_c \quad (4.27)$$

escribiendo la ecuación (3.11) como

$$\theta_0 = \theta_c + \phi_c \quad (3.28)$$

Sustituyendo la ecuación (3.28) en (3.27) [Apéndice A] se obtiene

$$\tan^3 \theta_c = -\tan \theta_0. \quad (3.29)$$

Reescribiendo la ecuación (3.3) como $\sin^2 \phi_c + \cos^2 \phi_c = 1$ y sustituyendo los valores de $\sin \phi_c$ y $\cos \phi_c$ de las ecuaciones (3.19) y (3.16) respectivamente [Apéndice B], se obtiene:

$$h_c^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta_c. \quad (3.30)$$

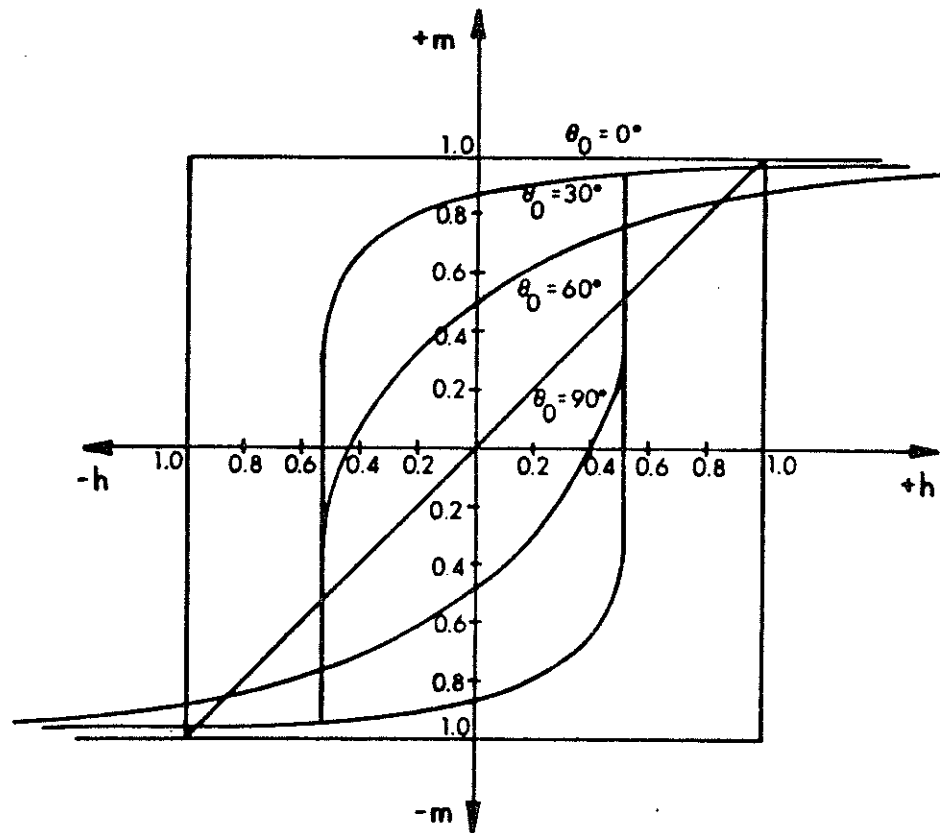


Figura 3.4 Circuito de histéresis por anisotropía de forma

3.2 Anisotropía De Cristal

La interacción entre los electrones, tiende a alinear la magnetización espontánea, \underline{M}_s , junto con ciertas direcciones preferidas en un cristal. Este fenómeno es llamado anisotropía de cristal o anisotropía magnetocristalina.

Para entender el comportamiento de los magnetos permanentes se puede progresar considerablemente escribiendo ecuaciones empíricas para la variación de la energía anisotrópica con el ángulo. Estas ecuaciones se escogen para arreglar las condiciones simétricas del cristal.

La energía anisotrópica del cristal, E_c , puede expresarse en términos de una serie de expansión de la dirección de los cosenos de \underline{M}_s , relativa a los ejes del cristal. En un cristal cúbico, como Alnico 5-7 dejando que la magnetización espontánea, M_s , tenga ángulos a , b y c , con los ejes del cristal, y a_1 , a_2 y a_3 , sean los cosenos de estos ángulos entonces. Entonces

$$E_c = K_0 + K_1(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) + K_2(a_1^2 a_2^2 a_3^2) + \dots \quad (3.31)$$

donde, K_0 , K_1 , K_2, \dots son constantes para un material particular, y están expresadas en J/m^3 . potencias más grandes generalmente no son necesarias y algunas veces K_2 es muy pequeña que puede despreciarse.

Considerando, por ejemplo, un disco cortado paralelamente al plano (001) de un cristal cúbico, en el cual $\langle 100 \rangle$ es la dirección fácil. Este disco tendrá anisotropía biaxial, porque tiene dos direcciones fáciles en su propio plano. La Figura 3.5 muestra la orientación después de que el eje $[100]$ ha sido rotado por un ángulo θ distante de \underline{M}_s por un campo, \underline{H} , el cual se asume que es muy fuerte. Los cosenos de \underline{M}_s son entonces

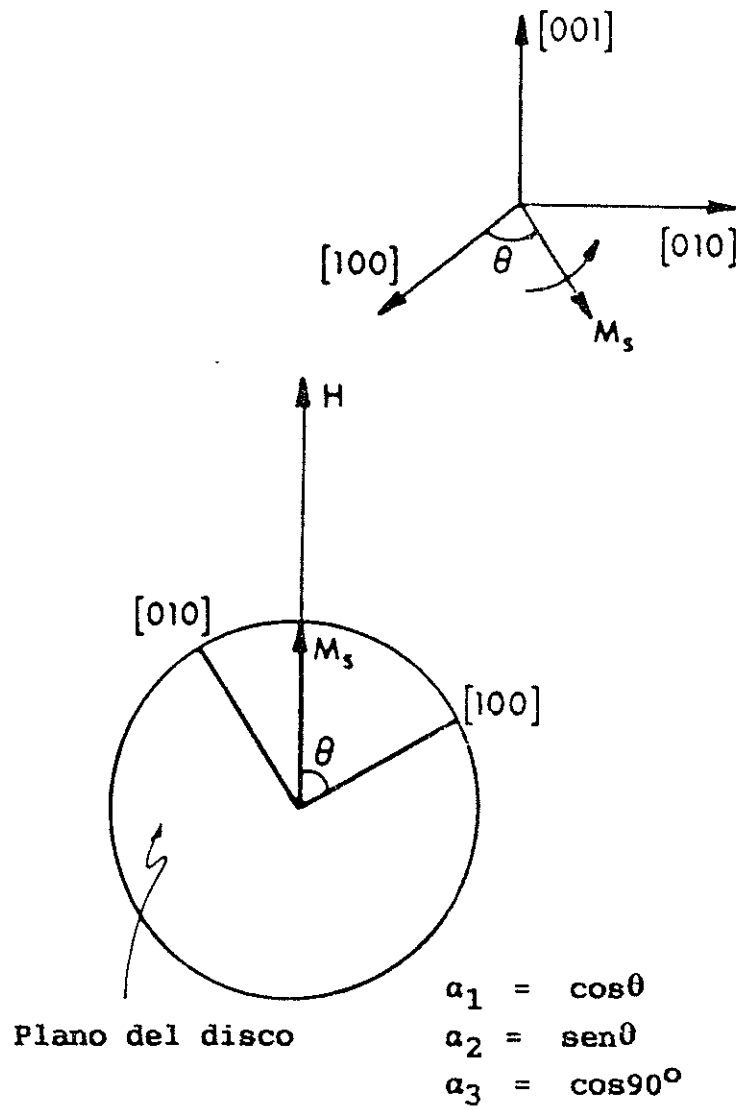


Figura 3.5. La orientación del eje [100] después que ha sido rotado un ángulo θ distante de M_s por un campo aplicado H

$$a_1 = \cos\theta$$

$$a_2 = \cos(90-\theta) = \text{sen}\theta$$

$$a_3 = \cos 90 = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E_c &= K_0 + K_1 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta \\ &= K_0 + \frac{K_1}{4} \text{sen}^2 2\theta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La energía total, E_t , es la energía anisotrópica de cristal E_c [ecuación (3.32)], más la energía potencial, E_p [ecuación (3.7)].

Por lo tanto

$$E_t = E_c + E_p. \quad (3.33)$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$E_t = K_0 + \frac{K_1}{4} \text{sen}^2 2\theta - \mu H M_s \cos\theta. \quad (3.34)$$

3.2.1 Circuito de histéresis por anisotropía de cristal

Llevando a cabo el mismo procedimiento, en cuanto a la anisotropía de forma, la posición de equilibrio de M_s se encuentra derivando $\partial E_t / \partial \theta = 0$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \theta} = \frac{K_1}{2} 2\text{sen}2\theta\text{cos}2\theta - \mu_0 H M_s \text{sen}(\theta_0 - \theta) = 0$$

Por lo que

$$H = \frac{K_1 \text{sen}4\theta}{2\mu_0 M_s \text{sen}(\theta_0 - \theta)} \quad (3.35)$$

y la magnetización, M_s , invertida se encuentra haciendo $\partial^2 E_t / \partial \theta^2 = 0$, teniendo en mente que en el punto donde la magnetización se invierte θ viene a ser θ_c

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial \theta^2} = 2K_1 \text{cos}4\theta_c + \mu_0 H M_s \text{cos}(\theta_0 - \theta_c) = 0$$

por lo tanto:

$$H_c = - \frac{2K_1 \text{cos}4\theta_c}{\mu_0 M_s \text{cos}\theta_c} \quad (3.36)$$

Para ángulos pequeños

$$H_c = - \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} .$$

H_c es el campo para invertir la magnetización, M_s , y es la coercitividad debido a la anisotropía de cristal, por lo que

$$H c i_c = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s} . \quad (3.37)$$

Sustituyendo la ecuación (3.37) en la (3.35) da

$$H = \frac{Hc_i \text{sen}4\theta}{4\text{sen}(\theta_0 - \theta)} \quad (3.38)$$

Sustituyendo para el valor de [ecuación(3.11)] y normalizando

$$h = \frac{H}{Hc_i} = \frac{\text{sen}4(\theta_0 - \theta)}{4\text{sen}\theta} \quad (3.39)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.21) y (3.22) para los valores de θ y $\text{sen}\theta$, respectivamente, se obtiene:

$$h = \frac{\text{sen}4(\theta_0 - \cos^{-1}m)}{4\sqrt{1-m^2}} \quad (3.40)$$

La ecuación (3.40) es una ecuación general que relaciona el campo normalizado, h , con la magnetización normalizada, m , si la anisotropía magnética considerada es sólo anisotropía de cristal. Esta ecuación da H como una función de M : sin embargo, en realidad, M es una función de H . La magnetización recidual, M_r , ocurre cuando el campo aplicado, H , es cero.

Sustituyendo $H = 0$ en la ecuación (3.40) se obtiene

$$0 = \frac{\text{sen}4(\theta_0 - \cos^{-1}m_r)}{4\sqrt{1-m_r^2}}$$

$$0 = \cos^{-1}m_r$$

$$m_r = \cos\theta_0 \quad (4.41)$$

$$M_r = M_s \cos\theta_0 \quad (4.42)$$

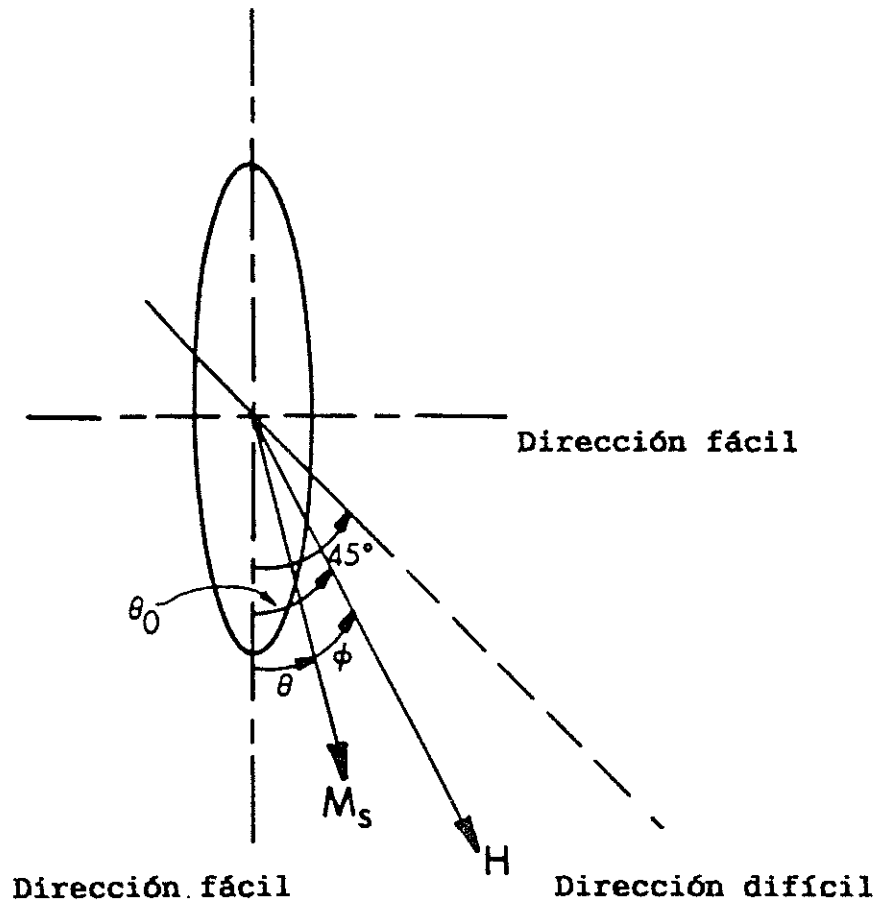


Figura 3.6. Rotación de la magnetización en un elipsoide debido a la anisotropía de cristal

como se esperaba y como se muestra en la Figura 3.6. (Página anterior)

En un cristal cúbico, sin embargo, hay dos direcciones fáciles, perpendiculares la una de la otra (Figura 3.6). Esto significa que la energía E_c de la anisotropía de cristal tiene un máximo en la bisectriz, la cual representa la dirección difícil (Figura 3.7).

Para encontrar H_c para ángulos más grandes, se usa la ecuación (3.38) la cual da los valores de H a cualquier ángulo. En el punto donde la magnetización cambia de dirección \varnothing y θ son \varnothing_c y θ_c respectivamente, por lo que la ecuación (3.38) se convierte en

$$H = \frac{Hci_c \text{sen}4\theta_c}{4\text{sen}\varnothing_c} \quad (3.43)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.43) y (3.36), se obtiene:

$$\frac{\text{sen}4\theta_c}{4\text{sen}\varnothing_c} = - \frac{\text{cos}4\theta_c}{\text{cos}\varnothing_c}$$

por lo tanto:

$$-4\tan(\theta_0 - \theta_c) = \tan4\theta_c. \quad (3.44)$$

Reescribiendo la ecuación (3.3) como $\text{sen}^2\varnothing + \text{cos}^2\varnothing = 1$ y sustituyendo los valores de $\text{sen}\varnothing_c$ y $\text{cos}\varnothing_c$ de las ecuaciones (3.39) y (3.36) respectivamente [Apéndice C] se obtiene:

$$h_c^2 = 1 - \frac{15}{16} \text{sen}^24\theta_c. \quad (3.45)$$

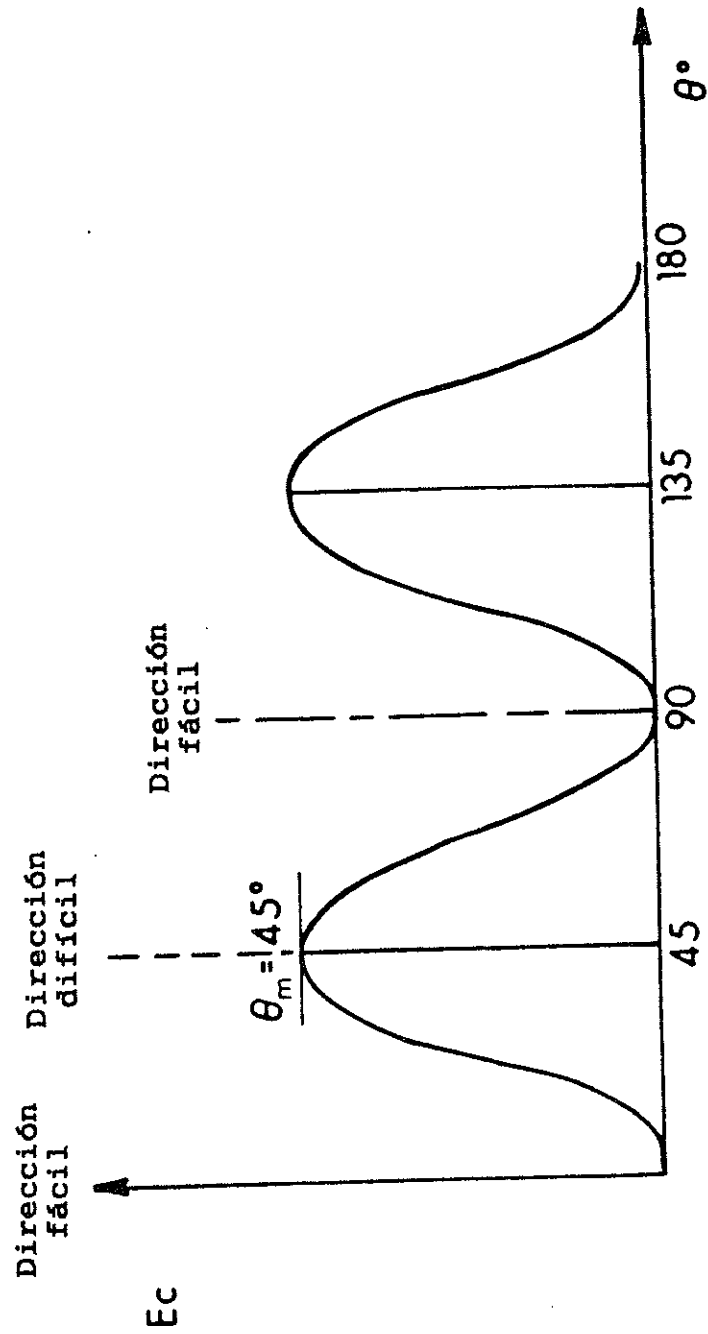


Figura 3.7. Variación de la energía anisotrópica de cristal

La ecuación (3.44) enuncia que para cada valor del campo aplicado a un ángulo, θ_0 , existe un valor crítico para el ángulo de magnetización θ , cuando el campo aplicado, H , invierte la magnetización, M_s . El valor de este campo crítico, H_c , se obtiene de la ecuación (3.45).

Para sacar el circuito de histéresis por una anisotropía de cristal, unicamente se necesitan las siguientes ecuaciones.

$$M_T = \cos\theta_0 \quad (3.41)$$

$$\tan 4\theta_c = -4\tan(\theta_0 - \theta_c) \quad (3.44)$$

$$h_c^2 = 1 - \frac{15}{16} \sin^2 4\theta_c \quad (3.45)$$

y

$$h = \frac{\sin 4(\theta_0 - \cos^{-1} m)}{4\sqrt{1-m^2}} \quad (3.40)$$

Asignando valores para el ángulo del campo aplicado, θ_0 , m_T y θ_c se pueden encontrar de las ecuaciones (3.41) y (3.44) respectivamente. Sustituyendo los valores de θ_c en la ecuación (3.45), se obtiene h_c . Empezando con el valor de m_T , e incrementandolo ($m \geq m_T$), se encuentran los valores de h . La Figura 3.8 muestra los valores mencionados si θ_0 es 0° , 30° y 45° .

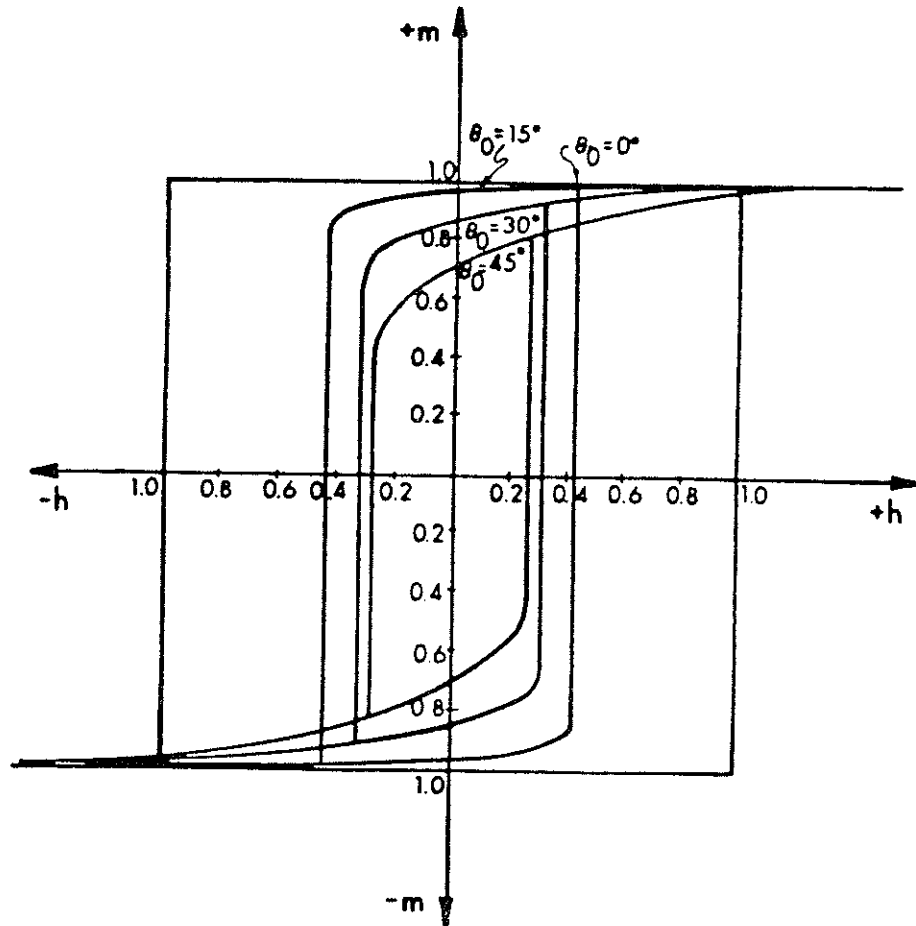


Figura 3.8 Circuito de histéresis por anisotropía de cristal

3.3 Anisotropía mixta

El cálculo de una clase de anisotropía, sugiere que se considere una situación física más real, una en la cual ambas anisotropías estén presentes. Aquí estamos interesados en el efecto combinado de las anisotropías, de diferente origen físico, siendo una anisotropía de forma y una anisotropía de cristal. Por consiguiente, la energía de anisotrópica de forma

$$E_f = \frac{1}{2} \mu_0 N a M_s^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (N b - N a) M_s^2 \sin^2 \theta \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 N a M_s^2 + K_f \sin^2 \theta \quad (3.46)$$

y la energía anisotrópica del cristal

$$H_c = K_0 + \frac{K_1}{4} \sin^2 2\theta \quad (3.32)$$

Además la energía potencial debido al campo aplicado, H , está dada por [11]

$$E_p = -\mu_0 H M_s \cos \theta \quad (3.7)$$

por lo que, la energía total es

$$E_t = E_f + E_c + E_p. \quad (3.47)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.46), (3.32) y (3.7) en la ecuación (3.47) se obtiene:

$$E_t = K_0 + K_1 \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} \mu_0 N a M_s^2 + K_f \sin^2 \theta - \mu_0 H M_s \cos \theta. \quad (3.48)$$

3.3.1 Circuito de histerésis por anisotropía mixta

Para la posición de equilibrio, $\partial E_t / \partial \theta = 0$

$$\dots \mu_0 H M_s \text{sen} \varnothing = K_f \text{sen} 2(\theta_0 - \varnothing) + \frac{K_l}{2} \text{sen} 4(\theta_0 - \varnothing) \quad (3.49)$$

entonces:

$$H = \frac{K_f \text{sen} 2(\theta_0 - \varnothing) + \frac{K_l}{2} \text{sen} 4(\theta_0 - \varnothing)}{\mu_0 M_s \text{sen} \varnothing} \quad (3.50)$$

donde,

$$K_f = \frac{1}{2} \mu_0 H c_i M_s \quad (3.51)$$

$$K_l = \frac{1}{2} \mu_0 H c_c M_s \quad (3.52)$$

$$\text{cos} \varnothing = m \quad (3.21)$$

y

$$\text{sen} \varnothing = \sqrt{1 - m^2} \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.51), (3.52), (3.21) y (3.22) en la ecuación (3.50) se obtiene:

$$H = \frac{2H c_i \text{sen} 2(\theta_0 - \text{cos}^{-1} m) + H c_c \text{sen}(\theta_0 - \text{cos}^{-1} m)}{4\sqrt{1 - m^2}} \quad (4.53)$$

Cuando el campo aplicado, H , alcanza un valor lo suficientemente grande en la dirección negativa, la magnetización, M_s , empezará a invertirse. Para encontrar este valor crítico, H_c , se pone $\partial^2 E_t / \partial \theta^2 = 0$. Diferenciado la ecuación (3.50) y reordenando, se obtiene:

$$H_c = - \left[\frac{2K_f \cos 2(\theta_0 - \varphi_c) + 2K_1 \cos 4(\theta_0 - \varphi_c)}{\mu_0 M_s \cos \varphi} \right]. \quad (3.54)$$

Reescribiendo la ecuación (3.3) en términos de φ_c y sustituyendo el valor de $\sin \varphi_c$ y $\cos \varphi_c$ de las ecuaciones (3.50) y (3.54) respectivamente, se obtiene [Apéndice D]

$$\begin{aligned} H_{ci}^2 = & H_{ci_f}^2 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta_c\right) + H_{ci_c}^2 \left(1 - \frac{15}{16} \sin^2 4\theta_c\right) \\ & + 2H_{ci_f} H_{ci_c} \cos 2\theta_c \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 2\theta_c\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

La ecuación (3.55) es una ecuación general para la cual la magnetización, M_s , se invertirá.

Despreciando el efecto de la anisotropía de cristal ($H_{ci_c} = 0$) en la ecuación (3.55) da la ecuación (3.30). Despreciando el efecto de la anisotropía de forma ($H_{ci_f} = 0$) en la ecuación (3.55) no da la ecuación (3.45).

Resolviendo las ecuaciones (3.50) y (3.54), se obtiene,

$$-4 \tan \varphi_c = \left[\frac{2H_{ci_f} \sin 2\theta_c + H_{ci_c} \sin 4\theta_c}{H_{ci_f} \cos 2\theta_c + H_{ci_c} \cos 4\theta_c} \right]. \quad (3.56)$$

Despreciando el efecto de la anisotropía de cristal ($H_{ci_c} = 0$) en la ecuación (3.56) nos da la ecuación (3.27). Despreciando el efecto de la anisotropía de forma ($H_{ci_f} = 0$) en la ecuación (3.56) da la ecuación (3.44).

La ecuación (3.53) es una ecuación general que relaciona el campo magnético, \underline{H} , con la magnetización, \underline{M}_s , considerando las anisotropías combinadas. Esta ecuación da \underline{H} como una función de \underline{M} : sin embargo, en realidad, \underline{M} es una función de \underline{H} . La magnetización residual, M_r , ocurre cuando el campo aplicado, \underline{H} , es cero.

Sustituyendo $H = 0$ en la ecuación (3.53) obtenemos,

$$0 = \frac{2Hc_i f \text{sen} 2(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) + Hc_i c \text{sen} 4(\theta_0 - \cos^{-1} m_r)}{4\sqrt{1-m_r^2}} .$$

Aquí, se tienen dos casos.

caso 1

$$2Hc_i f \text{sen} 2(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) = Hc_i c \text{sen} 4(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) = 0,$$

el cual puede resolverse poniendo

$$\cos \theta_0 = m_r = \frac{M_r}{M_s}$$

$$M_r = M_s \cos \theta_0. \quad (3.57)$$

Esto es lo que se esperaba y como se muestra en la Figura 3.6.

Caso 2

$$2Hc_i f \text{sen} 2(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) = -Hc_i c \text{sen} 4(\theta_0 - \cos^{-1} m_r)$$

$$\cos 2(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) = -\frac{Hc_i f}{Hc_i c} = -\frac{K_f}{K_j}$$

$$\dots \quad \sin(\theta_0 - \cos^{-1} m_r) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{K_f}{K_1} \right)}.$$

Por consiguiente

$$\theta_0 - \cos^{-1} m_r = \theta_n \quad (3.58)$$

donde

$$\theta_n = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{K_f}{k_1} \right)} \quad (3.59)$$

$$\theta_0 - \theta_n = \cos^{-1} m_r = \cos^{-1} \frac{M_r}{M_s}.$$

Por lo que

$$M_r = M_s \cos(\theta_0 - \theta_n). \quad (3.60)$$

La ecuación (3.59) sugiere que en cualquier material magnético $K_f \leq K_1$. Las ecuaciones (3.50) y (3.53) no están normalizadas, y para sacar cualquiera de éstas, se necesitan los valores de K_f y K_1 para la ecuación (3.50) o H_{ci_f} y H_{ci_c} para la ecuación (3.53). Para encontrar estos valores, se puede usar la Figura 3.4. En esta figura es claro que con el campo aplicado a un ángulo $\theta_0 = 90^\circ$, si se considera solamente la anisotropía de forma, la fuerza coercitiva $H_{ci_f} = 0$. Esto significa que, si se mide cualquier fuerza coercitiva, esta tiene que ser solamente una fuerza coerciva de cristal, H_{ci_c} . Por lo tanto, la fuerza

coercitiva medida con un campo aplicado a un ángulo $\theta_0 = 90^\circ$ (Figura 2.10j, anexo 1) es la fuerza coercitiva de cristal, la cual tiene el siguiente valor,

$$H_{ci_c} = 30.20 \text{ (kA/m)}.$$

Para el Alnico 5-7 $J_R = 1.344 \text{ (T)}$. Sustituyendo en la ecuación (3.52) da

$$K1 = (1/2) * 30.20 * 1.344 = 20.3 \text{ (kJ/m}^3\text{)}.$$

Para encontrar H_{ci_f} , se aplica el campo, H , a un ángulo $\theta_0 = 0$; sustituyendo en la ecuación (3.29) se obtiene $\theta_c = 0$ y sustituyendo este valor de θ_c en la ecuación (3.55) se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{ci}^2 &= H_{ci_f}^2 + H_{ci_c}^2 + 2H_{ci_f}H_{ci_c} \\ &= (H_{ci_f} + H_{ci_c})^2 \end{aligned}$$

por lo tanto:

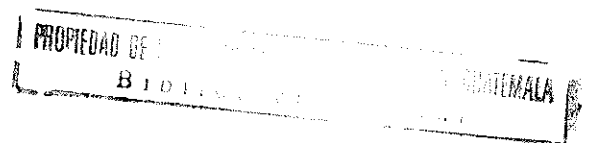
$$H_{ci} = H_{ci_f} + H_{ci_c}. \quad (3.61)$$

De la curva de magnetización con $\theta_0 = 0$ (Figura 2.10a del anexo 1)

$$H_{ci} = 50.53 \text{ (kA/m)}$$

y sustituyendo este valor de H_{ci} en la ecuación (3.61), obtenemos

$$H_{ci_f} = 20.33 \text{ (kA/m)}.$$



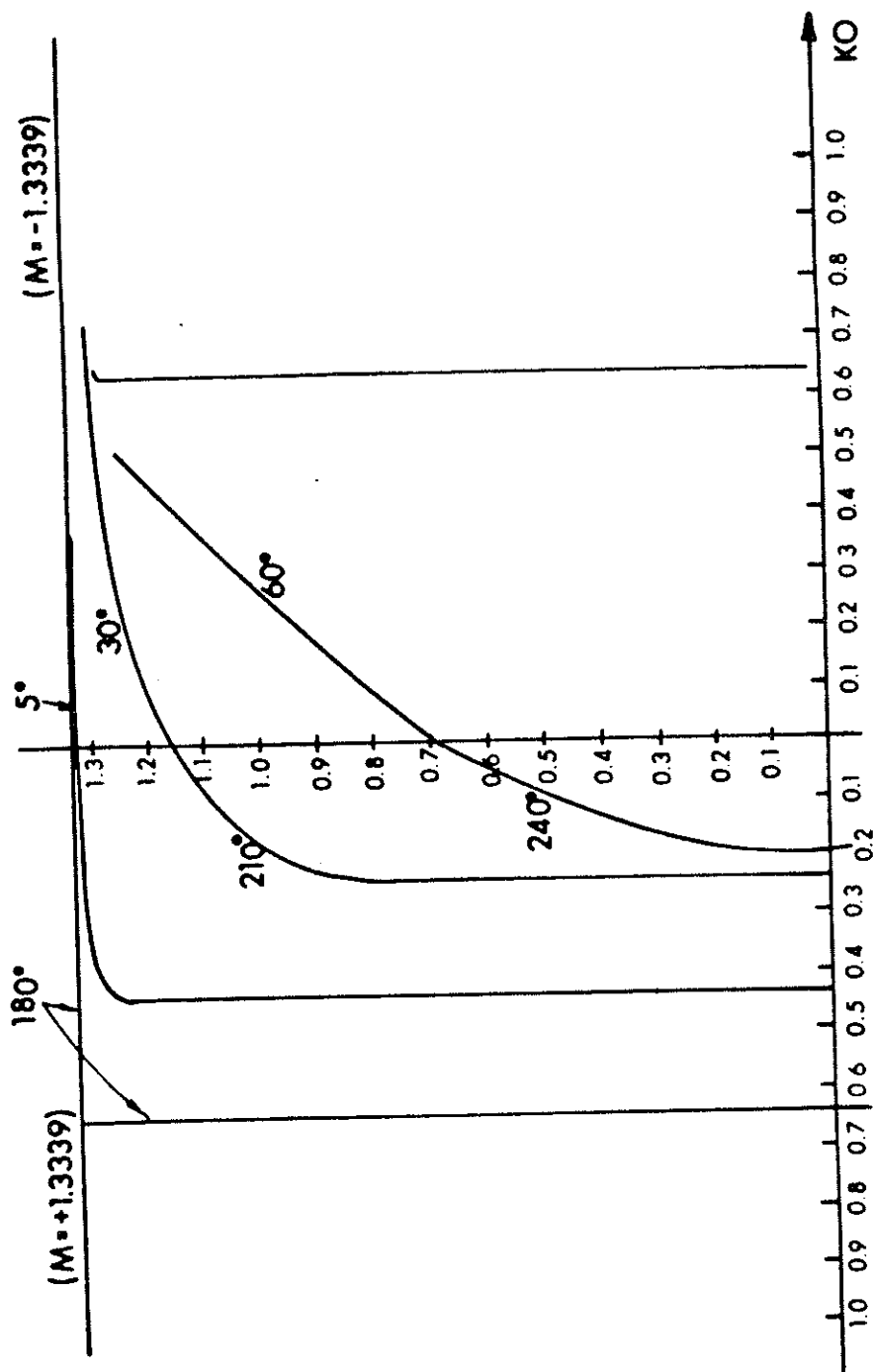


Figura 3.9. Circuito de histéresis por ambas anisotropias

Sustituyendo este valor de H_{ci_f} en la ecuación (3.51) se obtiene:

$$K_f = (1/2) * 20.33 * 1.344 = 13.70 \text{ (kJ/m}^3\text{)}.$$

La Figura 3.9 (página anterior) muestra esta relación para un ángulo aplicado, $\theta_0 = 0, 5^\circ, 30^\circ$ y 60° .

3.4 Rotación en la magnetización

Cuando se le aplica un campo magnético, H , a un magneto permanente a un ángulo, θ_0 , de la dirección preferida, a , el campo magnético considerado tratará de alinear la magnetización espontánea en su dirección, desarrollando un torque rotacional, T_p sobre la magnetización espontánea, M_s (Figura 3.10)

$$T_p = - \frac{\partial}{\partial \theta} E_p. \quad (3.62)$$

Sustituyendo el valor de E_p de la ecuación (3.7) y diferenciando:

$$\begin{aligned} T_p &= - \frac{\partial}{\partial \theta} (-\mu_0 H M_s \cos \theta) \\ &= - \mu_0 H M_s \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (3.63)$$

M_s rotará un ángulo θ , debido a este torque T_p : mientras M_s está rotando, debido a la variación de la energía anisotrópica, dos torques restauradores actuarán sobre la magnetización espontánea, los cuales se opondrán al torque desarrollado por la variación de

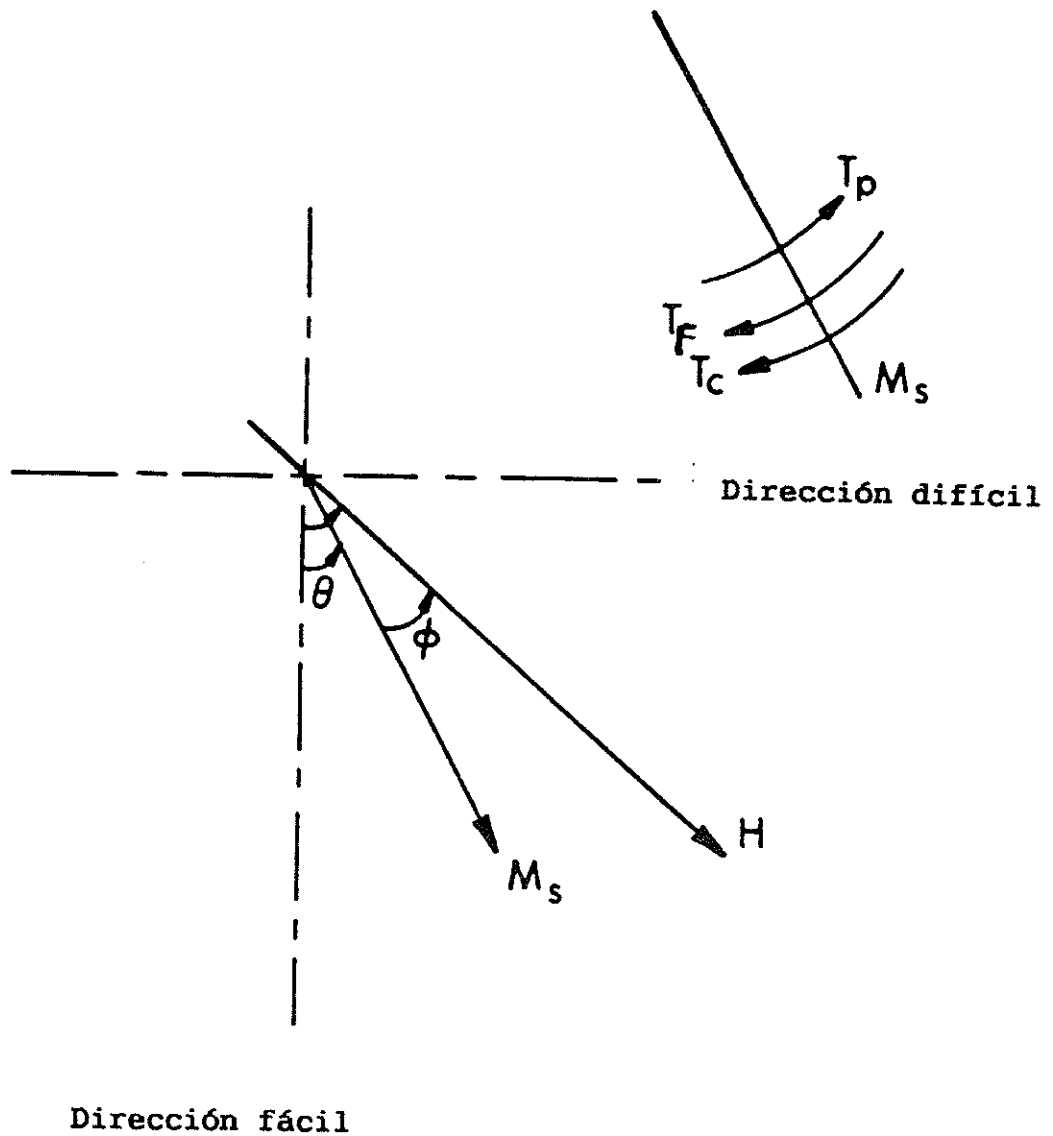


Figura 3.10. Magnetización por rotación

energía potencial. Uno es el torque anisotrópico de forma, T_f , debido a la variación de la energía anisotrópica de forma, E_f (Figura 3.10)

$$T_f = \frac{\partial}{\partial \theta} E_f \quad (3.64)$$

Sustituyendo el valor de E_f de la ecuación (3.9) y diferenciando

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{\partial}{\partial \theta} [(1/2)\mu_0 N a M_s^2 + K_f \text{sen}^2 \theta] \\ &= K_f \text{sen} 2\theta. \end{aligned}$$

El otro torque restaurador desarrollado es el torque anisotrópico del cristal, T_c , debido a la variación de la energía anisotrópica de cristal, E_c (Figura 3.10)

$$T_c = \frac{\partial}{\partial \theta} E_c. \quad (3.66)$$

Sustituyendo el valor de E_c de la ecuación (3.32) y diferenciando

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{\partial}{\partial \theta} [K_0 + (K_1/4)\text{sen}^2 2\theta] \\ &= (1/2)K_1 \text{sen} 4\theta. \end{aligned} \quad (3.67)$$

El torque total, T_t , sobre la magnetización espontánea, \underline{M}_s , es

$$T_t = T_p + T_f + T_c \quad (3.68)$$

La posición de equilibrio ocurre cuando

$$T_t = 0$$

$$0 = T_p + T_f + T_c.$$

Sustituyendo los valores de T_p , T_f y T_c de las ecuaciones (3.63), (3.65) y (3.67) respectivamente, se obtiene:

$$\mu_0 H M_s \sin \vartheta = K_f \sin 2\theta + (K_1/2) \sin 4\theta. \quad (3.70)$$

Sustituyendo el valor de ϑ [ecuación (3.11)], sustituyendo $\mu_0 M_s$ por J_s y reordenando da

$$\frac{J_s H}{K_f} \left[\frac{\sin(\theta_0 - \theta)}{\sin 2\theta} \right] - \frac{K_1}{K_f} \cos 2\theta = 1. \quad (3.71)$$

La ecuación (3.71) es una ecuación general que expresa el ángulo de rotación, θ , como una función del campo aplicado H a cualquier ángulo θ_0 y los parámetros del material magnético J_s , K_1 y K_f . Las Figuras (3.11) y (3.12) muestran esta relación a un ángulo aplicado, $\theta_0 = 0, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 170^\circ$, y, aproximadamente, 180° .

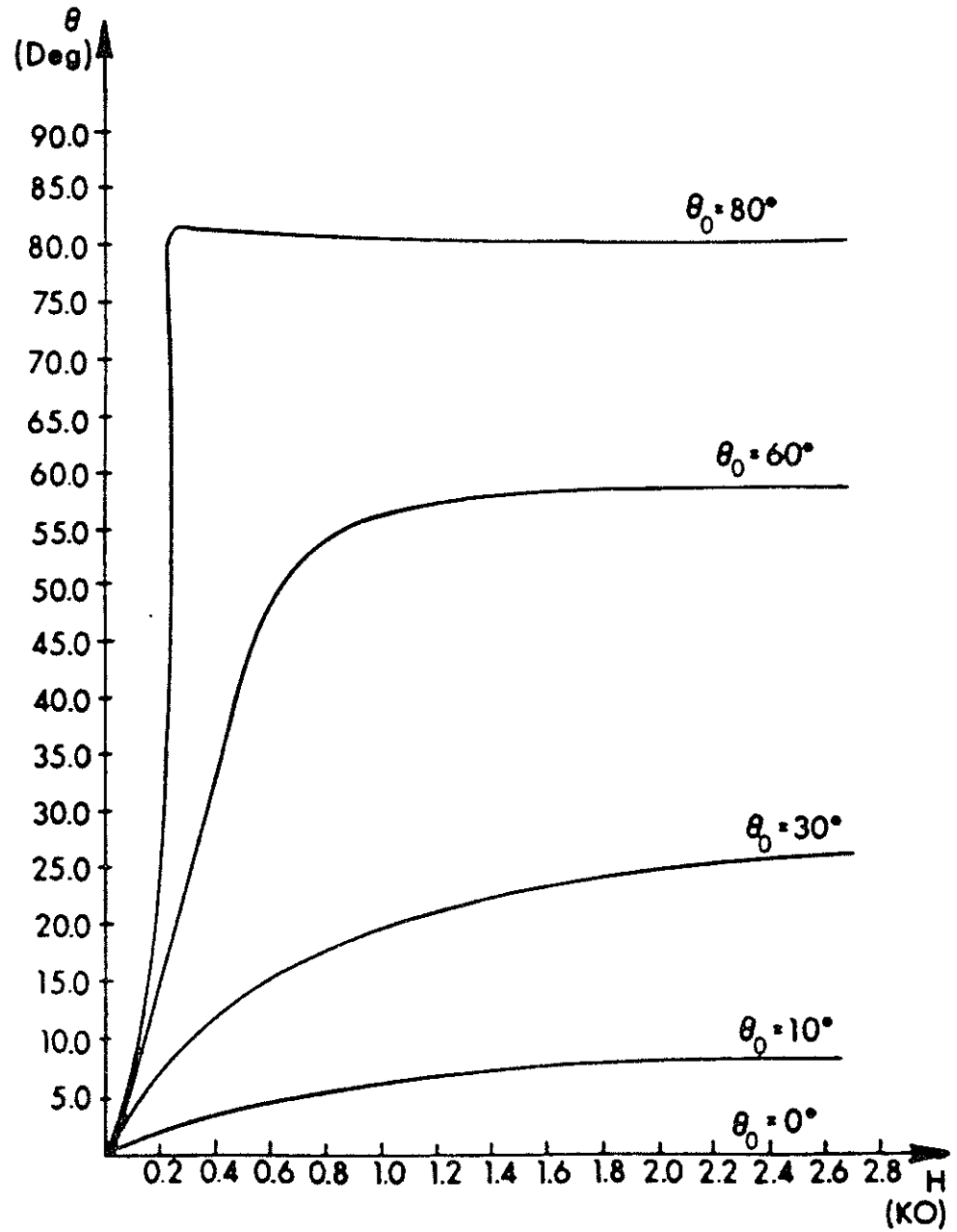


Figura 3.11. Curvas de θ a medida que H varía de cero a saturación y θ_0 varía de cero a 80° .

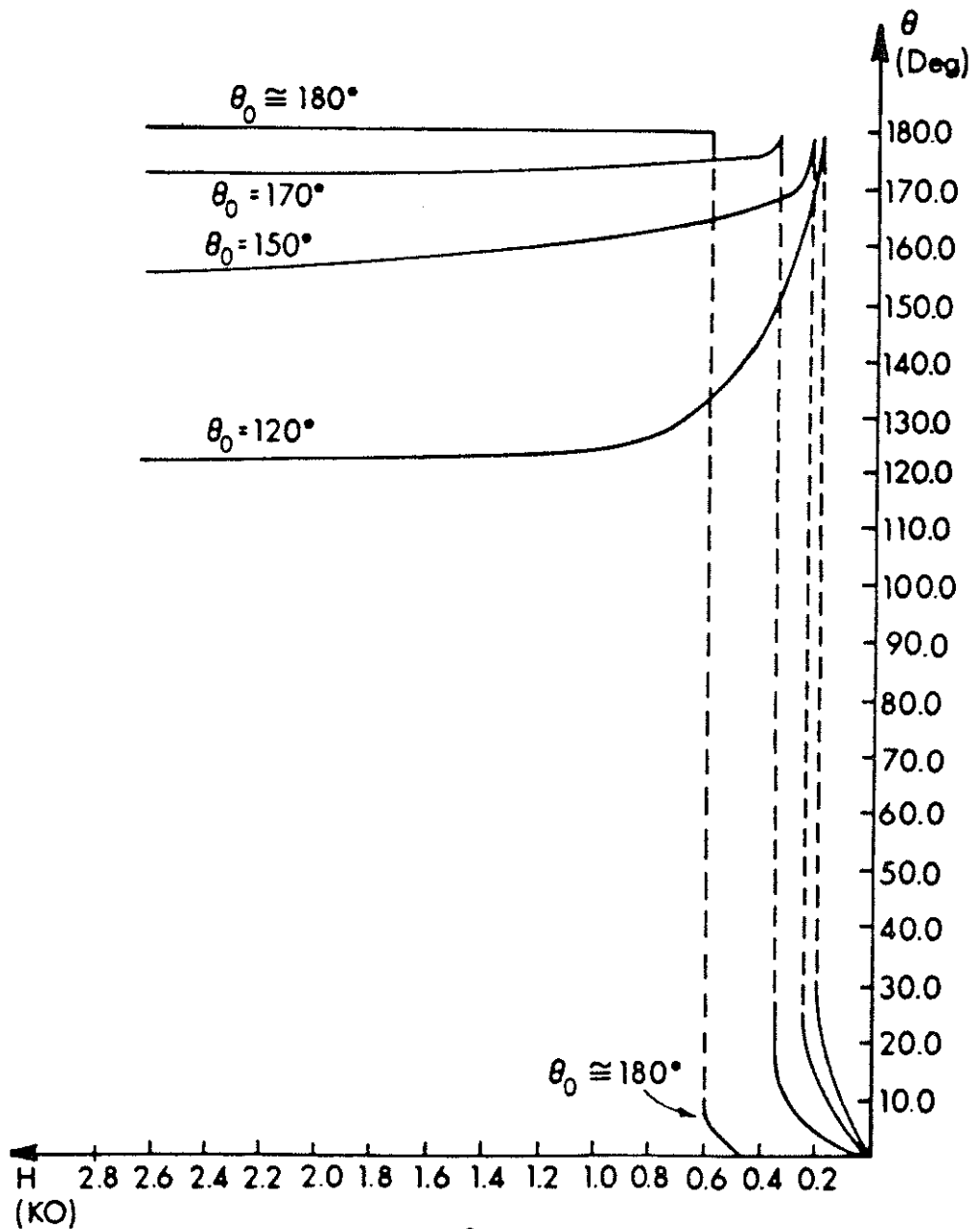


Figura 3.12. Curvas de θ a medida que H varía de cero a saturación y θ_0 varía de 120° a 180° .

CAPITULO 4

CALCULOS DE CAMPO

Cuando se calcula el campo magnético, H , debido a un magneto permanente anisotrópico, se asume comunmente que la magnetización intrínseca, J , es uniforme a través de todo el volumen del magneto. Esto es cierto en magnetos permanentes que tienen características lineales de desmagnetización, tal como el SmCo5 y ferritas cerámicas.

En magnetos permanentes que tienen una curva de desmagnetización no lineal, tal como los Alnicos y el MnAlc, la magnetización intrínseca, J , no es uniforme en magnitud y dirección. La extensión de esta desuniformidad dependerá de la topología del circuito magnético completo. En estos materiales, si J puede ser orientada en cualquier dirección, como en el caso de materiales magnéticos blandos, la curva de magnetización intrínseca puede ser modelada usando una variable función de la permeabilidad [12], sin embargo, si J es casualmente orientada, esta orientación podría ser modelada usando una función polinomial en la dirección anisotrópica (preferida) y adicional a esto se requerirá información de las propiedades del material en la dirección transversal.

Debido a que para calcular el campo magnético, H , se necesita conocer el valor de J , y J depende de H , esto conduce a una solución iterativa para la distribución de J , antes de calcular la distribución de flujo en el entrehierro. Este largo y costoso proceso de computación puede reducirse, considerablemente, si se asume que H_x y H_t son dominados por valores locales de J_x y J_t respectivamente.

4.1 Cálculo directo de campo magnético

Previamente, se ha mostrado la expresión para magnetos permanentes

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{J} \quad (2.4)$$

tomando la divergencia de la ecuación (3.4) y sustituyendo la magnetización intrínseca \underline{J} por $\mu_0 \underline{M}$, da

$$\nabla \cdot \underline{B} = \mu_0 \nabla \cdot \underline{H} + \mu_0 \nabla \cdot \underline{M} \quad (4.1)$$

en magnetismo, $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, por lo que la ecuación (4.1) viene a ser,

$$\nabla \cdot \underline{H} = - \nabla \cdot \underline{M} \quad (4.2)$$

Dado que en cualquier material magnético no hay (macroscópicamente) corriente real,

$$\nabla \times \underline{H} = 0. \quad (4.3)$$

Debido a que el rotacional del gradiente de cualquier escalar es, idénticamente, igual a cero, la ecuación (4.3) implica que el campo magnético, \underline{H} , es derivable de un potencial escalar, ψ ,

$$\underline{H} = -\nabla\psi \quad (4.4)$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) en la (4.2) nos da

$$\begin{aligned} \nabla(-\nabla\psi) &= - \nabla \cdot \underline{M} \\ \nabla^2 \psi &= - \nabla \cdot \underline{M} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Esta es la ecuación de Poisson que relaciona el potencial magnético a un punto de la magnetización \underline{M} en ese punto. Si el material del magneto permanente es uniformemente homogéneo

$$\nabla \cdot \underline{M} = 0. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es exacta en el caso de materiales de tierra rara y ferrita, porque en estos materiales la magnetización \underline{M} es uniforme. Sustituyendo la ecuación (4.6) en la (4.5) da

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (4.7)$$

Una ecuación diferencial parcial como la ecuación (4.5) de Poisson o, la ecuación (4.7) de Laplace tiene una variedad de soluciones dependientes en las coordenadas del sistema y de las condiciones de frontera.

4.2 Cálculos de forma cerrada

Se mencionó en la sección anterior que la ecuación de Poisson tiene una variedad de soluciones. Una solución es la integral de la ecuación (1.27). Esta ecuación declara que la distribución de la magnetización, \underline{J} , puede ser remplazada por una distribución de superficie, J_s , y una distribución de volumen, $\nabla \cdot \underline{J}$, de polos magnéticos.

En cualquier material magnético que tenga una permeabilidad constante (curva de desmagnetización lineal) no hay distribución de volumen de los polos magnéticos y,

$$\nabla \cdot \underline{J} = 0 . \quad (4.8)$$

Esto es cierto para materiales de tierras raras y ferritas. Sin embargo, en cualquier material que tenga una permeabilidad variable (curva de desmagnetización no lineal) tal como los Alnicos, la ecuación (4.8) no es válida y los dos términos de la ecuación (1.27) están presentes.

Un magneto permanente anisotrópico se especifica por sus propiedades en la dirección preferida x únicamente y el vector de magnetización intrínseca, \underline{J} , se resuelve como J_x . Debido a las condiciones de frontera impuestas por un dispositivo, J_x no es constante a través de todo el volumen del magneto y de esta manera el magneto completo no opera en un punto único sobre la curva de desmagnetización J_x-H_x , como se muestra en la Figura (4.1). De hecho, debido a que \underline{J} está también rotada por \underline{H} dentro de los materiales de Alnico y en otros con características similares, el magneto no opera aun totalmente en la curva mayor. Esto indica que las propiedades del magneto en otras direcciones son requeridas antes de intentar resolver la ecuación (1.27).

4.3 Distribución de potencial sobre el magneto permanente

El arreglo de las partes activas de una máquina de campo axial se muestra en la Figura 1.2 (Capítulo 1) y los conductores activos corren radialmente a través del entrehierro. Cada polo individual tiene una forma circular. Los polos alternan en polaridad alrededor del estator, como se muestra en la Figura 4.2. Estos están sujetos a un anillo sólido de acero suave y el circuito magnético se completa por un anillo similar en el lado opuesto.

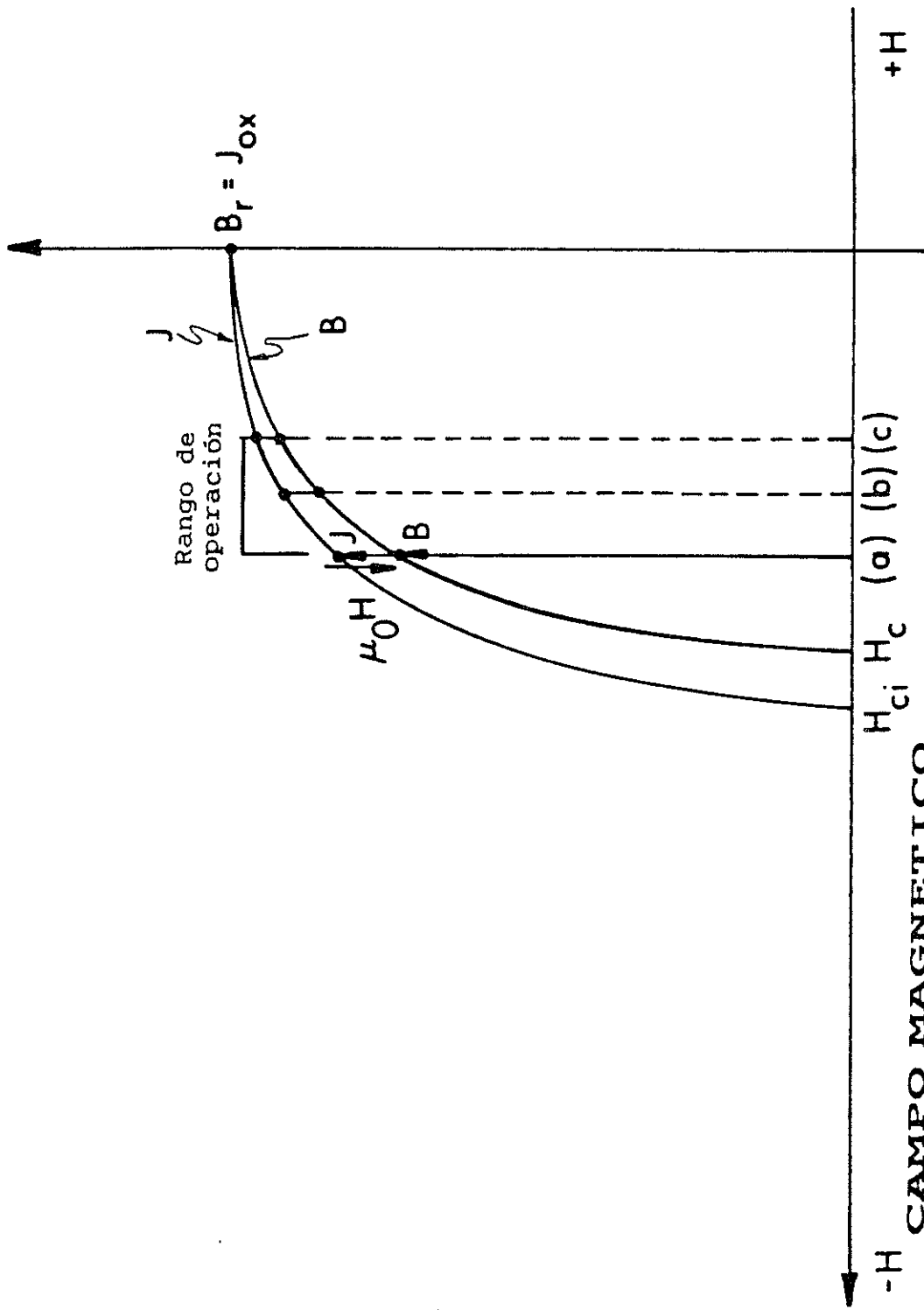


Figura 4.1. Rango típico de operación de un magneto sobre la curva mayor de magnetización

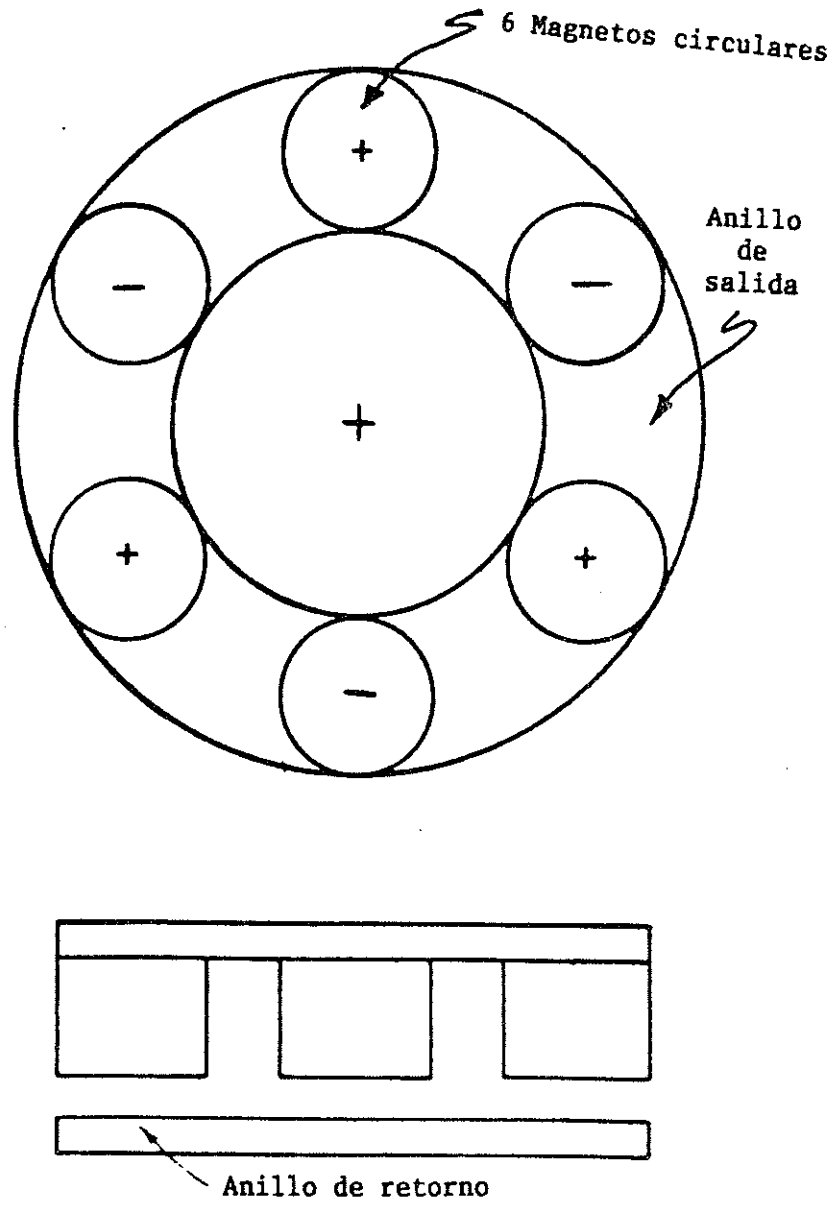


Figura 4.2. Estator de una máquina de 6 polos de forma circular

Para optimizar el diseño y funcionamiento de esta máquina, es claramente necesario determinar con exactitud la distribución del campo a través de todo el entrehierro. El campo en el entrehierro se calcula de la distribución de potencial [ecuación (1.27)].

Para los magnetos anisotrópicos de alta coercitividad dada (magnetos de tierra rara y ferrita) es buena aproximación asumir que la magnetización, \underline{M} , es constante en magnitud y dirección y de esta manera la ecuación (1.27) se simplifica a

$$4\pi\psi = \oint \frac{M_s}{r} dA . \quad (1.28)$$

Cuando se utilizan magnetos de Alnico no es razonable asumir que $\text{div}\underline{M} = 0$. En este caso, la solución de la ecuación (1.27) tiene que llevarse a cabo.

4.4 Modelo de magneto permanente

Cuando se utilizan métodos iterativos para soluciones de campo, es convencional representar la magnetización intrínseca, \underline{J} , de un material no lineal por [13],

$$\underline{J} = \underline{J}_0 + \mu_0 \chi \underline{H} \quad (4.9)$$

donde \underline{J}_0 es la magnetización intrínseca remanente de magnitud constante en la dirección anisotrópica, y χ (vector) es la susceptibilidad, la cual es una función de \underline{H} en un material no lineal.

Sustituyendo la ecuación (4.9) en la ecuación (2.4) da

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \mu_0 \underline{H} + \underline{J}_0 + \mu_0 \chi \underline{H} \\ &= \underline{J}_0 + \mu_0 \underline{H} (1 + \chi).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Esto significa que se puede representar, convenientemente, la densidad de flujo \underline{B} en términos del vector de magnetización intrínseca \underline{J}_0 junto con una función simple de \underline{H} .

La ecuación (4.10) se utiliza para materiales magnéticos anisotrópicos e isotrópicos. En el caso de los materiales isotrópicos, se pueden tomar los vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} como colineales (ver Figura 4.3) y la susceptibilidad, χ , es un escalar. Sin embargo, en los materiales anisotrópicos, tal como el Alnico, los vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} no son colineales (Figura 4.4) y, en consecuencia χ , viene a ser un tensor.

En general \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} se pueden resolver en dos ejes mutuamente perpendiculares (Figura 4.5) siendo x la dirección de la magnetización inicial y t la dirección transversal. Por lo tanto, en la dirección x , la curva de desmagnetización de 0° , en el segundo cuadrante describirá las condiciones del magneto. Esta es la característica medida, convencionalmente, la cual puede ser representada por

$$J_x = J_{x0} + \mu_0 H_x \chi_x(H_x).\tag{4.11}$$

La magnetización intrínseca transversal, J_t , únicamente se da en materiales con características de desmagnetización, no lineales. Durante el proceso de magnetización, el material es

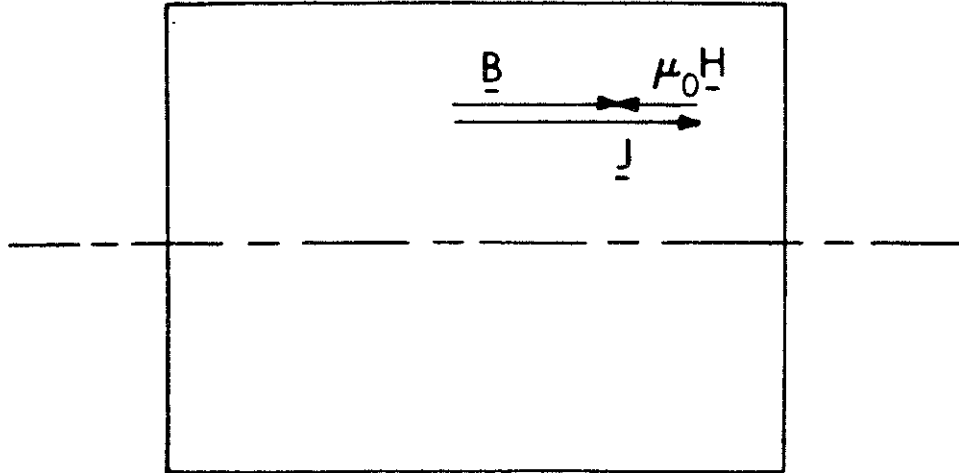


Figura 4.3. Vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} colineales

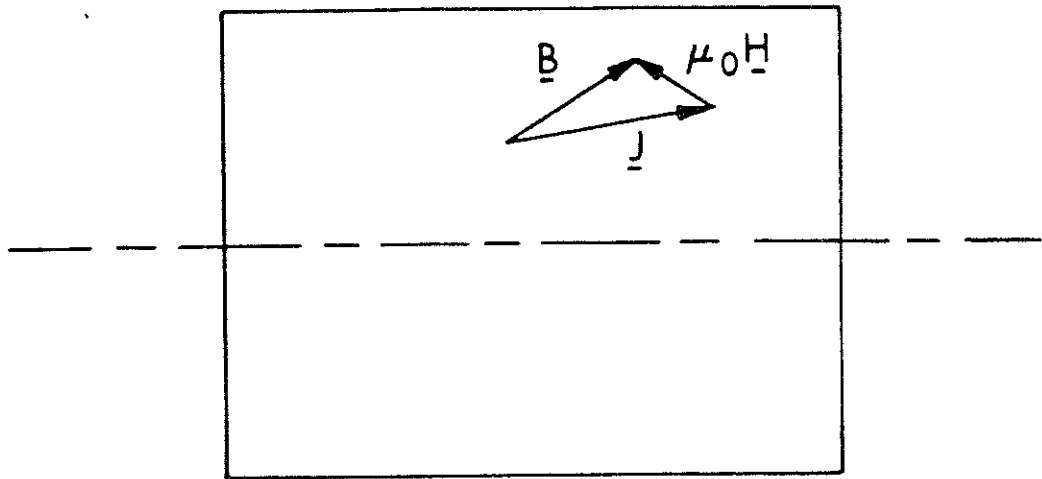


Figura 4.4. Vectores \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} no colineales

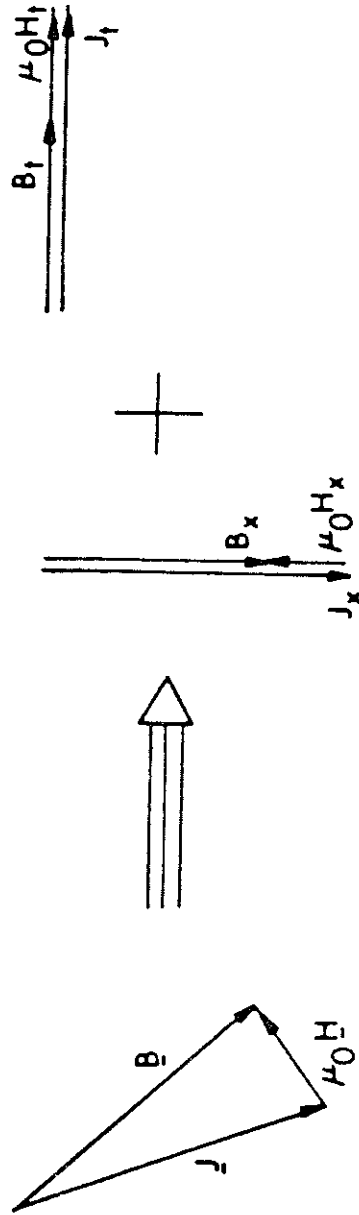


Figura 4.5. Vector de magnetización, J , resuelto en dos ejes mutuamente perpendiculares (x es el eje de la magnetización inicial y t la dirección transversal)

H_{x1} reducirá la magnetización a J_{x1} , un valor menor que la remanencia, J_{x0} , usada para encontrar H_{x1} . Para calcular H_{x2} se procede de la misma manera

$$4\pi\mu_0 H_{x2} = - \int \nabla \frac{J_{x1} \cdot ds}{r} .$$

Cálculos sucesivos darían en general

$$4\pi\mu_0 H_{x(n+1)} = - \int \nabla \frac{J_{xn} \cdot ds}{r} . \quad (4.14)$$

El arreglo geométrico en la ecuación (4.13) y ecuación (4.14) puede ser eliminado considerando el dominio local de J_x y H_x , entonces, dividiendo la ecuación (4.14) entre la ecuación (4.13)

Se obtiene:

$$\frac{H_{x(n+1)}}{H_{x1}} = \frac{J_{xn}}{J_{x0}} . \quad (4.15)$$

J_{xn} es sólo cálculo n de J_x , el cual está relacionado a H_{xn} por la ecuación (4.11). Sustituyendo la ecuación (4.11) en la ecuación (4.15) se obtiene:

$$H_{x(n+1)} = H_{x1} \left[\frac{J_{x0} + \mu_0 H_{xn} \chi_x(H_{xn})}{J_{x0}} \right]$$

por lo que



$$H_{x(n+1)} - H_{xn} = H_{x1} \left[1 + \frac{\mu_0 H_{xn} \chi_x(H_{xn})}{J_{x0}} - \frac{H_{nx}}{H_{x1}} \right]$$

en el limite,

$$H_{x(n+1)} - H_{xn} \rightarrow 0,$$

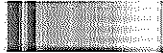
y en consecuencia:

$$1 + \frac{\mu_0 H_{xn} \chi_x(H_{xn})}{J_{x0}} - \frac{H_{nx}}{H_{x1}} = 0. \quad (4.16)$$

En esta expresión, el campo final en la dirección x se encuentra, aproximadamente, calculando el valor inicial de H_{x1} debido a la magnetización uniforme, J_{x0} , y, resolviendo con la función de susceptibilidad, $\chi_x(H_x)$, que describe las características de desmagnetización. Los resultados del campo $H_x = H_{xn}$ de la ecuación (4.16) se sustituyen en la ecuación (4.11) y da la magnetización actual

$$J_x = \frac{J_{x0}}{1 - \left[\frac{\mu_0 H_{x1} \chi_x(H_x)}{J_{x0}} \right]}. \quad (4.17)$$

Está claro de esta ecuación que una característica de desmagnetización lineal con $\chi_x(H_x) = 0$ da $J_x = J_{x0}$, como se esperaba.



En la dirección tangencial t , se usa la ecuación (3.71), la ecuación general describe el comportamiento del vector de magnetización, \underline{M} , en cualquier dirección, para cualquier valor de campo. Por lo que

$$\frac{J_s H}{K_f} \left[\frac{\text{sen}(\theta_0 - \theta)}{\text{sen}2\theta} \right] - \frac{K1}{K_f} \cos 2\theta = 1. \quad (3.71)$$

Cuando se magnetiza un material, el campo aplicado se orienta en la dirección anisotrópica (dirección de magnetización Fácil) es normal que el ángulo θ sea menor de 1° (despreciable) por lo que si se considera un margen de error menor del 5%, la ecuación (3.71) viene a ser

$$\frac{J_s H}{K_f} \left[\frac{\text{sen}\theta_0}{2\text{sen}\theta} \right] = 1 + \frac{K1}{K_f} \quad (4.18)$$

y

$$\text{sen}\theta = \tan\theta_0 = \frac{J_t}{J_x}. \quad (4.19)$$

Sustituyendo la ecuación (4.19) en (4.18) y reordenando se obtiene,

$$J_s H \left[\frac{\text{sen}\theta_0}{J_t/J_x} \right] = 2(K1 + K_f). \quad (4.20)$$

La ecuación (4.20) es válida cuando el magneto se ha magnetizado con un campo aplicado a un ángulo menor de 5° respecto de la dirección anisotrópica.



Después de la desmagnetización J_s es J_x , y $H \text{sen} \theta_0$ es H_t , como se muestra en la Figura 4.6 (el campo magnético dentro del material magnético tiene dirección opuesta al campo aplicado externamente) por lo que

$$\frac{J_x^2 H_t}{J_t} = 2(K_1 + K_f)$$

en consecuencia

$$J_t = \frac{J_x^2}{2(k_1 + K_f)} H_t \quad (4.21)$$

Dado que el campo tangencial, H_t , crea la magnetización tangencial, J_t , por lo que J_t desaparece cuando $H_t = 0$, como se ve en la ecuación (4.21) y como se esperaba.

Para resolver la ecuación (1.27), se considera una magnetización uniforme, J_{x0} , para los cálculos iniciales y la ecuación (1.27) se convierte en la ecuación (1.28). Sin embargo, para encontrar la distribución de flujo en el magneto, se necesita una expresión para la distancia r .

Considerando $Q(x_0, y_0, z_0)$ como cualquier punto sobre la cara del magneto y $P(x_1, y_1, z_1)$ cualquier punto (Figura 4.7). La distancia, $PQ = r$, es

$$r = \sqrt{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]}. \quad (4.25)$$

sin embargo,

$$y_0 = s \cos \theta$$

$$z_0 = s \text{sen} \theta.$$



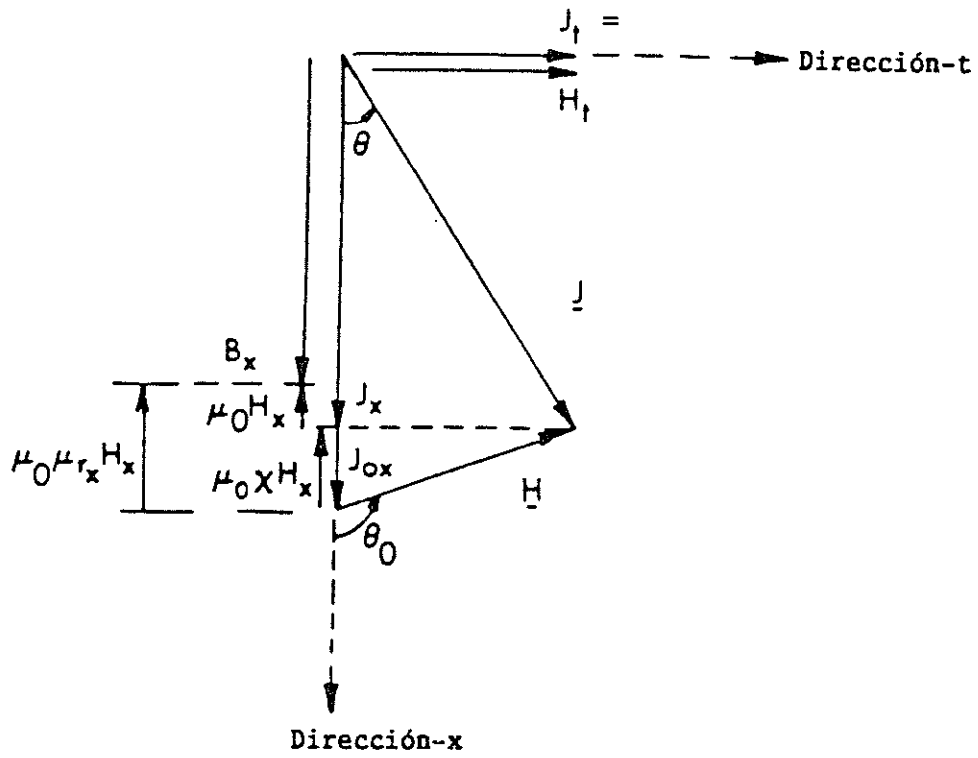
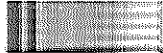


Figura 4.6. Rotación de J debido a la autodemagnetización del campo, H .



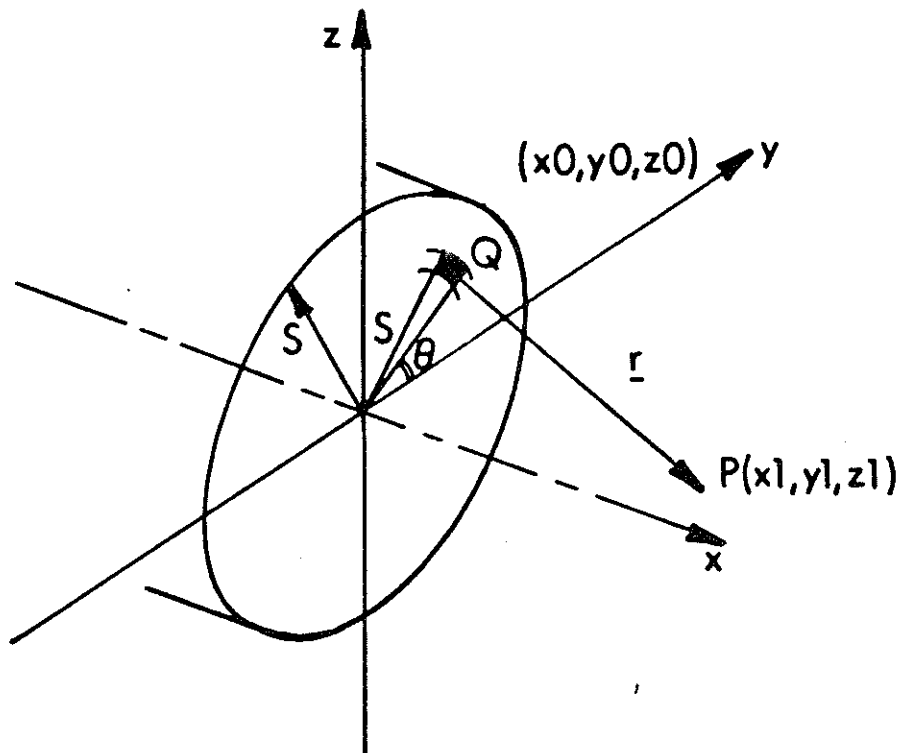


Figura 4.7. Distancia, r , de la cara de un magneto



Sustituyendo los valores de y_0 y z_0 en la ecuación (5.25) y tomando la cara del magneto como referencia ($x_0 = 0$) da

$$r = [x_1^2 + y_1^2 + s^2 \cos^2 \theta - 2y_1 s \cos \theta + z_1^2 + s^2 \sin^2 \theta - 2z_1 s \sin \theta]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \sqrt{[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + s^2 - 2s(y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta)]} \\ &= \sqrt{[S^2 - 2sk_1 + k_3]} \end{aligned}$$

donde

$$k_1 = 2s(y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta)$$

y

$$k_3 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Cuando se calcula la distribución de flujo sobre la cara de un magneto [magneto principal (Fig. 4.10)], se debe de considerar la distribución de flujo debido a los polos imagen y adyacentes (Sección 4.5). Para calcular la distribución de flujo debido al magneto principal, se puede utilizar la distancia r deducida anteriormente, sin embargo, para calcular la distribución de flujo sobre la cara de un magneto tomado como base (magneto principal) debido a los polos imagen y adyacentes, necesitamos una nueva expresión para r , lo que se hará a continuación.



4.5 Condiciones de frontera

Cualquier superficie del magneto, adherida al plato de acero (u otra de permeabilidad alta) puede ser observada, como estando a un potencial cero, ψ .

Frontera general aire/acero

Esto obedece a las condiciones normales de frontera de conservación de \underline{B} normal y \underline{H} tangencial a través de la frontera. Considérese un campo general en acero trasladado a través del aire tal como se muestra en la Figura 4.8. Dado que la densidad de flujo magnético, \underline{B} , tiene divergencia cero, aplicando el teorema de Gauss se muestra que la componente de \underline{B} es continua a través de la frontera. Similarmente, dado que el campo magnético \underline{H} , tiene ondulación cero ($\nabla \times \underline{H} = 0$), aplicando la ley de Ampere se muestra que la componente tangencial de \underline{H} es continua,

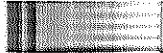
$$H_t \text{ en el aire} = H_t \text{ en el acero},$$

$$\dots \quad B_t \text{ en aire} = (1/\mu_{Ts}) B_t \text{ en acero}.$$

Dado que μ_{Ts} (la permeabilidad relativa del acero) es muy alta

$$\dots \quad B_t \text{ en aire} = 0.$$

Por lo tanto, \underline{B} , es, efectivamente, normal en una frontera aire/acero. Sugiere que un plato (disco) de acero mirara el magneto tal como se muestra en la Figura 4.9 y, en consecuencia



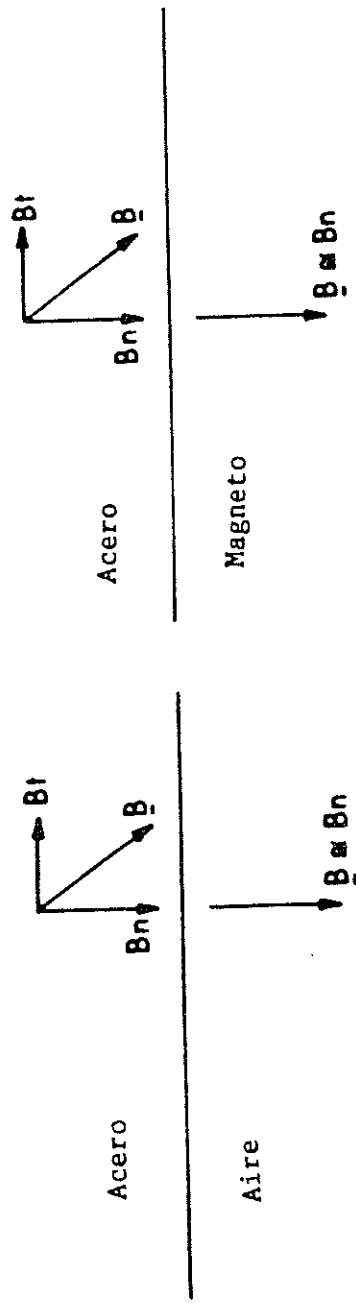


Figura 4.8. Frontera aire/acero y frontera magneto acero



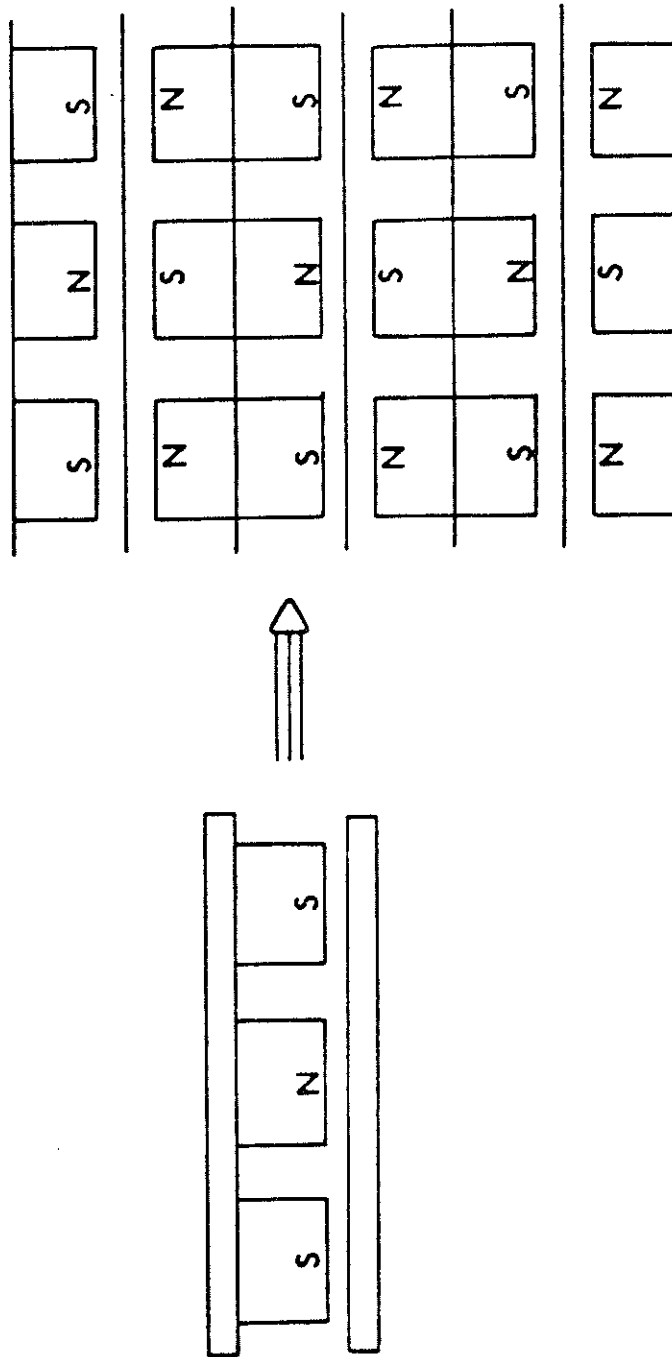


Figura 4.9 El sistema magnético "visto" por los dos platos de acero



puede ser considerada como una frontera de potencial cero. La frontera magneto/acero es similar, ya que, la permeabilidad aparente de la mayoría de los magnetos son comparables con μ_0 .

Considerando el arreglo de magnetos de la Figura 4.9, los polos imagen están colocados de acuerdo con las condiciones de frontera. Es suficiente, normalmente, considerar la vecindad inmediata de los polos en cada dirección para satisfacer las condiciones de frontera en ambos centros de línea neutral.

Para calcular el potencial, ψ , los polos "en línea" necesitan únicamente usar un nuevo valor de x ; en la distancia r deducida para el magneto base; con el signo apropiado de M_s . Los polos adyacentes, (ver Figura 4.10), también requieren, las siguientes transformaciones en la distancia r

$$y \text{ con } y-Y$$

y

$$z \text{ con } z-Z$$

donde

$$Y = R \text{ sen } \delta$$

$$Z = -R(1-\text{cos}\delta)$$

y

$$\delta = \frac{360}{\text{polos}} .$$



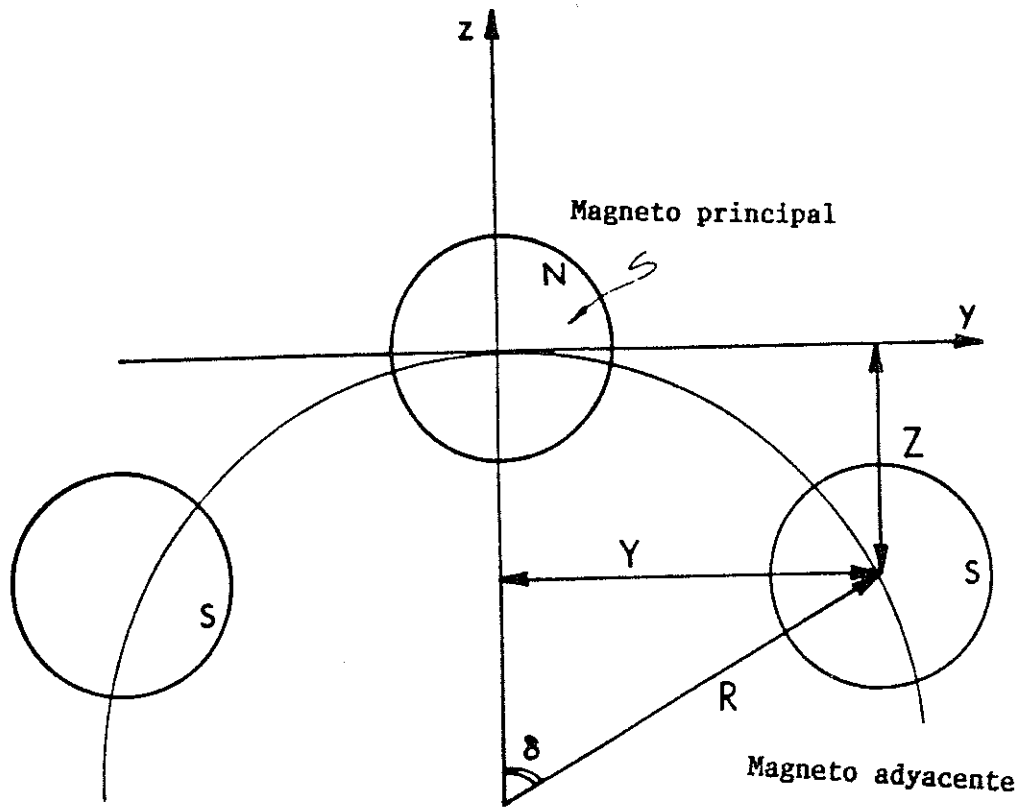


Figura 4.10. Transformación del polo adyacente



4.6 Resumen del método matemático utilizado para los cálculos de campo, considerando la distribución no uniforme de la magnetización en el volumen de los magnetos permanentes de las máquinas d.c. de campo axial

El potencial en cualquier punto debido a un magneto permanente esta dado por la ecuación:

$$4\pi\psi = \int_A \frac{\underline{M}_s}{r} dA - \int_V \frac{\text{div}\underline{M}}{r} dv \quad (1.27)$$

Para encontrar el potencial, la distribución de la magnetización \underline{M}_s , en la superficie del magneto y en los lados, se debe encontrar y, también, la distribución de la magnetización a través de todo el volumen del magneto.

Se considera el uso de una magnetización uniforme J_{x0} a través de todo el volumen del magneto en la dirección anisotrópica solo para cálculos iniciales, es decir, $\nabla \cdot \underline{M} = 0$. Entonces la distribución del potencial inicial, ψ , a través de todo el volumen del magneto se puede encontrar, usando la ecuación,

$$4\pi\psi\mu_0 = \int_A \frac{J_{x0}}{r} dA \quad (1.28)$$

De aquí se calcula H1 mediante:

$$H1 = -\nabla\psi \quad (4.4)$$

la distribución de campo, H1, a través del volumen del magneto es entonces determinado. Hasta aquí se han tratado los magnetos



de Alnico como si tuvieran una curva de desmagnetización uniforme al igual que los magnetos de ferrita o magnetos de SmCO5. Esta similitud entre estos termino aquí.

En la Figura 4.4 se muestra la relación vectorial que existe entre \underline{B} , \underline{H} y \underline{J} en los magnetos de Alnico. La desmagnetización y rotación del remanente J_r , es debido a la auto-desmagnetización del campo \underline{H} , creado por J_r . Por consiguiente, para cualquier ángulo de rotación dado θ , la curva de desmagnetización se describe por el vector \underline{J} . \underline{J} se resuelve en dos componentes mutuamente perpendiculares, J_x en la dirección x y J_t en la dirección transversal t.

En la dirección x, la curva de desmagnetización (segundo cuadrante) para la condición 0° (Figura 2.10a del anexo 1) describe las condiciones del magneto, y la ecuación (4.11) da el valor final de J_x , es decir,

$$J_x = J_{x0} + \mu_0 H_1 \chi_1(H_1) \quad (4.11)$$

En la dirección transversal t, la magnetización transversal, J_t , la cual ocurre solo en materiales con curva de desmagnetización no lineal, se encuentra utilizando una versión aproximada de la ecuación (3.71), la cual da la ecuación (4.21), para J_t ;

$$J_t = \frac{J_x^2}{2(K_1 + K_f)} H_t \quad (4.21)$$

J_x es calculada anteriormente por medio de la ecuación (4.11), H_t se determina por el valor de la intersección de la curva de desmagnetización con el eje vertical dividido entre μ_0 , K_1 y K_f



son determinados como se explicó en el capítulo 4, donde se obtuvieron los valores 20.3 kJ/m^3 , 13.70 kJ/m^3 respectivamente. Por lo tanto, J_t se determina sustituyendo J_x , H_t , K_l y K_f en la ecuación (4.21). Entonces se encuentra la distribución de superficie sobre la cara del magneto la cual viene dada por: $\mu_0 J_x$ y la distribución de la magnetización sobre los lados la cual es $\mu_0 J_t$. Aun más debido a que \underline{M} viene dada por

$$\underline{M} = (J_t + J_x)\mu_0.$$

$\text{div} \underline{M}$ es calculada más fácilmente. El valor final de \underline{H} se calcula aplicando el gradiente a la ecuación (1.27) lo que da

$$4\pi\mu_0 \underline{H} = - \int_{\underline{A}} \left(\frac{\underline{J} \cdot d\underline{A}}{r} \right) + \int_{\underline{V}} \left(\frac{\nabla \cdot \underline{J}}{r} \right) dv \quad (4.12)$$

(la ecuación anterior se resuelve por metodos numéricos).

Si se calcula la distribución de la densidad de flujo sobre la cara de un magneto (magneto principal), el valor total es la suma de la distribución de flujo debido al magneto base mas los valores de las distribuciones de flujo debido a los polos imagen y adyacentes.

4.7 Resultados

La solución integral del campo tridimensional, se aplica a una máquina de magnetos permanentes, con 6 magnetos circulares de Alnico 5-7. Por conveniencia, la variación de la densidad de



flujo calculado, a lo largo de las líneas radiales y angulares sobre el centro del magneto, se presenta para diferentes longitudes de entrehierro, junto con los que se midieron. En esta instancia, se asume que los arrollamientos no están excitados y, por consiguiente, no llevan corriente.

Los valores de la densidad de flujo calculados y los medidos, para un entrehierro de 2 mm, están ploteados a lo largo de las líneas angular y radial, tal como se muestra en las Figuras 4.11 y 4.12, respectivamente. Los valores calculados de la densidad de flujo concuerdan con los medidos, aproximadamente, bien, excepto sobre los lados del magneto.

Para 3 y 4 mm de entrehierro, los valores calculados y medidos concuerdan mejor, debido al incremento del entrehierro principal, haciendo la distribución de flujo mucho más suave. Esto se puede ver en las figuras 4.13 y 4.14 para entrehierros de 3mm y las Figuras 5.15 y 5.16 para entrehierros de 4 mm, respectivamente.



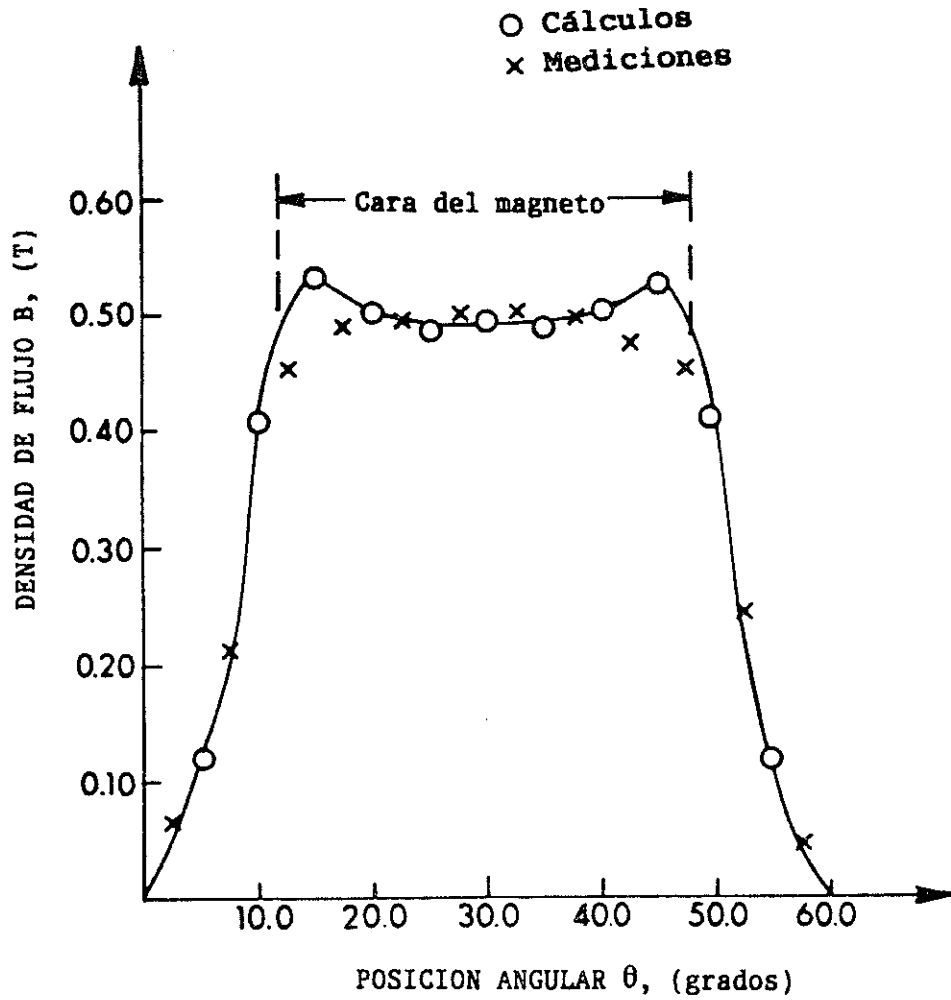
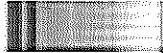


Figura 4.11. Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro del magneto para 2mm de entrehierro



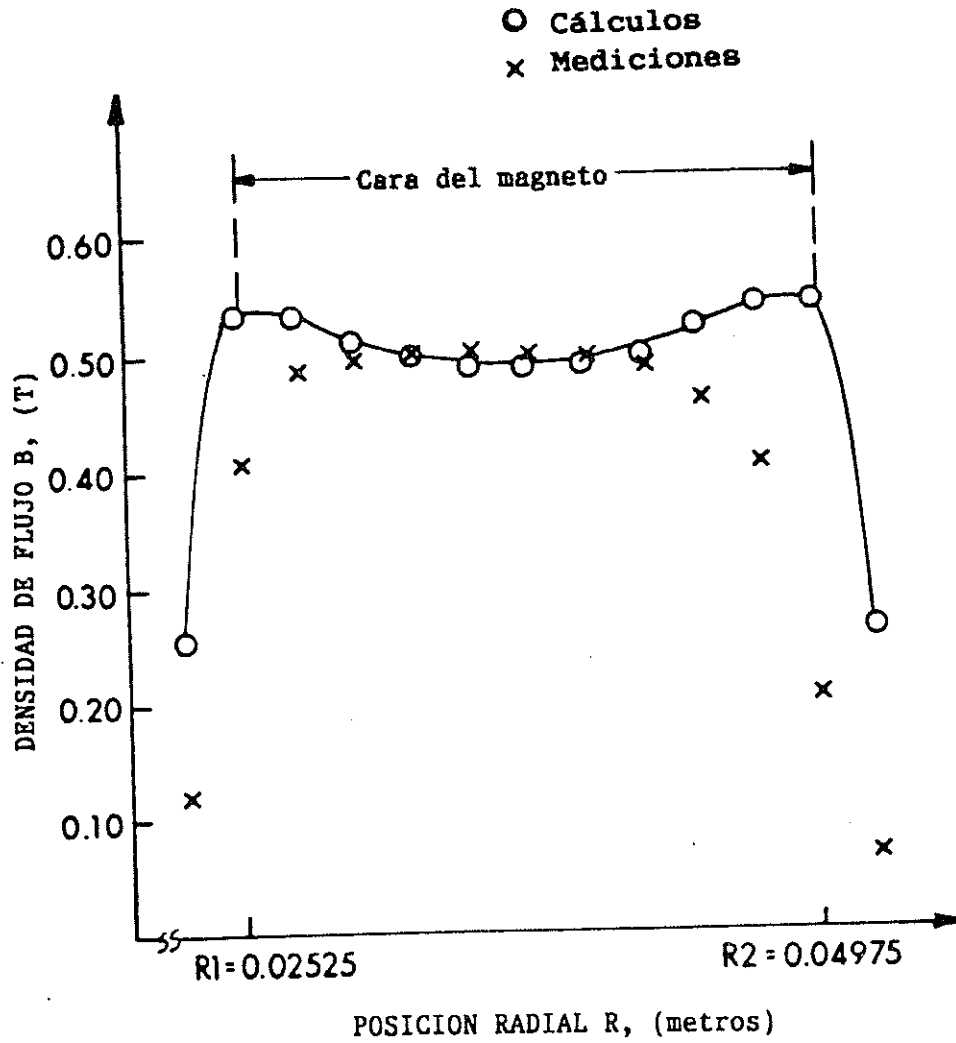


Figura 4.12. Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 2mm de entrehierro



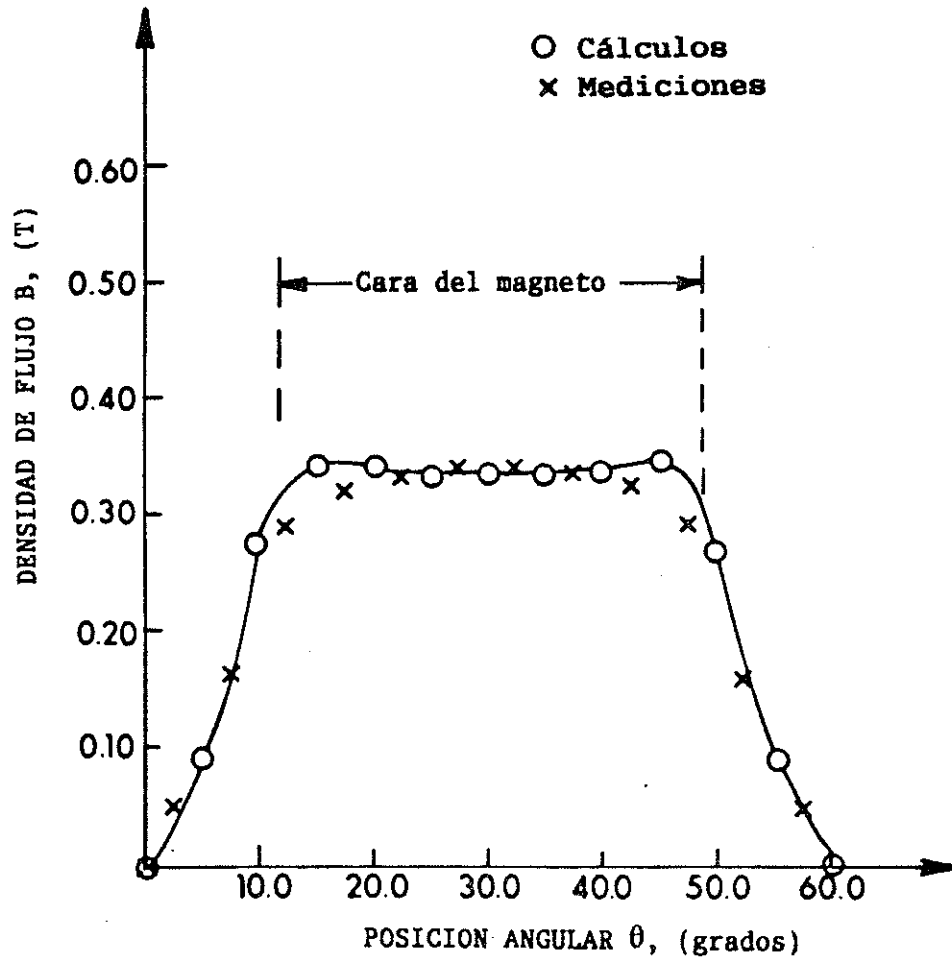
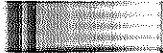


Figura 4.13. Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro del magneto para 3mm de entrehierro



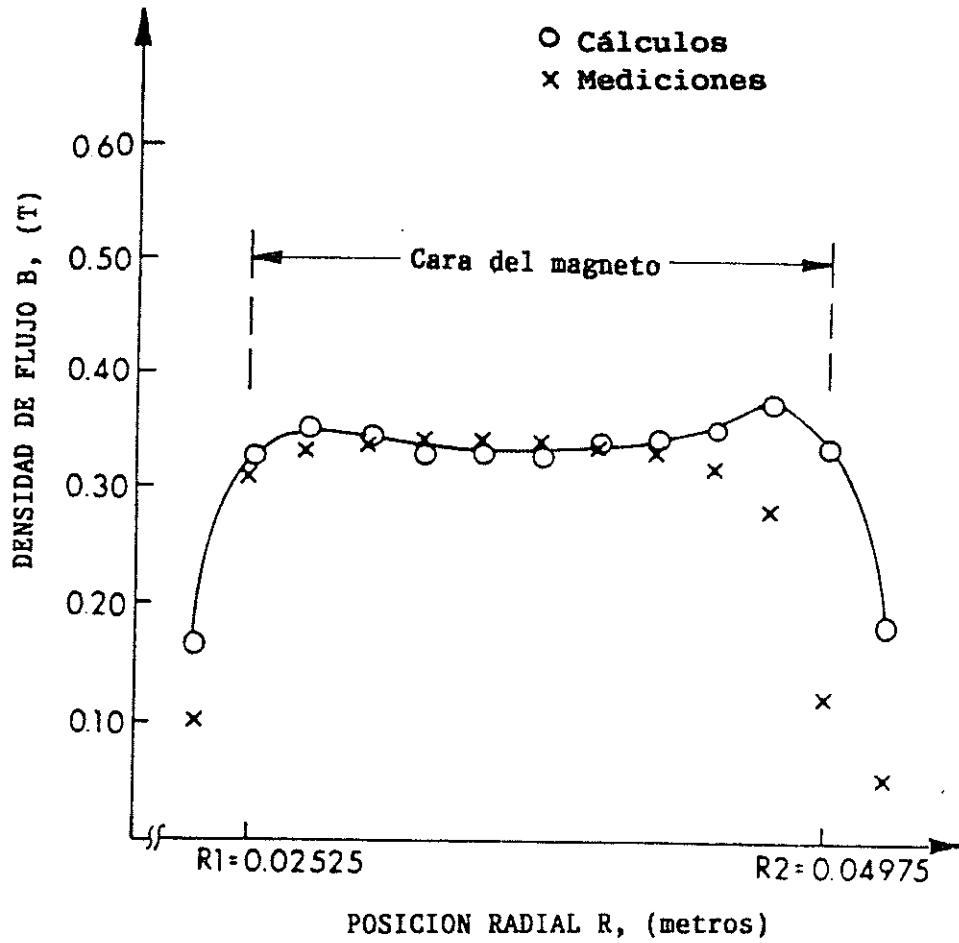
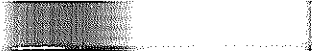


Figura 4.14. Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 3mm de entrehierro



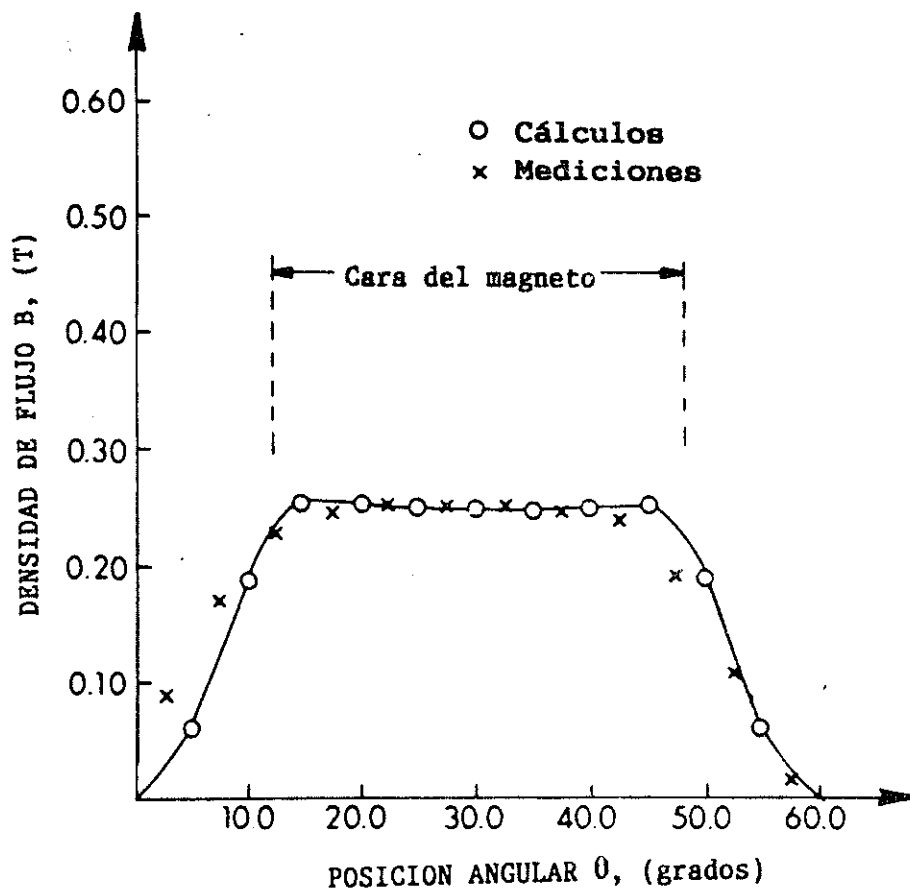


Figura 4.15. Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea angular sobre el centro del magneto para 4mm de entrehierro



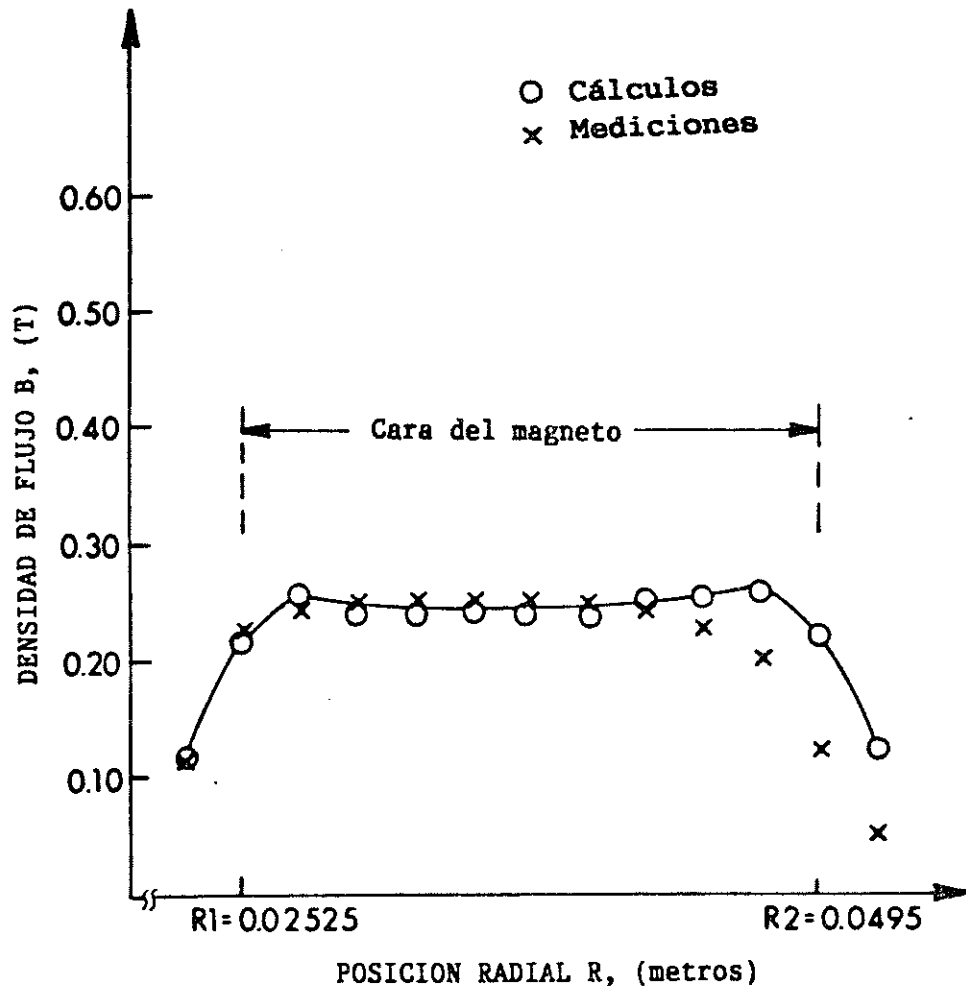


Figura 4.16 Variación de la densidad de flujo a lo largo de una línea radial sobre el centro del magneto para 4mm de entrehierro



CONCLUSIONES

1. Las curvas B-H son muy útiles y prácticas para obtener información de los materiales magnéticos, pero, no representan una condición típica de operación de un magneto.

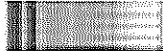
2. El resultado de representar la magnetización, \underline{J} , por dos componentes perpendiculares, como se indica en la sección 4.4 de esta tesis, muestra una aproximación buena. Sin embargo, para un modelo mejor de un magneto, se debe considerar que, además de la componente transversal, debe existir un interacoplamiento en medio de la componente anisotrópica representada por J_x , y la componente transversal representada por J_t .

3. El objetivo de este trabajo fue analizar una nueva técnica para los cálculos de campo en los motores d.c. de campos axiales considerando la distribución no uniforme de la magnetización en todo el volumen de los magnetos del motor. La comparación entre los campos medidos y los calculados para diferentes longitudes de entrehierro, muestra que hay bastante acercamiento entre sus valores. Esto indica que la forma adoptada para el modelo de Alnico 5-7 o cualquier otro material con características similares está bastante cercano a la realidad.



RECOMENDACIONES

1. Se recomienda para un trabajo de tesis futuro, una manipulación mas amplia de la ecuación (3.71) cuya deducción se muestra en este trabajo de tesis, debido a que puede describir el comportamiento de un material magnético con características similares al Alnico 5-7, en cualquier dirección para cualquier condición de carga, por lo que, puede ser utilizada para buscar la producción de un mejor magneto para dispositivos existentes y futuros.
2. Otro aspecto importante, para un trabajo de tesis futuro, es considerar el efecto de las corrientes circulantes en el rotor para los cálculos de campo.



REFERENCIAS

- [1] Campbell, P., "The magnetic Circuit of An-axial Field D.C. Electrical Machine, IEEE Trans., MAG-11, 154 (1975).
- [2] Campbell, P., "Energy conserved by Direct Drive of An Industrial Sewing Machine," Clothing Res. J., 6, 3 (1978).
- [3] Sommerfeld, A., "Electrodynamics," (Academic press, 1952) Ch. 12.
- [4] Becker, J.J., Luborsky, F.E., and Martin, D.L., "Permanent Magnet Material," IEEE Trans., MAG-4, 84-99 (1968).
- [5] Peter A. Thorton. Ciencia de los materiales para ingeniería. 2a. edición. México: Edit. Prentice Hall, 1,987. 48pp.
- [6] Hadfield, D., "Permanent Magnets and Magnetism," (London: Iliffe Books, and New York: Wiley, 1962) Ch. 5.
- [7] A. Malishev, et.al. Tecnología de los metales. 7a. edición. s.l.i.: Editorial Mir. 1987. 149pp.
- [8] Data Sheet, Metal Progress, 82, January (1968).
- [9] Strnat, K., Hoffer, G., Osten, J., Obstertag, W., and Becker, J.J., "A Family of New Cobalt-Base Permanent Magnet Material," J. Appl. Phys., 25, 1014 (1954).



- [10] Halliday Resnick. Fisica Parte II. 12a edición. México: Editorial Continental, 1,979. 1175 pp.
- [11] Nesbitt, E.A., William, H.J. and Buzorth, R.M., "Factors Determining the Permanent Magnet Properties of Single Crystal of Fe₂NiAl," J. Appl. Phys., 25, 1014 (1954).
- [12] Binns, K.J., Jabbar, M.A, and Bernard, W., "A Rapid Method of Computation of the Magnetic Field of Permanent Magnets," IEEE Trans., MAG-11, 1538 (1975).
- [13] Harrold, W.J., "Calculation of Equipotentials and Flux Lines in Axially Symmetrical Permanent Magnet Assemblies by Computer." IEEE Trans., MAG-8, 23.
- [14] Campbell, p., and Al-Murshid, S.A., "The Effect of Magnetization Distribution Within Anisotropic Alnico Magnets Upon Field Calculations," IEEE Trans., MAG-16, 1032 (1980).



BIBLIOGRAFIA

- (1) Fitzgerald A. E., **Teoría y análisis de las máquinas eléctricas**. 2a. edición. España: Editorial Hispano Europea. 198 pp.

- (2) Hayt William, **Teoría Electromagnética**. 4a. edición. México: Editorial McGraw-Hill. 1979. 233-335 pp.

- (3) Leander W, **Máquinas electromagnéticas y electromecánicas**. México: Editorial Alfaomega. 1979. 190 pp.

- (4) Witold Brostow, **Introducción a la ciencia de los materiales**. México: Editorial Limusa. 1981. 207-217 pp.



ÁPENDICE A

ÁNGULO CRÍTICO DE ANISOTROPÍA DE FORMA

La relación entre el ángulo del campo θ_0 , el ángulo de magnetización θ y el ángulo entre ellos ϕ , es dada por la ecuación (3.11)

$$\theta_0 = \theta + \phi. \quad (\text{A.1})$$

Cuando θ es el ángulo crítico θ_c , la magnetización empezará a invertirse y la ecuación (A.1) viene a ser

$$\theta_0 = \theta_c + \phi_c \quad (\text{A.2})$$

Para la anisotropía de forma, la relación entre θ_c y ϕ_c es dada por la ecuación (3.27)

$$\tan 2\theta_c = -2 \tan \phi_c. \quad (\text{A.3})$$

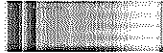
Sustituyendo la ecuación (A.2) en ecuación (A.3) se obtiene,

$$\tan 2\theta_c = -2 \tan(\theta_0 - \theta_c). \quad (\text{A.4})$$

Usando las identidades

$$\tan 2\theta = 2 \left[\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right]$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} .$$



La ecuación (A.4) viene a ser

$$2 \left[\frac{\tan\theta_c}{1-\tan^2\theta_c} \right] = -2 \left[\frac{\tan\theta_0 - \tan\theta_c}{1+\tan\theta_0\tan\theta_c} \right]$$

por lo tanto,

$$\tan\theta_c + \tan\theta_0 \tan^2\theta_c = -\tan\theta_0 + \tan\theta_c + \tan\theta_0 \tan^2\theta_c - \tan^3\theta_c$$

y en consecuencia,

$$\tan^3\theta_c = -\tan\theta_0. \quad (\text{A.5})$$

Esta es la ecuación (3.29).



APENDICE B

**CAMPO CRÍTICO NORMALIZADO DE ANISOTROPÍA DE FORMA
PARA CUALQUIER ÁNGULO CRÍTICO**

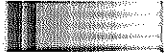
El campo normalizado de anisotropía de forma, h , para cualquier ángulo de campo, θ_0 , y, ángulo de magnetización, θ , es dado por la ecuación (3.19)

$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{sen}2\theta}{2\text{sen}(\theta_0-\theta)} \\ &= \frac{\text{sen}2\theta}{2\text{sen}\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para el valor crítico de h , la ecuación (B.1) viene a ser

$$h_c = \frac{\text{sen}2\theta_c}{2\text{sen}\theta_c} \quad (\text{B.2})$$

El campo crítico normalizado, h_c , también es dado por la ecuación (3.16)



$$hc = \frac{\cos 2\theta_c}{\cos \theta_c} . \quad (\text{B.3})$$

Usando la identidad

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

y sustituyendo los valores de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ de las ecuaciones (B.3) y (B.2) respectivamente en la identidad, se obtiene

$$\left[\frac{\cos 2\theta_c}{h_c} \right]^2 + \left[\frac{\sin 2\theta_c}{2h_c} \right]^2 = 1$$

Reordenando se obtiene:

$$4h_c^2 = \sin^2 2\theta_c + 4\cos^2 2\theta_c .$$

Usando la identidad de nuevo y sustituyendo para el valor de $\cos^2 2\theta_c$, obtenemos

$$4h_c^2 = \sin^2 2\theta_c + 4(1 - \sin^2 2\theta_c)$$

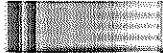
por lo tanto:

$$4h_c^2 = 4 - 3\sin^2 2\theta_c$$

y por consiguiente

$$h_c^2 = 1 - (3/4)\sin^2 2\theta_c . \quad (\text{B.5})$$

ésta es la ecuación (3.29)



APÉNDICE C

CAMPO CRÍTICO NORMALIZADO DE ANISOTROPÍA DE CRISTAL
PARA CUALQUIER ÁNGULO CRÍTICO

El campo crítico normalizado de anisotropía de cristal, h , para cualquier ángulo de campo θ_0 y ángulo de magnetización θ , es dado por la ecuación (3.39).

$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{sen}4\theta}{4\text{sen}(\theta_0-\theta)} \\ &= \frac{\text{sen}4\theta}{4\text{sen}\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Para el valor crítico de h , la ecuación (c.1) viene a ser

$$h_c = \frac{\text{sen}4\theta_c}{4\text{sen}\theta_c} \quad (\text{C.2})$$

El campo crítico normalizado también es dado por la ecuación (3.36)

$$h_c = - \frac{\text{cos}4\theta_c}{\text{cos}\theta_c} \quad (\text{C.3})$$

Usando la identidad

$$\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$



y sustituyendo los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ de las ecuaciones (C.3) y (C.2) respectivamente en la identidad, obtenemos

$$\left[\frac{\cos 4\theta_c}{h_c} \right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen} 4\theta_c}{4h_c} \right]^2 = 1.$$

Reordenando se obtiene

$$\begin{aligned} 16h_c^2 &= (2\operatorname{sen}2\theta_c \cos 2\theta_c)^2 + 16(\cos^2 2\theta_c - \operatorname{sen}^2 2\theta_c)^2 \\ &= 4\operatorname{sen}^2 2\theta_c \cos^2 2\theta_c + 16\cos^4 2\theta_c + 16\operatorname{sen}^4 2\theta_c \\ &\quad - 32\operatorname{sen}^2 2\theta_c \cos^2 2\theta_c \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} 16h_c^2 &= 16[\operatorname{sen}^2 2\theta_c + \cos^2 2\theta_c]^2 - 60\operatorname{sen}^2 2\theta_c \cos^2 2\theta_c \\ h_c^2 &= 1 - (15/16)(2\operatorname{sen}2\theta_c \cos 2\theta_c)^2 \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$h_c^2 = 1 - (15/16)\operatorname{sen}^2 4\theta_c. \quad (\text{C.5})$$

Esta ecuación es la (3.45)



APÉNDICE D

CAMPO CRÍTICO DE ANISOTROPÍA MIXTA
PARA CUALQUIER ÁNGULO

El campo H_{ci} de anisotropía mixta para cualquier ángulo de campo θ_0 , y ángulo de magnetización θ , es dado por la ecuación (3.50)

$$H_{ci} = \frac{2H_{ci_f} \text{sen} 2\theta + H_{ci_c} \text{sen} 4\theta}{4 \text{sen} \theta} \quad (D.1)$$

Para el valor crítico de H_{ci} , la ecuación (D.1) viene a ser

$$H_{ci_c} = - \frac{2H_{ci_f} \text{sen} 2\theta_c + H_{ci_c} \text{sen} 4\theta_c}{4 \text{sen} \theta_c} \quad (D.2)$$

El campo crítico, H_{ci_c} , también es dado por la ecuación (3.54)

$$H_{ci_c} = - \frac{H_{ci_f} \cos 2\theta_c + H_{ci_c} \cos 4\theta_c}{\cos \theta_c} \quad (D.3)$$

Usando la identidad

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

y sustituyendo los valores de $\cos \theta$ y $\text{sen} \theta$ de las ecuaciones (D.3) y (D.2) respectivamente en la identidad, obtenemos



$$1 = \left[\frac{Hci_f \cos 2\theta_c + Hci_c \cos 4\theta_c}{-Hci_n} \right]^2 + \left[\frac{2Hci_f \sin 2\theta_c + Hci_c \sin 4\theta_c}{4Hci_n} \right]^2$$

$$1 = \frac{Hci_f^2 \cos^2 2\theta_c + Hci_c^2 \cos^2 4\theta_c + 2Hci_f Hci_c \cos 2\theta_c \cos 4\theta_c}{Hci_n^2} + \frac{4Hci_f^2 \sin^2 2\theta_c + Hci_c^2 \sin^2 4\theta_c + 4Hci_f Hci_c \sin 2\theta_c \sin 4\theta_c}{16Hci_n^2}$$

$$16Hci_n^2 = 16Hci_f^2 \cos^2 2\theta_c + 16Hci_c^2 \cos^2 4\theta_c + 32Hci_f Hci_c \cos 2\theta_c \cos 4\theta_c + 4Hci_f^2 \sin^2 2\theta_c + Hci_c^2 \sin^2 4\theta_c + 4Hci_f Hci_c \sin 2\theta_c \sin 4\theta_c.$$

Usando la misma identidad, se obtiene:



$$\begin{aligned}
16Hci_{\mathbf{B}}^2 &= 16Hci_f^2 - 12Hci^2 \text{sen}^2 2\theta_c \\
&+ 16Hci_c^2 - 15Hci_c^2 \text{sen}^2 4\theta_c \\
&+ 32Hci_f Hci_c \cos 2\theta_c \\
&- 28Hci_f Hci_c \text{sen} 2\theta_c \text{sen} 4\theta_c
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
16Hci_{\mathbf{B}}^2 &= 16Hci_f^2 [1 - (3/4) \text{sen}^2 2\theta_c] \\
&+ 16Hci_c^2 [1 - (15/16) \text{sen}^2 4\theta_c] \\
&+ 16Hci_f Hci_c [2 \cos 2\theta_c - (7/4) \text{sen} 2\theta_c \text{sen} 4\theta_c]
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
Hci_{\mathbf{B}}^2 &= Hci_f^2 [1 - (3/4) \text{sen}^2 2\theta_c] + Hci_c^2 [1 - (15/16) \text{sen}^2 4\theta_c] \\
&+ 2Hci_f Hci_c \cos 2\theta_c [1 - (7/4) \text{sen}^2 2\theta_c]. \quad (\text{D.4})
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación (3.55)



ANEXO 1

CURVAS CARACTERISTICAS DEL MATERIAL ALNICO 5-7



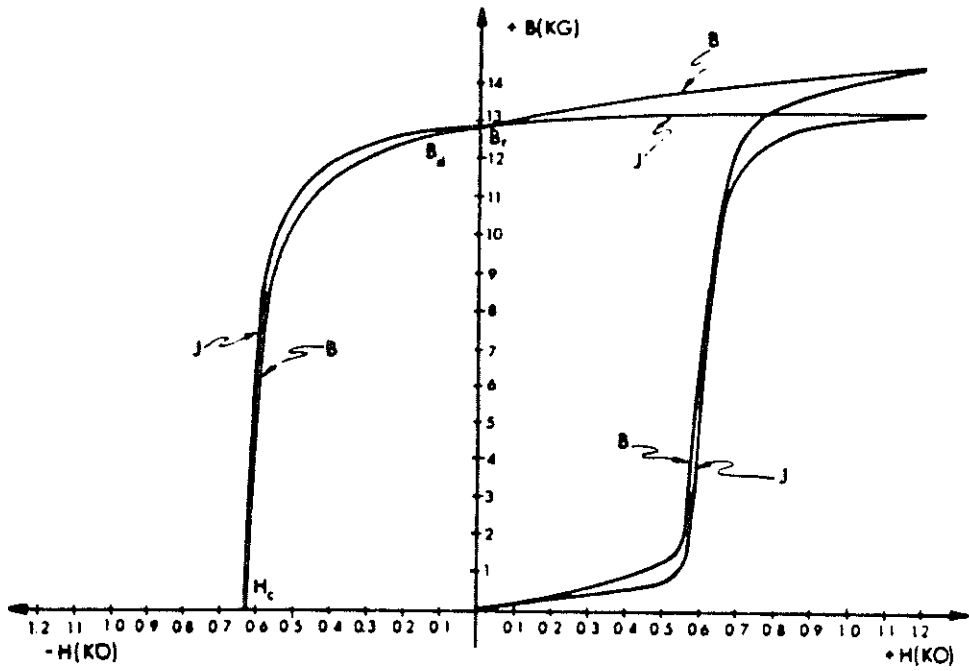


Figura 2.10 (a) B y J vs. H con $\theta_0 = 0^\circ$

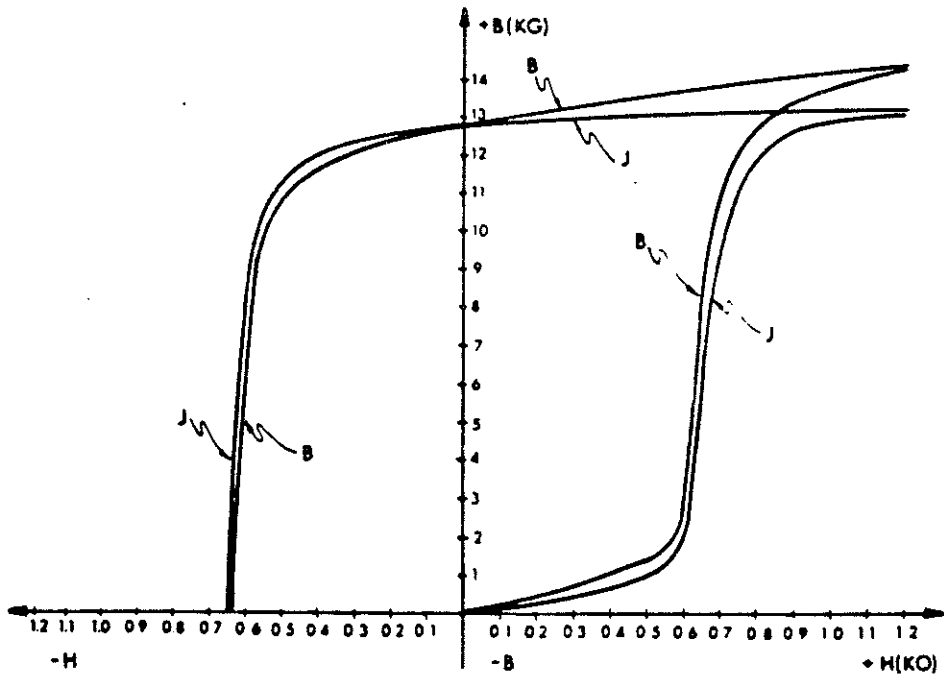


Figura 2.10 (b) B y J vs. H con $\theta_0 = 10^\circ$



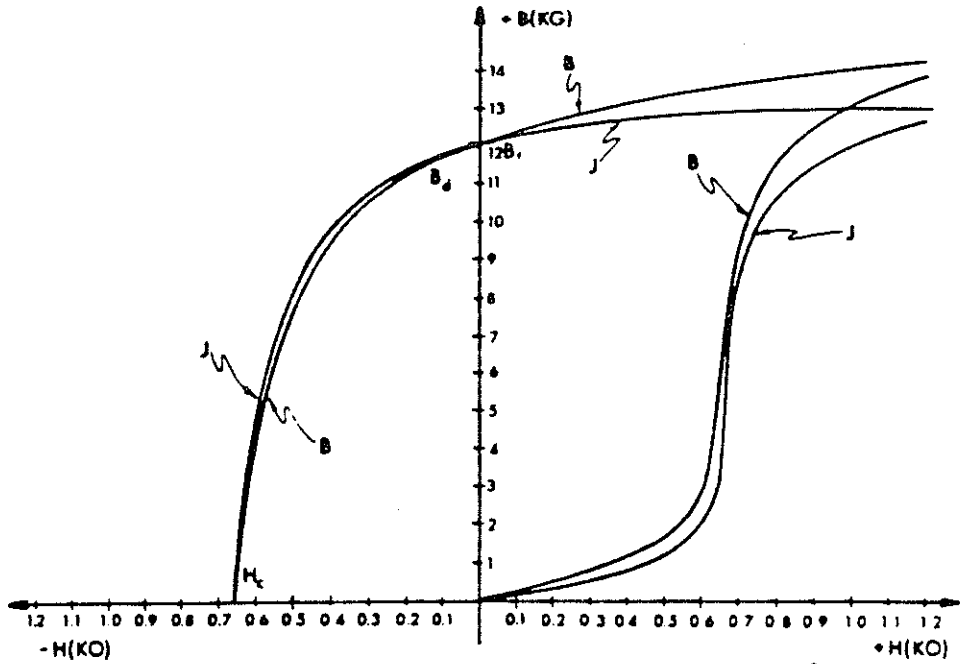


Figura 2.10 (c) B y J vs. H con $\theta_0 = 20^\circ$

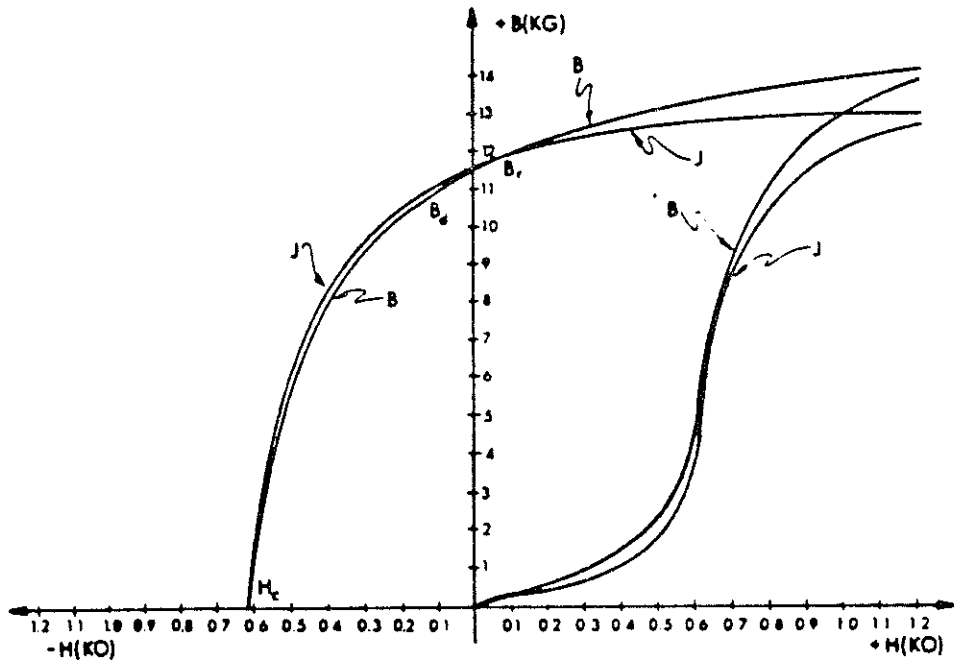


Figura 2.10 (d) B y J vs. H con $\theta_0 = 30^\circ$



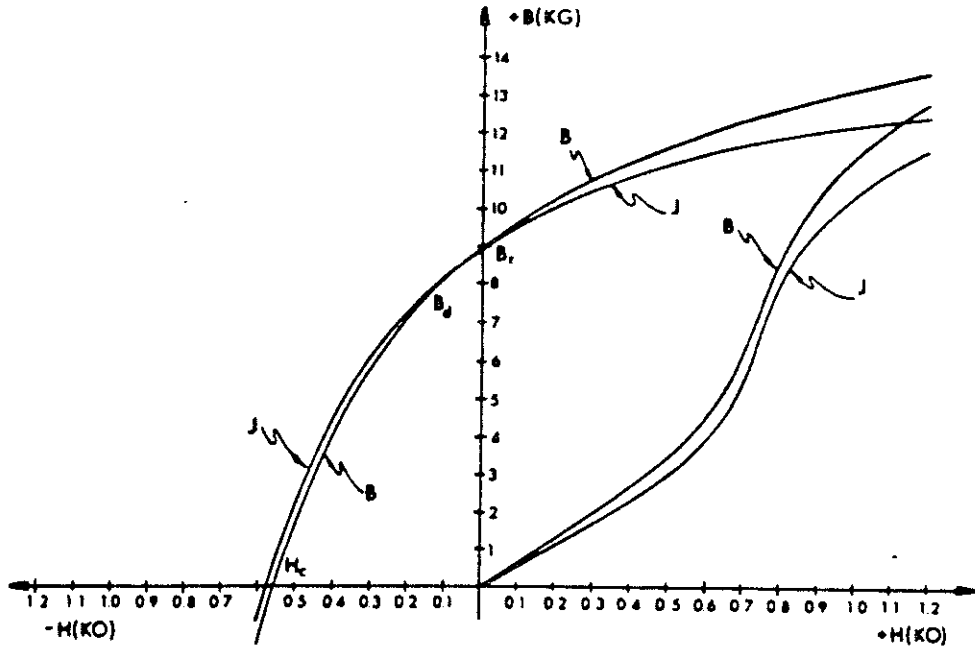


Figura 2.10 (e) B y J vs. H con $\theta_0 = 40^\circ$

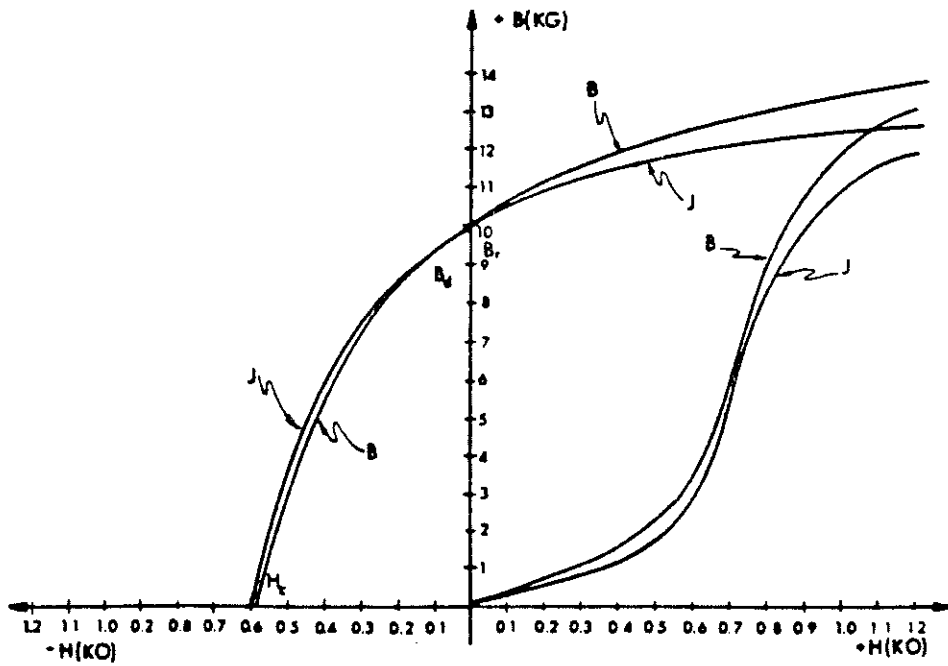


Figura 2.10 (f) B y J vs. H con $\theta_0 = 50^\circ$



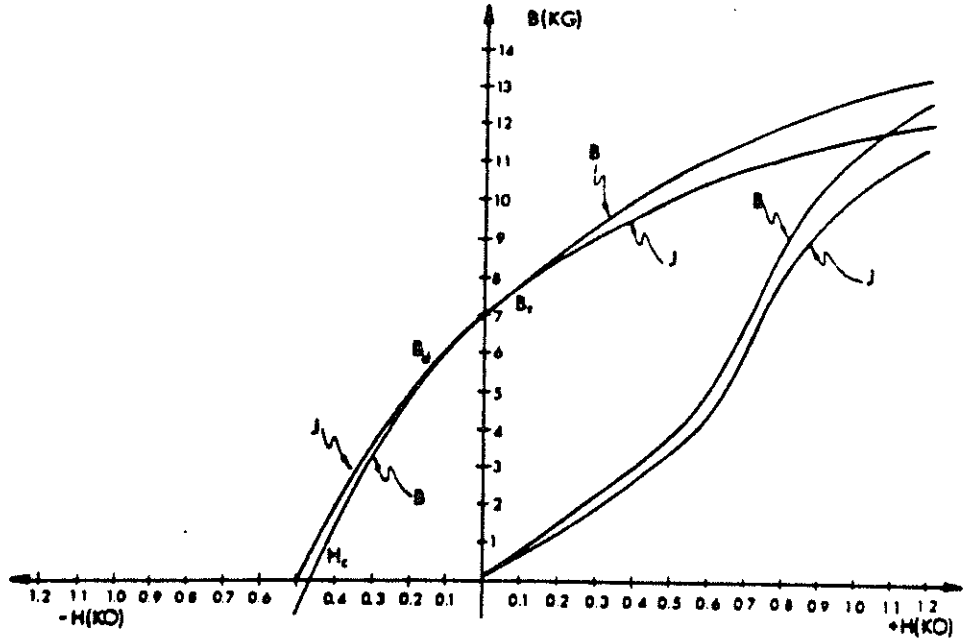


Figura 2.10 (g) B y J vs. H con $\theta_0 = 60^\circ$

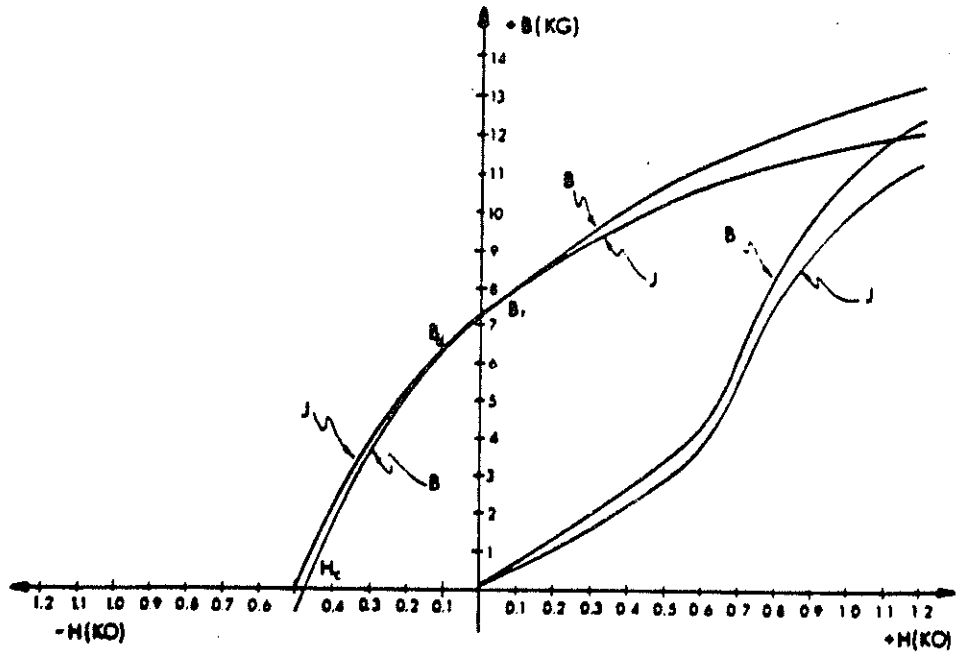


Figura 2.10 (h) B y J vs. H con $\theta_0 = 70^\circ$



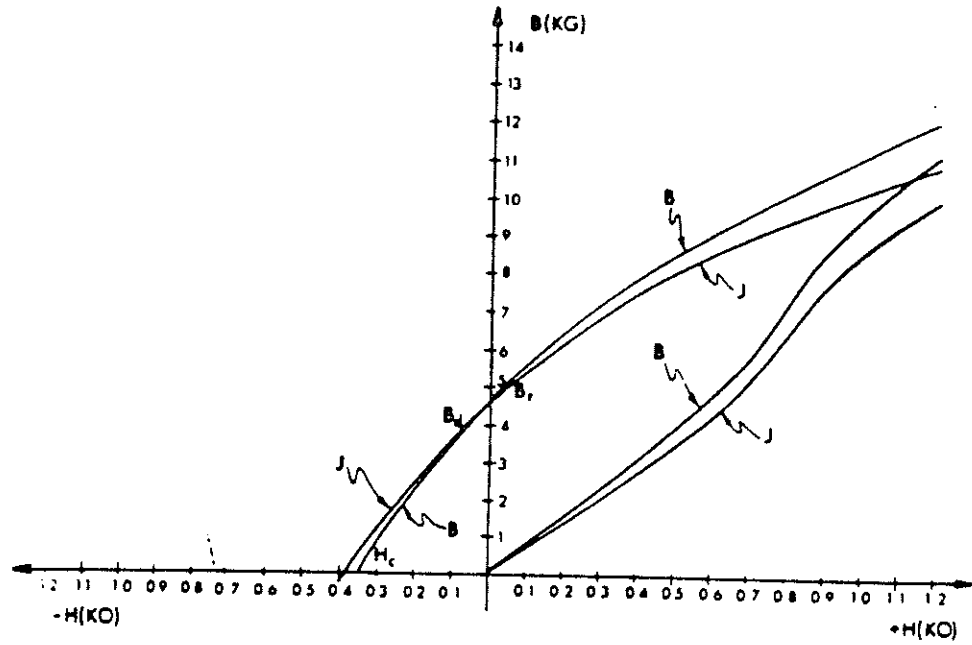


Figura 2.10 (i) B y J vs. H con $\theta_0 = 80^\circ$

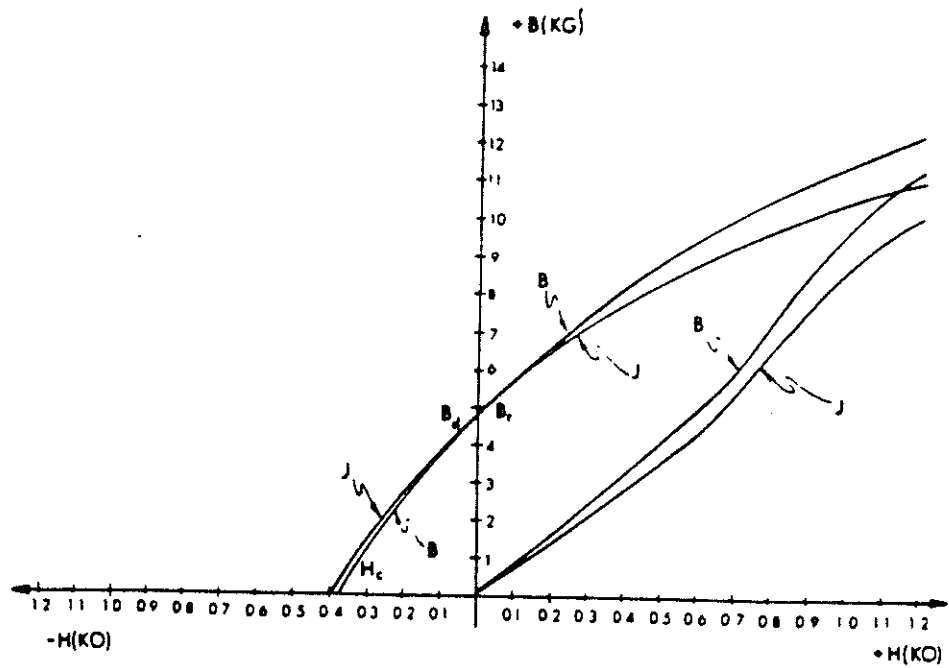


Figura 2.10 (j) B y J vs. H con $\theta_0 = 90^\circ$



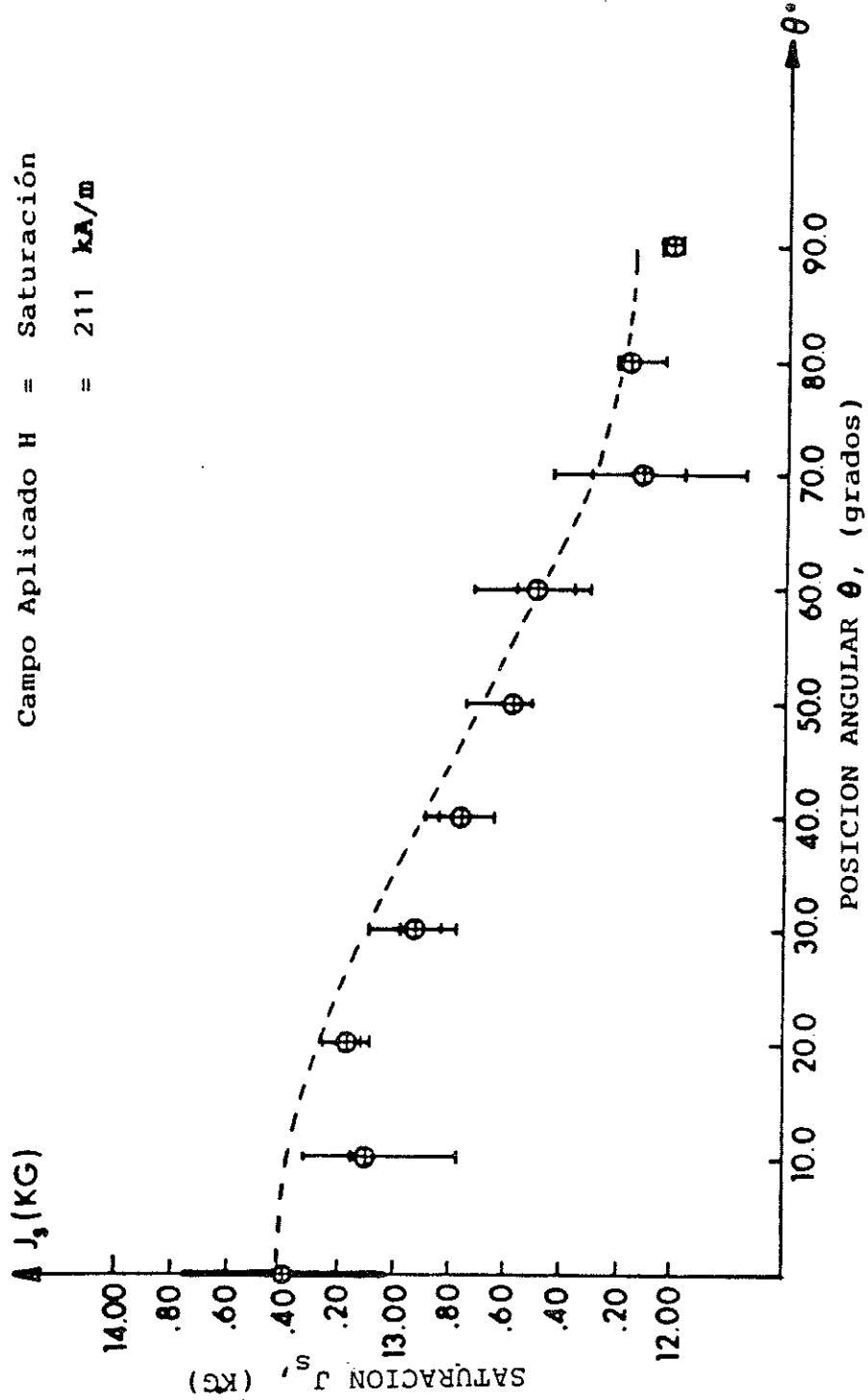
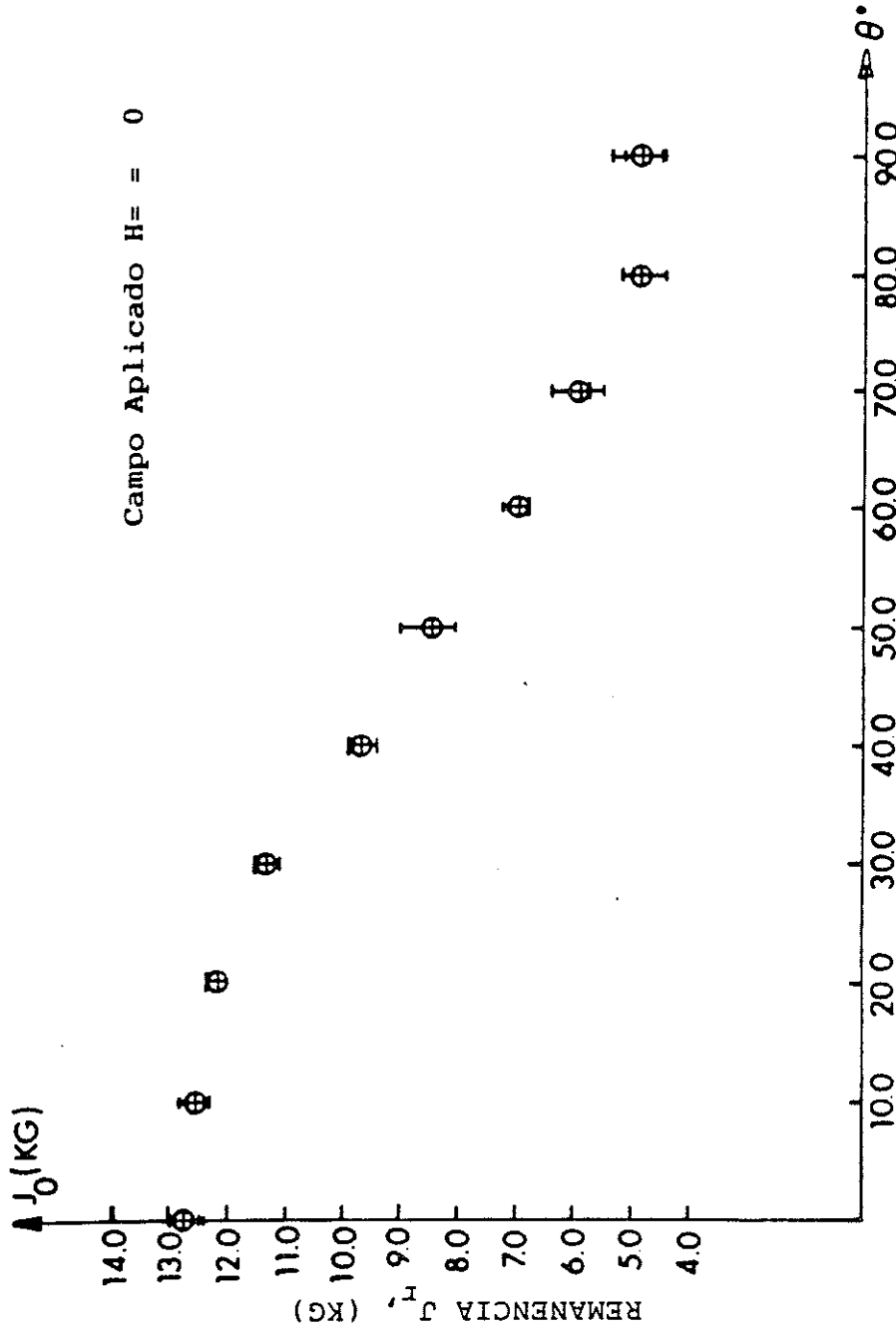


Figura 2.11. Variación de J en un campo de saturación en los ejemplos de los cubos de Alnico 5-7

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central





POSICION ANGULAR θ , (grados)

Figura 2.12. Variación de la remanencia en los ejemplos de los cubos de Alnico 5-7

