UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, Centro América

"CONSIDERACIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA PROGRAMACION LINEAL"

TESIS

Presentada a la Junta Directiva
de la
Facultad de Ingeniería
de la
Universidad de San Carlos de Guatemala

por

EDGAR SANTIAGO MUÑOZ LIMA

Al conferírsele el título de

INGENIERO CIVIL

Guatemala, marzo de 1971

A mi familia

A la Facultad de Ingeniería

A la Universidad de San Carlos

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:	Ing. Mauricio Castillo Contoux
Vocal Primero:	Ing. Marco Antonio Cuevas
Vocal Segundo:	Ing. Rodolfo González Morasso
Vocal Tercero:	Ing. Adolfo Behrens
Vocal Cuarto:	Br. Gustavo Adolfo Sierra
Vocal Quinto:	Br. Guido Concenza
Secretario:	Ing. Héctor A. Centeno B.

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Decano:	Ing. Enrique Godoy S.
Vocal:	Ing. Emilio Beltranena
Examinador:	Ing. Rodolfo González
Examinador:	Ing. Francisco Billeb Vela
Secretario:	Ing. Eduardo Martínez Balsells

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

Cumpliendo con lo establecido por la Ley Universitaria, tengo el honor de someter a vuestra consideración mi trabajo de tesis, titulado "CONSIDERACIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA PROGRAMACION LINEAL", tema que me fuera asignado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.

I N D I C E

INTRODUCCION

El desarrollo de la técnica y el aumento de necesidades por satisfacer en nuestros tiempos, obliga a la búsqueda de nuevos métodos para simplificar los procesos de, planeamiento, diseño, creación y operación económica de sistemas, que es el objeto primordial de la práctica de la ingeniería.

Ayudando al planeamiento, diseño y operación económica de sistemas, se encuentra la Programación Lineal. Esta comprende una serie de técnicas matemáticas, modelos, métodos de análisis y puntos de vista; que son herramientas que el programador debe tener a su alcance para cumplir su cometido.

Aún cuando es usual pensar que la Programación Lineal trata sólo problemas en donde un objetivo (maximinizar una utilidad, minimizar mano de obra, tiempo, costo) ha sido claramente establecido y donde los requerimientos son compatibles con los recursos disponibles, también es posible modificar los métodos standard de Programación Lineal para resolver muchos otros tipos de problemas. Es por ello que el progreso de la Programación Lineal ha sido rápido, tanto en su metodología fundamental como en el número y variedad de sus aplicaciones.

Este trabajo no trata de los distintos métodos de Programación Lineal desarrollados a la fecha (de lo cual existen muchas publicaciones), sino de los fundamentos matemáticos que les dieron origen, tratando de presentar en forma sencilla, la base necesaria para comprender el porqué de las operaciones sistemáticas de los algoritmos, que son aplicadas en forma casi mecánica para resolver los problemas, esto satisfará en parte una serie de preguntas que se presentan a los aplicadores de la Programación Lineal.

Los teoremas básicos solo serán enunciados, prescindiendo de las demostraciones, porque estas se encuentran en muchos textos y tratados de la materia.

I.1 EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

La Programación Lineal permite la selección de una combinación óptima de factores, de entre una serie de alternativas relacionadas entre sí, cada una de ellas sujeta a limitaciones. Esta combinación óptima será un máximo si nos interesa, utilidad, seguridad, rendimiento, superficie aprovechada. Será un mínimo si tratamos con costos, mano de obra, tiempo, materiales, distancia a recorrer.

Esto es, tenemos una función f en forma lineal que es nuestro objetivo

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

la cual queremos optimizar, sujeta a las condiciones siguientes:

$$x_i \geqslant 0 \qquad\qquad i \in \{1,2 \dots n\}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}\ x_3 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mi}x_i + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

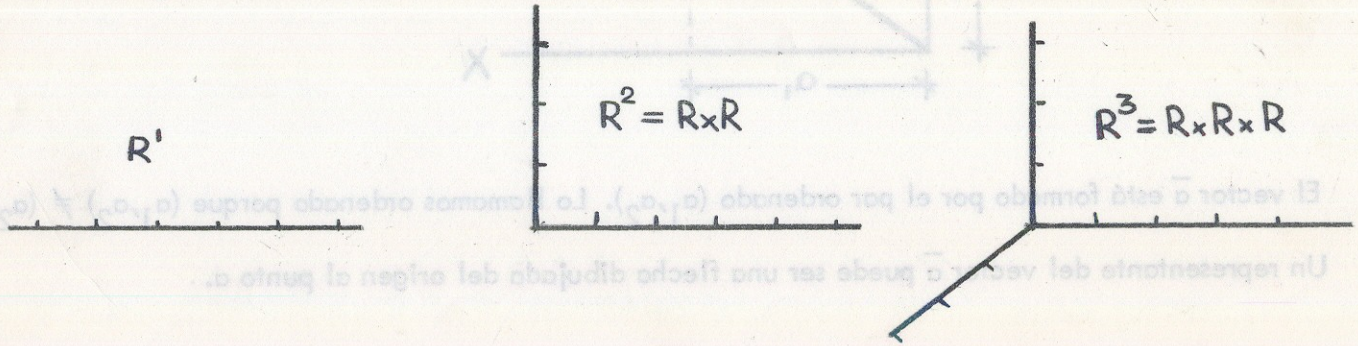
O sea una ecuación matricial de la forma $AX = B$ en la cual $m < n$

Estos problemas se caracterizan por tener muchas soluciones, que satisfacen las condiciones básicas de cada problema. La selección de una solución particular, como la mejor solución al problema, depende del objetivo implícito en el planteamiento del mismo. La solución que satisface a la vez las condiciones del problema y el objetivo dado, se llama solución óptima.

CAPITULO II

II.1 ESPACIOS VECTORIALES. ESPACIOS EUCLIDIANOS

Consideraré únicamente el campode los números reales R, de los cuales R^1 denotará a los escalares; R^2 al espacio de dos dimensiones (plano); R^3 al espacio tridimensional; R^n al espacio n-dimensional. (Existe una biyección)



Usaré en forma general R^n para representar un espacio, porque los problemas que estudia la programación lineal tienen generalmente componentes en más de tres dimensiones.

II.2 VECTOR

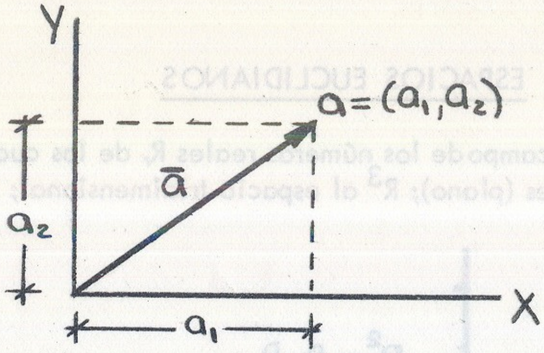
Definimos a un vector como un conjunto ordenado de números reales, así $\overline{a}$, $\overline{b}$ son vectores en R^n formados por n-adas de elementos

$$\overline{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3\ \dots\ a_n) = (a_i)$$

$$\overline{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots\ b_n) = (b_i) \qquad i \in \{1,2\dots n\}$$

Los números reales a_i & b_i tal que $i \in \{1,2,\dots n\}$ son llamados componentes de $\overline{a}$ & $\overline{b}$ respectivamente. A este conjunto de componentes es al que llamamos vector en R^n. (Se hace una identificación entre puntos de R^n y vectores de R^n, por existir una aplicación biyectiva de E^n en R^n).

Como se ve esto es una generalización del punto (o vector) en dos dimensiones (en R^2) con el que estamos familiarizados



El vector $\overline{a}$ está formado por el par ordenado (a_1,a_2). Lo llamamos ordenado porque $(a_1,a_2) \neq (a_2,a_1)$.

Un representante del vector $\overline{a}$ puede ser una flecha dibujada del origen al punto a.

II.3 IGUALDAD DE VECTORES

Dos vectores $\overline{a}$ & $\overline{b}$ son iguales si y solo si tienen el mismo número de componentes (es decir pertenecen al mismo espacio n-dimensional) y sus correspondientes componentes son iguales.

Sean $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ & $\overline{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$

DEFINICION: $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall \ i \in \{1,2,\dots n\}$

Ejemplo. Consideremos los siguientes vectores:

$\overline{a} = (1,3,5)$ $\qquad \overline{b} = (1,3,4)$ $\qquad$ & $\overline{c} = (1,3,5)$

Entonces $\overline{a} \neq \overline{b}$

$\overline{a} = \overline{c}$

$\overline{b} \neq \overline{c}$

II.4 ADICION DE VECTORES

Sean $\bar{a}$ & $\bar{b}$ dos vectores en R^n. La suma de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ que denotaremos $\bar{a} + \bar{b}$, es el vector obtenido de sumar los correspondientes elementos de $\bar{a}$ & $\bar{b}$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots a_n + b_n)$$

Ejemplo sean

$\bar{a} = (3,5,-3)$ & $\bar{b} = (2,3,8)$ entonces

$$\bar{a} + \bar{b} = (3+2, 5+3, -3+8) = (5,8,5)$$

II.5 MULTIPLICACION DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El producto de un escalar $k \in R$ por un vector $\bar{a} \in R^n$ que escribimos $k\bar{a}$ es el resultado de multiplicar k por cada una de las componentes del vector $\bar{a}$

si $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$ entonces

$$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, \dots ka_n)$$

El vector resultante tiene también el mismo número "n" de componentes es decir sigue perteneciendo a R^n; (Nótese que la flecha dibujada tiene el mismo sentido que $\bar{a}$ si $k > 0$; contrario si $k < 0$).

Ejemplo. Sean $\bar{a} = (2, 5, 3)$ & $k = 2$ entonces
$k\bar{a} = (2.2, 2.5, 2.3) = (4, 10, 6)$

II.6 ESPACIO VECTORIAL

Un Espacio Vectorial E^n es un conjunto de vectores V y un campo Δ, en el cual se definen una operación interna llamada adición de vectores y una operación externa llamada multiplicación por un escalar, teniendo las propiedades siguientes:

1.- $(E^n, +)$ es un grupo Abeliano, esto es:

i) Dados cualquier par de vectores $\bar{a}, \bar{b} \in E^n$ existe un único vector "$\bar{a} + \bar{b}$" llamado la suma de $\bar{a}$ & $\bar{b}$ tal que $\bar{a} + \bar{b} \in E^n$ (propiedad de cerradura)

ii) Dados $\bar{a}, \bar{b}, \in E^n$; $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (Propiedad conmutativa)

iii) Dados $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in E^n$; $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (Propiedad asociativa)

iv) $\exists\ \bar{o} \in E^n \ni \forall\ \bar{a} \in E^n\ \bar{a} + \bar{o} = \bar{a} = \bar{o} + \bar{a}$ (existe un neutro aditivo, el vector cero)

v) $\forall \bar{a} \in E^n \exists -\bar{a} \in E^n \ni \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o} = (-\bar{a}) + \bar{a}$

2.- Dado cualquier vector $\bar{a} \in E^n$, para todo escalar $k \in R$ existe un único vector $k\bar{a} \in E^n$ llamado producto de un vector por un escalar con las siguientes propiedades:

vi) $k(\lambda \bar{a}) = (k\lambda)\bar{a}$ siendo k & λ escalares (propiedad semi-asociativa)

vii) $1\bar{a} = \bar{a} = \bar{a}1$ siendo 1 el neutro multiplicativo del Campo Δ

viii) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}\ \forall\ \bar{a}, \bar{b} \in E^n$ & $k \in \Delta$ (propiedad semi-distributiva escala por un vector respecto a la adición de vectores)

ix) $(k + \lambda)\bar{a} = k\bar{a} + \lambda\bar{a}\ \forall\ \bar{a} \in E^n$ & $k, \lambda \in \Delta$ (multiplicación de escala por vectores respecto a la adición de escalares)

II.7 SUB-ESPACIO VECTORIAL

Un Sub-espacio V^m de E^n se define como el sub-conjunto de E^n que es a su vez un Espacio Vectorial. $(m \leq n)$.

Ejemplo: el conjunto de vectores en E^3 que están contenidos en el plano X_1X_2 forman un Sub-espacio de E^3 (la dimensión de este Sub-espacio es 2).

II.8 COMBINACION LINEAL

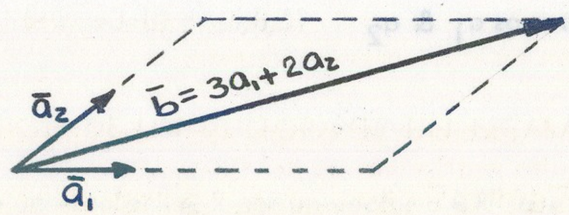
Sea E^n un espacio Vectorial y $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ vectores de E^n. Una expresión de la forma

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_n\bar{a}_n$$

en donde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son escalares, se llama una combinación lineal de los vectores $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$

Ejemplo. Sean $\bar{a}_1$ & $\bar{a}_2$ vectores del espacio E^2

Si $\bar{b} = 3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2$ se dice que el vector $\bar{b}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{a}_1$ & $\bar{a}_2$ (Es claro entonces que el dibujo de $\bar{b}$ es:



II.9 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición: un vector $\bar{a}$ se dice que es Linealmente Dependiente de los vectores $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n$ si y solo si puede ser escrito como una Combinación Lineal de ellos

$$\bar{a} = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \ldots + k_n\bar{x}_n$$

En donde $k_1, \ldots k_n$ son escalares. Si tal relación no existe a es Linealmente Independiente de $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. De la definición anterior se infiere inmediatamente el siguiente.

II.10. TEST DE INDEPENDENCIA LINEAL

Los vectores $\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n$ son Linealmente Independientes solo si la condición:

$$a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \ldots + a_n\overline{x}_n = \overline{o}$$

(siendo $a_1, \ldots, a_n$ escalares) implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ de lo contrario son Linealmente Dependientes.

Ejemplo si $\overline{x}_1 = (3,4)$ & $\overline{x}_2 = (1,-3)$

¿ Es $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ Linealmente independiente de orden 2?

$$a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 = \overline{o}$$

sustituimos los valores de $\overline{x}_1$ & $\overline{x}_2$ y encontramos a_1 & a_2

$$a_1(3,4) + a_2(1,-3) = \overline{o}$$

$$(3a_1, 4a_1) + (a_2, -3a_2) = (0,0)$$

$$(3a_1 + a_2,\ 4a_1 - 3a_2) = (0,0)$$

Tenemos dos condiciones con dos incógnitas

$$3a_1 + a_2 = 0$$

$$4a_1 - 3a_2 = 0$$

de donde $a_1 = 0$ & $a_2 = 0$ lo que implica que $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ sin son Linealmente Independiente.

II.11. ORTOGONALIDAD

Teorema. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores pertenecientes al espacio vectorial E^n, se dice que a & b son ortogonales o sea perpendiculares entre sí, si y solo si

$$\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2$$

Dem: $\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = (\bar{a}+\bar{b}) \cdot (\bar{a}+\bar{b})$

$$= (\bar{a}+\bar{b}) \cdot \bar{a} + (\bar{a}+\bar{b}) \cdot \bar{b}$$

$$= \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{b}$$

$$= \|\bar{a}\|^2 + 2(\bar{a}\cdot\bar{b}) + \|\bar{b}\|^2$$

$$\therefore \|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

Definición i) Un conjunto de vectores $a_1, a_2, .. a_i ... a_n$ E^n se dice que son ortogonales si $\bar{a} \neq 0$ para todo i y además

$$\bar{a}_i . \bar{a}_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Definición ii) a .a = 1 para todo i, entonces se dice que el conjunto es ortonormal

Definición iii) Un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero es un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares.

Definición iv) Un conjunto ortonormal de vectores es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

Definición v) A todo conjunto de vectores ortonormales que forman una base en E^n se le llama base ortonormada.

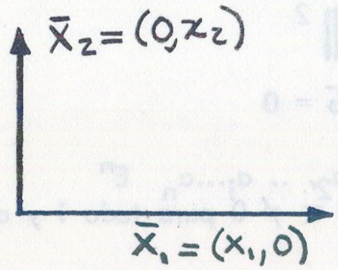
II.12. BASE Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Una Base de un Espacio Vectorial E^n es cualquier conjunto de vectores Linealmente Independientes de orden "n". Donde n es tal que no existe ningún conjunto de vectores Linealmente Independientes de orden "n+1"

El número "n" es llamado la Dimensión del Espacio Vectorial E^n

Así una Base es un conjunto de vectores tal que cualquier vector de E^n puede ser expresado como una combinación lineal de estos "n" vectores. Esto es, una Base de "n" vectores "GENERA" un espacio E , por lo que también se le llama conjunto de generadores,

II.13. Ejemplo. Una base familiar es la que genera E^n formando lo que conocemos por Plano Cartesiano



Si $\bar{x}_1$ & $\bar{x}_2$ son vectores unitarios, es costumbre denotarlos como $\bar{e}$ & $\bar{e}$ y será una base ortonormada en E^2

$\bar{e}_1 = (1,0)$ & $\bar{e}_2 = (0,1)$

En forma general, una base en E^n será una base ortonormada*, si está definida en la forma siguien- te:

$$
\begin{aligned}
\bar{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)\\
\bar{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)\\
\bar{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0)\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\bar{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1)
\end{aligned}
$$

Luego cualquier vector de E^n puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de esta base.

Así si $\bar{x} \in E^n$ tenemos

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n$$

Los escalares $x_1, x_2, \ldots x_n$ son llamados componentes en la base ordenada $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}_n)$ o coordenadas de $\bar{x}$.

II.14. CAMBIO DE BASE

Sean $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}_n)$ & $(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \ldots \bar{e}_{n'})$ dos bases arbitrarias de un Espacio Vectorial E^n. Es claro que cada vector de la segunda base puede ser expresado como una combinación de los vectores de la primera.

Así:

$$\bar{e}_{j'} = a_{1j'}\bar{e}_1 + a_{2j'}\bar{e}_2 + \ldots a_{nj'}\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij'}\bar{e}_i$$

Con $j \in \{1, 2, \ldots n\}$

En forma similar cada vector de la primera base puede ser expresado en función de los vectores de la segunda por las fórmulas

$$\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i'j}\bar{e}_{i'} \qquad \text{con} \qquad j \in \{1, 2, \ldots n\}$$

Sea ahora $\bar{x}$ un vector arbitrario del espacio E^n cuyas componentes con respecto a la primera base los denotamos x_i y cuyas componentes con respecto a la segunda base los denotamos $x_{i'}$. Se desea expresar uno de estos conjuntos de componentes en función del otro.

Tenemos:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i = \sum_{j'=1}^{n} x_{j'} \bar{e}_{j'} = \sum_{i,j'}^{n} x_{j'} a_{ij'} \bar{e}_i$$

igualando los coeficientes de los $\bar{e}_i$ obtenemos

$$\bar{x}_i = \sum_{j'=1}^{n} a_{ij'} \bar{x}_{j'}$$

Es claro que para cualquier vector $\bar{x}$ que nosotros consideremos, sus componentes sin transformadas de la misma manera bajo un cambio de base dado. De donde concluimos que las fórmulas para la transformación de las componentes de un vector serán:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_i &= \sum_{j'=1}^{n} a_{ij'} \bar{x}_{j'} \\ \bar{x}_{i'} &= \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} \bar{x}_j \end{aligned}}$$

La segunda fórmula fue derivada de la primera simplemente intercambiando los papeles desempeñados por cada base.

Los cambios de base juegan un papel muy importante en la resolución de programas lineales por lo que su manejo es básico.

II.15. PRODUCTO INTERNO

Definición: el producto interno llamado también producto escalar o producto punto, de dos vectores $\bar{a}$ & $\bar{b}$ E^n se define como el escalar que se obtiene de multiplicar en forma ordenada los elementos correspondientes de $\bar{a}$ & $\bar{b}$ y luego sumar los productos resultantes.

Se denota $\overline{a}.\overline{b}$

Si $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ & $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

tenemos que

$$\overline{a}.\overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

El producto interno tiene las siguientes propiedades:

i) $\overline{a}.\overline{b} = \overline{b}.\overline{a}$ (es conmutativo)
ii) $\overline{a}.(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c}$ (distributivo) respecto a la adición de vectores
iii) $k(\overline{a}.\overline{b}) = k\overline{a}.\overline{b}$ en donde k es un escalar
iv) $\overline{a}.\overline{b} = o \Rightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$

II.16. NORMA

Definición:

Norma de un vector $\overline{a} \in E^n$ es el producto interno de $\overline{a}$ consigo mismo

$$N\overline{a} = \overline{a}.\overline{a} = a^2$$
$$Na = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)$$

A todo vector cuya Norma sea igual a uno se le llama vector unitario o versor.

II.17. LONGITUD

Definición: se llama longitud de un vector $\overline{a} \in E^n$ escribiéndose $\|\overline{a}\|$ a la raíz cuadrada positiva de la norma de $\overline{a}$

$$\|\overline{a}\| = \sqrt{N\overline{a}} = \sqrt{\overline{a}.\overline{a}}$$

Ejemplo. La longitud del vector $\bar{x} \in E \ni \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es

$$\| \bar{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

II.18. DISTANCIA

Definición: sean $\bar{a}$ & $\bar{b}$ dos vectores del espacio E^n. La distancia entre $\bar{a}$ & $\bar{b}$ que denotaremos $d(\bar{a},\bar{b})$ será:

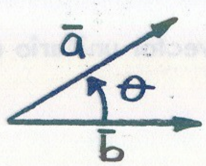
$$d(\bar{a},\bar{b}) = \| \bar{a} - \bar{b} \|$$

Para justificar el uso del término distancia, d(a,b) debe satisfacer las siguientes propiedades:

i) $d(\bar{a},\bar{b}) \geqslant 0$
ii) $d(\bar{a},\bar{b}) = 0 \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$
iii) $d(\bar{a},\bar{b}) = d(\bar{b},\bar{a})$
iv) $d(\bar{a},\bar{b}) + d(\bar{b},\bar{c}) \geqslant d(\bar{a},\bar{c})$

Nótese que la distancia tiene sentido al identificar vectores con punto.

DEFINICION: $\bar{a}.\bar{b} = \| \bar{a} \| \cdot \| \bar{b} \| \cos\theta$; donde θ es el ángulo formado entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$



II.19. ESPACIO EUCLIDIANO

Definición: la utilidad de la Geometría depende en mucho de la habilidad para medir d istancias entre puntos. A partir de la noción de producto interno hemos definido lo que es longitud, distancia y me dida angular, con estos conceptos llamados conceptos métricos, vamos a enriquecer los Espacios Vectoriales introduciéndoles la métrica para formar los Espacios Euclidianos también llamados Espacios Métricos o Espacios de Producto Interno.

CAPITULO III

III.1. TRANSFORMACIONES LINEALES

Lo que vimos en el Capítulo II puede ser mejor descrito como una modesta generalización de algunas de las ideas implícitas en geometría analítica. A pesar de que se introdujeron términos y conceptos tales como dependencia e independencia lineal, espacios, sub-espacios, bases, etc. ellos agregaron muy poco al conocimiento que de los vectores teníamos en la geometría elemental. Todo esto cambia sin embargo, tan pronto como estos conceptos son usados para estudiar funciones definidas sobre espacios vectoriales; veremos entonces como los conceptos anteriores adquieren significación y nos proporcionan la herramienta matemática que buscamos.

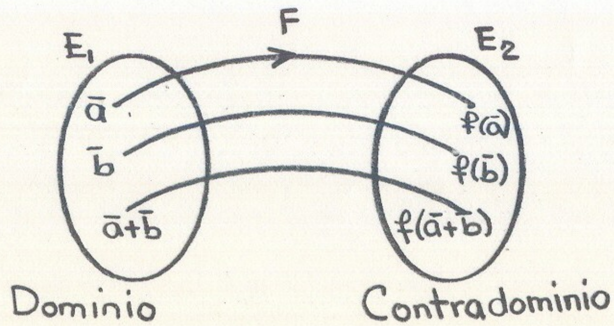
III.2. DEFINICION

Sean E_1 & E_2 espacios vectoriales de dimensión n & m respectivamente, $k \in R$. Diremos que una transformación lineal del espacio vectorial E_1 al espacio vectorial E_2 es una función "F" que asocia a cada vector $\bar{a} \in E_1$ un único vector $f(\bar{a}) \in E_2$ de tal manera que,

$$F(\bar{a} + \bar{b}) = F(\bar{a}) + F(\bar{b})$$

& $$F(k\bar{a}) = kF(\bar{a})$$

para todos los vectores de E_1 y todos los escalares k (esto es $F: E_1 \to E_2$ es un homonorfismo)



$F: E_1 \to E_2$

Sustituyendo $k = 0$ obtenemos $A(0\overline{a}) = A(\overline{0}) = \overline{0}$

Esto es, cualquier transformación lineal siempre transforma el vector cero de E_1 en el vector cero de E_2.

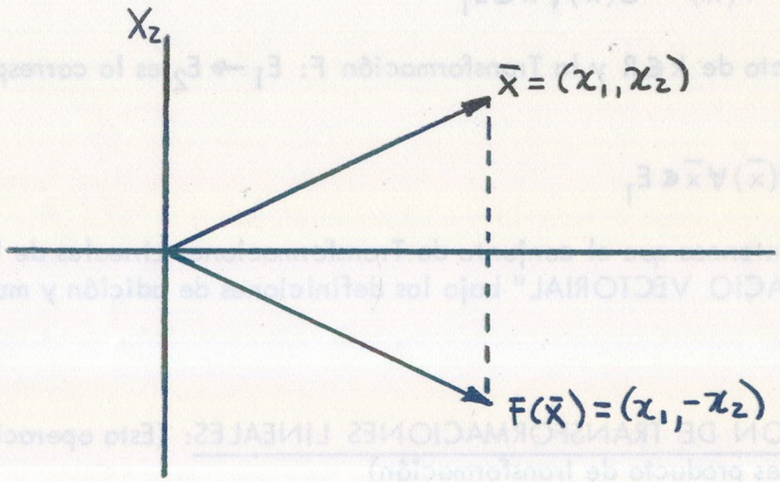
Resumiendo podemos definir una transformación lineal por la siguiente ecuación que la caracteriza,

$$F(k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \dots + k_n\overline{a}_n) = k_1F(\overline{a}_1) + k_2F(\overline{a}_2) + \dots + k_nF(\overline{a}_n)$$

Nótese que puede suceder que $E_1 = E_2$ es decir que la transformación sea un Endomorfismo.

$F: E_2 \rightarrow E_2$ definido como $F(\overline{x}) = (x_1, -x_2)$

Geométricamente F puede ser descrita como una transformación Lineal de $E_2 \rightarrow E_2$ como reflexión sobre el X_1X_1



III.3. TRANSFORMACION CERO

Definición: la transformación que envía a cada vector en E_1 a vector cero en E_2 para cualquier E_1 & E_2 se llama transformación cero y se denota por el símbolo 0 (i.e $0: E_1 \rightarrow E_2 \ni 0(\overline{x}) = \overline{0} \in E_2 \forall \overline{x} \in E_1$)

III.4. TRANSFORMACION IDENTIDAD

Definición: se llama Transformación Identidad y se denota por I a aquella que transforma un Espacio Vectorial en sí mismo. Esto es $I: E_1 \rightarrow E_1 \ni$

$I(\overline{x}) = \overline{x} \; \forall \overline{x} \in E$ es la Transformación Identidad

III.5. ADICION Y MULTIPLICACION POR ESCALAR DE UNA TRANSFORMACION

Sean F & G transformaciones lineales de $E_1 \rightarrow E_2$ & $k \in R$ un escalar.

Definición: la suma F + G es la transformación $E_1 \rightarrow E_2$ definida por

$(F + G)(\overline{x}) = F(\overline{x}) + G(\overline{x}) \; \forall \overline{x} \in E_1$

Definición: el producto de $k \in R$ y la Transformación $F: E_1 \rightarrow E_2$ es la correspondiente kF de E_1 a E_2 dada por,

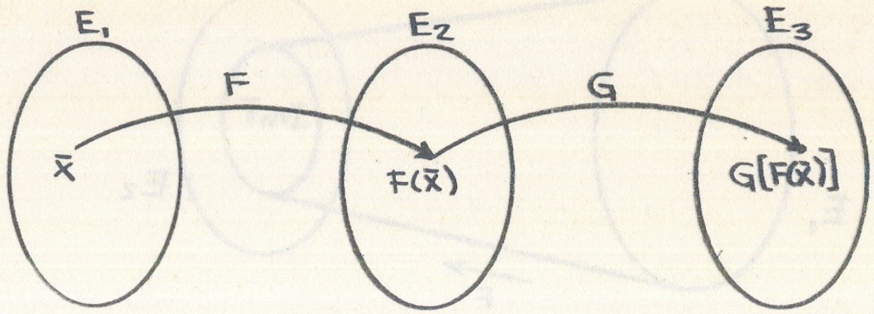
$(kF)(\overline{x}) = kF(\overline{x}) \; \forall \overline{x} \in E_1$

Concluimos entonces que el conjunto de Transformaciones Lineales de $E_1 \rightarrow E_2$ con el campo de los reales es un "ESPACIO VECTORIAL" bajo las definiciones de adición y multiplicación por un escalar dadas arriba.

III.6. COMPOSICION DE TRANSFORMACIONES LINEALES: (Esta operación es también llamada por algunos autores producto de transformación)

Sean E_1, E_2 & E_3 Espacios Vectoriales. Consideremos las siguientes transformaciones lineales:

$F: E_1 \rightarrow E_2$ $\qquad\qquad$ $G: E_2 \rightarrow E_3$



Para cada $\bar{x} \in E_1 \exists$ $F(\bar{x}) \in E_2$ y aplicando $G: E_2 \rightarrow E_3$ tendremos

$$G(\,F(\bar{x})\,) \in E_3$$

Asi F & G pueden ser compuesta o "multiplicadas" para dar una transformación de E_1 a E_3 que denotaremos G.F o simplemente GF llamándolo composición o producto de F & G (primero F, luego G)- porque la composición de funciones no es conmutativa.

III.7. NUCLEO O KERNEL DE UNA TRANSFORMACION

Sea F una Transformación Lineal de E_1 en E_2. Se llama Núcleo de F o Kernel al conjunto de Vectores de E_1 que el homonorfismo F les hace corresponder el vector cero de E_2

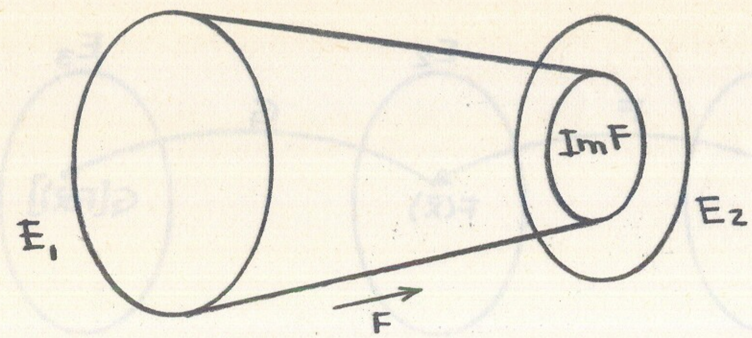
$\text{Ker } F = \left\{ \bar{x} \in E_1 \,\middle|\, F(\bar{x}) = o \in E_2 \right\}$ se puede probar fácilmente que,

Teorema: el Núcleo de F siendo $F: E_1 \rightarrow E_2$; es un Sub-espacio de E_1.

III.8. IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION

Llamamos Imagen de una Transformación Lineal $F: E_1 \rightarrow E_2$ al conjunto de vectores $\bar{y} \in E_2$ tal que $\bar{y} = F(\bar{x})$ para algún $\bar{x} \in E_1$

$$\text{Im } F = \left\{ \bar{y} \in E_2 \,\middle|\, \bar{y} = F(\bar{x}) \text{ para alguna } \bar{x} \in E_1 \right\}$$



Teorema. La Imagen de F es un Sub-espacio Vectorial de E_2

III.9. TEOREMA

Sean E_1 & E_2 Espacios Vectoriales de dimensión finita y F una transformación $F: E_1 \rightarrow E_2$. Entonces,

$$\dim E_1 = \dim (\text{Ker } F) + \dim (\text{Im } F)$$

Esto es la suma de las dimensiones de la imagen y del núcleo de una Transformación Lineal es igual a la dimensión de su dominio.

III.10. DEFINICION

Llamaremos Rango de una Transformación Lineal a la Dimensión de su Imagen:

Rango F = dim (Im F) y por el teorema anterior se tiene
Rango F = dim (E_1) - dim (Ker F)

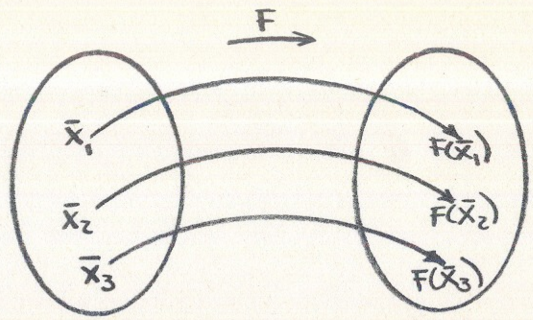
III.11. TRANSFORMACIONES BIYECTIVAS

Antes de definir una Transformación Biyectiva necesitamos definir lo que son Transformaciones Inyectivas y Transformaciones Sobreyectivas.

Una Transformación Lineal $F: E_1 \rightarrow E_2$ se dice que es Inyectiva cuando a diferentes vectores de E_1 corresponden diferentes vectores de E_2 es decir

$\overline{x}, \overline{y} \in E_1 \ni \overline{x} \neq \overline{y} \Rightarrow F(\overline{x}) \neq F(\overline{y})$, lo cual es equivalente a escribir:

$$F(\overline{x}) = F(\overline{y}) \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$$



Se llama Transformación Sobreyectiva a aquella $F: E_1 \rightarrow E_2$ en la cual la Imagen de F es todo E_2. Esto es $\text{Im } F = E_2$

Es decir que cada vector de E_2 es la Imagen de al menos un vector de E_1

III.12. TRANSFORMACIONES BIYECTIVAS

$F: E_1 \rightarrow E_2$ son aquellas que a la vez son Transformaciones Inyectivas y Transformaciones Sobreyectivas.

Es decir:

Definición: $F: E_1 \rightarrow E_2$ es Biyectiva si y solo si

i) $F(\overline{a}) = F(\overline{b}) \Rightarrow \overline{a} = \overline{b} \qquad \overline{a}, \overline{b} \in E_1$
ii) $\forall \, \overline{y} \in E_2 \, \exists \, \overline{x} \in E_1 \ni F(\overline{x}) = \overline{y}$

III.13. FUNCIONAL LINEAL

Definición. Si E es un ESPACIO VECTORIAL sobre un Campo Δ , un Funcional Lineal sobre E es una Transformación Lineal de E en Δ .

CAPITULO IV

IV.1. CALCULO MATRICIAL

En nuestro estudio de Transformaciones Lineales, evitamos usar Bases y Coordenadas para no sujetar nuestros resultados a la elección de un Sistema Coordenado particular o que pudiera sugerir que son válidas únicamente para espacios de dimensión finita. Pero como es bien sabido los sistemas coordenados son invaluables para los cómputos, así que exploraremos algunas de las conexiones entre las Transformaciones Lineales y las Bases que nos llevaran a la noción de Matriz y al Cálculo Matricial que a su vez nos conducirá en los siguientes capítulos a la resolución de Programas Lineales. Para introducir las Bases vamos a restringir las Transformaciones Lineales a aquellas que corresponden a Espacios Vectoriales de dimensión finita.

Sea E_1 un Espacio Vectorial de dimensión finita y sea $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, una Base de E_1.

$\bar{x} \in E_1$ podemos escribirlo como una combinación lineal de la base $\{\bar{e}_i\}$ $i \in I$

$$\bar{x} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \ldots + a_n\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i$$

Las coordenadas de $\bar{x} \in E_1$ con respecto a la Base $\{\bar{e}_i\}$ las podemos escribir como un vector columna

$$\bar{x}\ , = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ya que } \bar{x} = [\bar{x}] \cdot [\bar{e}_i]$$

Sea $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_n$ una Base del Espacio Vectorial E_2 y que esté dada una transformación

$F: E_1 \rightarrow E_2$. Entonces,

$$F(\bar{x}) = F(\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(\bar{e}_i)$$

Los vectores $F(\bar{e}_i) \in E_2$ pueden expresarse como Combinación Lineal de los vectores de la Base $\{\bar{f}_i\}$ así,

$$F(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{f}_i \qquad a_{ij} \in R$$

o sea:

$$F(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \dots a_{m1}\bar{f}_m$$

$$F(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \dots a_{m2}\bar{f}_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$F(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{f}_1 + a_{2n}\bar{f}_2 + \dots a_{mn}\bar{f}_n$$

Para propósitos de cálculo es conveniente arreglar los escalares en forma rectangular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

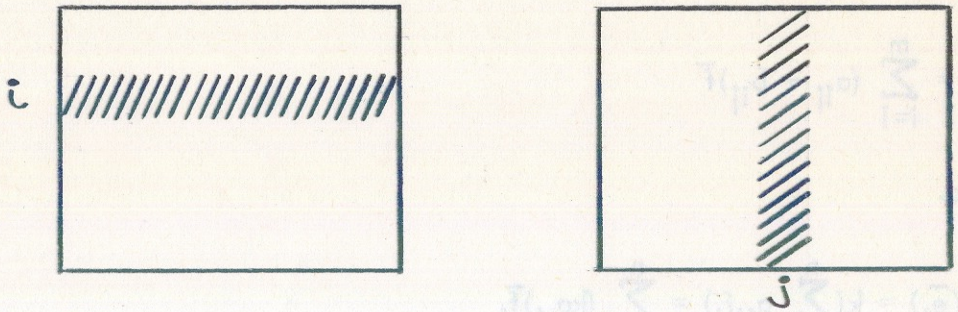
Este conjunto ordenado de escalares recibe el nombre de <u>MATRIZ</u>. Cada columna de esta tabla es tá constituida por las componentes de las transformadas de los vectores de base de $E_1 \left\{\bar{e}_1, \ldots \bar{e}_n\right\}$ sobre una base de $E_2 \left\{\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m\right\}$

La Matriz tiene un número de filas igual a la dimensión de E_2 y un número de columnas igual a la dimensión de E_1.

Una Transformación Lineal está representada por una Matriz una vez fijadas las bases elegidas en los Espacios Vectoriales E_1 & E_2. Se dice entonces que el conjunto de escalares es la Matriz de F con respecto a las bases, $\left\{\bar{e}_i\right\}$ & $\left\{\bar{f}_j\right\}$ y se denota por A_F.

La Matriz puede ser abreviada (a_{ij}) variando i & j independientemente $i \in \left\{1, \ldots m\right\}$ & $j \in \left\{1, \ldots n\right\}$

El primer sub-índice es constante en cada fila de la Matriz, es el índice de la columna j.



Si dim E_1 = dim E_2 es decir si $m = n$ la Matriz es, entonces una Matriz cuadrada; de otra manera se dice Matriz rectangular de orden $m \times n$.

Los elementos de una Matriz cuadrada para los cuales el sub-índice de fila es igual al sub-índice de la columna reciben el nombre de elementos de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{44} \end{bmatrix}$$

si $i = j$ en $a_{ij} \Rightarrow$

$a_{ij} \in$ Diagonal principal

IV.2. ADICION DE MATRICES Y MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sean (a_{ij}) & (b_{ij}) matrices m x n & $k \in R$ un escalar

Sean $F, G: E_1 \rightarrow E_2 \ni [F] = A = (a_{ij})$ & $[G] = B = (b_{ij})$; si escogemos $\{\bar{e}_j\} \in E_1$ & $\{\bar{f}_i\} \in E_2$ como bases, entonces

$$F(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{f}_i \qquad\qquad G(\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\bar{f}_i$$

Definimos $(F + G) = F(\bar{e}_j) + G(\bar{e}_j)$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{f}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\bar{f}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\bar{f}$$

Por otro lado,

$$(kF)(\bar{e}_j) = k\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ka_{ij})\bar{f}_i$$

Decimos entonces que la adición $(a_{ij}) + (b_{ij})$ de dos matrices mxn es por definición la Matriz mxn $(a_{ij} + b_{ij})$.

El producto $k(a_{ij})$ de un número real por una Matriz mxn es por definición la Matriz mxn (ka_{ij})

Expresando ésto en forma de arreglo ordenado:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12}, & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1}, & a_{m2} + b_{m2}, & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$k(a_{ij}) = k \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ a_{m1} a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & & \cdot \\ ka_{m1} ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

IV.2.1. Propiedades

La adición de matrices y la multiplicación por un escalar tienen las siguientes propiedades. Si V es el conjunto de las matrices mxn sobre el campo escalar, $A, B, C \in V$ & k_1, $k_2 \in R$,

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Asociatividad)

ii) $A + 0 = A$ (Existencia de neutro aditivo)

iii) $A + (-A) = 0$ (Existencia de simétricos aditivos)

iv) $A + B = B + A$ (Conmutatividad)

v) $k(A + B) = kA + kB$ Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a adición de matrices

vi) $(k_1 + k_2) A = k_1A + k_2A$ Distributividad de la multiplicación por un escalar respecto a la adición de escalares

vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$ (Asociatividad)

Como cumple con las propiedades de los espacios vectoriales, el Conjunto de todas las Matrices mxn con R es un <u>ESPACIO VECTORIAL</u>, bajo la anterior definición de adición y multiplicación por escalar.

Ejemplo.

Sea $k = 2$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Encontrar $kA + B$.

$$kA + B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 2 & -10 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 9 & -3 & -9 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

IV.3. <u>MULTIPLICACION DE MATRICES</u>

Sean $G: E_1 \rightarrow E_2$ & $F: E_2 \rightarrow E_3$ Transformaciones Lineales & $\{\bar{e}_j\} \in E_1$; $\{\bar{f}_k\} \in E_2$; $\{\bar{g}_i\} \in E_3$ bases de E_1, E_2 & E_3 respectivamental tal que

$j \in \{1, \ldots r\}$
$k \in \{1, \ldots n\}$
$i \in \{1, \ldots m\}$

$$G(\bar{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\bar{f}_k \qquad\qquad F(\bar{f}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\bar{g}_i$$

Entonces tenemos:

$$FG(\bar{e}_j) = F(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}F_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}F(F_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})\bar{g}_i$$

y la Matriz de la transformación FG con respecto a $\{\bar{e}_j\}$ & $\{\bar{g}_i\}$ es la matriz mxr cuyo elemento ij es $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Ejemplo.

$$(a_{ik})(b_{kj}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Diremos entonces que la multiplicación $(a_{ik})(b_{kj})$ de una Matriz (a_{ik}), mxn por una Matriz (b_{kj}), nxr es por definición una Matriz mxr

$$(a_{ik})(b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Es importante notar que el producto de dos matrices está definido únicamente cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda. Cuando esto ocurre se dice que las matrices son conformables para la multiplicación.

Ejemplo. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3(-1) + 1 \times 1 & 3 \times 2 + 1 \times 0 \\ (-1)(-1) + 2 \times 1 & (-1)2 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} (-1) \times 3 + 2(-1) & (-1) \times 1 + 2 \times 2 \\ 1 \times 3 + 0(-1) & 1 \times 1 + 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que: $AB \neq BA$

La multiplicación de Matrices tiene las siguientes propiedades (asumiendo que las matrices son conformables para las operaciones indicadas):

i) $A(B + C) = AB + AC$ (Distributividad de suma con respecto a producto)
ii) $(A + B)C = AC + BC$
iii) $A(BC) = (AB)C$ (Asociatividad)
iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Sin embargo hay que tener en cuenta que,

v) $AB = BA$ (generalmente el producto no es conmutativo)
vi) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
vii) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

IV.4. MATRICES CUADRADAS

Si los espacios E_1 & E_2 son ambos de dimensión n (es decir de la misma dimensión) la Matriz que representa la aplicación lineal $F: E_1 \to E_2$ es una Matriz Cuadrada (número de filas igual al número de columnas) referida a las bases $\{\bar{e}_i\} \in E_1$ & $\{\bar{f}_i\} \in E_2$.

Con frecuencia E_2 es el mismo E_1. La Matriz Cuadrada representa una aplicación de E_1 en sí mismo estando referido a una sola base $\{\bar{e}_i\}$.

Algunas de estas matrices cuadradas son:

i) La Matriz Cero (elemento neutro para la adición):

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} nxn$$

ii) La Matriz Identidad (neutro multiplicativo):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

iii) Matrices divisores de cero: Matrices no nulas cuyo producto es cero,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) Matrices diagonales. Si todos sus elementos no situados en la diagonal principal son nulos:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.5. OPERACIONES ELEMENTALES CON MATRICES

Por operaciones elementales sobre las filas (o columnas) de una Matriz se entiendo lo siguiente:

i) El intercambio de dos filas cualesquiera en la matriz (o columnas).
ii) La multiplicación de cualquier fila (columna) por un escalar k.
iii) La adición de cualquier fila (o columna) con multiplicación de k R por cualquier otra fila de la matriz.

IV.6. FORMA CANONICA

Llamamos forma Canónica de una Matriz A a la matriz obtenida al reducir A por medio de las operaciones elementales a la siguiente forma:

i) Todo elemento arriba de la diagonal principal es cero.
ii) Todo elemento en la diagonal principal es cero ó 1.
iii) Si el elemento diagonal es cero, el vector fila es nulo.
iv) Si el elemento diagonal es 1, todo elemento situado debajo de él es cero.

Ejemplo. 1) Reducir por medio de operaciones elementales la siguiente matriz a su forma canónica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -8 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \ldots A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior lo efectuamos de la siguiente manera: primero cambiamos la fila 2 con la fila 3 (A_1); luego multiplicamos la 3a. fila por 3 y la restamos de la 2a. fila (A_2). Dividimos la 2a. fila entre 7 y luego operamos de manera que todos los elementos de la 2a. columna se transformaran en cero menos el elemento diagonal que quedó 1. Con operaciones similares para la 1a. fila llegamos al resultado (A_n).

Ejemplo. 2) Reducir a su forma canónica a la siguiente Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ldots A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las operaciones fueron similares a las empleadas en el Ej. 1.

De la primera matriz reducida a su forma canónica (Ej. 1) vemos que tenemos un sistema coordenado tridimensional, o tres vectores linealmente independientes, o una base de orden 3.

IV.7. RANGO DE UNA MATRIZ

El Rango de una Matriz se define como el número de vectores no nulos en su forma canónica, es decir el número de filas de vectores linealmente independientes en la Matriz.

El Rango de una Matriz muestra la dimensión del sistema coordenado o el orden de la base del Espacio Vectorial.

Notación. Si A es una matriz de rango n, la denotamos por $r(A) = n$.

IV.7.1 Matriz Singular y Matriz No-Singular

Una Matriz cuadrada de orden "n" se dice que es Singular si y solo si su rango es menor que "n". La llamamos No-Singular si y solo si su Rango es igual a "n".

Una Matriz cuadrada es Singular si una o más filas de vectores en la misma son linealmente dependientes de las demás filas de vectores.

IV.8. MATRIZ AUMENTADA

Una Matriz Aumentada es aquella formada de agregar a una Matriz las filas o columnas de otra de tamaño apropiado.

Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ & $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces la Matriz aumentada (A,C) será

$$(A,C) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se usa la coma entre A & B para evitar confusión con la multiplicación (AC). De igual manera se aumenta la matriz con un vector fila o vector columna (en realidad un vector fila o columna es una matriz de una sola fila o columna respectivamente).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (A,B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Una Matriz Aumentada se manipula por cualquiera de las operaciones descritas anteriormente como cualquier otra Matriz.

IV.9. MATRIZ INVERSA

Sea A una Matriz cuadrada de orden n No-singular. Deseamos encontrar una Matriz B tal que

$$AB = 1$$

A la Matriz B la llamamos la inversa de A denotándolo A^{-1}. Tenemos entonces:

$$AA^{-1} = 1$$

Debemos tener en cuenta que para que una matriz tenga inversa, ésta debe ser cuadrada y No-Singular.

La Matriz Inversa tiene las siguientes propiedades:

i) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

Hay varios procedimientos para encontrar la inversa de una matriz. Aquí veremos únicamente el método de Eliminación de Gauss o Método de Pivotes que usaremos en el Simplex para la resolución de Programas Lineales. El Método es como sigue:

i) Aumentamos la Matriz A, cuya inversa queremos encontrar, con una Matriz Identidad del mismo orden.
ii) Se ejecutan en la Matriz Aumentada (A,I) las operaciones elementales necesarias para transformar A en una Matriz Identidad.
iii) La Matriz Identidad sobre la cual se han ejecutado las mismas operaciones que transformaron A en I es la inversa de la Matriz buscada.

Así:

(A,I) lo convertimos en $(A^{-1}A, \ A^{-1} I) = (I, A^{-1})$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ encontrar } A^{-1}$$

$$(a,I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(a,I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (I,A^{-1})$$

Tenemos entonces la Matriz Inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.10. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Vamos ahora a aplicar la teoría de Matrices para la resolución de un sistema de Ecuaciones Lineales.

Sea
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

En forma matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Esto es, si multiplicamos la Matriz nxn de coeficientes (que llamaremos A) por el vector columna de variables (x), obtenemos el vector columna de constantes (b).

Entonces $AX = b$

Si multiplicamos cada lado de la igualdad por la izquierda por A^{-1}, obtenemos

$$A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}b$$

Vemos entonces, que para resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, solo tenemos que encontrar la inversa de la Matriz de Coeficientes y multiplicarla por la izquierda por el vector constante, obtenemos el vector solución $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ que es la solución del sistema.

Vamos a proceder de la misma manera como encontramos la inversa de una Matriz. La Matriz aumentada (A,b) la podemos escribir:

A	b

Como necesitamos la inversa de A, la encontramos a partir de la matriz:

A	I	b

Después de ejecutar las operaciones elementales tendremos

I	A^{-1}	$A^{-1}b$

pero, como sabemos,

$$X = A^{-1}b.$$

Ejemplo. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + -2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

La Matriz aumentada y las operaciones son,

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (I,X)$$

Luego, $X = (1, 0, 1, 0)$, de donde $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, que satisfacen las ecuaciones originales.

En Programación Lineal tratamos con Sistemas de Ecuaciones con "n" incógnitas (variables) y "m" ecuaciones en donde $m < n$.

Una SOLUCION a tal Sistema es el vector n-dimensional X que satisface la relación $ax = b$.

CAPITULO V

V.1. CONJUNTOS CONVEXOS

Combinación convexa

Definición. Sean $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3 \ldots \overline{v}_n$, vectores en E^n. Se llama combinación convexa de estos vectores, al vector $\overline{v}$ tal que

$$\overline{v} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \ldots + a_n\overline{v}_n$$

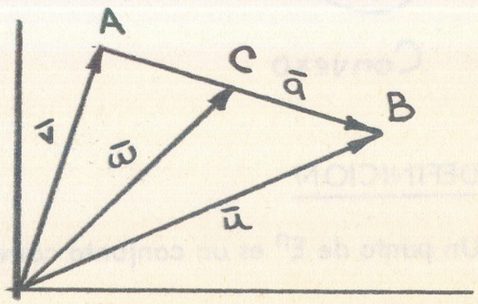
donde las a_i son escalares tales que

$$a_i \geq 0 \quad \& \quad \sum_{1}^{n} a_i = 1$$

V.2. TEOREMA

Cualquier punto perteneciente a un segmento de recta que una dos puntos de E^n puede ser expresado como una combinación convexa de sus vectores representativos (Ver II.2, identificación de puntos con vectores).

Demostración



Sean A, B, C, puntos de E^n representados por $\overline{v}$, $\overline{u}$ y $\overline{w}$ respectivamente, tal que $C \in \overline{AB}$.

Tenemos

$$\overline{v} + \overline{a} = \overline{u} \qquad \overline{a} = \overline{u} - \overline{v}$$

Ahora bien

$$\bar{w} = \bar{v} + \lambda(\bar{u} - \bar{v});\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$(1 - \lambda)\bar{v} + \lambda\bar{u} = \bar{w},$$

que es la expresión para un vector $\bar{w}$ como combinación convexa de $\bar{v}$ & $\bar{u}$.

V.3. CONJUNTO CONVEXO

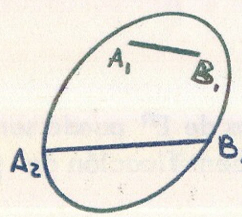
Definición. Un Conjunto C en E es convexo si para todo par de vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in C$ se tiene que

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 \in C$$

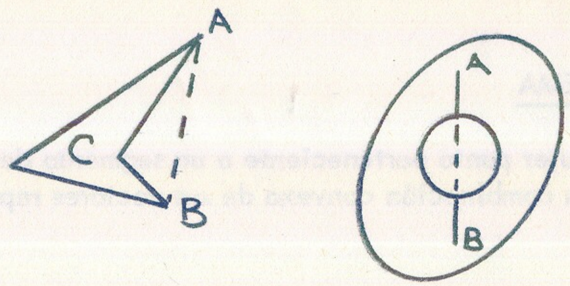
con $\quad a_1 + a_2 = 1 \ \ \& \ \ a_1, a_2 \geq 0$

Una definición equivalente es:

Un conjunto C en E^m es convexo si el segmento de recta que une dos de sus puntos A & B, está contenido en $C \ \forall A, B \in C$.



Convexo



$\bar{AB} \notin C \Rightarrow$ no Convexo

V.4. DEFINICION

Un punto de E^n es un conjunto convexo 0-dimensional.

La recta, la semirecta y un segmento de recta $\in E^n$ son conjuntos convexos 1-dimensionales. Un conjunto convexo C es 2-dimensional, si todos sus puntos pertenecen a un plano $\pi \subset E^n$.

V.5. DEFINICION

Si C es un Conjunto Convexo 2-dimensional, entonces con respecto a C todos los puntos de π están divididos como sigue:

i) Puntos exteriores de C, si alrededor de éstos se puede trazar un círculo que quede completamente fuera de C (Vecindad $\mathcal{E}$).

ii) Puntos pertenecientes a C. Estos están divididos de la manera siguiente:

a) Puntos interiores de C, si alrededor de éstos se puede trazar un círculo totalmente contenido en C.

b) Puntos frontera de C, si todo círculo trazado alrededor de uno de ellos contiene a la vez puntos interiores y exteriores de C.

V.6. DEFINICION

La intersección de dos conjuntos convexos C, Q, es el conjunto de todos los puntos que pertenecen simultáneamente a ambos. Es decir,

$$C \cap Q = A \Leftrightarrow A \subset C \quad \& \quad A \subset Q$$

Si los conjuntos convexos no tienen ningún punto en común, se dice que su intersección es vacía.

Por ejemplo: i) la intersección de dos rectas diferentes es el conjunto formado por un solo punto o el Conjunto vacío. ii) La intersección de un medio plano y un círculo en el plano, es el círculo completo, un segmento de él, un punto o el conjunto vacío.

4.7. TEOREMA

La intersección de dos cunjuntos convexos es el vacío o un conjunto convexo.

Demostración

Si la intersección de dos conjuntos convexos Q y Q_1 no es vacía, es posible cualquiera de los casos siguientes:

Caso 1. Q y Q_1 tienen solamente un punto en común; en este caso su intersección es un conjunto convexo 0-dimensional.

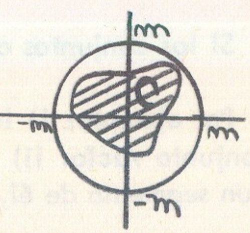
Caso 2. La intersección de Q y Q_1 contiene más de un punto. Sea Q_2 la intersección y sean A & B dos puntos arbitrarios de Q_2. Por hipótesis, Q & Q_1 son convexos, lo cual implica que junto con A & B cada uno de los conjuntos convexos Q y Q_1 contienen completamente el segmento de recta $\overline{AB}$. Entonces el segmento $\overline{AB}$ estará contenido simultáneamente a Q y a Q_1, y consecuentemente, a su intersección Q_2; de donde concluimos que Q_2 es un conjunto convexo.

V.8. CONJUNTOS ACOTADOS

Definición. Un Conjunto $C \subset E^n$ es acotado si y solo si existe un número real m tal que $\|\bar{u}\| < m \; \forall \, \bar{u} \in C$.

En el caso de E^2 se dice que los puntos de C, si es acotado, quedan dentro de un círculo de radio m, con centro en el origen.

En el caso de E^3, los puntos de C, si es acotado, quedan dentro de una esfera de radio m.



V.9. HIPERPLANOS

Definición. Sea $\overline{C}.\overline{x} = b$, una ecuación lineal

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \dots c_n) \quad \& \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto de todos los puntos en E^n que satisfacen la ecuación $\bar{c}.\bar{x} = b$, es decir el conjunto solución de la ecuación lineal, se llama hiperplano.

Una forma equivalente de definir un hiperplano es:

Sea E un espacio vectorial & W un subespacio del mismo; $W \subset E$. Llamamos hiperplano asociado a W al conjunto,

$$H_w = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = \bar{x}_o + \bar{y};\ \bar{x}_o \quad E \text{ (fijo) } \& \ \bar{y} \in W \right\}$$

Este conjunto satisface la ecuación $\bar{c}.\bar{x} = b$.

V.10. EJEMPLO 1

Sea W un subespacio en E^2 tal que

$$W = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = (2\lambda, 3\lambda) \right\}; \quad x_o = (1,1)$$

El hiperplano es

$$H_w = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = (2\lambda + 1, 3\lambda + 1) \right\}$$

Los hiperplanos en E^2 son líneas rectas.

V.11. EJEMPLO 2

Sea W un subespacio en E^2 tal que

$$W = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = (\lambda, \mu, 0) \right\}; \quad x_o = (a, b, c)$$

$$H_w = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = (\lambda + a, \mu + b, c) \right\}$$

Este conjunto forma un plano en E^3.

Vemos que la dimensión de un hiperplano en E^2 es 1, en E^3 es 2. Así, podemos identificar los puntos de un hiperplano en E^2 con los puntos en E' los puntos de un hiperplano en E^3 con los puntos en E^2, con la propiedad de que las distancias entre los correspondientes puntos son iguales. En cada caso, la dimensión del hiperplano es menor en una unidad que la dimensión del espacio E^n a que pertenece.

V.12. DESIGUALDADES LINEALES

La condición lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

divide el espacio E^n en tres conjuntos formados respectivamente por:

i) Aquellos puntos que satisfacen la condición dada;
ii) Aquellos puntos que satisfacen la condición

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n < b$$

iii) Aquellos puntos que satisfacen la condición

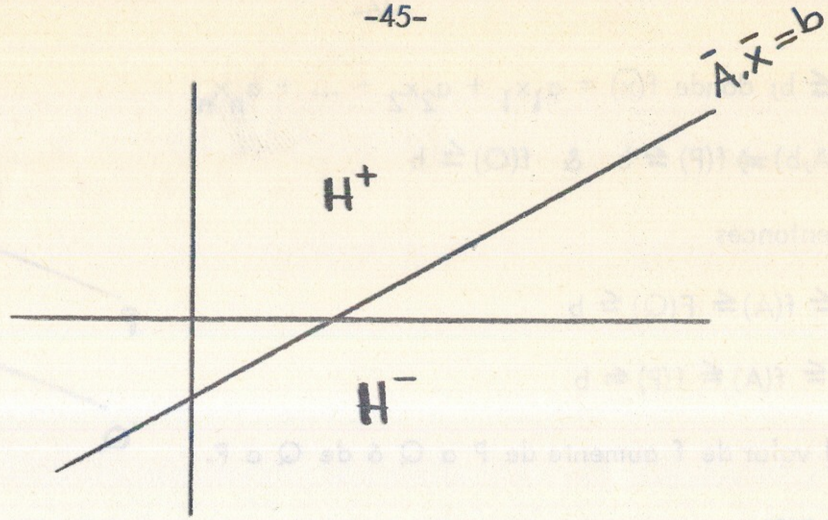
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > b$$

El primer conjunto definido es un hiperplano.

V.13. MEDIO ESPACIO ABIERTO

Definición. Llamamos medio espacio abierto, a cada una de las dos mitades del espacio E^n dividido por un hiperplano.

$$H^+ (A,b) = \{\bar{x} \mid \bar{A} \cdot \bar{x} \geq b\}$$
$$H^- (A,b) = \{\bar{x} \mid \bar{A} \cdot \bar{x} \leq b\}$$



H^+ (A,b) es el medio espacio abierto, la parte de E^n que contiene los vectores $\bar{x}$ para los cuales

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \geqslant b$$

H^- (A,b) es el medio espacio abierto, la parte de E^n que contiene a los vectores $\bar{x}$ para los cuales

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \leqq b$$

V.14. TEOREMA

Un medio espacio es un conjunto convexo.

Demostración. Sea H^- (A,b) el medio espacio

$$a_1 x_1 + \dots + a_2 x_2 \leqq b$$

Supongamos H^- (A,b) es convexo. Entonces,

$$\forall\, P,\ Q \in H^- \ (A,b) \Rightarrow \overline{PQ} \subset H^- \ (A,b)$$

H^- (A,b) consiste de todos los puntos $A \in E^n \ni$

$f(a) \leq b$; donde $f(\overline{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

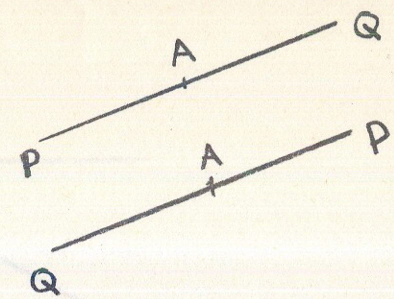
$P, Q \in H^- (A,b) \Rightarrow f(P) \leq b \quad \& \quad f(Q) \leq b$

Si $A \in \overline{PQ}$, entonces

$$f(P) \leq f(A) \leq F(Q) \leq b$$

ó

$$f(Q) \leq f(A) \leq f(P) \leq b$$



Según que el valor de f aumente de P a Q ó de Q a P.

En cualquier caso,

$$f(A) \leq b \Rightarrow \overline{PQ} \subset H^- (A,b).$$

V.15. POLIHEDRO CONVEXO

Definición. La intersección S de un número finito de medio-espacios en E^n se llama polihedro convexo.

V.16. PUNTO EXTREMO

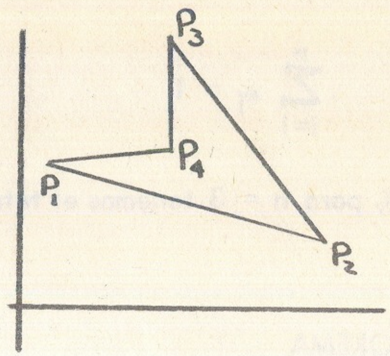
Definición. Un punto $P \in S \subset E^n$ es un punto extremo de S si P es la intersección de m de los hiperplanos que determinan S.

V.17. CUBIERTA CONVEXA

Definición. La cubierta convexa $\mathcal{C}(S)$ de cualquier conjunto dado de puntos $S \subset E^n$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de S.

Tal como en la figura, consideremos

$$S = \{p_1, p_2, \dots\}$$



p_1, p_2, p_3 & p_4 son los puntos extremos de S.

Como podemos ver, S no es un Conjunto convexo. Si construimos su cubierta convexa $\mathscr{C}$ (S) ésta será el triángulo $p_1p_2p_3$ que es convexo.

V.18. DEFINICION

$\mathscr{C}$ (S) es el menor conjunto convexo que contiene a S.

Definición.

Llamamos Polihedro convexo a la cubierta convexa de $S \subset E^n$, cuando el conjunto S consiste de un número finito de puntos extremos, además de sus puntos interiores.

V.19. SIMPLEX

Definición. En un espacio vectorial n-dimensional E^n, un n-simplex es un poliedro convexo acotado $S \subset E^n$ que tiene exactamente n+1 puntos extremos y que no está contenido en ningún hiperplano.

V.20. EJEMPLO

La ecuación de un simplex formado por vectores unitarios es

$$x_i \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Así, para $n = 3$ tenemos el tetraedro con vértices $P_1 = (o, o, o)$, $P_2 = (1, o, o)$ & $P_3 = (o, o, 1)$.

V.21. TEOREMA

Un polihedro convexo acotado S con $n+1$ puntos extremos $\overline{T}_o, \overline{T}_1, \overline{T}_2, \dots \overline{T}_n$ es un n-simplexsi y solo si $\overline{T}_1 - \overline{T}_o, \overline{T}_2 - \overline{T}_1, \dots, \overline{T}_n - \overline{T}_o$ son vectores linealmente independientes.

Demostración

Debemos mostrar que S no está contenido en ningún hiperplano de E^n si y solo si $\overline{T}_1 - \overline{T}_o$, $\overline{T}_2 - \overline{T}_o, \dots, \overline{T}_n - \overline{T}_o$ son l. i. Probaremos una proposición equivalente: que $\overline{T}_1 - \overline{T}_o, \dots, \overline{T}_p - \overline{T}_o$ son l.d. ssi $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \dots \overline{T}_n$ están en un hiperplano $H(A, b)$. Están en tal hiperplano si existe un funcional $F \neq 0$ & una constante $C \ni F(t_i) = c \,\forall\, i$; $i \in \{0, 1, \dots n\}$

Haciendo $c = F(T_o)$ tenemos $F(t_i) = Ft_i$ ó

$$F(t_i - t_o) = 0 \text{ para } i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \text{(Ver III.2)}$$

En otras palabras, los vectores $\overline{T}_i - \overline{T}_o$ deben estar en el kernel de F. Para que esto sea verdad, es necesario y suficiente que ellos generen un subespacio de a lo más $n-1$ dimensiones, esto es, que sean l.d.

Es claro que el enunciado y demostración de este teorema no depende de que punto llamemos T_o.

V.22. TEOREMA

Si $P_o, P_1, \dots P_n$ son los puntos extremos de un n-simplex, entonces cada punto $x \in S$ puede ser representado como una combinación convexa de los puntos extremos; y esta representación es única.

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i\bar{P}_i; \text{ donde } a_i \geqslant 0 \;\; \& \;\; \sum_{i=0}^{n} a_i = 1$$

Demostración

Vamos a probar primero el teorema para el caso especial donde $P_o = 0$. Por Teorema V.21 los vectores P_1, P_2, ... P_n son linealmente independientes en este caso, de donde, forman una base en E^n. Luego, cada vector $\bar{x}$ de todo el espacio puede ser expresado en forma única como una combinación lineal,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{P}_i$$

Aquellas combinaciones particulares que tienen todo $a_i \geqslant 0$ & $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, claramente pertenecen a vectores $\bar{x}$ en el simplex S. Lo que no parece muy obvio es el hecho que todo $\bar{x} \in S$ tiene todo $a_i \geqslant 0$ & $\sum_i a_i = 1$. Los coeficientes a_i dependen linealmente de x, y de hecho, són los valores de n funcionales linealmente independientes F_i (que constituyen la base E^{n*} dual de la base P_1, ... P_n para E^n). Esto es, $x = \sum_i a_iP_i = \sum_i (F_ix)P_i$. Cada F_i es 1, en un punto extremo; y 0 en los otros; y, como F_i es una función lineal, mapea el conjunto convexo S sobre un conjunto convexo. De donde la imagen de cada F_i es necesariamente el intervalo $[0; 1]$. Similarmente, el funcional $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ es 1 sobre P_1, P_2, ... P_n & 0 sobre P_o, luego, por las mismas razones, tiene la misma imagen.

Sea $a_i = F_ix$; $i \in \{1, 2, \dots n\}$; & sean

$$a_o = 1 - \sum_{i=1}^{n} F_ix; \text{ entonces,}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} a_iP$$

satisface $a_i \geqslant 0$ & $\sum_i a_i = 1$ y es la representación requerida de $\overline{x}$.

La unicidad de esta representación sigue del hecho que $P_1, \ldots P_n$ es una base para E^n.

Extendamos ahora el resultado para un simplex arbitrario S. Consideremos a S como obtenido de S_o por medio de una traslación por P_o, donde S_o tiene como puntos extremos los puntos $\overline{P}_i - \overline{P}_o$ (uno de los cuales es el origen). Cualquier punto $\overline{x} \in S$ corresponde a $(\overline{x} - \overline{P}_o) \in S_o$; de donde, aplicando el resultado anterior,

$$\overline{x} - \overline{P}_o = \sum_{i=0}^{n} a_i(P_i - P_o) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i - P_o; \text{ de modo que}$$

$$\overline{x} = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i \text{ , es la representación única de } \overline{x}.$$

V.23. DEFINICION

Las funcionales F_i son la base dual de la base de $P_i - P_o$. Haciendo $K_i = F_i P_o$; $i \in \{1, \ldots n\}$, encontramos que $a_i = F_i(\overline{x} - P_o) = F_i x - K_i$ & $a_o = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$. Estos números $a_o, a_1, \ldots a_n$, son llamados las coordenadas baricéntricas de x.

V.24. ARISTA EXTREMA

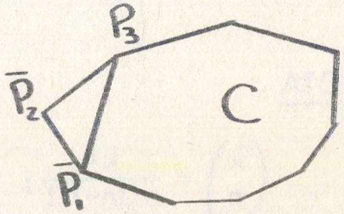
Definición. Sea C un Conjunto Convexo. Si P & P' son dos puntos extremos de C, entonces todo punto $x \in \overline{PP'}$ puede ser expresado como una combinación convexa de P & P'. Diremos que P & P' están unidos por una arista extrema de C, si todo $x \in \overline{PP'}$ puede ser representado como una combinación convexa de los puntos extremos de C solo de esta manera. (Por ejemplo, las aristas de un cubo son aristas extremos, mientras que las diagonales no).

V.25. TEOREMA

Sea C un Conjunto polihédrico convexo en E^n (no contenido en ningún hiperplano) con puntos extremos P_o, ... P_k; entonces C puede ser dividido en n diferentes simplex, tal que todo punto $\overline{x} \in C$ puede ser expresado como una combinación convexa de, a lo más, n+1 puntos extremos de uno de estos simplex.

Demostración

Primero vamos a hacer una prueba para un polígono en el plano tal como en la figura. Elijamos tres puntos extremos consecutivos, por ejemplo $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ y $\overline{P}_3$. Ahora dibujemos el segmento de recta $\overline{P_1P_3}$. Hemos dividido el polígono dado en dos partes, una un 2-simplex (triángulo), y la otra, un polígono C' con k-1 puntos extremos. Repetimos el procedimiento con C' hasta tener a C, dividido en triángulos. Cada punto de C, excepto los puntos que quedan en los segmentos de recta que unen dos puntos extremos no consecutivos, ahora quedan en exactamente un triángulo cuyos vértices son puntos extremos de C y puede ser expresado como combinación lineal de los tres puntos extremos que son los vértices del triángulo. Los puntos que quedan sobre segmentos de recta que unen dos puntos extremos pueden ser expresados como combinaciones lineales de a lo más dos puntos extremos. Esto completa la demostración en dos dimensiones.



La demostración del teorema para n-dimensiones se hace por inducción matemática.

Para un conjunto convexo con n+1 vértices, el teorema restablece el teorema V.22. Supongamos ahora que hemos probado el resultado para todos los conjuntos convexos con "k" o menos vértices en n-dimensiones, donde k n+1 y debemos demostrar que es verdadero para conjuntos convexos con k+1 vértices. Sea C tal conjunto convexo con puntos extremos P_1, P_2, ... P_n. Hay dos casos que debemos considerar:

Primer Caso: hay un punto extremo de C, digamos P_o que está conectado por una arista extrema de C con a lo más k-1 otros puntos extremos, digamos T_1, ... T_s; s k-1. Si consideramos ahora el conjunto convexo generado por T_o, T_1, ... T_s & T_1, T_2, ... T_k, cada uno de ellos tiene a lo más k puntos extremos, y, por lo que asumimos en la inducción puede ser subdividido como lo dice el teorema. Estas subdivisiones dan a su vez, la requerida subdivisión de C.

Segundo Caso: cada punto extremo está conectado por una arista extrema a todos los otros puntos extremos. En 2 & 3 dimensiones, esto puede suceder solamente si C es un triángulo y un tetraedro respectivamente; pero para dimensiones mayores o iguales que cuatro, es posible obtener conjuntos convexos con esta propiedad teniendo cualquier número de puntos extremos (se omiten los detalles de construcción). En este caso, fijamos un punto extremo T_0, y luego escogemos subconjuntos de n de los restantes k vértices de toda forma posible. Tomando T_0 junto a tal subconjunto de puntos tenemos los puntos extremos de un n-simplex y existen $\binom{k}{n}$ de ellos. Así que esto da una subdivisión de C en $\binom{k}{n}$ simplex que se traslapan en solo casos de dimensión inferior.

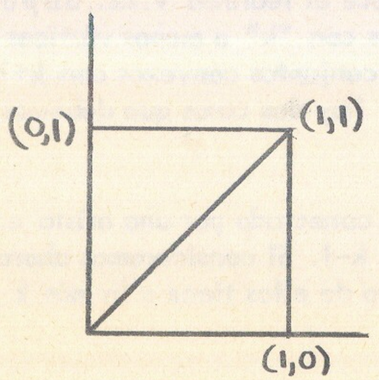
V.26. NOTA

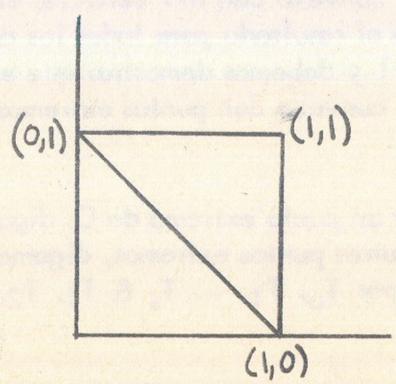
$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(n-1)!}\,; \quad n \leq k$$

V.27. EJEMPLO

Sea C el conjunto convexo

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$





Hay dos formas de dividir C en triángulos según se use una u otra de las diagonales del cuadrado.

Una forma de introducir una base para el cuadrado es usar dos conjuntos de tres funciones, un conjunto para cada triángulo. Obsérvese que existen esencialmente dos formas diferentes de introducir una base. Aquí se considera una subdivisión específica del conjunto convexo C en simplex.

Definición. Por una base canónica para C, entenderemos el conjunto de funcionales que dan las coordenadas baricétricas de los puntos en los varios simplex de la subdivisión.

Como solo existe un número finito de formas de subdividir a C en simplex, es obvio que solamente existe un número finito de bases canónicas para C. En el ejemplo V.27 hay dos diferentes bases canónicas, ya que en un simplex su base canónica es única.

V.28. VALORES EXTREMOS DE FUNCIONALES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS

Definición

Sea F un funcional sobre E^n & C un conjunto polihédrico convexo acotado en E^n. Llamamos valores extremos a los máximos y mínimos valores que F(x) toma en todo el recorrido de x sobre C. Llamaremos

$$M = \max F(x)$$
$$m = \min F(x) \qquad x \in C$$

V.29. TEOREMA

Si F es un funcional sobre E^n y C es un conjunto polihédrico convexo acotado $C \subset E^n$, entonces el valor máximo M de F(x) es tomado en uno o más puntos extremos de C. Similarmente, el valor mínimo m de F(x) es tomado en uno o más puntos extremos de C.

Demostración

Probaremos solo la parte del teorema relacionada con el valor máximo de F, ya que el mínimo se demuestra de igual manera.

Sabemos que $x \in C$ si y solamente si puede ser expresado como una combinación convexa, $x = a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots + a_k T_k$; donde T_i; $i \in \{1,\dots n\}$ son los puntos extremos de C, $a_i \geqslant 0$ & $\sum_{i=1}^{n} a = 1$.

Sea M el mayor posible de $F(T_i)$, entonces,

$$F(x) = F(a_1 T_1 + \dots a_k T_k) = a_1 F(T_1) + a_k F(T_k) \quad a_1 M + \dots + a_k M = M$$

M tiene la propiedad establecida en el teorema.

V.30. TEOREMA

Si F es un funcional sobre E^n & C es un conjunto polihédrico convexo acotado en E^n, entonces el conjunto de verdad (solución) de la proposición $F(\bar{x}) = M$ es un conjunto polihédrico convexo cuyos puntos extremos son también los puntos extremos de C.

Similarmente, el conjunto de todo $\bar{x} \in C$ tales que $F(\bar{x}) = m$, es un conjunto polihédrico convexo cuyos puntos extremos son los puntos extremos de C.

Demostración

Nombremos los puntos extremos de C de tal manera que el máximo valor de F sea tomado en los puntos extremos $T_1, \dots T_j$ donde $j \leq k$; entonces tenemos $F(T_1) = M, \dots F(T_j) = M$ & $F(T_{j+1}) < M, \dots F(T_k) < M$. Entonces, si $\bar{x}$ es un punto en C que sea una combinación convexa de los puntos extremos, $T_1, \dots T_j$ solamente, esto es

$$\bar{x} = a_1 T_1 + \dots a_j T_j, \text{ donde } a_1 + \dots a_j = 1$$

Tenemos

$$F(x) = F(a_1T_1 + \dots a_jT_j) = a_1M + \dots a_jM = M.$$

Por otra parte, si $x \in C$ no es de la forma anterior, entonces $j < k$ y $\bar{x}$ puede ser expresado

$$\bar{x} = a_1T_1 + \dots a_jT_j + a_{j+1}T_{j+1} + \dots a_kT_k$$

donde $a_i > 0$ para al menos una i entre $j+1$ & k; entonces,

$$F(x) = F(a_1T_1 + \dots + a_jT_j + \dots + a_kT_k) = a_1F(T_1) + \dots a_jF(T_j) + \dots$$

$$+ a_kF(T_k) < a_1M + \dots + a_jM + \dots a_kM = M$$

De donde $F(\bar{x}) = M$, si y solo si $\bar{x}$ es una combinación convexa de $T_1, \dots T_j$, completando así la demostración.

V.31. EJEMPLO

Encontrar los valores extremos del funcional F definido por

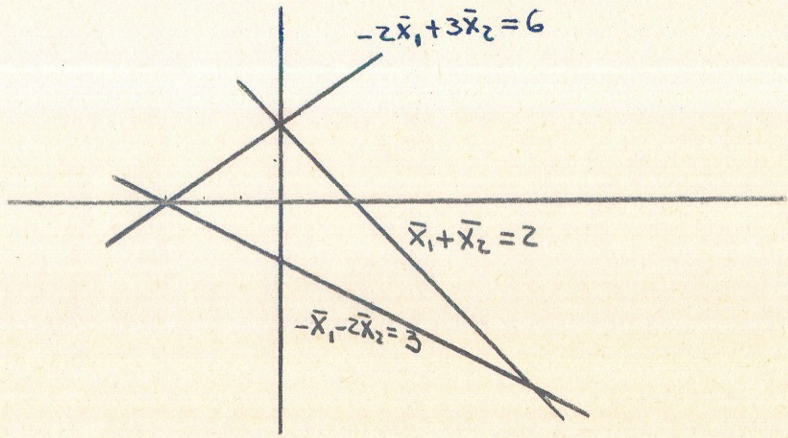
$$F(\bar{x}) = 4\bar{x}_1 + 8\bar{x}_2$$

sobre el conjunto convexo C que es el conjunto de verdad (solución) de las desigualdades

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$



Los puntos extremos de C son $(-3,0)$, $(0,2)$ & $(7, -5)$. Sustituyendo estos valores en el funcional F:

$$F(x) = 4(-3) + 8(0) = -12 \text{ para } (-3,0)$$
$$F(x) = 4(0) + 8(2) = 16 \text{ para } (0,2)$$
$$F(x) = 4(7) + 8(-5) = -12 \text{ para } (7,-5)$$

De donde el valor máximo de F sobre C es 16 y es tomado solamente en el segundo punto extremo. El valor mínimo de F sobre C es -12 y es tomado en el primer y tercer punto extremo y consecuentemente también sobre el segmento de recta que los une.

CAPITULO VI

VI.1. El objetivo del presente trabajo ha sido cumplido, he presentado los fundamentos matemáticos de la programación lineal. A pesar de ello, el trabajo no estará completo mientras no revisemos la programación lineal en sus conceptos básicos, para descubrir el puente que une la teoría con su aplicación. El problema se planteó desde el inicio y, a través de los anteriores capítulos hemos vislumbrado métodos para resolverlo, matriciales, vectoriales, gráficos. Sin embargo, vamos tras un algoritmo general para optimizar: "El Método Simplex" punto de partida de modernos métodos y técnicas que se aplican también a programación no-lineal, teoría de juegos y otros derivados del mismo.

VI.2. CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION LINEAL

En el capítulo I se planteó el problema de optimización. Es decir, maximizar o minimizar una función

$$f = \overline{C} \cdot \overline{x}, \tag{6.1}$$

sujeto a las restricciones lineales

$$\overline{x}_j \geq 0 \qquad j \in \{1, \ldots m\} \tag{6.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \overline{x}_i = b_i; \qquad i \in \{1, \ldots m\} \, . \, m < n \tag{6.3}$$

VI.3. SOLUCION FACTIBLE

Definición. Una solución factible a un problema de programación lineal es un vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface $\overline{x}_i \geq 0$ & $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

VI.4. SOLUCION BASICA

Definición. Una solución básica a $\sum_{1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = b_i$, es la obtenida haciendo n-m variables igual a cero y resolviendo para las restantes m-variables, considerando que el determinante de los coeficientes de éstas m-variables es distinto de cero. Las m-variables se llaman variables básicas.

VI.5. SOLUCION BASICA FACTIBLE

Definición. Una solución básica factible es una solución básica en la cual las variables básicas son no negativas, es decir,

$$\bar{x}_j \geq 0; \ j \in \{1,\dots,n\}$$

VI.6. SOLUCION BASICA FACTIBLE NO DEGENERADA

Definición. Una solución básica factible no degenerada es una solución básica factible con exactamente m, $\bar{x}_i > 0$. Es decir, todas las variables básicas son positivas.

VI.7. FUNCION OBJETIVO

Definición. Una función objetivo f es un funcional lineal definida en E^n tal que para cada vector

$$\bar{x} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n$$

$$f(\bar{x}) = f(a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n) = a_1 f(\bar{x}_1) + a_2 f(\bar{x}_2) + \dots + a_n f(\bar{x}_n)$$

VI.8. TEOREMA

El conjunto de todas las soluciones factibles de un problema de programación lineal es un conjun to convexo.

Demostración

Sean $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ dos soluciones factibles. Debemos mostrar que cualquier combinación convexa de éstos, es también una solución factible.

Tenemos

$$AX_1 = b \text{ para } X_1 \geqslant 0$$

$$AX_2 = b \text{ para } X_2 \geqslant 0$$

Sea $X = a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2$ una combinación convexa de $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$, es decir,

$$\sum_1^n a_i = 1; \; a_i \geqslant 0.$$

Tenemos entonces,

$$AX = A\left[a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2\right] = a_1A\overline{X}_1 + a_2A\overline{X}_2$$

$$= a_1b + a_2b = (a_1 + a_2)b = b.$$

VI.9. TEOREMA

El conjunto solución de un sistema de desigualdades

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leqq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \leqq b_2$$

....

....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leqq b_n$$

es un conjunto polihédrico convexo.

Demostración

i) Por def. V.13 la solución de una desigualdad es un medio espacio abierto.
ii) Por el teorema V.14 un medio espacio abierto es un conjunto convexo.
iii) Por el teorema V.7, la intersección de dos conjuntos convexos es el vacío o un conjunto convexo.

VI.10. TEOREMA

Si el conjunto de $k \leq m$ vectores $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_k$ es l.i. y tal que

$$\overline{P}_1 x_1 + \overline{P}_2 x_2 + \ldots + \overline{P}_k x_k = \overline{P}_o \ \& \ x_i \geq 0,$$

entonces $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Demostración

Por definición (VI.3) una solución factible es un vector

$$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \text{ con } x_i \geq 0, \text{ tal que}$$

$$\overline{P}_1 x_1 + \overline{P}_2 x_2 = \ldots + \overline{P}_n x_n = \overline{P}_o$$

Asumamos que $\overline{X}$ no es punto extremo. Como $\overline{X}$ es una solución factible, puede ser expresado como una combinación convexa de $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, soluciones factibles, así,

$$\overline{X} = a\overline{X}_1 + (1-a)\overline{X}_2 \text{ para } 0 < a < 1$$

Como $x_i \geq 0$ & $0 < a < 1$, los n-k últimos elementos deben ser iguales a cero, es decir,

$$\overline{X}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}, 0, \ldots 0)$$

$$\overline{X}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k}, 0,\dots,0)$$

como $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ son soluciones factibles, $A\overline{X}_1 = b$ & $A\overline{X}_2 = b$; o sea,

$$\begin{array}{l} \overline{P}_1 x_{11} + \overline{P}_2 x_{12} + \dots + \overline{P}_k x_{1k} = \overline{P}_o \\ \overline{P}_1 x_{21} + \overline{P}_2 x_{22} + \dots + \overline{P}_k x_{2k} = \overline{P}_o \\ \hline \overline{P}_1(x_{11} - x_{21}) + \overline{P}_2(x_{12} - x_{22}) + \dots + \overline{P}_k(x_{1k} - x_{2k}) = 0 \end{array} \quad \text{restando,}$$

Pero $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots \overline{P}_k$ son linealmente independientes, por hipótesis. De donde concluimos,

$$x_{11} - x_{21} = 0,\ x_{12} - x_{22} = 0,\ \dots,\ x_{1k} - x_{2k} = 0$$

O sea, $\quad x_{11} = x_{21} = x_1;\ x_{12} = x_{22};\ \dots\ x_{1k} = x_{2k} = x_k$

Entonces, no es posible expresar a $\overline{X}$ como una combinación convexa de dos puntos distintos del conjunto convexo S. Por lo que concluimos que $\overline{X}$ es un punto extremo.

VI.11. TEOREMA

Si $\overline{X} = (x_1, x_2 \dots x_n)$ es un punto extremo de S, entonces los vectores asociados con $x_i > 0$ forman un conjunto l.i. De donde a lo más m de los x_i son positivos.

Demostración

Numeremos los coeficientes distintos de cero de manera que sean los k primeros. Así:

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{P}_i x_i = \overline{P}_o$$

Asumamos que $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots \overline{P}_k$ son l.d., o sea,

$$d_1\overline{P}_1 + d_2\overline{P}_2 + \dots + d_k\overline{P}_k = 0 \qquad (1)$$

con al menos m $d_i \neq 0$.

Por hipótesis,

$$\overline{P}_1x_1 + \overline{P}_2x_2 + \dots + \overline{P}_kx_k = \overline{P}_o \qquad (2)$$

Para alguna $d > 0$ multiplicamos (1) por d y sumamos y restamos el resultado de (2) para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_ix_i + d\sum_{i=1}^{n} d_i\overline{P}_i = \overline{P}_o$$

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{P}_ix_i - d\sum_{i=1}^{k} d_i\overline{P}_i = \overline{P}_o$$

Tenemos entonces al conjunto solución de $AX = b$, con dos valores (no necesariamente factibles)

$$\overline{X}_1 = (x_1 + dd_1,\ x_2 + dd_2, \dots, d_k + dd_k, 0, \dots, 0)$$

$$\overline{X}_2 = (x_1 - dd_1,\ x_2 - dd_2, \dots, x_k - dd_k, 0, \dots, 0)$$

Como $x_i > 0\ \forall i \in \{1,\dots,k\}$ podemos hacer a d tan pequeña como se quiera, pero siempre positiva, para hacer los primeras k componentes de $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ positivas. Entonces $\overline{X}_1$ & $\overline{X}_2$ son soluciones factibles pero $\overline{X} = \frac{1}{2}\overline{X}_1 + \frac{1}{2}\overline{X}_2$, lo cual contradice la hipótesis de que $\overline{X}$ es un punto extremo. La dependen lineal que asumimos para $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_k$ nos llevó a una contradicción, lo cual implica que es falsa. Entonces, el conjunto de vectores $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots \overline{P}_k$ es linealmente independiente.

Como todo conjunto de m + 1 vectores en E^m es necesariamente l.d. no podemos tener más de m $x_i > 0$ porque asumamos que, entonces, la demostración anterior implicaría que existen m+1 vectores l.i.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que el conjunto $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots \overline{P}_n$ de un problema de pro gramación lineal siempre contiene un conjunto de m vectores l.i.

VI.12. TEOREMA

Asociado con cada punto extremo de S, existe un conjunto de m vectores linealmente independientes del conjunto dado $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_n$.

Demostración

Por el teorema VI.11 existen $k \leq m$ de tales vectores. Si $k = m$, el teorema está probado. Asumamos que $k < m$ y que podemos encontrar solo vectores adicionales $\overline{P}_{k+1}, \dots \overline{P}_r$ tales que

$\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_k, \overline{P}_{k+1}, \dots, \overline{P}_r$ etc. para $r < m$ es l.i.

esto implica que los n-r vectores restantes dependen de $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_r$ pero ésto contradice lo que asumimos de que siempre tenemos un conjunto de m vectores linealmente independientes en el conjunto dado de $P_1, \dots, P_n$. De donde deben haber m vectores l.i. $P_1, \dots, P_m$ asociados con cada punto extremo, tal que

$$\sum_{i=1}^{k} P_i x_i + \sum_{i=k+1}^{m} 0P_i = P_o$$

Podemos resumir los tres últimos teoremas en el siguiente:

VI.13. TEOREMA

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto extremo de S si y solo si los x_j positivos son coeficientes de los vectores linealmente independientes P_j, en

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_o$$

VI.14. RESUMEN

a) Existen uno o más puntos extremos de S donde la función objetivo toma su máximo (mínimo) valor.
b) Cada solución básica factible corresponde a un punto extremo de S.
c) Cada punto extremo de S tiene m vectores linealmente independientes del conjunto dado de n asociados con él.

De lo anterior concluimos que necesitamos solamente investigar soluciones de puntos extremos y por tanto solo aquellas soluciones factibles generadas por m vectores linealmente independientes. Como hay a lo mas $\binom{n}{m}$ conjuntos de m vectores linealmente independientes de un conjunto dado de n, el valor $\binom{n}{m}$ es el límite superior del número de posibles soluciones al problema. Cuando n & m son grandes, es imposible evaluar todas las posibles soluciones que maximizan (minimizan) la función objetivo.

Lo que se requiere es un algoritmo que seleccione de una manera ordenada un pequeño subconjunto de los posibles soluciones que convergen a la solución máxima (mínima). "El Simplex" es un algoritmo que encuentra un punto extremo y determina si es máximo (mínimo). Si no lo es, toma un punto extremo vecino de tal forma que la función objetivo tome en él un valor mayor o igual que en el punto anterior. En un número finito de tales iteraciones, se encuentra el máximo (mínimo).

En el siguiente capítulo revisaremos el desarrollo del algoritmo del Simplex.

CAPITULO VII

DESARROLLO DEL ALGORITMO DEL SIMPLEX

VII.1. GENERANDO NUEVAS SOLUCIONES

Suponemos que se conoce una solución inicial (punto extremo) en términos de m vectores P_i de un conjunto original de n.

Sea

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_m, 0, \dots, 0)$$

el vector solución tal que

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = P_o; \; x_i > 0; \; P_1, \dots, P_m \text{ son l.i.} \qquad (1)$$

Suponiendo que exista otro extremo, vamos a tratar de determinarlo. Siendo $P_1, P_2, \dots, P_n$ l.i., forman una base en E^m. Un vector P_j (que no esté en la base) puede expresarse en una forma única en función de esos m vectores:

$$P = \sum_{i=1}^{m} P_i x_{ij}; \; j \in \{m+1, \dots m\}$$

Si P_j es P_{m+1} (nada nos impide suponerlo),

$$P_1 x_{1,m+1} + P_2 x_{2,m+1} + \dots + P_m x_{m,m+1} = P_{m+1} \qquad (2)$$

Sea θ cualquier número real, multipliquemos (2) por θ y restemos el resultado de (1). Obtenemos,

$$P_1(x_1 - x_{1,m+1}) + P_2(x_2 - x_{2,m+1}) + \dots + P_m(x_m - x_{m,m+1}) + P_{m+1} = P_o \qquad (3)$$

El vector

$$\overline{x}' = (x_1 - x_{1,m+1}\,,\ x_2 - x_{2,m+1}\,, \dots,\ x_{m,m+1} - x_{m,m+1}, \ )$$

es una solución y si todos los elementos de $\overline{x}'$ son no negativos, x' es una solución factible.

Como queremos $x' \neq x$, restringimos θ a valores positivos. Con esta restricción, todos los elementos de x' que tienen un $x_{i,m+1}$ negativo o cero tendrán $x_i - x_{i,m+1}$ no negativo. Así que trataremos sólo con los que tienen un $x_{i,m+1}$ positivo. Queremos encontrar $\theta > 0 \ni x_i - x_{i,m+1} \geqslant 0 \ \forall\ x_{i,m+1} > 0$; es decir,

$$\frac{x_i}{x_{i,m+1}} \geqslant \theta$$

entonces, todo $\theta \ni 0 < \theta \leq \min\limits_{i} \dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ da una solución factible para (3). Pero según el teorema VI, si deseamos que x' sea extremo, no puede tener más que m componentes positivas. Vamos pues a anular una de las componentes de x'. Hagamos

$$\theta = \theta_o = \min_{i} \frac{x_i}{x_{i,m+1}} \text{ para } x_{i,m+1} > 0$$

entonces el elemento en x' para el cual este mínimo se obtiene, se reducirá a cero. Sea este elemento el primero, es decir,

$$\theta_o = \min \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}$$

Hemos obtenido una nueva solución factible,

$$P_2x'_2 + P_3x'_3 + \dots + P_mx'_m + P_{m+1}x'_{m+1} = P_o,$$

donde

$$x_i' = x_i - \theta_o x_{i,m+1};\ i \in \{2,\ldots,m\}$$

$$x'_{m+1} = \theta_o$$

es decir, tenemos una nueva base que formamos haciendo salir de la primera P_1 e introduciendo P_{m+1}. Pero estos vectores tienen que ser linealmente independientes. Supongamos por el contrario que son l.d., es decir, podemos encontrar,

$$P_2u_2 + P_3u_3 + \ldots + P_mu_m + P_{m+1}u_{m+1} = \overline{0}, \qquad (4)$$

donde no todos los u_i son ceros.

Como cualquier subconjunto de un conjunto de vectores l.i. es también l.i., tenemos que $P_2, \ldots, P_m$ son l.i. Esto implica que $U_{m+1} \neq 0$. De (4) tenemos,

$$P_2e_2 + P_3e_3 + \ldots + P_me_m = P_{m+1}, \qquad (5)$$

donde

$$e_i = \frac{-di}{dm+1}$$

Restando (5) de (2), tenemos:

$$P_1(x_{1,m+1} + P_2(x_{2,m+1} - e_2) + \ldots + P_m(x_{m,m+1} - e_m) = 0$$

Como $P_1, P_2, \ldots P_m$ son l.i., todos los coeficientes deben ser iguales a cero. Pero $x_{1,m+1}$ se asumió positivo. De donde, asumir que $P_2, \ldots, P_{m+1}$ eran l.d. nos llevó a una contradicción; por lo que concluimos en que son l.i.

Para poder continuar con este proceso de obtener nuevas soluciones factibles extremas, necesitamos la representación de cualquier vector que no esté en la nueva base $P_2, P_3, \ldots P_{m+1}$ en términos de esta base. De (2), tenemos,

$$P_1 = \frac{1}{x_{1,m+1}} (P_{m+1} - P_2 x_{2,m+1} - \dots - P_m x_{m,m+1}) \qquad (6)$$

Sea $P_j = P_1 x_{1j} + P_2 x_{2j} + \dots + P_m x_{mj}$, un vector que no pertenece a la base.

Sustituyendo (6) para P_1 en (7), tenemos:

$$P_J = P_2(x_{2j} - \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} X_{2,m+1}) + P_3(x_{3j} - \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}} X_{3,m+1}) + \dots$$

$$+ P_m(x_{mj} - \frac{x_{ij}}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}) + P_{m+1} \frac{x_{ij}}{x_{1,m+1}}$$

Resumiendo, el procedimiento para obtener nuevas soluciones de puntos extremos, es el de seleccionar una nueva variable para ser introducida en el sistema, determinando qué variable debe ser removida de la solución para que continúe siendo factible, y aplicar las fórmulas de eliminación para obtener la nueva solución y la nueva representación de los vectores que no están en la base.

VII.2. EJEMPLO

Sea el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Tenemos como una solución inicial de punto extremo $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 10$; $x_5 = 15$; $x_6 = 20$. Expresamos el conjunto de ecuaciones en forma matricial (según vimos en IV.10); además, agregamos una columna para indicar los vectores que forman la base:

BASE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o
P_5	1	2	3	0	1	0	15
P_6	2	1	5	0	0	1	20
P_4	1	2	1	1	0	0	10

La solución dada en notación vectorial es:

$$10P_4 + 15P_5 + 20P_6 = P_o$$

Aquí los vectores de la base son vectores unitarios. Queremos introducir el vector P_3 para obtener otra solución de punto extremo. La representación de P_3 en términos de los vectores de la base, es:

$$P_3 = P_4 + 3P_5 + 5P_6 \;;$$

esto es, $x_{43} = 1$; $x_{53} = 3$; $x_{63} = 5$. Si multiplicamos P_3 por θ y lo restamos de P_o,

$$(10 - \theta)P_4 + (15 - 3\theta)P_5 + (20 - 5\theta)P_6 + \theta P_3 = P_o$$

como $x_{43} = 1$; $x_{53} = 3$ & $x_{63} = 5$ son positivos, determinamos θ_o evaluando para estos x_{i3},

$$\theta = \theta_o = \min \frac{x_i}{x_{i3}} = \min\ (15/3,\ 20/5,\ 10/1) = 4,$$ situación que podemos ver en un tablero:

BASE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o	θ
P_5	1	2	3	0	1	0	15	$15/3 = 5$
P_6	2	1	5	0	0	1	20	$20/5 = 4 = \theta_o$
P_4	1	2	1	1	0	0	10	$10/1 = 10$

Vector a eliminar de la base

Vector a introducir a la base

Sustituyendo $\theta_o = 4$,

$$(10 - \theta)P_4 + (15 - 3\theta)P_5 + (20 - 5\theta)P_6 + \theta P_3 = P_o$$

Tenemos,

$$6P_4 + 3P_5 + 4P_3 = P_o$$

o sea, la solución de punto extremo,

$$x = (0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 3,\ 0);$$

es decir, $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$; $x_4 = 6$; $x_5 = 3$; $x_6 = 0$.

Una forma sistemática de efectuar la transformación de base es: como queremos introducir el vector P_3 en la base, formamos las razones $\dfrac{x_i}{x_{i3}}$ para $x_{i3} > 0$. Como $\theta_o = 4$ es el mínimo de estas razones, el vector a eliminar de la base es P_6. El elemento que simultáneamente pertenece al vector que entra y al vector que sale, se llama elemento pivote, al que circulamos. Para efectuar la transformación, eliminamos x_3 de todas las ecuaciones, menos de la segunda, que debe quedar con coef. 1. Esto lo hacemos aplicando las operaciones elementales con matrices (Ver IV.5.) Nos queda:

BASE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o
P_5	-1/5	7/5	0	0	1	-3/5	3
P_3	2/5	1/5	1	0	0	1/5	4
P_4	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	6

O sea, $4P_3 + 6P_4 + 3P_5 = P_o$,

como teníamos anteriormente, con la ventaja de que ahora tenemos a todos los vectores como combinación lineal de los vectores de base. Así,

$$P_1 = -1/5\ P_5 + 2/5\ P_3 + 3/5\ P_4.$$

VII.3. DESARROLLO DE UNA SOLUCION MAXIMA FACTIBLE

Asumimos sin pérdida de generalidad que el problema planteado es factible, que no hay degeneración, y que tenemos una solución básica factible de lo cual partir, para nuestro problema iterativo.

Sea $x_o = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ la solución dada; & $P_1, P_2, \dots, P_m$ el conjunto de vectores l.i. asociados a ella. Entonces,

$$P_1 x_{1o} + P_2 x_{2o} + \dots + P_m x_{mo} = P_o$$

$$c_1 x_{1o} + c_2 x_{21} + \dots + c_m x_{mo} = Z_o$$

donde todos los $x_{io} > 0$. Llamaremos a C_i, coeficientes de costo y a Z_o el valor de la función objetivo para la solución dada. Como tenemos m vectores l.i., podemos expresar los n-m restantes en función de éstos. Sea P_j, dado por

$$P_j = P_1 x_{1j} + P_2 x_{2j} + \dots + P_m x_{mj} = P_j; \qquad j \in \{1, \dots n\}$$

definamos: $$c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj} = Z_j; \qquad j \in \{1, \dots n\}$$

en donde c_j es el coeficiente de costo correspondiente a P_j.

VII.4. DEFINICION

Un problema de programación lineal tiene una solución no acotada si el valor Z de la función objetivo puede hacerse arbitrariamente grande, de modo que el problema no tenga ningún valor máximo finito de Z.

VII.5. TEOREMA

Dada cualquier solución básica factible $X = (x_1, \dots x_m, 0,\dots 0)$, si para esta solución hay algún P_j que no pertenece a la base, es decir, $j \notin \{1,\dots m\}$ tal que $Z_j - c_j < 0$ & $x_{ij} \leq 0$, $i \in \{1,\dots m\}$, entonces, en caso de que la función objetivo haya de ser maximizada, el problema tiene una solución no acotada.

Demostración

Introducimos P_j en la base. Como por hipótesis todos los $x_{ij} \leq 0$, x_j debe aparecer en la base con un valor de 0 para ser factible. Para mantener una solución factible y tener aún $x_j > 0$, formemos una solución factible con m+1 variables x_j y los m $x_j > 0$. Para obtener ésto, consideremos la solución básica factible

$$P_1 x_{1o} + P_2 x_{2o} + \dots + P_m x_{mo} = P_o$$

$$c_1 x_{1o} + c_2 x_{2o} + \dots + c_m x_{mo} = Z_o$$

Sea θ cualquier escalar; si sumamos y restamos θP_j, tenemos:

$$P_1 x_{1o} + P_2 x_{2o} + \dots + P_m x_{mo} - \theta P_j + \theta P_j = P_o$$

si expresamos a P_j como combinación lineal de los vectores de la base,

$$-\theta P_j = -\theta \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i,$$

valor que sustituido da:

$$P_1(x_{1o} - \theta x_{ij}) + P_2(x_{2o} - \theta_{2j}) + \dots + P_m(x_{mo} - \theta_{mj}) + \theta P_j = P_o \qquad (8)$$

Como todos los $x_{ij} \leq 0$ cuando $\theta > 0$, tenemos

$$x_{io} - \theta x_{ij} \geq 0$$

de modo que (8) es una solución factible con el número de variables positivas menor o igual a m+1 (menos porque algunas $x_{io} - \theta x_{ij}$ pueden ser 0).

Sean x' las variables de la nueva solución factible de (8). Tenemos que

$$x'_i = x_{io} - \theta x_{ij} \qquad i \in \{1,\dots,m\}$$

$$x'_{m+1} = \theta$$

también podemos obtener Z'_i el nuevo valor de la función objetivo

$$Z'_o = \sum_{i=1}^{m} C_{io}x'_i + C_j\theta = \sum_{i=1}^{m} C_{io}(x_{io} - \theta x_{ij}) + C_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_{io}x_{io} - \theta \sum_{i=1}^{m} C_{io}x_{ij} + C_j\theta = Z_o + \theta\,(c_j - Z_j)$$

Por hipótesis $Z_j - C_j < 0$ ó sea $C_j - Z_j > 0$, de donde vemos que podemos hacer a Z'_o tan grande como queramos, haciendo θ suficientemente grande. El teorema queda probado; si hay algún P_j que no está en la base tal que $Z_j - C_j < 0$ y todo $x_{ij} \leq 0$ podemos formar una nueva solución factible en la que el número de variables positivas es menor o igual a m+1, la que es no acotada.

VII.6. TEOREMA

Si para cualquier j fija, se tiene $Z_j - C_j < 0$, entonces un conjunto de soluciones factibles puede ser construido tal que $Z > Z_o$ para cualquier elemento del conjunto, donde la cota superior de Z pueda ser finita o infinita.

Demostración

Sea P_j el vector para el cual $Z_j - C_j < 0$, multipliquemos P_j por θ y restémoslo de P_o, y simultáneamente multipliquemos Z_j por θ y restémoslo de Z_o para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$P_o - P_j\theta = P_1(x_{1o} - \theta x_{1j}) + P_2(x_{2o} - \theta x_{2j}) + \dots + P_m(x_{mo} - \theta x_{mj})$$

$$P_o = P_1(x_{1o} - \theta x_{1j}) + P_2(x_{2o} - \theta x_{2j}) + \dots + P_m(x_{mo} - \theta x_{mj}) + \theta P_j$$

$$Z_o - Z_j\theta + c_j\theta = c_1(x_{1o} - \theta x_{1j}) + c_2(x_{2o} - \theta x_{2j}) + \dots + c_m(x_{mo} - \theta x_{mj}) + \theta c_j$$

$$Z_o - (Z_j - C_j)\,\theta = Z$$

Pero, por hipótesis, $Z_j - C_j < 0$; entonces,

$$Z = Z_o - (Z_j - C_j)\theta \qquad \text{para } \theta > 0$$

$$\Rightarrow Z > Z_o.$$

VII.7. TEOREMA

Si para cualquier solución básica factible

$$X = (x\ ,\ x\ ,\ \dots\ ,\ x\ )$$

se tiene la condición

$$Z_j - C_j \geqslant 0$$

para todo $j \in \{1,\dots m\}$, entonces P_o & Z_o constituyen la máxima solución factible. Sea

$$P_1 y_{1o} + P_2 y_{2o} + \dots + P_n y_{no} = P_o \qquad (9)$$

&

$$C_1 y_{1o} + C_2 y_{2o} + \dots + C_n y_{no} = Z^* \qquad (10)$$

otra solución factible. Debemos mostrar que $Z_o \geqslant Z^*$.

Por hipótesis, $Z_j - C_j \geqslant 0$ para toda $j \in \{1,\dots,n\}$; si reemplazamos C_j por Z_j en (10), tendremos

$$Z_1 y_{1o} + Z_2 y_{2o} + \dots + Z_n y_{no} \geqslant Z^* \qquad (11)$$

Sustituyendo $P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$ en (9), tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i1} P_i\right) y_{1o} + \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i2} P_i\right) y_{2o} + \dots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_{in} P_i\right) y_{no} = P_o$$

ó, reagrupando,

$$P_1\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{1j}\right) + P_2\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{2j}\right) + \dots + P_m\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{mj}\right) = P_o \qquad (12)$$

Si de manera similar sustituimos $Z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$ en (11), obtenemos:

$$C_1\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{1j}\right) + C_2\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{2j}\right) + \dots + C_n\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jo} x_{mj}\right) \geqslant Z^* \qquad (13)$$

Si recordamos que

$$P_1 x_{1o} + P_2 x_{2o} + \dots + P_m x_{mo} = P_o$$

la comparamos con la (12) y concluimos que por ser $P_1, P_2, \dots P_m$ l.i., los coeficientes de sus vectores correspondientes deben ser iguales. Entonces (13) queda:

$$C_1 x_{1o} + C_2 x_{2o} + \dots + C_m x_{mo} \geqslant Z^*$$

pero

$$C_1 x_{1o} + C_2 x_{2o} + \dots + C_m x_{mo} = Z_o$$

de donde,

$Z_o \geq Z^*$.

VII.8. ALGORITMO DEL SIMPLEX

Como punto de partida vamos a asumir que

i) hemos seleccionado m vectores l.i. que conducen a una solución factible y que hemos expresado todos los otros vectores en términos de esta base, ó

ii) que nuestra matriz contiene m vectores que pueden ser ordenados para formar una matriz unitaria de orden m.

Para el primer caso, sea $P_1, P_2, \ldots, P_m$, m vectores linealmente independientes y denotemos la matriz mxm $(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ por B.

Para calcular el vector solución X y la representación de los otros vectores en términos de la base, debemos calcular B^{-1} (Ver IV.9).

Como $BX_o = P_o$, tenemos $X_o = B^{-1}P_o$ y $X_j = B^{-1}P_j$, en donde $X_o = (x_{1o}, x_{2o}, \ldots, x_{mo})$;

$x_{io} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots x_{mj})$ son vectores columna.

Para empezar el Simplex agrupamos los vectores como sigue:

B	$P_{m+1}, \ldots, P_n$	P_o

matriz que multiplicada por B^{-1} nos dá

Im	$X_{m+1}, \ldots, X_n$	X_o

(Ver IV.10)

Como C_j es conocida, calculamos $Z_j - C_j$ y determinamos si para alguna j, $Z_j - C_j < 0$; si es así, llevamos a cabo el procedimiento del teorema VII.6. Si $Z_j - C_j \geqslant 0, \forall\ j \in \{1,\ldots,n\}$, entonces hemos encontrado la máxima solución factible.

Para el segundo caso, asumimos que el conjunto dado de n vectores $P_1, \ldots P_n$ contiene m vectores unitarios que pueden ser agrupados para formar una matriz unitaria I_m.

Sean estos $P_1, P_2, \ldots P_m$ y tomemos como muestra base $B = [P_1, P_2, \ldots, P_n] = I_m$. Como $B^{-1} = I_m$ y como todos los elementos de P_o son no negativos, tenemos la solución inicial de punto extremo $X_o = P_o$ & $X_j = P_j$, en donde

$$X_o = (x_{1o}, x_{2o}, \ldots, x_{mo}) \quad x_{io} \geqslant 0$$

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})$$

Para empezar el algoritmo del Simplex, arreglamos el problema matricial como se muestra en el siguiente tablero:

B	C	P_1	$P_2 \ldots P_m$	$P_{m+1} \ldots$		P_n	P_o
P_1	C_1	1	$0 \ldots 0$	$x_{1,m+1}$	$x_{1,m+2} \ldots$	$x_{1,n}$	x_{1o}
P_2	C_2	0	$1 \ldots 0$	$x_{2,m+1}$	$x_{2,m+2}$	$x_{2,n}$	x_{2o}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \ \ldots \ \vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
P_m	C_m	0	$0 \ldots 1$	$x_{m,m+1}$	$x_{m,m+1}$	x_{mn}	x_{mo}
		0	$0 \ldots 0$	$Z_{m+1}-C_{m+1}$	$Z_{m+2}-C_{m+1} \ldots$	Z_n-C_n	Z_o

(Con la práctica no es necesario agrupar los vectores unitarios).

De las ecuaciones originales del problema dado por $AX = b$, hemos hecho $x_{io} = b_i$ & $x_{ij} = a_{ij}$. Z_j para $j \in \{0, 1, \ldots n\}$ es obtenido del producto interno del vector j con el vector columna C; esto es,

$$Z_o = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{io} \qquad Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij} \qquad j \in \{1,\ldots n\}.$$

Los elementos Z_o & $Z_j - C_j$ se colocan en la fila (m+1) de su respectiva columna. $Z_j - C_j$ para los vectores de la base será siempre igual a cero. Si todos los números $Z_j - C_j \geq 0$ para $j \in \{1,\ldots,n\}$, entonces la solución $X_o = (x_{1o}, x_{2o}, .., x_{mo}) = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ es la solución máxima factible, y al correspondiente valor de la función objetivo es Z_o. Asumimos al menos un $z - C < 0$ y calculamos una nueva solución factible cuya base contiene m-1 vectores de la base original $P_1, P_2, \ldots P_m$. Para seleccionar que vector entra a la base, teóricamente se puede tomar cualquiera con correspondiente $z_j - C_j \leq 0$, pero es conveniente seguir por regla el min $(Z_j - C_j)$ y si hay dos con el mismo $Z_j - C_j$, escoger el que tenga menor índice j.

Supongamos en nuestro caso que $\min(Z_j - C_j) = Z_k - C_k < 0$, entonces debemos introducir P_k en la base.

En seguida, encontramos $\theta_o = \min \frac{x_{io}}{x_{ik}}$ para $x_{ik} > 0$. Si todo $x_{ik} \leq 0$, podemos encontrar una solución factible cuya función objetivo pueda hacerse arbitrariamente grande, completando nuestros cálculos. Asumamos sin embargo, algún

$x_{ik} > 0$ y $\theta = \min \frac{x_{io}}{x_{tk}} = \frac{x_{io}}{x_{tk}}$; esto implica que P_t será el eliminado de la base. Nuestra nueva solución factible tendrá una nueva base consistente de

$$P_1, \ldots P_{t-1}, P_{t+1}, \ldots P_m, P_k$$

luego deseamos calcular la nueva solución explícitamente y expresar cada vector no en la base en términos de la nueva base. Tenemos entonces,

$$P_o = P_1 x_{1o} + \ldots + P_t x_{to} + \ldots + P_m x_{mo} \tag{14}$$

$$P_k = P_1 x_{1k} + \ldots + P_t x_{tk} + \ldots + P_m x_{mk} \tag{15}$$

$$P_j = P_1 x_{1j} + \ldots + P_t x_{tj} + \ldots + P_m x_{mj} \tag{16}$$

De (15), tenemos,

$$P_5 = \frac{1}{x_{tk}} (P_k - P_1 x_{1k} - \dots - P_m x_{mk}) \qquad (17)$$

Sustituyendo (17) en (14), obtenemos

$$P_o = P_1 x_{1o} + \dots + \frac{1}{x_{tk}} (P_k - P_1 x_{1k} - \dots - P_m x_{mk} \; x_{1o}) + \dots + P_m x_{mo}$$

ó

$$P_o = P_1 (x_{1o} - \frac{x_{to}}{x_{tk}} x_{1k}) + \dots P_k \frac{x_{to}}{x_{tk}} + \dots + P_m (x_{mo} - \frac{x_{to}}{x_{tk}} x_{mk})$$

La nueva solución factible $X'_o = (x'_{1o}, \dots, x'_{ko}, \dots, x'_{mo})$; $x'_{io} \geqslant 0$ está dada por

$$P_o = P_1 x'_{1o} + \dots + P_k x'_{ko} + \dots + P_m x'_{mo},$$

en donde

$$x'_{io} = x_{io} - \frac{x_{to}}{x_{tk}} x_{ik} \quad \text{para } i \in \{1, \dots t-1, t+1, \dots m\}$$

$$x' = \frac{x_{to}}{x_{tk}} \qquad (18)$$

En forma similar, sustituyendo (17) en (16), podemos obtener expresiones para cada P_j, no en la base, en términos de esta base

$$P_j = P_1 x'_{1j} + \dots + P_k x'_{kj} + \dots + P_m x'_{mj}$$

en donde

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{tj}}{x_{tk}} x_{ik}; \; i \neq t; \; x'_{kj} = \frac{x_{tj}}{x_{tk}} \qquad (19)$$

Como $Z'_j - C_j = x'_{ij}c + \ldots + x'_{kj}c_k + \ldots + x'_{mj}c_m - c_j$

se puede verificar sustituyendo los valores de (19) para x'_{ij} que

$$Z'_j - C_j = Z_j - C_j - \frac{x_{tk}}{x_{tk}} (Z_k - C_k)$$

y sustituyendo (16) para x'_{io} en

$$Z'_o = C_1 x'_{1o} + \ldots + C_k x'_{ko} + \ldots + c_m x'_{mo}$$

que

$$Z'_o = Z_o - \frac{x_{to}}{x_{tk}} (Z_k - C_k)$$

Se puede notar que para obtener la nueva solución X'_o, los nuevos vectores X'_j y los correspondientes $Z'_j - C_j$, cada elemento del tablero para las filas $i \in \{1,\ldots,m+1\}$ y columnas $j \in \{o, 1, \ldots, n\}$ es transformado por las fórmulas,

$$X'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{tj}}{x_{tk}} x_{ik}; \quad X'_{tj} = \frac{x_{tj}}{x_{tk}}; \; i \neq t \tag{20}$$

en donde

$$Z'_o = X'_{m+1,o}; \quad Z'_j - C_j = X'_{m+1,j}$$

Estas fórmulas se aplican a todos los elementos del tablero incluyendo la columna P_o y la fila (m+1). La transformación definida en (20) es equivalente a las fórmulas de eliminación cuando el elemento pivote es x_{tk}.

Una vez que el tablero inicial ha sido construido se construye el segundo, etc., en forma iterativa de:

1) La prueba de los elementos $Z_j - C_j$ determina si la máxima solución ha sido encontrada; es decir, si $Z_j - C_j \geqslant 0 \; \forall j$.

2) La selección del vector a ser introducido en la base si algún $Z_j - C_j < 0$, es decir seleccionar el $\min(Z_j - C_j)$.

3) La selección del vector a ser eliminado de la base para asegurar la factibilidad de la nueva solución; es decir, seleccionar el vector con $\min(x_{io}/x_{ik})$ para $x_{ik} > 0$, donde k corresponde al vector seleccionado en 2). Todo $x_{ik} \leq 0 \Rightarrow$ solución no acotada.

4) La transformación del tablero por el procedimiento de eliminación para obtener la nueva solución y elementos asociados

Cada iteración produce una nueva solución básica factible y eventualmente convergen a la solución máxima factible o a una solución no acotada.

CAPITULO VIII

APLICACIONES

VIII.1. PRIMERA APLICACION

Sea, por ejemplo, encontrar el máximo de la función objetivo

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 100$$

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 36$$

$$x_i \geqslant 0$$

En primer lugar transformamos las desigualdades a igualdades, introduciendo las variables, x_5, x_6 & x_7. Así, en forma general,

$$a \leq b \Rightarrow \exists \; x_i \geqslant 0 \ni$$

$$a + x_i = b$$

es decir que queda,

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24$$

$$x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_6 = 100$$

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 36$$

Tomando la matriz de coeficientes, tenemos el primer tablero del simplex. Haciendo $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ la solución inicial será $X_o = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 24,\ x_6 = 100,\ x_7 = 36)$.

fila \ columna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_o	θ
2	P_5	2	3	2	1	1	0	0	24	
3	P_6	1	1	6	4	0	1	0	100	
4	P_7	8	2	3	2	0	0	1	36	
5	$Z_j - C_j$	-5	-4	-6	-2	0	0	0	0	

Los vectores que forman la base, son entonces $\overline{P}_5$, $\overline{P}_6$, $\overline{P}_7$ indicados en la columna 1. La columna 9 nos indica los valores de las variables en cualquier iteración y la casilla de la columna 9 fila 5, será el valor de la función objetivo. La fila 5 da los valores de $Z_j - C_j$; para el tablero inicial, los obtenemos (como $Z = 0$) restando de 0 los coeficientes de la función objetivo.

Como primer paso, hacemos un cambio de base, buscamos qué vector introducir en la base y qué vector debe ser eliminado de ella. Para ello introducimos el vector que tenga $\min(Z_j - C_j)$, es decir, el menor de los elementos de la fila 5,

$$\min(-5,\ -4,\ -6,\ -2) = -6$$

Entonces, introducimos $\overline{P}_3$ a la base. Para seleccionar el vector que va a ser eliminado, escogemos θ = min de las razones de cada elemento de la columna 9 sobre el respectivo elemento de la columna 4 que corresponde al vector que va a ser introducido, esto nos da la columna 10.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_o	θ
P_5	2	3	2	1	1	0	0	24	12 ←
P_6	1	1	6	4	0	1	0	100	50/3
P_7	8	2	3	2	0	0	1	36	12
	-5	-4	-6	-2	0	0	0	0	
			↑						

Min(12, 50/3, 12) = 12. Como hay empate, tomamos por regla el primero de arriba abajo y elimi namos $\overline{P}_5$ de la base. Nuestro pivote será entonces 2 que es la intersección entre el vector que entra a la base y el que sale de ella.

Vamos a efectuar entonces el cambio de base introduciendo $\overline{P}_3$ y eliminando $\overline{P}_5$ de ella. En la nueva base, $\overline{P}_3$ será linealmente independiente, es decir, que no puede ser expresado como combinación lineal de los otros vectores de la base y además debe ser un vector unitario. Esto lo conseguimos dividien do entre 2 (pivote) la fila pivote, quedándonos

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_o
P_3	1	1/3	1	1/2	1/2	0	0	12

Debemos ahora expresar el resto de los vectores que no están en la base, en función de los vectores de base. Si $\overline{P}_3$ solo puede expresarse en términos de sí mismo, entonces deben haber ceros en las casi llas de intersección de la columna P_3 con las filas correspondientes a los otros vectores de base. Ello lo logramos (ver cap. de matrices) multiplicando la fila de $\overline{P}_3$ por un número tal que sumada a las restantes filas nos den ceros en la columna de $\overline{P}_3$. Así, multiplicamos la fila que corresponde a P_3 en el nuevo tablero por -6 y la sumamos a la fila que corresponde a P_6 en el tablero anterior

-6	-9	-6	-3	-3	0	0	-72	+
1	1	6	4	0	1	0	100	
-5	-8	0	1	-3	1	0	28	

Obtenemos,

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_o
P_3	1	3/2	1	1/2	1/2	0	0	12
P_6	-5	-8	0	1	-3	1	0	28

De igual manera, multiplicamos sucesivamente la fila correspondiente a $\overline{P}_3$ en el nuevo tablero por -3 & 6 y las sumamos respectivamente a las filas que correspondían a $\overline{P}_7$ & $Z_j - C_j$ en el tablero anterior

-3	-9/2	-3	-3/2	-3/2	0	0	-36	+
8	2	3	2	0	0	1	36	
5	-5/2	0	1/2	-3/2	0	1	0	

6	9	6	3	3	0	0	72
-5	-4	-6	-2	0	0	0	0
1	5	1	1	3	0	0	72

Hemos completado entonces el 2o. tablero

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_o
P_3	1	3/2	1	1/2	1/2	0	0	12
P_6	-5	-8	0	1	-3	1	0	28
P_7	5	-5/2	0	1/2	-3/2	0	1	0
	1	5	1	1	3	0	0	72

Como todas las $Z_j - C_j$ del nuevo tablero son positivas, este es el tablero final y encontramos la máxima solución factible (ver VII.8). El vector solución será

$$X^* = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$$

tal que $X_1 = 0;\ X_2 = 0;\ X_3 = 12;\ X_4 = 0;\ X_5 = 0;\ X_6 = 28;\ X_7 = 0$

y el valor máximo de la función objetivo

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

será $Z = 5(0) + 4(0) + 6(12) + 2(0) + 0(0) + 0(28) + 0(0) = 72$, que podemos leer directamente en la casilla inferior derecha.

VIII.2. SEGUNDA APLICACION

Sea maximizar

$$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_1$$

sujeta a las siguientes restricciones

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 \leqq 6$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leqq 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leqq 3$$

$$x_i \geqslant 0$$

1o. Transformamos el sistema de desigualdades en un sistema de igualdades

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \quad x_5 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \quad x_6 = 3$$

2o. Construimos el tablero inicial

	P_1	P_2	P_4	P_5	P_6	P_o	P
P_4	3	6	1	1	0	0	6
P_5	4	2	1	0	1	0	4
P_6	1	-1	1	0	0	1	3
	-2	3	-1	0	0	0	0

3o. Encontramos la casilla pivote

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o	θ
P_4	3	6	1	1	0	0	6	2
P_5	4	2	1	0	1	0	4	1 ←
P_6	1	-1	1	0	0	1	3	3
	-2	3	-1	0	0	0	0	
	↑							

4o. Calculamos un nuevo tablero y encontramos su pivote

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o	θ
P_4	0	9/2	1/4	1	-3/4	0	3	12
P_5	1	1/2	1/4	0	1/4	0	1	4
P_6	0	-3/2	3/4	0	-1/4	1	2	8/3
	0	4	-1/2	0	1/2	0	2	

5o. Repetimos el paso 4o. hasta obtener el tablero final

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_o
P_4	0	5	0	1	-2/3	-1/3	7/3
P_1	1	1	0	0	1/3	-1/3	1/3
P_3	0	-2	1	0	-1/3	4/3	8/3
	0	3	0	0	1/3	2/3	10/3

El vector solución es

$$X^* = (X_1 = 1/3;\ X_2 = 0;\ X_3 = 8/3;\ X_4 = 7/3;\ X_5 = 0;\ X_6 = 0)$$

y el valor de Z,

$$Z = 10/3$$

CAPITULO IX

CONCLUSIONES

El desarrollo teórico que hemos efectuado permite analizar y comprender completamente el modelo matemático y sus complejas interrelaciones, ya que se busca más que una mera respuesta numérica. Permite conocer cómo la respuesta depende de las restricciones dadas, es decir, cuán sensible es la solución a los datos originales, lo cual es importante, porque las especificaciones técnicas generalmente están basadas en estimaciones y las restricciones pueden ser solamente aproximadas. Además una teoría insuficiente conforma a una persona que sabe como aplicar las técnicas sin una verdadera comprensión de porqué estas técnicas son apropiadas. Sin una base teórica el pensamiento creador en matemática, ingeniería y cualquier ciencia es casi imposible.

El Simplex según hemos visto tiene una estructura matemática, por cuanto puede ser axiomatizado y desarrollado sin necesidad de asumir nada que no pueda ser demostrado, lo cual lo hace Completo, Versátil y Convergente.

Completo: las reglas del algoritmo no presentan ambigüedad. Siempre es posible encontrar una solución inicial para iniciarlo. Los tableros del Simplex permiten un procedimiento puramente mecánico y directo para la determinación de una solución máxima factible (si existe) tal procedimiento puede ser y ha sido fácilmente programado en las Computadoras electrónicas digitales. Incluso si los cálculos se hacen a mano, el procedimiento permite un alto grado de velocidad en el cómputo y precisión que puede ser logrado por personal sin especialización alguna.

Versátil: cualquier problema que pueda ser expresado en forma de igualdades o desigualdades $m < n$ puede ser resuelto por el Simplex, es decir, se adapta a cualquier modelo de optimización lineal.

Convergencia: el Simplex va en forma de iteraciones sucesivas de una Solución Básica Factible a otra mejorada y, a menos que tenga una Solución no Acotada, en un número finito de iteraciones se llega a una SOLUCION EXACTA.

BIBLIOGRAFIA

Introduction to Operations Research
C. West Churchman, Ackoff & Arnoff
John Wiley & Sons, Inc.
New York, N.Y.

Operations Research - Methods & Problems
M. Sasiene, A. Yspan & L. Friedman
John Wiley & Sons, Inc.
New York, N.Y.

Management Operations Research
Norbert Lloyd Enrick
Holt, Rinehart Winston, Inc.
New York, N.Y.

Introduction to Linear Programming
Walter W. Garvin
McGraw - Hill Book Company
New York, N.Y.

Linear Programming
Robert W. Llewellyn
Holt, Rinehart Winston, Inc.
New York, N.Y.

Linear Programming
G. Hadley
Addison - Wesley Publishing Co. Inc.
Massachusets

Linear Programming, Methods & Applications
Saul I. Gass
McGraw - Hill Book Company
New York, N.Y.

Managements Models & Industrial Applications of Linear Programming
A. Charnes & W.W. Cooper
John Wiley & Sons, Inc.
New York, N.Y.

Algebra Lineal & Programación Lineal
Jean Acher
Montner & Simon, S.A.
Barcelona, España

Introduction to Linear Algebra
Frank M. Stewart
D. Van Nostrand Company Inc.

Linear Algebra & Analysis
André Lichnerowicz
Holden Day Inc.
San Francisco, California

Linear Algebra
Saymour Lipschutz
Schaum's Outline Series
McGraw-Hill Book Company
New York, N.Y.

Algebra Lineal
Orlando W. Villamayor
Monografía No. 5 Serie de Matemática
Depto. de Asuntos Científicos
Unión Panamericana, O.E.A.

Introducción al Algebra y Análisis Moderno
Marc Zamanski
Montaner & Simón, S.A.
Barcelona, España

Matemáticas Generales - Algebra - Análisis
Marc Zamanski & C. Pisot
Montaner & Simón, S.A.
Barcelona, España

Matemática Finita
Louis O. Kattsoff & Albert J. Simone
Editorial Trillas
México

Finite Mathematics
Seymour Lipschutz
Schaum's Outline Series
McGraw-Hill Book Company

Espacios Vectoriales & Geometría Analítica
Luis A. Santaló
Monografía No. 2 Serie de Matemática
Depto. de Asuntos Científicos
Unión Panamericana, O.E.A.

Modern Algebra
Frank Ayres, Jr.
Schaum's Publishing Co.
McGraw-Hill Book Company

Advanced Calculus, an Introduction to Analysis
Watson Fulks
John Wiley & Sons, Inc.
New York, N.Y.

Matrices

Frand Ayres, Jr.
Schaum's Publishing Co.
McGraw-Hill International Inc.

Edgar S, Muñoz L.

Ing. y Mat. Bernardo Morales
Asesor

V.B.

Ing. Pierre Castillo C
Jefe Depto. Matemáticas

Ing. Francisco Billeb V.
Director Escuela de Ingenieria Mec-Industrial

Imprimase

p. Ing. Mauricio Castillo C
Decano de la Facultad de Ingeniería