

Dr. ALBERTO JOSEF SANO I



# GUÍA

para el Laboratorio de  
Mecánica de Flúidos

héctor marroquín búcaro





**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**GUÍA PARA EL LABORATORIO  
DE MECÁNICA DE FLÚIDOS**

**T E S I S**

**PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD  
DE INGENIERIA**

**DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**POR**

**HÉCTOR ALFONSO MARROQUÍN BÚCARO**

**AL CONFERIRSELE EL TITULO DE**

**INGENIERO CIVIL**

**GUATEMALA, AGOSTO DE 1969**

TIP. SANCHEZ & DE GUISE  
8ª AVENIDA 12-58, ZONA 1.  
GUATEMALA, C. A.

**JUNTA DIRECTIVA**  
**DE LA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**  
**DE LA**  
**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**



DECANO. . . . . Ing. Amando Vides T.  
VOCAL 1º. . . . . „ Marco Antonio Cuevas  
VOCAL 2º. . . . . „ Francisco Ubieta B.  
VOCAL 3º. . . . . „ Adolfo Behrens  
VOCAL 4º. . . . . Br. Alfredo Bonatti  
VOCAL 5º. . . . . Br. Eliseo Osorio  
SECRETARIO. . . . . Ing. Héctor Centeno B.

**Tribunal que practicó el Examen General Privado.**

DECANO. . . . . Ing. Amando Vides T.  
VOCAL 2º. . . . . „ Francisco Ubieta B.  
EXAMINADOR. . . . . „ Abel Armas  
EXAMINADOR. . . . . „ Héctor Andrade  
SECRETARIO. . . . . „ Héctor Centeno B.

DEDICO ESTE ACTO:

*A Dios*

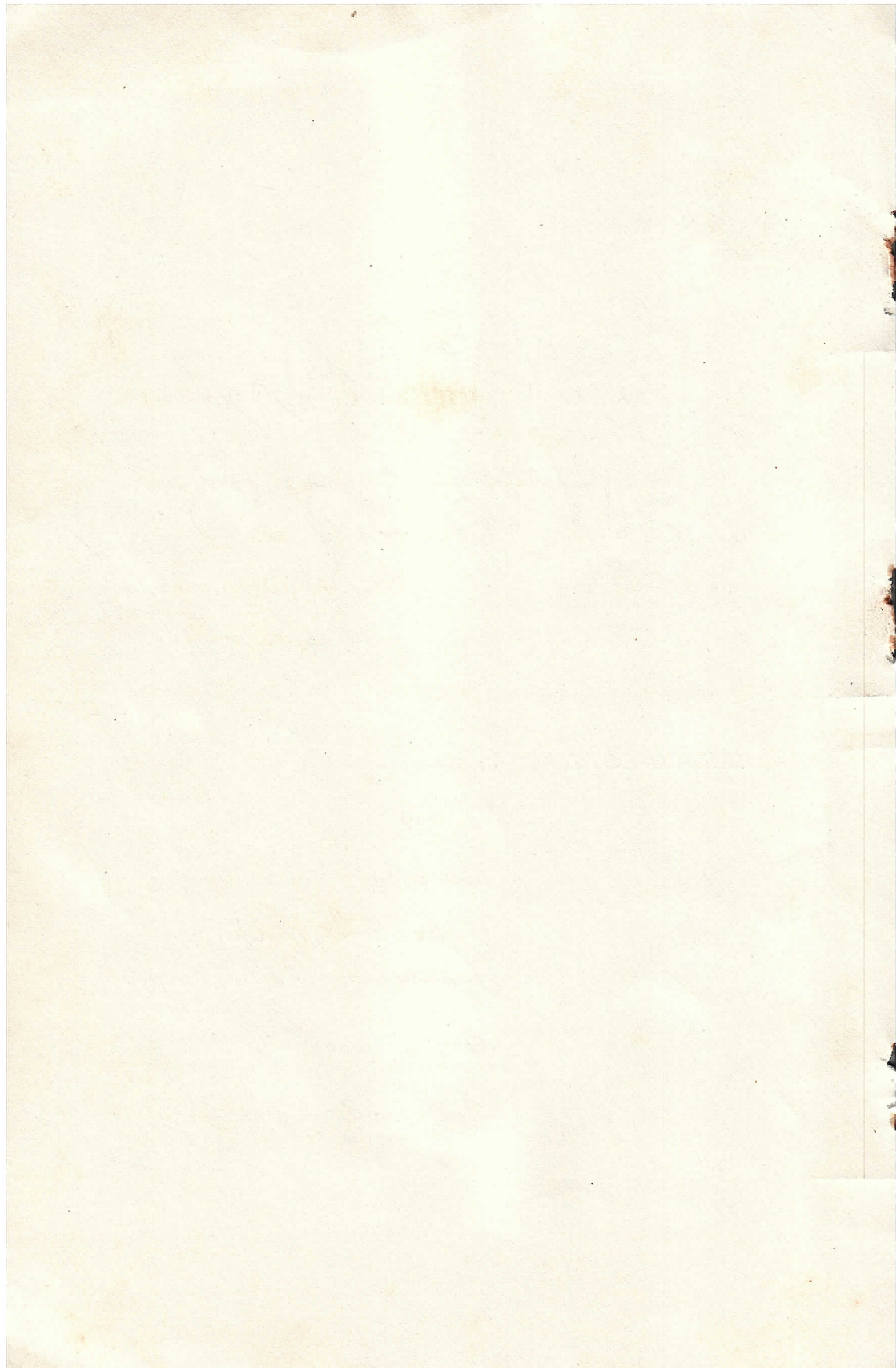
*A mis padres:*

*Héctor Marroquín M.*

*Josefina Búcaro de Marroquín*

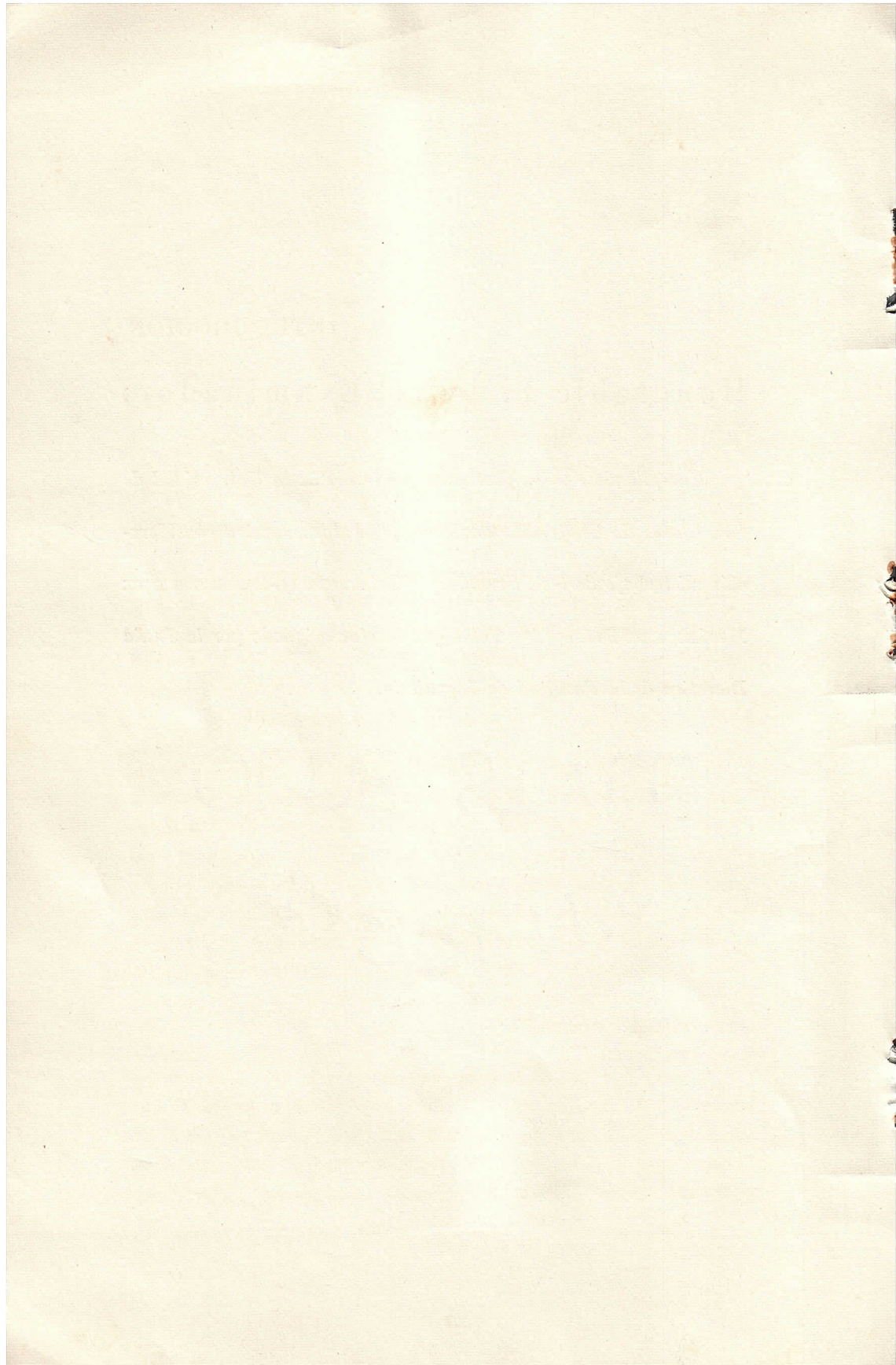
*A mi hermano*

*A mis familiares y amigos.*



## Honorable Tribunal Examinador:

*Cumpliendo con los preceptos que la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala establece, presento a vuestra consideración mi trabajo de tesis titulado: "GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MECÁNICA DE FLÚIDOS." Tema que me fue asignado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.*



## INTRODUCCION

El enorme desarrollo y progreso de la Mecánica de los Flúidos durante esta mitad de siglo se ha debido, sin duda alguna, a la perfecta compaginación entre la teoría desarrollada matemáticamente y la experimentación en el laboratorio para comprobar los anteriores principios, dando así origen a una ciencia relativamente nueva: la Mecánica de los Flúidos.

El objetivo primordial de este trabajo de Tesis es, en esencia, el poner de manifiesto la importancia que tienen los trabajos de experimentación en el laboratorio para la comprobación y el mejor entendimiento de los conceptos adquiridos en la clase teórica que sobre la materia en cuestión se imparte en esta Facultad.

Es, pues, mi deseo, como el mismo título lo sugiere, el que la Tesis sirva de guía al alumno que por vez primera se enfrenta a las pruebas del Laboratorio de Flúidos. Se espera que los lineamientos generales que a continuación se exponen, sean aprovechados lo mejor posible, considerando siempre sus naturales limitaciones y se llama la atención en el hecho de que los pasos determinados que se siguen en cada experimento no son los únicos ni los mejores, son sencillamente, una de las tantas formas de desarrollar las pruebas, dejando en este sentido el campo abierto a la imaginación e inventiva del alumno.

Quiero, por último, esbozar brevemente, la forma en que se presenta este trabajo. En el Primer Capítulo se sintetiza lo que a nuestro juicio constituye la esencia o fundamento teórico de la Mecánica de Flúidos, las cinco ecuaciones básicas, presentadas en su forma más general: la Ecuación de Hidrostática, la de Conti-

nuidad, la de Cantidad de Movimiento, la de Bernouilli y las de Navier-Stokes que son todas ellas y respectivamente, base de la Hidrostática, de la Cinemática, de la Hidrodinámica y de la Fricción. Si se comprende a fondo estas ecuaciones, pienso que ya no queda ningún obstáculo fuerte para el siguiente paso, la experimentación sistemática. En los capítulos subsiguientes, se presentan primero de un modo general los experimentos que se puede efectuar en cada una de las ramas principales en que se desglosa la Mecánica de los Flúidos, proponiendo lineamientos generales y luego se desarrolla un experimento completo para ilustración del método. Espero en esta forma poder cumplir, con lo mejor de mis posibilidades, con el objetivo del tema de tesis que se me asignó.

# CAPITULO I

## TEORIA BASICA

### 1.1.—Preámbulo.

En este capítulo se desarrollará la teoría elemental de la Mecánica de Flúidos. Se hará a grandes rasgos, pues no es el objetivo de este trabajo hacer un texto de la materia. Sin embargo, considero necesario tratar el tema en cuestión, pues a mi criterio, una de las razones fundamentales, tal vez la principal de todas, por la cual se hace difícil el desarrollo de cualquiera de los experimentos llevados a cabo en el laboratorio, es la poca comprensión de parte del alumno, de los principios en que descansan dichos experimentos.

El procedimiento a seguir en esta parte será el de establecer las ecuaciones de cada tema a tratar y luego analizarlas en su forma diferencial si posible, para deducir directamente todas las propiedades inherentes que luego se usarán.

### 1.2.—¿Qué es la Mecánica de Flúidos?

La Mecánica de Flúidos es la ciencia que trata de la mecánica de los líquidos y gases y está basada en los mismos principios fundamentales usados en la mecánica de sólidos.

Al igual que en los sólidos, el estudio del comportamiento mecánico de los flúidos se divide en dos grandes ramas. La primera es la Estática y estudia los flúidos en reposo. La segunda es la Dinámica que a su vez se subdivide en Cinemática e Hidrodinámica. La Cinemática trata el fenómeno del movimiento de los flúidos en sí, sin considerar las causas que le originan. La ecuación fundamental de la Cinemática es la de Continuidad. La Hidrodi-

námica es la parte de mayor interés práctico para el Ingeniero Civil. Estudia las causas que originan el flujo fluido. Tiene dos ecuaciones de trabajo, la de Euler y la de Cantidad de Movimiento, las dos derivadas de la segunda Ley de Newton.

### 1.3.—Hidrostática.

Estamos, como antes ya se afirmó, en el caso de fluidos en reposo con respecto a la tierra o en reposo con respecto a cualquier eje que se mueva en translación rectilínea a una velocidad constante con respecto a la tierra.

Debido a esta condición característica la suma de fuerzas en cualquiera dirección, ejercidas sobre el fluido tiene que ser igual a cero, y lo tendremos muy en cuenta para la deducción de la ecuación en la siguiente sección.

#### 1.3.1.—Ecuación Básica de la Hidrostática.

Lo primero, como en cualquier problema de Mecánica, hacemos un cuerpo libre de una partícula elemental de fluido (ver fig. N° 1.1). Según la Ley de Newton de la Viscosidad ( $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ ) si no hay desplazamiento relativo de una capa sobre otra de fluido, la fuerza de corte es igual a cero, pues no hay gradiente de velocidad y por lo tanto las únicas fuerzas actuantes son la presión ejercida sobre la partícula por el fluido restante y el peso propio del elemento diferencial de fluido.

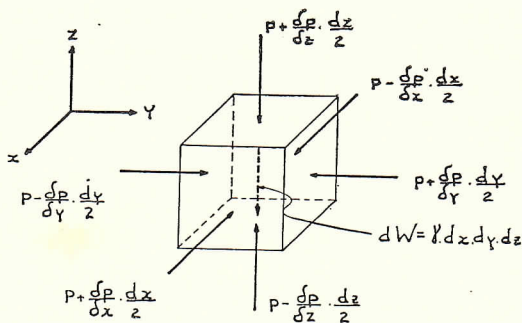


Fig. 1.1

Sabemos, por estática, que:

$$\underline{\Sigma F_z = 0}$$

$$\therefore \left( p - \frac{\delta p}{\delta z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \left( p + \frac{\delta p}{\delta z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - dW = 0$$

pero  $dW = \gamma (dx \, dy \, dz)$ , sustituyendo en la ec. ant. y simplif.

$$\therefore - \frac{\delta p}{\delta z} dz \, dx \, dy = \gamma (dx \, dy \, dz), \text{ lo cual simplificado nos da}$$

$$\text{que} \quad \frac{\delta p}{\delta z} = - \gamma \quad (1.1)$$

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$- \left( p + \frac{\delta p}{\delta x} \frac{dx}{2} \right) + \left( p - \frac{\delta p}{\delta x} \frac{dx}{2} \right) = 0, \text{ simplificando obtenemos}$$

$$\frac{\delta p}{\delta x} = 0 \quad (1.2)$$

$$\underline{\Sigma F_y = 0}$$

$$\left( p - \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2} \right) - \left( p + \frac{\delta p}{\delta y} \frac{dy}{2} \right) = 0, \text{ simplificando obtenemos}$$

$$\frac{\delta p}{\delta y} = 0 \quad (1.3)$$

De las ecuaciones 1.2 y 1.3 podemos deducir que la presión no varía en el plano xy y la única variación de la presión se da a lo largo del eje z. Es por ello que en la ecuación 1.1, en lugar de diferenciales parciales podemos escribir diferenciales totales, pues los cambios de las otras variables no la afectan.

De Ec. 1.1 llegamos a:

$$\frac{dp}{dz} = - \gamma$$

$$\therefore p = - \int \gamma \, dz \quad (1.4)$$

que es la Ecuación Fundamental de la Hidrostática.

### 1.3.2.—Propiedades de la Ecuación de la Hidrostática.

- a) El signo menos nos indica que la presión se incrementa en el sentido contrario que habíamos asumido. Ello indica que a mayor profundidad habrá mayor presión en el líquido, lo cual es lógico.
- b) La presión es constante a lo largo de cualquier plano  $xy$ , lo cual significa que en cualquier plano horizontal que se tome del fluido, la presión en todos los puntos será la misma. El inverso es también, por lo general, cierto. Por ejemplo si la superficie de los cuerpos de agua está expuesta al aire, a presión constante—la atmosférica— la superficie del agua es horizontal.
- c) Si  $p = f(z)$ ,  $dp/dz = f'(z)$  únicamente, y como  $-\gamma = dp/dz$ , el peso específico del líquido a un mismo nivel permanece constante en todos los puntos. Si el fluido es compresible, el signo negativo indica que el peso específico variará de un valor máximo en el fondo, a un valor mínimo en la superficie.
- d) Esta ecuación nos da la fuerza total ejercida por el fluido en un punto, o sea en un diferencial de área. Si quisiéramos la fuerza total en una superficie sumergida, tendríamos que sumar vectorialmente el conjunto de fuerzas en cada área elemental para así obtener la fuerza total. Se llama la atención en el sentido de que estas fuerzas sobre las áreas elementales son normales a dichas áreas, pues como no hay gradiente de velocidad, no pueden haber fuerzas tangenciales.

Si la superficie es plana, tendremos un sistema de fuerzas en un sentido y paralelas, por lo cual:

$$F_R = \sum F_z = \int p \, dA$$

pero  $p = \gamma h$  ( $h$ : distancia vertical desde la superficie hasta el área elemental  $dA$ ).

y substituyendo ésto en la ecuación anterior:

$$F_R = \int (\gamma h + p_o) dA$$

y para integrar esta expresión, tiene que ponerse  $h$  y  $dA$  en función de una sola variable de un sistema de ejes que contengan la superficie en cuestión.

Si se trata de una superficie curva, tendremos un sistema de fuerzas en dos o tres dimensiones, según el caso, por lo cual por medio del cálculo infinitesimal podemos obtener únicamente las componentes en cada dirección y luego sumamos éstas vectorialmente, obteniendo la fuerza resultante:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_z^2 + F_y^2}$$

- e) Basados en la ecuación de hidrostática, podemos también obtener la fuerza ejercida por un fluido sobre un cuerpo sumergido en él. Un cuerpo no es más que un volumen y un volumen es una composición de superficies. Como ya anteriormente se obtuvo la fuerza en una superficie,  $F = \int p dA$ , el problema se reduce a un problema corriente de estática.

Haciendo cuerpo libre de un volumen sumergido, ver fig. 1.2, en un líquido de peso específico constante:

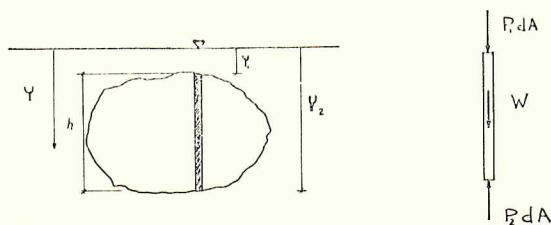


Fig. 1.2

Fuerza de Flotación =  $F_f = \Sigma F_v$  hacia arriba

$$p_2 dA - p_1 dA = dF_f$$

$$(p_2 - p_1) dA = dF_f$$

pero  $p = \gamma y$ , sustituyendo en la ec. anterior:

$$(\gamma y_2 - \gamma y_1) dA = dF_f$$

$$\gamma h dA = dF_f$$

$$\therefore F_f = \int_b^a \gamma h dA = \gamma \int_b^a h dA = \gamma \int_b^a d \text{ Vol} = \gamma \text{ Vol}$$

$$\therefore F_f = \gamma \cdot \text{Vol}_{\text{despl.}}$$

que es el principio de Arquímedes y el cual nos da el valor de la fuerza de flotación, también llamada empuje.

## 1.4.—Cinemática.

Estudiaremos el movimiento de los fluidos haciendo caso omiso de las causas que lo originan.

Como se sabe, hay varias clasificaciones de flujo, según la característica que se examine. En este trabajo únicamente se tratará con flujo permanente. Si el flujo es turbulento, también se puede clasificar como permanente si para el efecto se toma la velocidad media.

La ecuación fundamental de la cinemática es la de Continuidad, la cual se desarrolla seguidamente.

La demostración de esta ecuación se encuentra en una forma sencilla en todos los libros de la materia, sin embargo, resumo a continuación el desarrollo presentado por K. Brenkert, el cual debido a la orientación que se ha querido dar a esta parte de la tesis, me parece bastante interesante, pues llega a una ecuación diferencial bastante completa, abarcando aún el caso de flujo no permanente.

### 1.4.1.—Ecuación de Continuidad.

Los elementos que se van a usar en esta demostración son tres. Conviene definirlos bien al principio y no perderlos de vista a lo

largo del desarrollo, pues su diferenciación es fundamental para su entera comprensión.

El primero es un sistema de masa, constituido por una cantidad definida de fluido, que se mueve hacia afuera de un cierto volumen constante, (ver fig. 1.3).

El segundo elemento será, pues, un volumen que permanece fijo en el espacio y que por mayor facilidad será igual al espacio ocupado por el sistema de masa al tiempo "t." A este volumen se le llama volumen de control, (ver fig. 1.3), y a la superficie que le rodea, superficie de control.

El tercero es el fluido, el cual está en movimiento continuo y su volumen es infinito.

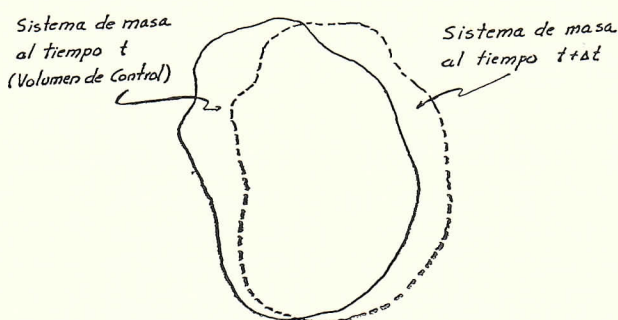


Fig. 1.3

Notación:

$\Delta m_o$  = parte del sistema de masa que se va fuera del volumen de control durante el tiempo  $\Delta t$ .

$\Delta m_i$  = parte del sistema de masa que entra al volumen de control durante el tiempo  $\Delta t$ .

$M_1$  = masa del sistema de masa al tiempo  $t$ .

$M_2$  = masa del sistema de masa al tiempo  $t + \Delta t$ .

$M'_1$  = masa en el volumen de control al tiempo  $t$ .

$M'_2$  = masa en el volumen de control al tiempo  $t + \Delta t$ .

Principio Base:

La materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma:

$$\text{Por lo tanto:} \quad M_1 = M_2 \quad (1.5)$$

$$\text{al tiempo } t, \quad M_1 = M'_1 \quad (1.6)$$

$$\text{al tiempo } t + \Delta t, \quad M_2 = M'_2 + \Delta m_o - \Delta m_i \quad (1.7)$$

Sustituyendo ec. 1.6 y 1.7 en la ec. 1.5:

$$M'_1 = M'_2 + \Delta m_o - \Delta m_i$$

$$\therefore 0 = (M'_2 - M'_1) + (\Delta m_o - \Delta m_i)$$

Dividiendo por  $\Delta t$  toda la ecuación, nos queda:

$$0 = \frac{(M'_2 - M'_1)}{\Delta t} + \frac{(\Delta m_o - \Delta m_i)}{\Delta t}$$

Aplicando límites cuando  $\Delta t$  tiende a 0:

$$0 = \frac{dM'}{dt} + \frac{dm_o - dm_i}{dt} \quad (1.8)$$

Vamos a continuación a analizar el significado de los términos de la ecuación anterior:

$\frac{dM'}{dt}$  : Acumulación negativa o positiva de masa dentro del control de volumen al variar el tiempo.

$\frac{dm_o - dm_i}{dt}$  : Velocidad de incremento neto de masa que sale de la superficie de control.

Analicemos ahora un diferencial de la superficie de control, (ver fig. 1.4).

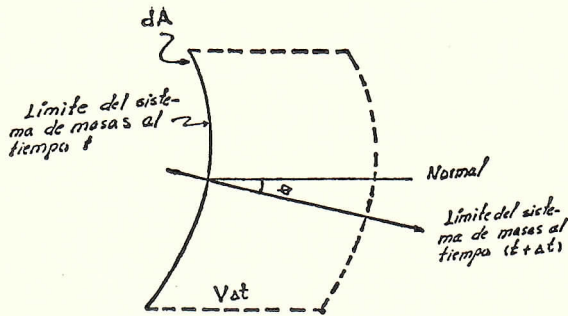


Fig. 1.4

El flujo total a través de toda el área durante  $dt$  se expresa como:

$$dm_o - dm_i = \int_A \rho (V \cos \theta) dA dt$$

Si integramos sobre la superficie de control,  $dt$  es constante:

$$dm_o - dm_i = dt \int_A \rho V \cos \theta dA$$

$$\frac{dm_o - dm_i}{dt} = \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (1.9)$$

Sustituyendo la ec. 1.9 en la ec. 1.8:

$$0 = \frac{dM'}{dt} + \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (1.10)$$

Pero la masa dentro del volumen de control es:

$$M' = \int_{vol} \rho dx dy dz \quad (1.11)$$

$$\text{Además } \rho = f(x, y, z, t)$$

Derivando la ec. 1.11 con respecto al tiempo:

$$\frac{dM'}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vol} \rho dx dy dz$$

Sustituyendo la ecuación 1.11 en la ecuación 1.10:

$$\frac{d}{dt} \int_{vol} \rho dx dy dz + \int_A \rho V \cos \theta dA = 0$$

que es la expresión diferencial del Principio de Continuidad en su forma más general.

#### 1.4.2.—Propiedades de la Ecuación de Continuidad.

- a) Para flujo permanente las características del fluido no varían con el tiempo. El primer término de nuestra ecuación se vuelve cero, y simplificando la ecuación general nos queda:

$$\int_A \rho V \cos \theta \, dA = 0$$

- b) Para flujo incompresible, la densidad es constante, por lo que se puede sacar del integral:

$$\rho \int_A V \cos \theta \, dA = 0$$

y por tanto  $\int V \cos \theta \, dA = 0$

- c) Si se toma la superficie de contacto normal a la velocidad, y ésta, o su promedio, permanecen constantes, llegamos a:

$$V \int dA = 0$$

$$V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0$$

y por lo tanto  $V_1 A_1 = - V_2 A_2$

que es la expresión más conocida del Principio o Ecuación de Continuidad.

#### 1.5.—Hidrodinámica.

Analizaremos en esta sección los factores que afectan el movimiento del fluido. Esta es la parte más importante para nuestra tesis, pues la hidrodinámica, debido a su complejidad ha hecho un uso intenso del laboratorio experimental para ayudar a establecer las diferentes características del flujo.

### 1.5.1.—Ecuación de Euler.

Para deducir esta ecuación, se parte de la segunda ley de Newton. No se tomará en cuenta el efecto de la viscosidad de los flúidos y por lo tanto no existirán fuerzas de corte en el análisis. En la última parte de este capítulo se hará un estudio de la fricción y sus consecuencias en el movimiento de los flúidos.

A continuación, ver fig. 1.5, tomaremos un cuerpo libre de una parte de flúido comprendida entre dos líneas de corriente.

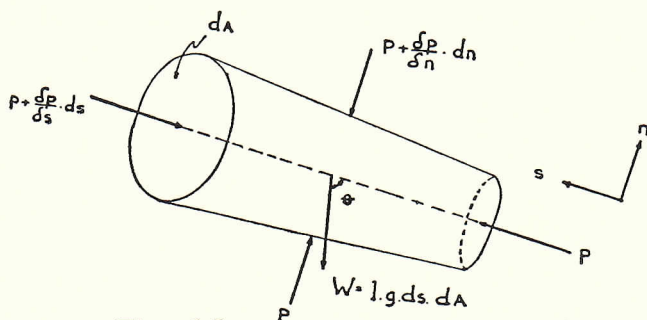


Fig. 1.5

La segunda Ley de Newton puede expresarse también como:

$$\Sigma F_s = \frac{d(M V_s)}{dt} \quad (1.12)$$

Si observamos la fig. 1.5, vemos que la suma de fuerzas a lo largo del eje s—s es:

$$\Sigma F_s = p \, dA - \left( p + \frac{\delta p}{\delta s} \, ds \right) dA - \rho g \, dA \, ds \, \cos \theta$$

Operando y simplificando la ecuación anterior:

$$\Sigma F_s = - \frac{\delta p}{\delta s} \, ds \, dA - \rho g \, dA \, ds \, \cos \theta$$

Pero  $\dot{dz} = \dot{ds} \cos \Theta$  sustituyendo arriba:

$$\Sigma F_s = - \frac{\delta p}{\delta s} ds dA - \rho g dA dz \quad (1.13)$$

sustituyendo la ec. 1.13 en la ec. 1.12:

$$- \frac{\delta p}{\delta s} ds dA - \rho g dA dz = \frac{d}{dt} (M V_s) \quad (1.14)$$

Pero la masa en el cuerpo libre que tomamos se mantiene constante, pues el fluido no puede, por definición, cruzar las líneas de corriente, por lo tanto

$$\frac{d}{dt} (M V_s) = M \frac{dV_s}{dt}$$

Pero como el flujo no es ni permanente ni uniforme,

$$dV_s = \frac{\delta V}{\delta s} ds + \frac{\delta V}{\delta t} dt$$

Dividiendo ambos miembros por dt,

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{\delta V}{\delta s} \frac{ds}{dt} + \frac{\delta V}{\delta t} \frac{dt}{dt} = V \frac{\delta V}{\delta s} + \frac{\delta V}{\delta t} \quad (1.15)$$

$$\text{Sabemos que Masa} = M = \rho dA ds \quad (1.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.15 y 1.16 en la ecuación 1.14,

$$- \frac{\delta p}{\delta s} ds dA - \rho g dA dz = \rho dA ds \left( V \frac{\delta V}{\delta s} + \frac{\delta V}{\delta t} \right)$$

y dividiendo la ecuación anterior por  $\rho dA$  e integrando, llegamos a

$$- \int \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta s} ds - \int g dz = \int ds \left( V \frac{\delta V}{\delta s} + \frac{\delta V}{\delta t} \right)$$

que es la Ecuación de Euler para flujos ideales, permanentes o no permanentes.

### 1.5.2.—Propiedades de la Ecuación de Euler.

a) Si el flujo es permanente, ninguna propiedad varía con el tiempo, por lo que  $\delta V/\delta t = 0$ .

b) Además, como las características del flujo permanente ya no cambian con respecto al tiempo, el flujo va a depender únicamente de una variable, el espacio, por lo que las diferenciales parciales con respecto al espacio, se vuelven totales y se pueden simplificar,

$$-\int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds - \int g dz = \int V \frac{dV}{ds} ds$$

Simplificando,

$$\int \frac{1}{\rho} dp + \int g dz + \int V dV = 0$$

e integrando la expresión anterior,

$$gz + \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{1}{\rho} dp = C$$

Esta es la ecuación para flujos permanentes y compresibles. Para integrar el tercer término, se necesita conocer la variación de la densidad con respecto a la presión.

c) Si el flujo es incompresible, la densidad es constante y el término que contiene la presión es integrable. Si además dividimos todos los términos por la gravedad, obtenemos que

$$z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = C_1$$

que es la Ecuación de Bernouilli, que nos sirve para flujos sin viscosidad, permanentes e incompresibles.

d) La ecuación de Bernouilli también se puede deducir partiendo del principio de conservación de la energía en vez de salir de la Segunda Ley del Movimiento. Es más, si analizamos detenidamente cada uno de los términos, veremos que cada uno repre-

senta energía por unidad de peso del fluido;  $z$  es la energía potencial por unidad de peso que posee el fluido en cierta sección;  $V^2/2g$  es energía cinética por unidad de peso, debida al movimiento del fluido y  $p/\gamma$  es energía de presión, llamada flujo de trabajo desde el punto de vista de los tratados de Termodinámica, también por unidad de peso.

e) La Ecuación de Bernouilli se puede expresar como una Ecuación de Energía, la cual es más general y es la que más nos va a servir en los casos prácticos, pues en ella podemos incluir, aunque en forma empírica, la pérdida de energía debido a los efectos de rozamiento. Esto trae como consecuencia que se pueda trabajar con los flujos reales y además que pueda tomarse en cuenta otros factores que intervienen variando las condiciones iniciales del flujo, como bombas y turbinas.

La expresión de la Ecuación de la Energía es, entre dos secc.:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \text{Energía del fluido} \\ \text{en sec. inicial} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Energía agregada} \\ \text{entre las 2 sec.} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Energía perd.} \\ \text{entre las 2 sec.} \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = \left( \begin{array}{c} \text{Energía del fluido} \\ \text{en sec. final} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se recuerda que la energía es por unidad de peso.

Esto, se puede expresar en una forma más concreta así:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + I_1 \right) + (H_{\text{bomba}}) - (H_{\text{turbina}} + H_{\text{fric.}}) \\ & \qquad \qquad \qquad = \left( \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + I_2 \right) \end{aligned}$$

$I$  es la energía interna debida a la energía cinética aportada por el movimiento interno de las moléculas, y varía debido a cambios de temperatura entre las secciones inicial y final.

### 1.5.3.—Ecuación de Cantidad de Movimiento.

Se va a deducir únicamente para flujos permanentes. Esta fórmula o ecuación se basa también en la segunda Ley de Newton

$$\text{del Movimiento, } F = \frac{d(MV)}{dt} \quad (1.17)$$

Consideremos un tubo de corriente, fig. 1.6, en el que analizaremos el movimiento del cuerpo o masa flúida ABCD:

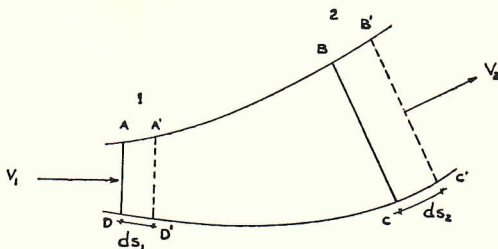


Fig. 1.6

La velocidad tiene un cambio de magnitud y otro de dirección, al avanzar el flúido de la sec. 1. a la sec. 2. Hay, pues, un cambio de Cantidad de Movimiento en la masa flúida. Si movemos el flúido en la sec. 1, un diferencial de espacio, que llamaremos  $ds_1$ , la masa del flujo  $A'ADD'$  no cambia su cantidad de movimiento. Lo mismo acontece en la sec. 2 con  $B'C'CB$ .

El cambio de cantidad de movimiento del flúido entre las dos secciones, es por lógica, igual al momentum saliente en la sec. 2 menos el momentum entrante en la sec. 1:

$$d(MV) = MV_2 - MV_1 \quad (1.18)$$

Pero observando la fig. 1.6, sabemos que

$$MV_1 = M_{AA'D'D} V_1 = (\rho_1 A_1 ds_1) \mathbf{V}_1 \quad (1.19)$$

$$MV_2 = M_{BB'C'C} V_2 = (\rho_2 A_2 ds_2) \mathbf{V}_2 \quad (1.20)$$

Sustituyendo las ec. 1.19 y 1.20 en la ec. 1.18, obtenemos que

$$d(MV) = (\rho_2 A_2 ds_2) \mathbf{V}_2 - (\rho_1 A_1 ds_1) \mathbf{V}_1$$

y sustituyendo la expresión anterior en la ec. 1.17, llegamos a

$$F = \frac{(\rho_2 A_2 ds_2) \mathbf{V}_2 - (\rho_1 A_1 ds_1) \mathbf{V}_1}{dt}$$

Efectuemos la división,

$$F = (\rho_2 A_2 ds_2/dt) \mathbf{V}_2 - (\rho_1 A_1 ds_1/dt) \mathbf{V}_1$$

Pero  $ds/dt = V$ ,

$$\text{Por tanto } F = (\rho_2 A_2 V_2) \mathbf{V}_2 - (\rho_1 A_1 V_1) \mathbf{V}_1 \quad (1.21)$$

Por el Ppio. de Continuidad,  $A_2 V_2 = A_1 V_1 = Q$

Sustituyendo esto en ec. 1.21

$$F = \rho_2 Q \mathbf{V}_2 - \rho_1 Q \mathbf{V}_1$$

Pero  $\rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1 = \rho Q$  y en lugar de  $F$ , podemos poner sus componentes, y llegamos a

$$\Sigma F = \rho Q (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$$

#### 1.5.4.—Propiedades de la Ecuación de Cantidad de Movimiento.

- a) Es una ecuación vectorial. Por lo tanto si tenemos un sistema de fuerzas en dos o tres dimensiones, el procedimiento es obtener las componentes en cada dirección:

$$\Sigma F_x = \rho Q (\mathbf{V}_{2x} - \mathbf{V}_{1x})$$

$$\Sigma F_y = \rho Q (\mathbf{V}_{2y} - \mathbf{V}_{1y})$$

$$\Sigma F_z = \rho Q (\mathbf{V}_{2z} - \mathbf{V}_{1z})$$

y

$$F_R = F_x + F_y + F_z$$

(sumadas vectorialmente)

- b) Para trabajar con la Ecuación de Cantidad de Movimiento se hace un cuerpo libre del fluido y las fuerzas actuantes se igualan al segundo miembro de las ecuaciones anteriores, según la dirección correspondiente de la fuerza.
- c) Para el análisis no se toman en cuenta las fuerzas de corte.
- d) La Ecuación de la Cantidad de Movimiento se usa generalmente en compañía de la Ecuación de Bernouilli.

## 1.6.—Consideraciones sobre el Efecto de Fricción.

Hasta esta sección, el flujo a tratar fue ideal. Se intentará aquí estudiar el flujo real desde el análisis inicial, o sea que se tomará en cuenta para el movimiento del fluido el efecto producido por los esfuerzos tangenciales, los cuales no siempre se pueden despreciar y aún en ciertos casos son los que más preponderancia tienen, fijando las condiciones del movimiento del flujo fluido.

### 1.6.1.—Origen de la Fricción en el Flujo Fluido.

Como ya se sabe, existen dos clases de flujo, el laminar y el turbulento. En el flujo laminar, la fricción es originada por dos causas, la atracción entre las moléculas del fluido, unas con otras, y la atracción entre las moléculas del fluido y las paredes del conducto sólido que está directamente en contacto.

El proceso empieza en las partículas del fluido que se encuentran pegadas al sólido. Debido a la magnitud de la fuerza de atracción que se ejerce sobre ellas, las partículas en movimiento frenan su velocidad hasta hacerla igual a la de las paredes del sólido en contacto. Pero debido a la atracción de las moléculas del fluido entre sí, las que disminuyeron su velocidad al entrar en contacto, atraen también a las más cercanas, formándose de este modo una zona de fricción, aledaña al sólido y a la cual se da el nombre de Capa Límite, en la cual existe el gradiente de presiones, el cual según la Ley de Newton de la Viscosidad ( $T = \mu \cdot du/dy$ ), nos produce esfuerzos tangenciales de fricción opuestos al movimiento del fluido, los que ocasionan por consiguiente las pérdidas de energía por fricción.

Si el flujo es turbulento, el procedimiento es parecido. En esta clase de flujo, hay continuamente cambios locales, tanto en magnitud como en dirección, de la velocidad media que trae el flujo. Debido a ello se producen transferencias de cantidad de movimiento entre las diversas partículas, lo cual origina los respectivos esfuerzos tangenciales, opuestos al movimiento, originando pérdidas por fricción aún mayores.

### 1.6.2.—Ecuaciones de Navier—Stokes.

Páginas atrás y partiendo siempre de la Segunda Ley de Newton, se dedujo la Ecuación de Euler que es la ecuación del movimiento de los flúidos, pero con ciertas restricciones, siendo la principal la de despreciar las fuerzas de fricción en el planteamiento del problema. Si ahora consideramos dichas fuerzas, llegamos al establecimiento de las siguientes ecuaciones tridimensionales, base de las de Navier—Stokes que luego discutiremos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + w \frac{\delta u}{\delta z} = \\ X - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\delta \sigma'_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} \right) \\ \frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} + w \frac{\delta v}{\delta z} = \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\delta \sigma'_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{zy}}{\delta z} \right) \\ \frac{\delta w}{\delta t} + u \frac{\delta w}{\delta x} + v \frac{\delta w}{\delta y} + w \frac{\delta w}{\delta z} = \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\delta \sigma'_z}{\delta z} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} \right) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son las mismas, en esencia, que las de Euler, pero con varios términos más, originados por los esfuerzos tangenciales. La diferencia con la de Euler que aparece en páginas anteriores es más que todo de forma, pues aquí se dedujo la ecuación en los tres ejes, resultado de un análisis tridimensional.

En el primer miembro de estas ecuaciones aparecen las componentes de la aceleración. En el segundo miembro aparecen las componentes de las fuerzas en el eje x, y, z, respectivamente, por unidad de masa ( $a = \frac{F}{M}$ ), siendo X, Y, Z, las fuerzas debidas al peso de la unidad de masa en cada dirección.

Si en las ecuaciones anteriores se efectúan ciertas transformaciones adecuadas y se expresan los esfuerzos tangenciales en función de la viscosidad y de las velocidades respectivas, se arriba a las llamadas Ecuaciones de Navier—Stokes:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\delta}{\delta x} (p + \rho\Omega) + \mu\Delta^2u$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\delta}{\delta y} (p + \rho\Omega) + \mu\Delta^2v$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = - \frac{\delta}{\delta z} (p + \rho\Omega) + \mu\Delta^2w$$

en donde:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\delta}{\delta t} + u \frac{\delta}{\delta x} + v \frac{\delta}{\delta y} + w \frac{\delta}{\delta z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

$\Omega$  = es la fuerza potencial debida al peso del fluido,

Con respecto a  $\nabla^2$ , podemos decir que es un operador llamado Operador Laplaciano y que al igual que el Operador Nabla ( $\nabla$ ), de primer orden, se usa mucho para expresar condiciones de movimiento de una cierta función.

Las ecuaciones de Navier—Stokes son para flujos incompresibles. Si las examinamos detenidamente, vemos que despreciando el último término, se transforman en las de Euler.

### 1.6.3.—El Análisis Dimensional.

Hemos llegado a un punto, las Ecuaciones de Navier—Stokes, en que ya no podemos continuar, pues dichas ecuaciones no son integrables para la generalidad de los casos. Vamos por lo tanto y para poder seguir adelante, a hacer uso de un instrumento poderoso que modernamente está tomando auge, el Análisis Dimensional.

El Análisis Dimensional es una técnica matemática que se basa esencialmente en el estudio de las dimensiones de las magnitudes o variables que intervienen en cualquier proceso mecánico y que son 4: longitud (L), tiempo (T), masa (M), fuerza (F). Pero la masa y la fuerza están relacionadas entre sí, y por tanto sólo quedan 3 dimensiones independientes, según el sistema que se use, a saber fuerza-longitud-tiempo o masa-longitud-tiempo.

#### 1.6.3.1.—El Teorema II.

Voy a esbozar el procedimiento que se sigue para tratar un problema de Mecánica de Flúidos por Análisis Dimensional.

Como punto de partida, se escogen todas las magnitudes físicas que intervienen en el problema. Dichas variables pueden clasificarse en 3 categorías: variables que representan las características geométricas, tales como diámetro, longitudes significativas; variables que toman en cuenta las características del flujo, como la velocidad, el gradiente de presiones; por último contamos también con las variables que son características del fluido en cuestión, tales como densidad, gravedad, viscosidad, tensión superficial y módulo de elasticidad. Este paso es importantísimo, pues si se olvida de

tomar en cuenta una de las variables que intervienen en determinado problema, los resultados obtenidos no serán significativos.

Todas las variables antes mencionadas, pueden para un caso particular agruparse en una función implícita de la siguiente forma:

$$f (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (1.22)$$

expresión en la cual  $A_1 \dots A_n$ , son las  $n$  magnitudes que intervienen en el problema.

Luego hacemos uso del Teorema II de Buckingham que establece que si todas estas  $n$  variables pueden ser descritas con  $m$  dimensiones fundamentales (F, L, T o M, L, T), estas magnitudes o variables pueden agruparse en  $n-m$  términos adimensionales, llamados términos  $\Pi$ , y por tanto la función 1.22 se reduce a:

$$f' (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad (1.23)$$

### 1.6.3.2.—Deducción del Teorema II.

Tenemos según la expresión 1.22 del párrafo anterior, que las  $n$  magnitudes variables están expresadas como

$$f (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

En esta función, además de la igualdad algebraica, debe cumplirse la igualdad dimensional entre los dos miembros de la función, para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea y por lo tanto la ec. 1.22 se puede expresar como

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} A_3^{x_3} \dots A_n^{x_n} = \Pi \quad (1.24)$$

expresión en la que las variables fueron afectadas de los exponentes  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , con el objeto de obtener una expresión adimensional, pues el segundo miembro  $\Pi$ , no tiene dimensiones.

Para obtener el valor numérico de los exponentes y así tener definida exactamente nuestra función, sustituimos en la ec. 1.24

cada una de las magnitudes variables A, por sus dimensiones respectivas, usando el sistema MLT y obtenemos que

$$(M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1})^{x_1} (M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2})^{x_2} \dots (M^{\alpha_n} L^{\beta_n} T^{\gamma_n})^{x_n} \\ = M^0 L^0 T^0$$

efectuando las potencias:

$$M^0 L^0 T^0 = (M^{\alpha_1 x_1} L^{\beta_1 x_1} T^{\gamma_1 x_1}) (M^{\alpha_2 x_2} L^{\beta_2 x_2} T^{\gamma_2 x_2}) \\ \dots (M^{\alpha_n x_n} L^{\beta_n x_n} T^{\gamma_n x_n})$$

y agrupando los términos de igual base

$$M^0 L^0 T^0 = M^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n} L^{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n} \\ T^{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_n x_n}$$

Para satisfacer la homogeneidad dimensional, los exponentes de cada dimensión deben ser iguales y por lo tanto tendremos m ecuaciones con n incógnitas:

$$\text{Para M: } 0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\text{Para L: } 0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

$$\text{Para T: } 0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n$$

El máximo de dimensiones independientes dijimos es 3, por lo tanto el número de ecuaciones máximo es 3, para cualquier caso.

Si n es mayor que 3, tendremos más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto una única solución es imposible.

Tendremos entonces (n-m) soluciones linealmente independientes, a las cuales llamaremos II<sub>n</sub>.

Podemos por lo tanto establecer la siguiente función

$$F(II_1, II_2, II_3 \dots II_{n-m}) = 0$$

función en la cual  $\Pi$  son los parámetros adicionales representativos de las condiciones del problema y con los cuales es ya factible poder establecer las relaciones deseadas para solucionar problemas específicos.

#### 1.6.4.—Obtención del Número de Reynolds.

Volvamos ahora a nuestro problema inicial, el análisis del movimiento de un fluido, tomando en cuenta los efectos de la fricción. En las Ecuaciones de Navier—Stokes encontramos las siguientes variables:

Diámetro (D): característica geométrica.

Velocidad (V) y Gradiente de Presiones ( $dp/dx$ ): características del flujo.

Densidad ( $\rho$ ) y Viscosidad ( $\mu$ ): características del fluido.

Dimensiones de cada una de las variables:

Diámetro. . . . .	L
Velocidad. . . . .	$LT^{-1}$
Densidad. . . . .	$ML^{-3}$
Gradiente de Presión. . . . .	$ML^{-2}T^{-2}$
Viscosidad. . . . .	$ML^{-1}T^{-1}$

$$\text{Número de Variables (n)} = 5$$

$$\text{Número de Dimensiones (m)} = 3$$

Por lo tanto, según el Teorema II, habrá 2 parámetros adimensionales ( $n-m = 5-3 = 2$ ):

$$\Pi_1 = V^{x_1} \rho^{y_1} D^{z_1} \mu^{-1} \quad (1.25)$$

$$\Pi_2 = V^{x_2} \rho^{y_2} D^{z_2} dp/dx \quad (1.26)$$

Si en las ecuaciones 1.25 y 1.26 sustituimos las variables por sus respectivas dimensiones, podemos escribir que

$$\Pi_1 = (LT^{-1})^{x_1} (ML^{-3})^{y_1} (L)^{z_1} (ML^{-1}T^{-1})^{-1} = L^{\circ}T^{\circ}M^{\circ}$$

$$\Pi_2 = (LT^{-1})^{x_2} (ML^{-3})^{y_2} (L)^{z_2} (ML^{-2}T^{-2}) = L^{\circ}T^{\circ}M^{\circ}$$

Si se suprimen paréntesis y se factoran luego los términos de igual base:

$$\Pi_1 = L^{(x_1 - 3y_1 + z_1 + 1)} T^{(-x_1 + 1)} M^{(y_1 - 1)} = L^{\circ}T^{\circ}M^{\circ}$$

$$\Pi_2 = L^{(x_2 - 3y_2 + z_2 - 2)} T^{(-x_2 - 2)} M^{(y_2 + 1)} = L^{\circ}T^{\circ}M^{\circ}$$

Para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea los exponentes de las dimensiones deben ser iguales respectivamente, obteniéndose un sistema de ecuaciones para cada parámetro:

Para  $\Pi_1$ :

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3y_1 + z_1 + 1 = 0 \\ -x_1 \qquad \qquad \qquad + 1 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad y_1 \qquad \qquad - 1 = 0 \end{array}$$

Resolviendo simultáneamente el sistema, obtenemos

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 1 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 1.25:

$$\Pi_1 = \frac{V^1 \rho^1 D^1}{\mu^1} = \frac{V \rho D}{\mu}$$

Para  $\Pi_2$ :

$$\begin{array}{rcl} x_2 - 3y_2 + z_2 - 2 = 0 \\ -x_2 \qquad \qquad \qquad - 2 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad y_2 \qquad \qquad + 1 = 0 \end{array}$$

Resolviendo simultáneamente el sistema, obtenemos

$$\begin{aligned}x^2 &= -2 \\y^2 &= -1 \\z^2 &= 1\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 1.26:

$$\Pi_2 = V^{-2} \rho^{-1} D^1 dp/dx = \frac{D dp/dx}{V^2 \rho}$$

Según el Teorema II, estos dos parámetros pueden relacionarse en la siguiente función:

$$f'(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

$$f' \left( \frac{V \rho D}{\mu}, \frac{D dp/dx}{V^2 \rho} \right) = 0$$

En esta función aparece el parámetro  $\Pi_1 = \frac{V \rho D}{\mu}$  al cual se le llama Número de Reynolds (**R**)

Poniendo la función anterior en forma explícita:

$$\frac{D dp/dx}{V^2 \rho} = f''(\mathbf{R}) \quad (1.27)$$

De la relación funcional 1.27, podemos inferir claramente que el Número de Reynolds es un parámetro determinante en el flujo fluido y que éste depende directamente de dicho número.

No está de más aclarar el hecho de que en todo el análisis anterior no se consideraron otras características propias del fluido. Si ellas se toman en cuenta, tendremos que el flujo además del

Número de Reynolds, depende, según condiciones específicas de cada problema en particular, de otros parámetros adimensionales tales como: el Número de Froude (**F**), si se toma en cuenta la gravedad; el Número de Weber (**W**), si se toma la tensión superficial; el Número de Cauchy, si influye en las condiciones del problema el módulo de elasticidad del fluido, etc.

### 1.6.5.—Fórmula de Darcy—Weisbach.

Si en la ecuación 1.27 se despeja el término  $dp/dx$ :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{V^2 \rho}{D} f''(\mathbf{R}) \quad (1.28)$$

Pero  $\Delta p = \gamma \Delta h$  y además  $\Delta x = L$

sustituyendo en la ec. 1.28:

$$\frac{\gamma \Delta h}{L} = \frac{V^2 \rho}{D} f''(\mathbf{R})$$

$$\therefore \Delta h = f''(\mathbf{R}) \frac{V^2}{\gamma/\rho} \frac{L}{D} = f'''(\mathbf{R}) \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D}$$

y por tanto podemos expresar que:

$$\Delta h = F(\mathbf{R}) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Esta es la fórmula de Darcy-Weisbach, la cual se usa comúnmente para tomar en cuenta los efectos de la fricción en el flujo.

## CAPITULO II

### EXPERIMENTOS DE HIDROSTATICA

#### 2.1.—Lineamientos para experimentos con compuertas y pontones.

En el primer capítulo de este trabajo se dedujeron, partiendo de la ecuación fundamental de la hidrostática, las fórmulas para encontrar la fuerza ejercida por el fluido primero sobre un punto, luego en una superficie, recta o curva, y por último sobre un cuerpo (volumen) sumergido total o parcialmente en dicho fluido.

Cualquier experimento de hidrostática se puede entonces resolver como un simple problema de equilibrio de mecánica. Si hacemos un breve recordatorio del curso de mecánica de sólidos, veremos que lo primero y que más se recomienda en estos casos es hacer un cuerpo libre del objeto en cuestión. En dicho cuerpo libre se deben colocar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por medio de las fórmulas antes mencionadas tendremos la fuerza que ejerce el fluido sobre él. Luego habrá que considerar su peso propio. Generalmente serán solamente estas dos clases de fuerzas las únicas a considerar. Luego se escoge un sistema de ejes coordenados apropiados y se aplican las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_o = 0$$

Si se trata de experimentos con compuertas, el único problema adicional será el mecanismo de balanza que se use para medir la magnitud de las fuerzas actuantes. En estos mecanismos hay que tener en cuenta el hecho de medir el brazo del momento siempre perpendicular a la fuerza, pues esto es una causa de errores

muy frecuentes. Es aconsejable también el esbozar un sketch del mecanismo de balanza para tener una visión más clara del funcionamiento.

Si los experimentos se están efectuando con cuerpos sumergidos o flotantes, tendremos que tratar con el equilibrio rotacional, el cual estamos menos acostumbrados a analizar que el clásico equilibrio lineal.

## **2.2.—Ejemplo Ilustrativo: Estabilidad de un Cuerpo Flotante.**

Se escogió este experimento para desarrollarlo íntegramente por varias razones: la principal es que es esta prueba a la cual se enfrenta primero el estudiante al iniciar sus prácticas en el Laboratorio de Mecánica de Flúidos de esta facultad, razón lógica por la cual siempre se le dificulta un poco más y necesita como es de esperar, una orientación mayor principalmente en lo que se refiere al camino a seguir y a las razones para llevarlo a cabo de determinada forma.

### **2.2.1.—Teoría Previa al Experimento.**

#### **2.2.1.1.—Presentación del Problema.**

Tenemos un cuerpo sumergido en un líquido. Efectuando un cuerpo libre notamos que sobre él actúan únicamente dos fuerzas, ambas verticales. Una, el peso del objeto, actúa hacia abajo en el centro de gravedad del volumen de todo el cuerpo o en otras palabras, en el centro de gravedad de toda la masa.

La otra fuerza es la de flotación o empuje, actúa hacia arriba y su línea de acción pasa por el centro de gravedad del volumen del líquido desalojado llamado centro de empuje y tiene una magnitud igual al peso del volumen de líquido desalojado.

Si el peso es mayor que el empuje, el cuerpo se va al fondo; si menor, el cuerpo sale gradualmente a la superficie hasta que el peso del volumen de agua que desaloje sea igual al peso propio, estableciéndose una estabilidad lineal. Aunque la estabilidad lineal es básica en el problema de la flotación, la dificultad en el análisis

no radica aquí, pues sencillamente si el peso es mayor que el empuje máximo que es capaz de desarrollar un cuerpo sumergido, éste indefectiblemente se irá al fondo y si es menor, flotará sin duda alguna.

La dificultad reside en el análisis de la estabilidad rotacional o volteo. Sucede que aunque el cuerpo tenga estabilidad lineal, si se le da cierto giro puede ser que ya no regrese a su posición original, originándose un volteo y es esto precisamente lo que se va a plantear en este experimento.

### 2.2.1.2.—Análisis del Equilibrio Rotacional.

Primero se presenta el caso de un objeto totalmente sumergido en un fluido. El cuerpo ha sido vaciado por dentro y por medio de lastre se le puede cambiar la posición del centro de masa total.

*Caso 1.*—El centro de gravedad está abajo del centro de empuje. En la figura 2.1 notamos que el empuje y el peso forman un par restaurador al hacer girar el cuerpo un cierto ángulo con respecto a su posición original, el par restaurador actúa a manera de regresar al cuerpo a su posición anterior y por lo tanto el equilibrio rotacional es estable.

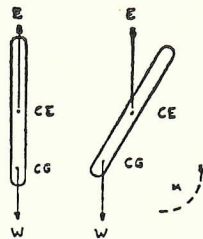


Fig. 2.1

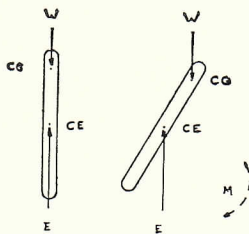


Fig. 2.2

*Caso 2.*—El centro de gravedad se encuentra arriba del centro de empuje. En este caso, ver fig. 2.2, al girar el cuerpo cierto ángulo, el peso y el empuje forman un par que tiende a aumentar el ángulo de desplazamiento, incrementando su valor gradualmente hasta darle vuelta al objeto. El equilibrio aquí es pues inestable.

*Caso 3.*—Existe también una posición intermedia en la cual el centro de gravedad y el de empuje coinciden, dando lugar al caso de equilibrio rotacional indiferente.

*Conclusión.*—Para que el equilibrio sea estable rotacionalmente, el centro de gravedad debe ocupar una posición inferior a la del centro de empuje.

### 2.2.1.3.—El Metacentro.

Nuestro problema radica en los objetos flotantes, pues en ellos, en la mayoría de los casos, el centro de gravedad queda arriba del centro de empuje. Sin embargo, lo que se dijo al respecto al analizar los cuerpos totalmente sumergidos, sec. anterior, no se cumple exactamente en este caso. Y es que el centro de empuje al inclinarse el cuerpo cierto ángulo, cambia de posición, pues cambia el centroide del volumen sumergido. Este cambio, ver gráfica 2.3, hace que aunque el centro de gravedad esté arriba del centro de empuje, el equilibrio pueda ser estable.

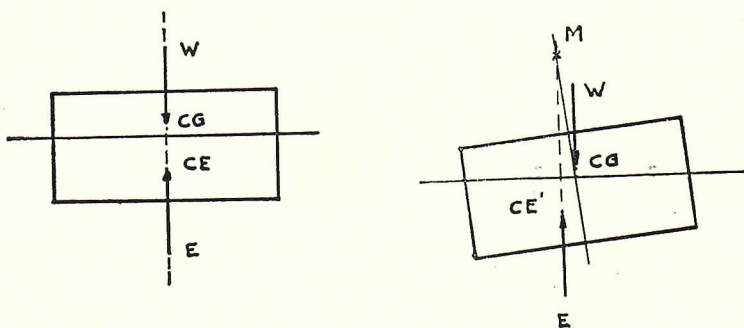


Fig. 2.3

Si la línea de acción del empuje pasa arriba del centro de gravedad el equilibrio es estable, si pasa abajo es inestable. El punto crítico, donde la línea de acción del empuje corta el eje de simetría le llamamos metacentro y es por consiguiente este punto el índice de la estabilidad rotacional de un cuerpo.

El objetivo concreto y primordial en este experimento será el de determinar el Metacentro del Pontón y analizar las caracte-

rísticas de este punto bajo diferentes condiciones que pueden suscitarse en determinado problema.

## **2.2.2.—El Experimento.**

### **2.2.2.1.—Descripción del Aparato.**

El aparato a usar en este experimento es un pequeño pontón de sección rectangular constante, ver lámina número 1, y que tiene adaptados convenientemente los siguientes aditamentos: un peso vertical ajustable, con el que se cambia la posición del centro de gravedad del aparato a voluntad; un peso horizontal movable para causar desplazamientos angulares; por último, una escala angular sobre la cual hay una pequeña plomada con el objeto de marcar los desplazamientos angulares.

### **2.2.2.2.—Procedimiento Experimental.**

El proceso que se sigue para efectuar esta práctica es bastante sencillo. Lo primero es tomar las dimensiones del largo y ancho del pontón, también el espesor. Luego se baja el peso vertical y se ajusta en su posición vertical más baja. Se obtiene seguidamente el centro de gravedad del pontón, balanceándolo sobre una cuchilla hasta que permanezca en equilibrio. Se mide también la posición que ocupa el peso vertical. Todas estas medidas se refieren al fondo del pontón.

A continuación se pone el aparato en el agua, se coloca el peso horizontal en su posición de O y se revisa la escala angular. Si ésta no está en cero, se apunta la desviación para que al hacer los cálculos se puedan correr todos los valores angulares un valor igual a dicha desviación. Esto se aclarará más en el ejemplo ilustrativo. Luego se hace el respectivo juego de lecturas de desplazamiento peso horizontal vrs. ángulo de inclinación.

Una vez completado el juego de lecturas, se sube el peso vertical unos centímetros, se mide su altura con respecto al fondo y se procede a efectuar el correspondiente juego de lectura. El centro de gravedad nuevo se obtendrá por cálculos, y no experimentalmente como la primera vez.

### 2.2.2.3.—Desarrollo del Experimento.

*I Parte.*—Calcular el Metacentro Teóricamente.

En esta primera parte se encontrará la posición del metacentro usando fórmulas cuyos términos están basados en pesos y dimensiones cuya obtención es casi exacta, por lo cual los resultados que se obtienen pueden asumirse como exactos dentro de cierto límite de tolerancia.

Para mayor facilidad de cálculo, vamos a referir la posición del metacentro del pontón a la superficie del agua, la cual permanece constante, y a esta distancia la llamaremos MC, ver fig. 2.4.

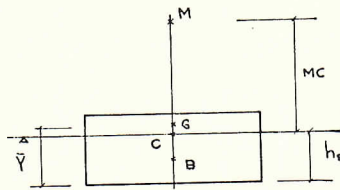


Fig. 2.4

Datos:

Ancho del Pontón. . . . .	20.20 cm.
Largo del Pontón. . . . .	36.00 cm.
Grosor de la Lámina. . . . .	0.1 cm.
Peso total Pontón. . . . .	2,710 grs.
Peso ajustable vertical. . . . .	500 grs.
Peso desplazable horizontal. . . . .	200 grs.

La fórmula a usar es:

$$BM = \frac{I_{x-x}}{V'}$$

O sea que la distancia del centro de empuje al metacentro (BM) es igual al momento de inercia del pontón con respecto al eje sobre el cual está pivoteando (el eje longitud.), dividido por el volumen de agua desplazada ( $V'$ ).

$$I_{xx} = 1/12 \times 20.20^3 \times 36 = 24\ 727.224\ \text{cm}^4$$

Si hacemos un cuerpo libre, vimos con anterioridad que sólo actuaban el peso y el empuje. Si en nuestro caso existe equilibrio lineal, se debe a que estas dos fuerzas son opuestas e iguales entre sí a manera que la resultante sea cero, y por lo tanto,

$$\text{Empuje (E)} = \text{Peso Pontón (W)} \quad (2.1)$$

pero según Arquímedes:

$$E = V' \times \gamma\ \text{agua} \quad (2.2)$$

Sustituyendo la igualdad 2.1 en la 2.2,

$$W = V' \times \gamma\ \text{agua}$$

Y despejando,

$$V' = \frac{W}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{2710}{1} = 2710\ \text{cm}^3$$

$$\text{Por tanto, BM} = \frac{I_{xx}}{V'} = \frac{24\ 727.224}{2\ 710} = 9.124\ \text{cm}$$

Por otro lado,  $V' = L \times A \times h_s$  ( $h_s$  = altura sumergida, ver fig. 2.4).

$$\therefore h_s = \frac{V'}{L \times A} = \frac{2\ 710}{20.20 \times 36} = 3.70\ \text{cm}$$

Pero  $CB = h_s/2 = 3.70/2 = 1.85\ \text{cm}$  (ver fig. 2.4) y por tanto,

$$CM = BM - CB = 9.12 - 1.85 = 7.27 \text{ cm}$$

$$CM_{\text{Teórico}} = 7.27 \text{ cm}$$

## II Parte.—Cálculo Práctico del Metacentro.

Aquí se obtendrá el metacentro basándose en los resultados experimentales encontrados al hacer variar el centro de masa y el ángulo de inclinación del pontón. También se fijará como eje de referencia la línea de agua y se obtendrá entonces la distancia CM Experimental que se comparará luego con CM Teórica para sacar las conclusiones respectivas.

Para comprender la fórmula que vamos a usar, es esencial construir un cuerpo libre del pontón, analizando las condiciones que imperan al haberse inclinado éste cierto ángulo  $\theta$  a causa del desplazamiento X del peso horizontal movable de masa m, ver fig. 2.5.

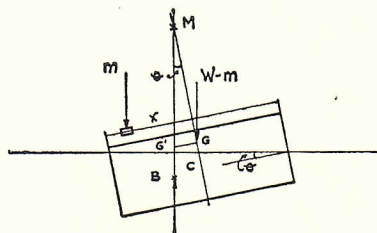


Fig. 2.5

Para que se establezca un equilibrio rotacional, tiene que verificarse que

$$\sum Mb' = 0$$

$$m (X - G'G) \cos\theta = (W - m) G'G \cos\theta$$

Dividiendo todos los términos por  $\cos\theta$  y efectuando las operaciones,

$$G'G = \frac{m}{W} X \quad (2.3)$$

Pero en realidad lo que nos interesa es MG, en el triángulo MGG', fig. 2.5,

$$MG = GG' \times \cot\theta = \frac{GG'}{\text{Tg}\theta}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 2.3.

$$MG = \left(\frac{m}{W} X\right) \times \frac{1}{\text{tg}\theta} \quad (2.4)$$

Para ángulos pequeños  $\text{tg}\theta = \theta$

regresando a la ec. 2.4,

$$MG = \frac{m}{W} \frac{X}{\theta}$$

Sustituyendo valores para nuestro caso particular,

$$MG = \frac{200}{2710} \frac{X}{\theta} = 0.0738 \frac{X}{\theta}$$

Como tenemos en los resultados X en cms y  $\theta$  en grados, se va a incluir de una vez un factor de reducción de grados a radianes, para que MG nos dé en cm,

$$MG = 0.0738 \frac{X}{\theta/57.3} = 4.228 \frac{X}{\theta^\circ}$$

O sea, pues, que:

$$MG = 4.228 \left(\frac{X}{\theta}\right) \quad (2.5)$$

Y es esta ecuación la que se usará en nuestra práctica para relacionar el Metacentro con desplazamientos y ángulos de inclinación.

Nos falta ahora encontrar la ecuación de variación del centro de gravedad de todo el pontón al variar la altura del peso vertical. Esta se puede obtener de varias maneras, una de ellas es por momentos. Es básico tener como dato la altura vertical y la posición del centro de gravedad para uno de los casos, el primero en nuestra prueba. Volviendo a la fig. 2.4, podemos establecer que,

$$CG = \bar{Y} - h_s = \bar{Y} - \frac{V}{L D}$$

Pero  $W\bar{Y} = (\sum my) + mvy_v$ , expresión en que  $(\sum my)$  permanece constante, pues la variación del centro de gravedad se debe única y exclusivamente a la variación de posición del peso vertical ajustable, y los demás pesos permanecen constantes en su magnitud y en su brazo, y si llamamos A a la constante, la expresión anterior se transforma a,

$$W\bar{Y} = A + mvy_v \quad (2.6)$$

Dividiendo la expresión anterior por W,

$$\bar{Y} = \frac{A}{W} + \frac{mv}{W} y = K + K' y \quad (2.7)$$

Para encontrar el valor de las constantes K y K', haremos uso de la ecuación 2.6. Como dato experimental se obtuvo que para

$\bar{Y} = 9.4\text{cm}$ ,  $y = 37$ , sustituyendo valores en ec. 2.6,

$$2710 \times 9.4 = A + \overset{W_j}{500} \times 37 \therefore A = 6\ 974$$

$$K = \frac{A}{W} = \frac{6\ 974}{2\ 710} = 2.573$$

$$K' = \frac{mv}{W} = \frac{500}{2\ 710} = 0.185$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 2.7,

$$\bar{Y} = 2.573 + 0.185 y$$

Como el espesor de la plancha es de 0.1 cm,

$$\bar{Y} = 2.673 + 0.185 y$$

Además,  $GC = \bar{Y} - hs = 2.673 + 0.185 y - 3.700$

$$\therefore GC = 0.185y - 1.027 \quad (2.8)$$

$$\text{Pero } CM = GM + GC \text{ (ver fig. 2.4)} \quad (2.9)$$

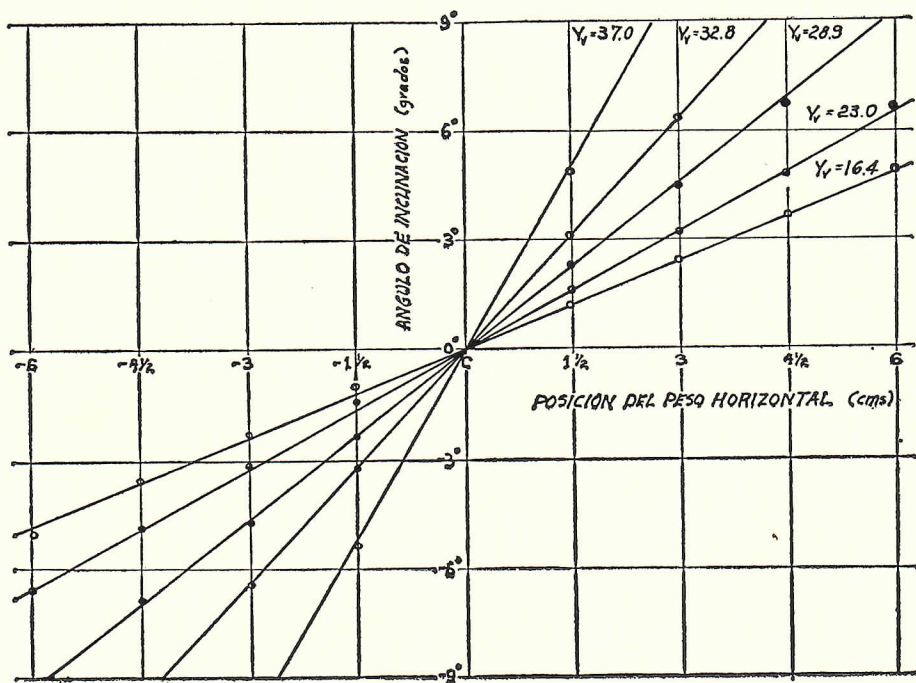
Y finalmente sustituyendo las ec. 2.5 y 2.8 en la ec. 2.9,

$$MC \text{ Exp.} = 4.228 \left( \frac{X}{\theta} \right) + (0.185y - 1.027)$$

a) Tabulación de los valores angulares obtenidos al variar la posición del peso horizontal con diferentes centros de gravedad del pontón. En esta tabulación se ponen para cada posición del peso vertical, en la fila de abajo los ángulos tal como salieron y en la superior la escala ya corrida a 0.

$X$	$-6$	$\frac{1}{2}$	$-3$	$\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$3$	$\frac{1}{2}$	$6$
$YV$									
37.0				$-5.4$ $-7.7$	$0$ $-2.3$	$4.9$ $2.6$	$10.0$ $7.7$		
32.8			$-6.4$ $-8.0$	$-3.2$ $-4.8$	$0$ $-1.6$	$3.1$ $1.5$	$6.3$ $4.7$		
28.9		$-6.8$ $-7.7$	$-4.7$ $-5.6$	$-2.4$ $-3.3$	$0$ $-0.9$	$2.3$ $1.4$	$4.5$ $3.6$	$6.7$ $5.8$	
23.0	$-6.4$ $-7.2$	$-4.8$ $-5.6$	$-3.1$ $-3.9$	$-1.4$ $-2.2$	$0$ $-0.8$	$1.6$ $0.8$	$3.2$ $2.4$	$4.8$ $4.0$	$6.6$ $5.8$
16.4	$-4.9$ $-5.4$	$-3.5$ $-4.0$	$-2.3$ $-2.8$	$-1.0$ $-1.5$	$0$ $-0.5$	$1.2$ $0.7$	$2.4$ $1.9$	$3.7$ $3.2$	$4.9$ $4.4$

b) *Gráfico de Pendiente de Estabilidad.*—Con los resultados de la tabulación anterior, pasamos a continuación a trazar las curvas de las pendientes de estabilidad para diferentes posiciones del centro de gravedad, ploteando el ángulo de inclinación en las ordenadas contra el respectivo desplazamiento del peso horizontal en las abscisas.



c) Tabulación de los pasos efectuados para encontrar  $\overline{CM}Exp.$ , haciendo uso de los datos y fórmulas anteriores.

1	2	3	4	5
Altura del Peso Vert. (Yv)	Altura centro de gravedad (GC)	Pendiente de Estabi- lidad (dx/d $\theta$ )	Altura Meta- céntrica (MG)	Altura Metacento sobre Línea Agua (MC)
37.0	5.818	0.296	1.251	7.07
32.8	5.041	0.476	2.013	7.06
28.9	4.320	0.654	2.765	7.09
23.0	3.228	0.926	3.915	7.14
16.4	2.007	1.237	5.230	7.24

Col. 1.—Dato.

Col. 2.— $GC = 0185yv - 1.017$  (de Ec. 2.8).

Col. 3.— $dx/d\theta =$  Pendientes de estabilidad promedio obtenidas del gráfico anterior. Es de hacer notar que estas pendientes se obtienen gráficamente midiendo las coordenadas de un punto cualquiera sobre la recta ya que éstas representan el promedio.

Col. 4.— $GM = 4.228 dx/d\theta$  (de Ec. 2.5)

Col. 5.— $MCE_{Exp} = GC + MG = \text{Col. 2} + \text{Col. 4}$  (por Ec. 2.9).

Como complemento a este experimento se ploteará la gráfica pendiente de estabilidad vrs. altura del peso vertical. Para el trazo de la curva se hizo uso del Método de los Mínimos Cuadrados, como ilustración, y se explica éste detalladamente.

d) Ajuste de la Curva Pendiente de Estabilidad vrs. Altura Peso Vertical por el Método de los Mínimos Cuadrados.

Al examinar detenidamente la tendencia que siguen los puntos ploteados en el gráfico e), vemos que lo más exacto es conformar una línea recta, ver fig. 2.6.

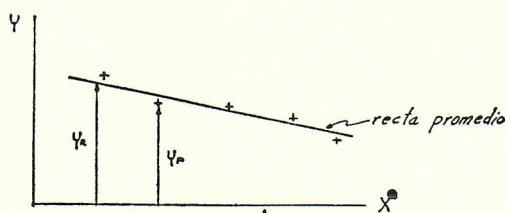


Fig. 2.6

Sea la ecuación de nuestra recta

$$YR = aX + b \quad (2.10)$$

en que a y b son los parámetros a determinar.

Para que esta recta sea realmente la recta promedio, debe cumplir con el requisito de ser el lugar geométrico del promedio aritmético de todos los puntos ploteados.

Se sabe por otro lado que la suma de las desviaciones con respecto al promedio aritmético, elevadas al cuadrado, es mínima, lo cual expresado matemáticamente es,

$$\sum E^2 = \sum (YR - Y_p)^2 = \text{Mínimo} \quad (2.11)$$

$$\text{Sust. ec. 2.10 en 2.11, } \sum E^2 = \sum (ax + b - Y_p)^2 = \text{Mín.} \quad (2.12)$$

Como son dos los parámetros que determinan una recta, su pendiente (a) y su ordenada en el origen (b), tendremos que hacer uso de derivadas parciales para deducir las fórmulas que se aplican para encontrar el valor de los parámetros.

*Primer Paso.*—Se fija el valor de la ordenada en el origen y se encuentra la forma en que varía la ecuación 2.12 al variar la pendiente, y se iguala a 0 para encontrar el mínimo,

$$\frac{\delta \sum (aX + b - Y_p)^2}{\delta a} = 0$$

Y derivando con respecto a "a", nos queda,

$$\sum 2 (aX + b - Y_p) X = 0$$

Simplificando, y efectuando operaciones,

$$\sum aX^2 + \sum bX - \sum YX = 0$$

Y sacando de la sumatoria los términos que se repiten (factorando) y despejando XY

llegamos a:

$$(\sum XY) = b (\sum X) + a (\sum X^2) \quad (2.13)$$

*Segundo Paso.*—Se hace constante la pendiente y se deriva la ec. 2.12 con respecto a la ordenada en el origen (b), igualándola a cero para encontrar el mínimo:

$$\frac{\delta}{\delta b} \sum (aX + b - Y_p)^2 = 0$$

y efectuando la derivada,

$$\sum 2 (aX + b - Y_p) = 0$$

Simplificando el 2,

$$\sum aX + \sum b - \sum Y = 0$$

Sacando los términos repetidos de la sumatoria y despejando Y, obtenemos

$$(\sum Y) = a (\sum X) + nb \quad (2.14)$$

Tenemos ahora un sistema de dos ecuaciones, 2.13 y 2.14, con dos incógnitas, a y b, pero para poder resolverlo necesitamos saber el valor de los otros términos, los cuales se calculan en la siguiente tabulación, recordando que X y Y son las coordenadas de los puntos, (X = Pendiente de Estabilidad, Y = Altura Peso Vertical).

	X	Y	XY	X <sup>2</sup>
	0.296	37.0	10.878	0.086436
	0.476	32.8	15.613	0.226576
	0.654	28.9	18.901	0.427716
	0.926	23.0	21.298	0.857476
	1.237	16.4	20.303	1.532644
$\sum$	3.588	138.1	86.993	3.130848

Sustituyendo los valores de la tabulación en las ecuaciones 2.13 y 2.14, tendremos,

$$86.993 = b (3.588) + a (3.130848) \quad (2.15)$$

$$138.1 = a (3.588) + 5b \quad (2.16)$$

Resolviéndolas simultáneamente obtenemos que

$$a = - 21.78$$

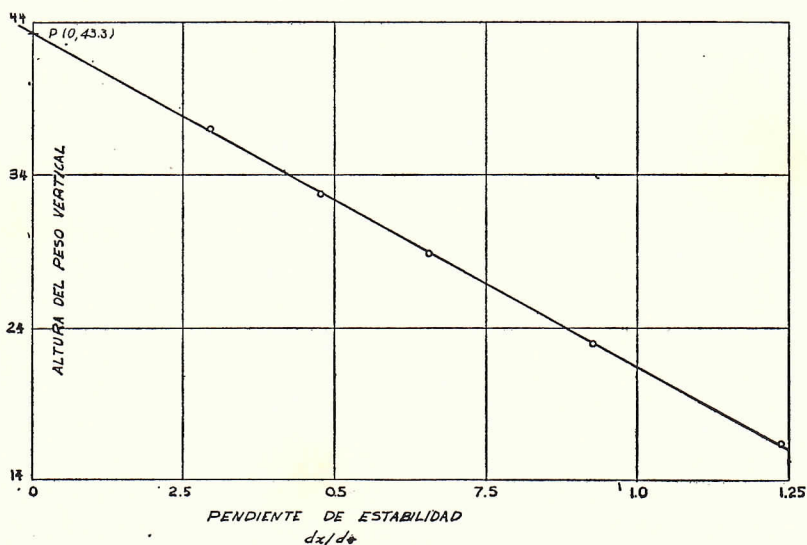
$$b = 43.25$$

Y sustituyendo estos valores de los parámetros en la ecuación 2.10,

$$YR = - 21.78X + 43.25$$

Que es la ecuación representativa de la distribución. Al trazarla en el papel milimetrado, se ve que sí sigue bastante bien la tendencia de los puntos. Si no fuera así, tendríamos que tratar de conformar curvas de segundo grado a nuestra distribución.

e) Curva.—Altura Peso Vertical vrs. Pendiente de Estabilidad



f) *Discusión de Resultados.*—Analicemos qué significa el término pendiente de estabilidad. La pendiente de estabilidad no es más que la relación entre el brazo del momento restaurador del equilibrio (X) y el ángulo de inclinación ( $\theta$ ) bajo el cual dicho momento se produce. Como la fuerza de flotación permanece constante, el aumento o disminución del brazo nos dará directamente

un aumento o disminución del momento restaurador del equilibrio, y por tanto de la estabilidad. Si la pendiente disminuye, el brazo que es el numerador debe disminuir y por lo tanto disminuye el momento estabilizador. Cuando la pendiente vale cero el brazo y por consiguiente el momento restaurador para cualquier inclinación es cero. Eso quiere decir que el pontón permanece fijo en la inclinación que se le coloque, o en otras palabras, que se establece un equilibrio indiferente debido a que el Metacentro coincide con el centro de gravedad del pontón.

Al examinar las Curvas de Pendientes de Estabilidad, comprobamos que la estabilidad del pontón es función directa de la altura del centro de gravedad, cosa que ya se había demostrado con antelación. A mayor altura, hay menor estabilidad. Es de hacer notar que para obtener el valor de la pendiente de estabilidad, el valor angular se mide tomando como referencia el eje de los desplazamientos angulares en el gráfico b), o sea el eje de las ordenadas. Además, del análisis detenido de estas curvas del gráfico b) podemos aseverar que nuestra prueba fue bastante precisa, pues casi todos los puntos coinciden con las rectas promedio o están bastante cerca.

Si ahora nos pasamos a la Curva de Pendiente de Estabilidad-Altura del Peso Vertical, podemos extrapolar y encontrar el valor de  $y_v$  para  $dx/d\theta = 0$ , el cual resulta ser 43.3. Si lo sustituimos en la ecuación 2.8, obtenemos que  $GC = 7.00$  y como el centro de gravedad coincide en este caso con el metacentro, (equilibrio indiferente) podemos afirmar que  $MC = 7.00$  cm, lo que coincide con los valores tabulados en c), con una aproximación de 1.5 mm, la cual es aceptable.

Discutamos ahora los valores de  $MC_{Exp}$  de la Tabulación c); podemos concluir primeramente y sin temor a equivocarnos, que la posición del Metacentro para ángulos pequeños permanece constante en el espacio. Las variaciones entre los valores calculados son menores de 2 mm, precisión que es aceptable en nuestro caso. Podemos comparar el resultado promedio de  $MC_{Exp}$ , de 7.12, con el que se obtuvo al usar la fórmula teórica, y que nos dió un valor de 7.27 mm. Hay entre los dos resultados una diferencia de 1.5 mm cosa que indica que la exactitud del experimento efectuado es aceptable también.

## CAPITULO III

### EXPERIMENTOS DE HIDRODINAMICA DESARROLLADOS POR CANTIDAD DE MOVIMIENTO

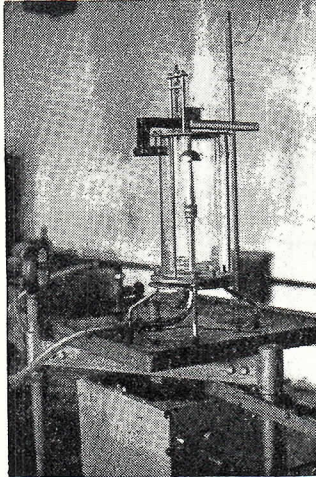
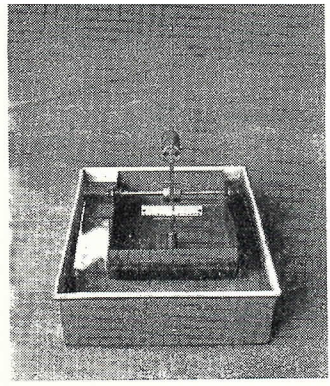
#### 3.1.—Aspectos Generales.

El principio de la Cantidad de Movimiento-Impulso, provee una herramienta bastante usada para solucionar problemas referentes al flujo de un fluido. Se usa principalmente en los casos en que es de interés obtener las fuerzas que se ejercen al moverse un fluido en determinado medio. Como ya se discutió en el primer capítulo, este principio está basado en la Segunda Ley de Newton del Movimiento y generalmente se usa casi siempre en conjunto con la Tercera Ley, la de la Acción y Reacción. Además es usual que se auxilie con la Ecuación de Bernouilli.

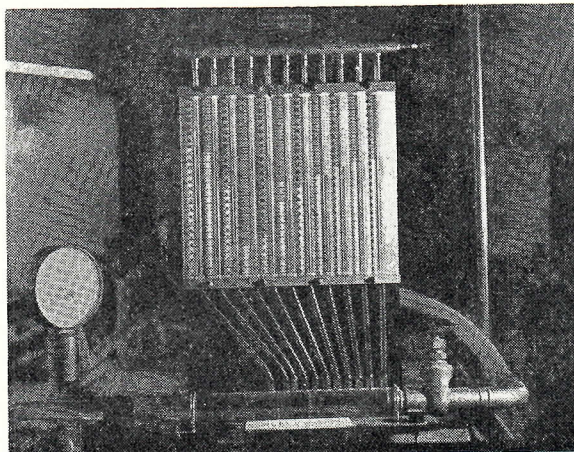
Entrando ya en materia consideremos, para obtener una visión de conjunto, los casos generales a los cuales podemos aplicar con éxito la Cantidad de Movimiento, concretando en cada uno varios de los experimentos que es común analizar haciendo uso de los Principios de Momentum.

a) *Caso de Fuerzas Dinámicas actuando sobre Cuerpos Estacionarios.*—Es común encontrarnos con un objeto sumergido en un líquido y que lo intercepta, interrumpiéndolo en su movimiento y originando fuerzas que actúan sobre el objeto. Como ejemplo clásico citaremos el de un aspa fija que recibe un chorro de agua. También tenemos el caso de los codos, los cuales al hacer cambiar la dirección de la tubería, cambian por tanto la dirección de la velocidad haciendo variar el momentum del fluido que conduce y sufriendo el consiguiente impulso.

LAMINA 1.—Pontón.



LAMINA 2. — Aparato para el experimento de Impacto de un Chorro.



LAMINA 3  
Venturímetro.



b) *Fuerzas Dinámicas sobre Cuerpos Movibles*.—El caso más característico y el más importante para nosotros es el de las aspas móviles, principio de las turbinas de impulso. Aquí se presentan dos complicaciones más: hay que tratar con velocidades absolutas y relativas (del fluido con respecto al aspa); además existe el problema de encontrar la cantidad de fluido que sufre el cambio de momentum.

c) *Hélices, Impulsores*.—Este caso trata del impulso recibido por una hélice de barco o de avión al hacer cambiar la velocidad del fluido.

d) *Aforadores de Fuerza*.—Como se verá en el capítulo siguiente, hay aparatos para medir caudales que se basan en encontrar la fuerza que ejerce el fluido la cual es proporcional al gasto. El principio general de operación de estos medidores es el siguiente: la fuerza producida por el impacto de las partículas que se mueven sobre un elemento oscilador, deflexa dicho elemento de su posición original. El grado de deflexión es entonces una medida de la fuerza y por lo tanto de la velocidad y del caudal del flujo. Entre éstos tenemos el Péndulo Hidrométrico y los Medidores de Flujo de Momentum Transversal.

## **3.2.—Ejemplo Ilustrativo: Impacto de un chorro sobre un Aspa Fija.**

### **3.2.1.—Introducción.**

Se expone este experimento detalladamente debido a que, además de su sencillez, contempla los conceptos básicos que luego serán necesarios para entender, principalmente, el funcionamiento de las turbinas de impulso.

### **3.2.2.—Descripción del Aparato.**

En la lámina N° 2 podemos observar que el aparato consiste esencialmente de tres partes distintas:

Una tobera que descarga un chorro sobre un aspa fija;

Un mecanismo para medir la fuerza o impacto producido por el chorro sobre el aspa;

El tanque de pesado para medir los caudales respectivos.

### 3.2.3.—Teoría Específica del Experimento.

Ya en el primer Capítulo se desarrollaron las fórmulas para Cantidad de Movimiento y se estableció que cada componente era igual a

$$F_x = Q \frac{\gamma}{g} (V_{x_2} - V_{x_1}) \quad (3.1)$$

$$F_y = Q \frac{\gamma}{g} (V_{y_2} - V_{y_1}) \quad (3.2)$$

Analicemos el caso de un chorro de agua que es descargado por una tobera sobre un aspa fija, la cual lo desvía de su trayectoria inicial un cierto ángulo  $\theta$ , ver fig. 3.1.

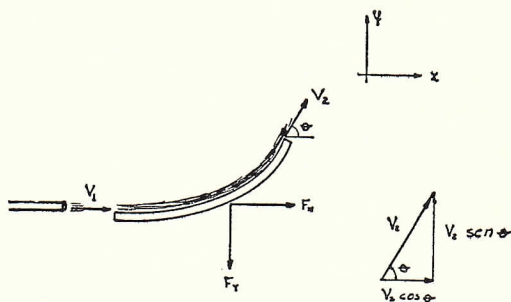


Fig. 3.1

Si aplicamos las ecuaciones (3.1) y (3.2) al caso de la fig. 3.1,

$$F_x = \frac{Q\gamma}{g} (V_2 \cos\theta - V_1) \quad (3.3)$$

$$F_y = \frac{Q\gamma}{g} (V_2 \text{ sen}\theta - V_1) \quad (3.4)$$

En que  $V_2$  es la velocidad final. Si se desprecia el efecto de fricción y además la diferencia de alturas al entrar y salir del aspa, la velocidad inicial de entrada ( $V_1$ ) es la misma—modularmente—que la de salida ( $V_2$ ) por Bernouilli.

En nuestro experimento, para el aspa plana,  $\theta = 90^\circ$ . Si sustituímos ésto en la ecuación (3.3), tendremos que la fuerza teórica que actúa sobre el aspa es de

$$F_x = \frac{Q\gamma}{g} (V_2 \text{ cos}90^\circ - V_1) = \frac{Q\gamma}{g} (-V_1) = -\frac{Q\gamma}{g} V_1 \quad (3.5)$$

Y la fuerza del flujo sobre el aspa será igual, pero de signo opuesto, pues a cada acción se opone una reacción.

Si el aspa es curva y  $\theta = 180^\circ$ , tenemos que,

$$F_x = \frac{Q\gamma}{g} (V_2 \text{ cos}180^\circ - V_1) = \frac{Q\gamma}{g} (-V_2 - V_1) \quad (3.6)$$

Pero suponiendo que  $V_2 = V_1$  y sustituyéndolo en (3.6),

$$F_x = -2 \frac{Q\gamma}{g} V_1 \quad (3.7)$$

Y éstas serán, pues, las fuerzas que teóricamente actúan sobre el aspa en el eje x-x a causa del cambio de dirección que el aspa causa al flujo del chorro.

### 3.2.4.—Procedimiento Experimental.

Se trata de encontrar la fuerza real que se ejerce en un aspa a determinado caudal por el chorro de agua que descarga en ella.

Este caudal se mide usando el tanque de pesado. El procedimiento es hacer un juego de unas 10 lecturas, variando el caudal y ajustando el peso movable sobre el brazo de la balanza, ver lámina N° 2, a manera que siempre haya un equilibrio y el brazo permanezca en posición horizontal. Debe ponerse especial cuidado en la nivelación inicial.

### 3.2.5.—Cálculos y Resultados.

El primer problema a resolver es el de encontrar la velocidad de llegada del agua al aspa, ( $V_1$ ), y se origina a causa de que la tobera y el aspa no están en el mismo plano horizontal. Aplicando Bernouilli entre las sec. 1 y 0 de la fig. 3.2, tendremos que

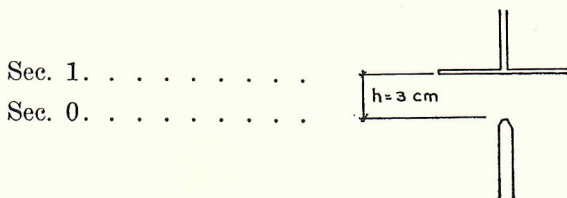


Fig. 3.2

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + 0$$

Pero  $p_1/\gamma = p_0/\gamma =$  presión atmosférica, y por tanto la expresión anterior se reduce a,

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} - h$$

De donde, despejando  $V_1$ :

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2gh} \quad (3.8)$$

Además tenemos que, según la Ecuación de continuidad,

$$Q = A_0 \times V_0$$

de donde,

$$V_o = Q/A_o$$

Y como  $D_o = 1 \text{ cm}$  y  $A_o = \pi/4$ ,  $V_o = \frac{Q}{\pi/4}$

Con todos estos valores podemos encontrar la fuerza ideal aplicando las ec. (3.5) y (3.7), lo cual se tabula más adelante.

Nos falta ahora encontrar el valor de la fuerza real. Para ello debemos analizar el mecanismo de balanza que se usa en el experimento. Se llama la atención en el sentido de que el brazo tiene un resorte, lámina 2, que tienen la función de absorber el peso propio del brazo, del aspa, etc. Es por ello que al hacer el cuerpo libre del brazo, fig. 3.3, sólo se toma en cuenta el momento de la fuerza que ejerce sobre el aspa el chorro de agua (FR) y el incremento de momento del peso ajustable al moverlo de 0 hasta una posición X, a manera de recuperar el equilibrio del sistema

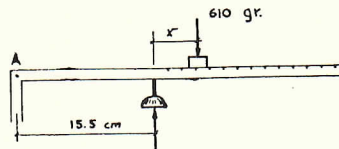


Fig. 3.3

De la fig. 3.3 concluimos, haciendo momentos con respecto al punto A, que el momento que ejerce el chorro de agua sobre el aspa equivale a lo que tiene que incrementarse el momento ejercido por el peso ajustable, para volver a equilibrar el sistema, recordando que antes de actuar el chorro, su posición de equilibrio era la del 0 de la escala,

$$15.5 \text{ FR} = 610 X, \text{ por tanto } \text{FR} = 39.35 X \quad (3.9)$$

a) Tabulación de Cálculos y Resultados.

ASPA PLANA:

Vol. (cm <sup>3</sup> )	t (seg)	Q <sub>R</sub> (cm/seg)	V <sub>0</sub> (cm/seg <sup>2</sup> )	V <sub>1</sub> (cm/seg <sup>2</sup> )	$\frac{Q \gamma}{g}$ V <sub>1</sub> (gr)	X (cm)	Fr (gr)
7 500	11.7	641.0	816.1	812.5	530.9	12.35	486.0
	12.4	604.8	770.0	766.1	475.4	11.00	432.9
	12.8	585.9	746.0	742.1	443.2	10.00	393.5
	13.6	551.5	702.2	697.9	392.3	9.00	354.2
	14.5	517.2	658.5	654.0	344.8	8.00	314.8
	15.3	490.2	624.1	619.4	309.5	7.00	275.5
	16.9	443.8	565.1	559.8	253.3	6.00	236.1
	18.0	416.7	530.6	525.0	223.0	5.00	196.8
	18.8	398.9	507.9	502.0	204.1	4.00	157.4
	22.1	339.3	432.0	425.1	144.2	3.00	118.1

ASPA CURVA:

Vol. (cm <sup>3</sup> )	t (seg)	Q <sub>R</sub> (cm/seg)	V <sub>0</sub> (cm/seg)	V <sub>1</sub> (cm/seg)	$\frac{Q \cdot Y}{V_1}$ g (gr)	X (cm)	F <sub>R</sub> (gr)
7 500	12.4	604.8	770.0	766.2	472.4	22.0	865.8
	12.9	581.4	740.3	736.3	436.4	20.5	806.8
	13.4	559.7	712.3	708.2	404.1	19.0	747.7
	13.9	539.6	687.0	682.7	375.5	17.5	688.7
	14.5	517.2	658.5	654.0	344.8	16.0	629.7
	15.5	483.9	616.1	611.3	301.5	14.5	570.6
	15.7	477.7	608.2	603.3	293.8	13.0	511.6
	17.1	438.6	558.4	552.5	247.0	11.0	432.9
	19.1	392.7	500.0	494.1	197.8	9.0	354.2
	21.1	355.5	452.6	446.1	161.7	7.0	275.5

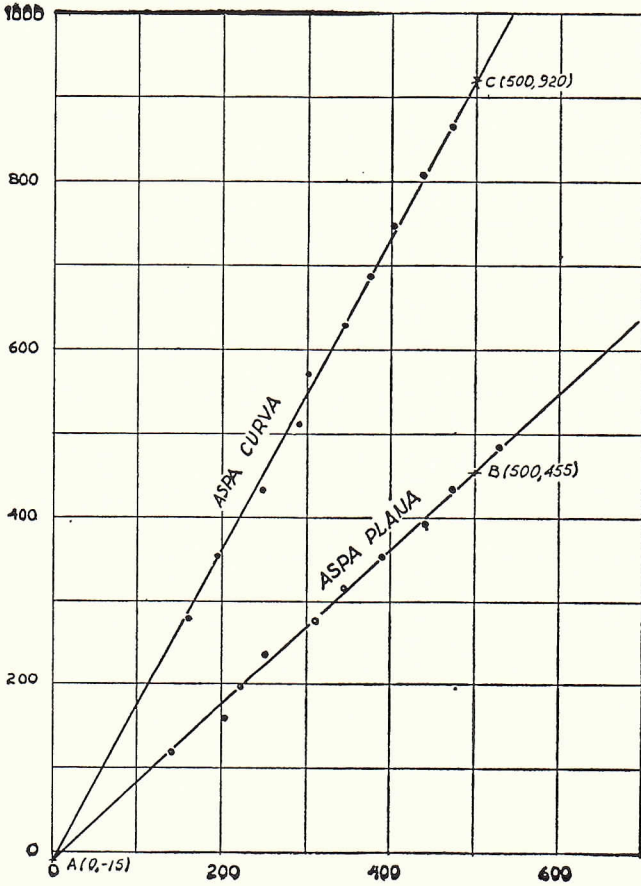
Columnas:

Vol. . . . .	Dato
t. . . . .	Dato
QR. . . . .	Vol/t
Vo. . . . .	QR/Ao
Vl. . . . .	ver ec. 3.8

$\frac{Q\gamma}{g}$  V<sub>1</sub>: razón de Momentum cedido por la tobera para un caudal Q

X. . . . .	Dato
FR. . . . .	ver ec. 3.9

b) Con los datos obtenidos en la tabulación anterior plotear la curva Fuerza Real sobre el Aspa vrs. Razón de Momentum cedido por la Tobera para las dos aspas.



e) Cálculo de la eficiencia de las Aspas:

Aspa Plana:

$$F. \text{ Ideal} = Q \frac{\gamma}{g} V \quad \text{según ec. 3.5}$$

Según la curva B), tenemos que

$$y = mx + b; \quad b \text{ en este caso es despreciable de}$$

$$\text{donde,} \quad y = mx \quad (3.10)$$

pero

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{455 - (-15)}{500 - 0} = 0.94 \quad (\text{ver curva B})$$

y por tanto 3.10 se transforma en,

$$y = 0.94x$$

$$\text{pero en la ec. anterior } y = FR; \quad x = Q \frac{\gamma}{g} V$$

$$\text{De donde} \quad FR = 0.94 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)$$

Y como

$$\text{Eficiencia} = \frac{F. \text{ Real}}{F. \text{ Ideal}} = \frac{0.94 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)}{\left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)} = 0.94$$

Aspa Curva:

$$F. \text{ Ideal} = 2 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right) \quad \text{según ec. 3.7}$$

Y según la Curva B) y despreciando el error:

$$Y = mx$$

$$m = \frac{920 - (-15)}{500} = 1.87$$

de donde,

$$y = 1.87x$$

y sustituyendo las variables,

$$F_R = 1.87 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)$$

Y como

$$\text{Eficiencia} = \frac{F. \text{ Real}}{F. \text{ Ideal}} = \frac{1.87 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)}{2 \left( Q \frac{\gamma}{g} V \right)} = 0.94 < 1$$

d) *Discusión de Resultados.*—Analicemos las curvas B). Como primera conclusión podemos afirmar que la teoría se compagina perfectamente con la práctica, pues el experimento nos comprueba sin dejar lugar a dudas que la fuerza es directamente proporcional a la cantidad de movimiento que cede el chorro, pues la gráfica de esta función es una línea recta.

Como otra conclusión importante, podemos decir que para una misma cantidad de movimiento que suministra el chorro por unidad de tiempo, la fuerza real ejercida sobre el aspa plana es la mitad

que la ejercida sobre el aspa a  $180^\circ$ . Por lo tanto el aspa a  $180^\circ$  es el doble de eficiente si se compara con el aspa plana, lo cual es de suma importancia para las turbinas y ya se había planteado teóricamente en las ec. 3.5 y 3.7.

La eficiencia del aspa plana, si se compara la fuerza ideal que debiera dar, (ec. 3.5, y la cual tiene un valor numérico igual al de la razón de cambio de cantidad de movimiento del chorro), con la fuerza real, es de 0.94, igual a la del aspa curva. Esto significa que hay pérdidas de energía en los dos casos.

En lo que se refiere al hecho de que las curvas B) no pasen por el origen, esto se debe a falta de precisión del orden de 2 a 3 mm en la nivelación, lo cual es aceptable para nuestro caso.

## CAPITULO IV

### EXPERIMENTOS DE HIDRODINAMICA DESARROLLADOS CON LA ECUACION DE BERNOUILLI

#### 4.1.—Aspectos Generales.

La Ecuación de Bernouilli y su forma más general aún, la Ecuación de la Energía, son aplicables a una gran cantidad de problemas que se presentan en la Mecánica de Flúidos. Una de las causas es la visión tan clara que proporciona acerca del fenómeno a estudiar, como también su versatilidad.

Debido a todo lo anterior resulta imposible describir procedimientos generales a seguir para desarrollar experimentos haciendo uso de la Ecuación de Bernouilli. Es por esta razón que en este trabajo nos concentraremos exclusivamente en el punto concerniente a los aforadores. Los aforadores son, además, instrumentos de lo más usado en la práctica de la ingeniería. Su cometido es determinar la cantidad de flúido por unidad de tiempo que posee cierto flujo.

#### 4.2.—Aforadores.

Para abarcar el tema de manera que se pueda contemplar en toda su perspectiva, se resume a continuación una clasificación de aforadores basada en la que publicó la ASME en un Reporte, ver referencia N° 6.

Clases de Medidores de Flujo según la característica del flujo que determinan:

- a) Medidores de Pésó: Tanques de Pesadó.
- b) Medidores de Volumen: Tanques, Medidores de Desplazamiento Absoluto (Contadores).
- c) Medidores de Altura: Venturímetro, Orificio, Tobera, Codo, Tubo de Pitot, Tubo de Pitot-Venturi.
- d) Medidores de Altura Constante y Area: Secciones de Control para Flujo Crítico.
- e) Medidores de Area (Geométricos): Rotámetros.
- f) Medidores de Fuerza: Péndulo Hidrométrico, Aspas.
- g) Medidores de Velocidad: Anemómetro, Molinete Hidráulico.
- h) Medidores Térmicos: De Alambre Caliente.
- i) Métodos Especiales: Electromagnéticos, usando Soluciones, De Velocidad del Sonido.

De todos los Aforadores antes mencionados, los únicos que hacen un uso inmediato de Bernouilli son los de Altura y los de Area-Altura.

#### 4.2.1.—Ecuación Teórica para Medidores de Altura.

Si aplicamos Bernouilli entre dos secciones de un aforador, escogidas apropiadamente según el caso, tendremos que:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

sin considerar las pérdidas. Arreglando convenientemente la ecuación anterior, llegamos a:

$$\left(\frac{\bar{p}_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{\bar{p}_2}{\gamma} + z_2\right) = \left(\frac{\bar{V}_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) \quad (4.1)$$

pero según la Ecuación de Continuidad:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2, \text{ de donde } V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2 \quad (4.2)$$

Sustituyendo 4.2 en 4.1:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) &= \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{(A_2/A_1)^2 V_2^2}{2g}\right) = \\ &= V_2^2 \left(\frac{1 - (A_2/A_1)^2}{2g}\right) \end{aligned}$$

y despejando  $V_2$  en la ec. anterior:

$$\begin{aligned} V_2 = \sqrt{2g \left( \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \right)} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{1 - (A_2/A_1)^2}} \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\text{pero tenemos que } Q = A_2 V_2 \quad (4.4)$$

y sustituyendo 4.3 en 4.4:

$$\begin{aligned} Q = A_2 \sqrt{\frac{1}{1 - (A_2/A_1)^2}} \times \\ \times \sqrt{2g \left( \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \right)} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Si el eje longitudinal del medidor es horizontal y la sec. es circular, tendremos que 4.5 se convierte en:

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} \quad (4.6)$$

pero en nuestro laboratorio las presiones se miden con piezómetros y por lo tanto,  $p = \gamma h$ , lo cual al sustituirlo en la ec. 4.6 nos da que:

$$Q_T = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \sqrt{2g (h_1 - h_2)} \quad (4.7)$$

que es la Ecuación General del Caudal Teórico ( $Q$ ) para cualquier aforador de altura, que mida presiones por medio de piezómetros,

siendo el término  $\frac{A}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} = K'$  una constante que depende de la geometría del medidor respectivo. Si sustituimos esta constante en la ec. 4.7 obtenemos,

$$\begin{aligned} Q_T &= K' \sqrt{2g (h_1 - h_2)} = K' \sqrt{2g} \sqrt{(h_1 - h_2)} \\ &= K \sqrt{(h_1 - h_2)} \end{aligned}$$

$$\text{De donde} \quad Q_T = K \sqrt{(h_1 - h_2)} \quad (4.8)$$

#### 4.2.2.—Coeficiente de Descarga.—Curva de Calibración.

La ecuación 4.8 no tiene en cuenta las pérdidas, tanto de velocidad, debido a fricción, como de área, debido a la contracción o a la expansión de la vena del fluido. Estas pérdidas hacen que el caudal sea menor que el calculado. Para tomar en cuenta ambas, se usa el coeficiente de velocidad  $C_v$  y el coeficiente de contracción  $C_c$  respectivamente y por tanto la ec. 4.8 se convierte en,

$$Q_P = C_c C_v K \sqrt{2g (h_2 - h_1)} \quad (4.9)$$

pero los dos coeficientes se pueden expresar en uno solo, al cual llamamos coeficiente de descarga ( $C_D$ ):

$$C_D = C_v C_c \quad (4.10)$$

Finalmente si sustituimos la ec. 4.10 en la ec. 4.9:

$$Q_P = C_D K \sqrt{2g (h_2 - h_1)} \quad (4.11)$$

ecuación del caudal real que se está obteniendo bajo las condiciones prácticas que imperan.

El valor del coeficiente de descarga se debe obtener experimentalmente, pues varía para cada caso particular y cada medidor tiene el propio, dependiendo tanto de condiciones de construcción del aparato como de características del flujo. El objetivo primordial de todos los experimentos que se efectúan con los aforadores en el laboratorio es el de obtener el valor de dicho coeficiente para cada medidor en particular. Para ello se construyen las curvas de calibración, las cuales se elaboran midiendo el caudal real que pasa por el aforador, haciendo uso de otro sistema de aforo, tal como los tanques de pesado, y ploteando este resultado contra la diferencia de presiones reinante entre las secciones del aforo.

De esta forma se puede más tarde encontrar rápidamente por medio del gráfico el caudal real y preciso que se produce para determinada diferencia de presiones entre las secciones de control. Todo esto se ilustrará más ampliamente con el ejemplo que a continuación se detallará.

#### 4.2.3.—Medidores de Area-Altura: Vertederos.

Todos los conceptos antes vertidos, se aplican también a los vertederos.

Lo primero es aplicar Bernouilli entre dos puntos. La única diferencia luego es que la velocidad del fluido no permanece constante con respecto a la altura de la sección vertical del vertedero. En vez de ello, alcanza la de un cuerpo en caída libre o sea que varía con el cuadrado de la altura de caída. Es por ello que para encontrar la fórmula del caudal debemos hacer uso de los métodos del cálculo integral. En lo que respecta al camino que se ha de seguir, diremos que los lineamientos dados en la sección

anterior son aplicables aquí en forma similar para encontrar el coeficiente de descarga y la curva de calibración.

### 4.3.—Ejemplo Ilustrativo: Medidor de Venturi.

#### 4.3.1.—Introducción.

El Medidor de Venturi es un aforador de diferencias de presión o de altura. Se usa para medir el caudal que pasa por una tubería. Una de las ventajas que conlleva su uso es su alta eficiencia, pues su geometría es tal que las pérdidas por área ( $C_c$ ) son casi nulas y solamente quedan las pérdidas por velocidad ( $C_v$ ), y las cuales debido a lo liso de la superficie y a lo pequeño de la longitud tienen un valor bastante bajo.

El principio bajo el cual funciona el medidor es sencillo. Simplemente es reducir la sección de la tubería, contrayéndola gradualmente hacia una garganta de sección constante, ver fig. 4.1. Debido a este cambio de sección, la velocidad aumenta al disminuir el área de paso y según Bernouilli, la presión disminuye para conservar constante la energía total en la sección. Esta disminución de presiones es proporcional al caudal según las ec. 4.8 y 4.11.

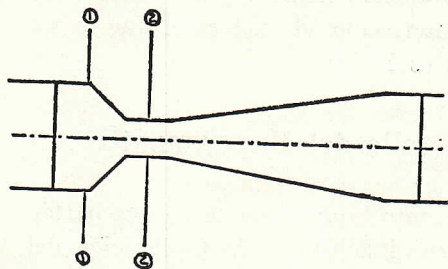


Fig. 4.1

A continuación puede observarse una expansión o aumento del diámetro hasta volver al diámetro original de la tubería. Si se observa detenidamente la fig. 4.1, se notará que este cambio de sección es aún más gradual que el anterior. Esto es para reducir las pérdidas como se verá más adelante.

### **4.3.2.—Descripción del Aparato.**

El aparato consta de varios piezómetros instalados a todo lo largo y que nos servirán para hacer el estudio de presiones. Los piezómetros más importantes son, ver lámina 3, los que están colocados en la entrada al venturímetro, piezómetro N° 1, y en la garganta, piezómetro N° 2, pues son estos piezómetros los que nos sirven para calcular el gasto y son por tanto indispensables en cualquier venturímetro.

### **4.3.3.—Procedimiento Experimental.**

Lo resumiré en pocas palabras. Consiste en obtener un conjunto de unas 10 lecturas por lo menos, para que el experimento sea significativo, entre el caudal, medido en el tanque de pesado, y las alturas del piezómetro N° 1 y el piezómetro N° 2. En 3 de estos juegos se leerán todos los piezómetros adicionales para efectuar el estudio de variación de presiones. La única dificultad que se encontrará es la pulsación u oscilación en los piezómetros, lo cual afecta la lectura. Estas pulsaciones se deben a que como el flujo es turbulento, existen pequeñas, pero constantes variaciones en la velocidad. Como la velocidad está relacionada con la presión, estas fluctuaciones la afectan también y los piezómetros varían alrededor de un punto intermedio, el cual es el que se toma para nuestras lecturas, como es lógico.

### **4.3.4.—Desarrollo del Experimento.**

El experimento lo dividiremos en dos partes. En la primera parte se construirá la Curva de Calibración del Venturímetro y se calculará el Coeficiente de Descarga, en base a la curva anterior. En la segunda parte se llevará a cabo el Estudio de la Distribución de las Presiones a lo largo del aparato.

#### **4.3.4.1.—Primera Parte: Calibración del Aparato.**

La calibración se puede hacer por varios métodos, que en el fondo son iguales. La forma más fácil es la de plotear  $Q_P$  vs.

$(h_1 - h_2)^{1/2}$  en una escala aritmética, haciendo uso de la fórmula 4.11, la cual claramente expresa que el caudal (Q) es función directa de  $(h_1 - h_2)^{1/2}$  que es la única variable de la fórmula. Este proceso es de fácil ejecución y es el recomendable para desarrollar el Reporte respectivo.

Sin embargo, con el objeto de mostrar un método que nos da mayor información, haremos uso del Análisis Dimensional para desarrollar la Primera Parte, y cuyos principios, como se recordará, fueron expuestos en la última parte del primer capítulo.

a) Tabulación de Cálculos y Resultados.

Col. Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Volumen (LTS)	Tiempo (SEG)	Caudal Práctico CM <sup>3</sup> /seg	$h_1$ CM	$h_2$ CM	$h_1 - h_2$ CM	$K(h_1 - h_2)^{1/2}$ CM <sup>3</sup> /seg	R	C <sub>D</sub>
	7.5	16.5	454.5	24.1	0.3	23.8	469.6	$3.62 \times 10^4$	0.968
		17.2	436.0	23.3	1.4	21.9	450.3	3.47	0.968
		18.5	405.4	24.5	5.7	18.8	417.3	3.23	0.971
		19.4	386.5	23.4	6.5	16.9	395.7	3.07	0.977
		21.4	350.5	23.5	9.5	14.0	360.0	2.79	0.974
		23.5	319.2	23.5	11.8	11.7	329.2	2.54	0.969
		24.3	308.6	23.8	12.8	11.0	319.2	2.46	0.967
		27.9	268.8	24.0	15.4	8.6	282.2	2.14	0.953
		32.0	234.4	23.4	17.0	6.4	243.4	1.86	0.963
		41.6	180.3	24.3	20.2	4.1	194.9	1.43	0.925

Cols. 1, 2, 4, 5.—Datos.

Col. 3.—Caudal Práctico ( $Q_P$ ) = Vol./tiempo.

Col. 7.—Caudal Teórico ( $Q_T$ ) —ver fórmulas 4.8 y 4.23—, en

$$\text{nuestro caso } K = A_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - (D_2/D_1)^4}} = 96.249$$

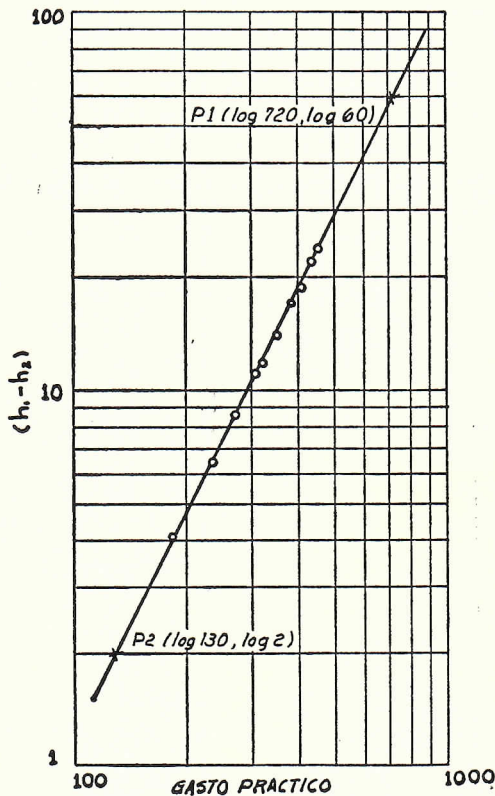
Col. 8.—Número de Reynolds: ( $R$ ) =  $\frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{(Q_P/A_2) D_2}{\nu} =$

$$= 0.7956 \times 10^2 Q_P \quad \nu = 1 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{seg. (ver tabla)}$$

Col. 9.—Coeficiente de Descarga ( $C_D$ ) =  $Q_P/Q_T$ .

b) Curva de Calibración.

Trazar la Curva  $Q_P - (h_1 - h_2)$  en base a los resultados de la tabulación a), en escala logarítmica.



c) Ecuación de la Curva de Calibración.

Partiremos de la Ecuación General de la recta que pasa por dos puntos:

$$(Y - Y_1) = \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} (X - X_1) \quad (4.12)$$

Si aplicamos esta ecuación al gráfico b), tendremos que:

$$Y = \log (h_1 - h_2)$$

$$X = \log Q$$

Para obtener de una vez  $Q$  en función de  $(h_1 - h_2)$  despejamos  $(X - X_1)$  en 4.12:

$$(X - X_1) = (Y - Y_1) \frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2} \quad (4.13)$$

Si ahora tomamos dos puntos cualesquiera sobre la Curva de Calibración, v. gr.

Punto 1,  $(\log 720, \log 60)$

Punto 2,  $(\log 130, \log 2)$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 4.13:

$$X - \log 720 = \frac{\log 720 - \log 130}{\log 60 - \log 2} (Y - \log 60)$$

Y efectuando los logaritmos,

$$X - 2.85733 = \frac{2.85733 - 2.11394}{1.77815 - 0.30103} (Y - 1.77815)$$

y efectuando operaciones,

$$X = 0.50326Y + 1.96246$$

$$\text{o sea que } \log Q = 0.50326 \log (h_1 - h_2) + 1.96246 \quad (4.14)$$

Si encontramos el antilogaritmo de 4.14:

$$Q_P = 91.72 (h_1 - h_2)^{0.503} \quad (4.15)$$

que es la Ecuación de la Curva de Calibración.

#### b) Coeficiente de Descarga.

Vamos primero a deducir la Ecuación o Fórmula del Caudal Teórico por Análisis Dimensional.

La experiencia nos dice que para un venturímetro las variables que fijan las condiciones de determinado problema son: el diámetro (D), como característica geométrica; la densidad del fluido ( $\rho$ ) y la viscosidad ( $\mu$ ), como variables representativas del fluido; la variación de presión ( $\Delta p$ ), como característica del flujo. Se puede por lo tanto establecer la siguiente relación:

$$Q = f (D, \rho, \mu, \Delta p)$$

Vamos a continuación a establecer las dimensiones de nuestras variables:

Diámetro .....	L
Densidad .....	ML <sup>-3</sup>
Viscosidad .....	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>
Caudal .....	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>
Variación de Presiones..	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>

Por tanto podemos concluir que:

$$\text{Número de Magnitudes} = m = 5$$

$$\text{Número de Dimensiones} = n = 3$$

Si aplicamos el Teorema II, podemos agrupar las 5 variables en dos, (5 - 3 = 2), parámetros adimensionales II:

$$\text{II}_1 = D^x \rho^y \Delta p^z \mu \quad (4.16)$$

$$\text{II}_2 = D^x \rho^y \Delta p^z Q \quad (4.17)$$

Sustituycamos las magnitudes de 4.16 y 4.17 por sus respectivas dimensiones:

$$\text{II}_1 = M^0 L^0 T^0 = (L)^x (ML^{-3})^y (ML^{-1}T^{-2})^z (ML^{-1}T^{-1})$$

$$\text{II}_2 = M^0 L^0 T^0 = (L)^x (ML^{-3})^y (ML^{-1}T^{-2})^z (L^3 T^{-1})$$

efectuando operaciones y simplificando las expresiones anteriores:

$$\text{II}_1: \quad M^0 L^0 T^0 = M^{(y+z+1)} L^{(x-3y-z-1)} T^{(-2z-1)}$$

$$\text{II}_2: \quad M^0 L^0 T^0 = M^{(y+z)} L^{(x-3y-z+3)} T^{(-2z-1)}$$

Para que las ecuaciones sean dimensionalmente homogéneas, debe cumplirse con el requisito de que los exponentes de sus dimensiones sean iguales en los dos miembros. Por lo tanto podemos establecer en base a esto y con los exponentes de las expresiones anteriores las siguientes ecuaciones simultáneas:

$\text{II}_1$ :

$$M: \quad y + z + 1 = 0$$

$$L: \quad x - 3y - z - 1 = 0$$

$$T: \quad -2z - 1 = 0$$

Y resolviéndolas simultáneamente obtenemos que:

$$x = -1$$

$$y = -1/2$$

$$z = -1/2$$

Sustituyendo estos valores en la ec. 4.16:

$$\dot{I}I_1 = \dot{D}^{-1} \rho^{-1/2} \Delta p^{-1/2} \mu = \frac{\mu}{D \rho^{1/2} \Delta p^{1/2}}$$

De donde 
$$II_1 = \frac{D \sqrt{\rho \Delta p}}{\mu}$$

Esto último es factible ya que equivale a cambiar de signo a todos los exponentes, lo cual es válido.

$II_2$

$$M: \quad y + z = 0$$

$$L: \quad x - 3y - z + 3 = 0$$

$$T: \quad -2z - 1 = 0$$

de donde:

$$x = -2$$

$$y = 1/2$$

$$z = -1/2$$

Sustituyendo los valores de las incógnitas de la ecuación 4.17:

$$II_2 = D^{-2} \rho^{1/2} \Delta p^{-1/2} Q = \frac{Q}{D^2 \sqrt{\Delta p/\rho}}$$

Y según el Teorema II, estos dos parámetros se pueden agrupar en una sola función:

$$F(II_1, II_2) = 0$$

o sea que

$$F \left( \frac{D \sqrt{\rho \Delta p}}{\mu}, \frac{Q}{D^2 \sqrt{\Delta p/\rho}} \right) = 0$$

que también puede expresarse en forma explícita como:

$$\frac{Q}{D^2 \sqrt{\Delta p/\rho}} = f \frac{D \sqrt{\rho \Delta p}}{\mu} \quad (4.18)$$

Pero según la ecuación de hidrostática  $\Delta p = \Delta h \gamma = \Delta h \rho g$  (4.19)

Sustituyendo la ec. 4.19 en la 4.18 y simplificando:

$$\frac{Q}{D^2 \sqrt{\Delta h g}} = f \left( \frac{D \rho \sqrt{\Delta h g}}{\mu} \right) = f \left( \frac{D}{\nu} \sqrt{\Delta h g} \right) \quad (4.20)$$

Si asumimos una función potencial, podemos expresar 4.20 como:

$$Q_T = C D^2 \sqrt{g} \Delta h^{0.5} \left( \frac{D}{\nu} \sqrt{g \Delta h} \right)^n \quad (4.21)$$

Pero  $C D^2 \sqrt{g} = K$ , una constante, de donde

$$Q_T = K (h_1 - h_2)^{0.5} \left( \frac{D \sqrt{g \Delta h}}{\nu} \right)^n \quad (4.22)$$

Si comparamos esta última expresión del Caudal Teórico, deducido por Análisis Dimensional, con el de la fórmula N° 4.8 de la sección 4.2.1 ( $Q_T = K (h_1 - h_2)^{5/2}$ ), vemos que son casi iguales y la única diferencia es el segundo término adicional de 4.22.

Este segundo término,  $\left( \frac{D \sqrt{g \Delta h}}{\nu} \right)^n$ , no es más que una expresión del Número de Reynolds, pues  $\sqrt{g \Delta h}$  es velocidad

Por otro lado tenemos que la ecuación de la Curva de Calibración es  $Q_P = 91.72 (h_1 - h_2)^{0.503}$

esto quiere decir que para nuestro venturímetro, el valor de  $n$  es de 0.06, lo cual es despreciable y entonces el segundo término ya no se toma en cuenta y 4.22 se transforma en:

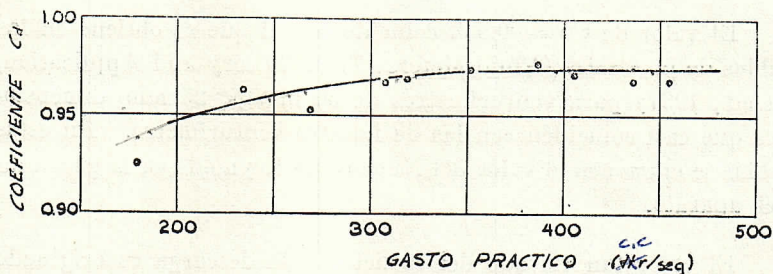
$$Q_T = K (h_1 - h_2)^{0.5} \quad (4.23)$$

que es una expresión igual a la ec. 4.8.

Como  $K = 96.249$  para nuestro caso, ver Tabulación a), podemos encontrar el Coeficiente de Descarga:

$$C_D = \frac{Q_P}{Q_T} = \frac{91.72 (h_1 - h_2)^{5/2}}{96.249 (h_1 - h_2)^{5/2}} = 0.953.$$

f) Con los datos de la Tabulación a), trazar la Curva Coeficiente de descarga—Gasto Real, en escala aritmética.



g) Discusión de Resultados.

Al analizar a simple vista la Curva de Calibración, observamos una relación lineal entre  $\log Q$  y  $\log (h_1 - h_2)$ . Como la escala era logarítmica, esta relación lineal indica que la relación natural es potencial e igual a  $Q = K (h_1 - h_2)^{1/2}$ , como ya se dedujo con anterioridad.

Ahora examinemos la Curva  $C_d-Q$ . Lo más importante de notar es que el coeficiente de descarga no permanece constante; es más aún, la variación no es al azar sino más bien tiende a aumentar en forma gradualmente ascendente, desde un valor mínimo de 0.92 hasta un máximo de 0.98, como puede observarse en el gráfico f). El aumento del coeficiente al aumentar el caudal se debe a que dicho coeficiente tiene incluido el término

$$\left( \frac{D \sqrt{g \Delta h}}{\nu} \right)^{0.06}$$

ver fórmula 4.22, que es una expresión del Número de Reynolds. Esto se puede comprobar en la Tabulación a), en la cual se puede notar claramente que al aumentar el Número de Reynolds, el Coeficiente de Descarga también aumenta.

Es de hacer notar la forma de obtener el coeficiente de descarga haciendo uso de la Curva de Calibración. Esta forma es mucho más significativa que la de hacer un promedio aritmético de todos los coeficientes obtenidos en la Tabulación a). Esto se debe a

que con la Curva se tiene la Ley exacta de variación que tiene el fenómeno, mientras que del otro modo se tiene únicamente puntos que están alrededor de dicha ley.

El valor de  $C_d = 0.953$  coincide con el que se obtiene en las tablas de la ASME (Fluid Meters: Their Theory and Application, 14 ed., 1937) para venturímetros de  $50 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ , dimensiones que casi coinciden con las de nuestro venturímetro. En estas tablas se entra con el valor del Número de Reynolds en la garganta del aparato.

El valor tan elevado del coeficiente de descarga es originado por la forma especial del aparato, la cual hace que la contracción de la vena sea casi nula y por tanto el coeficiente de contracción es igual a la unidad y el coeficiente de descarga es igual al de velocidad, el cual debido a lo pulido de la superficie y a lo pequeño del tramo es bastante alto.

La eficiencia del aparato se debe, pues, a lo gradual de la expansión y de la contracción.

Por último se hará énfasis en lo fácil que es obtener un caudal cuando ya se cuenta con la Curva de Calibración del Aforador; basta encontrar la diferencia de presiones.

#### **4.3.4.2.—Segunda Parte: Estudio de la Distribución de Presiones a lo largo del Venturímetro.**

Para efectuar el estudio de las presiones se han colocado a lo largo del venturímetro varios piezómetros adicionales, ver lámina 3, distribuidos de la siguiente manera: uno en la entrada, dos en la parte convergente, uno en la garganta y los restantes siete en la parte divergente o expansión.

A continuación se deducen las fórmulas a usar en esta segunda parte.

Aplicemos Bernouilli entre la sección recta donde se encuentra colocado el piezómetro N° 1 y otra sección cualquiera donde se encuentra otro piezómetro N° "n":

$$\frac{V_n^2}{2g} + \frac{\bar{P}_n}{\gamma} + Z_n = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\bar{P}_1}{\gamma} + Z_1$$

Pero  $p/\gamma + z = h$  (altura piezométrica). Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\frac{V_n^2}{2g} + hn = \frac{V_1^2}{2g} + h_1$$

de donde

$$hn - h_1 = \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_n^2}{2g} \quad (4.24)$$

Pero por el Principio de Continuidad  $V_n A_n = V_1 A_1 = V_2 A_2$  y sustituyendo en ec. 4.24:

$$hn - h_1 = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{V_2^2}{2g} - \frac{A_2^2}{A_n^2}$$

Y factorando y arreglando convenientemente los términos:

$$\frac{hn - h_1}{V_2^2/2g} = \left( \frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{A_2^2}{A_n^2} \right) \quad (4.25)$$

En esta ecuación, si para obtener la Velocidad ( $V_2$ ) en el primer miembro, usamos el Caudal Real, tendremos una distribución real de presiones. Por el contrario, el segundo miembro de esta ecuación depende únicamente de la geometría del aparato, la cual permanece constante y por lo tanto obtenemos una distribución ideal de presiones.

a) Tabulación de los Cálculos para obtener la Distribución Ideal de Presiones en base a ec. 4.25 (segundo miembro).

Piezómetro Nº	Diámetro Sec. (dn)	$d_2/dn$	$(A_2/A_n)^2$	$(A_2/A_1)^2 - (A_2/A_n)^2$
1	26.0	0.615	0.143	0
a	23.8	0.672	0.203	-0.060
b	19.1	0.838	0.493	-0.350
2	16.0	1.000	1.000	-0.857
c	17.0	0.941	0.783	-0.637
d	18.8	0.850	0.522	-0.376
e	21.6	0.740	0.300	-0.154
f	22.2	0.720	0.269	-0.123
g	23.8	0.672	0.204	-0.058
h	25.5	0.627	0.155	-0.009
i	26.0	0.615	0.146	- 0

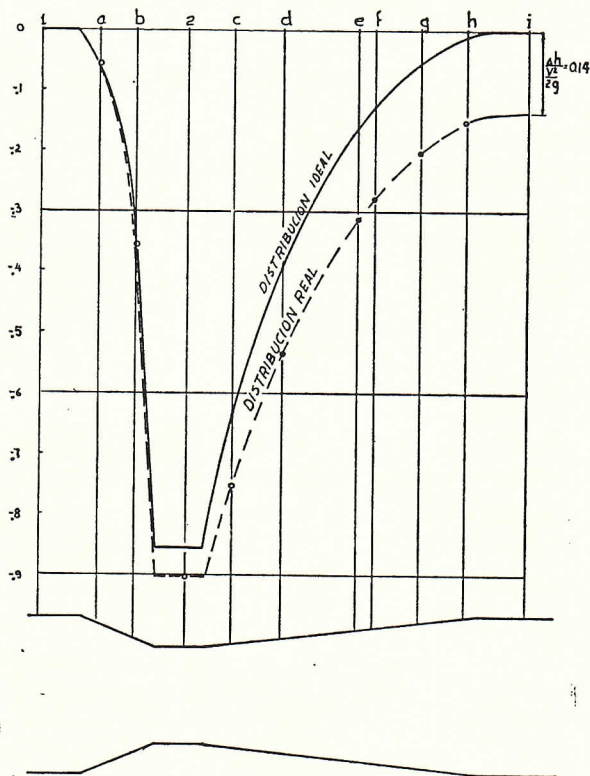
Los diámetros se calculan por triángulos. La última columna es la distribución ideal de presiones y sirve para el gráfico c).

b) Tabulación de los Cálculos efectuados para obtener la Distribución Real de Presiones en base al primer miembro de 4.25.

Piez. No.	$Q_I = 436.0 \text{ cm}^3 / \text{s}$ $V_2^2 / 2g = 24.09 \text{ cm}$			$Q_{II} = 386.6 \text{ cm}^3 / \text{s}$ $V_2^2 / 2g = 18.89 \text{ cm}$			$Q_{III} = 319.1 \text{ cm}^3 / \text{s}$ $V_2^2 / 2g = 12.84 \text{ cm}$			Promedio de $\frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g}$
	$h_n$ (cm)	$h_n - h_1$ (cm)	$\frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g}$	$h_n$ (cm)	$h_n - h_1$ (cm)	$\frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g}$	$h_n$ (cm)	$h_n - h_1$ (cm)	$\frac{h_n - h_1}{V_2^2 / 2g}$	
	1	23.3	0	0	23.4	0	0	23.5	0	
a	21.9	-1.4	-0.058	22.3	-1.1	-0.058	22.8	-0.7	-0.055	-0.057
b	14.6	-8.7	-0.361	16.7	-6.7	-0.355	18.9	-4.6	-0.358	-0.358
2	1.4	-21.9	-0.909	6.5	-16.9	-0.895	11.8	-11.7	-0.911	-0.905
c	4.3	-19.0	-0.789	8.4	-15.0	-0.794	13.0	-10.5	-0.818	-0.791
d	11.1	-12.2	-0.506	13.6	-9.8	-0.518	16.8	-6.7	-0.523	-0.516
e	14.4	-8.9	-0.369	16.5	-6.9	-0.365	18.6	-4.9	-0.382	-0.372
f	16.7	-6.6	-0.274	18.3	-5.1	-0.270	19.9	-3.6	-0.280	-0.275
g	18.3	-5.0	-0.208	19.5	-3.9	-0.206	20.7	-2.8	-0.218	-0.210
h	19.2	-4.1	-0.170	20.3	-3.1	-0.164	21.2	-2.3	-0.179	-0.171
i	19.9	-3.4	-0.141	20.8	-2.6	-0.138	21.6	-1.9	-0.148	-0.142

NOTA.—La última columna contiene un promedio de las tres distribuciones tabuladas antes. Con este valor promedio se traza la curva de distribución de presiones reales en el gráfico c).

c) Gráfico.—Distribución Ideal.—Distribución Real de Presiones en el Venturímetro.



d) Discusión de Resultados de la Segunda Parte.

Observemos detenidamente el gráfico c). A primera vista nos encontramos con el hecho de que al disminuir gradualmente la sección del venturi en la parte convergente, las alturas en los piezómetros también lo hacen. Como el venturi está horizontal, las alturas a un cierto nivel de referencia permanecen invariables de una sección a otra, y los cambios de alturas piezométricas son debidos exclusivamente a cambios de presión. Diremos por consiguiente que al disminuir el área a lo largo de la constricción, la velocidad aumenta y la presión disminuye gradualmente, cosa que era de esperarse, pues la energía debe mantenerse constante según la

ec. de Bernouilli. Del mismo modo, al aumentar la sección en la parte divergente del venturímetro, las alturas piezométricas aumentan, pues la velocidad es reducida y para mantener el nivel de energía constante, la presión debe aumentar.

En síntesis, existe en la contracción un proceso de conversión de energía potencial en energía cinética y a continuación el proceso se invierte y hay cambio de energía cinética a energía de presión en la parte de expansión.

Analicemos en el mismo gráfico las curvas ideal y real de distribución de presiones. Observaremos que el agua en los piezómetros (dist. real) no llega hasta la línea de distribuciones ideales. Este fenómeno se debe a que en el espacio que recorre el fluido existen pérdidas de energía. Estas pérdidas son mayores en la expansión o parte divergente del venturi, y mínimas en la contracción. Podemos, pues, concluir que el proceso de cambiar energía de presión en energía de velocidad (contracción) es sumamente eficiente, no así el proceso inverso (expansión), el cual tiene una eficiencia bastante baja, debido a la formación de remolinos al verificarse el fenómeno de separación de la capa límite, cosa que estudiaremos en el siguiente capítulo.

Al pasar por un venturímetro, la línea piezométrica sufre una caída con respecto a la altura que traía en la tubería al llegar, pero no es muy grande, como puede observarse, y es proporcional a la velocidad, aumentando con el cuadrado de ésta:

$$\frac{\Delta h = 0.14 V_2^2/2g}{V_2^2/2g} = 0.14 \therefore \Delta h = 0.14 V_2^2/2g$$

como puede verse en el gráfico de Distribución de Presiones, o sea que en el paso por este aforador se pierde un 14% de la energía cinética.

## CAPITULO V

### EXPERIMENTOS DESARROLLADOS HACIENDO USO DE LOS PRINCIPIOS DE FRICCIÓN

#### 5.1.—Aspectos Generales.

En los experimentos efectuados en los capítulos anteriores no se estudió, al tomar en cuenta la fricción, sus orígenes y características. Lo único que se hizo fue adoptar un coeficiente empírico representativo de los efectos de fricción.

Es el propósito de esta parte de la tesis, el de tratar los principios básicos en base a los cuales se puede analizar luego cualquier problema de flujo en el cual la fricción tiene un papel preponderante y que por lo tanto no puede despreciarse.

##### 5.1.1.—Capa Límite.

El concepto más importante en el estudio de los flujos reales es el de capa límite. Se ha encontrado que para un fluido en movimiento las pérdidas debidas al efecto del rozamiento se llevan a cabo en una estrecha faja situada en los límites del fluido, la cual recibe el nombre de capa límite. Esto quiere decir que el resto del flujo puede tratarse como ideal.

El caso más simple para estudiar es el de la capa límite que se forma sobre una placa plana en reposo y paralela a la dirección del flujo fluido; ver figura 5.1.

Se supone que hay una presión uniforme a la largo.

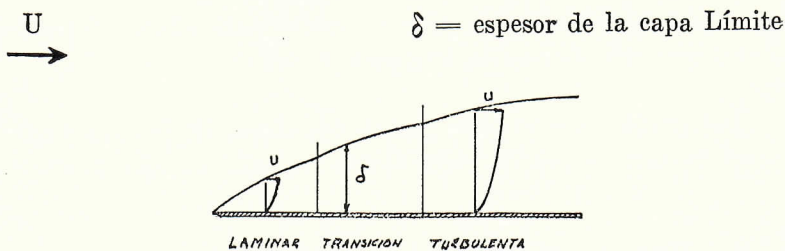


Fig. 5.1

Lo primero a observar en la fig. 5.1 es que la velocidad varía asintóticamente de 0, en el fluido en contacto directo con la placa, hasta  $U$  luego de cierto espesor  $\delta$ .

La arista aguas arriba de la placa que entra primero en contacto con el fluido se llama Borde de Ataque.

La capa límite comienza en el borde de ataque de la placa y luego se va engrosando aguas abajo debido a que la tensión de cortadura tiende a frenar cada vez más partículas de fluido.

Si observamos la fig. 5.1 veremos que en la primera parte de la capa, el flujo se mueve en capas delgadas constituyendo un movimiento laminar, sin importar si el flujo antes de llegar a la placa, lo es o no lo es.

Luego, debido a que la capa se hace más gruesa, las fuerzas viscosas ya no pueden mantener el movimiento laminar y las partículas del fluido empiezan a tomar movimientos irregulares, capa límite de transición, hasta llegar a tener movimientos completamente al azar formando la capa límite turbulenta, la cual continúa indefinidamente si no existe el fenómeno de separación.

Todo esto nos sirve para establecer el siguiente razonamiento: A medida que crece la capa límite, mayor cantidad de fluido es desacelerado, adoptando una velocidad menor que la que llevaba antes de entrar en contacto con la superficie sólida. Hay, pues, un cambio de cantidad de movimiento sobre la masa del fluido de espesor " $\delta$ ." Este cambio es producido por fuerzas retardantes las cuales llamaremos fuerzas de arrastre ( $F_A$ ) las cuales actúan quan-

do hay movimiento relativo entre un fluido y un sólido sumergido en él y que son las fuerzas llamadas de fricción.

Las propiedades en cada una de las etapas de la capa límite varían un tanto y por ello debe analizarse cada una por separado.

### **5.1.2.—Fuerzas sobre cuerpos sumergidos.**

Como una de las aplicaciones más importantes de los conceptos antes vertidos, se encuentra el estudio de las fuerzas que ejerce un flujo fluido sobre un cuerpo sumergido en él, cuando existe un movimiento relativo entre los dos, no importa cuál esté en reposo. El cuerpo sufre a causa de dicho movimiento dos clases de fuerzas, las fuerzas de arrastre y las fuerzas de sustentación.

#### **5.1.2.1.—Las fuerzas de Arrastre.**

Se definen como las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo en sentido paralelo a la dirección del flujo.

Dichas fuerzas ya se mencionaron en la sección anterior de esta tesis.

Las fuerzas de arrastre son originadas por dos causas diferentes entre sí:

La fricción y el gradiente de presiones.

La fricción es debida a las fuerzas de cortadura que se desarrollan exclusivamente en la capa límite como ya se vió en la sección anterior.

El arrastre originado por el gradiente de presiones se debe al siguiente fenómeno:

En la fig. 5.2 aparece un cilindro sumergido en un fluido ideal, con sus respectivas líneas de corriente; el cilindro no tiene circulación;

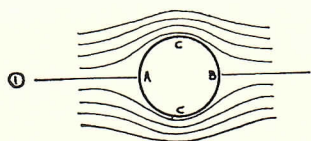


Fig. 5.2

Apliquemos Bernouilli del punto 1 al punto A

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} \quad (z_1 = z_A)$$

Pero  $V_A = 0$

Y por tanto,

$$\frac{P_A}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

El punto A se llama punto de estancamiento y es un punto donde toda la energía es energía de presión. Si examinamos el punto B, veremos que es otro punto de estancamiento, por idénticas razones.

Si ahora examinamos las líneas de corriente, vemos que hay dos situaciones: de A a C el flujo es acelerado; luego, de C a B comienza a disminuir de velocidad hasta llegar a 0 en B y por lo tanto a aumentar de presión, según Bernouilli.

Pero como ya se comprobó en el experimento del venturímetro, el proceso de conversión de energía de velocidad en energía de presión es muy poco eficiente, por lo tanto y debido a las pérdidas, la presión a que se llega en B es menor que la de A, pues antes de llegar al punto B, la velocidad llega a 0 en las partículas adyacentes, llevándose a cabo la formación de la estela o separación, compuesta de remolinos. Si hacemos entonces un cuerpo libre, fig. 5.3, veremos que la presión en A es mayor que en B por lo que existe una fuerza resultante  $F_s$ , que va a favor del fluido o sea en

Es, pues, deseable que exista la mayor fuerza de sustentación, combinada con la menor fuerza posible de arrastre o sea que para un caso dado, se necesita la relación mayor de sustentación a arrastre.

Esta relación depende de varios parámetros como son:

- a) El diseño en sí de la forma del perfil;
- b) La relación de largo a ancho del ala, debido a que se inducen fuerzas de arrastre adicionales entre menor sea dicha razón;
- c) Angulo de ataque que es el ángulo entre el perfil y la dirección del flujo;
- d) El número de Reynolds.

### 5.2.2.—Desarrollo de la Teoría Específica.

- a) Dedución de las fórmulas:

Estas fórmulas están deducidas por Análisis Dimensional. Primero, pues consideremos las magnitudes características que entran en tal problema:

- 1.—Propiedades del Fluido:

densidad ( $\rho$ )

viscosidad ( $\mu$ )

módulo de elasticidad (E)

(para considerar la compresibilidad)

- 2.—Propiedades del flujo:

velocidad del flujo antes de ser perturbado ( $V_0$ )

fuerza de arrastre o sust. ( $F_a$  ó  $F_s$ ).

### 3.—Características Geométricas:

área (A).

Podemos establecer entonces que:

$$F_A = f_1 (\rho, \mu, E, V_0, A)$$

$$F_S = f_2 (\rho, \mu, E, V_0, A)$$

Como son las mismas variables, vamos a aplicar el método sólo a una de las funciones, por ejemplo la de la Fuerza de Arrastre:

$$\Pi_1 = V_0^{x_1} \cdot \rho^{y_1} \cdot A^{z_1} \cdot \mu \quad (5.1)$$

$$\Pi_2 = V_0^{x_2} \cdot \rho^{y_2} \cdot A^{z_2} \cdot E \quad (5.2)$$

$$\Pi_3 = V_0^{x_3} \cdot \rho^{y_3} \cdot A^{z_3} \cdot F_A \quad (5.3)$$

Resolviendo los 3 sistemas, cada uno de 3 ecuaciones simultáneas, obtenemos:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -2$$

$$y_1 = -1 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = -1$$

$$z_1 = -1/2 \quad z_2 = 0 \quad z_3 = -1$$

Y substituyéndolos en las ecuaciones 5.1, 5.2, y 5.3 obtenemos que:

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{V_0 \rho \sqrt{A}}, \quad \Pi_2 = \frac{E}{V_0^2 \rho}, \quad \Pi_3 = \frac{F}{V_0^2 \rho A}$$

Esto, según el Teorema II, se puede expresar como:

$$f_3 \left( \frac{F_A}{V_0^2 \rho A}, \frac{\mu}{V_0 \rho \sqrt{A}}, \frac{E}{V_0^2 \rho} \right) = 0$$

Y despejando  $F_A$  y reorganizando los parámetros podemos decir que:

$$F_A = f_4 \left( \frac{V_0 \rho \sqrt{A}}{\mu}, \frac{V_0^2 \rho}{E}, \frac{\rho V_0^2}{2} A \right) \quad (5.4)$$

$$\text{Pero } \frac{V_0 \rho \sqrt{A}}{\mu} = \bar{R} \quad (\text{Número de Reynolds}) \quad (5.5)$$

$$Y \quad \frac{V_0^2 \rho}{E} = M \quad (\text{Número de Mach}) \quad (5.6)$$

Sust. ec. 5.5 y 5.6 en 5.4:

$$F_A = f_4 (R, M) \frac{\rho V_0^2}{2} A \quad (5.7)$$

Si hacemos

$$f_4 (R, M) = C_A \quad (5.8)$$

Veremos que el coeficiente de arrastre ( $C_A$ ) depende del Número de Reynolds y del Número de Mach.

Pero como en nuestro caso la velocidad es menor que la del sonido, la compresibilidad no nos afecta y la fuerza de arrastre es únicamente función de  $R$ . Si sustituimos la función 5.8 en la ecuación 5.7, obtenemos:

$$F_A = C_A \frac{\rho V_0^2}{2} A \quad (\text{Fuerza de Arrastre}) \quad (5.9)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, también se establece que:

$$F_S = C_S \frac{\rho V_0^2}{2} A \quad (\text{Fuerza de Sustentación}) \quad (5.10)$$

$V_0$ : Velocidad del flujo no perturbado

$A$ : Área de proyección del perfil sobre el plano del flujo

El análisis anterior se hizo en dos dimensiones, es decir, considerando el ala de una longitud infinita.

Las alas de un avión son en realidad de una longitud determinada. Debido a que hay una diferencia de presiones entre la parte superior y la inferior del ala, se crea en las puntas una circulación de aire de abajo hacia arriba que crea una fuerza de arrastre adicional llamada Arrastre Inducido.

Entre menor sea la relación de longitud a ancho del ala, este efecto será mayor.

La fuerza de arrastre inducida será pues:

$$F_{AI} = C_{AI} \rho \frac{V^2}{2} A \quad (5.11)$$

Y la del coeficiente de arrastre inducida será:

$$C_{AI} = \frac{C_s^2}{\Pi (B/c)} \quad (5.12)$$

(La deducción se basa en la distribución elíptica de la sustentación a lo largo del ala, según Prandtl).

b) Joukowsky ideó un método por medio del cual se puede construir un perfil de ala que crea por su misma conformación una cierta circulación que origina la respectiva fuerza de sustentación.

El método consiste en trasladar las líneas de corriente y la situación de los puntos de estancamiento, de un círculo con flujo de circulación a un arco oblicuo, formando así un cierto perfil.

Se hace uso de este perfil en la práctica de laboratorio, pues aunque ya en la actualidad se ha reformado para el diseño de los nuevos perfiles, su diseño original proviene de una formulación puramente matemática, el teorema de Kutta-Joukowsky.

A continuación en la fig. 5.6 se presentan varios diseños de perfiles Joukowsky, variando la curvatura y la relación ( $\kappa$ ) de la parte más gruesa a la longitud del cordón.

Para las pruebas del Laboratorio se escogió el de relac. de 20%. El método para construir dichos perfiles es el que se encuentra en la ref. Número 8, Sección 27.

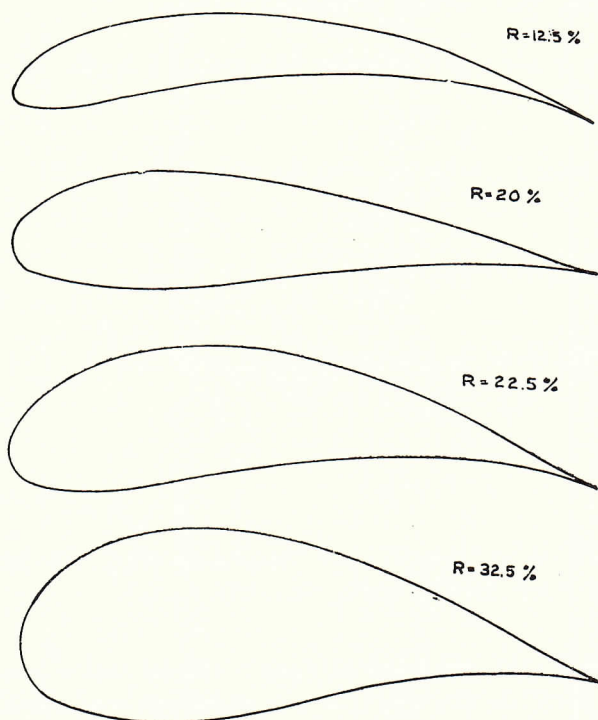


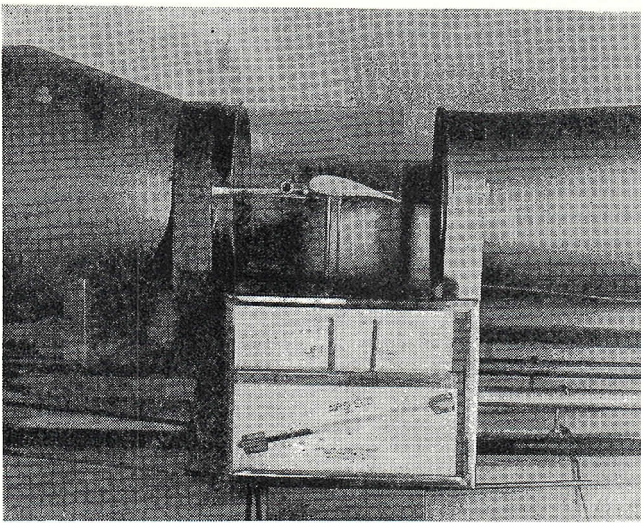
Fig. 5.6

### 5.2.3.—Descripción del Aparato.

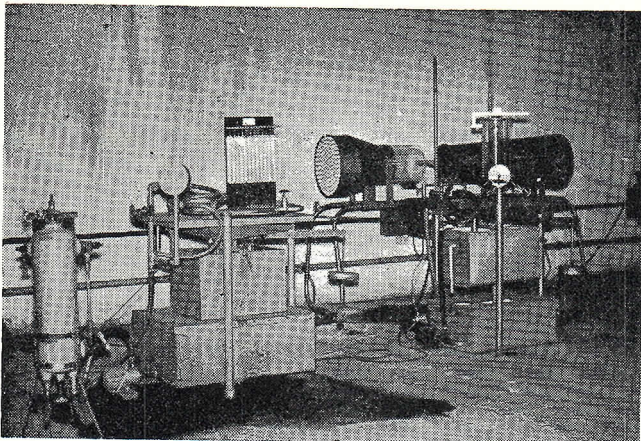
En el túnel de viento y sobre un eje vertical que tiene una escala para medir ángulos de inclinación verticales, se asegura el perfil de ala que se va a aprobar, ver lámina 4.

Este eje está montado sobre un mecanismo de balanzas que de una vez da por separado y en diferentes escalas, la fuerza de arrastre y la de sustentación.

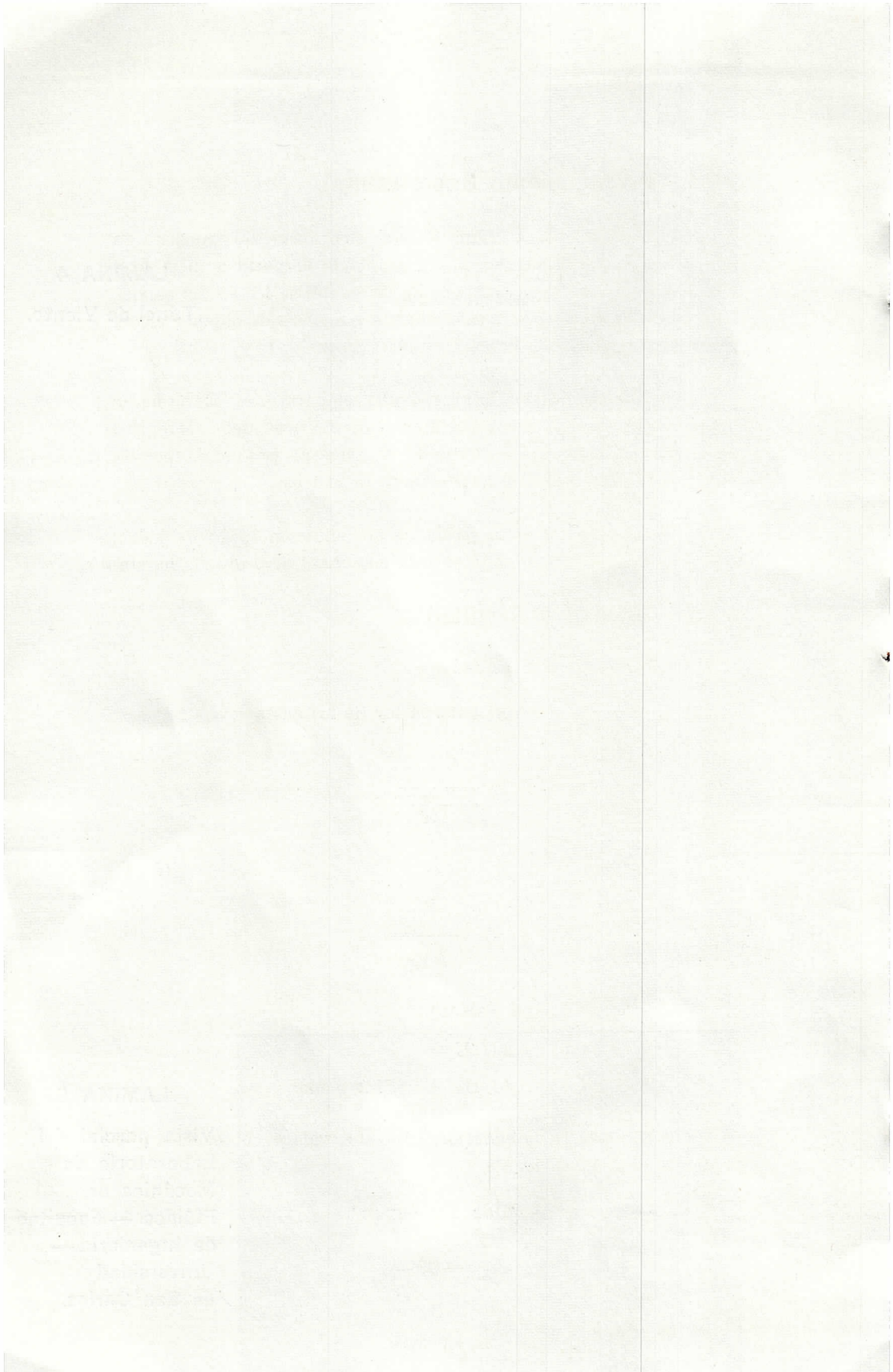
Hay también en el túnel un registrador de velocidades.



**LAMINA 4**  
**Túnel de Viento.**



**LAMINA 5**  
**Vista parcial del**  
**Laboratorio de**  
**Mecánica de**  
**Flúidos. — Facultad**  
**de Ingeniería. —**  
**Universidad**  
**de San Carlos.**



### 5.2.4.—Procedimiento Experimental.

El procedimiento a seguir es sumamente sencillo; consiste en que a una cierta velocidad, se va poniendo el perfil a diferentes ángulos de ataque para cada uno de los cuales se lee en las escalas respectivas el arrastre y la sustentación a manera de obtener cierta gama de valores desde unos  $10^\circ$  hasta unos  $-10^\circ$ .

Debe además medirse la presión y la temperatura. Es de hacer notar que antes de poner el perfil en el eje vertical, debe corregirse la escala del arrastre descontando el arrastre producido por la varilla a la velocidad a la cual se hará la prueba.

Debe ponerse en 0 la escala de sustentación luego de haber colocado el perfil, descontando de esta manera el peso propio del ala.

### 5.2.5.—Cálculos y Resultados.

1.—Encontrar la densidad:

Aplicando la ley de los gases:

$$\frac{PV_s}{T} = R = \frac{P}{T\rho g}$$

Y por tanto, (5.13)

$$\rho = \frac{P}{RTg}$$

$$R = 29.3 \text{ (en Tablas)}$$

$$T = 24^\circ\text{C} = 297^\circ\text{K}$$

$$P = 64.5 \text{ cm de Hg} = 877.2 \text{ g/cm}^2$$

Sustituyendo en la ecuación 5.13 estos valores, obtenemos que la densidad del aire es de,

$$\rho = 0.103 \text{ Kg seg}^2/\text{m}^4$$

2.—Area:

Cordón. . . . . 16 cm (c)

Longitud del ala. . . . . 23 cm (B)

$$S = B \times c = 16 \times 23 = 368 \text{ cm}^2$$

3.—Velocidad:

$$23 \text{ mph} = 10.30 \text{ m/seg}$$

4.—Número de Reynolds:

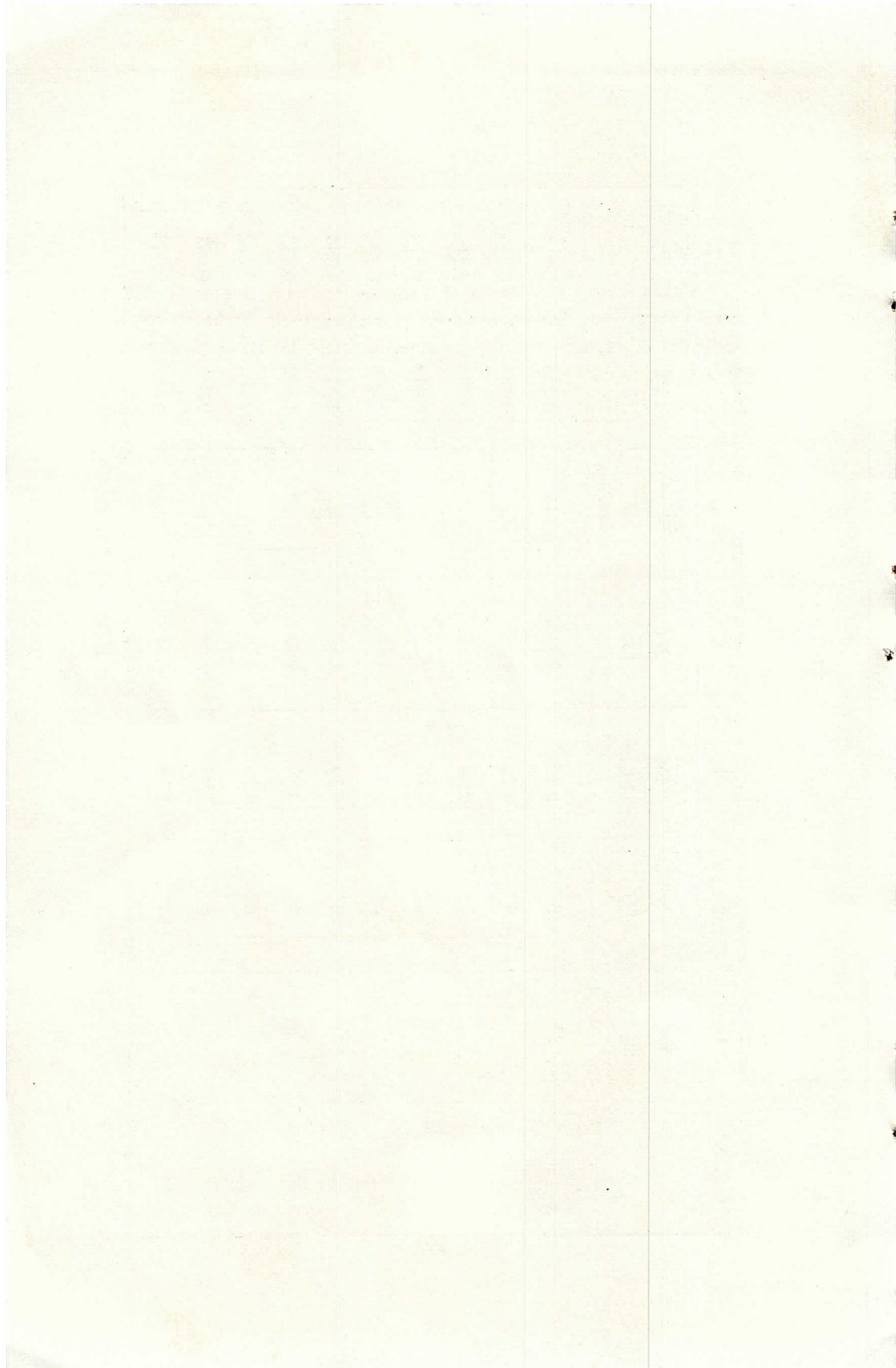
$$R = \frac{V \times c}{\nu} = \frac{10.3 \times 0.16}{1.6 \times 10^{-5} \text{ (ver tablas)}} = 1.03 \times 10^5$$

5.2.5.1.—Tabulación de datos y cálculos para obtener los Coeficientes de Arrastre ( $C_A$ ) y Sustentación ( $C_s$ ), para diferentes ángulos de ataque.

Col. N°	1	2	3	4	5	6	7
	Vel. mph	$\alpha$ °C	Fs Lbs.	F <sub>A</sub> Lbs.	$\frac{SpV^2}{2}$ Lbs.	Cs	CA
	23	-8°	0.12	0.095	0.444	0.270	0.214
		-6°	0.22	0.10	"	0.495	0.225
		-4°	0.34	0.11	"	0.766	0.248
		-2°	0.45	0.12	"	1.013	0.270
		0°	0.58	0.15	"	1.306	0.338
		2°	0.70	0.17	"	1.576	0.383
		4°	0.80	0.20	"	1.802	0.450
		6°	0.95	0.25	"	2.139	0.563
		8°	1.06	0.29	"	2.387	0.653
		10°	1.18	0.34	"	2.657	0.766

T = 24°C

P = 645 mm de Hg

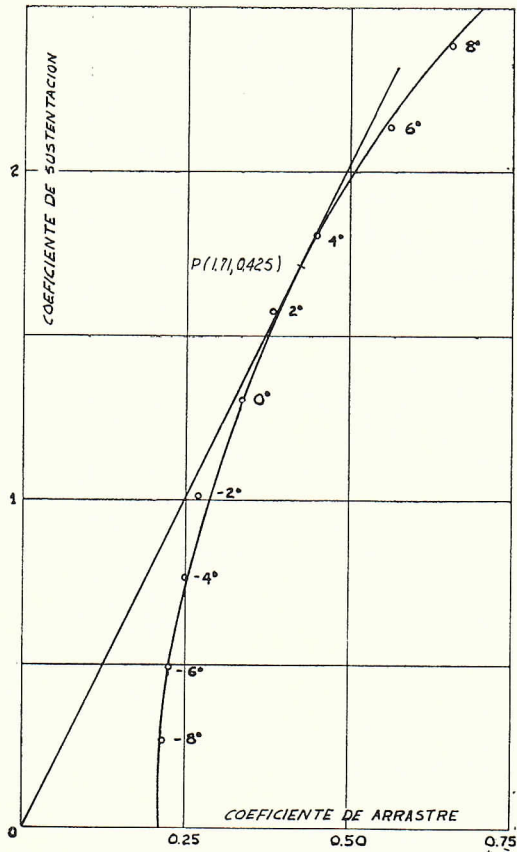


Cols. 1, 2, 3 y 4: Datos.

Col. 5: ver 5.2.5 (con esos resultados se calculó esta columna)

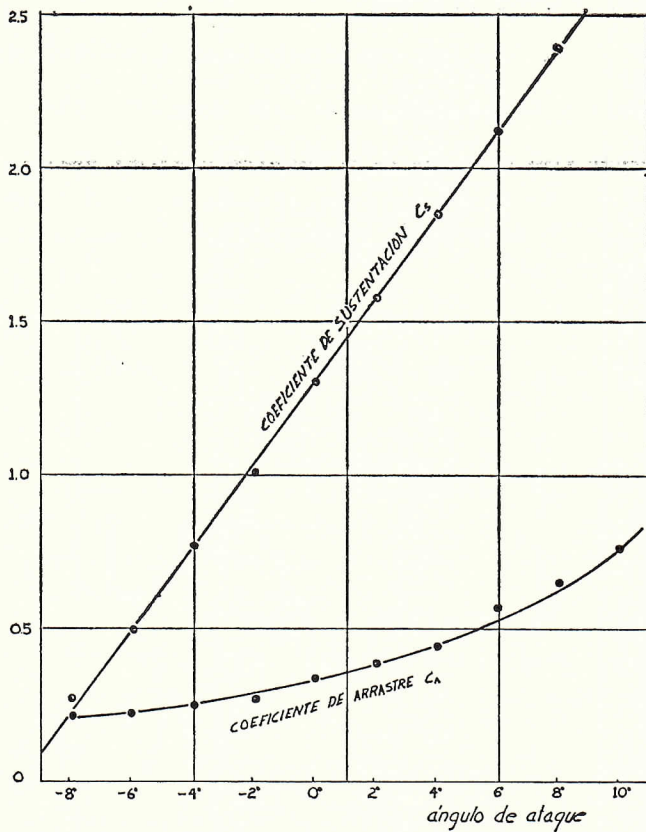
Cols. 6 y 7: calculadas según ecuaciones 5.9 y 5.10.

5.2.5.2. Con los datos de la Tabulación 5.2.5.1, trazar el Diagrama Polar, teniendo como abscisa el coeficiente de Arrastre, como ordenada el de sustentación y anotando sobre la curva el ángulo de ataque respectivo.



5.2.5.3.—Trazar las curvas:

$C_a$  vs. Ángulo de Ataque, con los datos de 5.2.5.1.  
 $C_s$



### 5.2.6.—Discusión de Resultados.

- 1.—Si examinamos la curva  $C_s$  contra ángulo de ataque, veremos que a medida que el ángulo de ataque aumenta, la fuerza de sustentación también lo hace. También podemos observar que entre el rango de valores del experimento, esta variación sigue la tendencia de una línea recta.
- 2.—Vemos también en la curva  $C_a$  vs. ángulo de ataque, que el arrastre también aumenta con el ángulo de ataque aunque su variación es parabólica.
- 3.—Analicemos ahora al Diagrama Polar, la forma más usada actualmente para presentar los resultados obtenidos expe-

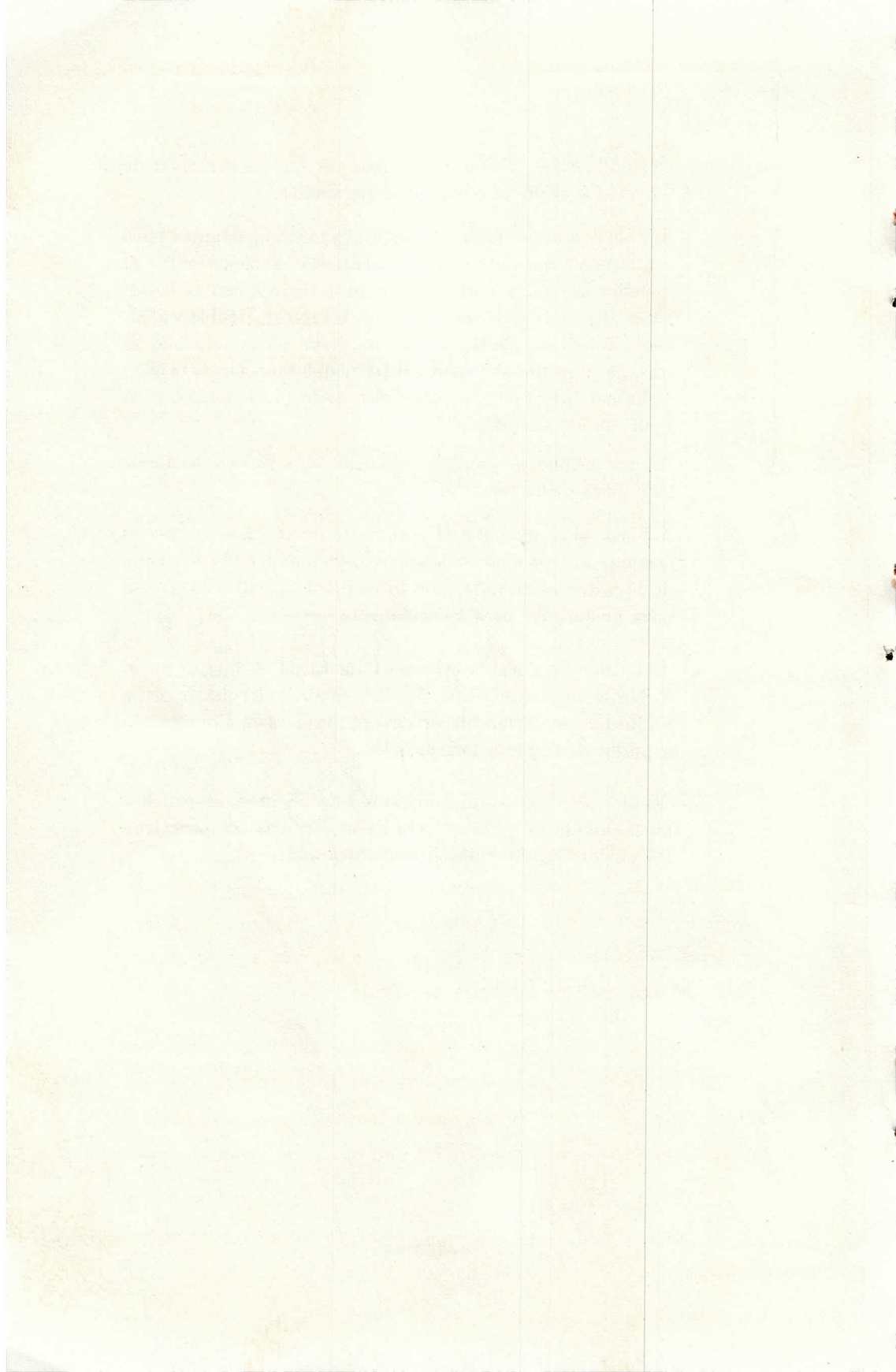
rimentalmente. Primero podemos ver que la variación de Cs vrs. Ca, sigue una tendencia parabólica.

Sin lugar a duda uno de los aspectos más importantes para ver la eficiencia de un cierto perfil es la relación entre la sustentación a cierto ángulo y el arrastre respectivo. Como ya se dijo esta relación debe ser la mayor posible en un buen diseño de perfil. Para encontrar dicha relación, se traza la tangente al Diagrama polar que pasa por el origen, dicha pendiente para nuestro caso es de  $(1.71/0.425) = 4$ , a un ángulo de ataque de  $3.2^\circ$ .

En los perfiles actuales, se alcanzan aún valores hasta de 20% para dicha relación.

Además, si se examina el coeficiente de sust., se ve que es bastante alto, lo cual es deseable, pero también el coeficiente de arrastre es elevado, por lo cual este perfil sólo se usa para aviones de poca velocidad.

- 4.—Del valor de nuestro máximo número de R, que se da es el borde de salida,  $1.03 \times 10^5$ , deducimos que la capa límite que se forma alrededor del perfil es laminar y está a punto de llegar a la transición.
- 5.—Es deseable que siguiendo estos lineamientos, se prueben otros diseños de perfiles para hacer estudios comparativos, los cuales resultan más interesantes aún.



## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como se deduce del examen de este trabajo de tesis, la importancia del laboratorio para el desarrollo y comprensión de los principios de la Mecánica de los Flúidos es fundamental y es imposible no tomarlo en cuenta.

Todos los experimentos aquí desarrollados fueron llevados a cabo en el Laboratorio de Mecánica de Flúidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos. De ello se puede inferir que aunque pequeño, este laboratorio es bastante completo, pues en él se pueden abarcar todos los campos principales de la Mecánica de los Flúidos.

Es de recomendar al alumno que ponga más énfasis en el análisis de sus resultados experimentales, tanto gráficos como numéricos, pues es esto lo más valioso de todo el experimento y sin embargo, en la generalidad de los casos no se efectúa, quedándose en la etapa puramente mecánica de cálculo.

Sería desde todo punto de vista deseable que el estudiante de la materia diera un mayor énfasis al uso del método de Análisis Dimensional, pues esta técnica facilita muchas veces enormemente el planteamiento y desarrollo de los puntos que se basan en experiencias.

- *Hunter Rouse.*—Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers.—  
Dover Publications, 1961.
  
- *Hunter Rouse, Editor.* — Advanced Mechanics of Fluids.—  
First Edition.—John Wiley & Sons, Inc.
  
- *L. Prandtl and O. G. Tietjens.*—Applied Hydro and Aerome-  
chanics.—Dover Publications, 1957.
  
- *Y. C. Fung.*—An Introduction to The Theory of Aeroelasticity.  
—John Wiley & Sons., Inc., 1955.
  
- *Richard Pefley, R. Ian Murray.* — Thermofluid Mechanics. —  
First Edition.—McGraw Hill, Inc., 1966.

## INDICE GENERAL

	Págs.
INTRODUCCION .....	7
CAPITULO I.—TEORIA BASICA.....	9
1.1.—Preámbulo .....	9
1.2.—¿Qué es la Mecánica de Flúidos?.....	9
1.3.—Hidrostática .....	10
1.3.1.—Ecuación Básica de la Hidrostática.....	10
1.3.2.—Propiedades de la Ecuación Básica de Hidros- tática .....	12
1.4.—Cinemática .....	14
1.4.1.—Ecuación de Continuidad.....	14
1.4.2.—Propiedades de la Ecuación de Continuidad..	18
1.5.—Hidrodinámica .....	18
1.5.1.—Ecuación de Euler.....	19
1.5.2.—Propiedades de la Ecuación de Euler.....	21
1.5.3.—Ecuación de Cantidad de Movimiento.....	22
1.5.4.—Propiedades de la Ecuación de Cantidad de Movimiento .....	24
1.6.—Consideraciones sobre el Efecto de Fricción.....	25
1.6.1.—Origen de la Fricción en el Flujo Flúido.....	25

	Págs.
1.6.2.—Ecuación de Navier—Stokes.....	26
1.6.3.—Análisis Dimensional.....	28
1.6.3.1.—El Teorema II.....	28
1.6.3.2.—Deducción del Teorema II.....	29
1.6.4.—Obtención del Número de Reynolds por Análisis Dimensional.....	31
1.6.5.—Fórmula de Darcy-Weisbach.....	34
 CAPITULO II.—EXPERIMENTOS DE HIDROSTATICA	 35
2.1.—Lineamientos para experimentos con Compuertas y Pontones .....	35
2.2.—Ejemplo Ilustrativo: <u>Estabilidad de un Cuerpo Flotante</u> .....	36
2.2.1.—Teoría Previa al Experimento.....	36
2.2.1.1.—Presentación del Problema.....	36
2.2.1.2.—Análisis del Equilibrio Rotacional.....	37
2.2.1.3.—El Metacentro.....	38
2.2.2.—El Experimento.....	39
2.2.2.1.—Descripción del Aparato.....	39
2.2.2.2.—Procedimiento Experimental.....	39
2.2.2.3.—Desarrollo del Experimento.....	40
 CAPITULO III. — EXPERIMENTOS DE HIDRODINAMICA DESARROLLADOS POR CANTIDAD DE MOVIMIENTO..	 54
3.1.—Aspectos Generales.....	54



	Págs.
5.1.1.—Capa Límite.....	88
5.1.2.—Fuerzas sobre Cuerpos Sumergidos.....	90
5.1.2.1.—Fuerzas de Arrastre.....	90
5.1.2.2.—Fuerzas de Sustentación.....	92
5.2.—Experimento Ilustrativo: <u>Arrastre y Sustentación</u> <u>en un Perfil de Ala de</u> <u>Avión</u> .....	93
5.2.1.—Introducción .....	93
5.2.2.—Desarrollo de la Teoría Específica.....	94
5.2.3.—Descripción del Aparato.....	98
5.2.4.—Procedimiento Experimental.....	99
5.2.5.—Cálculos y Resultados.....	99
5.2.5.1.—Tabulación para Obtener los Coeficientes de Arrastre y Sustentación.....	100
5.2.5.2.—Diagrama Polar.....	103
5.2.5.3.—Curvas $C_A$ y $C_S$ vrs. Angulo de Ataque..	103
5.2.6.—Discusión de Resultados.....	104
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	107
BIBLIOGRAFIA .....	109

