



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN LÓGICA DIFUSA

Juan Ricardo Ríos Rivas
Asesorado por Ing. Enrique Edmundo Ruiz Carballo

Guatemala, marzo de 2005

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN LÓGICA DIFUSA

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

JUAN RICARDO RÍOS RIVAS

ASESORADO POR ING. ENRIQUE EDMUNDO RUIZ CARBALLO

AL CONFERIRSELE EL TÍTULO DE
INGENIERO EN ELECTRÓNICA

GUATEMALA, MARZO DE 2005

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
VOCAL I	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL II	Lic. Amahan Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing. Julio David Galicia Celada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIO	Ing. Carlos Humberto Pérez Rodríguez

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
EXAMINADOR	Ing. Edmundo Enrique Ruiz Carballo
EXAMINADOR	Ing. Ingrid Salomé García Rodríguez de Loukota
EXAMINADOR	Ing. Otto Fernando Andrino Gonzáles
SECRETARIO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN LÓGICA DIFUSA

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica con fecha 3 de septiembre de 2004, ref. EIME 139.2004.

Juan Ricardo Ríos Rivas

DEDICATORIA

A Dios

Por toda la sabiduría y conocimiento que ha depositado en mí y por haberme permitido llegar hasta este punto.

A mis padres y hermanos

Carlos Aníbal, Marta Elvira, Carlos, Manuel y Luis por su apoyo incondicional durante todo el desarrollo de mi vida y durante toda mi trayectoria universitaria.

A mi tía Carmen Dolores Rivas Guevara

Por haber estado conmigo desde pequeño y por todos sus sacrificios que ayudaron en mi educación y formación.

A mi tío Álvaro Antonio Rivas Guevara

Por haber desarrollado en mí el amor hacia las matemáticas y la curiosidad científica.

A mi amiga Keyla Barahona

Por todo el apoyo y ayuda brindados hacia mí y mi familia durante la realización del trabajo de graduación.

AGRADECIMIENTOS

A todos mis amigos conocidos durante estos años de estudio, por la ayuda brindada especialmente en la realización de proyectos: Marco Vinicio Pellecer, Yasser Estuardo Samayoa, Juan Pablo Hurtarte, Jesús Alberto Martínez, Edwin Felipe Morales, Cesar Humberto Orellana, Edwin Castro, Juan Carlos García.

A Carlos Bolaños por la ayuda brindada para la realización de este trabajo de graduación.

Al Ing. Enrique Ruiz

Al Ing. Francisco Gressi

A Andrés López Funes y Carlos Ramírez.

A todos mis amigos del departamento de matemática: Alfredo González, Joaquín Reyes, Liz Rodríguez, Jorge González.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	IV
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
GLOSARIO	VIII
RESUMEN	XI
OBJETIVOS	XII
INTRODUCCIÓN	XIII
1 SISTEMAS DE CONTROL CONVENCIONAL	1
1.1 Modelado matemático	2
1.1.1 Función de transferencia	3
1.1.2 Análisis en variables de estado	5
1.2 Desempeño y restricciones de diseño	9
1.2.1 Estabilidad	11
1.2.2 Respuesta transitoria	13
1.2.3 Respuesta en frecuencia	16
1.3 Diseño de controladores	20
2 PRINCIPIOS DE LÓGICA DIFUSA	23
2.1 Conjuntos difusos	25
2.1.1 Propiedades de los conjuntos difusos	29
2.1.2 Operaciones lógicas en conjuntos difusos	32
2.2 Relaciones difusas	38
2.3 Razonamiento aproximado	46
2.3.1 Variables lingüísticas	47

2.3.2	Reglas de la forma si-entonces: implicaciones y conjuntos de reglas	50
3	CONTROLADORES DIFUSOS	61
3.1	Estructura de un controlador difuso	62
3.1.1	Interfase de fusificación (<i>fuzzyfication interface</i>)	62
3.1.2	Base de conocimientos	66
3.1.2.1	Base de reglas	67
3.1.2.2	Base de datos	73
3.1.3	Mecanismo de inferencia	76
3.1.4	Procedimiento de desfusificación	77
3.1.4.1	Centro de área o centro de gravedad	77
3.1.4.2	Centro de sumas	78
3.1.4.3	Altura	79
3.1.4.4	Centro del área mayor	80
3.1.4.5	Más largo, promedio y más pequeño del máximo	80
3.1.4.6	Bisección	81
3.1.5	Implementación física	83
4	APLICACIONES DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES DIFUSOS	89
4.1	Controlador PID	89
4.1.1	PID convencional	89
4.1.2	PID digital	94
4.1.3	PID difuso	98
4.1.3.1	Controlador proporcional	99
4.1.3.2	Controlador proporcional-derivativo	106
4.2	Aproximación analítica y consideraciones físicas	110
4.3	Control no lineal	119

5 ESTABILIDAD Y DESEMPEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO	123
5.1 Controladores difusos como elementos no lineales de transferencia	23
5.2 Aproximación al espacio de estado	124
5.3 Índices de robustez (caso bidimensional)	128
CONCLUSIONES	133
RECOMENDACIONES	135
BIBLIOGRAFÍA	136

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1	Sistemas de control típico	2
2	Medidas de desempeño	10
3	Respuesta transitoria	14
4	Respuesta al escalón y localización de las raíces (1)	15
5	Respuesta al escalón y localización de las raíces (2)	16
6	Sistema de control en lazo cerrado	17
7	Respuesta en tiempo y frecuencia	19
8	Función de pertenencia para la propiedad grande	28
9	Apoyo y ancho de una función de pertenencia	30
10	Funciones de pertenencia convexas y no convexas	31
11	Operadores difusos	33
12	Funciones de pertenencia para el conjunto LX de la temperatura	48
13	Inferencia de Mamdani	55
14	Función de pertenencia para una entrada no difusa	57
15	Diagrama de bloques de un controlador difuso	62
16	Funciones de pertenencia para error	63
17	Proceso de fusificación	65
18	Centro de gravedad	78
19	Centro de sumas	79
20	Desfusificación por altura	80
21	LOM, MOM y SOM	81
22	Bisección	81
23	Número difuso 3	82
24	Función de pertenencia triangular	84

25	Circuito para la Implementación de una función de pertenencia	85
26	Operador min()	86
27	Circuito para el disparo de reglas	87
28	Respuesta al impulso	93
29	Diagrama de bloques de un controlador PID	93
30	Configuraciones de PID's	94
31	Controlador PI+D digital	98
32	Funciones de Pertenencia para el controlador proporcional	100
33	Respuesta al escalón del sistema de segundo orden	101
34	Diagramas controladores convencional y difuso	102
35	Respuesta al escalón para distintos valores de la constante de proporcionalidad	103
36	Respuesta con la base de reglas modificada	103
37	Funciones de pertenencia para minimizar el error en estado estable	104
38	Error en estado estable minimizado	105
39	Característica no lineal de un elemento difuso	106
40	Controlador P-D Difuso	107
41	Controlador PD difuso y su respuesta	108
42	Superficie no lineal de transferencia del controlador PD difuso	109
43	Respuesta PD difuso con controlador P convencional	109
44	Sistema masa-resorte	110
45	Factores de normalización	112
46	Funciones de pertenencia para el sistema masa-resorte	114
47	Derivación analítica de las reglas	118
48	Diagrama de bloques del sistema descrito por $y'(t) = \sqrt{y(t)} + u(t)$	119
49	Respuesta natural del sistema $y'(t) = \sqrt{y(t)} + u(t)$	120
50	Respuesta del sistema con un controlador difuso	121
51	Trayectoria lingüística	125
52	Distintas trayectorias lingüísticas	126

TABLAS

I	Tabla de verdad	32
II	Representación tabular de una función de pertenencia	40
III	X es considerablemente más grande que Y	41
IV	R intersección S	42
V	R unión S	42
VI	Relación entre X e Y	43
VII	Relación difusa	43
VIII	Extensión cilíndrica	44
IX	Extensión cilíndrica, ejemplo	45
X	Intersección $R \text{ ce}(A)$	45
XI	Base de reglas	72

LISTA DE SÍMBOLOS

00h - FFh	Números en base hexadecimal
Π	Multiplicatoria
ADC	Convertidor análogo a digital
CS	<i>Crisp Set</i>
dB	Decibel
LOM	Más largo del máximo, proceso de desfusificación.
LTI	<i>Lineal Time Invariant</i>
MATLAB	<i>Matriz Laboratory, software</i>
MIMO	<i>Multiple Input/Multiple Output</i>
MOM	Valor medio entre LOM y SOM.
M_r	Pico de resonancia
μ_a	Función de pertenencia
ω_r	Frecuencia de resonancia

GLOSARIO

<i>Clipped set:</i>	Conjunto truncado. Hace referencia al conjunto difuso de salida que es recortado en altura por el mecanismo de inferencia y el disparo de reglas.
Conjunto difuso	Agrupación compuesta por parejas formadas por un elemento y su grado de pertenencia.
<i>Crisp set</i>	Conjunto compuesto por un elemento y su grado de pertenencia con la restricción de que sólo existen dos grados de pertenencia. Es lo opuesto a un conjunto difuso.
Decibel	Cociente entre dos valores utilizado para expresar en una escala más reducida distintos valores de ganancias.
Disparo de reglas	Cada regla que produce un valor distinto de cero en una o varias funciones de pertenencia.
Eigenvalor	Valores propios de una matriz. Polos de una función de transferencia.
Enganchar	Truncar el conjunto difuso de una variable de salida.

Escalón unitario	Función que se define con valor unitario a partir de un tiempo específico y un valor igual a cero para tiempos menores al especificado.
Función de pertenencia	Función que asigna grados de pertenencia a los elementos contenidos dentro del dominio físico de una variable lingüística.
Grado de pertenencia	Número utilizado para cuantificar los valores lingüísticos pertenecientes a alguna variable lingüística.
Lazo cerrado	Sistema de control que posee una trayectoria de retroalimentación.
Lazo directo	Trayectoria principal dentro de un diagrama de bloques que representa un sistema de control.
Lógica booleana	Lógica que permite únicamente dos estados: pertenencia y no pertenencia
Mapear	Consiste en transformar un conjunto de datos de entrada en un conjunto de datos de salida mediante la aplicación de una función que los relacione. Esta transformación puede ser de un dominio al mismo dominio (números reales a números reales) o a otro dominio (tiempo a frecuencia).

n-uplas	Nombre utilizado para designar grupos de n elementos que se encuentran relacionados mediante alguna función.
Planta	Proceso a controlar.
Reglas heurísticas	Reglas derivadas del conocimiento de operarios de algún proceso.
Sinusoidal	Señal cuya forma es la de un seno o un coseno.
Valor lingüístico	Símbolo utilizado para representar las propiedades de las variables lingüísticas.
Variable lingüística	Variabes cuyos valores no son números, sino palabras o enunciados.

RESUMEN

Cuando se tienen conjuntos cuyas fronteras no se encuentran perfectamente definidas, la lógica convencional no resulta apropiada para caracterizarlos. La lógica difusa utiliza estados intermedios entre la pertenencia y no pertenencia para tratar este tipo de conjuntos. Su aplicación a la teoría de sistemas de control es de gran utilidad ya que permite un control más aproximado al razonamiento humano.

La teoría clásica de control ofrece muchas herramientas para el estudio, análisis y caracterización de sistemas. La respuesta en el tiempo, análisis en variables de estado, respuesta en la frecuencia y estabilidad son tratados en el capítulo 1.

El concepto de vaguedad y fundamentos matemáticos lógicos generales (normas-T, normas-S, etc.), dos temas que son la base para la correcta descripción de lo que es la lógica difusa, son tratados en el capítulo 2 así como las características, relaciones y operaciones entre conjuntos difusos.

Las aplicaciones a la teoría de control son presentadas en los capítulos 3 y 4. Se empieza con la descripción general de un controlador difuso, sus bloques constituyentes y la interrelación existente entre cada uno de ellos. Los resultados obtenidos de las simulaciones efectuadas en Simulink muestran la comparación entre controladores difusos y convencionales. Finalmente, un análisis de estabilidad es proporcionado en el capítulo 5.

OBJETIVOS

Generales

1. Plantear un procedimiento general para el diseño y construcción de un controlador difuso.
2. Diseñar un controlador PD de tipo difuso.
3. Analizar y evaluar el desempeño y estabilidad de un controlador difuso.

Específicos

1. Explicar los conceptos, operaciones y relaciones entre variables difusas.
2. Modelar y convertir variables de entrada no difusas en variables difusas.
3. Modelar y explicar ejemplos de controladores difusos aplicados a procesos reales.
4. Evaluar el desempeño de controladores difusos mediante simulaciones en MATLAB.

INTRODUCCIÓN

Muchos procesos industriales y de control son descritos por modelos matemáticos que en muchas ocasiones resultan ser no lineales. Incluso puede ser que la única información acerca de un proceso provenga de la experiencia de operarios a cargo del mismo. Bajo estas condiciones un esquema de control tradicional no es la mejor opción para la regulación del proceso.

El concepto de lógica difusa (*fuzzy logic*) apareció en 1965, en la Universidad de California en Berkeley, introducido por Lofti A. Zadeh y es esencialmente un tipo de lógica multivaluada que trabaja con conjuntos que no tienen límites perfectamente definidos, es decir, la transición entre la pertenencia y la no-pertenencia a un conjunto es gradual, además permite que sean definidos estados intermedios entre los extremos convencionales que limitan un conjunto, tales como sí/no, caliente/frío, apagado/encendido.

Un controlador difuso es un bloque que se inserta (en este caso) en el lazo directo de control y su función es hacer que el proceso siga una referencia dada. Su funcionamiento está basado en reglas de la forma si-entonces.

Existen varios tipos de controladores difusos, entre ellos se pueden mencionar los de tipo PID con las variantes PD y PI. El de tipo PD responde al error y al cambio en el error de la entrada. Su diseño es sencillo y presenta un desempeño aceptable. Su realización y operación se describe en detalle en el capítulo 4.

El funcionamiento adecuado de un controlador depende de cómo sean elegidas las reglas y la forma como están definidas las funciones de

pertenencia para las variables lingüísticas involucradas en el proceso. Depende en gran parte de la experiencia del diseñador encontrar las funciones de pertenencia adecuadas para realizar la tarea de control de una manera eficiente.

Un controlador difuso no es aplicable a todo tipo de procesos ya que muchas veces puede encontrarse una solución más sencilla mediante métodos convencionales.

La mayor ventaja de un controlador difuso sobre uno convencional es su habilidad para controlar plantas no lineales así como la capacidad para ser modificados alterando únicamente un pequeño número de reglas.

1. SISTEMAS DE CONTROL CONVENCIONAL

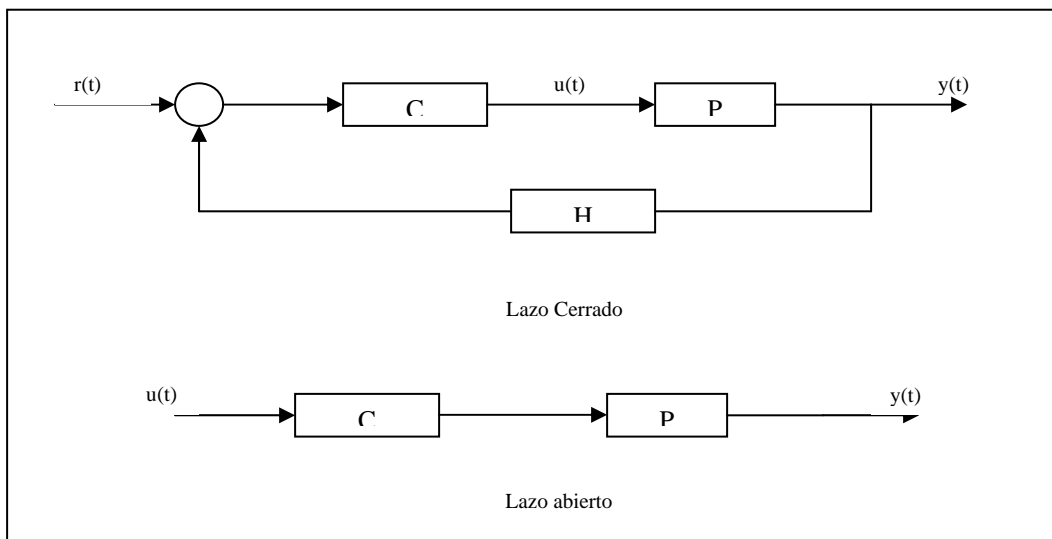
Un sistema de control es una interconexión de componentes configurados para producir una respuesta adecuada en un sistema (3-2). La base para el análisis de un sistema de este tipo son los fundamentos provistos por la teoría de sistemas lineales, la cual asume una relación causa-efecto para sus componentes. Un componente de un sistema o un proceso que se desea controlar puede ser representado como un bloque y la relación entrada salida de los anteriormente mencionados denota la relación causa efecto.

Los sistemas pueden ser en lazo abierto o en lazo cerrado. Uno en lazo abierto es aquel que no posee retroalimentación y utiliza un controlador para obtener la respuesta deseada. En contraste con un sistema de control en lazo abierto, uno en lazo cerrado utiliza una medida adicional de la salida para comparar la salida actual con la salida deseada. La medida de esta señal de salida es llamada la señal de retroalimentación. Un sistema de control en lazo cerrado tiende a mantener una relación predeterminada de una variable del sistema con otra, mediante la comparación de funciones de estas variables y utilizar la diferencia (señal de error) como un medio de control. Lo que se desea hacer es lograr que la diferencia entre la señal de salida y la señal de referencia sea cada vez menor.

La introducción de retroalimentación permite controlar una salida deseada y mejorar la exactitud pero se requiere cierta grado de atención al problema de la estabilidad.

Representaciones mediante diagramas de bloque de sistemas de control típicos se muestran en la figura 1, en donde $u(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y la entrada de referencia es $r(t)$. C es un controlador, P la planta o proceso que se desea controlar y H un bloque de retroalimentación.

Figura 1. Sistemas de control típico



1.1 Modelado matemático

Una de las tareas más importantes en el análisis y diseño de sistemas de control es el modelado matemático de los sistemas físicos. Es importante saber como describir exactamente un sistema con modelos matemáticos (si es posible hallar tales modelos) y poder hacer suposiciones y aproximaciones correctas para poder caracterizar al sistema mediante un modelo lineal. Un modelo lineal es de gran ayuda porque casi siempre se pueden encontrar expresiones generales en forma cerrada para las ecuaciones que describen la dinámica de la planta.

Si no se cuenta con un modelo lineal puede optarse por soluciones numéricas y simulaciones por computadora, sin embargo, hay que recordar que las simulaciones serán tan buenas como lo sea el modelo. Dos de los métodos más comunes para modelar sistemas son el método de la función de transferencia y el método de las variables de estado.

1.1.1 Función de transferencia

La función de transferencia está definida únicamente para sistemas lineales invariantes con el tiempo y se define como la razón entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son iguales a cero. Esto es, si $y(t)$ es la salida y $u(t)$ es la entrada la expresión:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1-1)$$

dará la función de transferencia, $G(s)$.

La relación entrada-salida de un sistema lineal invariante con el tiempo (LTI) se describe a menudo con una ecuación diferencial, por lo que es conveniente obtener directamente la función de transferencia de la ecuación diferencial. Si se considera que la relación entrada-salida de un sistema LTI se describe mediante la ecuación de n -ésimo orden con coeficientes constantes reales (1-21) (como sería de esperarse al estar modelando un sistema físicamente realizable):

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (1-2)$$

Para obtener la función de transferencia del sistema representado por la ecuación (1-2) se toma la transformada de Laplace en ambos lados y se suponen condiciones iniciales iguales a cero. El resultado es:

$$Y(S) \sum_{i=0}^n a_i s_i = U(S) \sum_{k=1}^m b_k s_k \quad (1-3)$$

y la función de transferencia queda definida como:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\sum_{k=1}^m b_k s_k}{\sum_{i=0}^n a_i s_i} \quad (1-4)$$

¿Qué información se puede obtener a partir de la función de transferencia? Para empezar, la respuesta al impulso de un sistema es igual a su función de transferencia. Si la entrada es una delta, entonces $\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1$ y U(s) en la ecuación (1-1) es igual a uno, por lo tanto $G(S) = Y(S)$. Conociendo la función de transferencia se puede conocer su respuesta al impulso y viceversa.

La ecuación característica de un sistema se define como el polinomio del denominador de la función de transferencia. Más adelante se verá que la estabilidad y la respuesta transitoria están relacionadas con la ubicación de los polos de la función de transferencia. Además, el análisis en el dominio y la frecuencia se deriva de la función de transferencia.

1.1.2 Análisis en variables de estado

El análisis y diseño en el dominio del tiempo utilizan el concepto del estado de un sistema. El estado de un sistema es descrito mediante un conjunto de variables de estado, siendo éstas las que determinan el comportamiento futuro de un sistema cuando el estado presente y las señales de excitación son conocidas.

El estado de un sistema es descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, escritas en términos de las variables de estado (x_1, x_2, \dots, x_n). Estas ecuaciones diferenciales se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k + \sum_{l=1}^v e_{il} w_l \quad (1-5)$$

Con $i = 1, 2, 3, \dots, n$. En esta expresión, la segunda sumatoria representa las contribuciones debidas a las entradas y la última denota la parte asociada con las entradas de perturbación. En notación matricial se pueden escribir como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1v} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_v \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

La matriz columna en donde se encuentran las variables de estado se llama el vector de estado. El sistema se representa de forma compacta con la notación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ew} \quad (1-7)$$

Las variables de salida se pueden definir de una forma similar y expresarlas como sigue:

$$\frac{dy_r}{dt} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m d_{ik} u_k + \sum_{l=1}^v h_{il} w_l \quad (1-8)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{w} \quad (1-9)$$

donde $r = 1, 2, 3, \dots, q$.

Estas dos ecuaciones, (1-7) y (1-9), conforman lo que se conoce como las ecuaciones dinámicas del sistema y para conocer tanto los estados y las salidas para cualquier instante hay que resolverlas, sabiendo cuales son el vector de estado inicial, el vector de entrada y el vector de perturbación.

Si tanto las entradas como las perturbaciones son iguales a cero, se tiene la ecuación de estado lineal homogénea:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1-10)$$

Al resolver esta ecuación para $\mathbf{x}(t)$ mediante el método de la transformada de Laplace se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}(0) \quad (1-11)$$

y representa la respuesta libre del sistema, es decir, la respuesta que es debida únicamente a las condiciones iniciales.

Lo que se necesita conocer de la dinámica de la planta es el vector de estado y el vector de salida para cualquier tiempo t . Esto se logra con la ecuación de transición de estado, la cual es la solución de una ecuación de estado lineal homogénea y se obtiene resolviendo la ecuación (1-7). Resolviendo mediante la transformada de Laplace se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\varphi}(t - \tau)[\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{E}\mathbf{w}(\tau)]d\tau \quad (1-12)$$

Donde el tiempo inicial es t_0 . El vector de salida se puede obtener de forma similar y la ecuación resultante es:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t - \tau)[\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{E}\mathbf{w}(\tau)]d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t) \quad (1-13)$$

La función de transferencia y las variables de estado están relacionadas entre sí y la primera puede obtenerse de las ecuaciones de estado al tomar la transformada de Laplace en ambos lados de las ecuaciones (1-7) y (1-9), sustituir $\mathbf{X}(s)$ en la expresión para $\mathbf{Y}(s)$ y recordando que para definir la función de transferencia se necesita que las condiciones iniciales sean cero.

La expresión resultante es:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_r(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_w(s)\mathbf{W}(s) \quad (1-14)$$

en donde $\mathbf{G}_r(s)$ es una matriz de funciones de transferencia entre $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ cuando $\mathbf{w}(t) = 0$ y $\mathbf{G}_v(s)$ es una matriz de funciones de transferencia entre $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ cuando $\mathbf{u}(t) = 0$.

Estas matrices de función de transferencia quedan definidas así:

$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1-15)$$

$$\mathbf{G}_v(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{H} \quad (1-16)$$

$\mathbf{G}_r(s)$ es la función de transferencia debido únicamente a las entradas del sistema y es la función de transferencia que se ha mencionado en la ecuación (1-4) para el caso particular en el que sólo existe una entrada y una salida. Una ventaja del análisis en variables de estado es que pueden aplicarse a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (*Multiple Input/Multiple Output, MIMO*) y la matriz $\mathbf{G}_r(s)$ proporcionará todas las funciones de transferencia combinadas las entradas y las salidas. Por lo general, es muy difícil encontrar una expresión para $\mathbf{G}_v(s)$ por el hecho de que ésta es una función de transferencia de entradas de perturbación y éstas por lo general son desconocidas o son aleatorias.

Se mencionó que la ecuación característica juega un papel importante en los sistemas lineales. Además, la ecuación característica puede obtenerse de la función de transferencia.

El análisis en variables de estado es una herramienta muy poderosa y como tal, la ecuación característica también puede obtenerse de las ecuaciones dinámicas del sistema. Si se toma la ecuación (1-15) y se reescribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + |s\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{D}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (1-17)$$

igualando a cero el denominador de la matriz de funciones de transferencia, la ecuación característica resulta ser:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1-18)$$

Sobre la base de las ecuaciones de estado también se definen los criterios de controlabilidad y observabilidad. Un sistema es controlable si cada variable de estado del proceso puede ser controlada o manipulada para llegar a un estado específico mediante una entrada no restringida en un intervalo finito de tiempo. Por otro lado, un sistema es observable si cada variable de estado afecta alguna de las salidas del sistema. Los criterios y teoremas de controlabilidad y observabilidad involucran a las matrices A, B y C (3-632) (7-276).

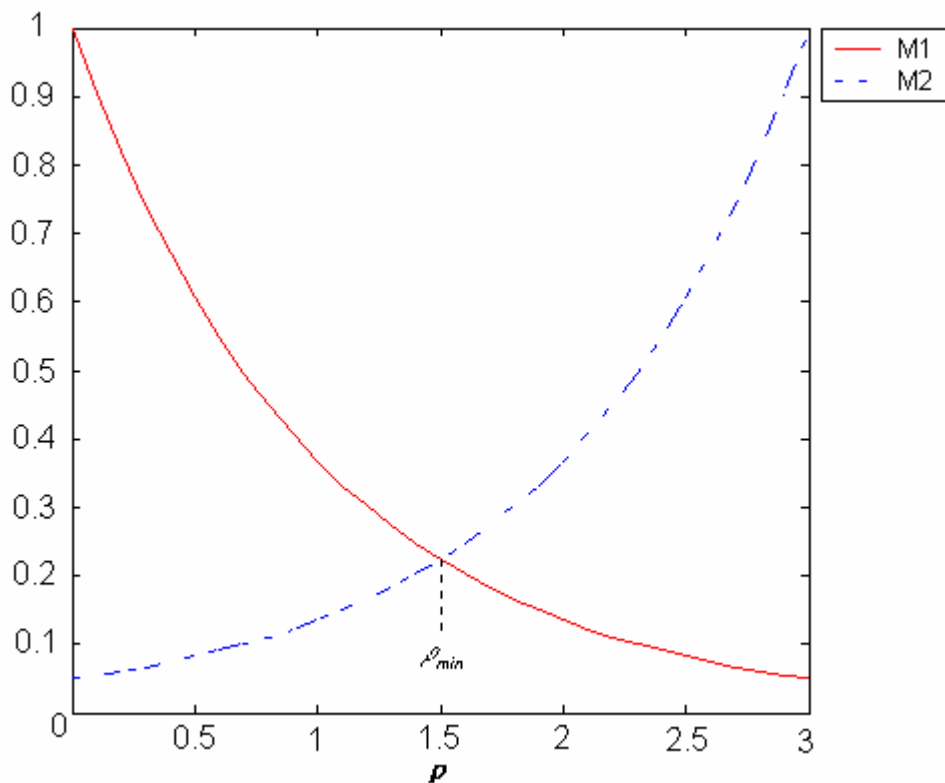
1.2 Desempeño y restricciones de diseño

Cuando se posee un proceso el cual necesita ser controlado se debe de tomar en cuenta qué debe hacer el sistema y cómo hacerlo; además, si es necesaria la inclusión de un compensador y de serlo determinar qué configuración es la más adecuada y cuáles son los valores de los parámetros del controlador para alcanzar los objetivos de diseño.

Existen muchas especificaciones que debe cumplir un sistema y en la mayoría de los casos no se pueden satisfacer todas al mismo tiempo. Por ejemplo, en la figura 2 aparece la gráfica de dos medidas de desempeño distintas, M1 y M2 (M1 podría ser el tiempo de asentamiento mientras que M2 el sobrepaso máximo).

Se ve que para minimizar M1 se necesita hacer el parámetro ρ bastante grande sin embargo, esto repercute en un alto valor de M2. Si las dos medidas de desempeño son igual de importantes, lo mejor sería ajustar el parámetro ρ en el valor ρ_{min} , donde se intersectan M1 y M2 ya que así se minimizan las dos medidas de desempeño.

Figura 2. Medidas de desempeño



Las especificaciones de diseño se utilizan para describir qué debe hacer el sistema y cómo debe hacerlo. Éstas pueden estar dadas en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. A continuación se examinarán las más importantes.

1.2.1 Estabilidad

Cuando se considera el diseño y análisis de sistemas de control retroalimentados, la estabilidad es uno de los criterios más importantes o posiblemente el más importante. Un sistema retroalimentado en lazo cerrado que sea inestable resulta de poco valor práctico.

Al hablar de un sistema estable o inestable se está haciendo referencia a la estabilidad absoluta y tiene que ver con la ubicación de los polos de la función de transferencia o de los eigenvalores de la matriz A del sistema. Si el sistema es estable se puede caracterizar su grado de estabilidad mediante la estabilidad relativa analizando la localización relativa de los polos o los eigenvalores en el plano s .

Definición 1: Un sistema estable es un sistema dinámico con una respuesta acotada ante una entrada acotada.

Físicamente, un sistema estable es aquel cuya salida alcanza un valor límite finito y su respuesta no crece o decrece de forma indefinida. Si se cumple la definición 1 y además las condiciones iniciales son cero, se dice que el sistema es estable de entrada-acotada/salida-acotada (*Bounded-Input/Bounded-Output, BIBO*). La respuesta al impulso del sistema es una medida para caracterizar la estabilidad del mismo.

Sea $g(t)$ la respuesta al impulso, una condición necesaria para que la salida del sistema sea acotada es que el área bajo la curva que describe $|g(t)|$ sea finita:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq Q < \infty \quad (1-19)$$

En términos de sistemas lineales, los requerimientos de estabilidad pueden ser determinados según la localización de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado. La función de transferencia en lazo cerrado puede escribirse de la siguiente forma:

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + \sigma_k) \prod_{m=1}^R [s^2 + 2\alpha_m s + (\alpha_m^2 + \omega_m^2)]} \quad (1-20)$$

La respuesta a una entrada impulso ($N = 0$) se puede calcular haciendo un desarrollo en fracciones parciales y tomando la transformada inversa de Laplace, con lo que se obtiene:

$$y(t) = \sum_{k=1}^Q A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R B_m \left(\frac{1}{\omega_m} \right) e^{-\sigma_m t} \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (1-21)$$

Donde A_k y B_m son constantes. Se puede ver que para obtener una respuesta acotada, los polos de la función de transferencia deben estar en la parte izquierda del plano-s. Una condición necesaria y suficiente en un sistema retroalimentado para que sea estable es que todos los polos de la función de transferencia tengan una parte real negativa.

Si la función de transferencia tiene polos simples sobre el eje imaginario con todas sus otras raíces en la parte izquierda del plano-s, la respuesta en estado estable presentará oscilaciones para una entrada acotada a menos que la entrada sea una sinusoidal cuya frecuencia sea igual a la magnitud de la raíz ubicada en el eje imaginario. En este caso la salida se vuelve no acotada. Un sistema de ese tipo se llama marginalmente estable.

1.2.2 Respuesta transitoria

La respuesta transitoria es aquella parte de la respuesta total que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande. Ésta es importante ya que tanto la amplitud como la duración de la respuesta deben mantenerse dentro de límites tolerables.

La caracterización de la respuesta transitoria por lo general se hace en términos de una función escalón unitario. Los criterios de desempeño comúnmente utilizado para caracterizar un sistema lineal son los siguientes:

- a. Sobrepaso Máximo: Se define como:

$$\text{Sobrepaso Máximo} = SM = y_{\max} - y_{ss}$$

Siendo $y(t)$ la respuesta al escalón unitario, y_{\max} el valor máximo de $y(t)$, y_{ss} el valor en estado estable de $y(t)$. Este suele representarse como un porcentaje del valor de la respuesta en estado estable:

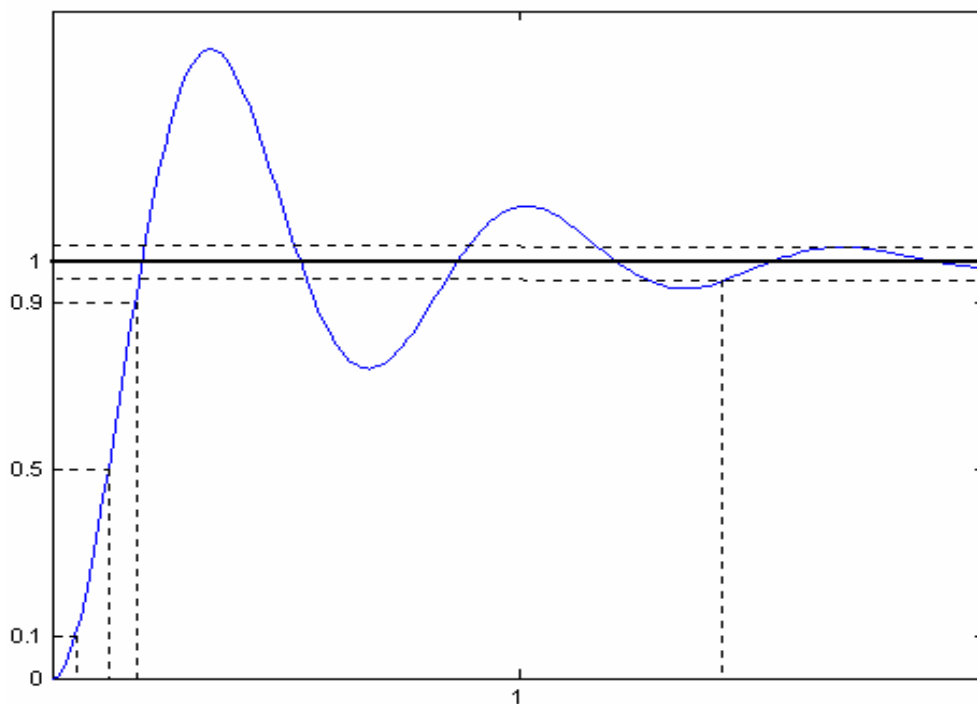
$$\% SM = \frac{SM}{y_{ss}} * 100$$

El sobrepaso máximo se utiliza para medir la estabilidad relativa de un sistema de control. Comúnmente un sistema con un sobrepaso muy grande es indeseable, ya que se puede producir daño al sistema o equipo conectado al sistema.

- b. Tiempo de retado (t_d): Se define como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón alcance el 50% de su valor final.

- c. Tiempo de levantamiento (t_r): Se define como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón se eleve del 10% al 90% de su valor final.
- d. Tiempo de Asentamiento (t_s): Tiempo requerido para que la respuesta al escalón disminuya y permanezca dentro de un porcentaje específico de su valor final.

Figura 3. Respuesta transitoria



La respuesta transitoria de un sistema de control en lazo cerrado puede describirse en términos de la localización de los polos de la función de transferencia. Según la ecuación 1-2, y con $N = 1$ para una entrada escalón unitario, la respuesta en el dominio del tiempo es la siguiente:

$$y(t) = 1 + \sum_{k=1}^Q A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R D_m e^{-\sigma_m t} \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (1-22)$$

La respuesta transitoria está compuesta por términos exponenciales y términos sinusoidales amortiguados. En la figura 4 puede apreciarse la relación entre la ubicación de los polos de la función de transferencia y la respuesta en el tiempo.

Figura 4. Respuesta al escalón y localización de las raíces (1)

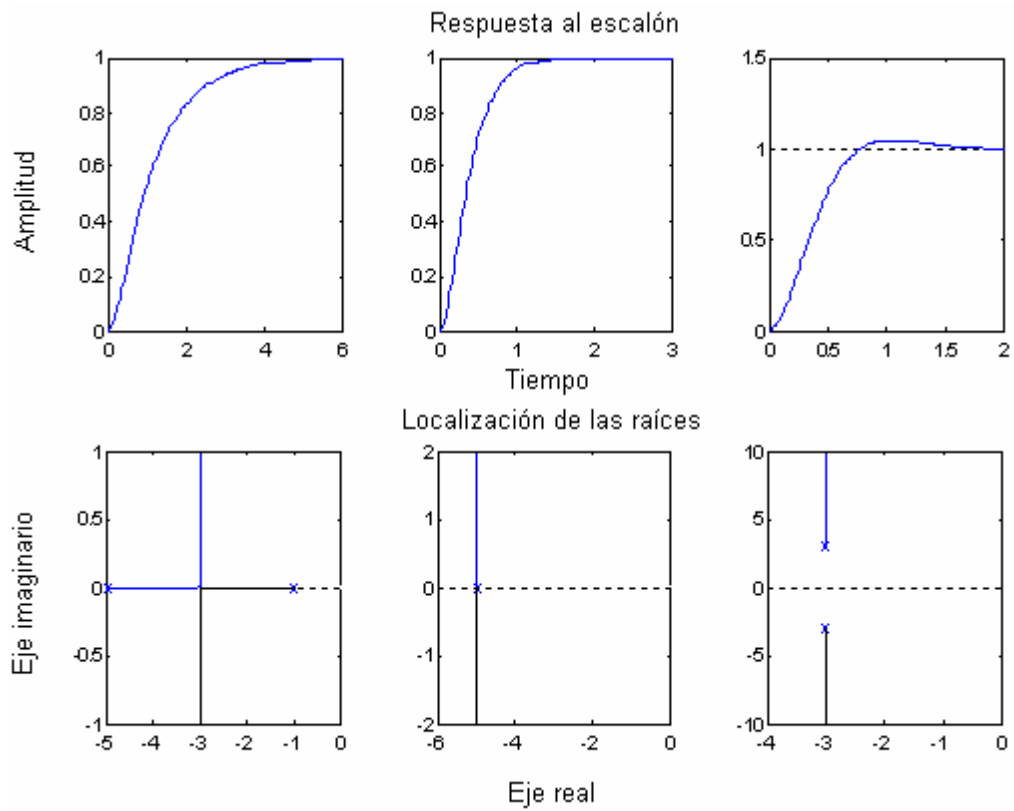
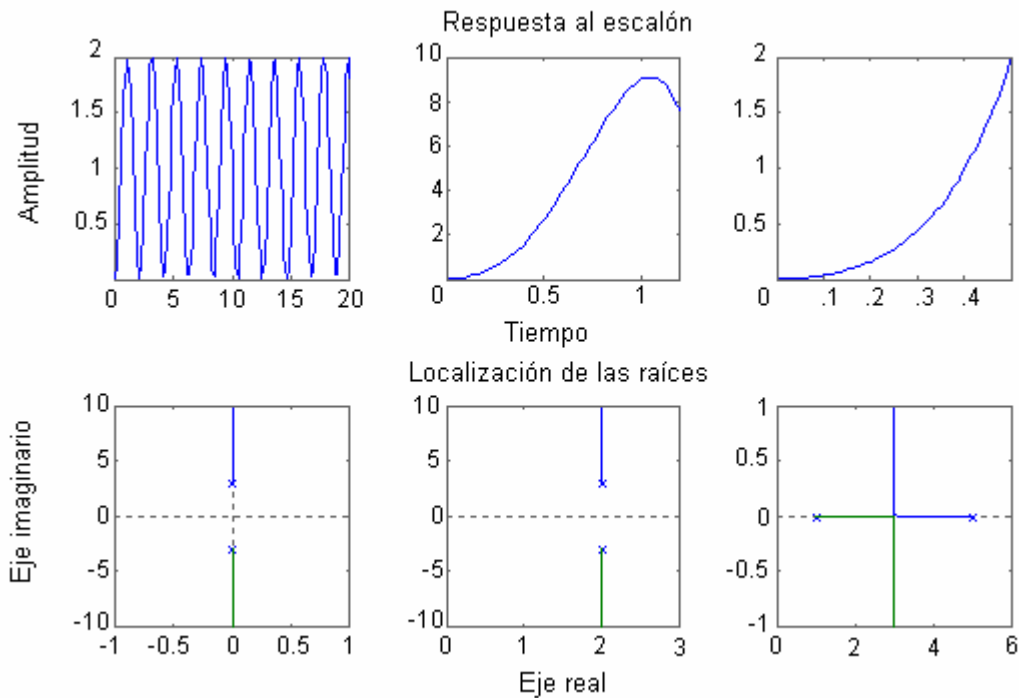


Figura 5. Respuesta al escalón y localización de las raíces (2)



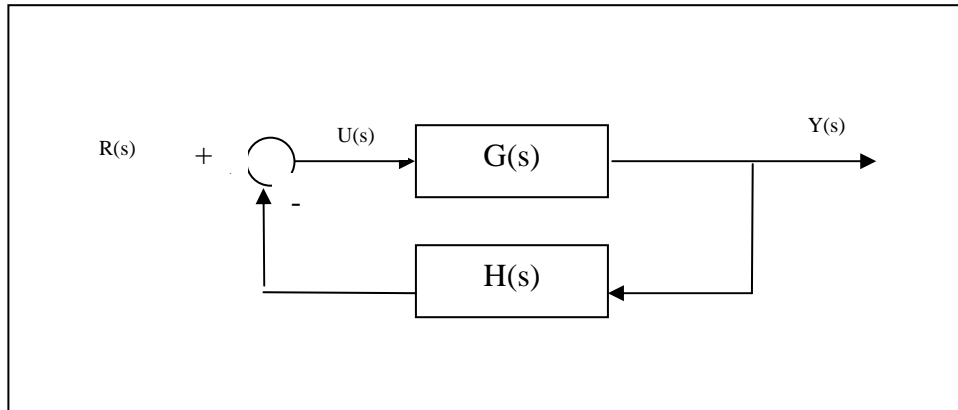
En la gráfica anterior se puede ver la relación que existe entre la ubicación de los polos de la función de transferencia, respuesta transitoria y la estabilidad del sistema.

1.2.3 Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia se define como la respuesta en estado estable del sistema a una entrada sinusoidal. La señal de salida resultante para un sistema lineal en estado estable es sinusoidal y difiere de la señal de entrada únicamente en amplitud y fase.

En el sistema de control mostrado en la figura 6, $H(s)$ representa la función de transferencia del bloque de retroalimentación.

Figura 6. Sistema de control en lazo cerrado



Es fácil demostrar que la función de transferencia del sistema está dada por la expresión:

$$M(S) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1-23)$$

En condiciones de estado estable y si el sistema es excitado por una entrada senoidal, entonces $s = j\omega$. Ya que $M(s)$ es una función compleja, puede expresarse en términos de su magnitud y ángulo de fase o en términos de su parte real e imaginaria:

$$M(j\omega) = |M(j\omega)| \angle M(j\omega) = \text{Re}[M(j\omega)] + j \text{Im}[M(j\omega)] \quad (1-24)$$

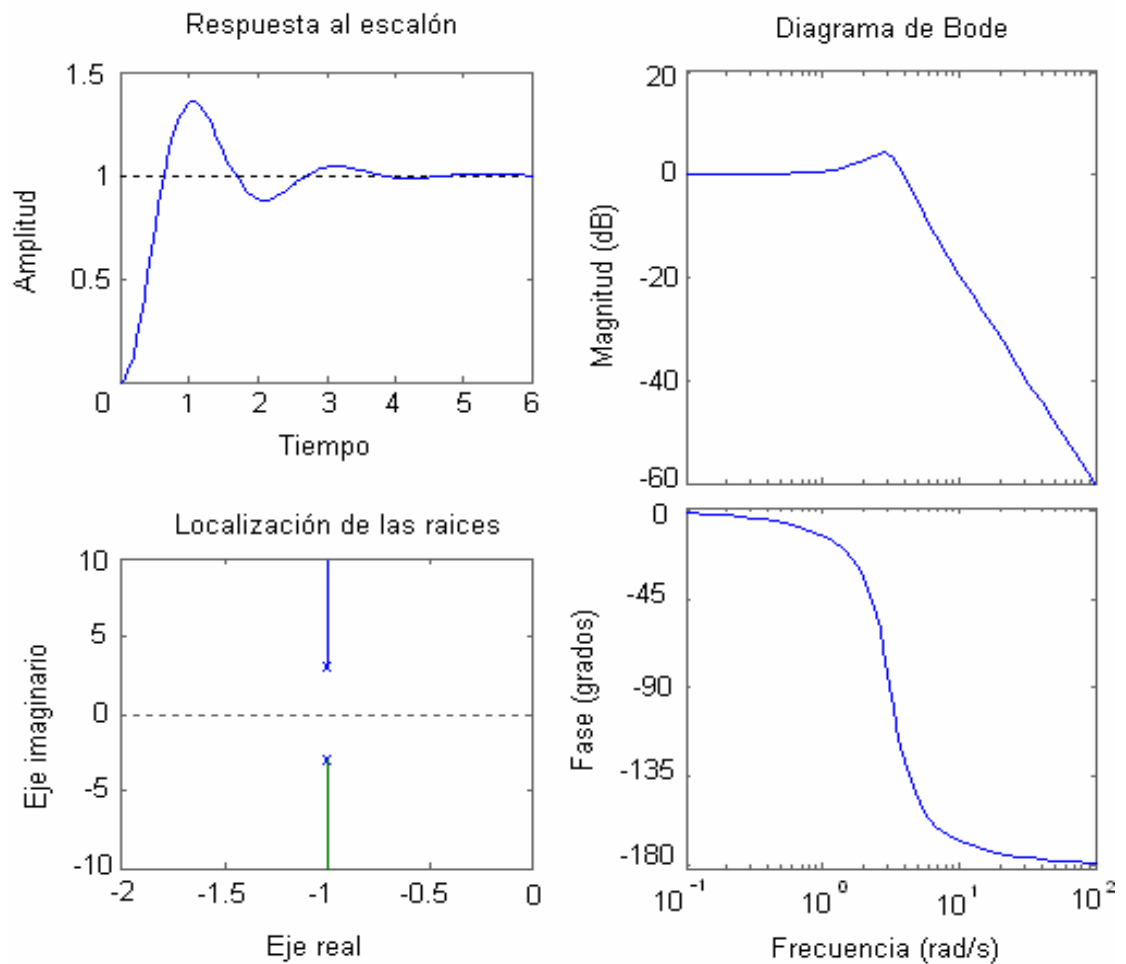
Existen ciertas especificaciones en el dominio de la frecuencia utilizadas para caracterizar el desempeño de un sistema, entre ellas están

- a. Pico de resonancia M_r : Es el valor máximo de $|M(j\omega)|$. En general, el valor de M_r da una indicación de la estabilidad relativa de un sistema estable en lazo cerrado. Normalmente, un valor grande de M_r corresponde a un sobrepaso máximo grande de la respuesta al escalón.
- b. Frecuencia de resonancia ω_r : Es la frecuencia para la cual ocurre el pico de resonancia. En muchas aplicaciones se desea evitar la resonancia, sin embargo en otras (como en el circuito sintonizador de un radio) se obtiene la máxima respuesta cuando ocurre la resonancia.
- c. Ancho de banda: Es el rango de frecuencias para el cual $|M(j\omega)|$ se mantiene en un valor casi constante de 0 dB. El ancho de banda está limitado por las frecuencias de corte, frecuencias para las cuales $|M(j\omega)|$ cae a 3 dB por debajo de su valor normalizado.

El ancho de banda da una indicación de las propiedades de respuesta transitoria en el dominio del tiempo. Un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de levantamiento corto, ya que las señales de alta frecuencia pasan más fácilmente a través del sistema. Si el ancho de banda es pequeño, el tiempo de levantamiento será pequeño. También está relacionado con la fidelidad de reproducción de una señal de entrada. Cualquier señal puede descomponerse como la sumatoria de infinitos términos armónicos, entonces, un ancho de banda reducido hará que solamente pase un número limitado de componentes espectrales.

Una de las herramientas más usadas para ver las características en frecuencia es la grafica de Bode, donde se puede ver la magnitud de $|M(j\omega)|$ y su fase para distintas frecuencias.

Figura 7. Respuesta en tiempo y frecuencia



1.3 Diseño de controladores

La teoría de control convencional ha dado numerosos métodos para la construcción de controladores para sistemas dinámicos. Algunas de estas técnicas se listan a continuación.

Control PID (Proporcional Integral Derivativo): Quizás sea el controlador más famoso y más utilizado. Produce una respuesta en función del error, la tasa de cambio del error y el error acumulado. Es simple y fácil de realizar. Muchas veces se emplean reglas heurísticas para su ajuste.

Control clásico: incluye compensadores de adelanto-atraso, gráficas de Bode y Nyquist, localización de raíces, etc.

Métodos del espacio de estado: realimentación de estados, observabilidad y controlabilidad.

Métodos no lineales: linealización de la retroalimentación, rediseño mediante la técnica de Lyapunov.

Estos métodos clásicos de control ofrecen una gran variedad de formas para aprovechar la información de los modelos matemáticos. Sin embargo, durante el proceso de diseño, muchas veces no se toma en cuenta cierta información heurística que es necesaria para el correcto desempeño del sistema y no es hasta la implementación y ajuste del controlador cuando es tomada en cuenta (el ajuste o calibración siempre es necesario, ya que los modelos que describen la planta no son 100% exactos, además de no tomar en cuenta algún tipo de variación o señales de perturbación).

Si se hace referencia al método clásico de diseño de sistemas de control, existen ciertas características en el dominio del tiempo y frecuencia que pueden servir como guía para propósitos de diseño. Algunas de éstas son:

- a. Los polos complejos conjugados de la función de transferencia en lazo cerrado producen una respuesta al escalón unitario que es subamortiguada (ver figura 4). Si todos los polos son reales, la respuesta es sobreamortiguada. Los ceros de la función de transferencia pueden causar un sobrepaso aún en estas condiciones.
- b. La respuesta de un sistema está dominada por aquellos polos más cercanos al origen del plano-s. La respuesta transitoria debida a aquellos polos a la izquierda decaen más rápido (ver ecuación (1-22)), mientras más alejados del origen estén los polos se tendrá un mayor ancho de banda y una respuesta más rápida. Sin embargo, las señales deberán ser más grandes y por lo tanto el sistema será más costoso. Imagine que se desea patear un balón y golpear con él una pared a cierta distancia; mientras más fuerte sea pateado, más rápido alcanzará la pared pero una patada más fuerte requiere más energía.
- c. Cuando un polo y un cero de una función de transferencia se cancelan mutuamente, la respuesta asociada con el polo tendrá una magnitud más pequeña.
- d. El tiempo de levantamiento y el ancho de banda son inversamente proporcionales.

El problema esencial para el diseño de sistemas de control consiste en determinar una señal de control dentro de un intervalo prescrito para que todos los objetivos de diseño sean satisfechos, lo cual incluye de forma implícita el concepto de controlabilidad mencionado con anterioridad.

2. PRINCIPIOS DE LÓGICA DIFUSA

En el uso cotidiano de nuestro lenguaje, para describir cierto tipo de conocimiento e información, hay involucrada una gran cantidad de vaguedad. Ejemplos de esto son declaraciones tales como Juan es alto o la temperatura es fría. Lo vago en términos alto o frío radica en el hecho de que no poseen fronteras perfectamente definidas. Por ejemplo, se le pregunta que tanto está de acuerdo en decir que un número $x \in [0,20]$ es un número grande. Existen varias formas de responder a esta cuestión; una de ellas podría ser escogiendo cierto número d (lo suficientemente grande) y considerarlo como un umbral y decir que si el número $x \geq d$ entonces x clasifica como grande y si $x < d$ entonces x es no grande.

Otra persona podría responder a esta misma pregunta mediante algún tipo de criterio personal y según que tan *grande* él piense que es el número x que se le presenta. Otra persona a la que se le presente este número x podría optar por tres posiciones distintas, podría estar de acuerdo, en desacuerdo o en una posición incierta, donde no sabe si es o no grande el número en cuestión.

Esta persona dividiría el intervalo en tres grupos, aquellos que él considera son grandes, aquellos que él considera son no grandes y aquellos para los cuales no puede decidirse, o sea, no son grandes pero tampoco son no grandes. Lo que se trata de explicar en este ejemplo son las distintas formas de representar el conocimiento acerca de lo que son números grandes

Estas son sólo tres formas de representar este tipo de conocimiento, sin embargo, pueden haber muchas otras formas de hacerlo lo cual implica que la propiedad grande es inherentemente vaga.

Lo difuso de una propiedad radica en la ausencia de fronteras bien definidas del conjunto de objetos a los cuales se aplica esta propiedad.

Ahora, sea U el campo de referencia, al que se llamará el universo en discusión, el cual cubre un rango bien definido de objetos y sea F un subconjunto de U , en donde la transición de pertenencia o no-pertenencia al mismo es gradual en lugar de ser abrupta. Obviamente F no posee fronteras bien definidas. Se supone que F es el conjunto de personas altas en una comunidad U (las personas que poseen la propiedad de ser altas).

Existirán ciertos miembros de U que definitivamente son altos, otros que no son para nada altos y también existirán casos que no estarán muy bien definidos. Entonces, se puede decir que los objetos que pertenecen completamente a F (las personas que definitivamente son altas) tienen un *grado de pertenencia* del 100% o en una escala normalizada, un grado de pertenencia igual a 1. Por el contrario, los objetos que no pertenecen para nada a F se les asigna un grado de pertenencia del 0% o de 0 en la escala normalizada.

Para el caso de las personas que no están muy bien definidas, su grado de pertenencia estará entre 1 y 0. En otras palabras, mientras un elemento sea más característico de F , más cercano a 1 será su grado de pertenencia. Grados de pertenencia absolutos no existen, éstos únicamente son índices que se asignan de forma subjetiva por alguien y no existe una regla general para la asignación de grados de pertenencia, además, son fuertemente dependientes del contexto bajo el cual son asignados.

Uno de los mayores desarrollos de la teoría de conjuntos difusos (*Fuzzy Set Theory, FST*), la lógica difusa (*fuzzy logic*) fue desarrollada primordialmente para representar y razonar con algunas formas particulares de conocimiento.

Se asumió que el conocimiento iba a ser representado en una forma lingüística o verbal y el reto era hacer que esta representación no sea únicamente una tarea intelectual sino que además tenga un valor operacional para poder usar las ventajas de las computadoras modernas. Las nociones de vaguedad y conceptos difusos que se han mencionado con anterioridad necesitan ser representadas en una forma matemática para poder manipularlas y aplicarlas. El concepto de lógica difusa apareció en 1965, en la Universidad de California en Berkeley, introducido por Lofti A. Zadeh y es esencialmente un tipo de lógica multivaluada que trabaja con conjuntos que no tienen límites perfectamente definidos, es decir, la transición entre la pertenencia y la no-pertenencia a un conjunto es gradual, además permite que sean definidos estados intermedios entre los extremos convencionales que limitan un conjunto.

2.1 Conjuntos difusos

En la teoría de conjuntos clásica, un conjunto se define como un grupo de elementos que poseen propiedades o características similares y que son agrupados bajo ciertos criterios particulares. Sea A un subconjunto de un universo dado. Existen dos posibilidades para cualquier elemento del universo: Que forme parte de A , es decir que pertenezca a A o que no pertenezca a A .

Este tipo de conjuntos puede ser descrito en términos de lo que se conoce como su función característica definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2-1)$$

Para la función característica de conjuntos clásicos sólo existen dos posibles valores que puede tomar, ya sea cero (no pertenencia) o uno (pertenencia). En la teoría de conjuntos difusos un conjunto de este tipo se conoce como *crisp set* (cs) o un conjunto que posee sus fronteras de pertenencia y no-pertenencia perfectamente delimitadas.

Un conjunto clásico, *crisp set*, es la agrupación de todos los elementos x de un universo U para los cuales existe una función $\chi_A(x): U \rightarrow \{0,1\}$

Si se generaliza este concepto y en vez de restringir al conjunto $\{0,1\}$ se permite que las imágenes de los elementos se encuentren en $[0,1]$ se obtiene lo que se conoce como un conjunto difuso.

Un subconjunto difuso de un conjunto U es la agrupación de los elementos x de U para los cuales existe una función $\mu_A(x) : U \rightarrow [0,1]$.

La función $\mu_A(x)$ se conoce como función de pertenencia y es la encargada de proporcionar los grados de pertenencia de cada elemento X a un conjunto A , es decir, una función de que mapea elementos de algún conjunto U en $[0,1]$.

Por lo general en la literatura referente a conjuntos difusos se tienen dos tipos distintos de notaciones, una letra, A por ejemplo, y el símbolo μ_A . La letra A denota una etiqueta lingüística: sea A el conjunto de gente joven; mientras que la notación μ_A hace referencia a una función específica que proporciona el grado de juventud que se ha asignado a cada elemento de U.

Existen varias notaciones para representar un conjunto difuso, una de ellas es mediante la notación de parejas ordenadas de la forma:

$$F = \{(x, \mu_F(x)) \mid x \in U\} = \{\mu_F(x) / x \mid x \in U\} \quad (2-2)$$

Para cualquier universo contable o discreto:

$$F = \mu_F(x_1) / x_1 + \mu_F(x_2) / x_2 + \dots + \mu_F(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^n \mu_F(x_i) / x_i = \sum_{x \in U} \mu_F(x) / x \quad (2-3)$$

donde el símbolo + denota una enumeración. Para el caso continuo:

$$F = \int_U \mu_F(x) / x \quad (2-4)$$

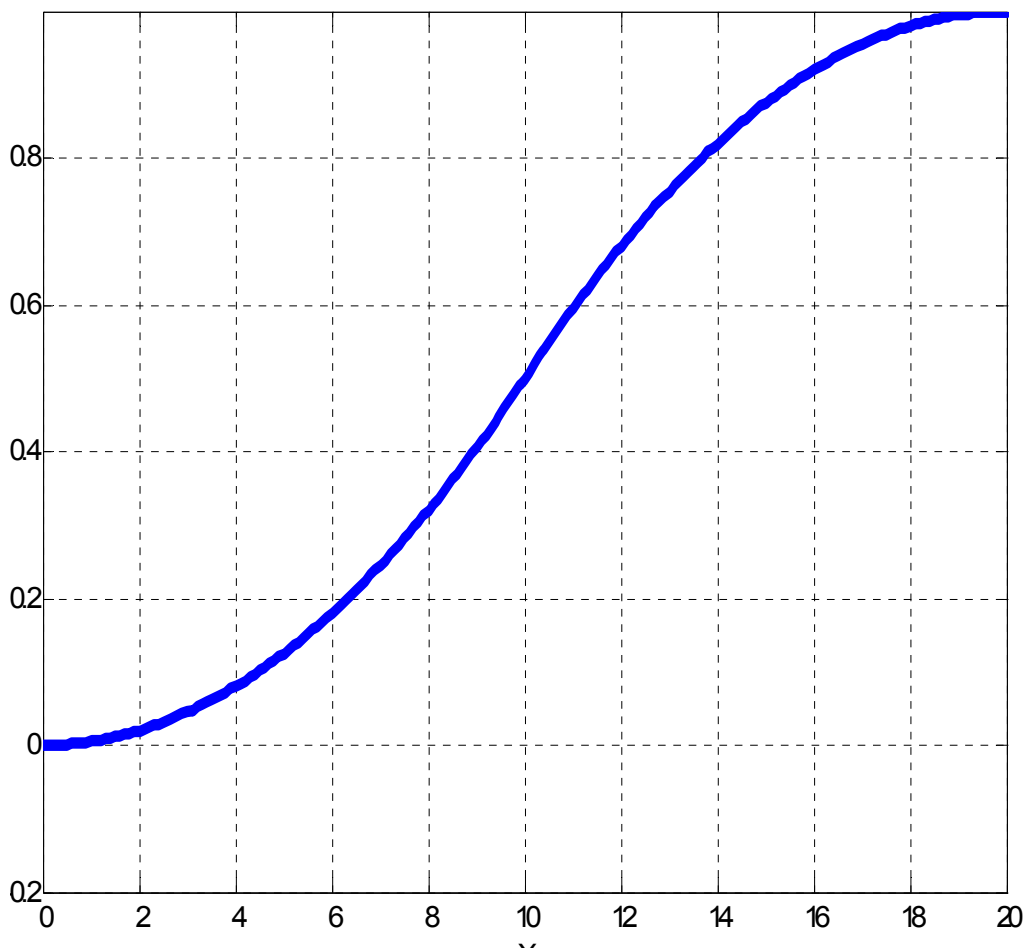
en donde el símbolo de integral denota una enumeración incontable.

La función de pertenencia, $\mu_F(x)$, es la propiedad característica de los conjuntos difusos, pues es con ella como se logra asignar los distintos grados de pertenencia de un elemento a una categoría que no posee fronteras perfectamente delimitadas. Escoger una determinada función de pertenencia es un proceso muy subjetivo y depende del contexto en el que se esté trabajando, sin embargo, esta flexibilidad de elección es de gran utilidad en aplicaciones como el control difuso.

Una función de pertenencia puede tener cualquier forma que se quiera y puede estar definida por cuantos parámetros se considere conveniente. Algunas funciones darán una transición del estado de no-pertenencia al de pertenencia de forma más suave que otras.

En la figura 8 se muestra una función de pertenencia para la propiedad *grande* que podría responder a la pregunta inicial del capítulo: Dado un número $x \in [0,20]$, que tan *grande* es ese número.

Figura 8. Función de pertenencia para la propiedad grande



2.1.1 Propiedades de los conjuntos difusos

A continuación se examinarán algunas de las propiedades más importantes de los conjuntos difusos, posteriormente se verá su utilidad en la teoría de control difuso.

Sean A y B dos conjuntos difusos definidos respectivamente en los universos X y Y .

El apoyo de un conjunto difuso A es el conjunto clásico que contiene a todos los elementos de A cuyo grado de pertenencia es diferente de cero, se denota por $S(A)$:

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2-5)$$

Para el caso particular de la teoría de control difuso, el apoyo de un conjunto difuso por lo general es un intervalo.

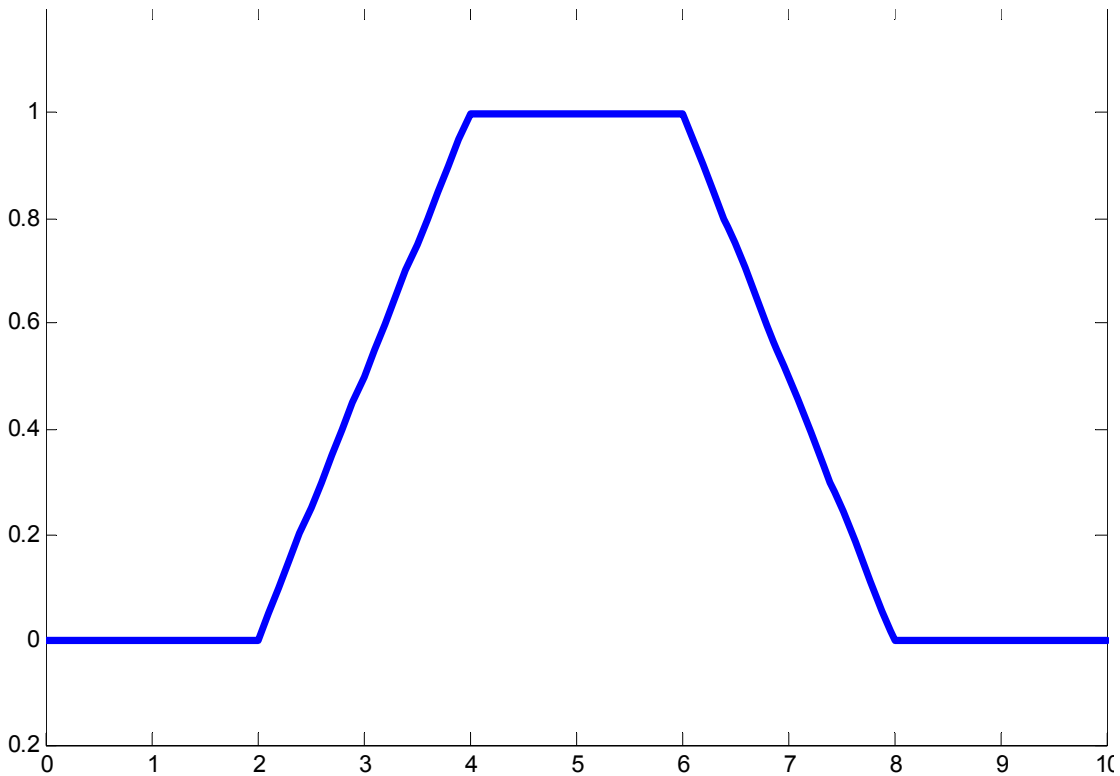
El ancho de un conjunto difuso A con apoyo $S(A)$ está definido por:

$$\text{Ancho}(A) = W(A) = \sup(S(A)) - \inf(S(A)) \quad (2-6)$$

En donde \sup denota el límite superior de $S(A)$ e \inf es el límite inferior. En otras palabras, el ancho de un conjunto difuso es la medida del intervalo para el cual la función de pertenencia posee valores distintos de cero. Se acepta el valor de cero en la función de pertenencia únicamente en los extremos del intervalo.

En la figura 9 se puede ver que el apoyo es $[2,8]$ y su ancho esta dado por la diferencia de los extremos del intervalo, o sea $W(A) = 8 - 2 = 6$.

Figura 9. Apoyo y ancho de una función de pertenencia



El núcleo de un conjunto difuso A está dado por:

$$\text{Núcleo}(A) = N(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (2-7)$$

El núcleo es un conjunto clásico en el cual se encuentran todos los elementos cuya función de pertenencia tienen el valor de 1. En la figura anterior, el núcleo es [4,7]. Si solamente existe un punto cuya función de pertenencia es igual a 1, entonces éste punto es llamado el **valor pico** de A.

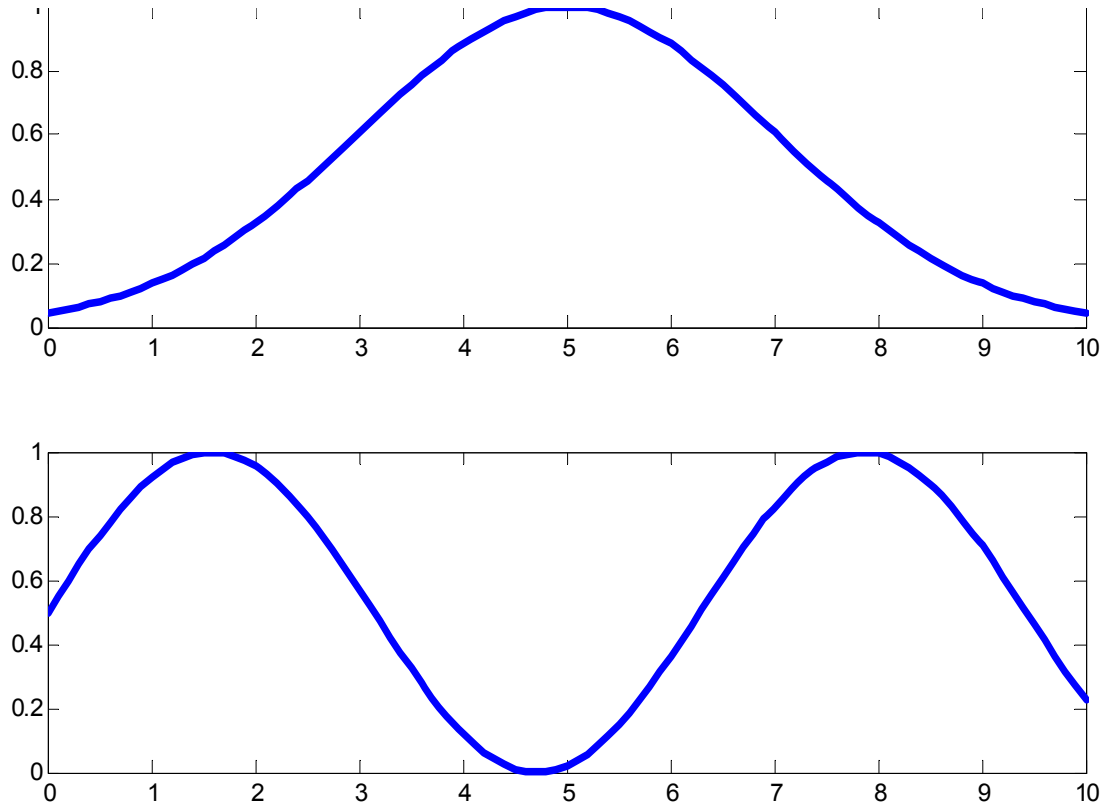
La altura de un conjunto difuso A en X, $H(A)$, está dada por:

$$H(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (2-8)$$

en donde sup denota el valor más alto de la función de pertenencia. Si $H(A) = 1$ el conjunto se llama normal y si $H(A) < 1$ se llama subnormal.

En la teoría de control difuso se suele tratar únicamente con conjuntos convexos. Un conjunto difuso es convexo si su función de pertenencia no contiene 'depresiones'. Esto significa que la función de pertenencia es creciente, decreciente o acampanada.

Figura 10. Funciones de pertenencia convexas y no convexas



Dos conjuntos difusos son iguales ($A = B$) si y sólo si:

$$\forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (2.9)$$

¿Es necesario que sean iguales las dos funciones de pertenencia?

A es un subconjunto de B ($A \subseteq B$) si y sólo si:

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (2-10)$$

2.1.2 Operaciones lógicas en conjuntos difusos

En la teoría clásica de conjuntos la unión, intersección y complemento son operaciones simples que están definidas sin ambigüedades. Esto es consecuencia del hecho de que los operadores lógicos *and*, *or*, *not* tienen una semántica bien definida basada en la lógica proposicional. Hay que recordar que la lógica Booleana tradicional es un caso particular de la lógica difusa y por lo tanto los resultados obtenidos mediante operadores difusos deben coincidir con los obtenidos mediante operadores tradicionales para el caso extremo de una función de pertenencia (pertenencia absoluta = 1; no pertenencia absoluta = 0). Considérense las siguientes tablas de verdad tradicionales:

Tabla I. Tabla de verdad

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Para este caso, los únicos valores que pueden tomar A y B son cero ó uno y por consiguiente los resultados serán alguno de estos dos números. Ahora, si se recuerda que en la lógica difusa cualquier declaración es verdadera sólo hasta cierto grado, entonces, de qué forma pueden ser alteradas estas tablas para aceptar cualquier número real entre 0 y 1 como entrada y aún así conservar los resultados para los valores extremos.

Zadeh propuso las siguientes funciones:

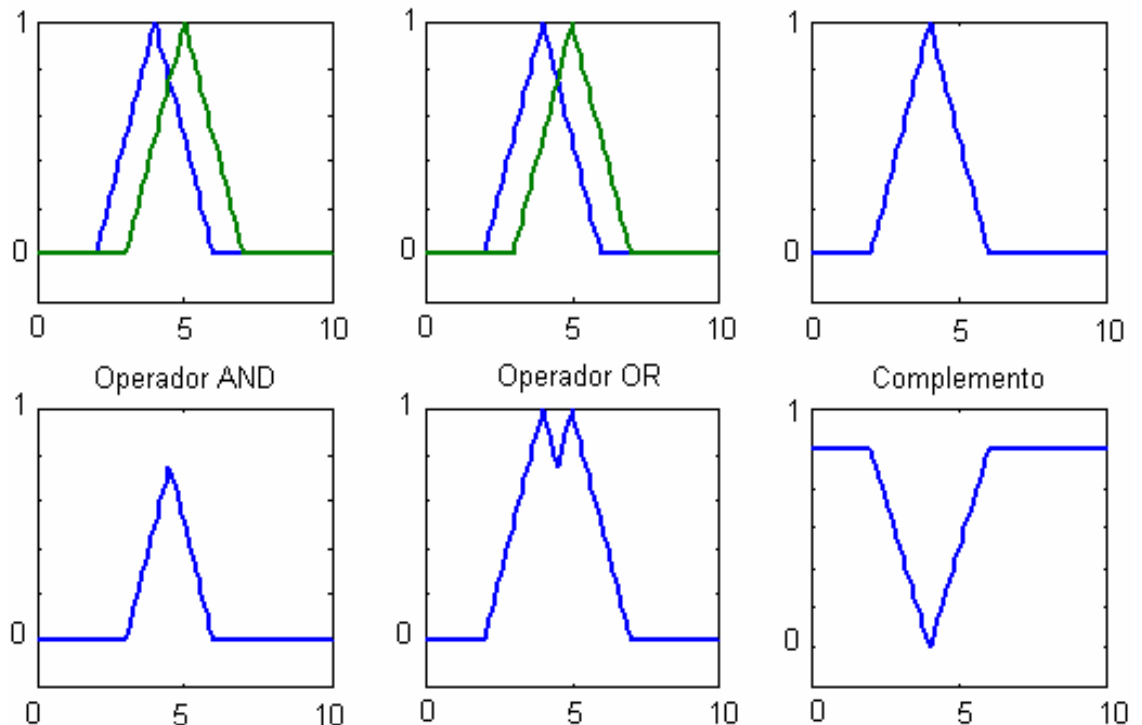
$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (2-11)$$

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (2-12)$$

$$\overline{\mu_A(x)} = 1 - \mu_A(x) \quad (2-13)$$

en donde max representa el valor máximo y min el mínimo.

Figura 11. Operadores difusos



Al elegir de esta forma los operadores lógicos difusos se ve que los resultados para la lógica booleana se preservan.

Estos operadores no poseen una forma única para definirse y las ecuaciones (2-11) a (2-13) son sólo una posibilidad. De forma más general, para definir las operaciones de unión, intersección y complemento se utilizan las normas triangulares (normas-T) y las co-normas triangulares (normas-S) (8-83). Una norma triangular puede considerarse como la forma más generalizada de un operador de intersección. Para representar este operador, utilizaremos el símbolo Δ .

Una norma triangular, norma-T, denota una clase de función binaria que puede representar la operación de intersección. Debe de cumplir con las siguientes condiciones

- a. $a \Delta b = b \Delta a$
- b. $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$
- c. $a \leq b$ y $c \leq d$ implica $a \Delta b \leq c \Delta d$
- d. $a \Delta 1 = a$
- e. $a \Delta a < a$

Si una norma-T cumple la propiedad e junto con las otras 4 se dice que es arquimediana. El operador $\min()$ que se aplicó a los conjuntos difusos cumple con las condiciones a a d. De aquí se puede ver que la definición para la operación de intersección no es única, siempre y cuando se cumplan estas condiciones. Otra forma de definir la operación *and* es mediante un simple producto aritmético.

Una co-norma triangular o norma-S puede ser considerada como el operador más general para representar la operación de unión. Se denotará mediante el símbolo ∇

Una co-norma triangular (norma-S), denota una función binaria que puede representar el operador de unión. Satisface las siguientes propiedades

- a. $a \nabla b = b \nabla a$
- b. $(a \nabla b) \nabla c = a \nabla (b \nabla c)$
- c. $a \leq b$ y $c \leq d$ implica $a \nabla b \leq c \nabla d$
- d. $a \nabla 0 = a$

Existe una relación general entre las normas-T y las normas-S, la cual es:

$$\mathbf{a \Delta b = 1 - ((1 - a) \nabla (1 - b))} \quad (2-14)$$

Cuando una norma-S y una norma-T satisfacen esta condición, uno es el conjugado del otro. Si a y b son conjuntos clásicos, utilizando esta relación se obtienen las leyes de De Morgan. Los operadores min() y max() definidos anteriormente (véase la figura 11) también cumplen esta relación.

La negación o complemento simbolizado como c(a) expresado como un operador general cumple las siguientes propiedades:

- a. $c(0) = 1$
- b. si $a < b$ entonces $c(a) > c(b)$
- c. $c(c(a)) = a$

Además, existen los llamados operadores promediadores, los cuales forman una combinación entre operadores difusos y operaciones aritméticas.

El operador promediador para la intersección se define mediante:

$$\mu_{A \text{ and } B}(x) = \gamma \cdot \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) + (1 - \gamma) \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2} \quad (2-15)$$

donde $\gamma \in [0,1]$. De forma similar, el operador promediador para la unión se define mediante:

$$\mu_{A \text{ or } B}(x) = \gamma \cdot \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) + (1 - \gamma) \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2} \quad (2-16)$$

Existen otros operadores que no son usados con mucha frecuencia en la teoría de control difuso:

La suma acotada de A y B ($A \oplus B$) se define por:

$$A \oplus B = \int_x \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) / x \quad (2-17)$$

donde + denota una suma aritmética.

La diferencia acotada de A y B ($A \ominus B$) se define por:

$$A \ominus B = \int_x \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) / x \quad (2-18)$$

en donde el símbolo - denota una diferencia aritmética.

El producto $A \cdot B$ de dos conjuntos difusas A y B está dado por:

$$A \cdot B = \int_x \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) / x \quad (2-19)$$

La involución ó potencia α de un conjunto difuso A, en donde α es un número real esta dada por:

$$A^\alpha = \int_x (\mu_A(x))^\alpha / x \quad (2-20)$$

Estas son las principales operaciones entre conjuntos difusos que encuentran aplicación en el estudio de sistemas de control difuso. Existen muchas otras, sin embargo tienen poca importancia en la teoría de control difuso. Este tipo de operaciones mencionados anteriormente encontrarán su aplicación cuando se estudien los mecanismos de inferencia y cuando se desee encontrar el significado de enunciados de la forma si – entonces que son los bloques básicos para la formulación de las reglas lingüísticas que gobiernan el funcionamiento de un controlador difuso.

Las reglas de inferencia que serán tratadas más adelante, basan sus resultados en las operaciones antes mencionadas o en combinaciones de varias de ellas. Más adelante se verá que la parte de inferencia en un controlador difuso es la parte más importante del mismo, pues es ahí en donde los conjuntos difusos y las variables lingüísticas se combinan para producir los resultados deseados.

La teoría de control difuso ofrece una gran flexibilidad cuando se está escogiendo una función de pertenencia para modelar un concepto vago, como lo podría ser alto, bajo, positivo grande, etc. El objetivo de exponer la forma generalizada de los operadores de unión, intersección y complemento es mostrar que para los conjuntos difusos (y en general cualquier conjunto), se puede escoger cualquier norma triangular para representar estos operadores. Según la experiencia de la persona que escoge estos operadores podrán obtenerse casos para los cuales las conclusiones con un operador en particular sean más realistas y acercadas al razonamiento humano que otras.

2.2 Relaciones difusas

Las relaciones o asociaciones entre objetos son fundamentales para el análisis de sistemas del mundo real. Una relación puede ser considerada como un conjunto de n -uplas, en donde cada n -upla es un conjunto ordenado. Si $n = 2$, la relación consta de duplas, o parejas ordenadas denotado por (x, y) . El producto cartesiano es un ejemplo de un tipo de relación binaria. Por ejemplo, si se considera el conjunto de los números naturales N , entonces parejas de la forma $(5,7)$, $(3,4)$, $(80,1000)$, $(125,125)$ corresponden a la relación en $N \times N$ definida por: $\{(m, n) \mid m \leq n\}$. Aquí la relación es la condición “ m menor o igual que n ”. Estas relaciones pueden ser descritas en términos de una función característica. Suponga que R es una relación definida en $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Si μ_R es una función característica que define a R , debe cumplirse para cualquier x_1, \dots, x_n :

$$\mu_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } (x_1, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{cuando } (x_1, \dots, x_n) \notin R \end{cases} \quad (2-21)$$

Para el ejemplo anterior,

$$\mu_R(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } m \leq n \\ 0 & \text{cuando } m > n \end{cases}$$

La relación anterior puede expresarse como $1/(5,7) + 1/(3,4) + 1/(80,1000) + 1/(125,125) + 0/(15,10) + 0/(13,5) + \dots = \sum_{N \times N} \mu_R(m, n)/(m, n)$ en donde el símbolo de suma representa una enumeración.

En las relaciones difusas, en vez de tener dos puntos para los cuales aplicar los elementos de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, lo que se tiene es el intervalo $[0,1]$ y la función característica se convierte en una función de pertenencia.

Sean U y V dos universos, R una relación y $\mu_R : U \times V \rightarrow [0,1]$, entonces:

$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u, v)/(u, v) \quad (2-22)$$

$$R = \sum_{U \times V} \mu_R(u, v)/(u, v) \quad (2-23)$$

La ecuación (2-22) es para universos continuos o incontables y la (2-23) para universos discretos o contables. Lo que expresan estas ecuaciones es que una relación difusa estará compuesta por los elementos a los cuales se aplican y la función de pertenencia de los mismos, la cual indica hasta que grado forman parte de la relación los elementos.

Por ejemplo (4-64), sea $U = \{1, 2, 3\}$ y R la relación difusa definida en $U \times U$ por $R =$ números aproximadamente iguales. Se tiene:

$$\begin{aligned}
& 1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) \\
& + 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2) \\
& + 0.3/(1,3) + 0.3/3,1)
\end{aligned}$$

La función de pertenencia para esta relación puede escribirse como:

$$\mu_R(u_1, u_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0.8 & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0.3 & \text{si } |x - y| = 2 \end{cases}$$

La cual es una función de pertenencia completamente arbitraria. Cualquier otro tipo de función pudo haberse utilizado. Muchas veces es de gran ayuda expresar las relaciones con una tabla o matriz, por ejemplo la relación anterior se puede escribir como:

Tabla II. Representación tabular de una función de pertenencia

	1	2	3
1	1	0.8	0.3
2	0.8	1	0.8
3	0.3	0.8	1

Las relaciones son de gran importancia en la teoría de control difuso porque con ellas se puede describir la interacción entre variables. Cuando se traten las reglas si-entonces de un sistema difuso se verá su particular importancia.

Sean R y S dos relaciones difusas binarias en los universos X y Y; sea R = x considerablemente más grande que y y S = y muy cercano a x. En notación matricial se tiene:

Tabla III. X es considerablemente más grande que Y

R	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	0.8	1	0.1	0.7
x ₂	0	0.8	0	0
x ₃	0.9	1	0.7	0.8

S	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	0.4	0	0.9	0.6
x ₂	0.9	0.4	0.5	0.7
x ₃	0.3	0	0.8	0.5

Dos de las operaciones más importantes son la unión y la intersección, definidas como sigue:

Sea R y S dos relaciones binarias definidas en X x Y. La intersección de R y S está definida por:

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) \Delta \mu_S(x, y) \quad (2-24)$$

en donde puede utilizarse cualquier norma norma-T para definirla. Por lo general en el control difuso se utiliza el operador min() para la intersección.

La unión entre R y S se define mediante:

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \nabla \mu_S(x, y) \quad (2-25)$$

en donde cualquier norma-S puede utilizarse. Por lo general, se utiliza max().

La intersección de las relaciones R y S denota "x considerablemente más grande que y y muy cercano a x":

Tabla IV. R intersección S

$R \cap S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0	0.1	.6
x_2	0	0.4	0	0
x_3	0.3	0	0.7	0.5

en donde se ha utilizado el operador $\min()$ para la intersección.

La unión de R y S denota x considerablemente más grande que y o y muy cercano a x :

Tabla V. R unión S

$R \cup S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1	0.9	0.7
x_2	0.9	0.8	0.5	0.7
x_3	0.9	1	0.8	0.8

en donde se ha utilizado el operador $\max()$ para la unión.

Existen dos operaciones que son muy importantes para los conjuntos y relaciones difusas. Estas operaciones son la proyección y la extensión cilíndrica. La proyección hace que una relación ternaria se vuelva binaria, una relación binaria un conjunto difuso o un conjunto difuso un simple valor clásico (un conjunto difuso n -dimensional se transforma en uno $(n-1)$ -dimensional. Aquí se considerará únicamente el caso de relaciones binarias, la extensión para relaciones n -arias se puede apreciar en (4-68)(8-184).

La proyección de una relación R (un conjunto difuso bidimensional) en otro conjunto V (un conjunto difuso unidimensional) se obtiene como sigue:

Dada la relación R en X x Y, se puede expresar como una tabla, asumiendo que X y Y son universos discretos de la siguiente forma:

Tabla VI. Relación entre X e Y

		Y				
		┌───────────┐				
		└───────────┘				
	R	y ₁	y ₂	y ₃	y _k
{	x ₁	α ₁₁	α ₁₂	α ₁₃	α _{1k}
	x ₂	α ₂₁	α ₂₂	α ₂₃	α _{2k}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	x _n	α _{n1}	α _{n2}	α _{n3}	α _{nk}

en donde los $\mu_R(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$. La proyección de R en X denotada como proy R en X se obtiene al asignar a cada elemento de x (cada x_i) el máximo valor de la función de pertenencia de cada fila, o sea:

$$\sum_i (\max_j (\mu_R(x_i, y_j))) / x_i \tag{2-26}$$

Por ejemplo, para la siguiente relación:

Tabla VII. Relación difusa

R	y ₁	Y ₂	y ₃	Y ₄
x ₁	0.8	1	0.1	0.7
x ₂	0	0.8	0	0
x ₃	0.9	1	0.7	0.8

$$\text{Proy R en X} = 1/x_1 + 0.8/x_2 + 1/x_3$$

$$\text{Proy R en Y} = 0.9/y_1 + 1/y_2 + 0.7/y_3 + 0.8/y_4.$$

La operación de proyección es casi siempre utilizada en conjunto con la *extensión cilíndrica*, *ce*. Esta última es más o menos lo opuesto a la proyección. Extiende conjuntos difusos n-dimensionales a conjuntos difusos (n+1)-dimensionales. Extender un conjunto difuso de un universo X a uno bidimensional aplicado en X x Y equivale a asignar a cada pareja (x_i, y_j) la misma función de pertenencia que tiene el elemento x_i. Puesto de otra forma:

Sea S un conjunto en X y U un conjunto en X x Y entonces:

$$ce(S) = \sum_j \mu_S(x_i)/(x_i, y_j) \quad (2-27)$$

Del ejemplo anterior:

Tabla VIII. Extensión cilíndrica

V	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	1	1	1	1
x ₂	0.8	0.8	0.8	0.8
x ₃	1	1	1	1

$$V = ce(\text{Proy R en X})$$

U	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄
x ₁	0.9	1	0.7	0.8
x ₂	0.9	1	0.7	0.8
x ₃	0.9	1	0.7	0.8

$$U = ce(\text{Proy R en Y})$$

Se puede ver que $\text{Proy } ce(S) \text{ en X} = S$ pero en general $ce(\text{Proy V en X}) \neq V$. Estas dos operaciones sirven cuando se desean operar relaciones o conjuntos de distintas dimensiones.

Si se retoma el ejemplo anterior en donde se expresaba $R = "x$ considerablemente más grande que $y"$ y supóngase que se tiene otro conjunto difuso $A = "x$ es pequeño" expresado como sigue: $A = 0.3/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3$ (se vuelve a recalcar que la función de pertenencia es completamente arbitraria y puede escogerse como mejor convenga). Se desea encontrar la intersección de los dos conjuntos, o sea la operación " x es considerablemente más grande que y y x es pequeño" (ahora se puede ver como conceptos vagos tales como *pequeño* o *grande* encuentran una herramienta para ser operados). Justo como se encuentran R y A no pueden operarse entre sí, ya que poseen dimensiones distintas.

Primero se necesita la extensión de A , $ce(A)$, esto es la extensión de A en $X \times Y$:

Tabla IX. Extensión cilíndrica, ejemplo

$$ce(A) =$$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0.3	0.3	0.3
x_2	1	1	1	1
x_3	0.8	0.8	0.8	0.8

Ahora, la intersección es:

Tabla X. Intersección $R \cap ce(A)$

$$R \cap ce(A) =$$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0.3	1	0.3
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.8	0.8	0.7	0.8

La combinación de conjuntos difusos y relaciones difusas con la ayuda de la extensión cilíndrica y la proyección se llama composición.

Sea A un conjunto difuso definido en X y R una relación definida en $X \times Y$. Entonces, la composición de A y R que da como resultado un conjunto difuso B en Y es:

$$B = A \circ R = \text{proy}(ce(A) \cap R) \text{ en } Y \quad (2-28)$$

2.3 Razonamiento aproximado

La forma más conocida de la lógica difusa es lo que se conoce como razonamiento aproximado y cubre una variedad de reglas de inferencia (o deducción) cuyas premisas contienen proposiciones difusas. La inferencia en el razonamiento aproximado es similar a la inferencia en lógica clásica.

En la lógica difusa, la consecuencia de un conjunto dado de proposiciones difusas depende de manera esencial en el significado que se le dé a estas proposiciones difusas.

La inferencia en el razonamiento aproximado equivale a una especie de operatoria entre conjuntos difusos que representan el significado de un cierto grupo de proposiciones difusas. Por ejemplo, si se supone que se tienen las funciones de pertenencia μ_A y μ_R que representan el significado de la proposición difusa X es A y el significado de la condicional difusa si X es A entonces Y es B se puede calcular la función de pertenencia que representa el significado de la conclusión Y es B .

2.3.1 Variables lingüísticas

La unidad fundamental para representar el conocimiento es la noción de una variable lingüística. Por una variable lingüística se hace referencia a una variable cuyos valores son palabras o expresiones en un lenguaje natural o artificial. Por ejemplo, la edad es una variable lingüística si sus valores son lingüísticos en lugar de numéricos, por ejemplo, joven, no tan joven, muy joven, algo joven, viejo, no tan viejo, etc. En vez de asignar valores numéricos de edades como 20, 21, 23, 35 años.

Se suele asociar la notación $\langle X, LX, U, M_x \rangle$ con una variable lingüística. El símbolo X denota el nombre relacionado con la variable lingüística, por ejemplo, temperatura; LX es el conjunto de valores lingüísticos que puede tomar X. Un valor lingüístico es un símbolo para una propiedad particular de X. Para la temperatura, algunos de los valores lingüísticos serían muy frío, frío, confortable, caliente, muy caliente. LX también es conocido como el conjunto referencia de X. U es el dominio físico sobre el cual la variable lingüística X toma sus valores cuantitativos. Para la temperatura, el dominio físico de variación podría ser $[-15^{\circ}\text{C}, 40^{\circ}\text{C}]$. M_x es una función semántica que da un significado a una variable lingüística en términos de los elementos cuantitativos de U. En otras palabras, M_x denota el conjunto de todas las funciones de pertenencia que describen a cada elemento del conjunto de valores lingüísticos. Por ejemplo, para la temperatura:

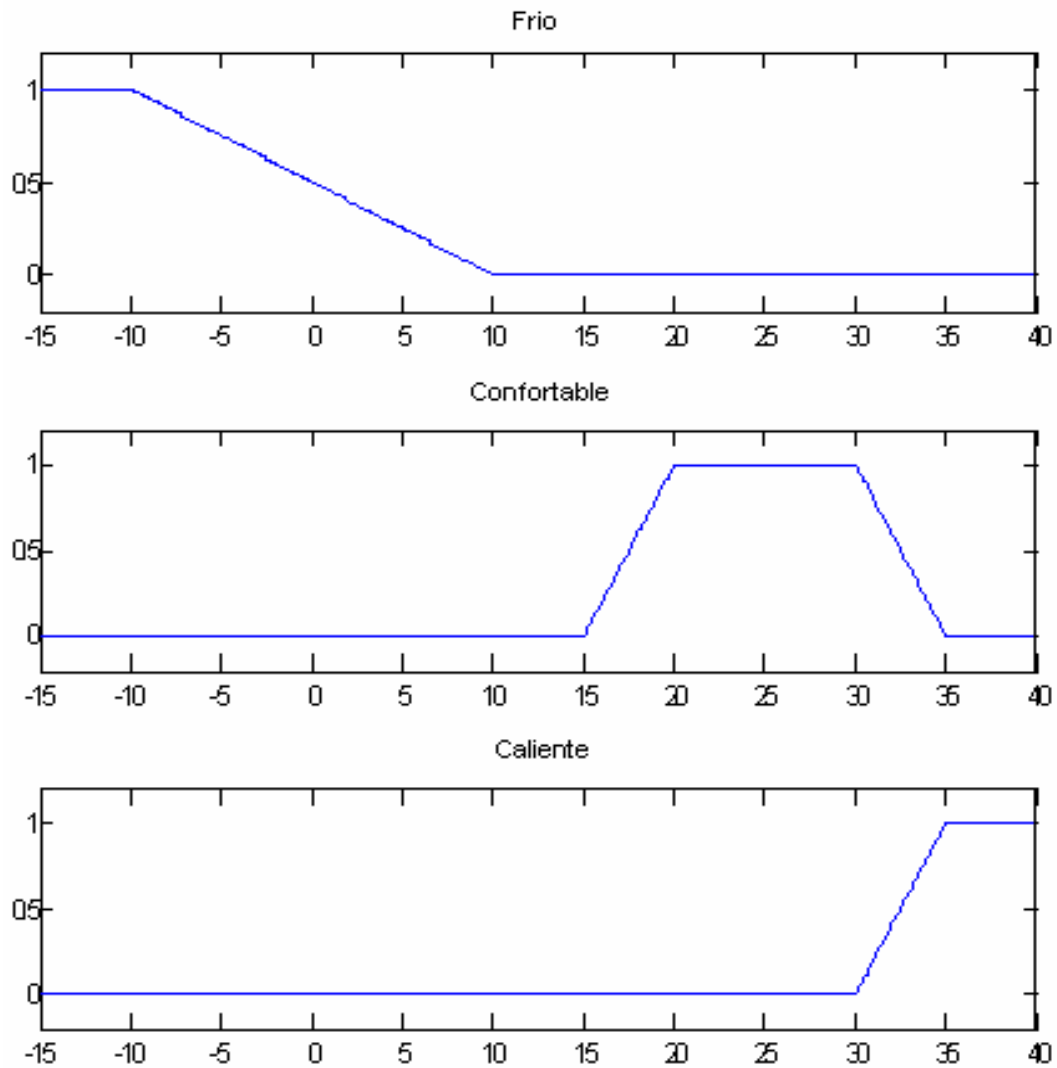
X : temperatura

LX: frío, caliente, confortable.

U: $[-15^{\circ}\text{C}, 40^{\circ}\text{C}]$.

M_E : Ver figura 12.

Figura 12. Funciones de pertenencia para el conjunto LX de la temperatura



El razonamiento aproximado es utilizado para representar y razonar con el conocimiento expresado como primitivas, las cuales son proposiciones expresadas en una forma natural de lenguaje. Por ejemplo, el enunciado La temperatura es caliente, expresa un tipo de conocimiento de una forma natural en el lenguaje. Para traducir esta expresión del lenguaje natural en una variable lingüística lo que se hace es escoger un símbolo para la variable física temperatura (T por ejemplo) y luego escoger un símbolo para denotar el valor particular caliente (C por ejemplo) de la temperatura. La expresión anterior ahora puede describirse como: La temperatura tiene la propiedad de ser caliente que posteriormente se transforma a un lenguaje simbólico al escribir: T es C. Expresiones como esta son llamadas proposiciones difusas primitivas y su significado está dado por un conjunto difuso (es decir, una función de pertenencia) definido en el dominio físico de la variable física Temperatura.

El significado de la expresión simbólica T es C ayuda a decidir el grado al cual esta expresión es satisfecha dado un valor físico específico de la temperatura. Para lograr esto, primero se le asigna al símbolo T un valor en su dominio físico. El grado de pertenencia de este valor se encuentra evaluando la función de pertenencia correspondiente. Una vez hecho esto, el grado de pertenencia dice qué tanto es satisfecha esta expresión simbólica dadas ciertas circunstancias particulares.

Por ejemplo, la expresión simbólica anterior: T es C, expresa la temperatura es caliente. Interesa averiguar el significado de esta expresión o lo que es lo mismo, que tan cierta es la proposición. Asíumase que se da un valor de temperatura de 33 grados centígrados. De las funciones de pertenencia de la figura 12 se puede ver que 33 grados centígrados corresponden a un grado de pertenencia de 0.6. Es decir, la temperatura es caliente en un 60%. En la figura también puede verse que el valor de 33 grados forma parte de las otras dos funciones de pertenencia para frío y confortable. El significado completo de esta expresión sería: La temperatura es 60% caliente, 40% confortable y 0% fría.

Basados en conectivos lingüísticos se pueden formar proposiciones difusas más complejas tales como:

- a. X es A **y** X es B
- b. X es A **o** X es B
- c. si X es A entonces X es B, etc.

2.3.2 Reglas de la forma si – entonces: implicaciones y conjuntos de reglas

Este tipo de expresiones son utilizadas para establecer condiciones o la relación causa-efecto entre dos proposiciones difusas. Hay que tomar en cuenta que una proposición difusa se hace mediante variables lingüísticas. Estos enunciados se expresan de forma general de la siguiente forma:

Si \langle Proposición difusa \rangle entonces \langle Proposición difusa \rangle

La teoría de control difuso está interesada en expresiones de la forma

si X es A, entonces Y es B

y su significado es representado como una relación difusa definida en los dominios de las variables lingüísticas X e Y. La construcción de esta relación difusa (la cual da el significado de expresión anterior o mejor dicho, cual es el grado de verdad de esta implicación) es como sigue:

El significado de X es A, llamado el antecedente de la regla, es representado por un conjunto difuso \bar{A} (una función de pertenencia).

El significado de Y es B, llamado la consecuencia de la regla, se representa mediante otro conjunto difuso \bar{B} (una función de pertenencia).

El significado de la condición difusa (o la evaluación de la regla si- entonces) es una relación difusa $\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$; en donde el operador * puede ser un simple producto cartesiano o algún operador de implicación difuso.

Si el antecedente o la consecuencia de la regla son proposiciones compuestas (por ejemplo, X es A y Z es B y L es C...) entonces se calcula primero la función de pertenencia de la proposición compuesta y el operador * es aplicado a las funciones de pertenencia resultantes. Como podrá haberse notado, cualquier operación o relación en lógica difusa corresponde a operaciones y relaciones entre funciones de pertenencia que dan como resultado otras funciones de pertenencia.

Ahora, se necesita encontrar expresiones para el operador * y poder obtener la representación de las reglas si – entonces. Existe un gran número de relaciones que se pueden usar con este propósito y estas relaciones por lo general se derivan de las llamadas lógicas multivaluadas. El punto fundamental en las lógicas multivaluadas es que una proposición puede tener muchos valores de verdad y no se limitan al conjunto de dos puntos {0, 1} sino que se extienden en todo el intervalo [0, 1]. Por ejemplo, sean p y q dos proposiciones en alguna lógica multivaluada, donde $v(p) = 0.5$ (el valor de verdad de p es igual a 0.5) y $v(q) = 0.7$. El valor de verdad de p y q ($v(p \wedge q)$) puede ser calculado con cualquier norma-T así como $v(p \vee q)$ puede calcularse con cualquier norma-S.

El problema radica en encontrar el valor de $p \rightarrow q$ (p implica q , o lo que es lo mismo, si p entonces q). En lógica binaria, $p \rightarrow q$ tiene el mismo valor de verdad que $\neg p \vee q$ (p negado unión q) y $(p \wedge q) \vee \neg p$ ($(p$ intersección $q)$ unión p negado). Para el primer caso, se utiliza la suma acotada para representar la unión y en el segundo caso $\max()$ y $\min()$ son usados.

$$v(p \rightarrow q) = \min(1, 1 - v(p) + v(q)) \quad (2-29)$$

$$v(p \rightarrow q) = \max(\min(v(p), v(q)), v(q)) \quad (2-30)$$

En lógica difusa, para la implicación si X es A entonces Y es B se pueden tener varias relaciones que la definan. Debe notarse que A está definido en X y que B está definido en Y entonces deben tomarse las extensiones cilíndricas de A en X y de B en Y si se desea operar entre sí estos dos conjuntos.

Implicacion de Kleene-Dieng: basado en el hecho de que $p \rightarrow q = \neg p \vee q$

$$R_b = ce(A') \cup ce(B)$$

$$\mu_{R_b}(x, y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (2-31)$$

Implicacion de Lukasiewicz: basado en la misma equivalencia para p y q, la unión se representa mediante la suma acotada, se obtiene la relación:

$$R_a = ce(A') \oplus ce(B)$$

$$\mu_{R_a}(x, y) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) \quad (2-32)$$

Implicación de Zadeh: como $p \rightarrow q = (p \wedge q) \vee \neg p$, esta equivalencia es utilizada de la siguiente forma:

$$R_m = (ce(A) \cap ce(B)) \cup ce(A')$$

$$\mu_{R_m}(x, y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x)) \quad (2-33)$$

Implicación estocástica: está basada en la igualdad $P(A / B) = 1 - P(A) + P(A)P(B)$. Para representar la intersección se utiliza un producto algebraico además de una suma acotada.

$$R^* = ce(A') \cup (ce(A) \cap ce(B))$$

$$\mu_{R^*}(x, y) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)) \quad (2-34)$$

Implicacion de Gödel: se define como:

$$v(p \rightarrow q) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) \leq v(q) \\ v(q) & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2-35)$$

Por ejemplo, si se desea averiguar $v(0.6 \rightarrow 0.8) = 1$ y $v(0.6 \rightarrow 0.4) = 0.4$.

Implicación aguda: es similar a la implicación de Gödel pero es más restrictiva. Esta definida por la ecuación:

$$v(p \rightarrow q) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(p) \leq v(q) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2-36)$$

Implicación General: esta implicación puede considerarse como una combinación de la implicación de Gödel y la Aguda. Se define como sigue:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \xrightarrow{\alpha} q) \wedge (\neg p \xrightarrow{\beta} \neg q) \quad (2-37)$$

en donde α, β denotan una implicación de Gödel o Aguda.

En términos de conjuntos difusos:

$$\mu_{R_{\alpha\beta}}(x,y) = \min((\mu_A(x) \xrightarrow{\alpha} \mu_B(y)), (1 - \mu_A(x) \xrightarrow{\beta} 1 - \mu_B(y))) \quad (2-38)$$

Implicación de Mamdani: esta es la implicación más importante con respecto al control difuso. Su definición está basada en la operación de intersección $p \rightarrow q \equiv p \wedge q$. La relación R_c se define mediante:

$$\mu_{R_c}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (2-39)$$

Ahora, ¿qué significa todo esto? Las ocho reglas de implicación expuestas hasta ahora, dan una relación entre el antecedente y la consecuencia de la regla. Se verá más adelante que un controlador difuso está gobernado por reglas de la forma si – entonces. Lo que interesa cuando se está trabajando con algún tipo de controlador de tipo difuso es la salida que se obtenga al evaluar (o disparar) una regla determinada. ¿Cómo se logra eso? Encontrando la salida de la regla con base en la relación existente entre la entrada y la salida.

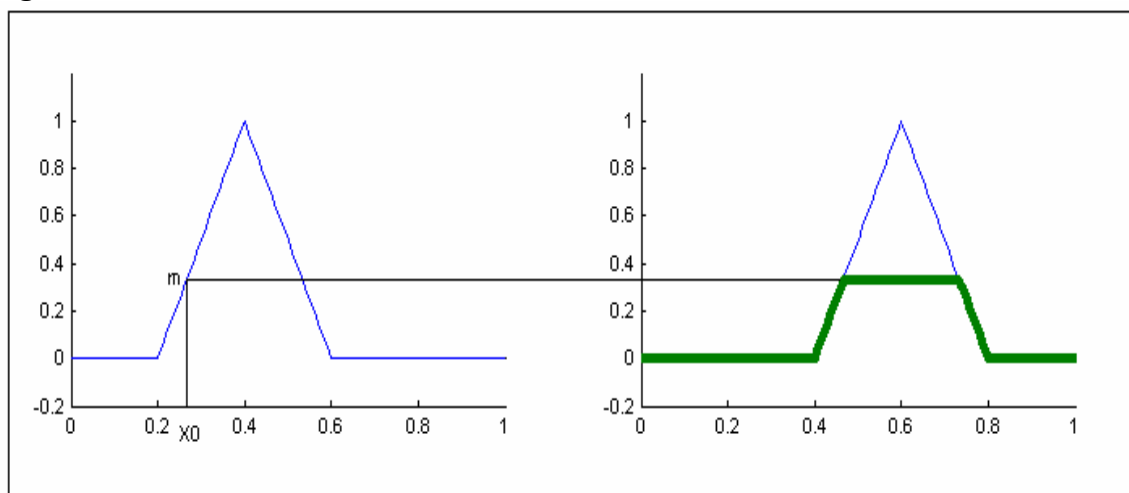
Existen dos formas de hacerlo, una de ellas es tomando la proyección de la relación que se obtiene de la composición entre la relación dada por la regla de inferencia y la entrada (que debe considerarse como un conjunto difuso con el máximo grado de pertenencia asignado al valor mismo de entrada) la otra, que es computacionalmente más sencilla, se describe a continuación.

Si se tiene la regla si X es A entonces Y es B , donde X está definida para $x \in [a, b]$ e y está definida para $y \in [c, d]$. Aquí X es la variable de entrada y Y la variable de salida. Al existir un valor no difuso a la entrada, x_0 , para encontrar la salida se procede de la siguiente forma:

- a. Para la entrada no difusa $x = x_0$, se determina su grado de pertenencia en $\mu_A(x)$, o sea, $\mu_A(x_0) = m$.
- b. Se debe formar una versión modificada de la función de pertenencia de $\mu_B(y)$ de la forma siguiente: $\mu_{CB}(y) = \min(\mu_A(x_0), \mu_B(y))$

Esta versión modificada de $\mu_B(y)$ se encuentra recortada o enganchada en m.

Figura 13. Inferencia de Mamdani



Disparar la regla si X es A entonces Y es B significa encontrar que tanto Y es B para un valor particular de X. Existen muchos valores para los cuales Y es B (es decir, valores de y para los cuales la función de pertenencia es distinta de cero) Sin embargo, lo que se logra al enganchar la función de pertenencia de la salida es encontrar que tanto los valores de y merecen ser B dado el valor de entrada x_0 . Más adelante se verá que en un controlador difuso, la salida no tiene que ser difusa, y esta salida necesita desfusificarse, es decir, convertirlo a un valor no difuso, lo cual puede interpretarse como la elección del valor de este conjunto difuso de salida que posee el máximo valor de la función de pertenencia; se verá también que existen varios métodos para lograr esto.

Otro método que también es ampliamente utilizado consiste en formar una versión modificada a escala de la función original $\mu_B(y)$, en donde el factor de escala es el valor de $\mu_A(x_0)$.

Hasta el momento se han considerado sistemas con una sola regla de la forma si – entonces, pero, qué pasa cuando se tiene más de una regla, es decir, cuál es conjunto difuso de salida cuando varias de estas reglas se presentan y son disparadas por un valor no difuso de entrada.

El resultado de disparar una regla es un conjunto recortado, el cual se denotará como *CS (Clipped Set)*. En un sistema con n reglas cada una se simboliza de la siguiente forma:

$$\text{Si } x \text{ es } A^{(k)} \text{ entonces } y \text{ es } B^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n$$

En donde $A^{(k)}$ y $B^{(k)}$ son los valores lingüísticos de X e Y respectivamente, en la k-ésima regla y son interpretados como los valores de una función que asigna grados de pertenencia a los elementos del universo X e Y en la propiedad particular a la que hacen referencia (¿Cuál es la diferencia entre una función de pertenencia y una variable lingüística?).

Si se utiliza la inferencia de Mamdani, la interpretación de la regla (es decir la relación existente entre los valores de x e y) queda definida como:

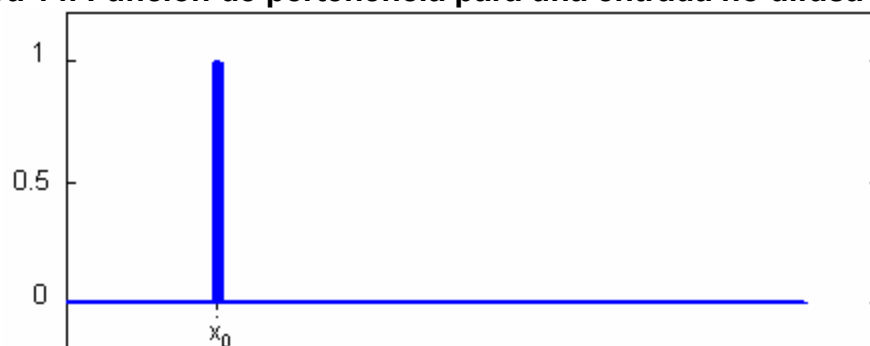
$$\forall k : R_m^{(k)} = \int_{X \times Y} \min(\mu_{A^{(k)}}(x), \mu_{B^{(k)}}(y)) / (x, y) \quad (2-40)$$

Ahora, dada una entrada no difusa x_0 , se le asigna una función de pertenencia, la cual queda definida como:

$$\forall x : \mu^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2-41)$$

Con la ecuación (2-41) lo único que se está haciendo es asignarle al valor de entrada una función de pertenencia que tomará el valor de uno únicamente cuando la entrada sea igual al valor x_0 . La figura 14 ilustra este concepto.

Figura 14. Función de pertenencia para una entrada no difusa



El significado de todo el conjunto de reglas se define por:

$$R_m = \bigcup_{k=1}^n R_m^{(x)} \quad (2-42)$$

Si se utiliza el operador max() para la unión, la ecuación (2-42) queda de la siguiente forma:

$$\mu_{R_m}(x, y) = \max_k \min(\mu_{A^{(k)}}(x), \mu_{B^{(k)}}(y)) \quad (2-43)$$

Disparar el conjunto de reglas equivale a tomar la composición (ec. (2-28)) entre los conjuntos definidos por las ecuaciones (2-41) y (2-42):

$$Y = \mu^* \circ R_m = \mu_Y(y) = \max_k (\min(\mu_{A^{(k)}}(x_0), \mu_{B^{(k)}}(y))) \quad (2-44)$$

Otra forma para encontrar el conjunto de salida es disparando individualmente cada regla (este método es más utilizado en el control difuso, ya que computacionalmente requiere menos tiempo por no existir la necesidad de efectuar operaciones como proyecciones o extensiones cilíndricas). Al disparar individualmente cada regla, se obtienen n conjuntos recortados $CS^{(1)}, \dots, CS^{(k)}$, uno por cada regla. Cada conjunto queda definido por:

$$\mu_{CS^{(k)}} = \min(\mu_{A^{(k)}}(x_0), \mu_{B^{(k)}}(y)) \quad (2-45)$$

Para encontrar el resultado final, se toma la unión de cada conjunto recortado con el operador max(), lo cual conduce nuevamente a la ecuación (2-44).

La inferencia puede realizarse por dos métodos:

- a. Inferencia basada en composición, en la cual primero se combinan todas las reglas para obtener una relación y luego se disparan mediante la composición con la función μ^* .
- b. Inferencia basada en reglas individuales, en la cual se dispara cada regla independientemente con la entrada no difusa x_0 para obtener n conjuntos recortados que posteriormente son combinados en un solo conjunto.

Estos dos métodos son equivalentes para el caso particular de la inferencia de Mamdani.

3. CONTROLADORES DIFUSOS

Cuando se puede aplicar un modelo matemático a algún proceso industrial se desea que este modelo sea lineal, ya que con un modelo lineal es muy fácil encontrar soluciones generales de forma cerrada para el proceso, sin embargo, para una gran variedad de procesos de control el único modelo que se pueda tener resulta ser no lineal o incluso pueda que esos modelos no se conozcan. Además, los datos de los que se disponga para realizar las actividades de control pueden tener muchas incertezas. Incluso puede ser que la única información acerca de un proceso provenga de la experiencia de operarios a cargo del mismo.

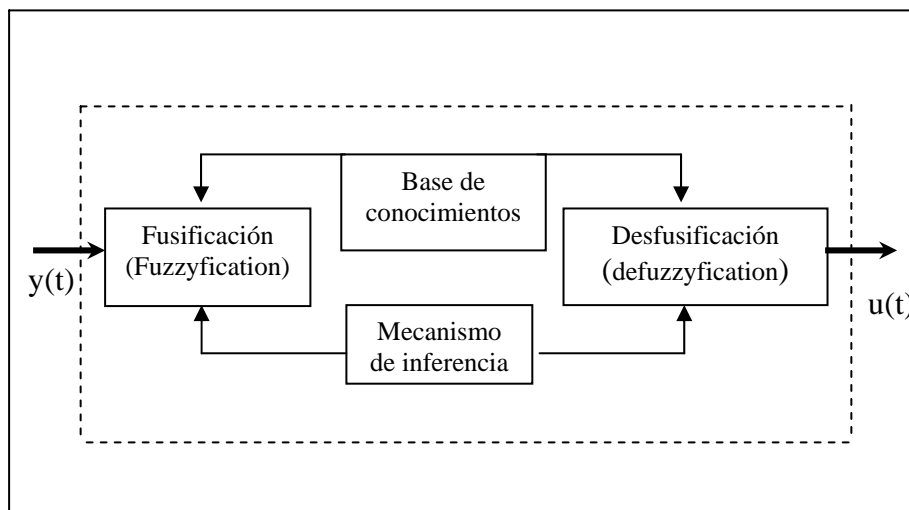
Es en estos casos cuando un esquema de control tradicional no es la mejor opción para la regulación del proceso y es en este tipo de situaciones cuando un controlador basado en lógica difusa ayuda a la correcta regulación del proceso.

Un controlador difuso también puede emplearse para mejorar un controlador tradicional, por ejemplo un PID, y volverlo adaptivo, de modo que se ajuste a las condiciones cambiantes del proceso (por ejemplo, ajustando las ganancias de los distintos componentes en un PID).

3.1 Estructura de un controlador difuso

En la figura 15 se presenta un diagrama de bloques de un controlador difuso básico y una descripción básica de sus partes constituyentes, las cuales serán explicadas en detalle a continuación.

Figura 15. Diagrama de bloques de un controlador difuso

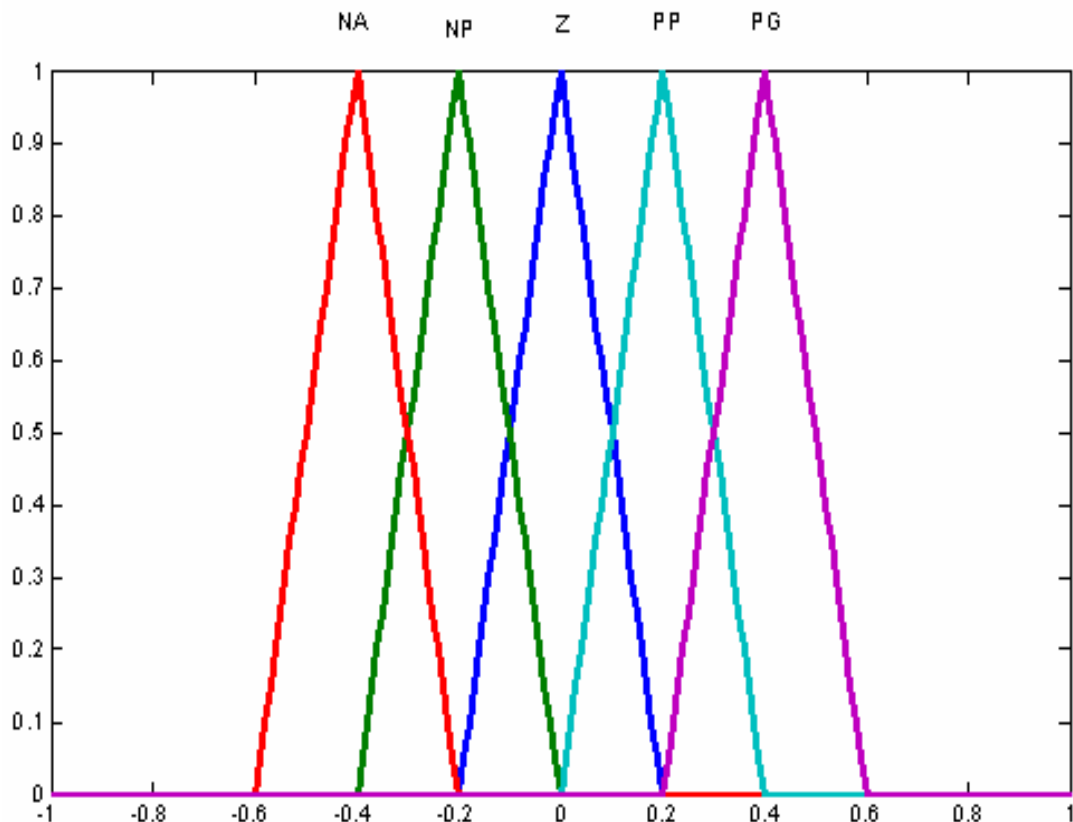


3.1.1 Interfase de fusificación (*fuzzyfication interface*)

Se encarga de convertir un valor físico de entrada correspondiente a alguna medición de las variables de estado del proceso en un conjunto difuso de modo que sea compatible con la información contenida en la base de reglas y el mecanismo de inferencia. El parámetro de diseño de la interfaz de fusificación es la elección de la estrategia de fusificación (de aquí en adelante, la palabra fusificación hará referencia al proceso indicado anteriormente). La estrategia de fusificación está determinada por el tipo de mecanismo de inferencia o el método de disparo de reglas.

Se vio que los dos tipos de disparo de reglas existentes son el disparo basado en composición y el disparo individual. Se explica a continuación únicamente la fusificación basada en el disparo individual de reglas. Esto consiste en asignar a cada valor de entrada (que son valores no difusos correspondientes a valores físicos medidos de las variables de entrada) una imagen en una función de pertenencia. Que función de pertenencia se utilice depende del intervalo en el cual este valor de entrada se encuentre. Por ejemplo, podrían definirse las funciones de pertenencia para los distintos valores lingüísticos de la variable lingüística error que se muestran en la figura (más adelante se utilizará tanto el error (e), la razón de cambio del error (Δe), el error acumulado (Σe), el valor actual de la salida (u) y el valor de la razón de cambio de la salida (Δu):

Figura 16. Funciones de pertenencia para error



En la figura 16 se ve que el rango de variación de la variable error es $[-1,1]$, esto podría corresponder a un rango simétrico y normalizado del error (por ejemplo, podría ser que el error máximo sea de ± 5 V en alguna aplicación particular, entonces el valor normalizado sería de -1 para -5 V y 1 para 5 V). Ahora, se supone que el valor de entrada medido corresponda a un valor de $e = 0.3$ en este dominio.

Se ve que este valor se encuentra tanto en la función de pertenencia correspondiente a positivo pequeño, PP (es decir, el error es positivo pero no muy grande) como en la función de pertenencia correspondiente a Positivo Grande, PG (aquí el error ya es lo suficientemente grande como para considerarse fuera de la categoría pequeño). El grado de pertenencia para este valor de entrada es $\mu_{PP}(0.3) = 0.5$ y $\mu_{PG}(0.3) = 0.5$.

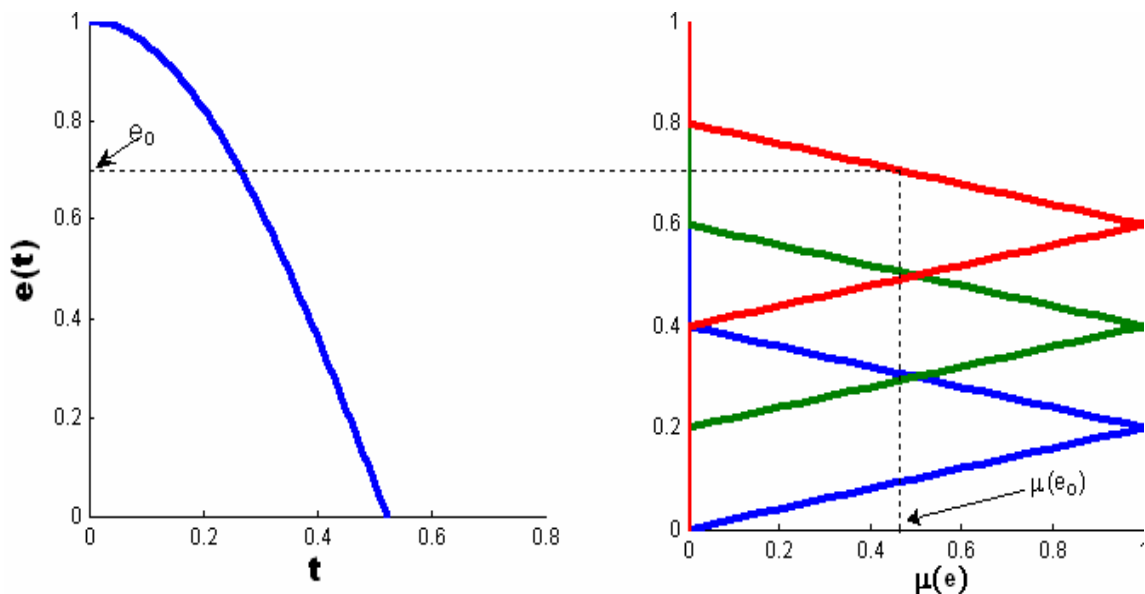
Cuando se obtienen estos valores en la función de pertenencia se dice que la entrada ha sido fusificada. ¿Cómo puede implementarse físicamente un bloque fusificador? Puede hacerse de forma análoga o digital, sin embargo, la forma análoga es un poco más complicada ya que involucra la utilización de elementos discretos análogos, como lo son diodos, amplificadores operacionales y comparadores. Una forma más fácil de hacerlo es utilizando algún tipo de microprocesador o microcontrolador.

Primero, la variable física de entrada es discretizada, por ejemplo, utilizando un convertidor análogo a digital de n bits. Si se supone que el rango de variación de la variable de entrada es de $-V$ a V . Se escoge el valor más pequeño a la salida del ADC como el valor asignado a $-V$ y el más grande se asigna a V (si se tienen 8 bits, $-V$ corresponde a 00h y V a FFh).

La base de conocimientos, que se describirá más adelante, contiene información acerca de las funciones de pertenencia, las cuales, para variables discretas, se encuentran en la forma de una tabla almacenada en algún bloque de memoria.

Este valor discreto obtenido a la entrada correspondiente a la variable física medida, sirve como una dirección en una posición de memoria, en la cual se encuentra información acerca de los valores de las funciones de pertenencia que se debe asignar a este valor particular de la variable de entrada medida. En la figura 17 se ilustra este concepto.

Figura 17. Proceso de fusificación



El valor digital correspondiente a e_0 es la dirección de memoria en la cual se va a buscar el valor correspondiente a su grado de pertenencia. En la figura anterior, el valor de e_0 interseca únicamente a una de las funciones de pertenencia, ¿qué pasa si este valor interseca a dos o más funciones de pertenencia?.

3.1.2 Base de conocimientos

Consiste de una base de datos y de una base de reglas. La base de datos provee la información necesaria para el funcionamiento correcto de la interfase de fusificación, la base de reglas y el módulo de defusificación (*defuzzyfication module*). Esta información incluye funciones de pertenencia para representar el significado de los valores lingüísticos asociados con las variables lingüísticas del proceso; dominios físicos y, de ser necesario, los dominios normalizados junto con los factores de normalización.

Si las variables de entrada y salida se discretizan, como sería de esperarse cuando se utilizan microprocesadores para realizar el control, la base de datos debe contener información acerca de esta cuantización, usualmente en la forma de una tabla. Los parámetros de diseño de la base de datos incluyen la elección de las funciones de pertenencia y la elección de los factores de escala.

La función principal de la base de reglas es la representación en forma estructurada del conocimiento de un operario de algún proceso o la experiencia de algún ingeniero de control en la forma de un conjunto de reglas de la forma:

Si $\langle \textit{estado del proceso} \rangle$ entonces $\langle \textit{salida de control} \rangle$

La parte Si $\langle \textit{estado del proceso} \rangle$ de esta regla es conocida como el antecedente y es una descripción de algún proceso en términos de alguna combinación lógica de proposiciones difusas primitivas. A la parte entonces $\langle \textit{salida de control} \rangle$ se le conoce como la consecuencia de la regla y es una descripción de la salida de control en términos de proposiciones lógicas difusas.

Estas proposiciones hacen referencia a los valores lingüísticos que las variables de control de salida toman cuando el estado actual del proceso concuerda (al menos hasta cierto grado) con la descripción del proceso en la parte del antecedente de la regla. Los parámetros de diseño involucrados en la construcción de una base de reglas son la elección del proceso y las variables de control de salida; la elección de los contenidos tanto en la parte del antecedente como de la consecuencia de la regla; elección de rangos para los valores lingüísticos y la derivación del conjunto de reglas.

3.1.2.1 Base de reglas

¿Cómo se elige una base de reglas? ¿Qué reglas son necesarias para lograr la correcta regulación del proceso a controlar? La respuesta a estas dos preguntas depende principalmente del proceso que se desee controlar y que tipo de controlador se utilice. La mayoría de controladores existentes en el mercado son del tipo PID y su gran utilización es debida en parte por su simplicidad y por el hecho de tomar en cuenta las variables más importantes de un proceso como lo son el error, la razón de cambio del error, el error acumulado, la salida actual y la razón de cambio en la salida. Si se supone que se ha elegido implementar un controlador de tipo PID, entonces, las variables del proceso que representarán el contenido del antecedente de la regla (la parte SI- de una regla) son:

- Error (e)
- Cambio en el error (Δe)
- Error acumulado (δe)

Las variables que representan la salida de control (entrada del proceso) representan la consecuencia de la regla (la parte entonces....) y son:

- Cambio en la salida de control (Δu)
- Salida de control (u)

En tiempo discreto y por analogía con un controlador convencional

$$\begin{aligned} e(kT) &= y_{SP} - y(kT) \\ \Delta e(kT) &= e(kT) - e(kT - T) \\ \Delta u(kT) &= u(kT) - u(kT - T) \end{aligned} \quad (3-1)$$

y_{SP} representa la salida deseada del proceso (*set-point*), y es la variable de salida del proceso, T es el tiempo de muestreo y k es un entero

Se desea construir un controlador de tipo difuso similar a un PID y ya se ha definido que las variables de control serán las mencionadas con anterioridad (error, cambio en el error, etc.). El modelo matemático que define el funcionamiento de un PID está dado por:

$$u(t) = K_p e + K_D \frac{de}{dt} + K_I \int e dt \quad (3-2)$$

La derivada es simplemente el cambio en el error y la integral es la suma de los errores, entonces, la expresión simbólica (una regla de la forma si-entonces) que describe el PID difuso es:

si e es $\langle \text{valor linguistico} \rangle$ Y Δe es $\langle \text{valor linguistico} \rangle$ Y δe es $\langle \text{valor linguistico} \rangle$ entonces u es $\langle \text{valor linguistico} \rangle$

No necesariamente tiene porque ser utilizado el operador Y sin embargo, la elección de otro operador depende de la experiencia de quien especifique el conjunto de reglas, además, cualquier norma-T (o norma-S) puede ser utilizada.

En algunos casos, cuando existe conocimiento acerca de la estructura del proceso, no se necesita restringirse a estas variables y pueden utilizarse las variables actuales del proceso. Para el caso de entradas múltiples y salida única (MISO, *Múltiple Input- Single Output*) la expresión simbólica de una regla es:

$$\text{si } x_1 \text{ es } \langle \text{valor lingüístico} \rangle \mathbf{Y} \dots \mathbf{Y} x_n \text{ es } \langle \text{valor lingüístico} \rangle \text{ entonces } u \text{ es} \\ \langle \text{valor lingüístico} \rangle$$

Reglas de este tipo se derivan cuando se conoce un modelo difuso del proceso (4-114).

¿Qué representa la parte $\langle \text{valor lingüístico} \rangle$ que se encuentra tanto en la parte del antecedente como en la consecuencia de la regla? Según se vio en el capítulo 2, las variables lingüísticas se encuentran caracterizadas por un conjunto de valores lingüísticos y la parte $\langle \text{valor lingüístico} \rangle$ hace referencia a uno de estos valores lingüísticos particulares. Estos valores lingüísticos son descritos en la forma $\langle \text{signo, magnitud} \rangle$ por ejemplo, $\langle \text{negativo pequeño} \rangle$. Para el caso de un PID, se tienen las siguientes consideraciones (se toma el PID como ejemplo ya que más adelante se estudiará el desempeño de un PID difuso y para evitar la redundancia, estos conceptos sirven tanto como un ejemplo sin pérdida de generalidad y como ejemplo aplicativo).

Los valores lingüísticos de e (error) con un signo negativo significan que la salida actual del proceso tiene un valor por arriba del punto de ajuste (*set-point*) según se puede apreciar en la primera de las ecuaciones (3-1). La magnitud del error es la magnitud de $y_{sp} - y(kT)$. De forma similar, si $e > 0$ significa que la salida actual está por debajo del punto de ajuste.

Para el cambio en el error, $\Delta e(kT) = e(kT) - e(kT - T)$. $\Delta e < 0$ significa que la salida actual del proceso ha incrementado su valor con respecto al valor que tenía en el tiempo anterior de muestreo. La magnitud de Δe es la magnitud de la diferencia $y(kT) - y(kT - T)$ y si decrece su valor, el cambio en el error es positivo.

Un valor de cero para el error significa que la salida del proceso actual es el deseado, es decir, es igual al punto de ajuste. Si el cambio en el error es cero, esto significa que la salida actual no ha incrementado ni decrecido su valor con respecto a la salida anterior.

Para el cambio en la salida de control, Δu , un valor positivo significa que el valor de la salida de control en el tiempo $kT - T$ debe ser aumentado para obtener el valor de la salida de control para el tiempo actual, kT .

Se ha visto que estas variables pueden ser positivas negativas y cero pero, ¿Qué pasa con su “tamaño”? Pueden asignarse muchas variables lingüísticas para el tamaño de la variable (grande, muy grande, pequeño, muy pequeño, medio, etc.) y su elección depende de la experiencia particular de la persona que las asigne o del modelo matemático que mejor se ajuste (si es que existe alguno).

Ahora, si el conjunto de valores lingüísticos para las variables lingüísticas error, cambio en el error y cambio en la salida (e , Δe y Δu respectivamente) se escogen iguales y sus elementos son {NG, NM, NP, ZE, PP, PM, PG} en donde NG es Negativo Grande, PM es Positivo Grande y así sucesivamente. Se tomará un controlador de tipo PI por simplicidad, ya que sólo posee dos entradas. La ecuación que lo describe es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt \quad (3-3)$$

si se toma la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, se obtiene una expresión equivalente y se elimina el término integral:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_p \frac{de(t)}{dt} + K_i e(t) \quad (3-4)$$

las reglas que simbolizan esta relación son de la forma:

si e es $\langle \text{valor lingüístico} \rangle$ Y Δe es $\langle \text{valor lingüístico} \rangle$ entonces Δu es $\langle \text{valor lingüístico} \rangle$

Dados los valores lingüísticos para el error, cambio en el error y cambio en la salida, se presentará en forma de tabla el conjunto de las reglas que definen el funcionamiento de este controlador, en la tabla XI se resumen todas las posibles combinaciones de valores lingüísticos en las reglas.

Tabla XI. Base de Reglas

de e	NG	NM	NP	ZE	PP	PM	PG
NG	NG	NG	NG	NG	NM	NP	ZE
NM	NG	NG	NG	NM	NP	ZE	PP
NP	NG	NG	NM	NP	ZE	PP	PM
ZE	NG	NM	NP	ZE	PP	PM	PG
PP	NM	NP	ZE	PP	PM	PG	PG
PM	NP	ZE	PP	PM	PG	PG	PG
PG	ZE	PP	PM	PG	PG	PG	PG

La celda en la intersección de la primera fila con la primera columna representa la regla:

si $e(kT)$ es negativo grande y Δe es negativo grande entonces Δu es
negativo grande

Cada celda en la tabla anterior representa la acción que tomará el controlador (la razón de cambio de la entrada de control). Mientras más reglas se tengan es decir, mientras más valores lingüísticos tenga cada variable lingüística, se obtendrá una mayor resolución en el control y la elección intuitiva sería elegir más valores lingüísticos alrededor del punto de operación (celda 4,4 en la tabla).

Si se vuelve a la pregunta inicial, ¿Cómo se escoge un conjunto de reglas?, existen tres aproximaciones para la elección de un conjunto de reglas (4-114) y las tres son complementarias. Un conjunto de reglas eficiente debería derivarse de una combinación de las tres aproximaciones.

Criterio 1: es el más utilizado y se basa en derivar las reglas con base en la experiencia de un operario o ingeniero de control que se encuentra altamente familiarizado con el proceso. Puede interrogarse a un operario o ingeniero de control mediante un cuestionario cuidadosamente organizado. Con esto se consigue una versión preliminar de la base de reglas para una aplicación particular. Posteriormente se procede al ajuste de las reglas o de las funciones de pertenencia de ser necesario.

Criterio 2: utiliza una descripción lingüística como un modelo difuso del proceso que se desea controlar es equivalente a plantear “ecuaciones difusas de estado”. Este criterio no es muy utilizado.

Criterio 3: se basa en la existencia de un modelo convencional del proceso, usualmente un modelo no lineal.

3.1.2.2 Base de datos

La base de datos posee información acerca de las funciones de pertenencia y sus rangos de aplicación. Sin embargo, surge la pregunta ¿cómo se eligen las funciones de pertenencia o bajo qué criterios son elegidas las funciones de pertenencia y cuáles son las ventajas de unas sobre otras?

Para la descripción cuantitativa del desempeño del sistema en lazo cerrado se necesita una interpretación cuantitativa del significado de los valores lingüísticos. Esta cuantización de los valores lingüísticos se obtiene mediante las funciones de pertenencia.

Para lograr un uso eficiente de la memoria disponible y para los análisis de desempeño se necesita una representación uniforme de las funciones de pertenencia. Esta representación uniforme se puede lograr mediante el uso de funciones de pertenencia con formas uniformes y definiciones funcionales de tipo paramétrico.

Las formas más comunes para funciones de pertenencia incluyen funciones triangulares, trapezoidales y acampanadas. Si las funciones de pertenencia son implementadas por software en alguna computadora, se puede lograr una mayor flexibilidad y diversidad para estas funciones de pertenencia, ya que es el ordenador el encargado de evaluarlas mediante definiciones matemáticas. Los tres tipos de funciones mencionados con anterioridad poseen una forma funcional particularmente simple, pueden ser archivadas con un mínimo de memoria y pueden ser manipuladas eficientemente en términos de los requerimientos de tiempo real por el mecanismo de inferencia. En el control difuso se tiene especial preferencia por las funciones de pertenencia triangulares ya que son las más sencillas y económicas.

Una vez escogida la forma de las funciones de pertenencia se debe mapear cada elemento del conjunto de términos (el conjunto cuyos elementos son los valores lingüísticos de la variable lingüística) en el dominio de la correspondiente variable lingüística. Existen varias características que deben tomarse en cuenta cuando se escoge una función de pertenencia, entre ellas están el ancho, el valor pico (que es el punto para el cual la función de pertenencia es igual a 1) y los puntos de cruce.

Sean $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ dos funciones de pertenencia que representan el significado de dos valores lingüísticos distintos de X . Un punto de cruce entre $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ es el valor x_0 en X que cumple con la condición $\mu_A(x_0) = \mu_B(x_0) > 0$. El nivel de punto de cruce se define como el grado de pertenencia que se asocia con el valor x_0 , o sea $\mu_A(x_0)$. Puede darse el caso para el cual dos valores lingüísticos distintos tengan más de un punto de cruce. El número de puntos de cruce entre dos funciones de pertenencia se conoce como la razón de puntos de cruce.

Cuando se mapea un conjunto de términos en funciones de pertenencia es necesario que el nivel de puntos de cruce para cada dos funciones de pertenencia sea mayor que cero. Esto con la finalidad de asegurar que cada valor de entrada no difuso pertenece por lo menos a una función de pertenencia con grado de pertenencia mayor a cero. Si esto no se cumple, existirán valores no difusos a la entrada que no podrán ser asociados con ningún antecedente en las reglas teniendo como consecuencia reglas que no serán disparadas y por lo tanto no se producirá una acción correctiva de control. Si la razón de cruce de puntos entre dos funciones de pertenencia es cero, solamente una regla a la vez se disparará.

Los efectos de la simetría y el ancho se verán más adelante, cuando se estudien los distintos métodos de desfusificación. La simetría sirve para evitar ambigüedades a la hora de aplicarle un método particular de desfusificación. El ancho y la ubicación de los puntos pico de las funciones de pertenencia afectan la suavidad con la cual la salida cambia cuando la entrada cambia.

3.1.3 Mecanismo de inferencia

El mecanismo de inferencia es el encargado de disparar las reglas, es decir, obtener una salida difusa a partir de una entrada difusa. Existen dos tipos:

- a. Inferencia basada en composición: en este caso, las relaciones difusas que representan el significado de cada regla individual son agregadas a la relación difusa que describe el significado del conjunto de reglas. Esta operación se realiza mediante la composición entre la entrada fusificada y la relación que describe el significado del conjunto de reglas. El resultado de la composición es el conjunto difuso que describe el valor de la salida de control.
- b. Inferencia basada en el disparo individual: en este caso, cada regla se dispara individualmente. El disparo puede interpretarse como el cómputo del grado de pertenencia que se asigna a la entrada no difusa en la función de pertenencia que describe el antecedente de la regla y enganchar el conjunto difuso que describe el significado de la consecuencia de la regla con el grado al cual el antecedente de la regla ha sido asociado por la entrada no difusa. Finalmente, los valores enganchados (o recortados) para la salida de control son agregados para formar la salida final.

El segundo tipo es el que se utiliza con mayor frecuencia ya que es computacionalmente más sencillo y eficiente en el uso de memoria. Si se deseara implementar el primer tipo, debería de encontrarse el conjunto difuso de entrada (conjunto difuso, no un grado de pertenencia) luego el conjunto que representa la relación del significado del conjunto de reglas (mediante extensiones cilíndricas y proyecciones) y finalmente la salida mediante la composición de los dos conjuntos. Esto representa un gasto en el tiempo de procesamiento así como uso excesivo de memoria.

Se ha visto que estos dos tipos son equivalentes para el caso particular de la inferencia de Mamdani, además, los términos importantes asociados con la inferencia ya fueron mencionados (representación de reglas individuales, conjuntos de reglas, valores de entrada, etc.).

3.1.4 Procedimiento de defusificación

¿Qué es defusificación? Es el método por el cual una entrada difusa se convierte en una salida no difusa, es decir, un valor físico que ha sido procesado y puede ahora pasar a las siguientes etapas de control. Existen muchos métodos de defusificación, sin embargo, en la literatura referente a control difuso son seis los principales métodos, los cuales se describirán a continuación.

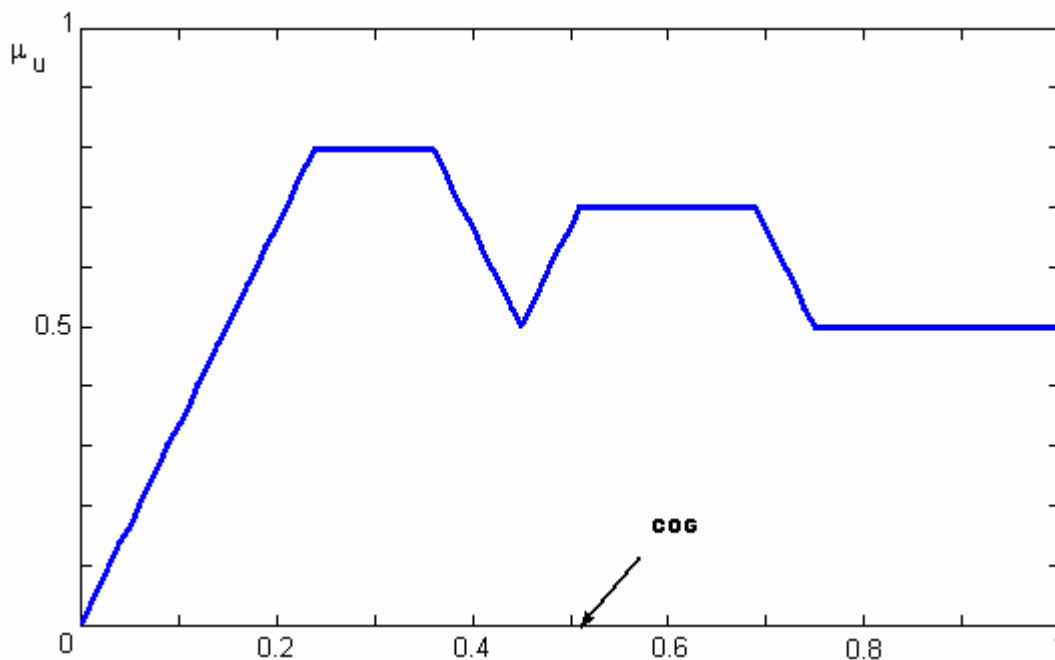
3.1.4.1 Centro de área o centro de gravedad

Es el método más conocido de defusificación. Este método encuentra el centro del área del conjunto difuso que resulta de combinar todos los conjuntos difusos obtenidos en el disparo individual de reglas. Este método toma el área del conjunto resultante como un todo, es decir, que si dos conjuntos individuales se traslapan entre sí, este hecho no se toma en cuenta.

$$u_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^l u_i \mu_U(u_i)}{\sum_{i=1}^l \mu_U(u_i)} \quad (3-5)$$

En esta fórmula, u_{COG} representa la coordenada del centro de gravedad, u_i son los distintos valores que puede tomar u (es decir, la salida de control) y μ_u representa el conjunto difuso obtenido al aplicar el procedimiento de inferencia. A pesar de que este es método comúnmente utilizado, es computacionalmente complejo y resulta en ciclos de inferencia relativamente lentos.

Figura 18. Centro de gravedad

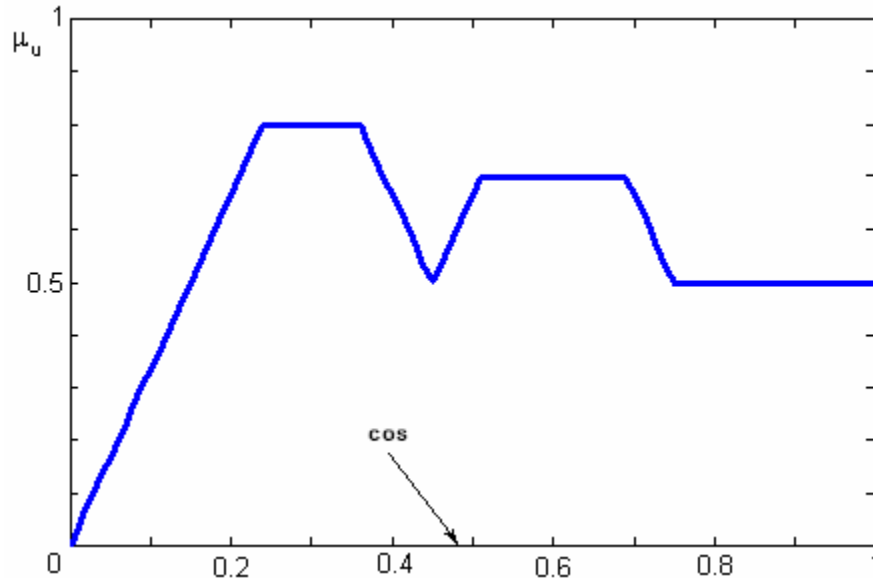


3.1.4.2 Centro de sumas

Es un método de defusificación similar pero más rápido. La idea es evitar el cálculo del conjunto total de salida. Se considera la contribución individual de del área de cada conjunto de salida formado al disparar cada una de las reglas.

$$u_{COS} = \frac{\sum_{i=1}^l u_i \sum_{k=1}^n \mu_{CLU}^{(k)}(u_i)}{\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n \mu_{CLU}^{(k)}(u_i)} \quad (3-6)$$

Figura 19. Centro de sumas



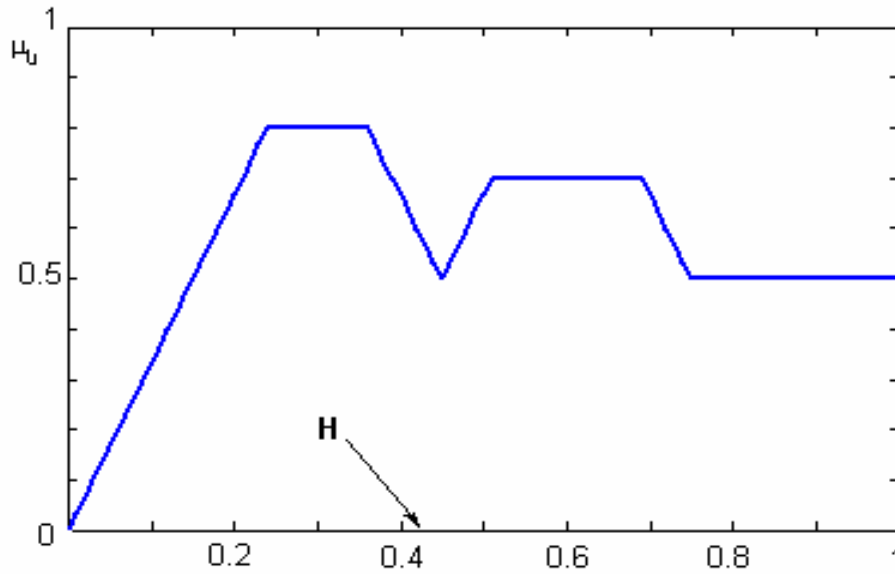
3.1.4.3 Altura

Este método utiliza los conjuntos individuales escalados o recortados en lugar de utilizar todo el conjunto resultante. Toma el valor pico de cada conjunto enganchado y construye una suma pesada entre cada uno de estos valores pico siendo el factor de peso la altura del k-ésimo conjunto. Es un método bastante sencillo y muy rápido.

Sea $c^{(k)}$ el valor de u en donde se encuentra el valor pico del conjunto no recortado $U^{(k)}$ y sea $f^{(k)}$ la altura del conjunto recortado $CU^{(k)}$ (véase figura 20). Entonces, el método de defusificación por la altura para un sistema de m reglas está dado por:

$$u_H = \frac{\sum_{k=1}^m c^{(k)} \cdot f^{(k)}}{\sum_{k=1}^m f^{(k)}} \quad (3-7)$$

Figura 20. Desfusión por altura



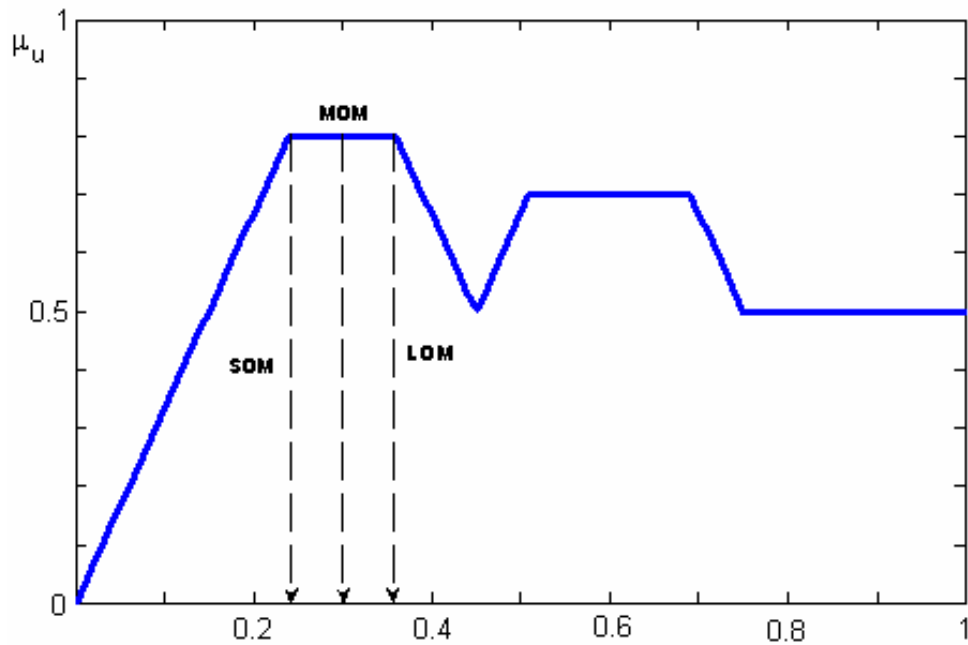
3.1.4.4 Centro del área mayor

Este método se usa cuando el conjunto de salida resultante no es convexo (véase figura 10). Este método encuentra el conjunto difuso convexo que posea el área más grande y define la salida no difusa como el centro de área de este conjunto en particular. Es particularmente complejo ya que involucra varias operaciones como lo son encontrar los conjuntos convexos, encontrar sus áreas, el centro de área, etc.

3.1.4.5 Más largo, promedio y más pequeño del máximo

Utilizan el valor máximo del conjunto total resultante. Más largo del máximo (LOM) utiliza el valor máximo, el más pequeño (SOM) utiliza el valor mínimo y el promedio (MOM) utiliza el valor medio entre SOM y LOM. Si el conjunto resultante posee un solo valor máximo, entonces los tres valores son iguales pero si posee un intervalo de valores máximos estos valores son distintos.

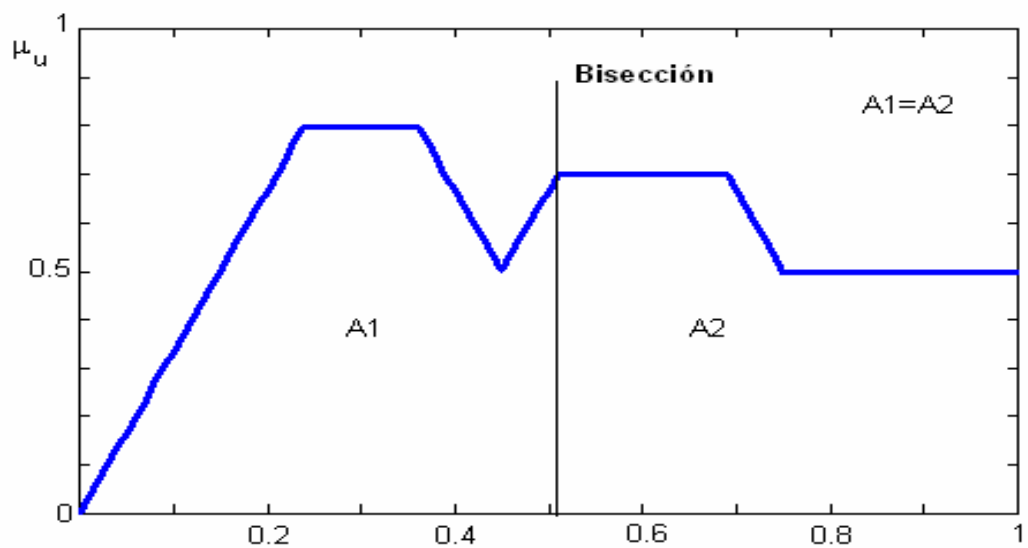
Figura 21. LOM, MOM y SOM



3.1.4.6 Bisección

Consiste en encontrar el punto para el cual, si se traza una línea vertical, el conjunto resultante queda dividido en dos regiones cuyas áreas son iguales.

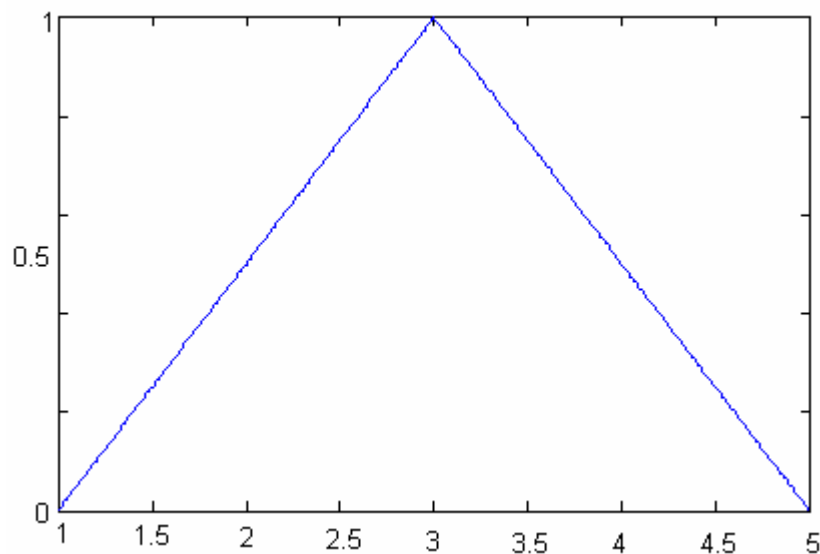
Figura 22. Bisección



¿Qué significan todos estos métodos de defusificación? Defusificar significa volver un conjunto difuso un valor no difuso. Por ejemplo, si se tiene una función de pertenencia triangular y se desea defusificar, la elección obvia sería elegir el valor del dominio para el cual se obtiene el máximo valor de pertenencia. Ahora, si la función de pertenencia es trapezoidal existe un rango de valores para los cuales la función de pertenencia posee el máximo valor. ¿Cuál de ellos se escoge? Puede elegirse cualquiera de ellos. Los distintos métodos mencionados con anterioridad tratan de hacer esto, encontrar cuál es el valor del dominio del conjunto difuso resultante después de todo el proceso de inferencia que mejor se acople. No se elige el valor más alto del conjunto resultante ya que entonces no se están tomando en cuenta las contribuciones de todas las reglas individuales.

Ahora si se considera lo siguiente: ¿Qué es un número difuso? Un número difuso es una función de pertenencia. Por ejemplo, al fusificarse el número entero 3. La representación difusa de este número se ve en la figura 22

Figura 23. Numero difuso 3



Ahora, al defusificar este número, cualquiera de los métodos mencionados con anterioridad darán como resultado el número entero 3. ¿Se ve ahora el concepto de un procedimiento de defusificación?

3.1.5 Implementación física

¿Cómo pueden implementarse todas estas funciones físicamente? Se propone un esquema análogo a continuación.

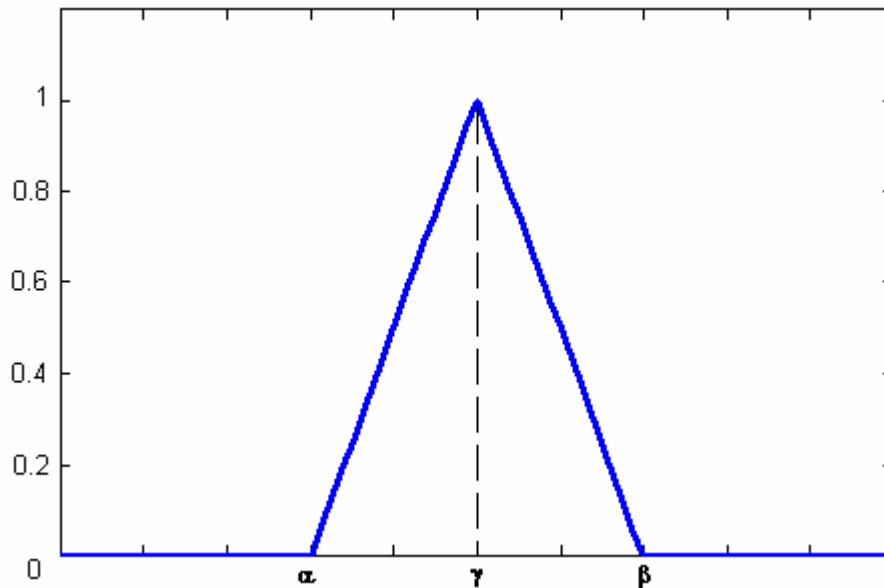
Para el bloque de fusificación, lo que se necesita es un circuito que implemente una función de pertenencia. Por simplicidad se utilizará una función de pertenencia triangular, definida por:

$$\mu(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e < \alpha \\ m_1 e + b_1 & \text{si } \alpha \leq e \leq \gamma \\ m_2 e + b_2 & \text{si } \gamma < e \leq \beta \\ 0 & \text{si } e > \beta \end{cases} \quad (3-8)$$

en donde α , β y γ son los parámetros que definen la función de pertenencia y m_1 , m_2 , b_1 , b_2 son los parámetros que definen a las rectas que conforman la función de pertenencia (en última instancia estos parámetros son función de α , β y γ).

En la figura 24 se ven estos parámetros y como afectan la forma de la gráfica. Ahora, la ecuación (3-8) representa el error y su rango de variación es de 0 a V_e . Además, la función de pertenencia toma valores entre 0 y V_m es decir, un valor igual a V_m en la función de pertenencia representa el máximo grado de pertenencia (o sea, 1).

Figura 24. Función de pertenencia triangular

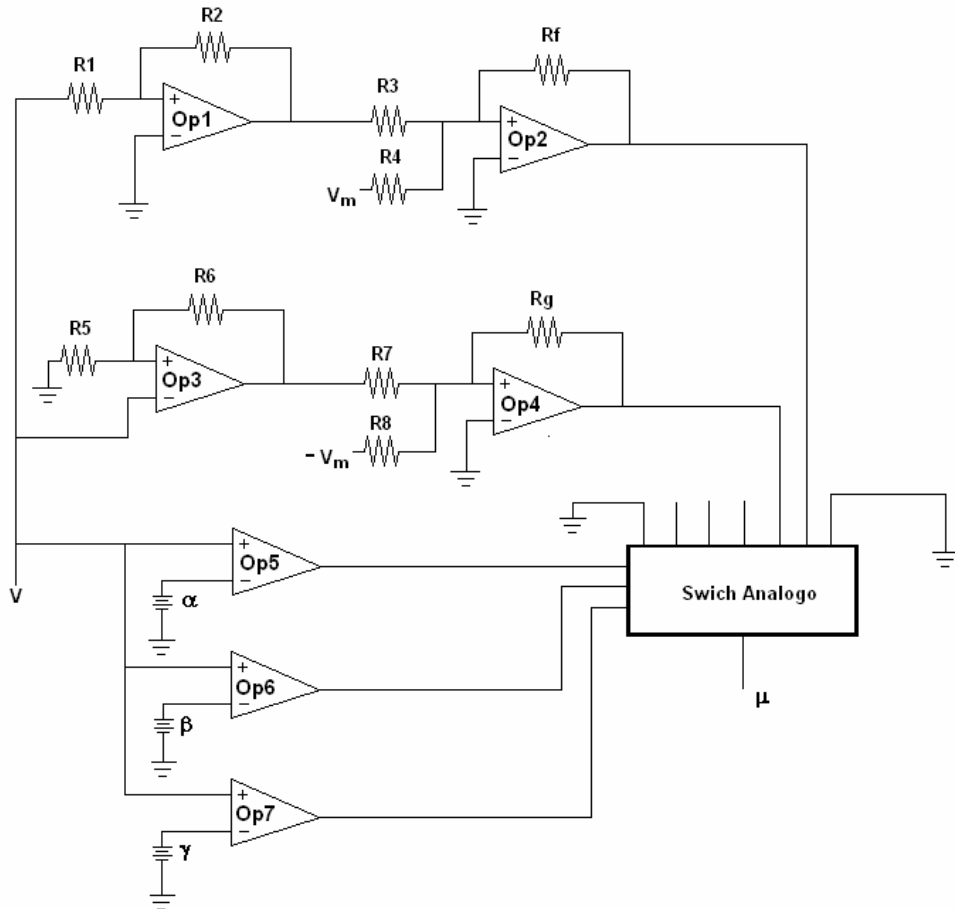


La función de pertenencia puede describirse en términos de los parámetros de estos voltajes. Sea V el voltaje de entrada que simboliza al error, entonces:

$$\mu(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } V < \alpha \\ \frac{V_m}{\gamma - \alpha} V - \frac{\alpha}{\gamma - \alpha} V_m & \text{si } \alpha \leq e \leq \gamma \\ \frac{-V_m}{\beta - \gamma} V - \frac{\beta}{\beta - \gamma} V_m & \text{si } \gamma < e \leq \beta \\ 0 & \text{si } e > \beta \end{cases} \quad (3-9)$$

Un circuito que implemente esta función puede construirse a partir de amplificadores operacionales como se muestra en la figura 25:

Figura 25. Circuito para la implementación de una función de pertenencia



La parte compuesta por los amplificadores operacionales Op1 y Op2 proporcional la primera de las rectas y la parte conformada por los operacionales Op3 y Op4 dan la segunda recta. El circuito conformado por los operacionales Op5, Op6 y Op7 son comparadores que se saturan (es decir su salida es un 1 lógico) cuando el umbral es sobrepasado. Los umbrales son los valores de α , β , γ .

Deben cumplirse además las siguientes condiciones:

$$\frac{R_f \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{V_m}{\gamma - \alpha} \qquad \frac{R_f}{R_4} = \frac{\alpha}{\gamma - \alpha} \qquad (3-10)$$

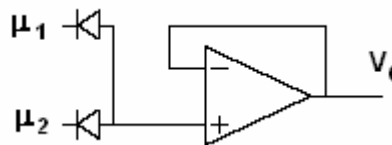
$$\frac{R_g}{R_7} \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) = \frac{V_m}{\beta - \gamma} \qquad \frac{R_f}{R_4} = \frac{\beta}{\beta - \gamma} \qquad (3-12)$$

Los comparadores funcionan como entradas de control para el interruptor análogo y dependiendo del valor de la entrada, alguna pasará a la salida.

Un circuito como este deberá implementarse por cada función de pertenencia de las variables de entrada.

El siguiente paso es encontrar el resultado lógico de la parte del antecedente de la regla. Esto se logra con un circuito que efectúe la operación AND, o sea la operación $\min()$. El circuito es el siguiente:

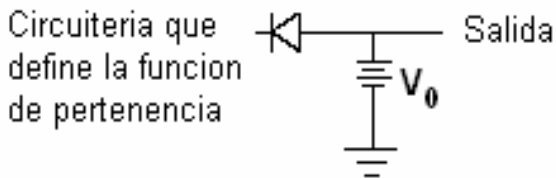
Figura 26. Operador $\min()$



En este circuito, el diodo que conduce es el que posea el voltaje más negativo o sea, el voltaje mínimo.

El disparo de cada regla se logra mediante un circuito similar al de la figura 24 pero se le agrega un diodo a la salida para producir el efecto de recorte.

Figura 27. Circuito para el disparo de reglas



4. APLICACIONES DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE CONTROLADORES DIFUSOS

4.1 Controlador PID

El controlador PID es el controlador más utilizado en la industria ya que es un dispositivo lineal muy simple y puede manejar muchas plantas.

Los miembros de la familia de controladores PID incluyen tres acciones: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D). Estos controladores son los denominados P, I, PI, PD y PID. A continuación se da una breve explicación de la acción de cada uno de estos términos y de su funcionamiento. Se empieza dando una descripción del PID convencional (en tiempo continuo) luego se trata un PID digital y finalmente un PID difuso que puede ser tanto digital como continuo.

4.1.1 PID convencional

Control proporcional (P) Da una salida que es proporcional al error, es decir $u(t) = K_p \cdot e(t)$. Su función de transferencia es:

$$C_p(s) = K_p \quad (4-1)$$

donde K_p es una ganancia proporcional ajustable. Un controlador proporcional puede controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente.

La velocidad a la cual la salida puede responder a la señal de error depende de la ganancia del controlador. Por lo tanto, aumentando dicha ganancia, el tiempo de subida del sistema puede decrecer, permitiendo que la salida siga a la entrada más rápidamente. Sin embargo, esto agrega el problema de provocar un aumento del sobrepaso.

Se pueden obtener oscilaciones en la salida que harían inestable al sistema. Además, una ganancia constante amplifica el ruido a alta frecuencia, causando una disminución del ancho de banda del sistema de control.

Control integral (I): proporciona una salida que es proporcional al error acumulado.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad C_i(s) = \frac{K_i}{s} \quad (4-2)$$

Para eliminar el error de estado estacionario, se agrega un término integral. Este término le da la habilidad al controlador PID de recordar el pasado (i.e. proporcional al error acumulado).

El integrador adiciona un polo en la función de lazo cerrado, con lo cual la estabilidad del sistema decae.

Control derivativo (D): proporciona una salida proporcional a la derivada de su entrada, esto es:

$$u(t) = K_d \frac{de}{dt} \quad U(s) = sK_d \quad (4-3)$$

Una forma de reducir el tiempo de subida sin aumentar el porcentaje de sobrepaso es agregar un término derivativo al controlador P, dado que la derivada de la señal de error provee información acerca de cómo el error va cambiando con respecto al tiempo. De este modo, el controlador puede estimar valores futuros de la señal de error y compensar adecuadamente.

Control proporcional-derivativa (PD): se define mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4-4)$$

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un valor más grande en la ganancia K, lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable. Tiene la desventaja de amplificar las señales de ruido de alta frecuencia.

La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que sólo es eficaz durante períodos transitorios. Además, no es de gran utilidad cuando la señal de entrada presenta discontinuidades

Control Proporcional-Integral-Derivativo (PID): esta acción combinada reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4-5)$$

En los sistemas de control básicos, si la entrada de referencia es un escalón, debido a la presencia del término derivativo en la acción de control, la variable manipulada $u(t)$ contendrá una función impulso (una delta). En un controlador PID real, en lugar del término derivativo se emplea una versión modificada cuya función de transferencia es:

$$\frac{\tau_d s}{\tau_D s + 1} \quad (4-6)$$

donde τ_D , denominada constante de tiempo derivativa, normalmente es elegida tal que $0.1 \leq \tau_D \leq 0.2$. Cuanto más pequeña es τ_D , mejor es la aproximación entre el término derivativo filtrado de la ecuación (4-6) y el derivativo (esta es la aproximación que utiliza MATLAB en las simulaciones para aproximar un elemento derivador).

Si se puede deducir un modelo matemático de la planta, es posible aplicar varias técnicas para determinar los parámetros del controlador que cumplan con las especificaciones transitorias y de estado estacionario del sistema de lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es tan complicada que no se pueda obtener fácilmente su modelo matemático, no resulta posible el modelo analítico de diseño del controlador PID. Entonces hay que recurrir a procedimientos experimentales para el diseño de este tipo de controlador.

Figura 28. Respuesta al impulso

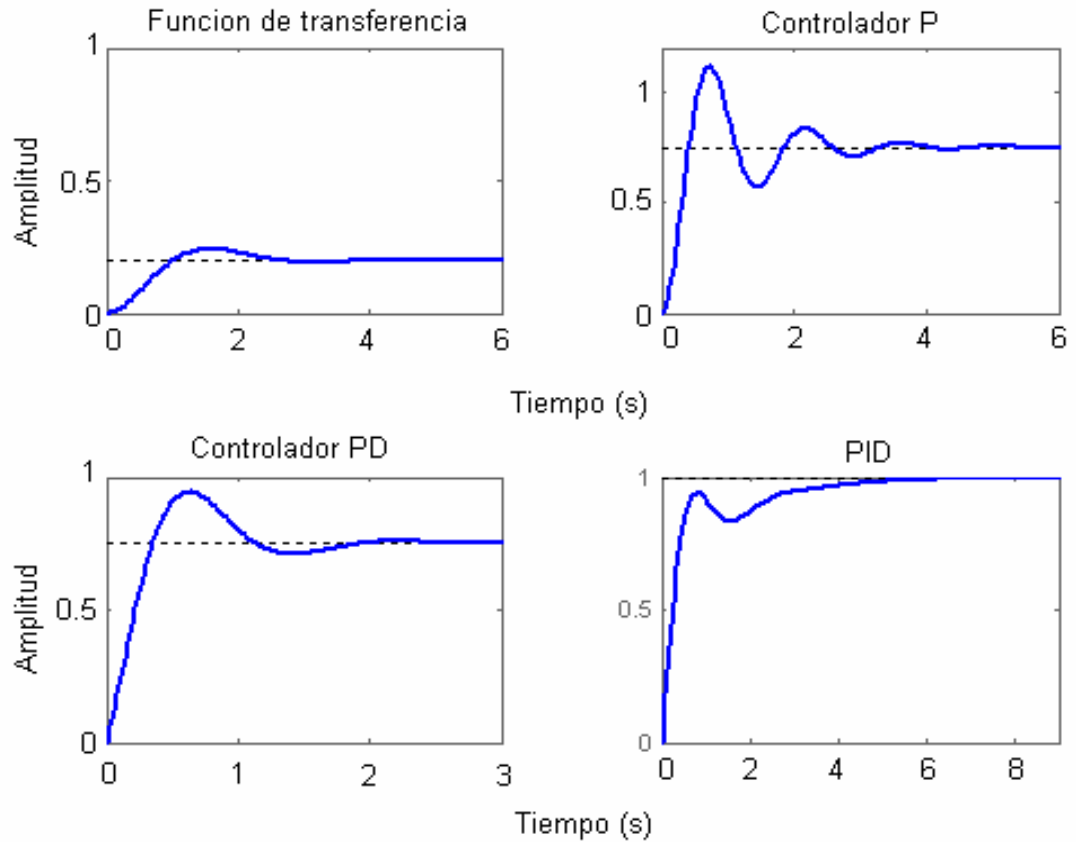
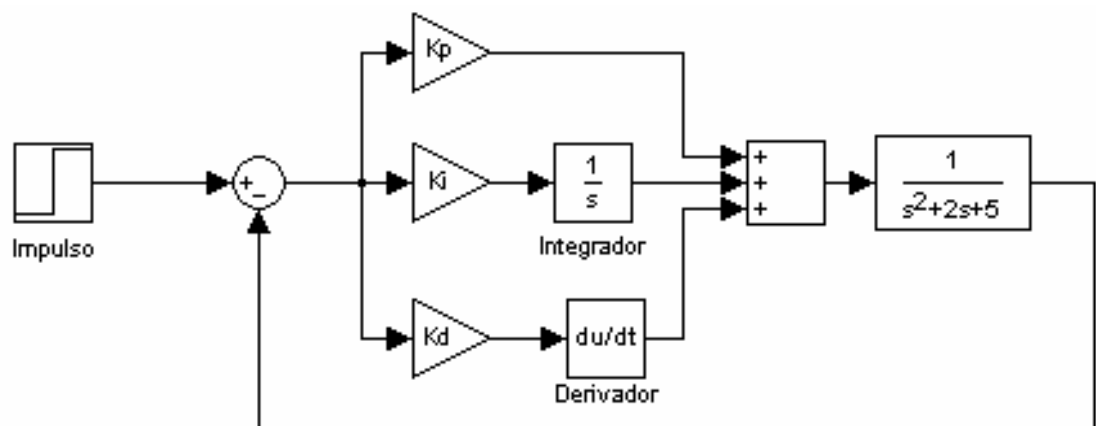


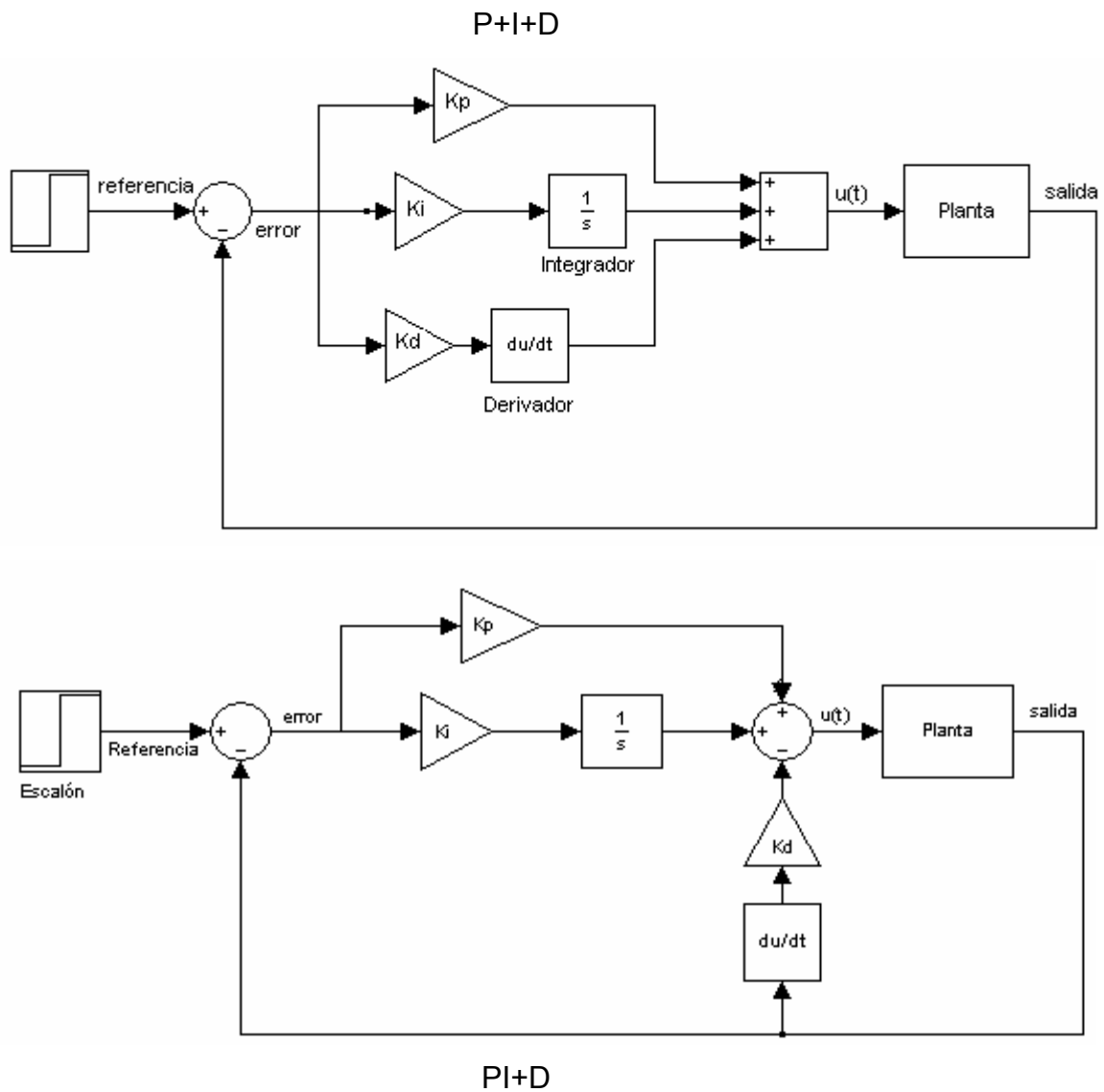
Figura 29. Diagrama de bloques de un controlador PID



4.1.2 PID digital

Antes de derivar un controlador de tipo PID se debe determinar la configuración que se va a usar. Las configuraciones más usadas son las mostradas en la figura 30.

Figura 30. Configuraciones de PID's



Estas dos configuraciones son unas de las más utilizadas (podría mencionarse también un controlador PI+PD, en el cual los bloques PI y PD se suman en paralelo).

Para la derivación del equivalente digital del controlador PID se utilizará el esquema PI+D. Se verá que el desarrollo de los demás controladores es similar y consiste en obtener una expresión discreta de las ecuaciones que gobiernan el controlador.

La ecuación que describe el funcionamiento de un controlador PI es la siguiente:

$$u_{PI}(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4-7)$$

$$U_{PI}(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) E(s) \quad (4-8)$$

donde K_{PP} y K_{IP} son las ganancias proporcional e integral respectivamente y $E(s)$ es la señal de error. La versión discreta de estas ecuaciones puede lograrse de dos formas, la primera, consiste en derivar la ecuación (4-7) y convertir la ecuación diferencial resultante en una ecuación en diferencias y mediante transformaciones algebraicas obtener la salida resultante. La segunda forma consiste en tomar la ecuación (4-8) y discretizarla mediante el uso de la transformada Z y la transformación bilineal $s = \frac{(2/T)(z-1)}{(z+1)}$. Aquí se utilizará la primera forma ya que explica mejor el concepto físico involucrado.

Al tomar la derivada de ambos lados de la ecuación (4-7) se obtiene:

$$\frac{du_{PI}(t)}{dt} = K_P \frac{de(t)}{dt} + K_I e(t) \quad (4-9)$$

Ahora, $\frac{du_{PI}(t)}{dt} \approx \frac{\Delta u_{PI}(kT)}{\Delta T}$, en donde k es un número entero, T es el tiempo de muestreo y ΔT es el intervalo entre el actual tiempo de muestreo y el anterior, o sea, $\Delta T=T$. Por lo tanto, la ecuación (4-9) se transforma en:

$$\frac{\Delta u_{PI}(kT)}{T} = K_P \frac{\Delta e(kT)}{T} + K_I e(kT) \quad (4-10)$$

Se definen las siguientes cantidades:

$$\frac{\Delta u_{PI}(kT)}{T} = \frac{u_{PI}(kT) - u_{PI}(kT - T)}{T} \quad (4-11)$$

$$e_V(kT) = \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} = \frac{\Delta e(kT)}{T} \quad (4-12)$$

$$e_p(kT) = e(kT) \quad (4-13)$$

La ecuación (4-11) representa la salida incremental del controlador PI, la ecuación (4-12) la razón de cambio de la señal de error y la (4-13) la señal de error. Finalmente, la ecuación que gobernará la acción del controlador es:

$$u_{PI}(kT) = u_{PI}(kT - T) + K_{UPI} \Delta u_{PI}(kT) \quad (4-14)$$

La constante K_{UPI} se define como una ganancia difusa y se utilizará más adelante cuando se utilicen los principios de la lógica difusa para operar el controlador. Este término junto con la salida incremental del controlador PI produce una acción no lineal de control.

Para el control derivativo se utilizará la misma mecánica, transformar la ecuación diferencial que gobierna el desempeño del controlador derivativo (que en este caso responde a la razón de cambio de la salida) en una ecuación en diferencias. Para empezar, el modelo matemático que gobierna la acción de este controlador está dado por:

$$u_D(t) = K_D \frac{dy(t)}{dt} \quad (4-15)$$

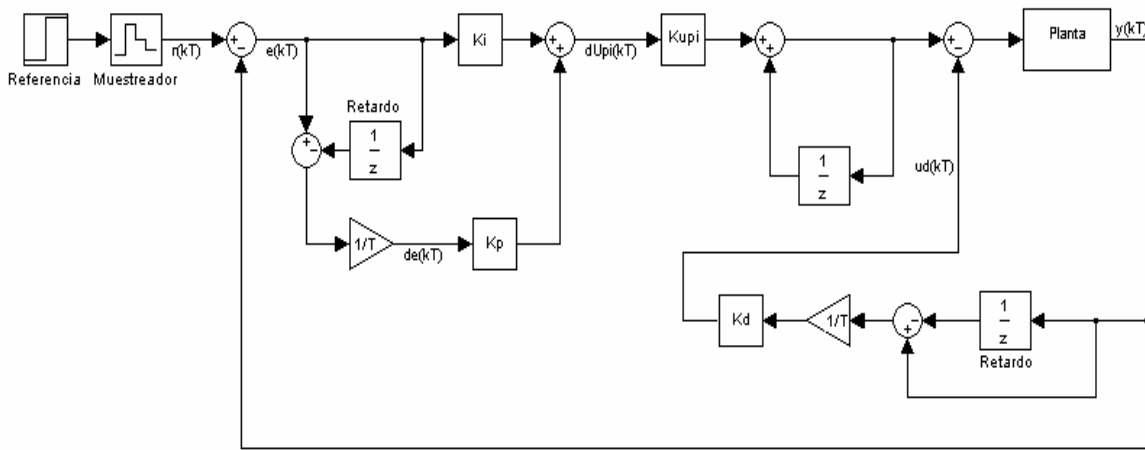
Como en las ecuaciones anteriores, la derivada se representa como un cambio incremental, Δy , con lo cual la ecuación se transforma en:

$$u_D(kT) = K_D \Delta y(kT) \quad (4-16)$$

$$\Delta y(kT) = \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T} \quad (4-17)$$

Un diagrama de bloques que represente esta situación se observa en la figura 31.

Figura 31 Controlador PI+D digital



Se ha desarrollado este esquema discreto ya que es más fácil operar con sistemas digitales que análogos. Hoy en día existen procesadores de alta velocidad y la implementación de un PID digital y uno difuso basado en un esquema discreto resulta muy fácil de operar.

4.1.3 PID difuso

El nombre PID se utiliza para describir a un tipo de controlador difuso cuya base de reglas se asemeja al modelo matemático que describe a un PID convencional. El controlador responde tanto al error como a la razón de cambio del error. Una ventaja que presentan los controladores difusos es que por muy complicado que sea el proceso a controlar pueden obtenerse resultados muy buenos tomando únicamente estas dos variables de control (1-5)(8-4).

4.1.3.1 Controlador proporcional

Un controlador difuso tipo proporcional posee una base de reglas que produce una respuesta directamente proporcional al error. El error queda definido por la ecuación $e(t) = r(t) - y(t)$ donde $r(t)$ es la referencia y por lo general es constante. La base de reglas es fácil de derivar ya que lo único que se necesita es hacer que la salida del controlador sea proporcional al error. Primero, deben tomarse en cuenta los siguientes aspectos:

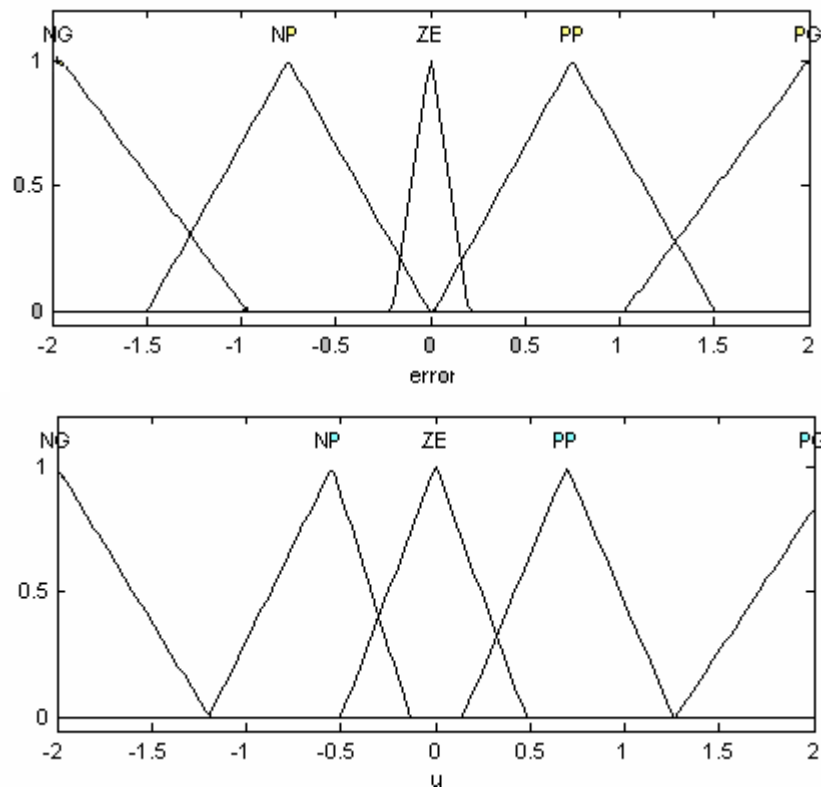
- a. Si el error es positivo, la salida se encuentra por debajo de la referencia (*set point*) y por lo tanto, la salida del compensador debe corregir esta situación y hacer que su salida sea grande. Véase en este punto el uso de las variables lingüísticas error y salida del compensador y los valores lingüísticos positivo y grande. Más adelante serán cuantificados mediante el uso de funciones de pertenencia.
- b. Si el error es negativo, la salida se encuentra por encima de la referencia y por lo tanto el controlador debe ajustar su salida a modo de proporcionar una ganancia pequeña.

Dependiendo del número de funciones de pertenencia y del número de variables de entrada así será el número de reglas en la base. Mientras más funciones de pertenencia se tengan, más fino será el control, sin embargo, aumenta la complejidad del sistema y su tiempo computacional. Para un sistema con N entradas y M funciones de pertenencia se tendrán M^N reglas.

Con cinco valores lingüísticos, cinco funciones de pertenencia y simbolizando con e el error y n la salida del controlador se obtiene la siguiente base de reglas:

- a. Si e es NG entonces u es NG
- b. Si e es NP entonces u es NP
- c. Si e es ZE entonces u es ZE
- d. Si e es PP entonces u es PP
- e. Si e es PG entonces u es PG

Figura 32. Funciones de pertenencia para el controlador proporcional

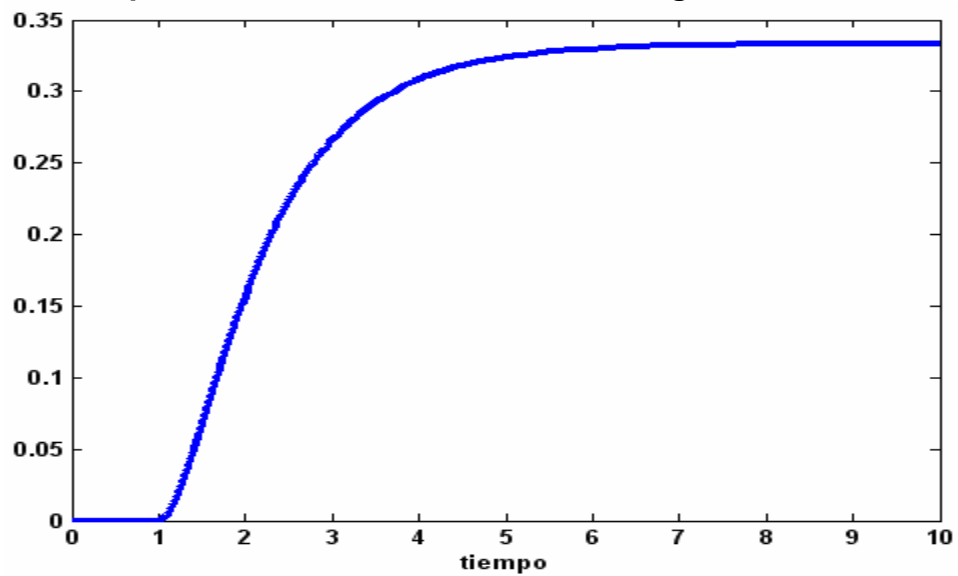


Siendo NG = Negativo Grande, NP = Negativo Pequeño, ZE= Cero, etc.

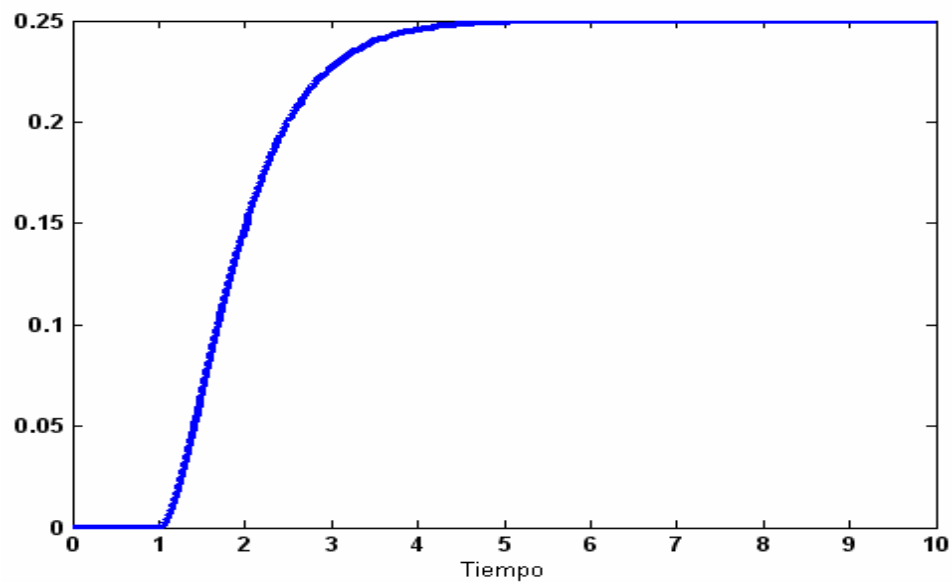
Para probar el desempeño del controlador, se utilizará el sistema de segundo orden cuya función de transferencia está dada por:

$$h(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \quad (4 - 18)$$

Figura 33. Respuesta al escalón del sistema de segundo orden



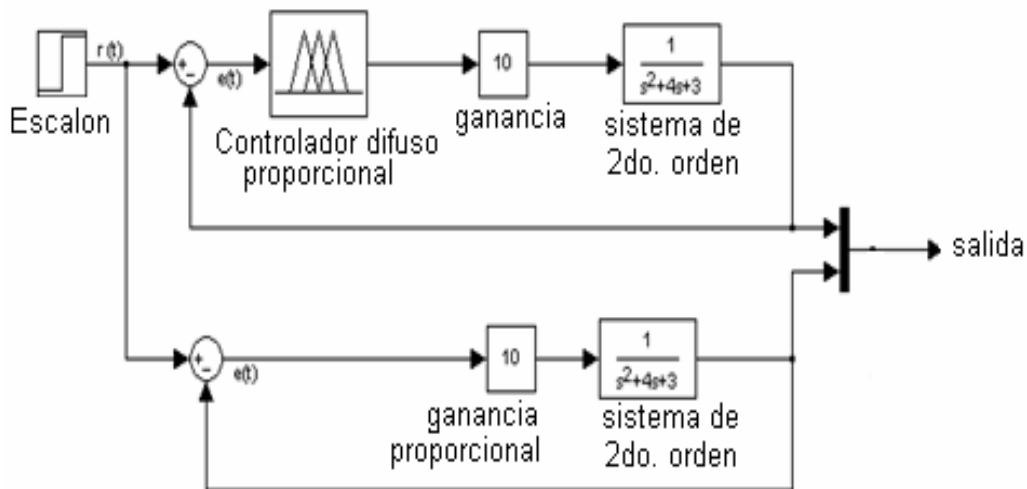
Sin retroalimentación



Con retroalimentación

Se puede ver en la figura 33 que el sistema posee un valor en estado estable muy pequeño y un tiempo de subida muy pequeño. Si se utiliza un compensador proporcional conectado en cascada a la planta que se desea controlar la respuesta se mejora considerablemente. Sin embargo, existe el problema de las oscilaciones y el sobrepaso.

Figura 34. Diagramas controladores convencional y difuso



En la figura 34 se ve que el controlador difuso ofrece un tiempo de subida más corto y un error en estado estable menor para el mismo valor de las constantes. Mientras más grande sea el valor de la ganancia proporcional, menor es el tiempo de subida, sin embargo, existe un valor para el cual el tiempo de asentamiento, el sobrepaso y las oscilaciones son excesivas.

Otra forma para reducir el tiempo de subida sin la necesidad de tener ganancias muy grandes es mediante la modificación de las reglas b y d. Las nuevas reglas quedan así:

- b. Si e es NP entonces u es NP
- d. Si e es PP entonces u es PP

Figura 35. Respuesta al escalón para distintos valores de la constante de proporcionalidad

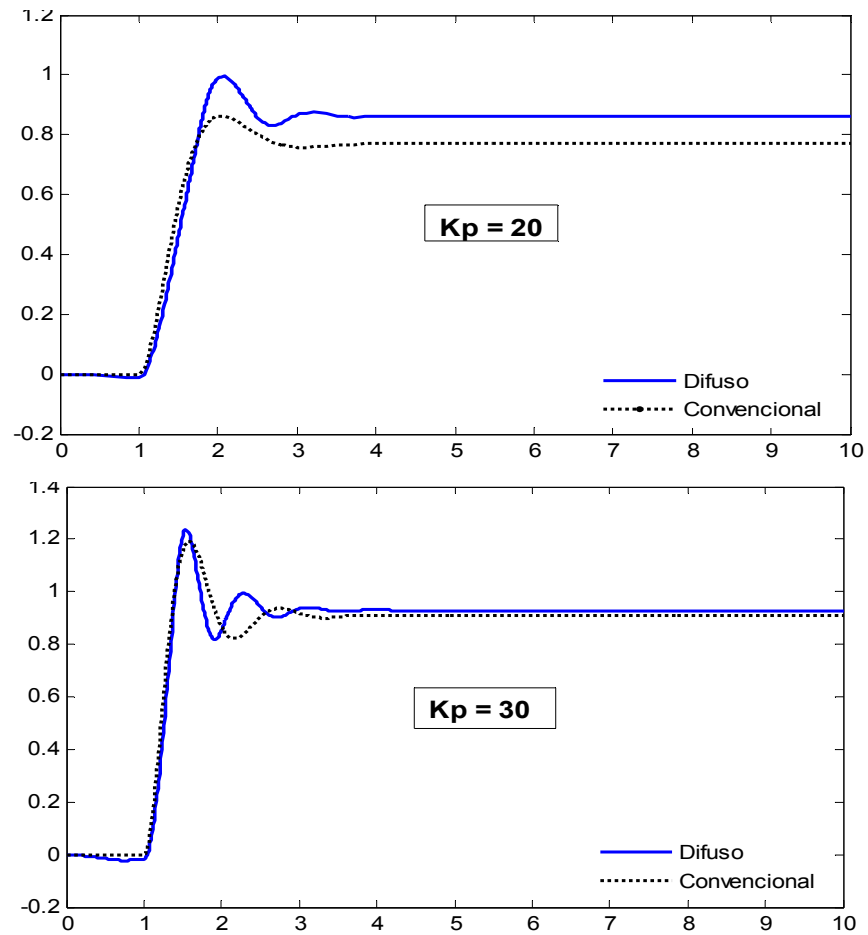
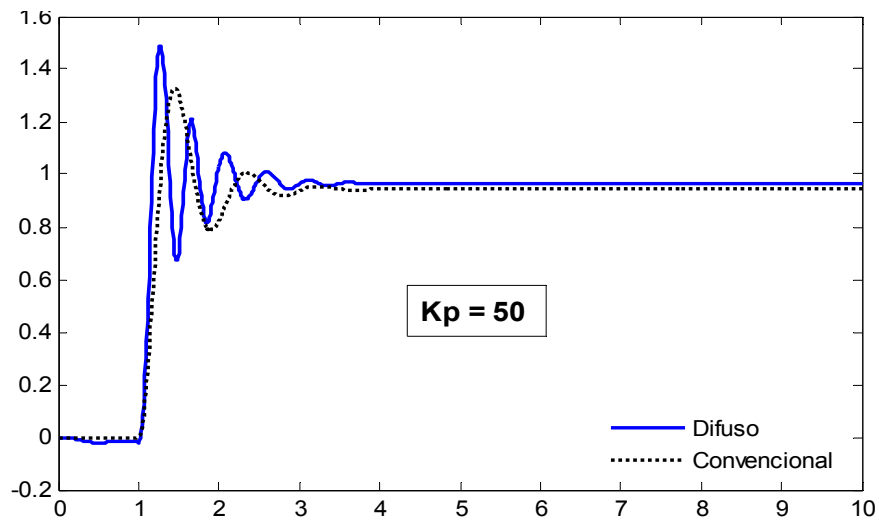


Figura 36. Respuesta con la base de reglas modificadas

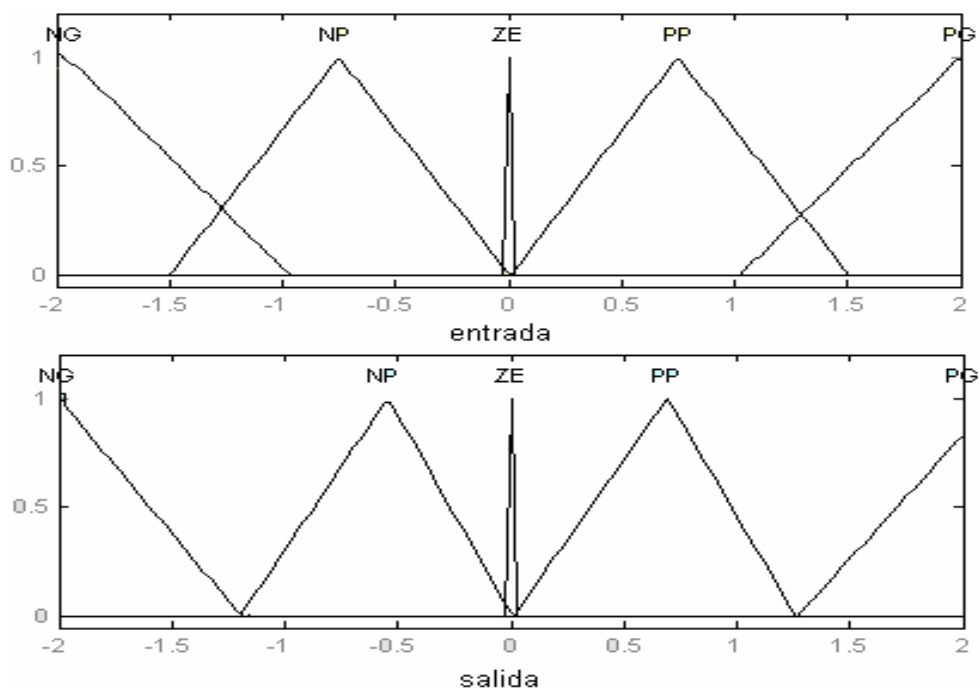


La respuesta con la base de reglas modificada aparece en las figura 36 y puede observarse claramente que el tiempo de subida aumenta, sin embargo el sobrepaso es excesivo.

Una ventaja que posee el controlador difuso y que no posee el convencional es la habilidad de ajustar el error en estado estable. Esto se logra mediante la modificación de las funciones de pertenencia de las variables de entrada y de salida. Si la función de pertenencia que define el valor lingüístico cero se hace cada vez más estrecho se reducen los posibles valores de la entrada y salida que producirán un valor distinto de cero al ser evaluados en la función de pertenencia y por lo tanto la salida ya no sale de este conjunto.

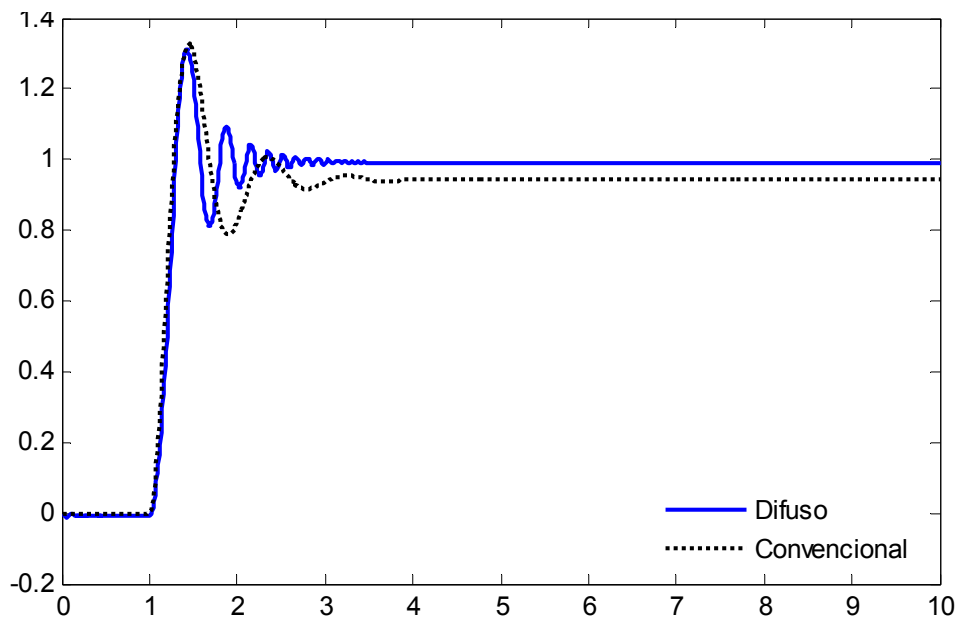
La figura 37 muestra las funciones de pertenencia de las variables de entrada y salida que producen los resultados anteriormente expuestos.

Figura 37. Funciones de pertenencia para minimizar el error en estado estable



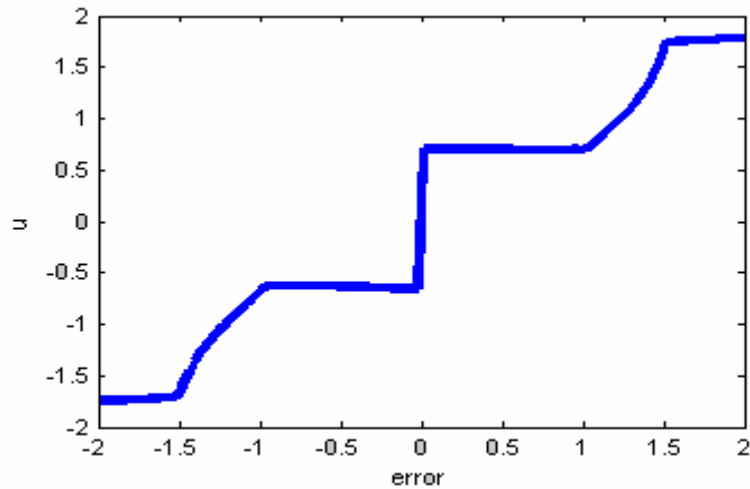
En la figura 38 puede observarse esta situación y al mismo tiempo apreciarse que el tiempo de subida y de asentamiento se mantienen prácticamente iguales al valor que poseen si se utilizara el controlador proporcional convencional además, el error en estado estable es aproximadamente del 1%. El único inconveniente es que la salida se vuelve más oscilatoria (sin embargo, la amplitud de estas oscilaciones no excede por mucho a las oscilaciones del sistema convencional).

Figura 38. Error en estado estable minimizado



El controlador difuso actúa como un elemento no lineal de transferencia y la relación entrada salida se observa en la figura 39.

Figura 39. Característica no lineal de un elemento difuso



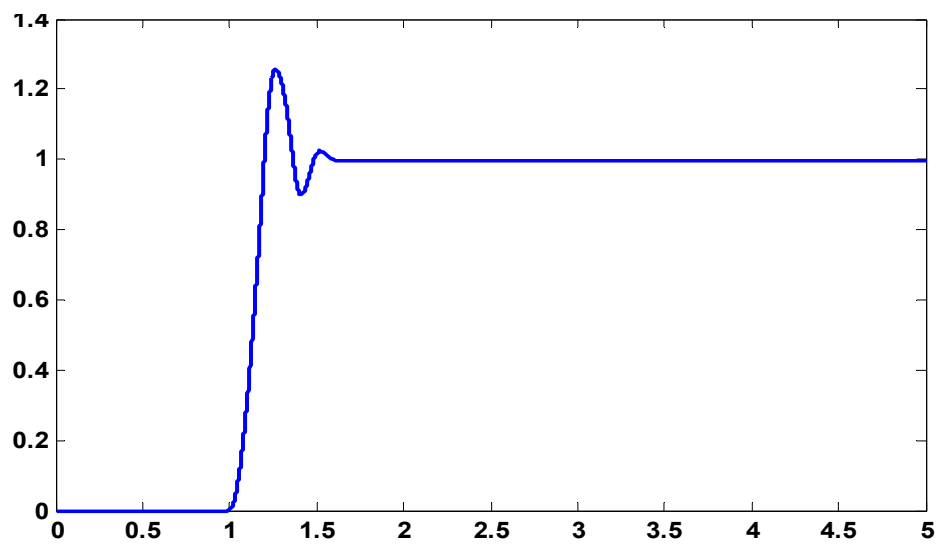
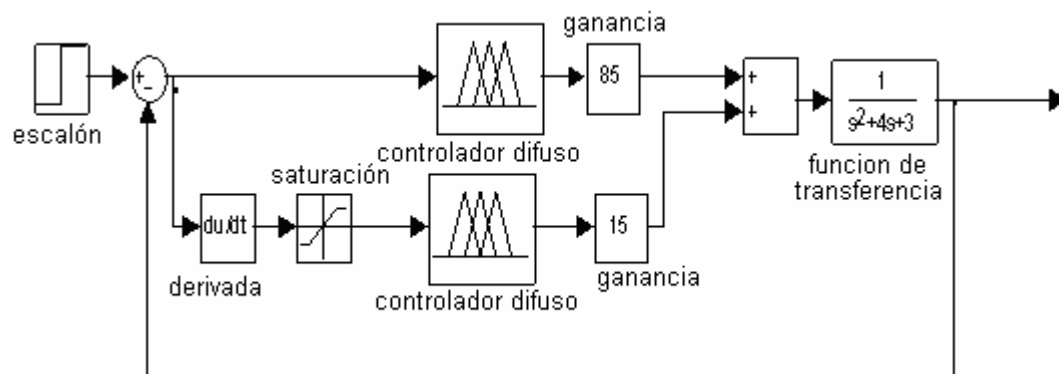
4.1.3.2 Controlador proporcional-derivativo

El controlador difuso derivativo responde al cambio en el error y ayuda a eliminar las oscilaciones causadas por el controlador proporcional. El esquema es similar al de un controlador convencional tipo PD y puede implementarse con dos bloques, uno proporcional y otro derivativo o como un único bloque cuyas entradas sean el error y el cambio en el error y que posea una base de reglas que tome en consideración la variación conjunta de las dos variables. Considerese el primer caso. Si la salida del controlador es proporcional al cambio en el error entonces la base de reglas es exactamente igual a la base del controlador proporcional sólo que en esta ocasión la variable de entrada es el cambio en el error.

Como se vio en la sección 4.1.1, un elemento que responda a la razón de cambio del error proporciona un medio para anticipar la salida del sistema y lograr minimizar tanto el sobrepaso como las oscilaciones.

Las funciones de pertenencia quedan definidas de la misma forma que en el caso proporcional. El diagrama del sistema posee ahora dos bloques difusos cuyas salidas se suman para producir la salida total de control.

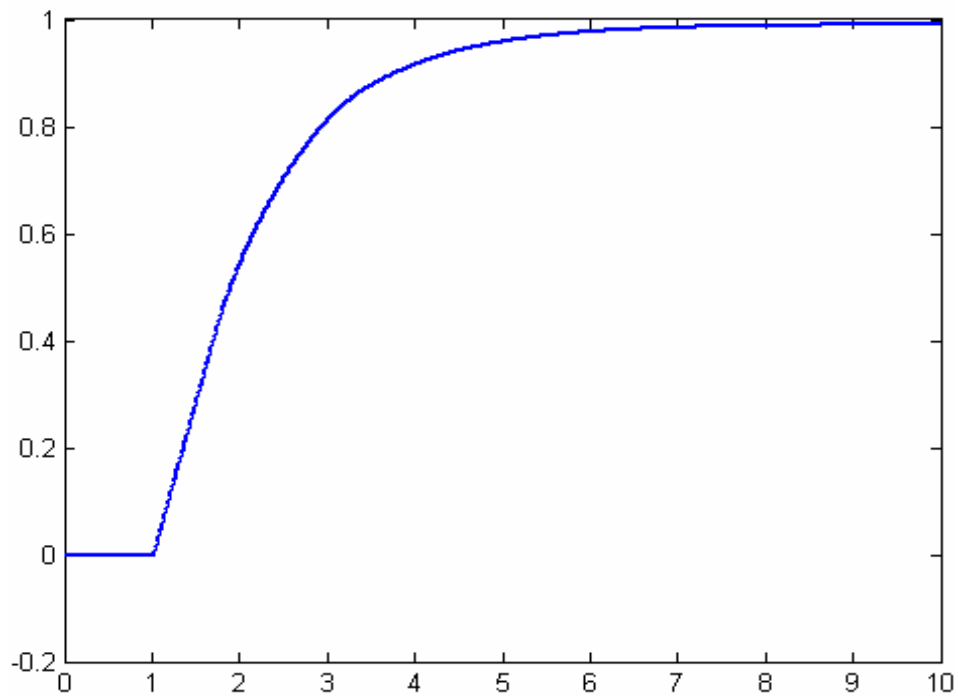
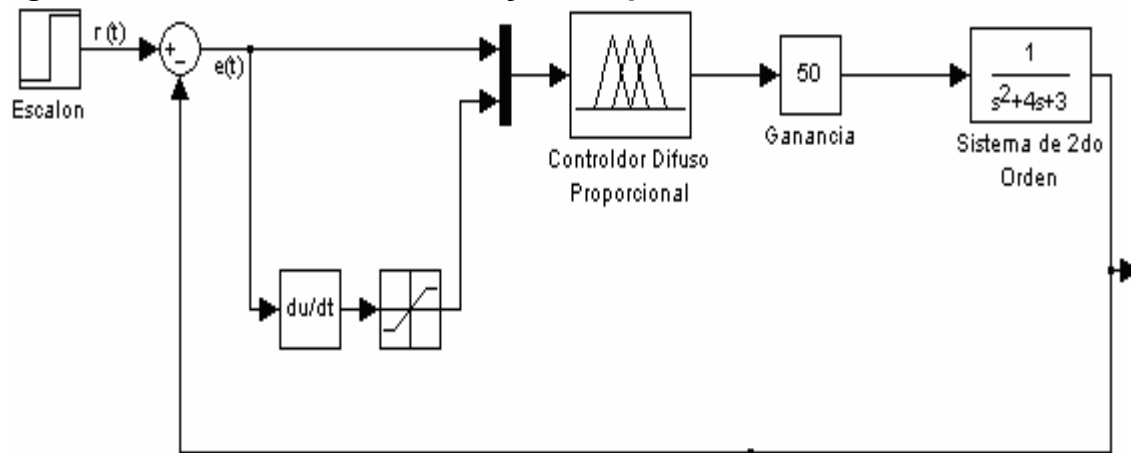
Figura 40. Controlador P-D difuso



Obsérvese en la figura que el sobrepaso y las oscilaciones han disminuido y el error en estado estable es tan solo del 0.44%.

La implementación con un solo bloque difuso se muestra en la figura 41. El bloque de saturación sirve para evitar las pendientes excesivas. Como la entrada es un escalón unitario, para $t = 1$ hay una transición abrupta de estados lo cual representa una pendiente muy grande.

Figura 41. Controlador PD difuso y su respuesta



El sobrepaso ha desaparecido, sin embargo, el tiempo de subida es demasiado grande. Utilizando en conjunto un bloque PD difuso y un bloque proporcional convencional puede mejorarse esta situación.

Figura 42. Superficie no lineal de transferencia del controlador PD difuso

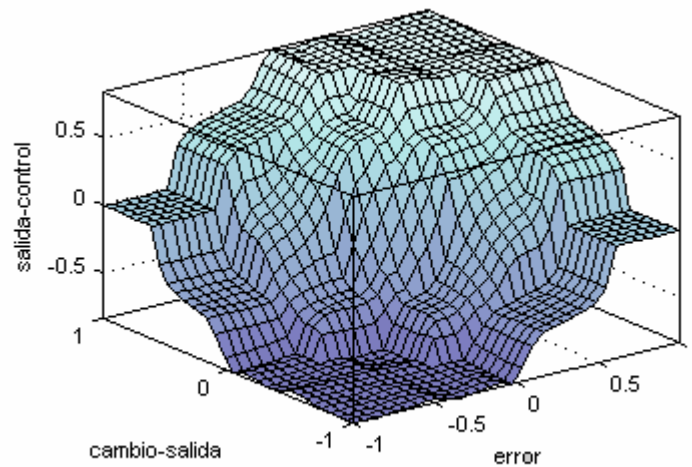
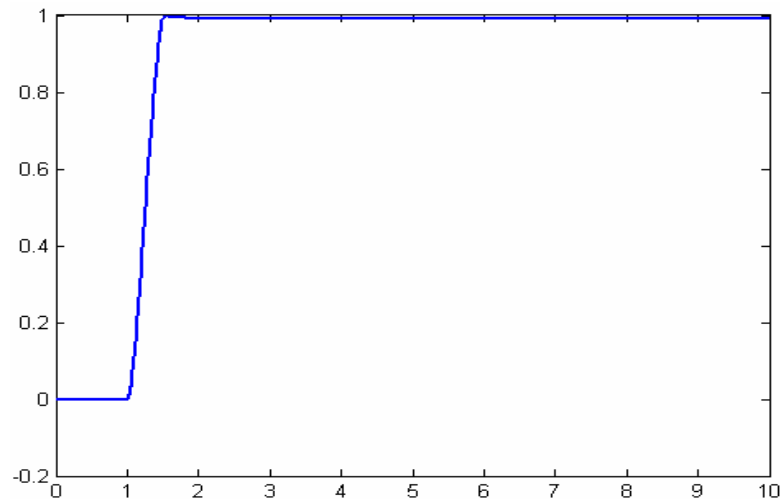


Figura 43. Respuesta PD difuso con controlador P convencional

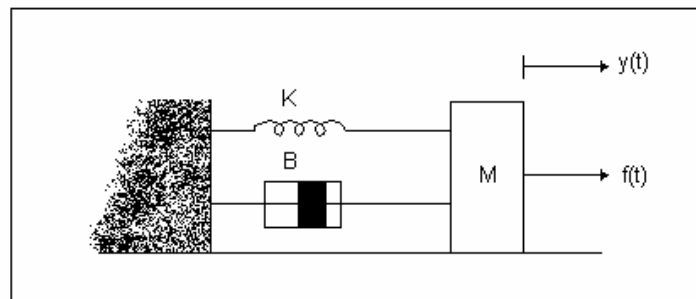


El sobrepaso ha sido eliminado, el tiempo de subida ha mejorado y el error en estado estable es tan solo del 0.84%.

4.2 Aproximación analítica y consideraciones físicas

¿Qué es lo que debe tomarse en cuenta para diseñar este tipo de controladores? Primero, debe definirse un intervalo o universo físico para las variables de control. Para este caso, las variables son el error, el cambio en el error y la salida del controlador, e , Δe , y u , respectivamente. La salida del sistema también podría tomarse como una referencia para el desempeño del controlador, sin embargo, la salida se encuentra implícita en la variable error ya que el error se define como la diferencia entre la señal de referencia (salida deseada) y la salida actual. Para el sistema masa-resorte de la figura 44 se desea que la posición de la masa $y(t)$ siga a una referencia preestablecida mediante la aplicación de una fuerza $f(t)$.

Figura 44. Sistema masa-resorte



Ahora definase el universo físico del sistema. La variación máxima de la posición de la masa ($y(t)$ positivo hacia la derecha en la figura) está restringida a la región elástica de operación del resorte (si se desea que el punto de operación quede dentro de la región lineal) es decir, la región en la cual no presenta deformaciones. La posición mínima estará restringida por la compresión máxima del resorte y del amortiguador.

Si se asume que ambas son iguales para definir el universo de variación de la posición como:

$$y(t) \in [-A, A] \quad (4-19)$$

¿Cuál puede ser la máxima variación del error? Obviamente no va a ser más grande que el doble de la variación máxima de la posición, es decir, en el peor de los casos la masa se encuentra en alguno de los extremos de $y(t)$ y se desea que se encuentre en el otro extremo. Por lo tanto, para $e(t)$ se tiene:

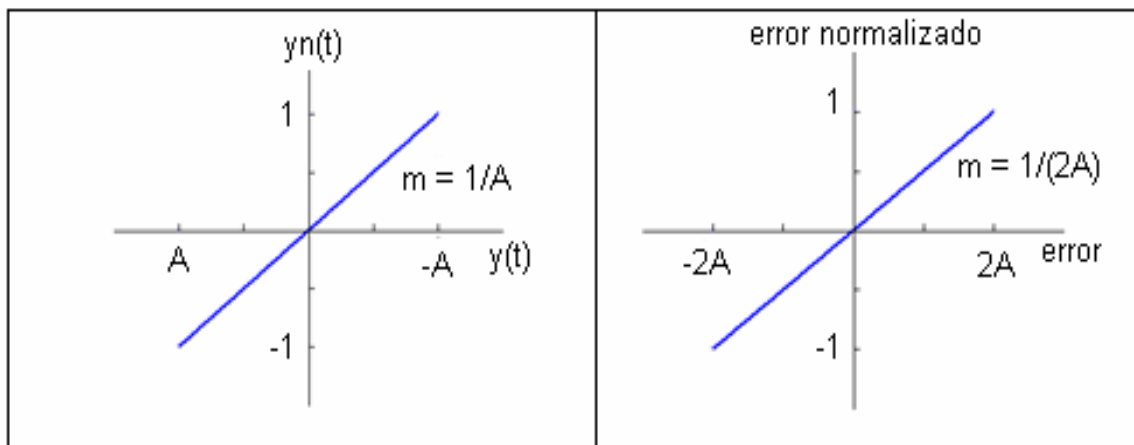
$$|e(t)| \leq 2A \quad (4-20)$$

La razón de cambio en el error pertenece a un universo distinto. El error posee dimensionales de desplazamiento mientras que $\Delta e(t)$ posee dimensionales de desplazamiento por unidad de tiempo. Se logra la concordancia dimensional mediante la inclusión de constantes adecuadas. Aquí se limitará el rango de variación de $\Delta e(t)$ y de $\Delta u(t)$ al intervalo de $[-A, A]$. Con esto, se restringen las posibles discontinuidades y se evitan pendientes muy grandes que puedan provocar inestabilidad en el sistema.

Muchas veces se desea trabajar con universos normalizados ya que las funciones de pertenencia así definidas no necesitan ser modificadas si se modifican los universos de variación de las variables de control, además, las operaciones de fusificación, disparo de reglas y defusificación son independientes del dominio físico de las variables de entrada. Para lograr esto se recurre a factores de escala. Una elección común para el rango de un universo normalizado es el intervalo de $[-1, 1]$. Cuando se procede a obtener los valores a la salida se necesita de factores de normalización con lo cual se obtienen los valores correspondientes al dominio físico de la variable de salida.

Esto puede ser de gran ayuda si las funciones de pertenencia son modificadas en una forma dinámica es decir, son adaptativas. Basta con alterar los factores de escala y las funciones de pertenencia serán modificadas en proporción. En la figura 45 se observa una curva característica de factores de normalización.

Figura 45. Factores de normalización



Ahora se necesita definir las variables lingüísticas y los valores de las variables lingüísticas. Las variables lingüísticas aquí definidas son el error, cambio en el error y salida controlador. Cuantos valores lingüísticos sean escogidos dependerá de que tan fino se desee el control alrededor del punto de operación. Hay que tomar en cuenta que mientras más valores lingüísticos se tengan mejor será el control pero al mismo tiempo aumenta el número de funciones de pertenencia, el número de reglas y la complejidad computacional de los cálculos de inferencia. Por ejemplo, con dos variables de entrada y cinco valores lingüísticos para cada una se tendrán diez funciones de pertenencia y veinticinco reglas que deben ser trabajadas. Si el número de valores lingüísticos aumenta a siete, son cuarenta y nueve las reglas que deben ser utilizadas. Un controlador PID necesita tres variables de entrada y si se tienen cinco valores lingüísticos se tendrían 125 reglas.

Para el sistema masa-resorte de este ejemplo, se utilizarán cinco valores lingüísticos para la entrada y la salida y quedan definidos de la siguiente forma:

$$\text{error} = \text{cambio en error} = \{\text{PG, PP, ZE, NP, NG}\} \quad (4-21)$$

$$\text{salida} = \text{cambio salida} = \{\text{PG, PP, ZE, NP, NG}\} \quad (4-22)$$

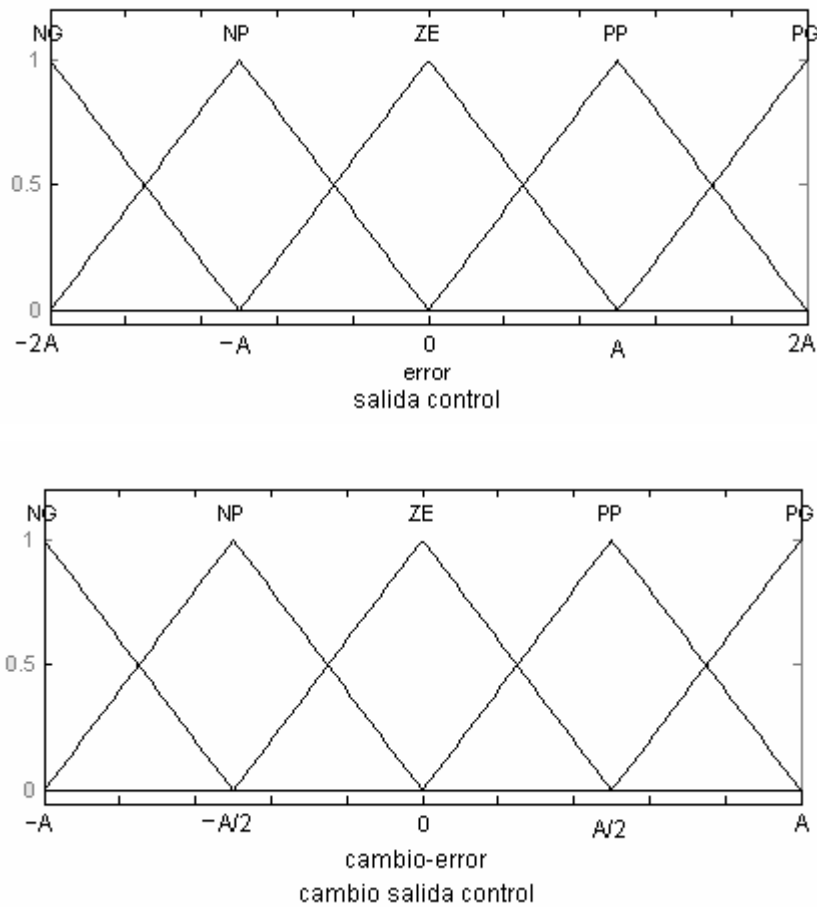
Siendo PG = Positivo Grande; PP = Positivo Pequeño; ZE = Cero, etc.

El siguiente paso es definir las funciones de pertenencia ya sea en el universo físico o en el normalizado. Por lo general, estas funciones se escogen de tal forma que exista traslape entre cada dos de ellas, esto para que dado cualquier valor de entrada éste siempre pertenezca por lo menos a dos funciones de pertenencia y se disparen dos reglas distintas.

El tipo de función de pertenencia que sea elegido depende de varios factores entre los cuales puede mencionarse la simplicidad computacional de la misma.

No es lo mismo evaluar una función de pertenencia triangular a una función de pertenencia Gaussiana. La triangular es más sencilla sin embargo la Gaussiana ofrece una transición más suave entre estados. Además, las funciones de pertenencia trapezoidal y triangular presentan discontinuidades que pueden resultar en discontinuidades en la salida de control. Si estas discontinuidades a la salida provocan una acción pobre de control pueden removerse ya sea eliminando las discontinuidades en las funciones de pertenencia o filtrando la señal de salida (4-159).

Figura 46. Funciones de pertenencia para el sistema masa-resorte



Una vez definidas las funciones de pertenencia se procede a la obtención de las reglas. Este es uno de los pasos cruciales para obtener un buen controlador ya que en última instancia son las reglas las que definen la operación del controlador. Las propiedades más importantes que debe cumplir un conjunto de reglas es que sea completo, consistente y que las reglas no interactúen entre sí.

Un conjunto de reglas es completo si cualquier combinación de valores de entrada produce un valor de salida. Es decir, todas las combinaciones posibles de la entrada están mapeadas en la salida.

Un conjunto de reglas es inconsistente si existen dos reglas con el mismo antecedente pero diferente consecuencia.

Se ha visto que existen dos tipos de inferencia, la inferencia basada en composición y la inferencia basada en el disparo individual (sección 3.1.3). Se vio que los conjuntos obtenidos al aplicar estos mecanismos de inferencia son el conjunto de salida, U_{comp} y U_{indiv} respectivamente.

Un conjunto de reglas interactúa si

$$U_{\text{comp}} \neq U_{\text{indiv}} \quad (4-22)$$

La importancia de las dos primeras condiciones es evidente, ya que si el conjunto no es completo habrá combinaciones de entrada que no producirán acciones de control y si no es consistente se producirán acciones de control erróneas. La interacción entre conjuntos de reglas se evita al usar la inferencia de Mamdani, como se mostró en el capítulo 3.

Retomando el ejemplo del sistema masa-resorte, se derivarán las reglas utilizando argumentos lógicos y tomando en consideración lo siguiente:

- $e(t) < 0$ significa que la salida actual es mayor que la referencia
- $e(t) > 0$ significa que la salida actual es menor que la referencia
- $de(t)/dt < 0$ significa que la salida está creciendo
- $de(t)/dt > 0$ significa que la salida está decreciendo

Los ejemplos de la sección anterior no tomaban en cuenta estos puntos ya que únicamente se deseaba un controlador que respondiera en proporción a las variables de entrada. La base de reglas queda de la siguiente forma:

- a. Si e es NG y Δe es NG entonces u es NG
- b. Si e es NG y Δe es NP entonces u es NG
- c. Si e es NG y Δe es ZE entonces u es NG
- d. Si e es NG y Δe es PP entonces u es NP
- e. Si e es NG y Δe es PG entonces u es ZE
- ⋮
- ⋮
- ⋮
- u. Si e es PG y Δe es NG entonces u es ZE
- v. Si e es PG y Δe es NP entonces u es PP
- w. Si e es PG y Δe es ZE entonces u es PG
- x. Si e es PG y Δe es PP entonces u es PG
- y. Si e es PG y Δe es PG entonces u es PG

La derivación de las reglas es como sigue: para la regla a, si el error es negativo y grande, significa que la salida está muy por encima de la referencia y además su razón de cambio es negativa y grande o sea que la salida crece rápidamente y tiende a alejarse de la referencia. Para corregir esto, el controlador debe hacer que la salida para el siguiente tiempo sea menor (o mucho menor) que la salida actual. En la regla y, el error es positivo y grande o sea que la salida se encuentra por debajo de la referencia y como Δe también es positivo y grande significa que la salida decrece rápidamente. Para compensar, hay que hacer que el valor actual de la salida sea mayor que su valor anterior. Esto se logra haciendo $u > 0$.

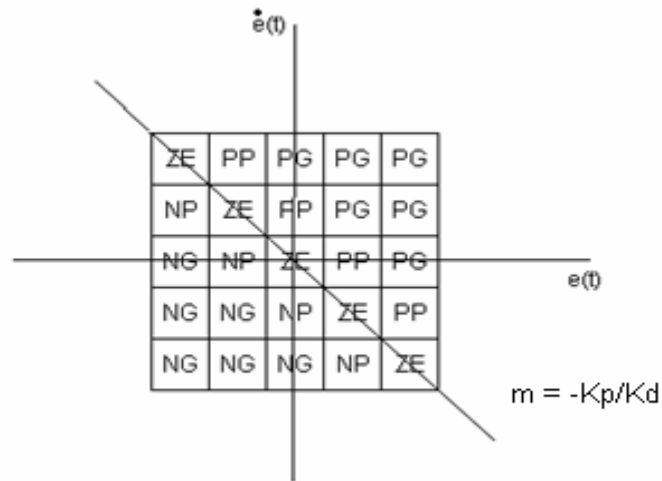
Todas las demás reglas se derivan de razonamientos similares y por simplicidad no se incluyen las 25 reglas. Otro método un poco más analítico consiste en aprovechar el modelo matemático de un controlador PD y asociarlo con un espacio de fase (1-3) (4-169) (10-7).

El modelo matemático que gobierna la acción de estos controladores está dado por:

$$u_{PD}(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} + K_P e(t) \quad (4-24)$$

Ahora, si se toma la ecuación (4-24) y se iguala a cero (¿Por qué?) y se grafica en el plano de fase, el resultado es una línea recta que divide al plano de fase en dos regiones, una en donde u es positivo (la porción a la derecha de la recta) y la otra en donde u es negativo (la parte a la izquierda de la recta). La pendiente de esta recta es $-\frac{K_P}{K_D}$. Ahora, se cuantifican estas dos regiones (es decir, mientras más a la derecha se esté de la recta, más positivo es el valor de u y mientras más a la izquierda se ubique, más negativo será u). Esto se resume en la figura 47. La interpretación es la siguiente: dado un valor de e y otro de Δe , se busca la intersección de estos dos valores y el valor asignado a esa celda es la salida de control. Resulta evidente que mientras más particiones o niveles de cuantificación del espacio de fase se tengan, mejor será la operación de control.

Figura 47. Derivación analítica de las reglas



La derivación de la base de reglas es independiente de la planta que se desea controlar y en este caso depende únicamente de las constantes derivativa y proporcional.

El diagrama de la figura 47 es muy útil cuando se desea realizar un análisis de estabilidad. En el siguiente capítulo se tratará este tema con más detalle.

Ahora que se conoce la base de reglas solamente queda por definir el tipo de inferencia y como se formará el conjunto difuso de salida. La inferencia que comúnmente se utiliza en el control difuso es la de Mamdani ya que garantiza que el conjunto de reglas no interactuará

4.3 Control no lineal

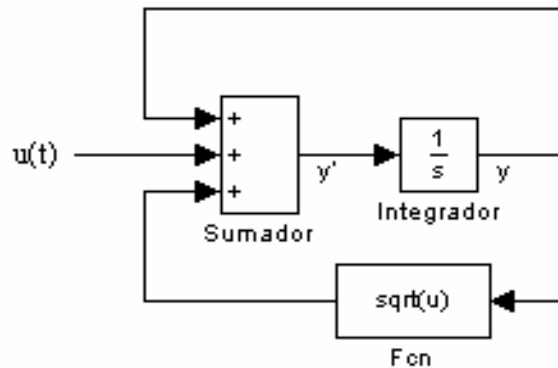
Hasta el momento se han tratado ejemplos para los cuales existe un modelo matemático lineal sobre el cual trabajar. La mayor ventaja del control difuso se encuentra cuando se desea controlar plantas para las cuales no existe un modelo matemático o si lo existe, éste es no lineal.

Por ejemplo, se desea controlar el sistema no lineal descrito por la siguiente función:

$$y'(t) = \sqrt{y(t)} + u(t) \quad (4-25)$$

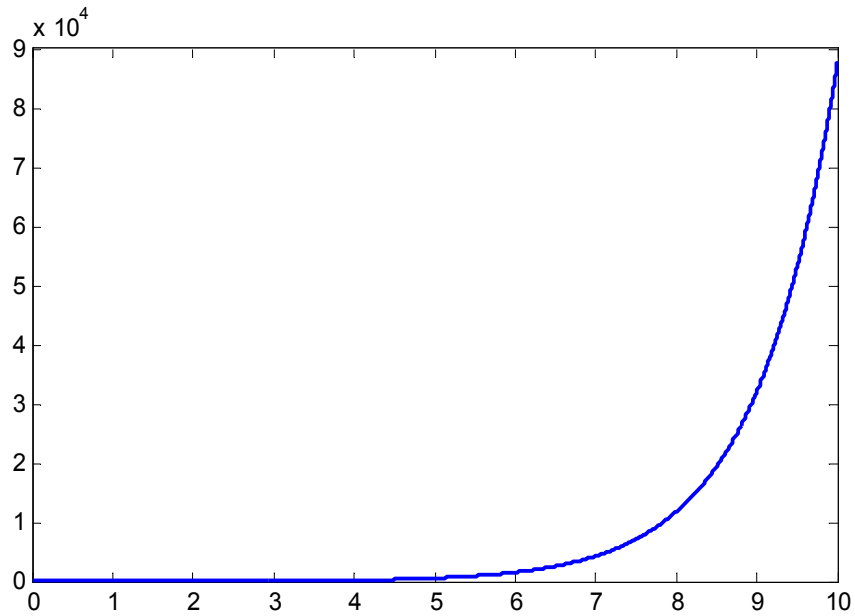
El diagrama de bloques que describe este modelo no lineal se muestra en la figura 48.

Figura 48. Diagrama de bloques del sistema descrito por $y'(t) = \sqrt{y(t)} + u(t)$



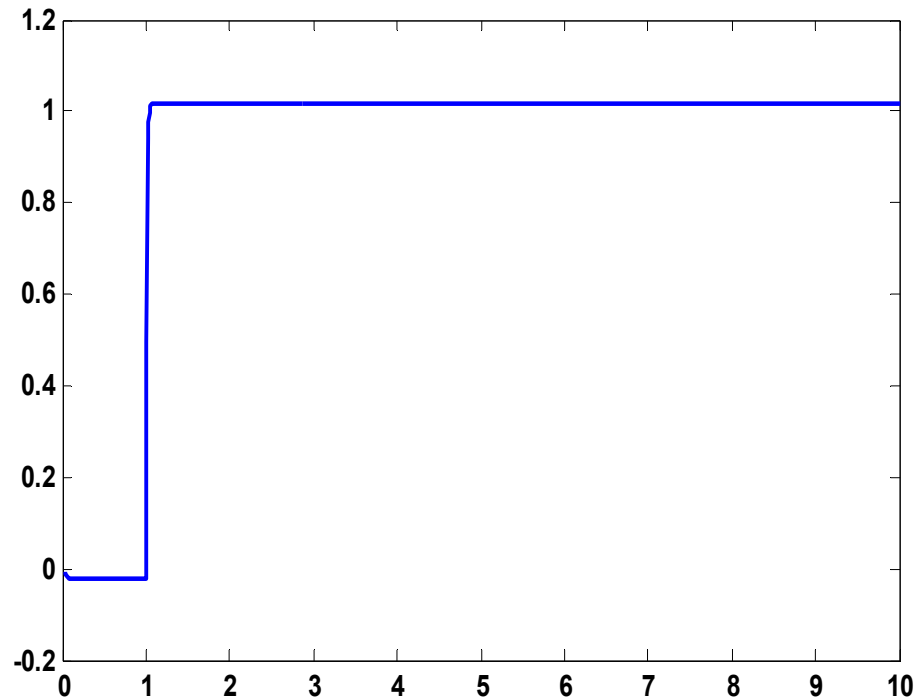
La respuesta natural del sistema con $y(0) = 1$ se ve en la figura 49

Figura 49. Respuesta natural del sistema $y'(t) = \sqrt{y(t)} + u(t)$



Se ve que la salida tiende al infinito y crece muy rápido. Un controlador proporcional es suficiente para lograr hacer que el sistema responda como se desea, sin embargo, para lograr un error en estado estable aceptable se deben de utilizar ganancias muy grandes ($K = 300$). Este problema se soluciona al incluir un controlador difuso proporcional. Las ganancias utilizadas con este bloque son mucho más pequeñas ($K = 28$) y se obtiene una respuesta muy buena. El tiempo de asentamiento y de subida son muy pequeños y el error en estado estable es tan solo del 2%.

Figura 50. Respuesta del sistema con un controlador difuso



Una simple base de reglas consistente en cinco reglas produce estos resultados. Se ve que los controladores difusos son de gran utilidad para controlar plantas no lineales.

La mayoría de sistemas de control basados en lógica difusa poseen únicamente el error y el cambio en el error como variables de entrada y estas dos cantidades son suficientes para lograr una salida aceptable.

Por lo general, la base de reglas no necesita ser modificada sino basta ajustar ganancias externas proporcionales a la salida del controlador para lograr la regulación adecuada.

5. ESTABILIDAD Y DESEMPEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO

5.1 Controladores difusos como elementos no lineales de transferencia

La mayoría de controladores difusos responden a dos variables de entrada: el error y el cambio del error. En principio, estas dos variables son suficientes para controlar cualquier proceso ya que se posee información acerca de la salida y acerca de cómo está cambiando la salida. El controlador en sí no realiza las operaciones de derivación, integración o cualquier otra que dependa explícitamente del tiempo. La base de reglas del controlador no depende del tiempo y por lo tanto el controlador difuso es un elemento estático, además, posee una característica de transferencia no lineal la cual es una consecuencia de la forma de como son disparadas, interpretadas y combinadas las reglas de control.

La teoría de sistemas distingue dos tipos: lineales y no lineales. Un sistema es lineal si se cumplen las condiciones de superposición y homogeneidad. Sea $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, para que un sistema cumpla con el principio de superposición debe cumplirse que:

$$z = y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \quad (5-1)$$

De igual forma, la condición de homogeneidad se cumple si:

$$c \cdot f(x) = f(c \cdot x) \quad (5-2)$$

Los elementos no lineales de un controlador difuso son los bloques de fusificación, mecanismo de inferencia (disparo de reglas) y defusificación (figura 14). En estas partes del controlador la ecuación (4-26) no se cumple.

La figura 39 muestra la relación entrada-salida de un sistema difuso, se ve claramente la relación no lineal.

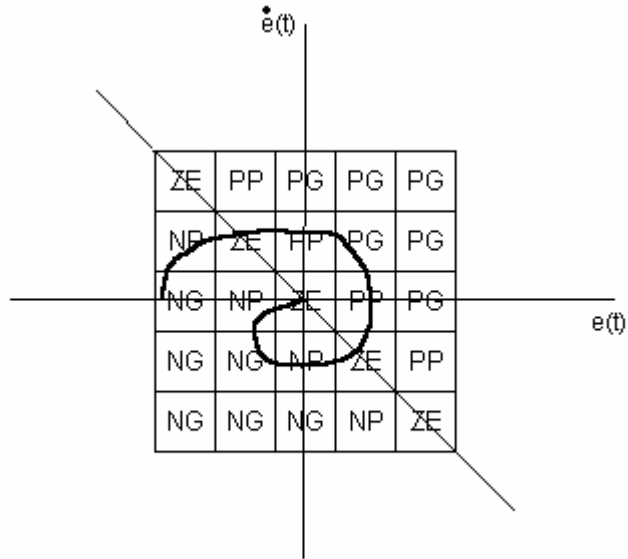
5.2 Aproximación al espacio de estado

En la sección anterior se introdujo el espacio de estado para la derivación de una base de reglas. El espacio de estado también puede utilizarse para examinar la estabilidad del controlador. La aplicación práctica de este método se limita a sistemas bidimensionales (dos entradas una salida).

Supóngase que las entradas de un sistema son e y Δe que la salida es u . e y Δe pueden tomar n y m valores lingüísticos respectivamente y por lo tanto habrán n y m funciones de pertenencia para cada variable. El número máximo de reglas en estas condiciones está restringido a $n \times m$ además, la región de interés en el espacio de fase se encuentra limitado por los valores físicos de las variables del controlador. El espacio de fase es dividido en subespacios y cada uno de ellos se asocia con una regla. La figura 47 ilustra este concepto.

Ya que se tiene el espacio de fase dividido se puede mapear una trayectoria que represente la salida del controlador.

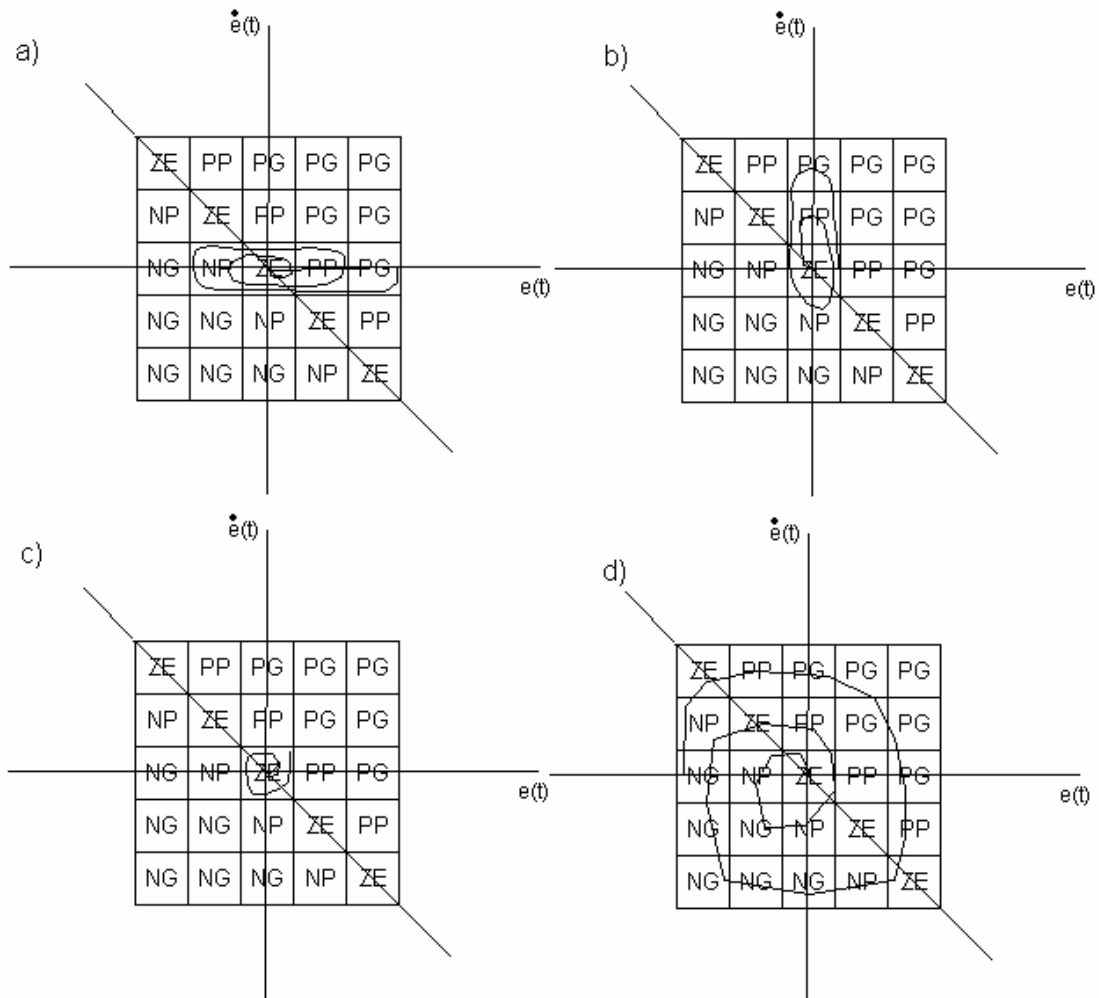
Figura 51. Trayectoria lingüística



El conjunto obtenido por el disparo de las reglas en la trayectoria se conoce como una trayectoria lingüística la cual corresponde a alguna de los posibles recorridos que podría seguir el controlador durante su desempeño.

Con la ayuda de la trayectoria lingüística puede examinarse el desempeño del controlador. Obsérvese la figura 51 y las distintas trayectorias ahí mapeadas. Distintos comportamientos del sistema son obtenidos según sea la trayectoria mapeada y las reglas involucradas. Existen reglas que no son disparadas y este esquema ayuda a visualizar cuáles son para modificar ya sea las funciones de pertenencia o las reglas mismas.

Figura 52. Distintas trayectorias lingüísticas



La trayectoria en la figura 52 a) muestra a un sistema que alcanza la estabilidad después de cierto tiempo y que además presenta pequeñas oscilaciones alrededor del origen (la referencia, o sea, cuando el error y el cambio del error es cero). La figura 52 b) es una situación similar pero presenta grandes sobrepasos. La figura 52 c) muestra un sistema cuyas oscilaciones son muy pequeñas y la figura 52 d) presenta a un sistema cuyas oscilaciones son muy grandes.

Un sistema en lazo cerrado definido por las ecuaciones:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u \quad (5-3)$$

$$u = \Phi(\mathbf{x}) \quad (5-4)$$

en donde $f(\mathbf{x})$ es una función (que podría ser no lineal) que representa el comportamiento dinámico de la planta, \mathbf{u} es un vector y u es la salida escalar de control. $\Phi(\mathbf{x})$ es una función no lineal que representa el sistema de control difuso. Además, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\Phi(\mathbf{x}) = Defuzz(\mu_x^* \circ \mu_R(\mathbf{x}, u))$ (ver ec. 2-28). $Defuzz()$ representa un método de defusificación, μ_x^* es un valor de entrada fusificado (un grado de pertenencia) y $\mu_R(\mathbf{x}, u)$ es la relación que existe entre la entrada y la salida (sección 2.2).

El desempeño en lazo cerrado dependerá de la naturaleza de $f(\mathbf{x})$ y $\Phi(\mathbf{x})$. Puede asociarse un campo vectorial con las ecuaciones (5-3) y (5-4) que es de gran utilidad para analizar la estabilidad. El campo consta de dos componentes, una asociada con el comportamiento de la planta y la otra con el controlador difuso. El vector resultante es la suma de estos dos.

La condición $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se traduce en una recta en el espacio de fase que lo divide en dos regiones. Para asegurar la estabilidad del sistema deben cumplirse dos condiciones:

- a. Que el sistema en lazo abierto sea estable y
- b. El campo vectorial asociado con $\Phi(\mathbf{x})$ se dirija hacia $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Para la condición a, el campo vectorial asociado con $\Phi(\mathbf{x})$ hace que la trayectoria del sistema (trayectoria lingüística) se acerca a $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, una vez alcanzado, la componente vectorial descrita por $f(\mathbf{x})$ obtiene una mayor influencia sobre el sistema, lo cual hace que la trayectoria converja al punto de equilibrio.

Si $\Phi(\mathbf{x})$ no hace que las trayectorias se acerquen a $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ el sistema es inestable, sin embargo, esta inestabilidad se puede evitar si la componente de la planta obtiene mayor influencia. Este es un caso crítico, donde el sistema posee una inestabilidad evitable.

5.3 Índices de robustez (caso bidimensional)

Las ecuaciones que describen a un sistema con dos variables de entrada pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) + b_1 u(x_1, x_2) \quad (5-5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + b_2 u(x_1, x_2) \quad (5-6)$$

Para determinar el comportamiento del sistema de forma analítica se debe proceder a linealizar las ecuaciones (5-5) y (5-6). Se asume que el equilibrio en el origen es estable (los valores de los eigenvalores alrededor del origen poseen partes reales negativas).

Existen dos formas en las cuales el sistema se puede volver inestable durante su operación (4-260):

- Un eigenvalor real cruza el eje imaginario y adquiere un valor positivo. A este comportamiento se le llama *bifurcación estática*.
- Un par de polos complejos cruza el eje imaginario y ambos toman valores reales positivos (bifurcación Hopf).

Regresando a las ecuaciones (5-5) y (5-6), se obtiene su linealización alrededor del punto x_0 mediante (4-263):

$$f(x) = f(x_0) + J(x - x_0) + \dots \quad (5-7)$$

en donde J es el Jacobiano de $f(x)$ en x_0 y está dado por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

El método indirecto de Lyapunov (9-196) establece que:

- a. El punto x_0 es asintóticamente estable si $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ para todo i . λ_i es el i -ésimo eigenvalor de J
- b. El punto x_0 es inestable si $\text{Re}[\lambda_i] > 0$ para uno o mas eigenvalores de J.

El polinomio característico de J está definido por:

$$P(s) = \det(sI - J) = s^2 - s \cdot (a_{11} + a_{22}) + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = s^2 + a_1 \cdot s + a_2 \quad (5-9)$$

con

$$a_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -tr(J) \quad (5-10)$$

$$a_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det(J) \quad (5-11)$$

Una bifurcación estática se produce cuando un cero real del polinomio característico cruza el eje imaginario o sea, eventualmente una de las raíces será $s = 0$. Esto sólo puede ocurrir si $a_2 = 0$ en la ecuación (5-9). Esta es la condición para la pérdida de estabilidad por bifurcaciones estáticas. Mientras más grande sea el valor de a_2 más difícil será que se pierda la estabilidad. El valor a_2 proporciona una medida del grado de estabilidad relativa. Se define el índice de estabilidad relativa como:

$$I_1 = a_2 = \det(J) \quad (5-12)$$

Para que se dé una bifurcación Hopf los dos eigenvalores complejos del sistema tienen su parte real positiva. Para que esto se cumpla, debe darse la transición de negativo a positivo en la parte real de los eigenvalores es decir, existirá un momento en el tiempo en el cual la parte real de los valores propios sea cero. Del polinomio característico, debe cumplirse que $a_1 = 0$. Al igual que en el caso anterior, mientras más alejado del origen se encuentre a_2 más difícil será que se produzca la bifurcación. Un segundo índice de estabilidad es:

$$I_2 = -tr(J) \quad (5-13)$$

Esto puede ser aplicado a la función no lineal que describe al sistema difuso, $\Phi(\mathbf{x})$, y la aproximación lineal del mismo se obtiene utilizando tanto la superficie difusa de control, la base de reglas y para las derivadas se utilizan técnicas de interpolación (4-269).

CONCLUSIONES

- 1 Para el diseño de un controlador difuso debe de tomarse en cuenta el rango físico de las variables de entrada, los mecanismos de fusificación, defusificación y la base de reglas.
- 2 El controlador PD de tipo difuso presenta una respuesta mejor que un controlador PD convencional y su estructura es más simple, versátil y puede volverse adaptiva.
- 3 El tiempo de subida de un controlador PD difuso es muy bueno sin embargo, existen muchas plantas para las cuales este tiempo no será adecuado.
- 4 El sobrepaso y las oscilaciones pueden reducirse grandemente agregando reglas que respondan a la derivada del error.
- 5 El error en estado estable puede reducirse tanto como se quiera por medio de la adecuada definición de las funciones de pertenencia.

- 6 Mientras más funciones de pertenencia se tengan mejor será el desempeño del controlador.
- 7 La complejidad y el tiempo computacional del sistema están directamente relacionados con el número de funciones de pertenencia.
- 8 Un controlador difuso presenta una característica de entrada-salida no lineal, además, es un elemento estático dentro de un lazo de control.
- 9 Mientras más particiones se tengan en el espacio de fase mejor será la asignación analítica de las funciones de transferencia.
- 10 Mediante el uso de trayectorias lingüísticas puede evaluarse la estabilidad de un controlador difuso.

RECOMENDACIONES

- 1 Impartir en la Facultad de Ingeniería tanto para las carreras de Ingeniería Eléctrica y Electrónica un curso de lógica difusa aplicada a la teoría de control.
- 2 Implementar un laboratorio para realizar prácticas en donde se aplique la teoría de control difuso.
- 3 Fomentar entre los estudiantes de las carreras impartidas por la escuela de Mecánica Eléctrica el uso de paquetes computacionales como Matlab para la simulación y evaluación del desempeño de diversos sistemas eléctricos y electrónicos.
- 4 Incluir el análisis de sistemas no lineales dentro del curso Sistemas de Control.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Choi, Byung-Jae y otros. ***Design and stability analysis of single-input fuzzy logic controller***. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* (Estados Unidos) (30): 303. 2000.
- 2 Distefano, Joseph J. y otros. **Retroalimentación y sistemas de control**. 2a ed. Colombia: 1992. 636 pp.
- 3 Dorf, Richard C. y Robert H. Bishop. ***Modern control systems***. 9a ed. Estados Unidos: Prentice Hall, 2001. 831 pp.
- 4 Driankov, D. y otros. ***An introduction to fuzzy control***. 2a ed. Estados Unidos: Springer, 1996. 316 pp.
- 5 Edminister, Joseph A. y Mahmood Navi. **Circuitos eléctricos**. 3a ed. España: McGraw-Hill, 1997. 575 pp.
- 6 Jantzen, Jan. ***Design of fuzzy controlles***.
- 7 Kuo, Benjamin C. **Sistemas de control automático**. 7a ed. México: Prentice Hall, 1996. 897 pp.
- 8 Nguyen, Hung y Elbert Walter. ***A first course in fuzzy logic***. 2a ed. Estados Unidos: Chapman & Hall/CRC, 2000. 373 pp.
- 9 Passino, Kevin y Stephen Yurkovich. ***Fuzzy control***. Estados Unidos: Adison-Wesley, 1998. 522 pp.

- 10 Pivoňka, Petr. **Comparative analysis of fuzzy PI/PD/PID controller based on classical PID controller approach.** *University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Communication Department of Control, Measurement and Instrumentation.*
- 11 Rohrs, Charles E. y otros. **sistemas de control lineal.** México: McGrawHill, 1994. 648 pp.
- 12 Schaible, Brian y Y. Lee. **Fuzzy logic based regression models for electronics manufacturing applications.** *Department of Mechanical Engineering University of Colorado.*