



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

**PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE
CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS
FÁBRICAS DE REFRESCOS**

Oscar René Quezada del Cid

Asesorado por el Ing. Romeo Neftalí López Orozco

Guatemala, marzo de 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

OSCAR RENÉ QUEZADA DEL CID

ASESORADO POR EL ING. ROMEO NEFTALÍ LÓPEZ OROZCO

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO ELÉCTRICO

GUATEMALA, MARZO DE 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Ing. Miguel Ángel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. Juan Carlos Molina Jiménez
VOCAL V	Br. Mario Maldonado Muralles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

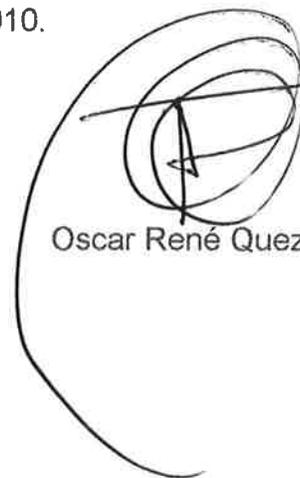
DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Saúl Cabezas Durán
EXAMINADOR	Ing. Víctor Manuel Ruiz Hernández
EXAMINADOR	Ing. Julio Rolando Barrios Archila
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, con fecha noviembre de 2010.

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a central vertical stroke, enclosed within a large, sweeping circular flourish.

Oscar René Quezada del Cid

Guatemala 9 de noviembre de 2011

Ingeniero Coordinador del Área de Electrotecnia
De la Escuela de Ingeniería de Mecánica Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala.

De manera atenta informo que he revisado el trabajo de graduación denominado “PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS”, presentado por el estudiante Oscar René Quezada del Cid.

El mencionado trabajo llena los requisitos y cumple con los objetivos planteados por lo que doy visto bueno para que proceda a realizar los trámites correspondientes.

Por tanto el autor de esta tesis y mi persona somos responsables por el contenido y conclusiones de la misma.



Ing. Romeo López
Colegiado 3364
ASESOR



Ref. EIME 03. 2012
Guatemala, 30 de ENERO 2012.

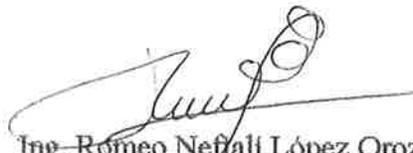
Señor Director
Ing. Guillermo Antonio Puente Romero
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica
Facultad de Ingeniería, USAC.

Señor Director:

**Me permito dar aprobación al trabajo de Graduación titulado:
"PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN
SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-
AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS",
del estudiante Oscar René Quezada del Cid, que cumple con los
requisitos establecidos para tal fin.**

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarle.

Atentamente,
ID Y ENSEÑAD A TODOS


Ing. Romeo Nefali López Orozco
Coordinador de Electrotécnica



RNLO/sro



REF. EIME 03. 2012.

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Área, al trabajo de Graduación del estudiante; OSCAR RENÉ QUEZADA DEL CID titulado: “PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS”, procede a la autorización del mismo.

Ing. Guillermo Antonio Puente Romero

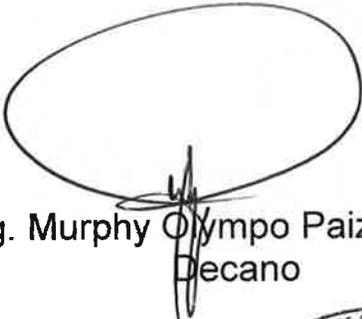


GUATEMALA, 01 DE FEBRERO 2,012.



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, al trabajo de graduación titulado: **PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID A UN CIRCUITO DE AGUA-AZÚCAR UTILIZADO EN LAS FÁBRICAS DE REFRESCOS**, presentado por el estudiante universitario **Oscar René Quezada del Cid**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE


Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
Decano



Guatemala, marzo de 2012

ACTO QUE DEDICO A:

La fuerza divina que dio origen a la vida en el universo, talvez nunca comprenderé tus motivos, ni cómo o quién eres realmente. Sólo gracias por permitirme estar aquí.

Mi mamá

Silvia del Cid, por el gran esfuerzo y sacrificio que has hecho para verme crecer.

Mi papá

Oscar Quezada, por el apoyo que siempre has brindado para alcanzar mis metas.

Por todo el tiempo y trabajo que han invertido en mí, sin condición.

Los amo!

Mis hermanos

Jacqueline, Nancy, Douglas y Kevin por compartir toda una vida conmigo.

Mis familiares

Sobrinos, abuelos (q.e.p.d.), primos y tíos.

Mis amigos

Byron Pineda, Jorge Zamora, Julio Nufio, Dieter Haussner, Jonathan Tavico, Ervin Zamora, Claudia Rosas, Aremy Villatoro, Brian Aguilar y familia, Juan Carlos Muñoz, Rodolfo Rabanales, María Fernanda Aldana Pinto, Alan Valle, Rocío Palacios, José Juan Alarcón, Raúl Milian, Aldo Navichoque, Edgar Asencio y Byron Diéguez. Cada uno de ustedes a su manera única ha sido y es especial para mí.

Mi forma de vida

Series animadas y videojuegos preferidos, pasatiempos, gustos personales y todas las cosas que odio porque hoy definen en gran parte quien soy.

AGRADECIMIENTOS A:

Facultad de Ingeniería	Por prestar todo el espacio y tiempo para adquirir conocimientos, construir mis ideas y futuro como profesional.
Biblioteca Central y de Ingeniería	Por proporcionar gran parte del material que ha servido en mí desarrollo académico.
Universidad de San Carlos de Guatemala	Sin esta casa de estudios, este proyecto no hubiera sido realizado. GRACIAS.
Asesor	Ingeniero Romeo Neftalí López Orozco, por brindarme tiempo, apoyo, pero sobre todo por la confianza depositada en el desarrollo de este trabajo.
Claudia Rosas	Su colaboración hizo parecer esta tarea complicada más sencilla y agradable.
A toda aquella persona que está apunto de leer este texto	Si este material, sirve para enriquecer los conocimientos de por lo menos una persona, el autor se sentirá satisfecho.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	V
GLOSARIO	IX
RESUMEN	XV
OBJETIVOS	XVII
INTRODUCCIÓN	XIX
1. TEORÍA ELEMENTAL DE CONTROL	1
1.1. Sistema de control	1
1.1.1. Elementos básicos del sistema de control	3
1.1.2. Objetivos de control	3
1.1.3. Componentes del sistema de control	3
1.2. Estrategia de control	5
1.2.1. Sistema de control en lazo abierto	5
1.2.2. Sistema de control en lazo cerrado	6
1.2.3. Sistema de control en lazo abierto en comparación con el sistema en lazo cerrado	7
1.3. Tipos de sistemas de control realimentados	9
1.3.1. Sistemas de control lineales vs. no lineales	9
1.3.2. Sistemas de control variantes con el tiempo vs. invariantes con el tiempo	10
1.3.3. Sistemas de control en tiempo continuo vs. en tiempo discreto	11
1.3.4. Sistemas de control monovariantes vs. multivariantes	12

2.	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	13
2.1.	Modelos matemáticos de sistemas de control.....	14
2.2.	Simplicidad vs. precisión	15
2.3.	Variable compleja.....	16
2.3.1.	Función de una variable compleja.....	17
2.3.2.	Función analítica	19
2.3.3.	Singularidad y polos de una función.....	19
2.3.4.	Ceros de una función	20
2.4.	Sistemas lineales invariantes y variantes con el tiempo.....	20
2.5.	Ecuación diferencial	21
2.5.1.	Solución general y particular de una ecuación diferencial	22
2.5.2.	Ecuación diferencial lineal	22
2.5.3.	Sistemas no lineales	24
2.6.	Ecuaciones diferenciales de primer orden y ecuaciones de estado	25
2.7.	Función de transferencia.....	27
2.7.1.	Respuesta al impulso	29
2.7.2.	Diagrama de bloques	29
2.7.2.1.	Punto de suma	32
2.7.2.2.	Punto de ramificación	32
2.7.2.3.	Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.....	32
2.7.3.	Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa.....	34
2.7.4.	Función de transferencia en lazo cerrado	35
2.7.4.1.	Sistema de lazo cerrado sujeto a una perturbación	36
2.8.	Procedimiento para dibujar un diagrama de bloques	39

2.9.	Álgebra de diagrama de bloques.....	42
2.10.	Teoría de control moderna	44
2.10.1.	Teoría de control moderna vs teoría de control clásica o convencional.....	44
2.10.2.	Estado	45
2.10.2.1.	Variables de estado.....	45
2.10.2.2.	Vector de estado.....	46
2.10.2.3.	Espacio de estado	46
2.10.3.	Función de transferencia y diagrama de bloques de sistemas multivariables.....	47
2.11.	Análisis de estabilidad en el plano complejo	51
2.11.1.	Criterio de estabilidad de <i>Routh</i>	53
2.11.2.	Aplicación del criterio de estabilidad de <i>Routh</i> a un sistema de control lineal	57
3.	SISTEMA DE CONTROL PID	59
3.1.	Tipos de realimentación del sistema de control PID.....	61
3.1.1.	Acción de control <i>on-off</i>	61
3.1.2.	Acción de control proporcional (P).....	62
3.1.3.	Acción de control integral (I)	63
3.1.4.	Acción de control proporcional-integral (PI).....	63
3.1.5.	Acción de control proporcional-derivativa (PD).....	64
3.1.6.	Acción de control proporcional-integral-derivativa (PID)	65
3.2.	Diseño de PID	66
3.2.1.	Reglas de <i>Ziegler-Nichols</i> para la sintonización de controladores PID	67
3.2.1.1.	Método basado en la curva de reacción o respuesta escalón	68

3.2.1.2.	Método de oscilación o respuesta en frecuencia.....	71
3.2.1.3.	Observación sobre las reglas de sintonización <i>Ziegler-Nichols</i>	73
3.3.	Ejemplo de sintonización por medio de las reglas <i>Ziegler-Nichols</i>	74
3.4.	Modificación del esquema de control PID	77
3.4.1.	Control PI-D.....	80
3.4.2.	Control IP-D.....	81
4.	DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN ACTUAL DE LA PLANTA	85
4.1.	Montaje de la planta.....	85
4.2.	Sistema de control actual.....	87
4.3.	Diagrama de bloques del sistema de control actual.....	87
4.4.	Observación sobre el sistema de control actual.....	90
5.	IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID	91
5.1.	Implementación del sistema de control PID	91
5.2.	Descripción de los componentes del sistema de control PID...	93
5.3.	Diagrama de bloques y función de transferencia del sistema de control PID	97
5.4.	Circuito eléctrico de mando del sistema de control PID	99
	CONCLUSIONES.....	103
	RECOMENDACIONES	105
	BIBLIOGRAFÍA.....	107
	ANEXOS.....	109

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1.	Representación general de un sistema	2
2.	Elementos básicos de un sistema de control	3
3.	Diagrama de un sistema de control genérico	4
4.	Diagrama de un sistema de control en lazo abierto	6
5.	Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado	7
6.	Plano complejo s.....	17
7.	Mapeo de los valores del plano s al plano G(s)	18
8.	Curvas características que representan no linealidad.....	25
9.	Flujo de señales (propiedad unilateral)	31
10.	Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado	33
11.	Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado con el elemento de realimentación	34
12.	Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación	37
13.	Ejemplo de procedimiento para dibujar un diagrama de bloques.....	40
14.	Representación de la ecuación de suma I(s)	40
15.	Representación de la ecuación $E_0(s)$	41
16.	Diagrama de bloques para un circuito RC.....	41
17.	Sistema multivariable	47
18.	Sistema multivariable representado por vectores	48
19.	Diagrama de bloques de un sistema multivariable.....	51
20.	Región del plano complejo que satisface las condiciones de estabilidad relativa	53

21.	Aplicación del método de <i>Routh</i> a un sistema de control lineal	58
22.	Diagrama de un sistema de control PID	60
23.	Características de la acción de control <i>on-off</i> ideal (A), y modificaciones zona muerta (B) e histéresis (C)	62
24.	Cálculo de acción de control PID	66
25.	Curva de respuesta escalón unitario con un sobrepaso máximo del 25 por ciento	68
26.	Respuesta escalón unitario de una planta	69
27.	Curva de respuesta en forma de S	69
28.	Determinación experimental de K_{cr} y P_{cr}	72
29.	Ejemplo de sintonización de un controlador PID por medio de las reglas de <i>Ziegler-Nichols</i>	74
30.	Sistema de control gobernado por un controlador PID	77
31.	Sistema de control PID sujeto a perturbaciones externas y ruido.....	78
32.	Sistema de control PID modificado sujeto a perturbaciones externas y ruido	79
33.	Sistema de control PI-D	81
34.	Sistema de control I-PD	82
35.	Circuito para la producción de mezcla agua-azúcar	86
36.	Circuito termodinámico agua-azúcar gobernado por el elemento humano	88
37.	Diagrama de bloques de sistema de control actual	89
38.	Circuito termodinámico agua-azúcar gobernado por un controlador PID	92
39.	Diagrama de bloques de sistema de control PID diseñado	97
40.	Función de transferencia y flujo de señales de cada componente	98
41.	Función de transferencia general del sistema de control PID	99
42.	Diagrama circuito eléctrico de mando del sistema de control PID	100
43.	Esquema de conexiones controlador de temperatura PID TZ4ST....	101

TABLAS

I.	Álgebra de diagramas de bloques.....	43
II.	Regla de sintonización <i>Ziegler-Nichols</i> basada en la respuesta escalón unitario de la planta.....	70
III.	Regla de sintonización <i>Ziegler-Nichols</i> basada en la ganancia crítica y período crítico	72
IV.	Especificaciones generales y eléctricas de válvula neumática RMQ 20.....	94
V.	Especificaciones de trabajo de sensor de temperatura TR 25 serie Omnigrab T	95
VI.	Especificaciones controlador de temperatura PID TZ4ST	96

GLOSARIO

Control realimentado

Se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, acción que continúa haciendo con base en esta diferencia.

Controlar

Significa verificar, medir todos o algunos parámetros de los componentes de un sistema y en base a ello, comprobar si el sistema funciona o se ajusta de la manera más aproximada posible para realizar la tarea para la cual fue programado.

Convertidor analógico-digital

Es un componente capaz de transformar una señal periódica de tiempo continuo a una función de valores discretos que de manera general, son 0 y 1.

Convertidor digital-analógico

Es un componente capaz de transformar una señal que representa valores discretos a una función periódica de tiempo continuo.

Frecuencia	Es una magnitud que representa el número de oscilaciones o repeticiones por unidad de tiempo de una función periódica.
Histéresis	Es un fenómeno de inercia, por el cual un material ofreciendo resistencia al cambio, tiene la tendencia de conservar sus propiedades. Tal fenómeno no depende sólo de las circunstancias actuales, sino también de cómo se ha llegado a esas circunstancias.
Inherente	Es una propiedad de un ser, objeto o en general un sistema que no se puede separar de él, por ser parte de su naturaleza. Esta propiedad es esencial, permanente y no depende de algún agente externo.
Insumo	Es un bien consumible utilizado en el proceso productivo de otro bien para el desarrollo de la vida humana.
Parámetro	Valor numérico o dato fijo que se considera en el estudio o análisis de una situación. Variable que incluida en una ecuación, modifica el resultado de ésta.

Perturbación

Es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada.

Proceso

Es una operación artificial o voluntaria progresiva que consiste en una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinados.

Saturación

Es un fenómeno que ocurre cuando se alcanza un límite o estado de saciedad que se produce debido al exceso de un estímulo o fuerza externa.

Señal analogical

Es una señal que representa una función matemática continua que varía en amplitud y dirección en función del tiempo. Este tipo de señales generalmente representan fenómenos electromagnéticos como voltaje, corriente, flujo magnético, etc.

Señal digital

Es una señal que representa una función matemática de valores discretos que generalmente son 0 ó 1. También describen fenómenos electromagnéticos como voltaje y corriente.

Señal exógena

Es el tipo de señal que se produce debido a causas externas y que puede ingresar a un sistema, afectándolo o influyendo en la respuesta o comportamiento del mismo.

Sistema monovisible

Se le llama así a los sistemas que trabajan en función de una variable de entrada y una variable de salida.

Sistema multivariable

Se denomina así a los sistemas que trabajan en función de más de una variable de entrada y más de una variable de salida.

Transductor

Es un dispositivo que convierte el valor de una magnitud física (presión, flujo, temperatura, etc.) en una señal eléctrica codificada ya sea en forma analógica o digital. Los sensores o transductores analógicos, envían por lo regular señales normalizadas de 0 a 5 voltios, 0 a 10 voltios ó 4 a 20 mA.

Valor de referencia

Es el valor preestablecido que se desea alcanzar por medio del funcionamiento en conjunto de los componentes de un sistema de control.

Zona muerta

Se describe zona muerta de un componente a un rango o intervalo pequeño de variaciones de entrada ante las cuales dicho componente es insensible.

RESUMEN

El material incluido en este trabajo de investigación consta de cinco capítulos. El contenido está desarrollado para ser comprendido en forma progresiva, de manera que el capítulo primero, presenta la teoría introductoria de sistemas de control, cuya dinámica es representada en la siguiente unidad por medio de los modelos matemáticos.

Los capítulos uno y dos proporcionan las bases para comprender la tercera unidad que trata sobre el diseño y la acción de control PID. Continuando con este orden, los primeros tres capítulos contienen la teoría básica que será aplicada en las secciones finales para el análisis, desarrollo e implementación de un sistema de control PID.

En esta propuesta se han realizado dos diseños, el primero es un sistema de control PID que monitorea y gobierna la temperatura de un circuito termodinámico agua-azúcar. El segundo diseño es un circuito eléctrico de mando que se adapta al sistema. Ambos diseños trabajan en conjunto para automatizar el proceso de producción de mezcla agua-azúcar.

El diagrama de bloques del sistema de control PID a implementar muestra componentes elegidos por el diseñador, sin embargo este sistema puede ser modificado, reemplazando los componentes por otros que ejerzan las mismas funciones dentro del lazo cerrado. Esta opción se puede observar en el desarrollo del capítulo cinco, donde el flujo de señales y función de transferencia del sistema no especifica algún componente de la industria en particular.

El diagrama de bloques, sólo describe la relación matemática que existe entre los elementos del lazo cerrado. Todo esto hace que el sistema de control PID diseñado sea versátil y exista la libertad de colocar una variedad de componentes que existen en el mercado.

OBJETIVOS

General

Desarrollar e implementar un sistema de control PID que permita monitorear y gobernar las variables establecidas; con la finalidad de automatizar las funciones y procesos que realiza un circuito termodinámico agua-azúcar.

Específicos

1. Describir la función principal de un sistema de control. Así también realizar una clasificación de los diferentes sistemas de control existentes.
2. Establecer los conceptos generales sobre los modelos matemáticos utilizados para representar los sistemas de control y construir un modelo que describa la dinámica del sistema de control PID a implementar.
3. Definir las generalidades que describen el funcionamiento acerca de un sistema de control proporcional integral derivativo (PID).
4. Reemplazar el elemento humano por un controlador PID, con el objetivo que el sistema de control PID diseñado, sea el que calcule el error y aplique la acción correctiva sobre la planta.

5. Automatizar la función de abrir y cerrar la válvula neumática que permite o impide el paso de vapor hacia el sistema.
6. Gobernar la variable temperatura del circuito termodinámico agua-azúcar por medio del sistema de control PID diseñado, con la finalidad de mantener la señal de salida en el valor de 80 grados *Celsius*.
7. Diseñar un circuito de mando eléctrico que se acople al inicio (puesta en marcha) y al fin del funcionamiento (paro) del sistema de control PID.

INTRODUCCIÓN

Observar y controlar un proceso, es una tarea muy compleja, en algunos casos requiere una atención especial, la cual el hombre podría perder por cansancio, distracción o incluso equivocación. Esta situación, podría provocar riesgos al trabajador, maquinaria y al proceso.

Existen algunos procesos que exigen condiciones de trabajo que al ser humano le sería imposible controlar de manera permanente, por ejemplo bajo el nivel del mar, niveles de temperatura muy altos, alturas sobre el nivel del mar donde el aire es muy delgado y el oxígeno es escaso, etc. Sin mencionar que el hombre de por sí no puede controlar un proceso de forma permanente, ya que posee necesidades esenciales tales como comer y dormir para recuperar energía.

Una producción a gran escala exige grandes instalaciones que el ser humano no es capaz de manejar, debido a que cualquier desviación produce grandes pérdidas, tanto en consumo de materias primas (insumos) o energía, lo que conlleva a una disminución en la calidad del producto y obviamente a una ineficiencia energética.

Por las razones anteriores algunos procesos sólo se pueden realizar por medio del control automático. Por ejemplo, el control numérico de las máquinas-herramientas en los procesos de manufactura, el diseño de sistemas de pilotos automáticos y en una infinidad de procesos en la industria como transporte, embalaje, control de temperatura, control de humedad, aire acondicionado, etc.

El control automático ha desempeñado una función fundamental en el avance de la ciencia e ingeniería, casi todas las actividades que se realizan en la vida diaria conllevan a la utilización de un sistema de control automático, desde que el reloj indica que es hora de levantarse, para luego utilizar el horno de microondas en el desayuno, encender el auto para ir a trabajar o estudiar, observar el semáforo durante el tráfico, llamar a alguien por el celular o cualquier dispositivo portátil, utilizar la computadora durante el día, comprar un almuerzo donde los vendedores utilizan un cajero de cobro automático.

Para al final del día regresar a casa a seguir utilizando dispositivos o electrodomésticos que son gobernados por un sistema de control automático.

La búsqueda de alcanzar estos objetivos y con el avance constante de la tecnología, requiere el diseño de sistemas de control que implementen ciertas estrategias de control que permitan conseguir tales objetivos. En la actualidad el sistema de control PID es la solución más común a los problemas prácticos de control y una gran parte de los lazos realimentados que existen hoy en día son controlados por el algoritmo de un controlador PID, por este motivo la mayoría de ingenieros y científicos deben poseer un amplio conocimiento en este campo.

1. TEORÍA ELEMENTAL DE CONTROL

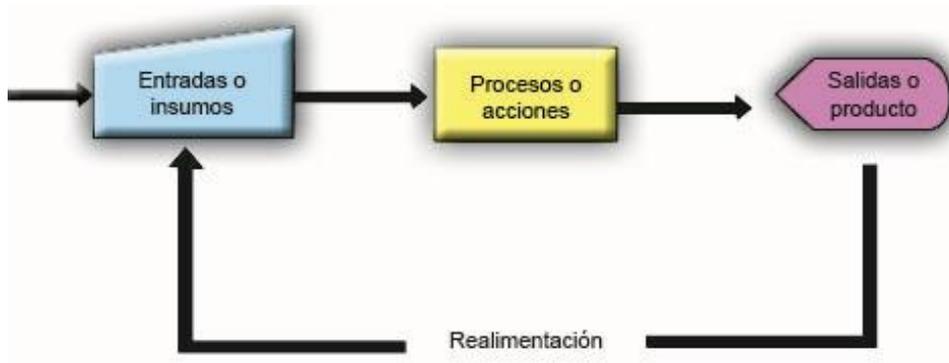
Este capítulo tiene la finalidad de introducir principios y conceptos básicos sobre la teoría aplicada en control automático, tales como sistemas de control y sus objetivos, componentes y elementos de un sistema de control, resultados o salidas, etc. Se describe la forma en que se aplica la estrategia de control para alcanzar los objetivos planteados para un sistema, se realiza la descripción de la acción de control en lazo abierto y en lazo cerrado. Además se abarca el tema de realimentación en un sistema de control, haciendo una comparación y clasificación de este tipo de sistemas.

1.1. Sistema de control

Todo sistema puede ser concebido como un conjunto de elementos que interactúan para lograr un objetivo en común. Un sistema no necesariamente es físico.

El concepto de sistema se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos, tales como los que se encuentran en la economía y varios aspectos sociales y naturales, por tanto, el concepto de sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares. En general un sistema se puede representar por medio de un diagrama de bloques, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. **Representación general de un sistema**



Fuente: elaboración propia.

Un sistema de control, es un tipo de sistema que se caracteriza por la presencia de una serie de elementos que permiten influir en el funcionamiento del sistema. La finalidad de un sistema de control es conseguir, mediante la manipulación de las variables de control, un dominio sobre las variables de salida, de modo que estas alcancen valores previamente establecidos. Un sistema de control ideal debe ser capaz de conseguir su objetivo cumpliendo los siguientes requisitos:

- Garantizar la estabilidad y particularmente ser robusto frente a perturbaciones y errores en los modelos.
- Debe tener la eficiencia más alta posible, según un criterio preestablecido. Normalmente este criterio consiste en que la acción de control sobre las variables de entrada, sea realizable, evitando comportamientos bruscos e irreales.

- Ser sencillo y versátil de implementar, cómodo de operar en tiempo real con ayuda de un ordenador.

1.1.1. Elementos básicos del sistema de control

Los elementos básicos de un sistema de control, pueden ser definidos como; objetivos de control (variable manipulada), componentes del sistema de control y resultados o salidas (variable controlada).

Figura 2. Elementos básicos de un sistema de control



Fuente: elaboración propia.

1.1.2. Objetivos de control

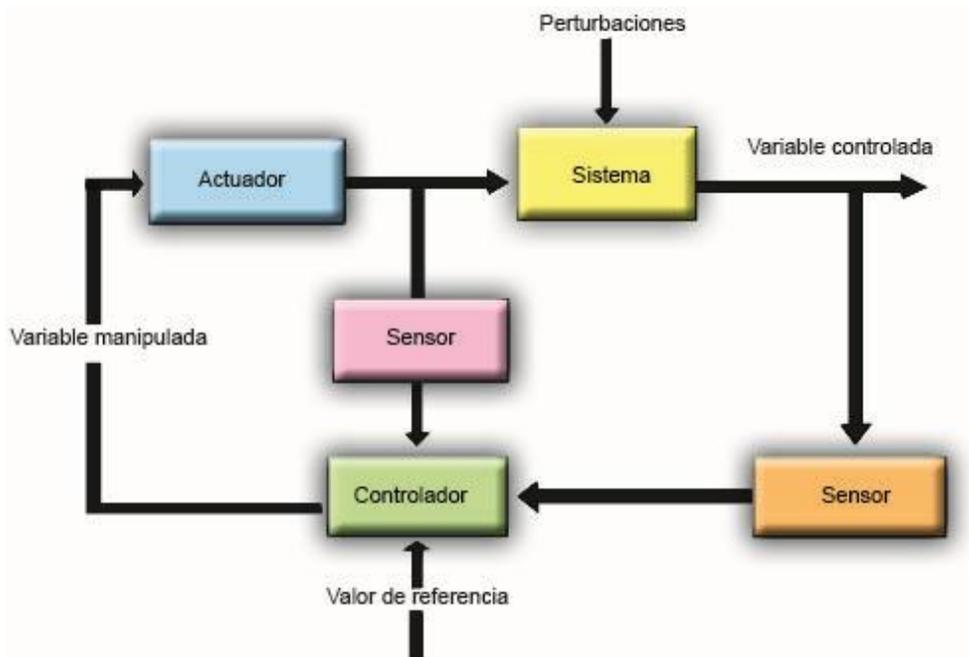
Los objetivos se pueden identificar como entradas, señal actuante o variable manipulada. La variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada.

1.1.3. Componentes del sistema de control

Conforman el arreglo de elementos físicos del sistema interconectados, de forma que puedan comandar o gobernar la dinámica del sistema. Los componentes básicos o elementales son sensores, controlador y actuador.

- Sensores: permiten conocer el valor de la o las variables de interés a medir.
- Controlador: utilizando los valores determinados por los sensores y el valor de referencia o *set point*, calcula la acción que debe aplicarse para modificar las variables de control en base a cierta estrategia.
- Actuador: es el mecanismo que ejecuta la acción calculada por el controlador y que modifica las variables de control.
- Resultados o salidas: los resultados o salidas son también llamados variable controlada y es la cantidad que se mide y se controla.

Figura 3. Diagrama de un sistema de control genérico



Fuente: elaboración propia.

1.2. Estrategia de control

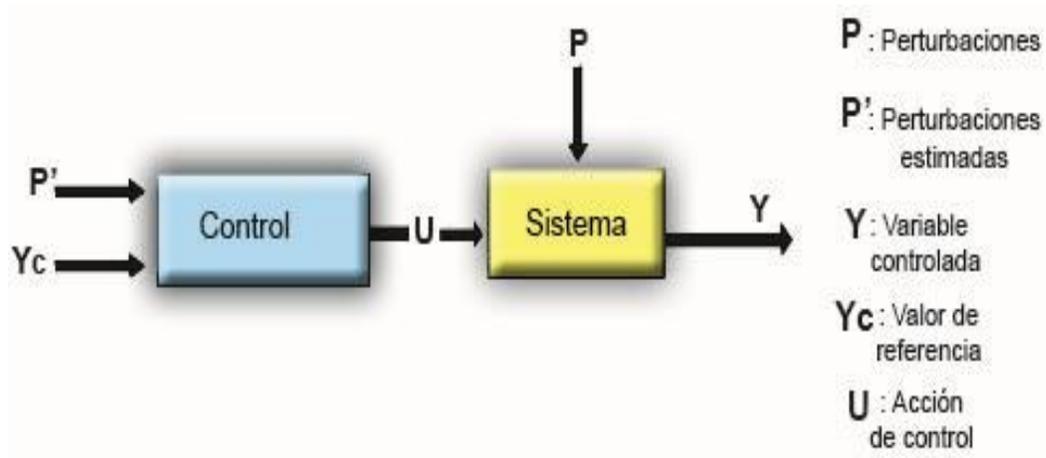
La estrategia de control hace referencia a la naturaleza y la dirección de los lazos existentes entre las variables medidas y/o controladas y las variables de control. Se distinguen dos tipos de estrategias en función de la naturaleza de la información utilizada para calcular la acción de control del sistema, denominadas lazo abierto y lazo cerrado.

1.2.1. Sistema de control en lazo abierto

La acción de control se calcula conociendo la dinámica del sistema, los valores de referencia y estimando las perturbaciones. Esta estrategia de control puede compensar los retrasos inherentes del sistema, anticipándose a las necesidades del usuario. Sin embargo, el lazo abierto generalmente es insuficiente, debido a los errores del modelo y a los errores en la estimación de las perturbaciones. Por ello, es común la asociación de lazo; cerrado-lazo abierto, de modo que el lazo cerrado permite compensar los errores generados por el lazo abierto. Es muy importante mencionar que la acción de control en un sistema en lazo abierto no depende de la salida.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración.

Figura 4. Diagrama de un sistema de control en lazo abierto



Fuente: elaboración propia.

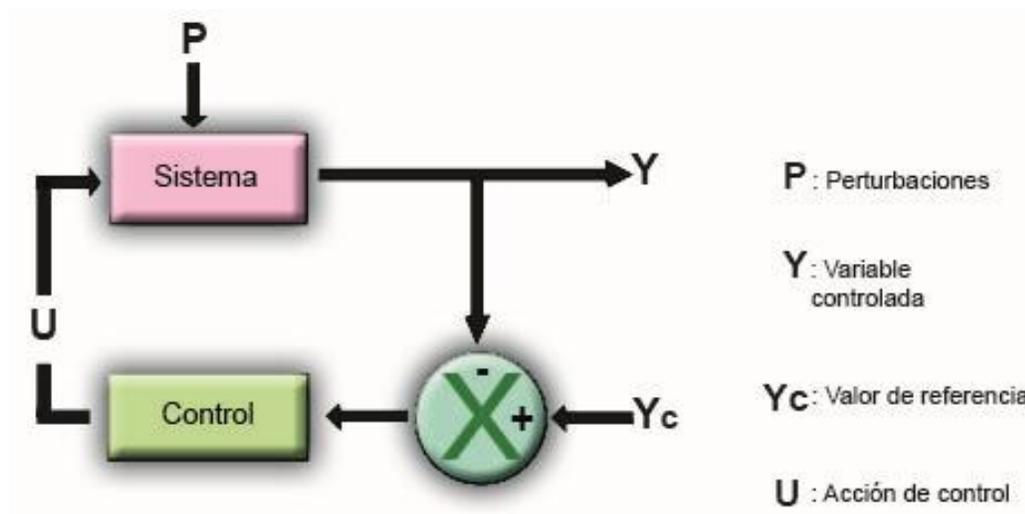
1.2.2. Sistema de control en lazo cerrado

La acción de control se calcula en función del error medido entre la variable controlada y el valor de referencia deseado. Las perturbaciones, aunque sean desconocidas son consideradas indirectamente mediante sus efectos sobre las variables de salida. Este tipo de estrategia de control puede aplicarse a cualquier variable controlada. La gran mayoría de los sistemas de control que se desarrollan en la actualidad son en lazo cerrado.

Los sistemas de control en lazo cerrado se denominan también sistemas de control realimentados. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado son equivalentes.

En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error, que representa la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (esta puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida, sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

Figura 5. **Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado**



Fuente: elaboración propia.

1.2.3. Sistema de control en lazo abierto en comparación con el sistema en lazo cerrado

Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema.

Por tanto, es posible usar componentes considerados a tal grado precisos y en algunas ocasiones baratos, para obtener el control adecuado de una planta determinada, por otro lado conseguir los mismos resultados es casi imposible en el caso de un sistema en lazo abierto. Desde el punto de vista de la estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es una función principal en el sistema de control en lazo cerrado, lo cual puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema.

La valoración de la energía de salida determina en forma parcial el costo, el peso y el tamaño de un sistema de control. La cantidad de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que la que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costos y potencias más grandes.

Para disminuir la energía requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto cuando puede aplicarse, por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un desempeño satisfactorio del sistema general.

1.3. Tipos de sistemas de control realimentados

Los sistemas de control realimentados pueden ser clasificados en diversas formas, de acuerdo con el método de análisis de diseño, los sistemas de control se clasifican en lineales y no lineales, variantes con el tiempo e invariantes con el tiempo.

En referencia con el tipo de señales procesadas por el sistema, se clasifican en sistemas de tiempo continuo y tiempo discreto (señales analógicas y señales digitales respectivamente). Dependiendo de la cantidad de entradas y salidas que los sistemas de control pueden procesar, estos se dividen en monovariantes y multivariantes.

En ocasiones los sistemas de control se clasifican de acuerdo a su propósito principal de trabajo, nombrándolos en base al tipo de variable que controlan en la salida. Por ejemplo sistema de control de posición, sistema de control de velocidad, sistema de control de temperatura, etc.

1.3.1. Sistemas de control lineales vs. no lineales

Cuando las magnitudes de las señales que procesa un sistema de control, están limitadas a operar en intervalos, en los cuales los componentes del sistema describen una característica proporcional efecto- causa, el sistema es considerado lineal para dicho intervalo. Cuando las magnitudes de las señales se extienden más allá del rango o intervalo de proporción lineal, dependiendo del grado de no linealidad, el sistema no debe seguir siendo considerado lineal.

En la práctica los sistemas lineales no existen, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado.

Otra forma de definir un sistema lineal, es mediante el principio de superposición, si a un sistema es posible aplicar este principio, dicho sistema puede ser considerado lineal. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultanea de dos o más señales de entrada diferentes, es la suma de cada respuesta individual.

En un sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula considerando el efecto que realiza sobre el sistema, solo una señal de entrada a la vez, anulando el efecto que ejercen las otras señales de entrada, siguiendo con este orden se calcula el efecto que haría cada una de las restantes señales, el resultado obtenido sería la sumatoria de cada uno de los resultados producidos por todas las señales de entrada que actúan sobre el sistema.

Debido al concepto anterior un sistema es considerado no lineal, si no es posible aplicar el principio de superposición. En consecuencia para un sistema no lineal la respuesta a varias entradas no puede calcularse tratando cada uno de los efectos a la vez y sumando los resultados.

1.3.2. Sistemas de control variantes con el tiempo vs. invariantes con el tiempo

Cuando los parámetros del sistema de control son estacionarios con respecto al tiempo durante la operación del sistema, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. De igual forma cuando los parámetros de un sistema de control varían con el tiempo o son función del tiempo, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

En la práctica la mayoría de sistemas de control contienen elementos que varían respecto al tiempo, por ejemplo los inductores, capacitores y resistencias son elementos cuyos voltajes y corrientes varían en función del tiempo.

Un sistema variable en el tiempo sin no linealidades, es considerado aún un sistema lineal, el análisis y diseño de este tipo de sistemas es mucho más complejo que el de un sistema lineal invariable en el tiempo, por esta razón se hace uso de la transformada de *Laplace* en algunos sistemas para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

1.3.3. Sistemas de control en tiempo continuo vs. en tiempo discreto

En un esquema analógico, todas las variables son función de un tiempo continuo; en cambio, en un esquema digital las variables se conocen en unos instantes determinados o en un tiempo discreto.

Los sistemas de control digital presentan una serie de ventajas tales como; una menor susceptibilidad al deterioro debido al transcurso del tiempo o a factores del entorno, poseen componentes menos sensibles a ruidos y vibraciones en las señales, tienen mayor versatilidad a la hora de programar, presentan mejor sensibilidad frente a la variación de parámetros.

La evolución de los ordenadores y de sus capacidades de cálculo ha permitido reducir los inconvenientes que presentan los controladores digitales, por lo que su uso se ha extendido en gran cantidad.

Las variables medidas en el sistema mediante los sensores, llegan al controlador en forma analógica, de modo que en el caso de un controlador digital es necesario utilizar dos convertidores de señal, uno analógico-digital, que permite traducir la señal para que el controlador pueda realizar los cálculos necesarios, y uno digital-analógico para poder convertir las órdenes de control calculadas por el controlador en señales continuas, de modo que los actuadores puedan ejecutar los cambios precisos.

1.3.4. Sistemas de control monovariantes vs. multivariantes

Un controlador es monovariante, si trabaja nada más con una variable de entrada y una variable de salida. Este tipo de sistemas procesa variables escalares. En cambio, un controlador es multivariante cuando trabaja con más de una variable de entrada y más de una variable de salida, en consecuencia este tipo de sistemas procesa variables de entrada y salida que son vectoriales.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Los sistemas de control utilizados actualmente en la industria, son por lo general no lineales, sin embargo, se pueden aproximar estos sistemas por medio de modelos matemáticos lineales. En la práctica las especificaciones de desempeño determinadas para cada sistema en particular determinan que método es el más conveniente de utilizar a la hora del diseño.

Si las especificaciones de desempeño se presentan en términos de las características de la respuesta transitoria y/o dominio de la frecuencia, se debe utilizar un enfoque convencional, basado en la respuesta en frecuencia. Si las especificaciones de desempeño se presentan como índices o indicadores de desempeño en términos de las variables de estado. La propuesta de diseño debe estar basada en el método de enfoque de control moderno.

Los sistemas que pueden diseñarse a través de un enfoque convencional están limitados a una salida y una entrada, y son lineales e invariables con el tiempo. Por otro lado, la teoría de control moderna permite diseñar sistemas con varias entradas y salidas (multivariables), y estas a su vez pueden ser variables o invariables en el tiempo.

Después de diseñar un sistema, se debe verificar si satisface todas las especificaciones de desempeño. Si no las cumple, se repite el proceso de diseño, ajustando los parámetros o modificando la configuración del sistema hasta que se cumplan las especificaciones determinadas.

Por lo general, es conveniente que el sistema diseñado exhiba la menor cantidad posible de errores, en respuesta a la señal de entrada. Por este motivo, debe ser razonable el amortiguamiento del sistema. La dinámica del sistema debe ser relativamente insensible a variaciones pequeñas en sus parámetros. Las perturbaciones no deseadas deben estar bien atenuadas.

2.1. Modelos matemáticos de sistemas de control

Un modelo matemático de un sistema, se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión. Se debe tener presente que un modelo matemático, no es único para un sistema determinado, ya que dependiendo de la perspectiva de cada diseñador, el sistema puede representarse de una diversidad de maneras. Por lo que se puede obtener una variedad de modelos matemáticos para un mismo sistema.

Los modelos matemáticos de los sistemas pueden adoptar muchas formas, dependiendo del sistema que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo a utilizar puede ser más conveniente que otro. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes con el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otro modelo.

La dinámica de muchos sistemas, sean estos mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe generalmente en términos de ecuaciones diferenciales.

Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado, como las leyes de *Newton* para sistemas mecánicos y las leyes de *Kirchoff* para sistemas eléctricos, etc.

2.2. Simplicidad vs. precisión

En la obtención de un modelo matemático, se debe establecer un equilibrio entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. Es posible mejorar la precisión de un sistema si se aumenta su complejidad en el análisis, ello implica aumentar el número de ecuaciones que describen la dinámica del sistema.

Si el sistema en sus condiciones no exigiere precisión extrema, es preferible obtener un modelo razonablemente simplificado. De hecho, por lo general basta con obtener un modelo matemático adecuado para el problema que se considera.

Obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, implica ignorar ciertas características físicas inherentes al sistema. Si lo que se pretende es obtener un modelo lineal de parámetros concentrados (modelo que emplea ecuaciones diferenciales ordinarias "EDO"), resulta necesario ignorar ciertas no linealidades y parámetros distribuidos (los que producen ecuaciones con derivadas parciales).

Si los efectos que tienen estas propiedades ignoradas sobre el sistema, son pequeños o en algunos casos despreciables, se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico.

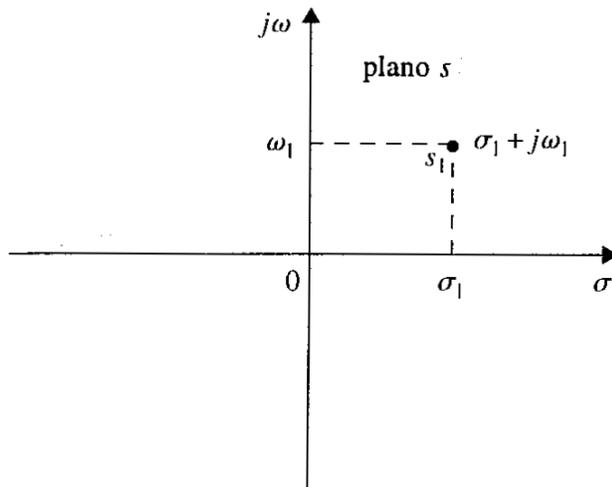
Es necesario considerar que un modelo lineal aproximado, que surge a razón de despreciar ciertas propiedades para el sistema, es único en cada situación o problema presentado, por ejemplo un modelo de parámetros concentrados lineal que puede ser válido si el sistema opera en baja frecuencia, es probable que no sea satisfactorio en frecuencias muy altas, debido a que la propiedad no considerada de los parámetros distribuidos puede convertirse en un factor importante en el comportamiento dinámico del sistema a altas frecuencias.

2.3. Variable compleja

Un número complejo es aquel que posee una parte real σ y una parte imaginaria $j\omega$, las componentes reales van colocadas en el eje que comúnmente se denomina eje de las abscisas y la parte imaginaria va colocada sobre el eje vertical o eje de las ordenadas. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, entonces se denomina variable compleja. La variable compleja será representada por medio de $S = \sigma + j\omega$.

La figura 6, ilustra el plano complejo S , donde cualquier punto arbitrario S_1 , está determinado por una parte real σ_1 y una parte imaginaria $j\omega_1$. En el plano s , se puede observar que existen valores que no contienen parte imaginaria $j\omega$, entonces es válido afirmar que los números reales que se han utilizado en cálculos aritméticos, son simplemente números imaginarios con su parte $j\omega = 0$. Entonces es válido afirmar que siempre se han utilizado estos números, solo que la mayoría de estudiantes no se ha percatado de este suceso.

Figura 6. Plano complejo s



Fuente: Benjamín C. Kuo. Sistemas de control automático. Séptima edición. p. 22.

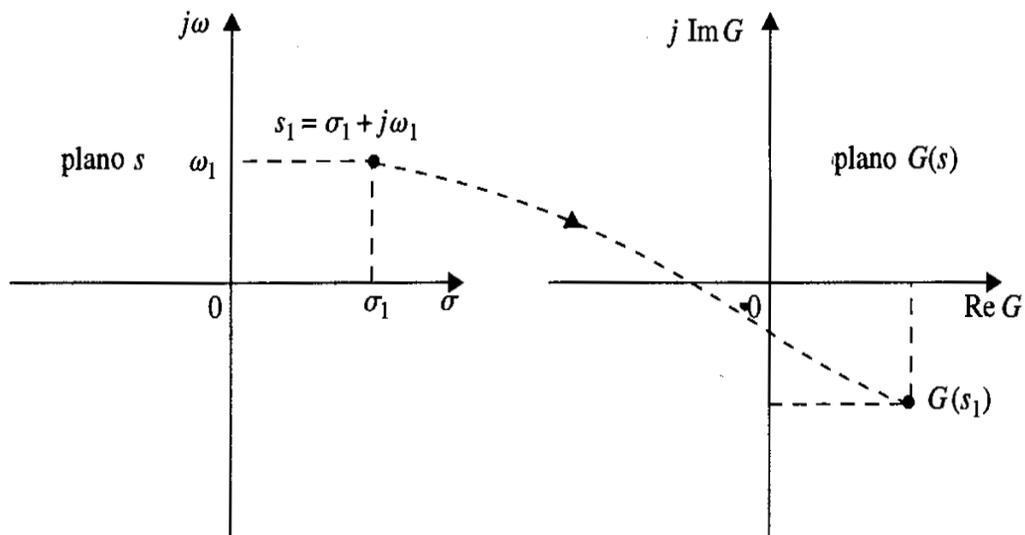
2.3.1. Función de una variable compleja

Se dice que una función $G(s)$, es una imagen o función de variable compleja, si para cada valor de s correspondiente al plano complejo existe uno o más valores que corresponden a $G(s)$. Debido a que la variable s , se define por medio de su parte real y parte imaginaria, la función $G(s)$ también es representada por su parte real e imaginaria.

No es necesario mencionar que tanto la variable compleja s y la función compleja $G(s)$, pueden contener únicamente parte real o solo parte imaginaria, incluso el cero es un número complejo y valor de función compleja. La función compleja será determinada por $G(s) = ReG(s) + jImG(s)$. Donde $ReG(s)$ denota la parte real de la función y $jImG(s)$ la parte imaginaria de la función.

La función $G(s)$ también es representada por medio de un plano donde se refleja la imagen del plano s , el plano complejo $G(s)$, se ilustra en la figura 7, la parte $\text{Re}G(s)$ va colocada en el eje de las abscisas y la parte $j\text{Im}G(s)$ en el eje de las ordenadas. Si para cada valor de s , existe solo una imagen o valor de $G(s)$, se dice entonces que $G(s)$ es una función univaluada y el mapeo de los puntos del plano s al plano $G(s)$ se describe como un solo valor o mapeo uno a uno. Sin embargo existen muchas funciones, cuyo mapeo desde el plano de la variable compleja no es un solo valor para cada punto.

Figura 7. **Mapeo de los valores del plano s al plano $G(s)$**



Fuente: Benjamín C. Kuo. Sistemas de control automático. Séptima edición. p. 23.

2.3.2. Función analítica

Una función $G(s)$ se denomina analítica en una región del plano s , si la función y todas sus derivadas existen en dicha región. Por ejemplo la función $F(s) = 1/s(s + 2)$, es analítica en cualquier punto del plano s , excepto en los puntos $s = 0$ y $s = -2$. En estos dos puntos la función tiende a infinito, además para que la derivada exista en algún punto, la función debe ser continua en ese punto. La función $H(s) = s + 2$ por ejemplo, existe en todo el plano complejo, por tanto es una función analítica en todo el plano complejo s .

2.3.3. Singularidad y polos de una función

Las singularidades de una función, son los puntos en el plano s , donde la función no es continua o no existe, y en consecuencia sus derivadas tampoco existen. Un polo es el tipo más común de singularidad de una función, este es muy importante en la teoría de control clásica y en el criterio de estabilidad. Si una función $G(s)$ es analítica y univaluada alrededor de S_i , se dice que tiene un polo de orden r en $s = s_i$, si el límite:

$$\lim_{s \rightarrow s_i} [(s - s_i)^r G(s)] \quad (1)$$

Tiene un valor finito diferente de cero. El denominador de la función $G(s)$, debe incluir el factor $(s - s_i)^r$. Para aclarar la situación se considera la función:

$$G(s) = \frac{5(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)^2}$$

Esta función contiene un polo en el origen, un polo en el valor $s = -2$ y polo de segundo grado en el valor $s = -3$. También se puede decir que la función es analítica en todo el plano s , excepto en estos polos.

2.3.4. Ceros de una función

Si una función $G(s)$, tiene un polo en $s = s_i$, se dice que tiene un cero de orden r en $s = s_i$, si el límite:

$$\lim_{s \rightarrow s_i} [(s - s_i)^{-r} G(s)] \quad (2)$$

Tiene un valor finito diferente de cero. Se puede decir que $G(s)$ tiene un cero de orden r en $s = s_i$, si $1/G(s)$ tiene un polo en de orden r en $s = s_i$. Por ejemplo al considerar la función:

$$F(s) = \frac{4(s + 2)}{s(s + 1)(s + 6)^2}$$

$F(s)$ tiene un cero en $s = -2$. También se observa que $1/F(s)$, tiene un polo en $s = -2$.

2.4. Sistemas lineales invariantes y variantes con el tiempo

Esta sección hace referencia al tipo o clasificación de ecuaciones que describen la dinámica de los sistemas de control. Alguno de los sistemas que se describió en el capítulo uno, podría ser representado por una o varias ecuaciones diferenciales lineales que dependen del tiempo.

También podría ser posible, representar la dinámica de alguno de estos sistemas por medio de una o más ecuaciones diferenciales lineales, en las cuales la variación de sus parámetros no depende del tiempo. En la siguiente sección se desarrollará brevemente el tema de ecuaciones lineales diferenciales para entender más este tema.

2.5. Ecuación diferencial

Se define de esta manera, a aquella ecuación que contiene derivadas en sus términos. Si la ecuación contiene una sola variable independiente recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria (EDO). Si la ecuación contiene más de una variable independiente, apareciendo así sus derivadas parciales, recibe el nombre de ecuación diferencial con derivadas parciales.

Ejemplos

$$\frac{dy}{dx} = x^{3/2} + 5x^{1/2} + 2, \text{ ecuación EDO}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x_{y^2} + e^{-2xy^2} + 5, \text{ ecuación con derivadas parciales}$$

Se denomina orden de una ecuación diferencial, al orden de la mayor derivada que aparezca en ella. Y se llama grado de una ecuación diferencial al grado de la derivada de mayor orden que aparezca en ella.

Ejemplos

$$\frac{dy}{dx} = 3x + x^2 + 1, \text{ EDO de primer orden y primer grado}$$

$\frac{y'}{y} - y^2 + 5 = 0$, EDO de segundo orden y primer grado

$3(y'')^3 + 2y' = 0$, EDO de segundo orden y tercer grado

2.5.1. Solución general y particular de una ecuación diferencial

Se define solución general de una ecuación diferencial, a toda relación entre las variables libres de derivadas, que satisface dicha ecuación diferencial. Por lo común, la solución general de una ecuación diferencial de orden n , tiene n constantes. Integrar o resolver una ecuación diferencial, es hallar su solución general. La solución general es también conocida como una familia de curvas o un haz de curvas.

La solución particular de una ecuación diferencial, es aquella que se obtiene a partir de la solución general, dando valores a las constantes y aplicando condiciones iniciales. Esto se realiza fijando un punto por donde debe pasar necesariamente la curva de la ecuación diferencial, de esta manera existe un único valor de las constantes y como resultado se obtiene una ecuación integral que satisface las condiciones de la ecuación diferencial.

2.5.2. Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial lineal ordinaria, es una expresión que tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (3)$$

Los aspectos que definen que una ecuación diferencial sea lineal, es que no aparecen productos de la función incógnita consigo misma, ni con alguna de sus derivadas. Y también que las potencias a la que está elevada la función y sus derivadas, no son diferentes de uno o cero. Es decir, una ecuación diferencial ordinaria es considerada lineal si cumple con los siguientes requisitos:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado o algunas de ellas aparecen representadas por la unidad, en otras palabras, la potencia de todo término donde aparece la variable “y” es uno o cero.
- Los coeficientes o expresiones que multiplican a la función y sus derivadas, solo están expresados en función de la variable independiente, esto es la variable “y”, al igual que sus derivadas no pueden estar acompañadas por productos que dependan de “y”.
- Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación. Por lo que es posible aplicar el principio de superposición.

Es necesario enfatizar que todo el análisis se ha realizado utilizando “x”, como variable independiente y se utilizó “y” para representar la variable dependiente. Es totalmente obvio que el nombre o carácter que designa la variable dependiente e independiente puede ser cualquiera al realizar un análisis. Por ejemplo t, s, w, v etc. En el análisis de sistemas de control es muy utilizado el carácter “s” y “t”, ya que representan la dependencia de la frecuencia y el tiempo respectivamente. Las siguientes expresiones, son algunos ejemplos de ecuaciones lineales diferenciales:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{dx}{dt} + 5 = 2x$$

$$\frac{d^6x}{dt^6} + 7\frac{d^4x}{dt^4} = -6\frac{dx}{dt} - 3 + 5$$

2.5.3. Sistemas no lineales

Estos sistemas están representados por ecuaciones diferenciales, que no cumplen con las características de linealidad que han sido mencionadas. También se sabe que un sistema es no lineal, si no es posible aplicar el principio de superposición. Entonces, para un sistema no lineal la respuesta a dos o más entradas, no puede calcularse tratando cada una a la vez y sumando los resultados. Los siguientes, son ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \sin t$$

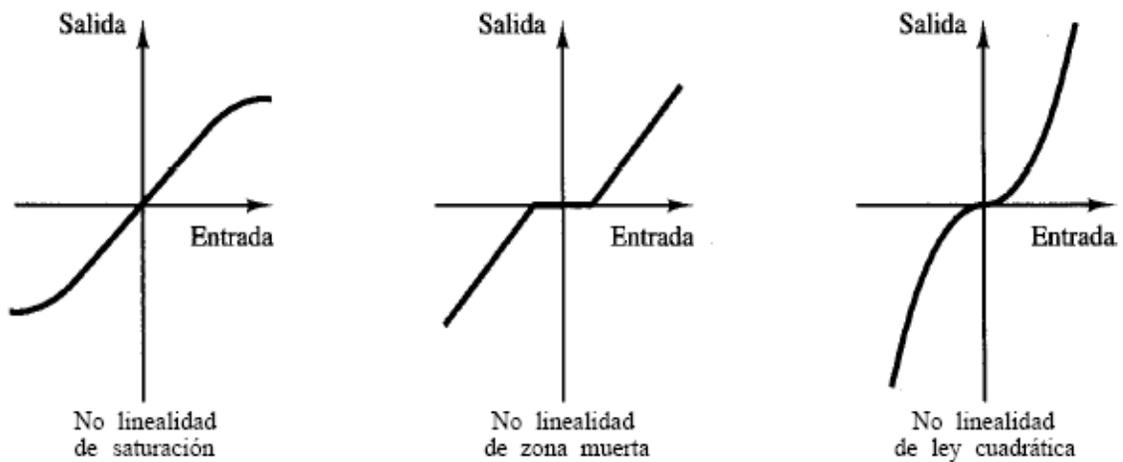
$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 4)\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dx} + x^3 = 3$$

En la práctica, muchos sistemas electromecánicos, hidráulicos y neumáticos, involucran relaciones no lineales entre las variables. Por ejemplo, la salida de un componente puede saturarse para señales de entrada grandes,

podría existir una zona muerta que afecte las señales pequeñas, o simplemente los componentes del sistema de control presentan una relación causa-efecto que no es proporcional (ley de la no linealidad cuadrática). Los siguientes son ejemplos de curvas características de no linealidad:

Figura 8. **Curvas características que representan no linealidad**



Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 59.

2.6. Ecuaciones diferenciales de primer orden y ecuaciones de estado

En general una ecuación diferencial de enésimo orden se puede descomponer en n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Esto se realiza debido a que resulta más sencillo resolver ecuaciones diferenciales de primer orden que otras de un orden mayor, lo descrito se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= Y(t) \\
&\downarrow \\
X_2(t) &= \frac{dY(t)}{dt} = \frac{dX_1(t)}{dt} \\
&\downarrow \\
X_3(t) &= \frac{d^2Y(t)}{dt^2} = \frac{dX_2(t)}{dt} \\
&\downarrow \\
X_n(t) &= \frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Las igualdades anteriores, en referencia con la teoría de control moderna son conocidas como variables de estado. De esta forma una ecuación diferencial de enésimo orden se descompone en n ecuaciones diferenciales de primer orden. En la teoría de control moderna, se le conoce como ecuaciones de estado a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1(t)}{dt} &= X_2(t) \\
\frac{dX_2(t)}{dt} &= X_3(t)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{dX_n(t)}{dt} = -a_0X_1(t) - a_1X_2(t) - a_0X_1(t) - \dots - a_{n-2}X_{n-1}(t) - a_{n-1}X_n(t) + f(t)$$

La última ecuación de estado, se obtiene de igualar el término de la derivada de mayor orden con la expresión representada por la ecuación (3), que fue descrita como la definición general de ecuación diferencial lineal:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y - f(t) = \frac{dX_n(t)}{dt}$$

2.7. Función de transferencia

En la teoría de control, las funciones de transferencia se utilizan para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo.

Se define función de transferencia de un sistema o un componente, al cociente entre la transformada de *Laplace* de la salida (función de respuesta) y la transformada de *Laplace* de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. La relación entrada-salida de un sistema lineal invariante respecto al tiempo, se describe mediante la siguiente ecuación diferencial de enésimo orden con coeficientes reales constantes:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_n \frac{d^m u(t)}{dt^n} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (n \geq m) \quad (6)$$

En donde “y” es la salida del sistema y “u” es la entrada. La función de transferencia de este sistema se obtiene tomando la transformada de *Laplace* de ambos miembros de la ecuación (6), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, o bien:

$$\frac{L[\text{salida}]}{L[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0} \quad (7)$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema, mediante ecuaciones algebraicas en s . Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual n , el sistema se denomina sistema de n -ésimo orden. La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo. Sin embargo, el enfoque de la función de transferencia se usa extensamente en el análisis y diseño de dichos sistemas.

A continuación se describirá algunas de las características y ventajas de utilizar la función de transferencia como un modelo matemático para representar la dinámica de un sistema de control:

- La función de transferencia es una propiedad del sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
- La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
- La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema (las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas).
- Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.

- Si se desconoce la función de transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

2.7.1. Respuesta al impulso

Se considera de nuevo un sistema lineal e invariante en el tiempo con $u(t)$ como función de entrada o excitación y la función de salida o respuesta como $y(t)$. El sistema puede ser representado por una función llamada respuesta al impulso $g(t)$, esta se define como la respuesta o salida de un sistema cuando la entrada es una función de impulso unitario $\delta(t)$. Una vez se conoce la respuesta al impulso de un sistema lineal, la salida $y(t)$, para cualquier entrada $u(t)$, se puede encontrar por la función de transferencia.

En términos simples, la respuesta al impulso, es la que se genera en la salida de un sistema frente a una señal muy breve o impulso en la entrada.

2.7.2. Diagrama de bloques

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones que lleva a cabo cada componente, en la ingeniería de control por lo general se usa una representación denominada diagrama de bloques.

Un diagrama de bloques se puede utilizar simplemente para describir la composición e interconexión de un sistema (no se proporciona ningún detalle matemático, simplemente muestra como se conectan los componentes del sistema), o se puede emplear, junto con funciones de transferencia, para describir las relaciones causa-efecto a través de todo el sistema, en este caso los bloques muestran la dinámica de los componentes por medio de ecuaciones.

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente e indica el flujo de señales. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática que solo es abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

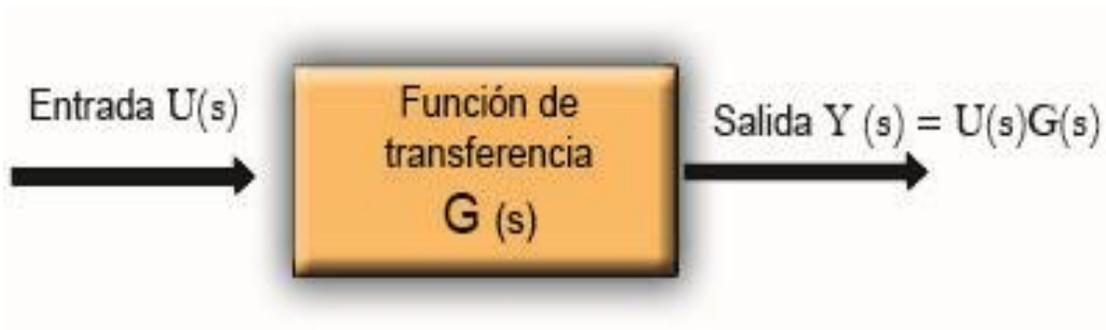
En un diagrama de bloques se enlazan una con otra todas las variables del sistema, mediante bloques funcionales. El bloque funcional, es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida.

Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales.

Se debe mencionar que la señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas como se muestra la figura 9. Por tanto, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral.

Se observa que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia en el bloque.

Figura 9. **Flujo de señales (propiedad unilateral)**



Fuente: elaboración propia.

Las ventajas de la representación de un sistema mediante diagramas de bloques, se basan en la facilidad de formar el diagrama general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño global del sistema. En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo.

Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

En un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y debido a que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

2.7.2.1. Punto de suma

Es un comparador en el que puede ingresar una o más señales, que al ser procesadas, se obtiene como resultado una salida denominada de manera general como señal de error. El signo más o menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las magnitudes de las señales que se sumen o resten posean las mismas dimensiones o unidades de medida.

2.7.2.2. Punto de ramificación

Es aquel a partir del cual, la señal de un bloque se toma de modo que esta llegue o se dirija a otros bloques o puntos de suma.

2.7.2.3. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado

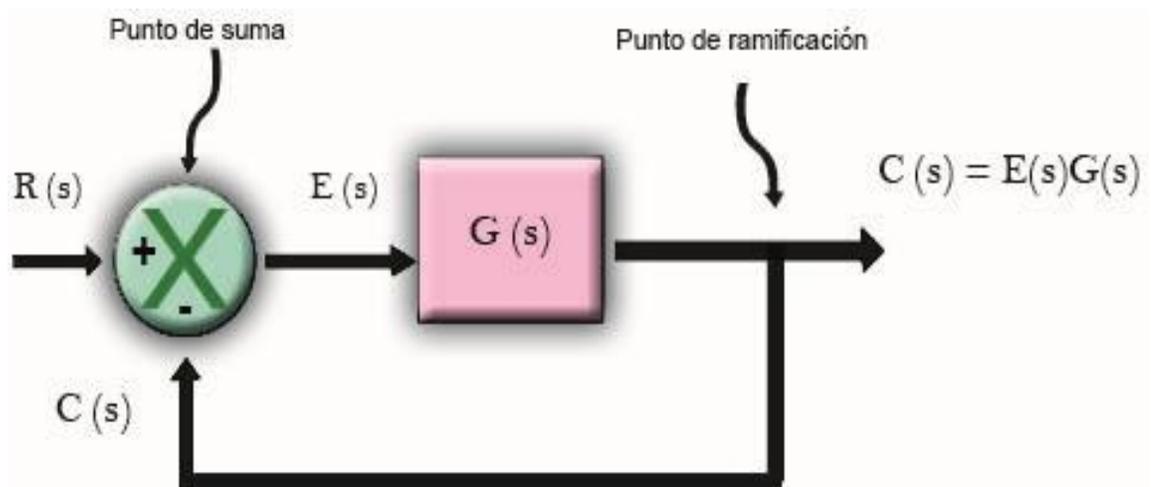
En este diagrama se observa que la salida $C(s)$ realimenta al punto suma, en donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura 10. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque, $E(s)$.

Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación.

Cuando la salida se realimenta al punto suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada por medio de un transductor.

Por ejemplo, en un sistema de control termodinámico, por lo general la señal de salida es la temperatura controlada. La señal de salida, que tiene las dimensionales de temperatura, debe convertirse a una fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada o referencia.

Figura 10. **Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado**

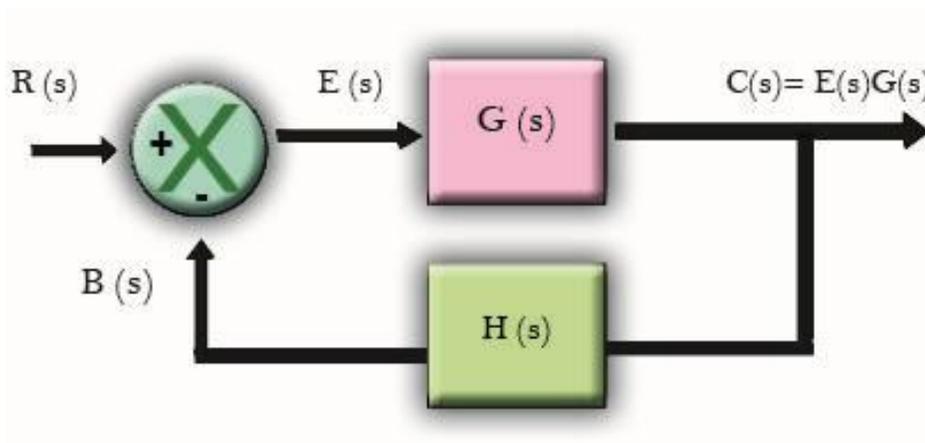


Fuente: elaboración propia

2.7.3. Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa

Para realizar esta deducción se debe observar primero el diagrama de la figura 11, en este diagrama aparece un nuevo bloque con la función $H(s)$. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de ser comparada con la entrada, generalmente el bloque representado por $H(s)$, es un elemento transductor que realiza una conversión de las dimensiones de la variable de salida, de manera que estas sean iguales a las de la variable de referencia para posteriormente ser comparadas ambas señales. La señal de realimentación que retorna al punto suma para compararse con la entrada es $B(s) = H(s)C(s)$.

Figura 11. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado con el elemento de realimentación



Fuente: elaboración propia.

El cociente de la señal de realimentación $B(s)$ y la señal de error $E(s)$ se denomina función de transferencia en lazo abierto:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (8)$$

El cociente entre la salida $C(s)$ y la señal de error $E(s)$ se denomina función de transferencia de la trayectoria directa:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \quad (9)$$

Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $H(s)$ es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria directa son iguales, en este caso corresponde a $G(s)$.

2.7.4. Función de transferencia en lazo cerrado

En este caso se hace énfasis, sobre la relación que existe entre la señal de salida $C(s)$ y la señal de referencia o entrada $R(s)$, para ello se debe observar de nuevo la figura 11, de la cual se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (10)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (11)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (12)$$

Al sustituir (12) en (10), resulta la siguiente ecuación:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \quad (13)$$

Por medio de manipulación algebraica, se obtiene la relación que existe entre $C(s)$ y $R(s)$, que es la siguiente:

$$C(s)/R(s) = G(s)/[1 + G(s)H(s)] \quad (14)$$

La función que relaciona $C(s)$ con $R(s)$ se denomina función de transferencia en lazo cerrado. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación. En consecuencia, la salida del sistema en lazo cerrado, depende tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada. A partir de la ecuación (13), se puede obtener $C(s)$:

$$C(s) = \left[\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right] R(s) \quad (15)$$

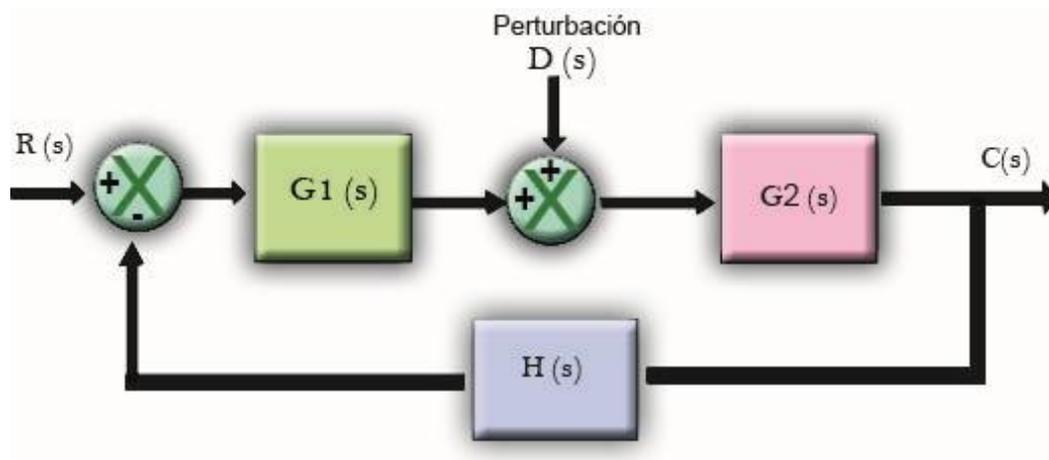
2.7.4.1. Sistema de lazo cerrado sujeto a una perturbación

Cuando en un sistema se presenta una perturbación externa, la cual puede ser considerada entrada, como resultado se obtiene un sistema expuesto a dos señales de entrada (el valor de referencia y la perturbación).

En un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse en forma independiente, las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener como resultado una salida que representa el efecto total de ambas entradas. Esto significa que es posible aplicar el principio de superposición para el análisis de este sistema lineal.

La forma en que se introduce cada entrada en el sistema, se muestra en el punto suma, mediante un signo de más o de menos. En el sistema que se muestra en la figura 12, se realizará un análisis sobre el efecto que genera una perturbación $D(s)$.

Figura 12. **Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación**



Fuente: elaboración propia.

Se puede suponer que el sistema está inicialmente en reposo, con un error cero; después se calcula solo la respuesta $C_D(s)$ que genera la perturbación. Esta respuesta está representada por la siguiente ecuación:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G2(s)}{1+G1(s)G2(s)H(s)} \quad (16)$$

Por otra parte, si se considera solo la respuesta a la entrada de referencia $R(s)$ (la perturbación es cero). Entonces, la respuesta $C_R(s)$ a la entrada de referencia $R(s)$ se obtiene a partir de:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G1(s)G2(s)}{1+G1(s)G2(s)H(s)} \quad (17)$$

La respuesta, debido a la aplicación simultánea de ambas entradas se obtiene sumando los resultados expresados en las ecuaciones (16) y (17). La respuesta $C(s)$ producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia $R(s)$ y la perturbación $D(s)$, se obtiene mediante:

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s)$$

$$C(s) = \frac{G2(s)}{1+G1(s)G2(s)H(s)} [G1(s)R(s) + D(s)] \quad (18)$$

Se considera ahora el caso en el que $|G1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G1(s)G2(s)H(s)| \gg 1$. En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado $C_D(s)/D(s)$ tiende a cero, y se disminuye el efecto de la perturbación. Ésta es una ventaja del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$, se aproxima a $1/H(s)$ conforme aumenta la ganancia de $G1(s)G2(s)H(s)$.

Esto significa que si $|G1(s)G2(s)H(s)| \gg 1$, entonces la función de transferencia $C_R(s)/R(s)$ se vuelve independiente de $G1(s)$ y $G2(s)$ y se hace inversamente proporcional a $H(s)$, por lo que las variaciones de $G1(s)$ y $G2(s)$ no afectan la función de transferencia en lazo cerrado de $C_R(s)/R(s)$, convirtiéndose en otra ventaja para un sistema de lazo cerrado. Si un sistema en lazo cerrado cuenta con una realimentación unitaria, $H(s) = 1$, tienden a hacer iguales la entrada y la salida.

2.8. Procedimiento para dibujar un diagrama de bloques

Para dibujar el diagrama de bloques de un sistema, primero se debe escribir las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente. A continuación se aplica el teorema de la transformada de *Laplace* a estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero. Se representa individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de *Laplace*. Por último, se integra todos los elementos en un diagrama de bloques completo. A manera de ejemplo se considera el circuito RC mostrado en la figura 13. Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de este sistema son:

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \quad (19)$$

$$e_0 = \frac{\int i dt}{C} \quad (20)$$

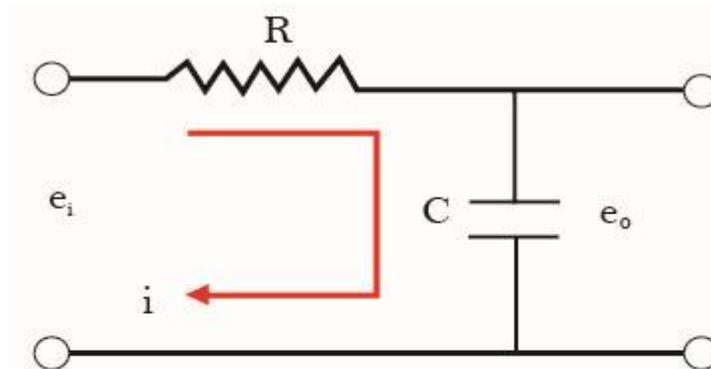
Al aplicar la transformada de *Laplace*, las ecuaciones (19) y (20) se convierten en (21) en el primer caso y (22) en el segundo:

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_0(s)}{R} \quad (21)$$

$$E_0(s) = \frac{I(s)}{Cs} \quad (22)$$

a) Diagrama de circuito RC:

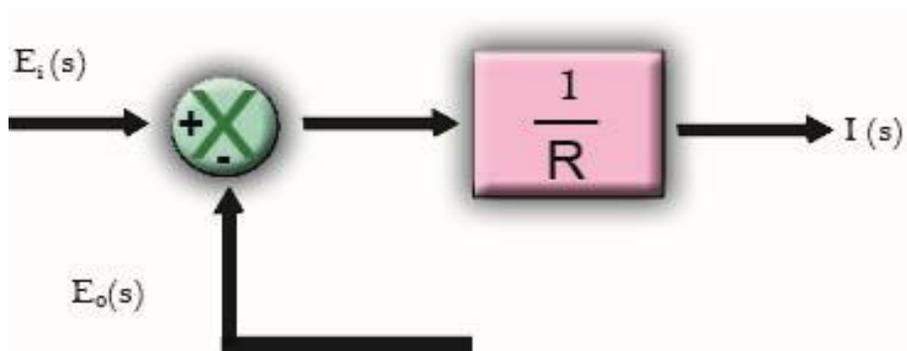
Figura 13. **Ejemplo de procedimiento para dibujar un diagrama de bloques**



Fuente: elaboración propia.

b) La ecuación (21) representa una operación de suma y el diagrama es el siguiente:

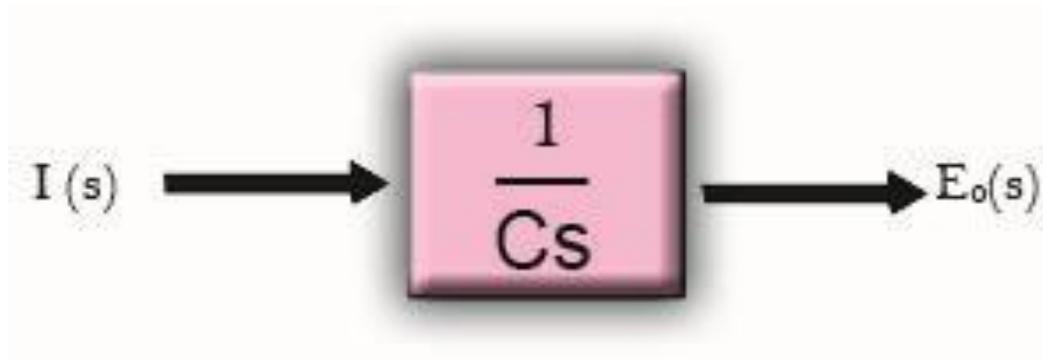
Figura 14. **Representación de la ecuación de suma $I(s)$**



Fuente: elaboración propia.

- c) La expresión (22) representa el siguiente bloque:

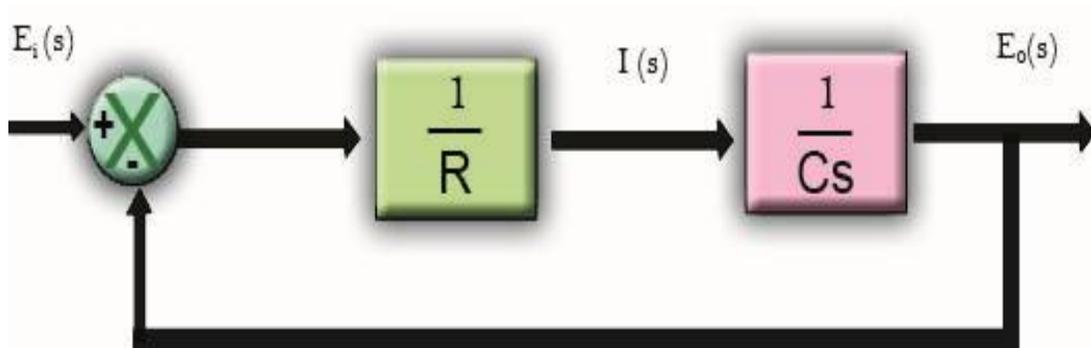
Figura 15. **Representación de la ecuación $E_o(s)$**



Fuente: elaboración propia.

- d) Si se integran estos dos elementos, se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la figura 16:

Figura 16. **Diagrama de bloques para un circuito RC**



Fuente: elaboración propia.

2.9. Álgebra de diagrama de bloques

Un diagrama de bloques complicado que contenga muchos lazos de realimentación, elementos en cascada, etc. Se simplifica o reduce mediante un reordenamiento paso a paso aplicando las reglas del álgebra de diagramas de bloques.

Los bloques pueden conectarse en serie, sólo si la entrada de un bloque no se muestra afectada por el bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único.

Cualquier cantidad de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un solo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales. Algunas reglas elementales del álgebra de diagrama de bloques se muestran en la tabla I:

Tabla I. Álgebra de diagramas de bloques

Fuente: <http://agarcia.fime.uanl.mx/materias/ingco/apclas/03%20-%20Diagramas%20de%20Bloques.pdf>. mayo de 2011.

2.10. Teoría de control moderna

La teoría de control moderna, está basada en el análisis a partir del dominio del tiempo y el concepto de estado, el control moderno se ha desarrollado para manejar la creciente complejidad de las plantas modernas y los requisitos cada vez más exigentes sobre precisión, peso y costo en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

Los sistemas complejos pueden tener entradas y salidas múltiples que pueden variar respecto al tiempo. Debido a la necesidad de alcanzar los requerimientos cada vez más exigentes en el desempeño de los sistemas de control, al aumento en la complejidad del sistema y a un acceso fácil a las computadoras de gran escala, aproximadamente desde 1960 se ha desarrollado la teoría de control moderna, que es un nuevo enfoque de análisis y diseño de sistemas de control complejos.

2.10.1. Teoría de control moderna vs. teoría de control clásica o convencional

La diferencia más importante, es que la teoría de control moderna se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales y que además pueden variar con el tiempo, por otra parte la teoría de control clásica o convencional sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. Asimismo, la teoría del control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en tanto que la teoría de control convencional es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia.

2.10.2. Estado

El estado de un sistema dinámico, está definido por el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) que representan aquellas propiedades del sistema que pueden cambiar o modificarse, por ejemplo; velocidad, dirección, aceleración, potencia que está desarrollando el motor, par ejercido, cantidad de combustible en el tanque, voltaje inducido en un generador síncrono, etc.

De modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la función entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. El concepto de estado de ningún modo está limitado a los sistemas físicos. Se puede aplicar a sistemas biológicos, económicos, sociales y otros.

2.10.2.1. Variables de estado

Las variables de estado en un sistema dinámico, se definen como el conjunto más pequeño de variables $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)$, que determinan el estado dinámico del sistema. Si se necesitan n variables X_1, X_2, \dots, X_n , para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico, dichas n variables son el conjunto de variables de estado. El conocimiento de estas variables en cualquier tiempo $t = t_0$ y el conocimiento sobre la función de entrada o excitación que se aplica para $t \geq t_0$, permiten determinar el comportamiento futuro del sistema.

Las variables de estado no necesitan ser cantidades medidas u observables por medio de algún método, es por esta razón que las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Tal libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estados.

Sin embargo, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado (si fuese posible), debido a que las leyes y condiciones del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente.

2.10.2.2. Vector de estado

Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables, se consideran los n componentes de un vector "x". Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única la condición del sistema $X(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez se obtiene el estado del sistema para $t = t_0$ y se especifica la entrada o función de excitación $U(t)$ para un tiempo $t \geq t_0$.

2.10.2.3. Espacio de estado

Se denomina espacio de estados, a las n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están representados por los ejes X_1, X_2, \dots, X_n . Cualquier estado puede ser representado por medio de un punto en el espacio de estados.

2.10.3. Función de transferencia y diagrama de bloques de sistemas multivariables

En el análisis de sistemas dinámicos, existen tres tipos de variables involucradas en el espacio de estados; las variables de entrada, variables de estado y variables de salida. La representación en el espacio de estados de un sistema no es única ya que existe una infinidad de puntos en el espacio, los cuales representan un estado único del sistema dinámico. Sin embargo la cantidad de variables que representan un estado, debe ser la misma en cada punto en el espacio. En general un sistema multivariable se puede representar como se observa en la figura 17.

Figura 17. Sistema multivariable



Fuente: elaboración propia.

También es posible utilizar la notación mostrada en la figura 18, en donde $U(t)$ representa el vector que contiene las variables de entrada y el vector que contiene las variables de salida es representado por $Y(t)$.

Figura 18. **Sistema multivariable representado por vectores**



Fuente: elaboración propia.

Un sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la función de entrada para $t \geq t_1$. Los dispositivos que realizan la función de almacenar valores en un sistema multivariable de tiempo continuo son los integradores, las salidas de estos integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. En consecuencia los valores de salida en los integradores se determinan como variables de estado, y debido a esto, la cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

Ahora se supone que en el sistema con n entradas y n salidas de la figura 17, se define como variables de estado las salidas de los integradores que se encuentran dentro del sistema, denominadas $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. La dinámica del sistema se describe a partir de las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x, u, t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x, u, t) \tag{23}$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x, u, t)$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema están definidas por:

$$y_1(t) = g_1(x, u, t)$$

$$y_2(t) = g_2(x, u, t) \tag{24}$$

$$y_m(t) = g_m(x, u, t)$$

Representando las definiciones anteriores por medio de vectores y/o matrices se obtiene:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix} Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ g_2(x, u, t) \\ \vdots \\ g_m(x, u, t) \end{bmatrix}$$

Siendo el vector de entrada o variable de excitación:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

La matriz $f(x, u, t)$ que representa la dinámica del sistema y la matriz $g(x, u, t)$ que describe a las variables de salida, pueden ser expresadas por medio de las sencillas ecuaciones.

$$\dot{X}(t) = f(x, u, t) \tag{25}$$

$$Y(t) = g(x, u, t) \tag{26}$$

Al aplicar ciertos criterios de linealidad a las ecuaciones (25) y (26) alrededor del estado de operación, se obtiene la ecuación de estado (27) y ecuación de salida (28).

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (27)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \quad (28)$$

Donde $A(t)$ representa la matriz de estado, $B(t)$ matriz de entrada, $C(t)$ matriz de salida y $D(t)$ matriz de transición directa.

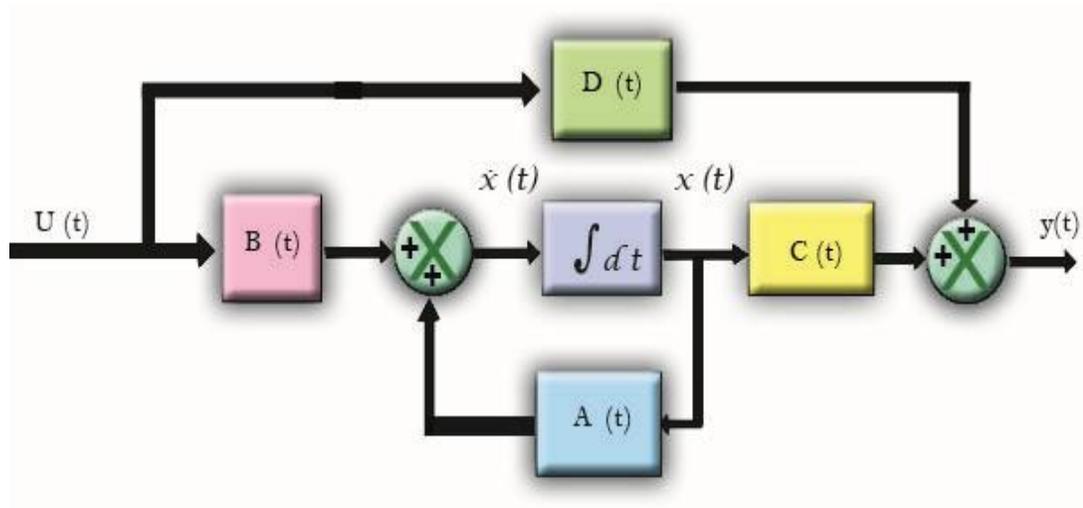
Si las funciones f y g no dependieran del tiempo, en efecto, el sistema se consideraría invariante respecto al tiempo y las ecuaciones se simplifican en:

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (29)$$

$$Y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (30)$$

Las ecuaciones anteriores y en general la dinámica de un sistema multivariable, pueden ser representadas por medio del diagrama de bloques de la figura 19.

Figura 19. Diagrama de bloques de un sistema multivariable



Fuente: elaboración propia.

2.11. Análisis de estabilidad en el plano complejo

La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina mediante la ubicación de sus polos en el plano complejo "s", si alguno de los polos que contiene la función de transferencia en lazo cerrado de la planta se encuentra en el semiplano derecho "s", la respuesta transitoria de la planta exhibirá oscilaciones que aumentan en magnitud al transcurrir el tiempo, esta situación representaría un sistema inestable.

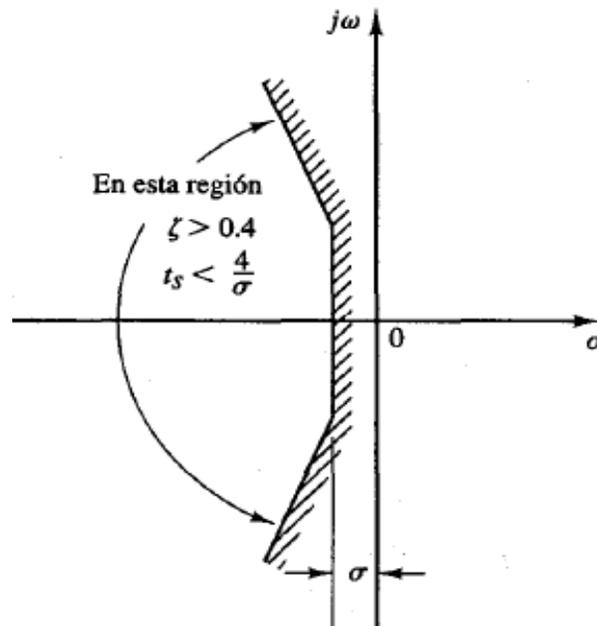
Cuando una función de excitación o de entrada se conecta a un sistema con estas características, la salida aumenta de manera indefinida al transcurrir el tiempo. Si no existiese el efecto de saturación en el sistema y no se contara con amortiguación por medio de algún dispositivo mecánico, el sistema puede dañarse y eventualmente colapsar, esto debido a que un sistema real o físico, la respuesta de la planta no puede aumentar indefinidamente.

Por esta razón, en el diseño de sistemas de control no se permiten los polos ubicados en el semiplano derecho. Por otro lado si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo “s”, en teoría (específicamente hablando de matemática), cualquier respuesta transitoria indeseada termina por alcanzar el equilibrio. La situación anterior representaría un sistema estable. De una manera más sencilla se puede decir que un sistema es inestable si sus polos son representados por los valores que contiene $s = \sigma \pm j\omega$. Un sistema es estable si sus polos se encuentran en los valores que contiene $s = -\sigma \pm j\omega$.

El criterio de estabilidad e inestabilidad, es una característica intrínseca del sistema y no depende de la función de excitación que ingresa en este. Los polos de la función de excitación no afectan la estabilidad del sistema, estos polos solo contribuyen a los términos de respuesta en estado estable en la solución. Por esto, el problema de estabilidad absoluta se soluciona fácilmente al elegir polos de la función de transferencia en lazo cerrado de la planta que están ubicados en el semiplano izquierdo “s”.

El hecho de que todos los polos se encuentren en el semiplano complejo del lado izquierdo, no garantiza características satisfactorias de respuesta en frecuencia. Si los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado se localizan cerca del eje “j0”, la respuesta transitoria exhibirá oscilaciones excesivas o será muy lenta. Por tal razón, a fin de garantizar características de respuesta transitoria inmediatas y bien amortiguadas, es necesario que los polos en lazo cerrado del sistema se encuentren en una región determinada del plano complejo, tal como la región delimitada por el área sombreada de la figura 20.

Figura 20. **Región del plano complejo que satisface las condiciones de estabilidad relativa**



Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 232.

La estabilidad relativa y el desempeño transitorio de un sistema de control en lazo cerrado, se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros que contiene el plano s .

2.11.1. Criterio de estabilidad de *Routh*

Un sistema estable, es aquel que permanece en reposo a menos que se excite mediante una función de entrada, si el sistema es estable, debería tener la capacidad de volver al reposo, cierto tiempo después de que la función de excitación fue aplicada en la entrada.

El problema más importante de los sistemas de control lineal, tiene que ver con la estabilidad, esto significa, bajo qué condiciones un sistema se vuelve inestable. Existe una herramienta llamada criterio de estabilidad de *Routh*, la cual es un método que no es necesario resolver. Como se había expuesto, en general los sistemas lineales, son representados por medio de la función de transferencia descrita por la ecuación (7). Esta expresión fue definida de la siguiente manera:

$$\frac{L[\text{salida}]}{L[\text{entrada}]} = \frac{B(s)}{A(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

El método de estabilidad de *Routh*, permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho complejo "s", ya que según el análisis de estabilidad en el plano complejo, un sistema es considerado inestable si contiene polos en el semiplano derecho.

El criterio de estabilidad de *Routh*, determina si existen o no raíces en un polinomio, las cuales hacen inestable a un sistema de control lineal, sin tener que obtenerlas en realidad. Este criterio de estabilidad sólo se utiliza con los polinomios que poseen una cantidad finita de términos. Cuando se aplica este criterio a un sistema de control, la información acerca de la estabilidad absoluta se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica. El método o algoritmo a aplicar es el siguiente.

a) Se escribe el polinomio A(s) de la forma:

$$a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 = 0 \quad (31)$$

- b) Se supone que los coeficientes son reales. Lo que implica que $a_n \neq 0$. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, en presencia de al menos un coeficiente positivo, entonces existe una raíz compleja con parte real positiva que volverá inestable el sistema.

Si solo interesa conocer el criterio de estabilidad absoluta, no sería necesario continuar con el procedimiento de análisis. Es importante enfatizar que la condición de que todos los coeficientes sean positivos, no es suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.

La condición necesaria para la estabilidad es que todos los coeficientes del polinomio $A(s)$ estén presentes y tengan signo positivo (en efecto, si todos los coeficientes del polinomio $A(s)$ son negativos solo se debe multiplicar ambos lados de la ecuación por -1 , ya que esta igualada a cero).

- c) Si todos los coeficientes son positivos, lo recomendable es ordenar los coeficientes en reglones de acuerdo al siguiente patrón:

$$\begin{array}{rcccccc}
 S_n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 S_{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 S_{n-2} & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \\
 S_{n-3} & c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 S^2 & e_1 & e_2 & & & \\
 S^1 & f_1 & & & & \\
 S^0 & g_1 & & & &
 \end{array} \tag{32}$$

d) Los coeficientes b_1, b_2, b_3 , etc., se evalúan del modo siguiente:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \end{aligned} \quad (33)$$

e) La evaluación de los coeficientes b , continúa hasta que los demás son cero. Se sigue el mismo patrón de multiplicación cruzada de los coeficientes de los dos renglones anteriores al evaluar las c , las d , las e , etc. Obteniendo de esta forma las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\ d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\ d_2 &= \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \end{aligned} \quad (34)$$

f) Este proceso continúa hasta que se completa el n -ésimo renglón. El arreglo total de los coeficientes es triangular, como se muestra en (32). Al desarrollar el arreglo, un renglón completo se divide o se multiplica por un número positivo para simplificar el cálculo numérico sin alterar la conclusión de la estabilidad.

El criterio de estabilidad de *Routh* plantea que el número de raíces complejas con partes reales positivas, es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna que se observan en el arreglo definido por la ecuación (32).

2.11.2. Aplicación del criterio de estabilidad de *Routh* a un sistema de control lineal

El criterio de estabilidad de *Routh*, no sugiere como mejorar la estabilidad relativa de un sistema lineal, tampoco indica como estabilizar un sistema, es por esto que se podría decir que su utilidad en varias ocasiones se ve limitada, sin embargo, es posible determinar los efectos que pudieran ocurrir al variar uno o más parámetros del sistema, si se examinan los valores que producen estabilidad. Se considera el sistema de la figura 21, sobre el cual, se determinará el rango de valores de K para la estabilidad del sistema. La función de transferencia que describe la dinámica del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + k}$$

Escribiendo el polinomio $R(s)$ en forma ordenada de manera que sea posible observar todos los coeficientes como se muestra en la ecuación (31). Esto significa que al aplicar una operación algebraica sobre el denominador de la función de transferencia representado por $R(s)$, se obtiene la expresión:

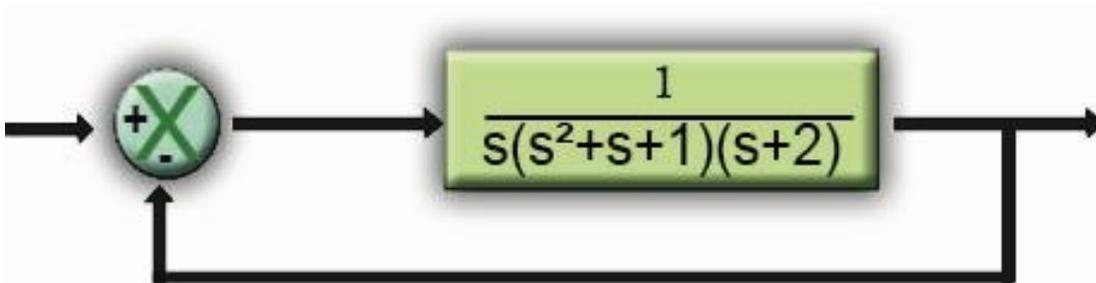
$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Aplicando el criterio de estabilidad de *Routh* a partir de las expresiones definidas por las ecuaciones (33) y (34), el arreglo de los coeficientes sería:

$$\begin{array}{r}
 s^4 \quad 1 \quad 3 \quad K \\
 s^3 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\
 s^2 \quad \frac{7}{3} \quad K \quad 0 \\
 s^1 \quad 2 - \frac{9}{7}K \quad 0 \\
 s^0 \quad K \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Para que el sistema sea estable, K y todos los coeficientes de la primera columna deben ser positivos, al despejar el valor de K de la línea "s¹", se obtiene que el rango de valores en los que el sistema presenta estabilidad está definido por el intervalo $14/9 > K > 0$. En teoría cuando $K = 14/9$, el sistema empieza a oscilar y esta oscilación presenta una magnitud constante.

Figura 21. **Aplicación del método de *Routh* a un sistema de control lineal**



Fuente: elaboración propia.

3. SISTEMA DE CONTROL PID

El controlador PID, es una implementación de la simple pero poderosa acción de realimentación. Tiene la capacidad de eliminar los errores en estado estacionario mediante la acción integral, y es capaz de anticipar el futuro por medio de la acción derivativa. Como se ha expuesto la realimentación puede reducir los efectos de las perturbaciones, hacer que un sistema sea insensible a las variaciones del proceso y lograr que un sistema siga fielmente a sus señales de entrada. Además en la actualidad, la realimentación tiene una influencia profunda en los avances tecnológicos.

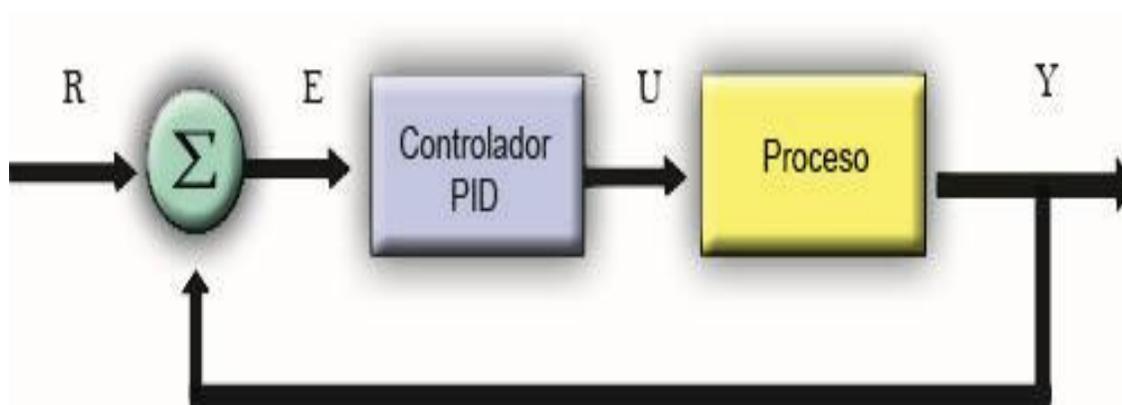
Los controladores PID se encuentran en un gran número en todas las industrias y se presentan en muchas formas diferentes, su versatilidad radica en que pueden ser implementados y/o sustituir a la mayoría de sistemas de control. El controlador PID es un elemento clave de los sistemas para el control de motores, es una parte fundamental de los sistemas distribuidos para el control de procesos, se encuentra en sistemas tan diversos como reproductores de CD y DVD, control de velocidad de automóviles, microscopios en los laboratorios de física nuclear, etc. En el control de procesos industriales, más del 95 por ciento de los lazos realimentados de control son del tipo PID; la mayoría de los cuales son de la clase PI.

El control PID frecuentemente se combina con cierta capacidad lógica, funciones secuenciales, selectores y bloques de funciones sencillos para construir de esta forma los complicados sistemas de automatización utilizados en la conversión y transporte de energía, incorporándose de esta manera en una infinidad de procesos de fabricación.

El microprocesador ha tenido una influencia fundamental sobre el controlador PID. Debido a esto, casi todos los controladores PID fabricados en la actualidad se basan en microprocesadores. Esto ha creado ventajas y oportunidades para proporcionar características adicionales tales como; sintonía automática, planificación de ganancia, adaptación continua y diagnóstico.

La mayoría de los controladores PID que se producen hoy en día tienen alguna capacidad para la sintonía automática. Como se ha hecho mención, el control PID surge de implementar la idea de realimentación a un sistema, obteniendo un esquema sencillo como el mostrado en la figura 22. Donde R es el valor de referencia o *set point*, E el error, U la señal actuante o acción de control y la señal de salida está representada por la variable Y.

Figura 22. Diagrama de un sistema de control PID



Fuente: elaboración propia.

3.1. Tipos de realimentación del sistema de control PID

Se denomina tipos de realimentación PID, a las acciones que un controlador realiza para monitorear y gobernar variables en un proceso. Los miembros de la familia de controladores PID, incluyen las acciones básicas en realimentación control *on-off*, control proporcional (P), integral (I), derivativo (D). También existen controladores que contienen algunas o todas las acciones de control, estos se determinan por medio de sus siglas, por ejemplo controladores P, I, PI, PD, y PID.

3.1.1. Acción de control *on-off*

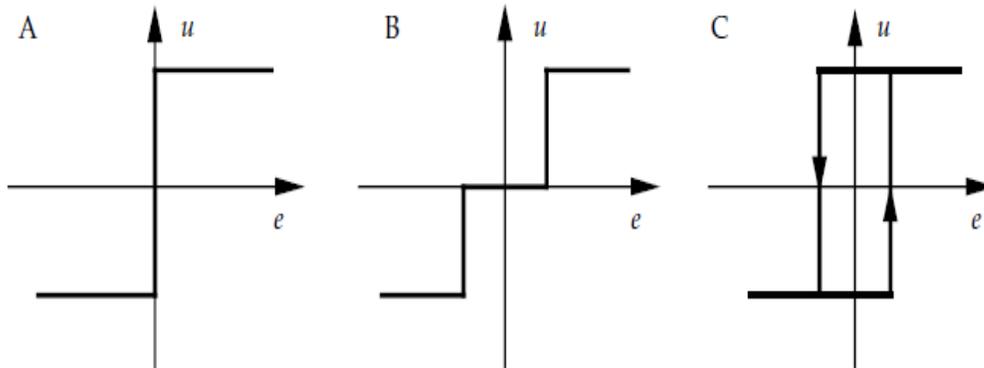
Este mecanismo de control se describe mediante la función U:

$$U = \begin{cases} U_{\text{máx}}, & \text{si } e > 0 \\ U_{\text{mín}}, & \text{si } e < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Donde la literal $e = Y_c - Y$, representa el error o diferencia entre el valor de referencia y la señal de salida (variable controlada). Esta ley de control implica que siempre se aplica una acción correctiva máxima. Este tipo de realimentación control *on-off*, es simple y no hay parámetros para elegir.

El control *on-off*, funciona al mantener la variable controlada en un valor próximo al valor de referencia, pero en la práctica, generalmente se obtendrá un sistema donde las variables oscilan alrededor de los valores de $U_{\text{máx}}$ y $U_{\text{mín}}$. Se observa que según la función U, la variable de control no está definida cuando el error es cero. Es común realizar algunas modificaciones a este tipo de control introduciendo histéresis o una zona muerta, la figura 23 muestra estas modificaciones.

Figura 23. **Características de la acción de control on-off ideal (A), y modificaciones zona muerta (B) e histéresis (C)**



Fuente: Control PID avanzado. Karl Johan Aström, Tore Hägglund. p. 4.

3.1.2. Acción de control proporcional (P)

La razón por la cual el control *on-off* con frecuencia da lugar a oscilaciones, es debido a que el sistema sobreactúa, ya que un pequeño cambio en el error, como consecuencia hará que la variable manipulada varíe entre los valores máximos y mínimos.

Este efecto es evitado en la acción proporcional donde el controlador entrega una salida característica proporcional al error $e = Y_c - Y$, representada por:

$$U(t) = K_p e(t) \quad (36)$$

La ecuación anterior se puede expresar por medio de su función de transferencia. Al aplicar la transformada de *Laplace* a la ecuación (36), se obtiene:

$$C_p(S) = K_p \quad (37)$$

Donde K_p , es una ganancia proporcional ajustable. Un controlador proporcional es capaz de controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente (*on-off*).

3.1.3. Acción de control integral (I)

El control integral provee una salida que es proporcional al error acumulado, lo que implica que es una forma de control lento. La acción de control integral se puede describir por medio de las siguientes ecuaciones:

$$U(t) = K_i \int_0^t e(\tau) dt \quad (38)$$

$$\text{Función de transferencia} = C_i(s) = \frac{K_i}{s} \quad (39)$$

El control integral tiene una característica muy importante. Al suponer que en estado estacionario el valor de $U(t)$ es constante, esto determinaría que se obtiene un error que siempre es cero, ya que se sabe bien que la integral de cero es una constante y viceversa la derivada de una constante es cero. Esto significa que, si el valor de $e(\tau)$ es cero, se obtendrá el valor de la integral $U(t)$ como una constante. Por lo que se concluye que dada una señal de referencia constante o perturbación, el error en régimen permanente es cero.

3.1.4. Acción de control proporcional-integral (PI)

Esta acción de control se define por medio de:

$$U(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) dt \quad (40)$$

La constante que ajusta la acción integral es T_i , la cual se denomina tiempo integral. La función de transferencia que se obtiene al aplicar la transformada de *Laplace* a la ecuación (40), está representada por:

$$G_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (41)$$

El resultado de esta combinación describe que al poseer un control proporcional, es necesario que exista un error para obtener una acción de control diferente de cero. Con un control integral, al presentarse un error pequeño positivo siempre se producirá una acción de control creciente, si el error fuera negativo la acción de control sería decreciente.

Como se demostró, el control integral posee un error en régimen permanente que siempre será cero y este principio también se aplica al controlador PI. La mayoría de controladores industriales tienen solo acción PI, ya que es adecuado utilizarla donde la dinámica del proceso es en esencia de primer orden.

3.1.5. Acción de control proporcional-derivativa (PD)

Esta acción posee la característica de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, sin embargo tiene una significativa desventaja, ya que amplifica las señales de ruido, esto no es conveniente porque la señal de control llegaría en algún grado distorsionada, provocando de esta manera la saturación del actuador. La acción de control derivativa no se utiliza sola, debido a que solo es eficaz durante períodos transitorios. Las ecuaciones que definen la acción de control PD son:

$$U(t) = K_p e(t) + K_p T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (42)$$

$$\text{Función de transferencia} = C_{PD}(s) = K_p (1 + sT_D) \quad (43)$$

Cuando una acción de control derivativa, se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. La acción de control derivativa no afecta en forma directa el error en estado estacionario, además añade amortiguamiento al sistema, lo que hace posible un valor mayor de la ganancia K , obteniendo como resultado un aumento de precisión en estado estable.

3.1.6. Acción de control proporcional-integral-derivativa (PID)

Esta acción combinada, reúne las ventajas de cada una de las acciones de control individual. Describe la suma de los términos que representan el pasado por la acción de control integral "I", el presente por el término "P" y el futuro por una extrapolación lineal del error "D". La ecuación que define estas acciones de control combinadas es determinada por:

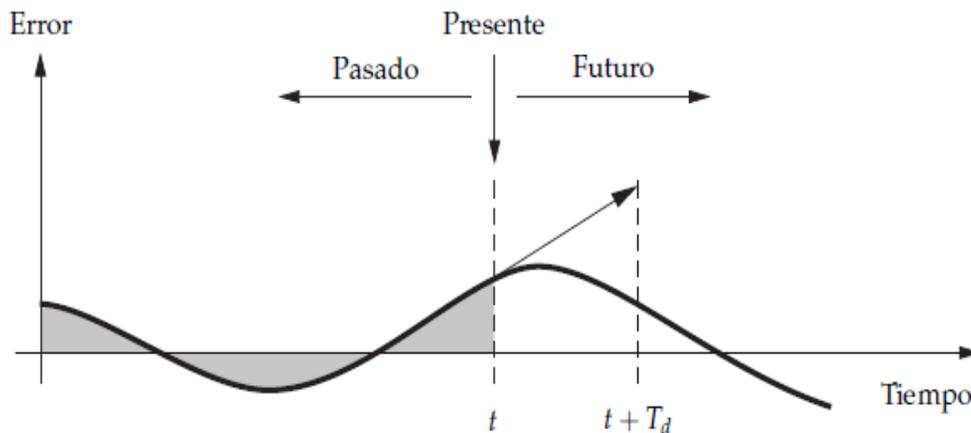
$$U(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) dt + K_p T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (44)$$

La ganancia K , el tiempo integral T_i , y tiempo diferencial T_d , son los parámetros del controlador. Si se aplica, el teorema de la transformada de *Laplace* a la ecuación (44), la función de transferencia es definida por:

$$C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right) \quad (45)$$

La figura 24 muestra como un controlador PID calcula la acción de control basándose en los errores pasados, presentes, y futuros.

Figura 24. **Cálculo de acción de control PID**



Fuente: Control PID avanzado. Karl Johan Aström, Tore Hägglund. p. 6.

3.2. Diseño de PID

Cuando es posible obtener el modelo matemático de los procesos de una planta, se pueden aplicar diversas técnicas de diseño con el objetivo de calcular los parámetros del controlador que cumplan con las características de desempeño en estado transitorio y estable de un sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si el modelo de proceso de la planta fuese tan complicado que es muy difícil obtener un modelo matemático, tampoco se cuenta con la posibilidad de aplicar un enfoque analítico para el diseño de un controlador PID. En este caso se debe recurrir a métodos experimentales para la sintonización de controladores PID.

El proceso experimental de seleccionar los parámetros que cumplan con las especificaciones de desempeño en estado transitorio y estable, se denomina sintonización del controlador. Lo anterior significa establecer valores de K_p , T_i y T_d .

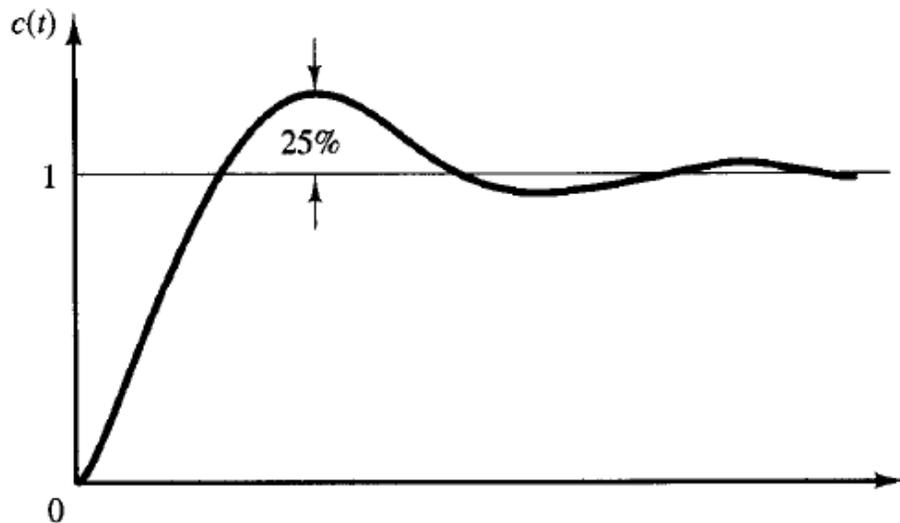
3.2.1. Reglas de *Ziegler-Nichols* para la sintonización de controladores PID

Ziegler y Nichols propusieron en 1942 reglas para establecer los valores de la ganancia proporcional K_p , el tiempo integral T_i y el tiempo diferencial T_d . Los métodos se basan en la determinación de algunas características de la dinámica del proceso. Los parámetros del controlador se expresan en términos de estas características mediante fórmulas sencillas, la determinación de estos parámetros o la sintonización de controladores PID, es realizada por los ingenieros en el sitio a partir de procedimientos experimentales sobre la planta. Estos métodos son ampliamente utilizados, porque expresan de una manera moderada buena sintonización en situaciones prácticamente restringidas.

Las reglas de sintonización de *Ziegler y Nichols* son muy convenientes cuando no se conoce los modelos matemáticos de las plantas. Sin embargo estas reglas se aplican al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.

Las reglas de sintonización propuestas por *Ziegler y Nichols*, son conocidas como método de oscilación o respuesta en frecuencia y método basado en la curva de reacción o respuesta escalón, en ambos se pretende obtener un 25 por ciento de sobrepaso máximo en la respuesta escalón como se aprecia en la figura 25.

Figura 25. **Curva de respuesta escalón unitario con un sobrepaso máximo del 25 por ciento**



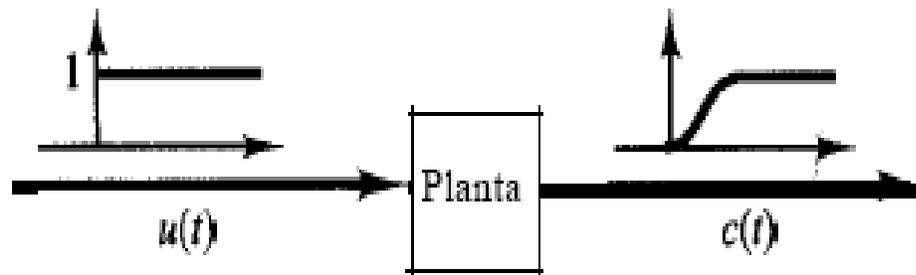
Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 671.

3.2.1.1. **Método basado en la curva de reacción o respuesta escalón**

En este método se obtiene de una manera experimental, la respuesta que genera una planta a partir del ingreso de la función escalón unitario, como se puede observar en la figura 26.

Estas curvas de respuesta escalón se producen por medio de algún método de simulación que permita obtener un modelo aproximado de la dinámica de la planta.

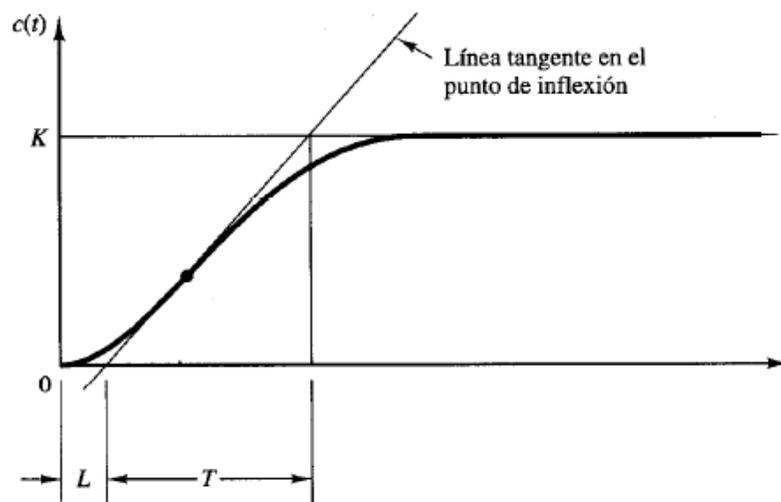
Figura 26. Respuesta escalón unitario de una planta



Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 671.

Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la respuesta que describe la planta en presencia de la función escalón unitario, podría ser una curva característica en forma de "S" como la mostrada en la figura 27.

Figura 27. Curva de respuesta en forma de S



Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 671.

Si la respuesta no fuese una curva en forma de "S", lo recomendable sería no aplicar este método. La curva "S", se caracteriza por dos parámetros importantes; el tiempo de retardo "L" y la constante de tiempo "T". Estos parámetros se determinan trazando una tangente en el punto de inflexión de la curva "S", luego se identifica la intersección de la tangente con el eje del tiempo y la recta $c(t) = K$. Esto se puede observar al verificar una vez más la figura 27. Al conocer los valores de "L" y "T", *Ziegler y Nichols* sugirieron establecer los valores K_p , T_i y T_d de acuerdo con las fórmulas presentes en la tabla II.

Tabla II. **Regla de sintonización *Ziegler-Nichols* basada en la respuesta escalón unitario de la planta**

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 672.

A partir de la definición en la ecuación (45) y la sustitución de los parámetros presentes en la tabla II. La función de transferencia de la acción correctiva PID sería:

$$G_C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$G_C(s) = 1,2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0,5LS \right)$$

$$G_C(s) = 0,6T \left[\frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s} \right] \quad (46)$$

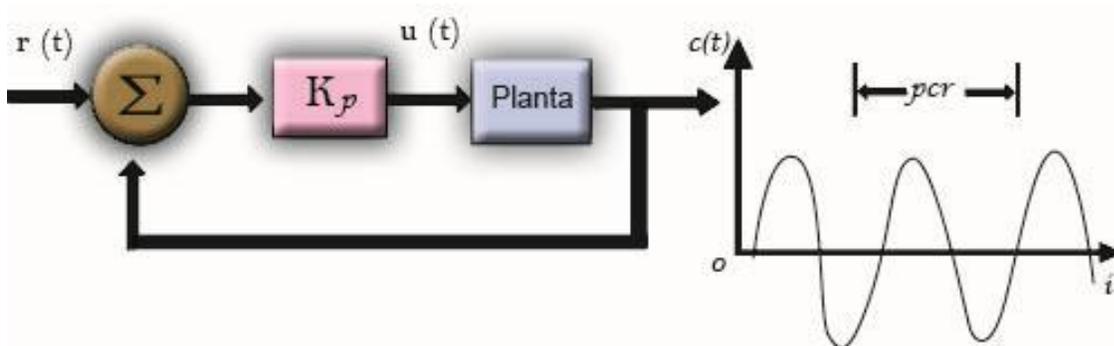
De lo anterior se observa que un controlador PID sintonizado por este método, tiene un polo en el origen y un cero de segundo grado en $s = -1/L$.

3.2.1.2. Método de oscilación o respuesta en frecuencia

El método de oscilación al igual que el de respuesta escalón, se realiza a lazo abierto ya que es necesario conocer y observar la respuesta de la planta. Además se debe enfatizar que este método es válido solo para sistemas estables. Para su aplicación se establece $T_i = \infty$ y $T_d = 0$, de esta forma se obtiene un controlador que ejecuta solo la acción proporcional " K_p ". Esto se puede comprobar en la ecuación (45), donde $T_i = \infty$ que es producto del denominador en la acción integral hace que esta tienda a cero, de igual manera $T_d = 0$ hace que la acción diferencial desaparezca.

Utilizando entonces solo la acción proporcional, el proceso inicia aumentando el valor de K_p desde cero hasta un valor crítico de la acción proporcional denominado K_{cr} , al alcanzar el valor de crítico K_{cr} , la salida de la planta deberá mostrar oscilaciones sostenidas. Si la respuesta de la planta no exhibiera oscilaciones sostenidas para ningún valor de K_p , este método no se aplica. La figura 28, describe la determinación experimental de los parámetros K_{cr} y el período crítico P_{cr} de cada oscilación. Donde $r(t)$ es el valor de referencia, $u(t)$ la señal o acción de control y la señal de salida es representada por $c(t)$.

Figura 28. **Determinación experimental de K_{cr} y P_{cr}**



Fuente: elaboración propia.

Ziegler y Nichols, establecieron que los valores de los parámetros K_p , T_i y T_d , deben ser calculados por medio de las fórmulas presentes en la tabla III.

Tabla III. **Regla de sintonización *Ziegler-Nichols* basada en la ganancia crítica y período crítico**

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Fuente: Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna. Tercera edición. p. 673.

Utilizando la definición de la ecuación (45) y al sustituir los parámetros de la tabla III. La función de transferencia de la acción correctiva aplicando este método sería:

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$G_R(S) = 0,6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0,5P_{cr}S} + 0,125P_{cr}S \right)$$

$$G_R(s) = 0,075K_{cr}P_{cr} \left[\frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \right] \quad (47)$$

En esta situación se observa un controlador PID que tiene un polo en origen y un cero de segundo grado en el valor $S = -\frac{4}{P_{cr}}$.

3.2.1.3. Observación sobre las reglas de sintonización *Ziegler-Nichols*

Las reglas de sintonía de *Ziegler y Nichols*, relativamente no son muy difíciles de aplicar, en ambos casos la metodología consiste en determinar los parámetros mencionados por medio de procesos experimentales y después utilizar estos parámetros para realizar los cálculos correspondientes según las tablas.

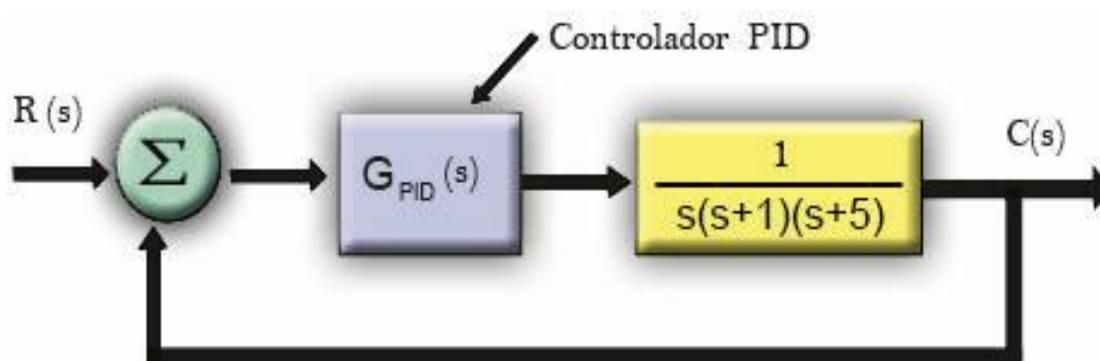
Estas reglas han sido ampliamente utilizadas para sintonizar controladores PID en los que la dinámica de la planta no es conocida con precisión. Por supuesto, estas reglas se aplican a plantas cuya dinámica se conoce, pero no con una adecuada o requerida precisión. Característica que depende única y exclusivamente del sistema que se desea añadir al controlador PID. Esto implica que la exigencia en cuanto a precisión (de hecho no solo en cuanto a precisión) es diferente para cada sistema.

Una planta que posee un controlador PID sintonizado por las reglas de *Ziegler y Nichols*, exhibirá un sobrepaso máximo en la respuesta función escalón que abarca entre el 10 y 60 por ciento. El promedio obtenido experimentando con varias plantas ha sido el 25 por ciento, por ello se pretende obtener este valor de sobrepaso máximo cuando se realiza alguna sintonización, lo anterior está de acuerdo con las tablas, porque los valores sugeridos en ellas se basan en el promedio. Las reglas de sintonización de *Ziegler y Nichols* son aplicadas en general aquellas plantas con una dinámica complicada y sin integradores.

3.3. Ejemplo de sintonización por medio de las reglas *Ziegler-Nichols*

Se considera el sistema de control de la figura 29, en el cual se incorpora un controlador PID para monitorear y gobernar el sistema. Se aplicará las reglas de *Ziegler-Nichols* y el método de estabilidad de *Routh* para añadir el controlador PID al sistema.

Figura 29. **Ejemplo de sintonización de un controlador PID por medio de las reglas de *Ziegler-Nichols***



Fuente: elaboración propia.

Dado que la planta contiene un integrador, se utilizará la segunda regla de sintonización de *Ziegler y Nichols*, estableciendo $T_i = \infty$ y $T_d = 0$. Para aplicar el método de estabilidad de *Routh*, la función de transferencia en lazo cerrado de la planta se debe escribir de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

El polinomio $R(s)$, debe ser escrito por medio de la definición utilizada en la ecuación (31):

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0 \quad (48)$$

El arreglo triangular de *Routh* que corresponde a la ecuación (48) es el siguiente:

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad 5 \\ s^2 \quad 6 \quad K_p \\ s^1 \quad \frac{K_p - 30}{6} \\ s^0 \quad K_p \end{array}$$

Verificando los coeficientes de la primera columna del arreglo de *Routh*, se puede observar que ocurrirá una oscilación sostenida en el valor de $K_p = 30$. Por tanto la ganancia crítica es $K_{cr} = 30$. De esta manera la ecuación característica (48) se transforma en:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0 \quad (49)$$

Para calcular la frecuencia de oscilación sostenida, se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación (49), de la siguiente manera:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0 \Rightarrow (5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0 \quad (50)$$

De la parte real de la ecuación (50) se despeja la frecuencia de oscilación sostenida $\omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}$. Se calcula el período crítico por medio de:

$$P = \frac{2\pi}{\omega}, P_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2,8099 \approx 2,81$$

En referencia con las fórmulas de la tabla III, se determina los valores de K_p , T_i , y T_d :

$$K_p = 0,6K_{cr} = 0,6(30) = 18$$

$$T_i = 0,5P_{cr} = 0,5(2,81) = 1,405$$

$$T_d = 0,125P_{cr} = 0,125(2,81) = 0,35124$$

La función de transferencia del controlador PID se simplifica en:

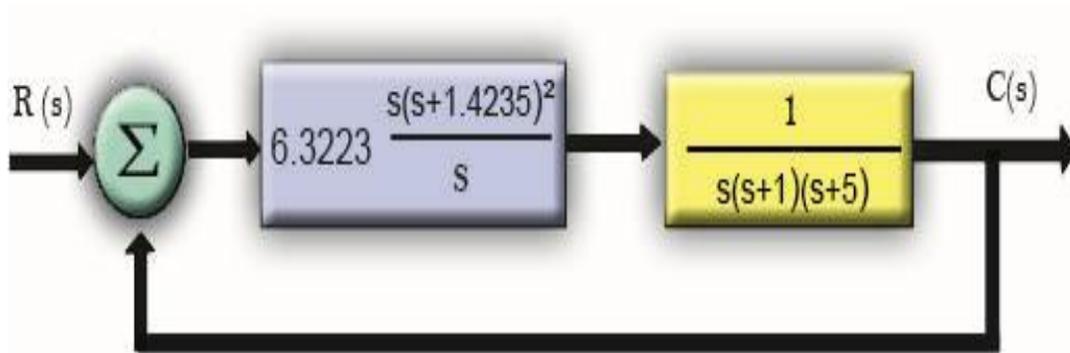
$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$G_{PID}(s) = 18 \left(1 + \frac{1}{1,405s} + 0,35124s \right)$$

$$G_{PID}(s) = 6,3223 \frac{(s+1,4235)^2}{s} \quad (51)$$

El controlador PID tiene un polo en el origen y un cero de segundo grado en el valor de $S = -1,4235$. El sistema gobernado por el controlador PID, se resume por medio del diagrama que se observa en la figura 30.

Figura 30. **Sistema de control gobernado por un controlador PID**



Fuente: elaboración propia.

3.4. Modificación del esquema de control PID

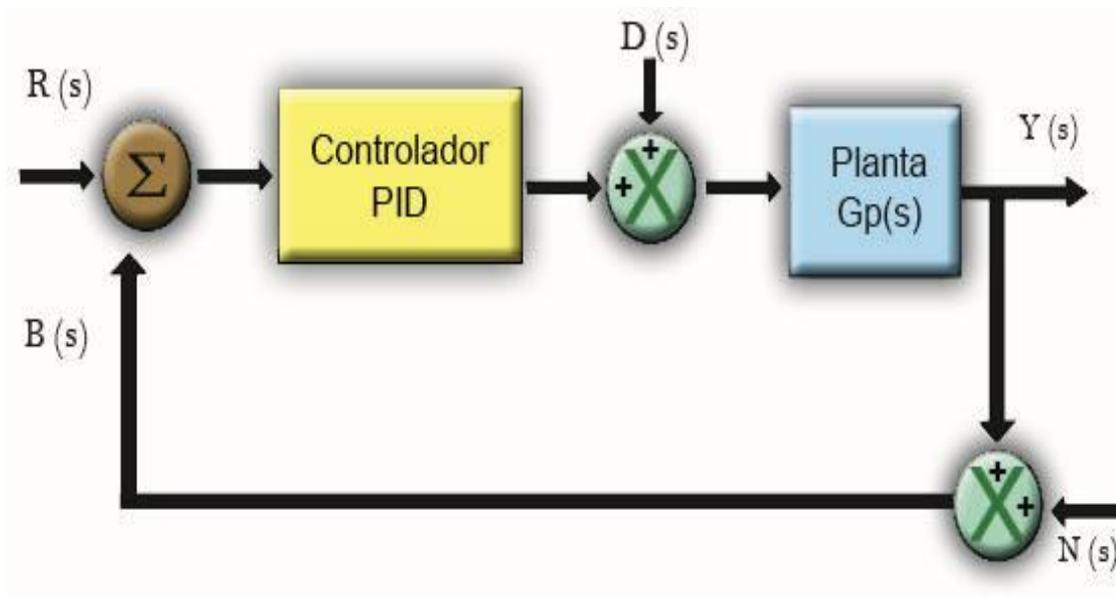
Un sistema de control PID que se encuentra sujeto a perturbaciones externas y ruido, es un modelo más realista que se presenta en aplicaciones industriales. Como se ha expuesto, las plantas poseen señales exógenas que pueden ser de carácter externo o interno.

Se supone que los sistemas de control son diseñados con la capacidad de absorber y eliminar las perturbaciones que se generan dentro del sistema, esto hace que estas señales no sean consideradas como entradas.

Sin embargo las perturbaciones que se producen fuera del sistema, podrían distorsionar en algún grado la acción de control. Por lo que, en el momento del análisis cualquier perturbación externa o ruido debe ser definida como entrada.

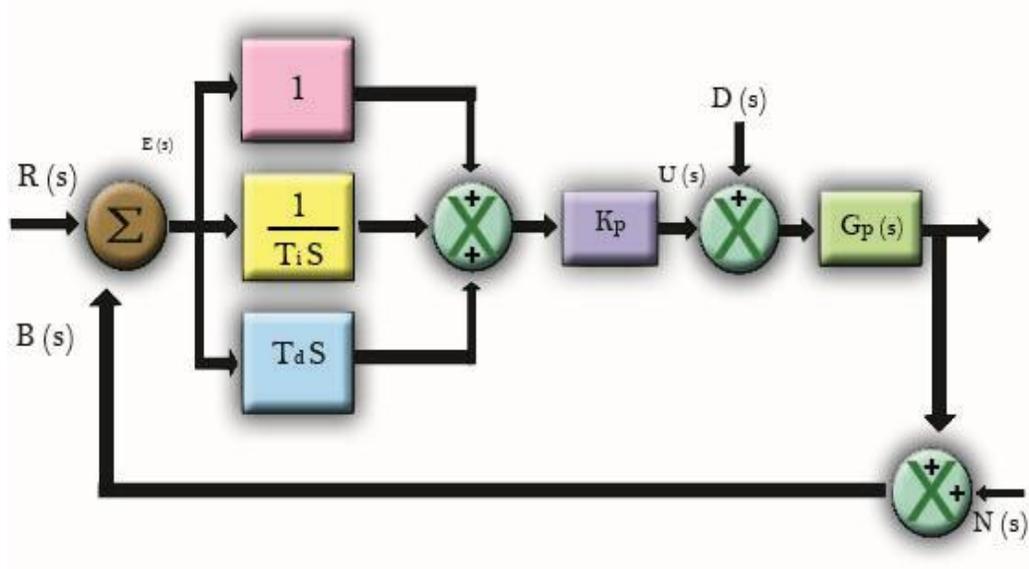
Se considera el modelo de la figura 31, el cual posee perturbaciones externas y ruido. Donde $R(s)$ es el valor de referencia, $D(s)$ es la perturbación externa, $N(s)$ representa el ruido, $B(s)$ es la señal de realimentación, y la señal de salida o variable controlada es representada por $Y(s)$.

Figura 31. **Sistema de control PID sujeto a perturbaciones externas y ruido**



Fuente: elaboración propia.

Figura 32. **Sistema de control PID modificado sujeto a perturbaciones externas y ruido**



Fuente: elaboración propia.

El esquema de la figura 32, es simplemente un diagrama de bloques modificado del sistema de control PID que se ha mostrado en la figura 31. En este nuevo esquema reordenado cuando la entrada de referencia es una función escalón unitario, la variable manipulada $U(t)$ o $U(s)$ (si la función $U(t)$ fue trasladada al plano de la frecuencia) contendrá una función de impulso conocida también como función delta. Lo anterior se debe a la presencia del término derivativo en la acción de control. En un controlador real se utiliza el término $T_d/(1 + \gamma T_d s)$ en lugar del término derivativo $T_d s$.

El valor de γ es aproximadamente 0,1, de manera que; cuando la señal de referencia es la función escalón unitario, la variable manipulada $U(t)$ no contendrá una función impulso, sino que implicará una función de pulso aguda. Este fenómeno de ajuste es conocido como reacción del punto de ajuste.

3.4.1. Control PI-D

Este tipo de control pretende eliminar el fenómeno de reacción de ajuste. Es posible operar la acción derivativa solo en la trayectoria de realimentación, con el objetivo de que la diferenciación ocurra nada más en la señal de realimentación y no afecte la señal de referencia, de esta manera no se generaría una función de impulso aguda. El esquema de la figura 33, se denomina sistema de control PI-D. Al verificar este esquema se observa que la variable manipulada o señal de control puede ser expresada por:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) B(s) \quad (52)$$

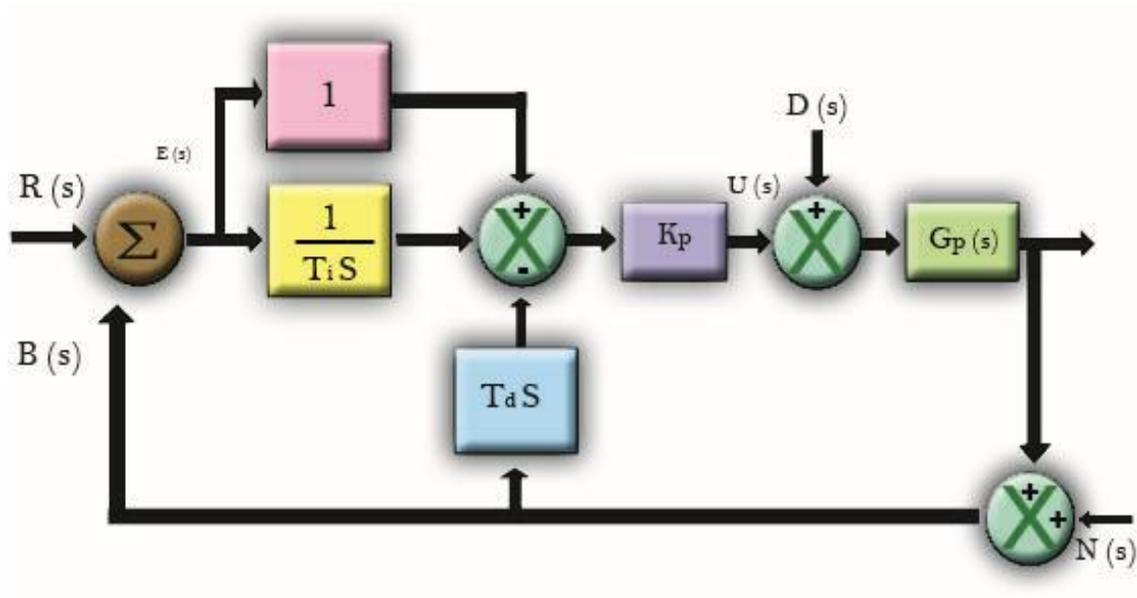
En ausencia de perturbaciones externas y ruido, la función de transferencia del sistema de control PI-D, es representada por medio de la ecuación en términos de s:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + T_d s K_p G_p(s)} \quad (53)$$

Si se elimina la señal de referencia y el ruido, la función de transferencia de lazo cerrado entre la perturbación D(s) y la señal de salida Y(s) se obtiene al reducir en álgebra de bloques:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)} \quad (54)$$

Figura 33. Sistema de control PI-D

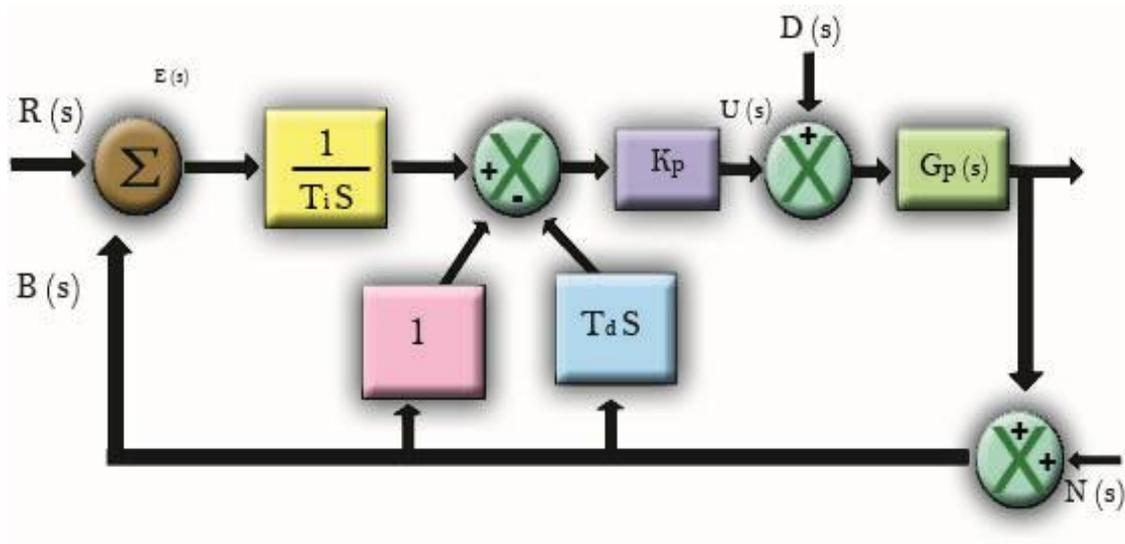


Fuente: elaboración propia.

3.4.2. Control IP-D

Utilizar los sistemas de control PID y control PI-D, implica obtener una respuesta no deseada producida por la función escalón sobre la variable manipulada $U(t)$, en algunas situaciones, estos cambios en la variable manipulada pueden no ser convenientes. Una solución práctica consiste en mover la acción proporcional y diferencial a la trayectoria de realimentación con el propósito de que estas acciones solo afecten a la señal de realimentación. En la figura 34, se representa un sistema de control I-PD con estas características.

Figura 34. Sistema de control I-PD



Fuente: elaboración propia.

Al verificar el diagrama de bloques del esquema de control I-PD, se puede deducir la expresión de la variable manipulada en función de s:

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s) \quad (55)$$

En ausencia de perturbaciones externas y ruido, la función de transferencia del sistema de control I-PD, es representada por medio de la ecuación en términos de s:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s} \right) \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)} \quad (56)$$

Si de nuevo se elimina el valor de referencia y las señales de ruido, la función de transferencia respecto a la perturbación D(s) es expresada por:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)} \quad (57)$$

Se observa que la ecuación (57), obtenida haciendo una reducción por medio de las reglas del álgebra de bloques, es la misma función de transferencia descrita por la ecuación (54). Expresión que fue deducida para un sistema de control PI-D.

4. DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN ACTUAL DE LA PLANTA

En la actualidad la gran mayoría de empresas dedicadas a la producción de refrescos, aguas gaseosas y cerveza, utilizan como base o materia prima una mezcla agua-azúcar comúnmente conocida como jarabe o brix, se le llama así porque los grados brix miden el cociente total de sacarosa disuelta en un líquido. Esta mezcla para ser utilizada como materia prima debe cumplir ciertos requisitos, uno de ellos (en este caso el primordial) es que debe poseer una temperatura, la cual es ideal para transporte, manipulación y transformación de la mezcla. La producción de esta mezcla se realiza por medio de un circuito termodinámico.

4.1. Montaje de la planta

Consiste en un circuito que consta de tres elementos básicos:

- Tanque reactor
- Bomba
- Triblander

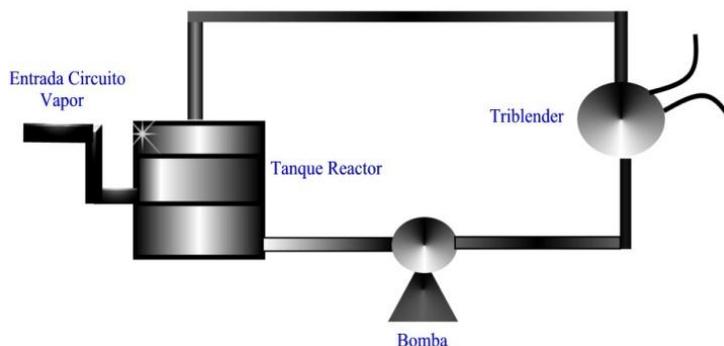
El objetivo principal de esta planta, es producir un volumen de mezcla agua- azúcar a 80 grados *Celcius* para posteriormente distribuirla a diversos sectores donde será transformada en productos como lo son refrescos y aguas gaseosas.

En resumen, el proceso de la planta consiste en agregar cierta cantidad de agua al tanque reactor (aproximadamente 49 hectolitros) inicialmente a temperatura ambiente de 20 grados *Celcius*, en el reactor dicha cantidad de agua se eleva a 60 grados *Celcius*, al poseer esta temperatura el agua es enviada a el triblender por medio del caudal volumétrico generado por la potencia de la bomba.

El triblender es el elemento donde se agrega el azúcar y se forma la mezcla denominada brix (aproximadamente 175 sacos de azúcar de 50 kilogramos c/u, que es el indicado para el volumen inicial de agua). Cuando la mezcla es formada regresa al reactor que ahora almacena un volumen de aproximadamente 107 hectolitros de jarabe o brix.

Una vez más el tanque reactor empieza a trabajar con el objetivo de elevar la temperatura del jarabe a 80 grados *Celcius*. Temperatura que es la adecuada para transportar o distribuir la mezcla a diferentes sectores que posteriormente realizaran otros procesos. La figura 35 muestra el esquema del circuito agua-azúcar.

Figura 35. **Circuito para la producción de mezcla agua-azúcar**



Fuente: elaboración propia.

4.2. Sistema de control actual

En esta sección se hará énfasis solo en el tanque reactor ya que es allí donde la temperatura de la mezcla debe conservarse a 80 grados *Celcius*. Se describirá la manera actual por medio de la cual se controla o se realiza la función de mantener la temperatura de la mezcla agua-azúcar a 80 grados *Celcius*. El sistema de control actual consta de los siguientes componentes:

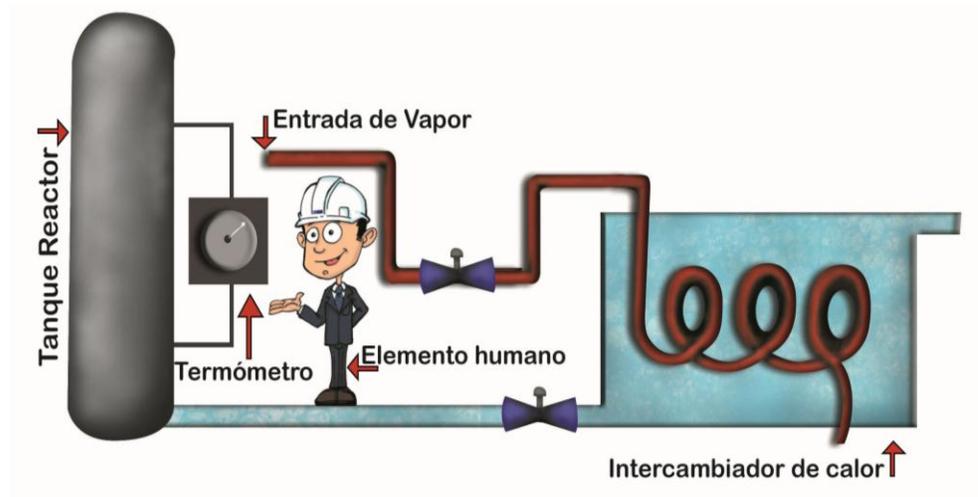
- Tanque reactor (esta es la parte de la planta a controlar)
- Intercambiador de calor
- Válvula neumática (actuador)
- Termómetro
- Elemento humano (observador y controlador)

4.3. Diagrama de bloques del sistema de control actual

La acción de elevar la temperatura de la mezcla ocurre en uno de los elementos básicos de la planta denominado tanque reactor, el cual está conectado a un intercambiador de calor.

El tanque reactor, el intercambiador de calor y los demás elementos forman a su vez un sub-circuito termodinámico, la figura 36, muestra el esquema de este circuito.

Figura 36. **Circuito termodinámico agua-azúcar gobernado por el elemento humano**



Fuente: elaboración propia.

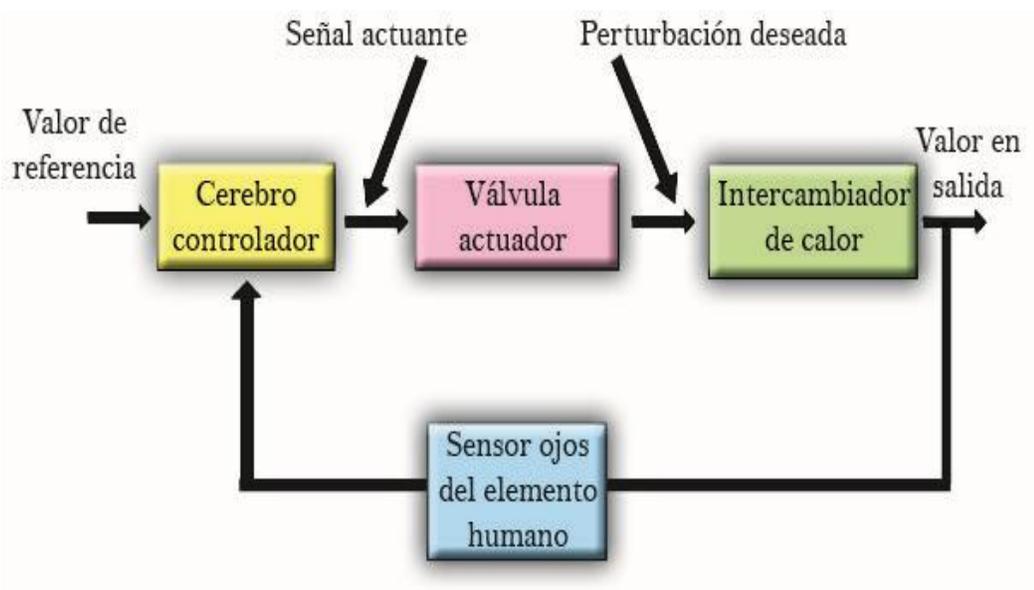
Como se observa, el tanque reactor está conectado con el intercambiador de calor (es aquí donde la mezcla aumenta de temperatura hasta el valor deseado de 80 grados *Celcius*), lo que permite a la mezcla fluir por el intercambiador de calor regresando al tanque reactor.

Además se puede distinguir que existe una entrada de vapor proveniente de una fuente externa como una caldera, esta entrada de vapor es controlada por una válvula neumática que permite o impide el paso de vapor. En la figura 37, se muestra el diagrama de bloques del sistema actual de control, en el cual existe una perturbación deseada. Es importante aclarar que aunque la definición de perturbación dice que es una señal que tiende a afectar de forma negativa la variable a controlar, el concepto general realmente es que una perturbación es una señal que afecta el valor de la variable a controlar.

En la figura 37, cuando el elemento humano abre la válvula, se genera un flujo de vapor que no es nada más que una perturbación que afecta de forma positiva la variable a controlar, debido a que este flujo de vapor o perturbación hace que la temperatura alcance el valor de referencia, por eso en el diagrama aparece como perturbación deseada.

En la opinión del autor, la teoría de control dicta que uno de los objetivos principales de los sistemas de control es eliminar las perturbaciones no deseadas, aunque debería dictar que también uno de los objetivos es generar perturbaciones que ayuden a alcanzar el valor de referencia o *set point*.

Figura 37. **Diagrama de bloques de sistema de control actual**



Fuente: elaboración propia

4.4. Observación sobre el sistema de control actual

En el lazo cerrado de la figura 37, la acción de control la realiza el humano, el controlador es el cerebro que en su memoria tiene presente el valor de referencia o *set point* de 80 grados *Celcius*, el cual está comparando de manera permanente con el valor de la variable de salida mostrada por el termómetro colocado en el tanque reactor. En este lazo de control, el sensor sería los ojos del ser humano y no el termómetro, esta situación es confusa en ocasiones aunque el termómetro es el instrumento de medición que muestra el valor actual de la temperatura, son los ojos los que le informan al cerebro (controlador) el valor actual en la salida.

Esta situación es fácil de aclarar, si se piensa por un instante que pasaría si el operario cerrara los ojos, queda claro que aunque el termómetro este mostrando el valor actual de temperatura, al poseer los ojos cerrados el cerebro no es capaz de conocer el valor de la temperatura actual. Por tanto al cerrar los ojos el ser humano no sabría qué hacer para corregir la acción de control.

La señal actuante estaría representada por la fuerza del hombre que abriría o cerraría la válvula o actuador. En este caso si el hombre observa que la temperatura ha descendido de 80 grados *Celcius*, abrirá la válvula permitiendo el paso de vapor. Si la temperatura estuviera por encima de 80 grados *Celcius* el operario cerraría la válvula y así impedir el paso de vapor en el intercambiador de calor.

5. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DE AUTOMATIZACIÓN POR MEDIO DE UN SISTEMA DE CONTROL PID

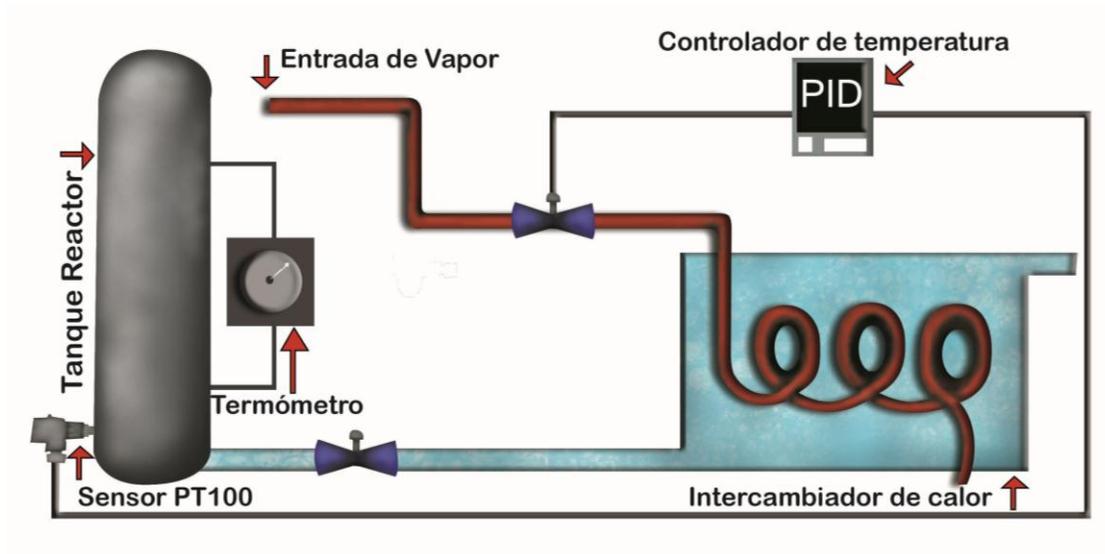
En el capítulo anterior, cuando se mencionaba el término actual, se hacía énfasis a la manera o forma en la que gran parte de las empresas de aguas gaseosas, refrescos y cervezas producen la mezcla comúnmente denominada brix. En este capítulo se desarrollara una propuesta de un sistema de control PID con el objetivo de sustituir el sistema de control actual, el cual incluye aun el elemento humano como controlador.

5.1. Implementación del sistema de control PID

El sistema de control que se propone, consta básicamente de los mismos componentes, con la diferencia que el cerebro humano será remplazado por un controlador PID (en este caso un termocontrolador) y el sensor que llevara la información al controlador PID, será un termómetro conocido como Pt100, para fines prácticos se podría decir que el sensor Pt100, será los ojos del termocontrolador, ya que este informará la situación de la variable de salida a cada instante. Además el sistema de control PID a implementar contará con un circuito eléctrico de mando ya que es parte de la automatización de la planta.

En la figura 38, se puede observar de nuevo el sub-circuito termodinámico que en comparación con el mostrado en la figura 36, se ha eliminado el elemento humano y se ha agregado un sensor que lleva la información de la variable de salida al controlador PID.

Figura 38. **Circuito termodinámico agua-azúcar gobernado por un controlador PID**



Fuente: elaboración propia.

Se elige un controlador de temperatura PID, ya que como se explicó en el capítulo 3, un controlador PID tiene la capacidad de eliminar errores en estado estacionario mediante la acción integral, y es capaz de anticipar el futuro por medio de la acción derivativa. Además el sistema de control PID es simplemente una aplicación del concepto de realimentación.

No es necesario mencionar que la realimentación puede reducir los efectos de las perturbaciones, puede hacer que un sistema sea insensible a las variaciones del proceso. También se mencionó que la realimentación puede conseguir que un sistema siga fielmente sus señales de entrada.

5.2. Descripción de los componentes del sistema de control PID

El sistema de control PID a implementar cuenta de los siguientes componentes:

- Tanque reactor: es el contenedor de la mezcla agua-azúcar. Es aquí donde va colocado el sensor de temperatura.
- Intercambiador de calor: tiene la función de aumentar la temperatura de la mezcla agua-azúcar, acción que realiza transfiriendo el calor que proviene de las tuberías de vapor hacia la mezcla que fluye desde el tanque reactor.
- Válvula neumática reguladora de caudal RMQ 20: permite o impide el paso de vapor en las tuberías, la válvula neumática actúa por medio de la señal correctiva proveniente del controlador PID. Esta señal es de tipo analógica y representa una corriente que varía entre 4 y 20 mA. La tabla IV indica las especificaciones de este componente:

Tabla IV. **Especificaciones generales y eléctricas de válvula neumática RMQ 20**

	especificaciones generales		opciones
conexiones	RMQ	roscas G 3/4 - G 1	
función		regulación no escalonada	
rango de presión	bar	0-64	
factor Kv	DN	20	
	m ³ /h	0-7,3	
contrapresión	bar	máx. 10	
fluido		gaseoso - líquido - altamente viscoso - contaminado	
fluidos abrasivos			version disponible
sentido de flujo	A ⇒ B	según marcado	
ciclos de conmutación			
tiempo de ajuste	DN	20	
cerrado - abierto	sec. ca.	3	
temperatura del fluido	°C	-20 hasta +80	
temperatura ambiente	°C	máx. +70	
homologaciones			WAZ
montaje			escuadras de montaje
peso	kg	RMQ 5,9	

	especificaciones eléctricas		opciones
voltaje nominal	U _n	24 V DC	
	U _n	24 V AC	
consumo	DC	< 0,5 A	
	AC	< 0,5 A	
señales de control	I _e	0-20 mA / 4-20 mA	salida de valor real
	U _e	0-10 V	I _A 4-20 mA
protección	IP 65 (P54)	según DIN 40 050	
funcionamiento continuo	ED	15%	
conexión	M12x1	enchufe DIN 40040 con 5 contactos / diámetro cable 6-8 mm	
equipamiento adicional		salida interna de valor real independiente	

Fuente: hoja técnica válvula reguladora de caudal Tipo RQM 20.

- Termómetro Omnigrad T TR 25: informa constantemente al controlador PID el estado o valor de la temperatura que posee la mezcla en el tanque reactor. Este sensor es un transductor que convierte la variable de temperatura a una señal analógica de corriente. La señal de salida analógica del sensor es la que ingresa como medio de información al controlador PID. La tabla V, describe condiciones y características de trabajo de este sensor:

Tabla V. **Especificaciones de trabajo de sensor de temperatura TR 25 Serie Omnigrab T**

Temperature sensors TR 25, series Omnigrab T, are resistance thermometers suitable for almost all industrial processes and generic applications thanks to their modular structure. They are made up of a measurement probe without a protection well, and a housing, which may contain the transmitter for conversion of the variable measured.

Application areas

- Fine chemicals industry
- Light energy industry
- General industrial services
- Environmental engineering

Features and benefits

- SS 316L/1.4404 for probe "wetted" parts
- The most common compression junctions are supplied as standard; others are available upon request
- Insert (not replaceable) in mineral oxide with a diameter of 6 mm
- Customized immersion length
- Probe end with reduced diameter for a faster response time
- Surface finishing down to $R_a < 0.8 \mu\text{m}$
- Stainless steel, aluminium or plastic housing, with protection grade from IP65 to IP67
- Replaceable mineral insulated insert, with diameter 6 or 3 mm
- PCP (4...20 mA, also with enhanced accuracy), HART® and PROFIBUS-PA® 2-wire transmitters
- Pt 100 sensing element with class A accuracy (DIN EN 60751) or 1/3 DIN B
- Pt 100 wire wound (-200...600°C) or thin film (-50...400°C)
- Double Pt 100, for redundancy purposes
- Single Pt 100 with 4 wires connection, double Pt 100 with 3 wires
- EA calibration certificate

Fuente: *Technical information Omnigrab T TR 25.*

- Controlador de temperatura PID TZ4ST: es la unidad de control de todo el sistema, este es el componente que recibe la información proveniente del sensor (termómetro), la procesa realizando las acciones correctivas descritas y luego envía una señal de salida actuante hacia la válvula neumática. La tabla VI, describe las especificaciones generales de del controlador PID.

Tabla VI. Especificaciones controlador de temperatura PID TZ4ST

ESPECIFICACIONES

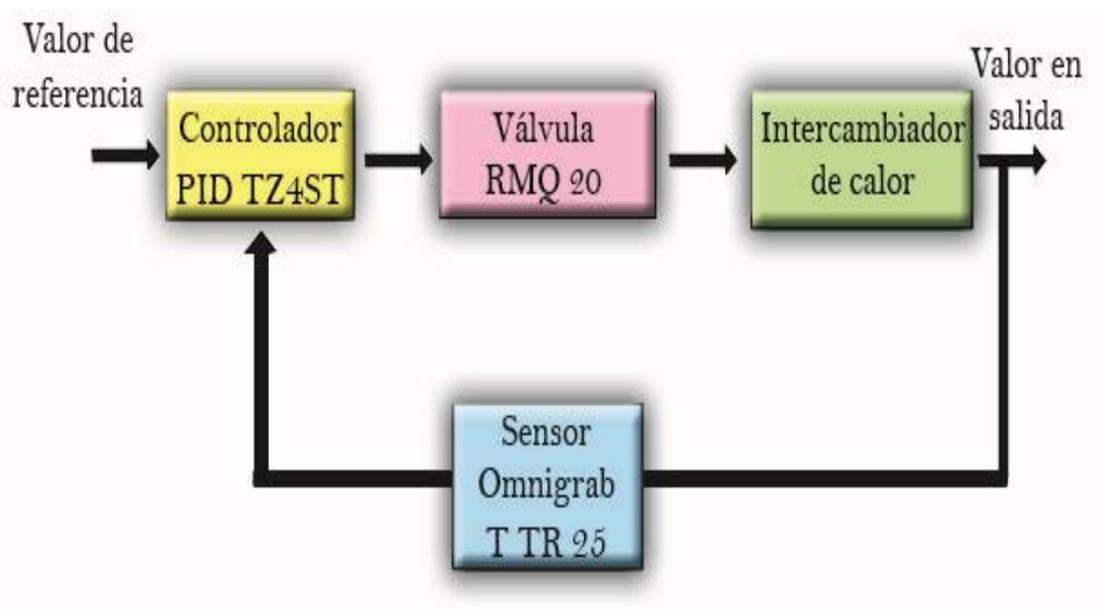
Modelo	TZ4ST	TZ4H
Alimentación	100 a 240 VCA 50/60 Hz \pm 10%	
Consumo	5 VA máx.	
Display	a LED 2 x 4 dígitos de 8 mm, rojos para variable de proceso (PV) y verdes para set-point (SV)	
Tipos de Entrada	Termocupla: K, J, R, E, T, S, N, W. Resistencia máxima del cableado externo :100 ohms	
	Termorresistencia (RTD) : Pt100 DIN, Pt100 JIS. Conexión a tres hilos, 5 ohms máx. por hilo	
	Tensión: 1 a 5 VCC, 0 a 10 VCC; Corriente: 4 a 20 mA	
Modos de Control	ON / OFF (Histéresis: 1 a 100 °C ajustable)	
	P, PI, PD, PIDF (PID rápido), PIDS (PID lento)	
Salida de Control	Salida a Relé: 1 Inversor 3A, 250 VCA carga resistiva	
	Salida para SSR: 12VCC \pm 2 V, 30 mA máx.	
	Salida de corriente: 4-20mA carga: 600 Ω máximo	
Salida de Alarma	1 ó 2 Relés NA: 1A, 250 VCA carga resistiva	
Precisión	\pm 0,3% del fondo de escala \pm 1 dígito	
Histéresis	Ajustable 1 a 100 (0,1 a 100,0) °C, (control ON/ OFF)	
Banda Proporcional (P)	0 a 100%	
Tiempo Integral (I)	0 a 3600 seg	
Tiempo Derivativo (D)	0 a 3600 seg	
Período de Control (T)	1 a 120 seg	
Tiempo de muestreo	500 mseg	
Tiempo de alarma de lazo	1 a 999 seg	
Tiempo de Rampa	Subida, Bajada de 1 a 99 minutos	
Rigidez dieléctrica	2000 VCA 50/60Hz durante 1 minuto entre alimentación y entradas de sensor	
Durabilidad mecánica	0,5 mm de amplitud de 5 a 55 Hz en cada una de las direcciones X, Y, Z durante 2 horas	
Resistencia de aislación	100 Mohm mín (500 VCC)	
Ruido	\pm 2KV fase R y fase S 1 μ seg	
Retención de Memoria	10 años (mediante EEPROM)	
Temperatura de operación	-10 °C a 50 °C (sin formación de hielo)	
Temperatura de almacenamiento	-20 °C a 60 °C (sin formación de hielo)	
Humedad	35% a 85% RH	
Peso	136 g	259 g

Fuente: manual de usuario controlador de temperatura PID TZ4ST.

5.3. Diagrama de bloques y función de transferencia del sistema de control PID

En el capítulo 2, se describe un diagrama de bloques como una representación gráfica, la cual se puede utilizar simplemente para indicar la interconexión de los componentes del sistema y la dirección del flujo de señales o lo que es más importante, dicha representación gráfica se puede emplear junto con la función de transferencia de cada componente para aplicar el álgebra de bloques si fuera necesario. En la figura 39 se observa el diagrama de bloques del sistema de control PID.

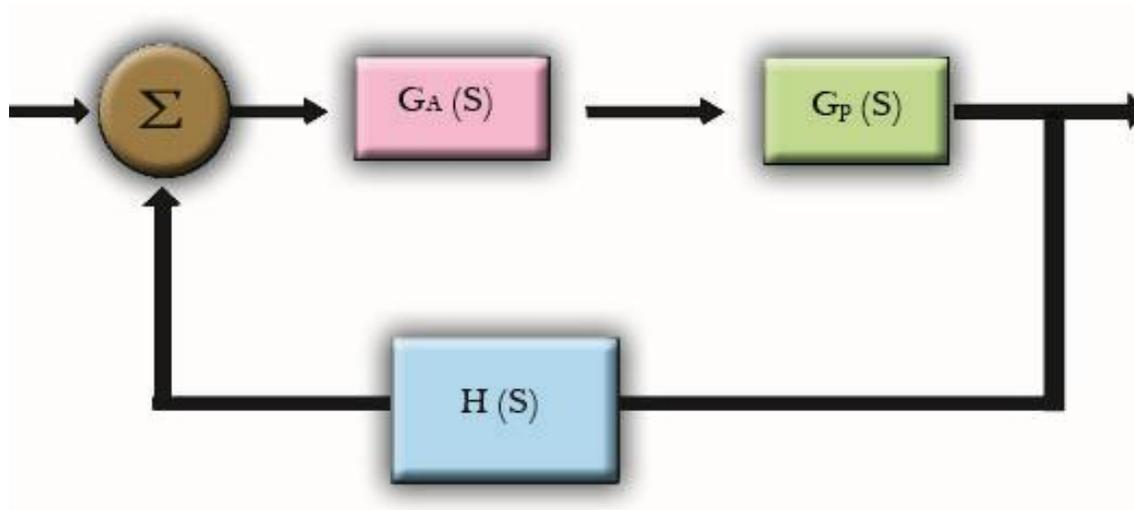
Figura 39. Diagrama de bloques de sistema de control PID diseñado



Fuente: elaboración propia.

La función de transferencia fue descrita como el cociente entre la transformada de *Laplace* de la función de salida y la transformada de *Laplace* de la función de entrada de algún componente del sistema o del sistema en general. La función de transferencia de cada componente y el flujo de señales del sistema de control PID, se describe en la figura 40. Donde $G_A(s)$ representa la función de transferencia de válvula actuadora, $G_p(s)$ es la función de transferencia del intercambiador de calor y la función de realimentación $H(s)$ representa al sensor de temperatura.

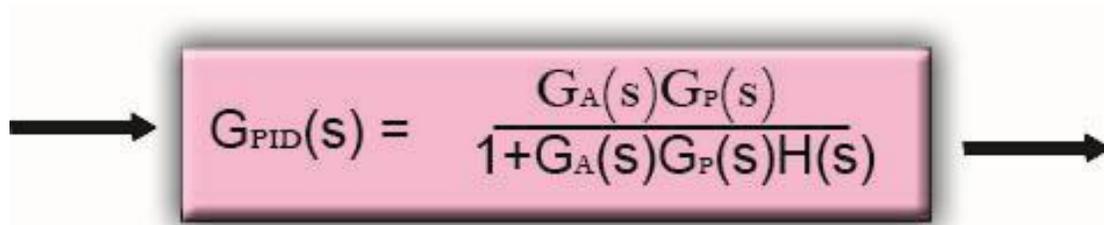
Figura 40. **Función de transferencia y flujo de señales de cada componente**



Fuente: elaboración propia.

La figura 41 muestra la función de transferencia y el diagrama de bloques que resulta al aplicar reducción por medio del álgebra de bloques al sistema de control PID.

Figura 41. **Función de transferencia general del sistema de control PID**


$$G_{PID}(s) = \frac{G_A(s)G_P(s)}{1+G_A(s)G_P(s)H(s)}$$

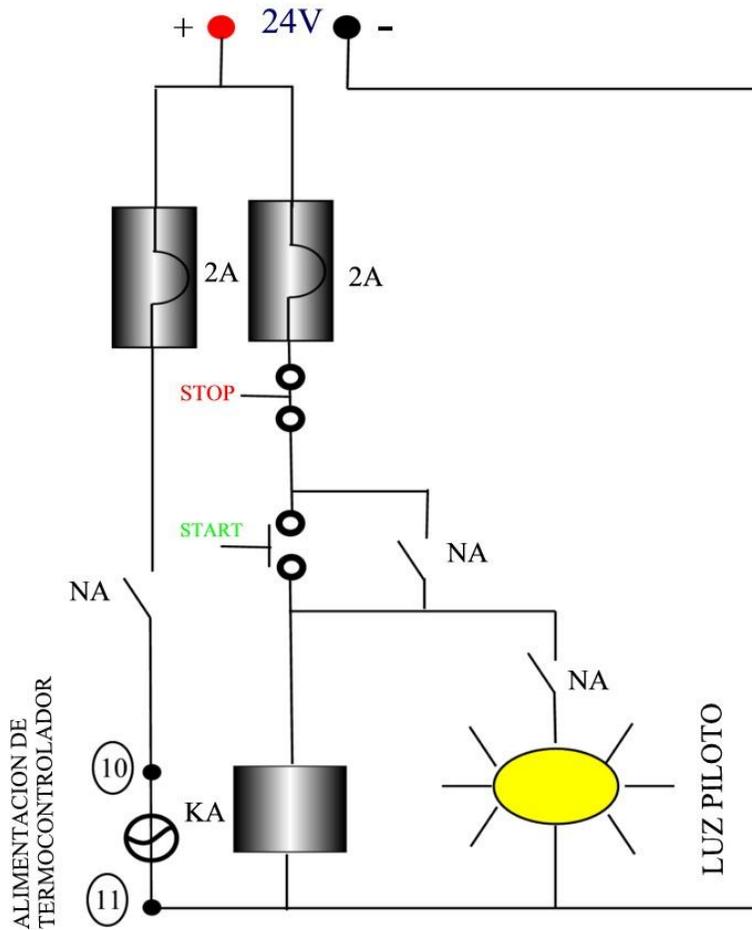
Fuente: elaboración propia.

5.4. **Circuito eléctrico de mando del sistema de control PID**

El circuito eléctrico de mando, realiza la acción de poner en marcha o detener el funcionamiento del sistema de control PID. En la figura 42 se muestra el diagrama del circuito eléctrico de mando que se diseñó para el sistema de control PID. Este circuito trabaja con 24Vcc (*volts* de corriente directa), se observa que posee fusibles para la protección, un relé denominado “KA” y una luz piloto.

Existe un botón de inicio, el cual al ser presionado cierra el circuito haciendo que circule una corriente por la bobina del electroimán que posee el relé, al estar energizado el relé, la fuerza electromagnética hace que los contactos (normalmente abiertos) del relé se cierren. Cuando esto ocurre también se energiza la luz piloto que indica que el sistema de control PID está funcionando. Además existe un botón de paro que al ser presionado abre el circuito e impide el paso de corriente eléctrica y por tanto no existe fuerza electromagnética alguna capaz de cerrar los contactos del relé “KA”.

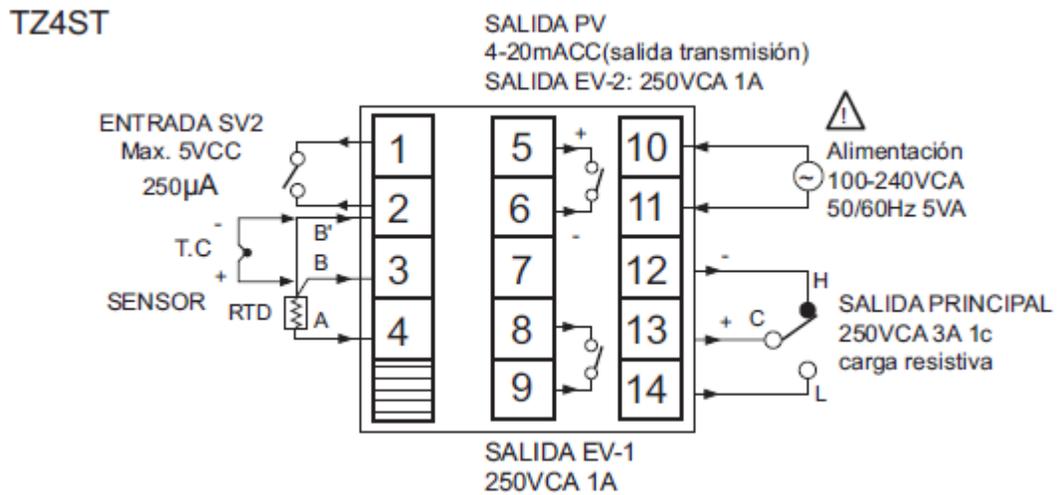
Figura 42. Diagrama circuito eléctrico de mando del sistema de control PID



Fuente: elaboración propia.

Un detalle importante a observar en el diagrama de la figura 42, es que los puntos 10 y 11 indica los bornes de alimentación del controlador de temperatura PID.

Figura 43. **Esquema de conexiones controlador de temperatura PID TZ4ST**



Fuente: manual de usuario controlador de temperatura PID TZ4ST.

El esquema de conexiones del termocontrolador TZ4ST se indica en la figura 43. El sensor Pt100 (Omnigrab T TR25) se ha conectado en bornes 2, 3 y 4. La salida de transmisión representada por los bornes 5 y 6, es la conexión hacia la válvula neumática (RMQ 20).

CONCLUSIONES

1. La finalidad o función de un sistema de control, es conseguir mediante la manipulación de las variables de control un dominio sobre las variables de salida, de modo que éstas alcancen valores previamente establecidos.
2. Un modelo matemático de un sistema de control, representa el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema con precisión. A partir de la aplicación de modelos matemáticos, se logra obtener la función de transferencia del sistema de control PID diseñado.
3. Un sistema de control PID es una implementación del concepto de realimentación, tiene la capacidad de eliminar los errores en estado estacionario mediante la acción integral y es capaz de anticipar el futuro por medio la acción derivativa. Al poseer una acción de control realimentado puede reducir los efectos de las perturbaciones, hacer que un sistema sea insensible a las variaciones del proceso y tiene la capacidad de lograr que un sistema siga fielmente a sus señales de entrada.
4. En el sistema de control PID diseñado en sustitución del sistema de monitoreo actual, el controlador PID, es el componente que recibe la señal proveniente de un sensor, para luego en base a la señal de error calcular la acción correctiva de control y enviar el valor de la señal manipulada hacia el actuador.

5. El porcentaje de apertura o paso de la válvula es proporcional a la magnitud de la señal de corriente que ingresa a esta como señal actuante. Cuando la magnitud de la señal es 4mA (mili *Ampére*) la válvula abrirá su paso 0 por ciento, 8 mA representa un paso de 20 por ciento, 12 mA equivale a un paso de 50 por ciento, 16 mA abrirá el paso de la válvula en un 75 por ciento y con una señal de 20 mA se obtiene una válvula en su totalidad abierta (representa un paso de 100 por ciento).

6. En función de la entrada de realimentación y el valor de referencia, el termocontrolador realiza los cálculos correspondientes, luego envía el valor de la señal actuante adecuada para corregir el error. De esta forma el sistema de control PID diseñado es capaz de controlar y gobernar la variable temperatura del circuito termodinámico agua-azúcar.

7. El circuito de mando eléctrico, se adapta al sistema de control PID, automatizando la acción de poner en marcha o detener el funcionamiento del sistema de control PID. Por tanto, permite o impide que sea el sistema de control PID el que monitoree y gobierne la variable temperatura de la planta.

RECOMENDACIONES

1. Es importante y necesario, conocer sobre la teoría básica de sistemas de control, así también la clasificación de estos sistemas, para poseer un patrón de referencia desde el inicio y saber que enfoque es más conveniente a aplicar sobre un sistema.
2. Se debe tener presente que en el diseño sistemas de control, se experimenta con modelos matemáticos. Por este motivo, resulta indispensable que el diseñador adquiera conocimiento sobre números complejos, variables y funciones complejas, ecuaciones diferenciales, álgebra matricial, la transformada de *Laplace*, algunos criterios de estabilidad como el método de *Routh* y en general todo conocimiento sobre matemática que se pueda aplicar al análisis de sistemas de control. De hecho un diseñador de sistemas de control que no esté instruido en el área de matemática, técnicamente no sería un diseñador.
3. Al diseñar e implementar un sistema de control que posee realimentación, se debe estar consciente que la realimentación podría desestabilizar un sistema que es estable, aunque una de sus funciones principales es estabilizar un sistema que no sigue a los comandos de entrada, este fenómeno de inestabilidad podría ocurrir. Por este motivo al implementar realimentación a un sistema en lazo abierto es conveniente realizar previamente un análisis.

4. Antes de realizar el montaje del controlador PID en el panel de control, es conveniente revisar en el manual de usuario las dimensiones que este posee, leer acerca de la programación y sintonización del controlador PID.
5. La válvula neumática es el actuador del sistema de control PID, las especificaciones de la válvula utilizada en el diseño, indican que esta trabaja con valores de temperatura del fluido en un rango de -20 a 80 grados *Celcius*. Si por algún motivo se presenta la necesidad de reemplazar este componente se debe de tomar en cuenta que el nuevo componente en sustitución cumpla con las condiciones de trabajo que presenta la planta.
6. El sistema de control PID diseñado puede ser utilizado en una variedad de procesos que implique el control de temperatura de algún líquido o mezcla, modificando el valor de referencia, ya que el controlador PID no es capaz de percibir que tipo de líquido se encuentra en el contenedor.
7. El sistema de control PID, debería ser implementado en conjunto con el circuito de mando eléctrico. Ya que el circuito eléctrico cuenta con protección para absorber las descargas o sobretensiones que se podrían generar cuando el sistema en conjunto está trabajando.

BIBLIOGRAFÍA

1. ASTRÖM, Karl Johan; HÄGGLUND, Tore. *Control PID avanzado*. Suecia: Prentice-Hall, 2009. 487 p.
2. Coax, Hoja técnica: *Válvula reguladora de caudal tipo RMQ*. Alemania: Coax, 2011. 3 p.
3. KUO, Benjamin. *Sistemas de control automático*. 7a. ed. México: Prentice Hall, 1996. 897 p.
4. Autonics, *Manual de usuario controlador de temperatura PID TZ4ST*. Korea: Autonics, 2008. 16 p.
5. OGATA, Katsuhiko. *Ingeniería de control moderna*. 3a. ed. México: Prentice- Hall, 1998. 997 p.
6. Endress Hauser, *Technical information Omnigrab T TR 25*. Alemania: Endress Hauser, 2004. 12 p.

ANEXOS

Tabla VII. **Tabla de la transformada de Laplace**

Transformada de Laplace $F(s)$	Función tiempo $f(t)$
1	Función impulso unitario $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Función escalón unitario $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Función rampa unitaria t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n =$ entero positivo)
$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ ($n =$ entero positivo)
$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ ($\alpha \neq \beta$)
$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$ ($\alpha \neq \beta$)
$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[t - \frac{1}{\alpha} + \left(t + \frac{2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \right]$

Fuente: Benjamín C. Kuo. Sistemas de control automático. Séptima edición.