



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

**DISEÑO DE INVESTIGACIÓN DE LA APLICACIÓN DEL MODELADO EN EL MONITOREO  
DE CONDICIÓN DE MOTORES DE INDUCCIÓN EN PLANTA SAN MIGUEL**

**Rodrigo Escobar Coronado**

Asesorado por el Msc. Ing. Ángel Enrique López Flores

Guatemala, Julio de 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO DE INVESTIGACIÓN DE LA APLICACIÓN DEL MODELADO EN EL MONITOREO  
DE CONDICIÓN DE MOTORES DE INDUCCIÓN EN PLANTA SAN MIGUEL**

PROTOCOLO DE TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**RODRIGO ESCOBAR CORONADO**

ASESORADO POR EL MSC. ING. ÁNGEL ENRIQUE LÓPEZ FLORES

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO MECÁNICO ELÉCTRICO**

GUATEMALA, JULIO DE 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Narda Lucía Pacay Barrientos
VOCAL V	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Gustavo Benigno Orozco Godínez
EXAMINADOR	Ing. Víctor Manuel Ruiz Hernández
EXAMINADOR	Ing. Otto Fernando Andrino González
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **DISEÑO DE INVESTIGACIÓN DE LA APLICACIÓN DEL MODELADO EN EL MONITOREO DE CONDICIÓN DE MOTORES DE INDUCCIÓN EN PLANTA SAN MIGUEL**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, con fecha noviembre de 2013

  
**Rodrigo Escobar Coronado**



**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala

Escuela de Estudios de Postgrado  
Facultad de Ingeniería  
Teléfono 2418-9142 / Ext. 86226



**MOD-MIMPP-0003-2014**

00456

Guatemala, 22 de mayo de 2014.

Director:  
Guillermo Antonio Puente Romero  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Presente.

Estimado Director:

Reciba un atento y cordial saludo de la Escuela de Estudios de Postgrado. El propósito de la presente es para informarle que se ha revisado los cursos aprobados del primer año y el Diseño de Investigación del estudiante **Rodrigo Escobar Coronado** con carné número **2007-15287**, quien optó la modalidad del "PROCESO DE GRADUACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA OPCIÓN ESTUDIOS DE POSTGRADO". Previo a culminar sus estudios en la **Maestría de Ingeniería en Mantenimiento**.

Y si habiendo cumplido y aprobado con los requisitos establecidos en el normativo de este Proceso de Graduación en el Punto 6.2, aprobado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería en el Punto Decimo, Inciso 10.2, del Acta 28-2011 de fecha 19 de septiembre de 2011, firmo y sello la presente para el trámite correspondiente de graduación de Pregrado.

Sin otro particular, atentamente,

"Id y enseñad a todos"

Msc. Ing. Angel Enrique López Flores  
Asesor (a)

*Angel Enrique Lopez Flores*  
Ingeniero Mecánico Electricista  
Colegiado NO. 11294

*César Akú Castillo MSc.*  
INGENIERO INDUSTRIAL  
COLEGIADO No. 4,073

Msc. Ing. César Augusto Akú Castillo  
Coordinador de Área  
Gestión y Servicios

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes  
Directora Escuela de Estudios de Postgrado



Cc: archivo  
/db



FACULTAD DE INGENIERIA

MSc. Ing. César Augusto Akú Castillo  
Coordinador del Área Gestión y Servicios  
Presente.

Estimado Coordinador:

Reciba un cordial y atento saludo, a la vez aprovecho la oportunidad para hacerle de su conocimiento que he revisado el Diseño de Investigación titulado: **PROPUESTA DE APLICACIÓN DEL MODELADO DE MOTORES DE INDUCCIÓN AL MANTENIMIENTO PREDICTIVO**, del estudiante **Rodrigo Escobar Coronado**, quien se identifica con número de carné 2007-15287 y como Director de la Escuela Mecánica Eléctrica, doy el aval correspondiente para la aprobación del mismo.

Sin otro particular, atentamente.

ID Y ENSEÑAD A TODOS

  
Ing. Guillermo Antonio Puentes Romero  
Director  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica



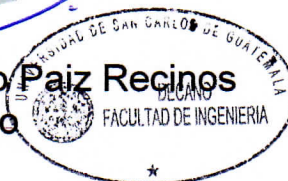
SRO



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, al trabajo de graduación titulado: **DISEÑO DE INVESTIGACIÓN DE LA APLICACIÓN DEL MODELADO EN EL MONITOREO DE CONDICIÓN DE MOTORES DE INDUCCIÓN EN PLANTA SAN MIGUEL**, presentado por el estudiante universitario: **Rodrigo Escobar Coronado** y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, se autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
Decano



Guatemala, julio de 2014

/cc

## **AGRADECIMIENTOS A:**

<b>Mis padres</b>	Por su constante apoyo durante la carrera.
<b>Mis hermanos</b>	Por su compañía.
<b>Mi abuela</b>	Por sus valiosos consejos.
<b>Mis compañeros de la Facultad</b>	Por acompañarme en las vicisitudes de la carrera.



## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	III
LISTA DE SÍMBOLOS .....	V
GLOSARIO .....	VII
RESUMEN.....	IX
OBJETIVOS.....	XI
INTRODUCCIÓN .....	XIII
ANTECEDENTES.....	XV
JUSTIFICACIÓN.....	XVII
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	XIX
ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN.....	XXI
1. LA MÁQUINA ASÍNCRONA.....	1
1.1. Partes de un motor de inducción.....	2
1.2. Relaciones elementales del motor de inducción.....	4
1.3. Modelo del circuito equivalente .....	5
1.4. Análisis del circuito equivalente por fase .....	9
1.5. Aplicación del circuito equivalente.....	12
1.5.1. Eficiencia con alimentación balanceada .....	12
1.5.2. Determinación del torque nominal, de arranque y máximo .....	15
1.5.3. Curva característica par-velocidad .....	17
1.6. Operación sin alimentación balanceada.....	20
1.6.1. Alimentación desequilibrada .....	20
1.7. Armónicas.....	24

2.	MODELO DINÁMICO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN .....	29
2.1.	Principios de la máquina generalizada .....	29
2.2.	Generalidades de la maquinaria trifásica .....	36
2.2.1.	Campo giratorio en el estator .....	36
2.2.2.	Transformación de coordenadas .....	38
2.2.3.	Modelo dinámico del motor de inducción .....	44
	METODOLOGÍA A UTILIZAR Y TÉCNICAS CORRESPONDIENTES.....	53
	MÉTODOS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.....	55
	RECURSOS FÍSICOS Y FINANCIEROS NECESARIOS PARA LA EJECUCIÓN Y FACTIBILIDAD DEL ESTUDIO .....	57
	CRONOGRAMA .....	59
	BIBLIOGRAFÍA.....	61

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

### FIGURAS

1.	Partes de un motor de inducción .....	2
2.	Ranuras abiertas y cerradas en rotor de jaula de ardilla.....	3
3.	Conceptualización para modelar el motor de inducción.....	5
4.	Circuito equivalente por fase del motor de inducción.....	6
5.	Circuito equivalente por fase del motor de inducción referido al estator.....	8
6.	Circuito equivalente del motor de inducción.....	8
7.	Circuito equivalente aproximado por fase del motor de inducción .....	11
8.	Diagrama de flujo de potencia en el motor.....	15
9.	Curva par-deslizamiento según fórmula aproximada .....	19
10.	Secuencias positiva y negativa .....	21
11.	Circuito de secuencia negativa .....	23
12.	Circuito de secuencia cero.....	24
13.	Modelo del motor de inducción para la tercera armónica.....	25
14.	Modelo del motor de inducción para la quinta armónica y para la séptima armónica.....	27
15.	Vector espacial .....	47

### TABLAS

I.	Ejemplo de datos para un motor de inducción .....	18
II.	Recursos.....	60



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
A	Ampere, unidad de medida de la intensidad de corriente eléctrica.
Hz	Frecuencia, en ciclos por segundo.
L	Inductancia, en henrios.
$\vec{E}$	Intensidad de campo eléctrico, en voltios sobre metro.
$\vec{H}$	Intensidad del campo magnético, en amperes sobre metro.
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío
P	Potencia, unidades en Watts.
$\Omega$	Resistencia, en ohmios.



## GLOSARIO

<b>Corolario</b>	Es una consecuencia evidente de un teorema matemático o lógico que no necesita demostración.
<b>Fasor</b>	Número complejo que representa la magnitud y la fase de una onda senoidal, puede expresarse en forma exponencial o en forma polar.
<b>Permeabilidad</b>	Inductancia por unidad de longitud.
<b>Permitividad</b>	Constante física que describe como un campo es afectado por un medio. Está determinada por la tendencia del material a polarizarse.
<b>Reluctancia</b>	Es una analogía de la resistencia en los circuitos magnéticos. Se proporciona en ampere-vueltas/weber.





## RESUMEN

En la investigación se propone abordar el campo del análisis de condición de la máquina de inducción a través de métodos analíticos basados en el análisis de la alimentación; estableciendo las condiciones a detectar mediante el modelado del comportamiento del motor. La investigación no pretende abordar en forma exhaustiva el análisis de señal, sino establecer la utilidad del desarrollo de un modelo fiable para máquinas eléctricas en operación. Estos dos campos no son excluyentes, más se ha preferido el enfoque del modelado. Los primeros apartados corresponden al desarrollo teórico de los fundamentos de la investigación.

Se establecen los modelos del motor a utilizar, sus orígenes, limitaciones, y aplicaciones; junto con una descripción de las condiciones menos que ideales que afectan dicha maquinaria. Sucesivamente se desarrollará un análisis más completo de la relación entre el mantenimiento predictivo y el modelado de la máquina de inducción; ejemplificándose los modelos más útiles y las fallas eléctricas más comunes.

Los procesos matemáticos a desarrollar son varios. Primero se presentarán algoritmos para encontrar el modelo de la maquinaria con cierta precisión. Después, dado un modelo determinado, se simulará el efecto de las fallas. Con los resultados obtenidos se intentará detectar fallas incipientes en motores en operación en una instalación industrial.



# OBJETIVOS

## General

Validar el modelado de la máquina de inducción como un método del mantenimiento planificado.

## Específicos

1. Identificar las fallas más frecuentes y condiciones indeseables de operación del motor de inducción.
2. Establecer los modelos de la máquina asíncrona más viables para su uso en el campo del mantenimiento.
3. Aplicar el monitoreo y la simulación a la detección temprana de fallas o condiciones no ideales en el motor con datos reales de operación de maquinaria en la planta San Miguel.



## INTRODUCCIÓN

La ingeniería eléctrica moderna se apoya ampliamente en la modelación para la toma de decisiones sobre equipos y sistemas. Es posible simular desde el comportamiento de circuitos electrónicos de baja potencia hasta la operación del Sistema Nacional Interconectado (SNI). El modelo matemático se adecua a una representación gráfica para la rápida visualización de los resultados de interés.

En la planta productora de cemento San Miguel de Cementos Progreso se tiene un sistema de mantenimiento avanzado sobre la maquinaria crítica. Los motores eléctricos son abundantes en la planta. Las unidades grandes se monitorean constantemente (aunque no permanentemente) y se programa su mantenimiento si se detecta una desviación del comportamiento normal en el momento de la inspección. Esto es mantenimiento correctivo planificado. El mantenimiento preventivo y el mantenimiento correctivo no planificado son inusuales. En el caso de maquinaria no crítica (equipos más pequeños generalmente) se espera a que el elemento falle y se reemplaza inmediatamente por un equivalente del *stock* de repuestos.

La aplicación del monitoreo de condición y la obtención de un modelo de la maquinaria conllevan las oportunidades de aumentar el conocimiento institucional de la maquinaria, incrementar la confiabilidad del equipo y la posibilidad de realizar simulaciones independientes experimentales sobre ordenadores antes de hacer cambios en la vida real.

La finalidad del presente texto es introducir al lector a diferentes aplicaciones del modelado de motores y el monitoreo de condición en una planta industrial, en aras de probar la importancia de este innovador campo.

Se espera evidenciar las aplicaciones del análisis matemático al mantenimiento predictivo de la maquinaria eléctrica; aumentando el nivel de control sobre las variables que afectan su desarrollo y finalmente incrementando su disponibilidad.

Capítulo 1. La máquina asíncrona. Se presenta la teoría clásica del convertidor, se desarrolla el modelo equivalente por fase y se exponen sus aplicaciones.

Capítulo 2. Modelado avanzado de la máquina asíncrona. En este apartado se desarrollan los modelos dinámicos y se exponen sus aplicaciones. El capítulo se enfoca en el motor de inducción en su función de motor.

Capítulo 3. Aplicación del modelado al monitoreo de maquinaria eléctrica. Se aplican ahora los modelos a casos específicos para probar su utilidad práctica en motores seleccionados de la planta San Miguel.

## ANTECEDENTES

El motor de inducción es el tema de muchas discusiones e investigaciones científicas en la actualidad; a pesar de ser uno de los convertidores más robustos, eficientes y con menos mantenimiento requerido. Esto se debe a la generalidad de su uso, a la variedad de cargas que impulsa y a los cambios en las tecnologías con las que el motor interacciona; como por ejemplo el amplio avance de la electrónica de potencia y el control digital.

La teoría de la maquinaria eléctrica puede ser dividida en tres etapas (Kopylov, 1984, p. 12-13). Correspondiendo la primera a la invención del convertidor, junto con la teoría elemental de la conversión de energía eléctrica; la segunda abarca el análisis en régimen permanente, circuitos equivalentes y diagramas fasoriales; la tercera implica el establecimiento de modelos con ecuaciones diferenciales y el análisis de transitorios en el motor.

El análisis de las máquinas eléctricas y sus posibles aplicaciones es un tema en constante desarrollo alrededor del globo. Dentro de las fuentes más importantes de la investigación se encuentran las aportaciones de: I. P. Kopylov (1984). Publicado en la antigua Unión Soviética; el cual aborda los motores desde una perspectiva matemática. Aller (2007) es un excelente recurso en lengua castellana sobre la teoría general de la maquinaria eléctrica. El profesor Aller es catedrático de la Universidad Simón Bolívar y ha publicado libros, tesis y artículos sobre temas actuales en ingeniería eléctrica. En Hamid Toliyat, otros (2013); el modelado se aplica al diagnóstico y monitoreo de condición de los motores eléctricos.

Para citar antecedentes inmediatos de la investigación:

- Aller, José Manuel (2007). Máquinas Eléctricas Rotativas: Introducción a la Teoría General. Editorial Equinoccio de la Universidad Simón Bolívar. República Bolivariana de Venezuela.
- Hamid A. Toliyat, Subhasis Nandi, Seungdeog Choi, Homayoun Meshgin-Kelk (2013), Electric Machines Modeling, Condition Monitoring and Fault Diagnosis. CRC Press. Boca Ratón, Florida, EEUU.
- Fuchs, Ewald F. y Masoum, Mohammad (2008). Power Quality in Power Systems and Electrical Machines. Academic Press, EEUU.
- Emadi, Ali (2005). Energy-Efficient Electric Motors. Tercera Edición. Editorial Marcel Dekker, Inc. New York, EEUU.
- Ong, Chee-Mun (1998). Dynamic Simulation of Electric Machinery. Editorial Prentice Hall. EEUU.

La ejemplificación anterior ilustra varios aspectos pertinentes a la investigación: el desarrollo de modelos y su aplicación específica al diagnóstico de la condición de motores de inducción. Existen otras ramas académicas como la aplicación de controles electrónicos, el uso de generadores de frecuencia variable y el diseño de máquinas de alta eficiencia; las cuales quedan fuera del alcance de la investigación. La breve lista ejemplifica además que este campo de investigación es actual.

En la planta San Miguel se registran paros en los motores eléctricos debidos principalmente a golpes de corriente ocasionados por la red interna o la red externa. Durante los paros generales se revisan los motores fuera de operación. No se han implementado sistemas de monitoreo en línea en los equipos que no hayan tenido esta función integrada. Por lo que hay una oportunidad de mejora en las técnicas diagnósticas y el conocimiento institucional.



## JUSTIFICACIÓN

Las líneas de investigación corresponden a mantenimiento predictivo y análisis de fallas (Escuela de Pregrado) y análisis y simulación de máquinas eléctricas (Escuela Mecánica-Eléctrica).

La tendencia actual del mantenimiento es llevar las estadísticas de fallas, defectos, accidentes e inventario lo más cercanas a cero posible. La evolución natural del mantenimiento lo ha llevado desde las acciones puramente correctivas, a rutinas de mantenimiento preventivas e inspecciones regulares, hasta el mantenimiento predictivo basado en el monitoreo de condición en línea.

El monitoreo de condición en los motores de inducción conlleva un monitoreo de la red eléctrica. Un cambio que puede llevar al refinamiento del suministro eléctrico mediante la detección temprana de cualquier desviación de sus parámetros normales.

La investigación se justifica como uno de los pasos previos en el análisis de un proyecto de monitoreo de condición mediante parámetros eléctricos de motores de inducción seleccionados. Siendo además útil como un punto de referencia para investigaciones más complejas o complementarias como parte del conocimiento académico o institucional.

Respecto a las políticas actuales de mantenimiento la planta San Miguel emplea varias técnicas de análisis reconocidas como el análisis termográfico y el análisis de vibraciones. Las conclusiones de la investigación no sustituirán dichos esfuerzos sino que será complemento y soporte para las conclusiones

alcanzadas mediante otros medios. De manera reactiva el monitoreo de motores podría contribuir además al análisis de causa raíz de las fallas inesperadas; al proveer una fuente adicional de información.

La posibilidad de simulación proactiva de condiciones adversas en el motor puede servir de base para estudios sobre calidad de la energía y protección avanzada de motores.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las fallas en la planta San Miguel no son frecuentes. Más este hecho no excusa al personal de mantenimiento de buscar la mejora continua y averiguar la causa raíz de los eventos ocurridos para prevenir su recurrencia. En el período de 2010 a 2013 ocurrieron alrededor de 70 paradas de motores eléctricos en la planta. En el caso de motores pequeños no críticos, no se efectúa mantenimiento y se operan hasta la falla, para ser reemplazado por unidades equivalentes en el *stock* de repuestos.

Constantemente se busca reducir el número de paradas no previstas para incrementar la disponibilidad del equipo. Estrategias como equipos redundantes y reemplazo a la falla pueden dar paso progresivamente a un mantenimiento predictivo de los equipos.

El aumento de la complejidad del control sobre las máquinas eléctricas, la diversificación de la carga y la interacción con sistemas externos puede incrementar en el futuro la cantidad de eventos negativo sobre la calidad de suministro eléctrico, lo que puede elevar la tasa de paros imprevistos y disminuir la eficiencia de los motores de inducción. Un monitoreo de condición mostraría inmediatamente dichos eventos y una simulación podría indicar al personal las contingencias de falla ocasionadas por situaciones fuera de su control. Las soluciones actuales son funcionales, más son susceptibles de mejoras.

Las principales preguntas de investigación son: ¿por qué fallan los motores?, ¿qué técnicas de análisis pueden aplicarse para diagnosticar la máquina de inducción?, ¿puede dichas técnicas aplicarse en el mantenimiento planificado de los motores?

## ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

Se delimita el estudio a la máquina asíncrona trifásica de jaula de ardilla. Excluyendo motores síncronos y de corriente directa. Los resultados enfocados serán aquellos pertinentes al diagnóstico de condición del motor, obviando los textos enfocados al diseño.

El estado del arte del conocimiento sobre el tema de investigación del presente escrito está aún en desarrollo como puede apreciarse en la fecha de publicación de las fuentes bibliográficas. Si bien el conocimiento no puede considerarse completo, ha demostrado su utilidad. Los obstáculos en la complementación de esta teoría incluyen las siguientes limitaciones: falta de datos exactos de fabricación por cuestiones de *copyright*; limitaciones computacionales; asunciones hechas para reducir la complejidad de los modelos; efectos de la saturación; entre otros factores.

El estudio tiene un carácter mixto explorativo-descriptivo para la literatura técnica de la Universidad de San Carlos. El conocimiento está aún en desarrollo y aún no se ha incorporado en el ámbito nacional. El carácter descriptivo proviene de la certeza sobre qué variables están relacionadas a través de las ecuaciones de conversión de energía.

El estudio tiene dos fases. La primera implica el desarrollo de las herramientas analíticas para pertinentes al motor de inducción. La segunda aplica las herramientas a casos específicos con el fin de contribuir al diagnóstico. Los resultados para los motores tratados son representativos para

cualquier máquina en general siempre que se cuente con los datos suficientes para construir el modelo y aplicarlo.

# 1. LA MÁQUINA ASÍNCRONA

La relevancia de las máquinas eléctricas en la sociedad moderna es descrita acertadamente por Tong (2014, p. 1) mediante los siguientes datos:

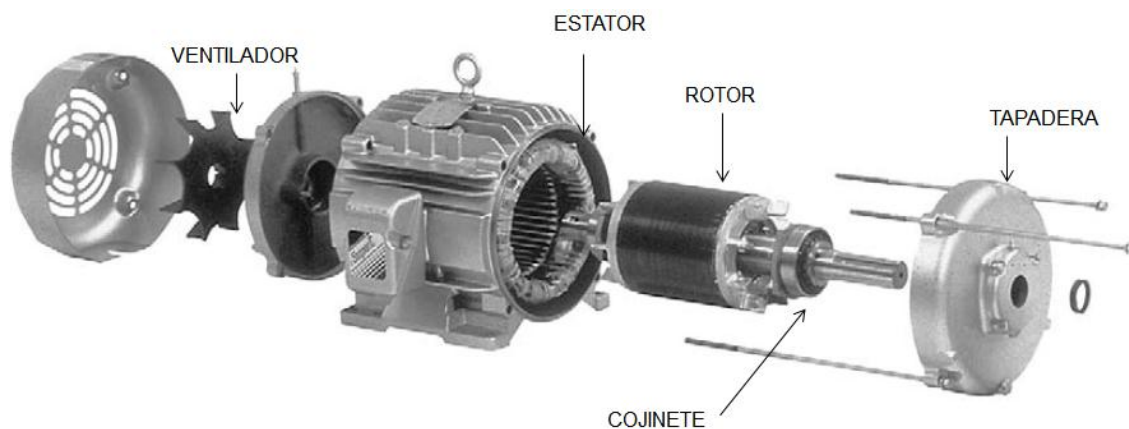
- El 45 % de la energía eléctrica producida a nivel mundial es consumida por motores eléctricos.
- En el 2030 la energía consumida por motores eléctricos estará alrededor de 13 360 Tera vatios hora (TWh).
- En China 60 % de la energía generada anualmente se emplea en motores eléctricos.

El estudio de la eficiencia y el mantenimiento de las máquinas eléctricas tiene relevancia por su constante y prolifera presencia desde el nivel industrial particular hasta el nivel del sistema de potencia del país. Para formar una idea de cuan eficiente es actualmente el diseño de los motores eléctricos téngase presente que el 95 % de su costo de operación lo constituye el precio de la energía eléctrica consumida (Tong, 2014, p. 1).

Una máquina eléctrica es un convertidor que trabaja entre dos formas de energía siendo una de ellas la energía eléctrica (Chapman, 2005, p. 1), así se denominan motores a las máquinas que convierten energía eléctrica en mecánica; caso contrario es el de los generadores, que convierten la energía mecánica en eléctrica. Una tercera máquina es el transformador que acopla magnéticamente dos circuitos eléctricos con características eléctricas distintas, pero la misma potencia.

Las máquinas se pueden clasificar también como síncronas y asíncronas (Chapman, 2005, p. 230). Las máquinas síncronas son doblemente excitadas y las máquinas asíncronas sólo reciben energía eléctrica en uno de sus campos, generando el otro por inducción. Razón por lo que son denominadas también máquina de inducción.

Figura 1. **Partes de un motor de inducción**



Fuente: Wildi Theodore. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*, página 264.

### 1.1. **Partes de un motor de inducción**

La parte estacionaria de un motor se denomina estator, el cual se conforma un núcleo magnético de alta permeabilidad conformado por láminas de acero (Guru, 2003, p. 510). El bastidor soporta al estator pero no forma parte del circuito magnético.

El rotor es la parte móvil y también se encuentra laminado. Existen dos tipos de rotores: el devanado y el motor en corto-circuito o de jaula de ardilla (Guru, 2003, p. 510.) El motor de rotor devanado se utiliza para acceder al

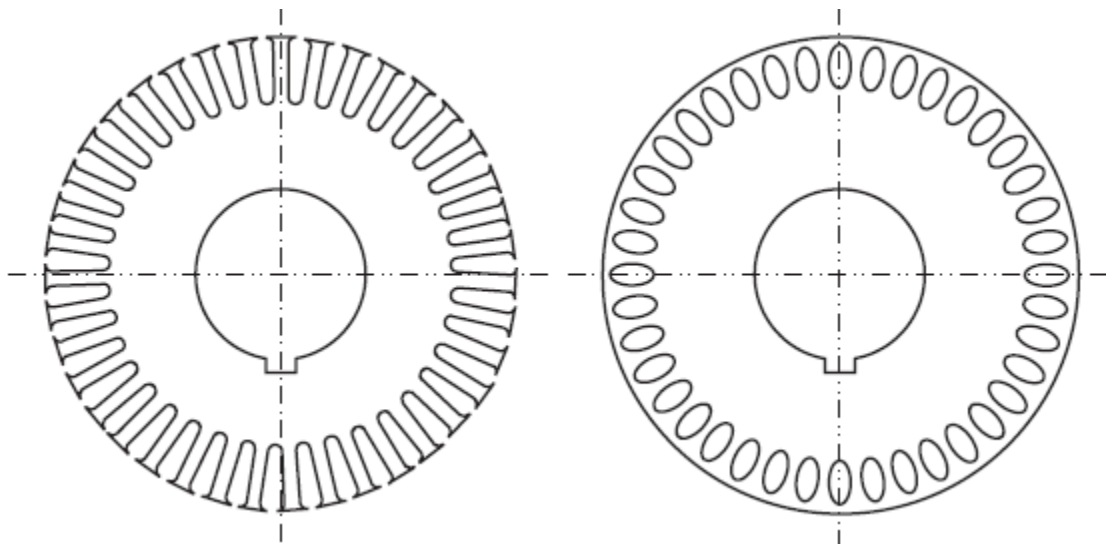


circuito del rotor con el propósito de cambiar su característica de arranque, su uso es limitado y queda fuera de los objetivos de esta investigación.

El rotor de jaula de ardilla se conforma de una serie de barras sólidas dispuestas dentro de un núcleo devanado, cortocircuitos en sus extremos por anillos (Chapman, 2005, p. 380). El cobre y el aluminio son los constituyentes principales del motor.

Las ranuras del rotor de jaula de ardilla pueden ser abiertas o cerradas (Tong, 2004, p. 85). Las ranuras abiertas presentan un menor flujo de pérdidas mientras que las ranuras cerradas se adaptan mejor a la presencia de inversores. En la figura contigua se ilustra esta diferencia en la construcción del motor.

Figura 2. **Ranuras abiertas y cerradas en rotor de jaula de ardilla**



Fuente: Tong, Wei. *Mechanical design of electrical motors*, página 85.

## 1.2. Relaciones elementales del motor de inducción

Se introducen ahora relaciones matemáticas necesarias para el análisis del motor de inducción. Dichas relaciones son comunes en la literatura académica, se toma como base a Trzynadlowski (2001, p.17-41), Chapman (2005, p. 385-419) y Cruz (2008, p.68-103) para las ecuaciones 1.1 a 1.30; aunque los subíndices se cambian para evitar futuras confusiones. La primera es la velocidad de rotación del campo magnético, conocida también como velocidad síncrona:

$$n_{sinc} = \frac{120f_e}{P} [RPM] \text{ (ecuación 1.1)}$$

Donde  $f_e$  es la frecuencia del suministro eléctrico (60 hercios) y  $P$  es el número de polos de la máquina asíncrona. A continuación se define la velocidad de deslizamiento como la diferencia entre la velocidad del campo y la velocidad del rotor de la máquina:

$$n_{des} = n_{sinc} - n_m [RPM] \text{ (ecuación 1.2)}$$

Con las anteriores definiciones se establece el parámetro adimensional de deslizamiento:

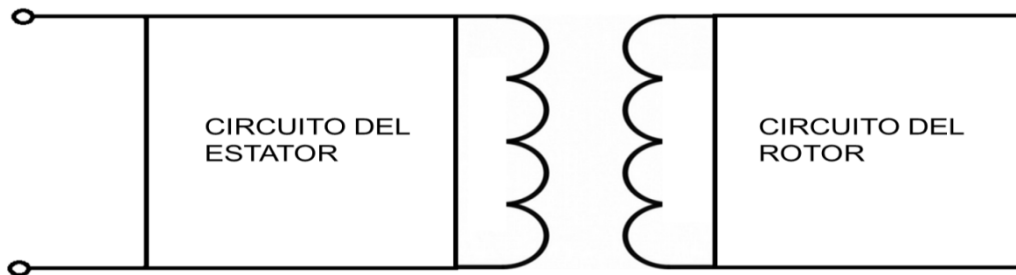
$$s = \frac{n_{sinc} - n_m}{n_{sinc}} \times 100\% = \frac{\omega_{sinc} - \omega_m}{\omega_{sinc}} \times 100\% \text{ (ecuación 1.3)}$$

Se puede calcular el deslizamiento con las velocidades expresadas en revoluciones por minuto o en radianes por segundo.

### 1.3. Modelo del circuito equivalente

El modelo más general de la máquina se conoce como circuito equivalente por fase o modelo clásico. Se utiliza para modelar el régimen permanente de la máquina. Existen dos circuitos en la máquina acoplados magnéticamente por el principio de inducción. Para simular este acople se utiliza un transformador ideal (Cruz, 2008, p. 75).

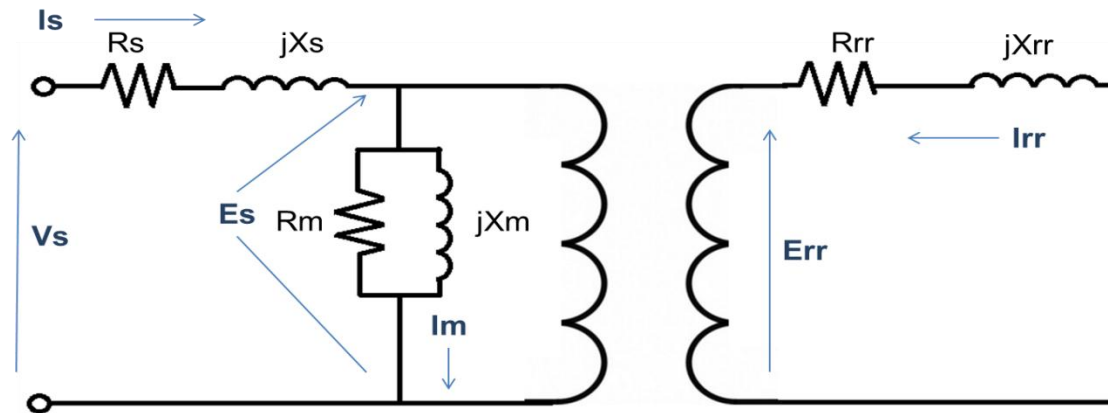
Figura 3. **Conceptualización para modelar el motor de inducción**



Fuente: elaboración propia.

El transformador no posee núcleo, puesto que el enlace magnético se efectúa a través del entrehierro. El metal que forma los devanados presenta una resistencia. El flujo que no enlaza entre los dos circuitos se representa como una inductancia en los dos circuitos. El transformador no es ideal y se añade la rama en paralelo que modela su magnetización (Cruz, 2008, p. 74).

Figura 4. Circuito equivalente por fase del motor de inducción



Fuente: elaboración propia.

Este es un circuito por fase, las tres fases pueden simularse de la misma manera. No obstante el circuito aún no resulta útil. El circuito del rotor no tiene salidas (se trata aquí el motor de jaula, mucho más popular que su contraparte bobinada) y no pueden averiguarse sus parámetros mediante pruebas. Otro factor importante es que en ambos circuitos circulan corrientes con frecuencia diferente. Esto se debe a que el rotor está girando y su velocidad relativa varía dentro de ciertos parámetros restringidos, lo que hace que la frecuencia del voltaje inducido varíe y junto con ella la de la corriente. Es posible conocer la frecuencia del rotor si se conoce su velocidad, según la siguiente expresión, que puede verificarse en Chapman (2005, p. 387):

$$f_r = sf_e = \frac{P}{120}(n_{sinc} - n_m) \text{ [Hz]} \text{ (ecuación 1.4)}$$

Como en el análisis del transformador se refiere un circuito desde el punto de vista del otro mediante la relación de transformación. Es el circuito del secundario el cual se refiere al primario, dado que este tiene una salida a la red

eléctrica sobre la cual se pueden efectuar mediciones. Las relaciones de potencia serán inalteradas por el proceso de referencia. Con este proceso se elimina el transformador ideal entre los dos circuitos.

Una modificación adicional debe realizarse con el fin de mejorar la utilidad del modelo. Considere el circuito del rotor, la corriente viene dada por la expresión siguiente, que puede verificarse en Chapman (2005, p. 391):

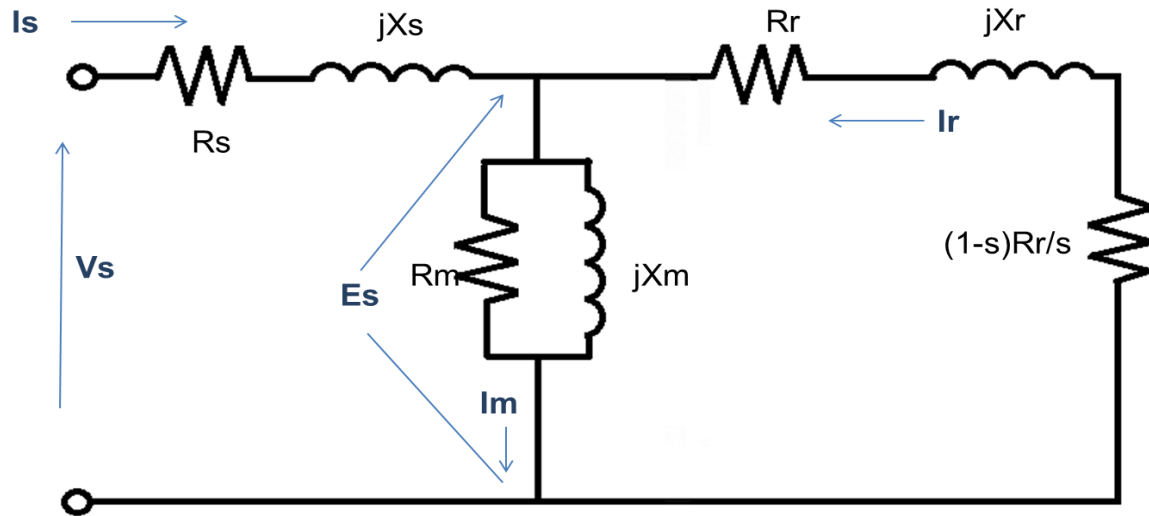
$$\vec{I}_{rr} = \frac{s\vec{E}_{rr}}{R_{rr} + jsX_{rr}} = \frac{1/s}{1/s} \times \frac{s\vec{E}_{rr}}{R_{rr} + jsX_{rr}} = \frac{\vec{E}_{rr}}{\frac{R_{rr}}{s} + jX_{rr}} [A] \text{ (ecuación 1.5)}$$

Posteriormente separamos el término sujeto a cambios en una parte constante y una variable para modelar las pérdidas resistivas en el rotor y la potencia mecánica entregada por el eje de la máquina, dicha potencia es una potencia real y naturalmente se halla representada por una resistencia en el circuito eléctrico equivalente por fase. La ecuación puede verificarse en Chapman (2005, p. 398).

$$\frac{R_{rr}}{s} = \left(\frac{1-s}{s}\right)R_{rr} + R_{rr} [\Omega] \text{ (ecuación 1.6)}$$

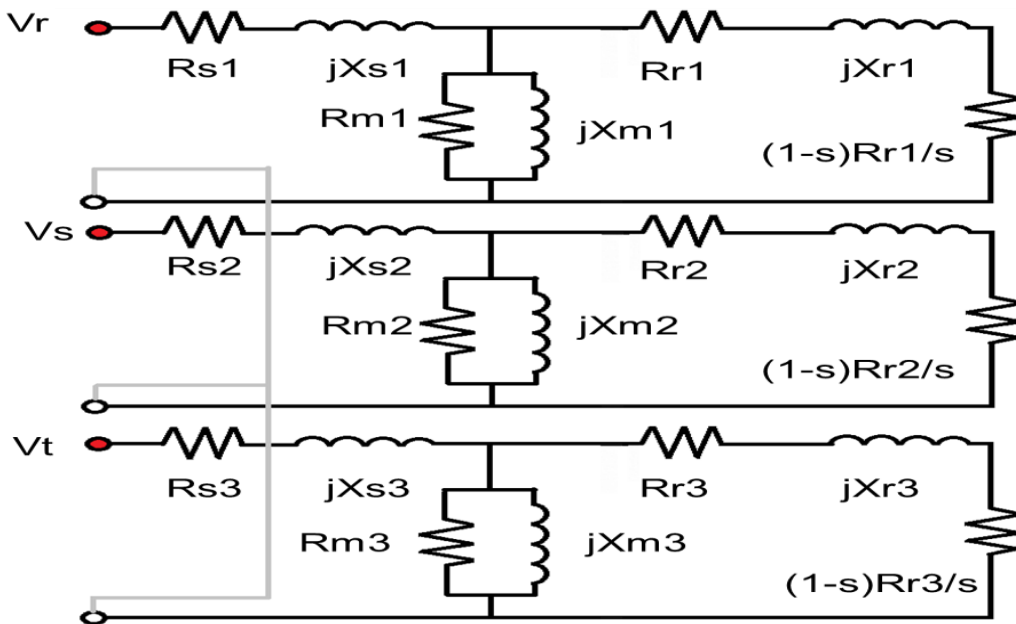
Incorporando las anteriores convenciones al modelo se obtiene el circuito mostrado en la figura inferior. Se han cambiado los subíndices en el circuito del rotor puesto que ahora estas cantidades se encuentran referidas al circuito del estator. La relación de transformación generalmente no es conocida, más como no es necesaria para encontrar las relaciones de potencia se obvia en el modelo. El circuito resultante representa una fase del motor. Una representación completa del motor se muestra en la figura subsecuente.

Figura 5. Circuito equivalente por fase del motor de inducción referido al estator



Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Circuito equivalente del motor de inducción



Fuente: elaboración propia.

La figura muestra motor trifásico conectado en estrella. Este circuito no se utiliza, puesto que el análisis sobre el circuito por fase proporciona toda la información útil que se obtiene de este modelo.

#### 1.4. Análisis del circuito equivalente por fase

El análisis de mallas sobre las trayectorias cerradas a ambos lados de la reactancia de magnetización produce el siguiente sistema, verificable en Trzynadlowski (2001, p. 28):

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + jX_{es} & jX_m \\ jX_m & \frac{R_r}{s} + jX_{er} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_s \\ \vec{I}_r \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 1.7})$$

Donde  $X_{es}=X_s+X_m$  y  $X_{er}=X_r+X_m$ . Este es el modelo matemático obtenido con el circuito equivalente por fase del motor de inducción.

Las relaciones más generales y significativas se exponen a continuación. La potencia de entrada para un circuito trifásico balanceado viene dada por la expresión, verificable en Trzynadlowski (2001, p. 31):

$$P_i = 3 \times Re\{\vec{V}_s \vec{I}_s^*\} \quad [kW] \quad (\text{ecuación 1.8})$$

La potencia de salida viene dada por la conocida relación de la dinámica. Obsérvese que una potencia eléctrica a la entrada produce una potencia mecánica a la salida como producto de la conversión de energía, la ecuación puede verificarse en Chapman (2005, p. 405):

$$P_o = T_m \omega_m \quad [Hp] \quad (\text{ecuación 1.9})$$

Donde  $T_m$  es el torque entregado por la máquina y  $\omega$  su velocidad angular. La potencia tiene unidades de vatios [W], no obstante la potencia eléctrica suele expresarse en kW (1 000 W) y la potencia mecánica en caballos de potencia. La relación entre caballos de potencia y kilovatios es la siguiente:

$$1 [Hp] \cong 0,746 [kW] \quad (\text{ecuación 1.10})$$

Del modelo del motor de inducción obtenido en secciones anteriores, se extrae el hecho que la potencia que puede proporcionar el motor corresponde a la potencia disipada por el resistor que modela la carga del motor. Dicha potencia viene dada por la expresión, verificable en Chapman (2005, p. 397):

$$P_{conv} = 3I_r^2 R_r \left( \frac{1-s}{s} \right) [kW] \quad (\text{ecuación 1.11})$$

Esta potencia no es exactamente igual a la potencia de salida, puesto que hay pérdidas varias (sobre todo la fricción con el aire) que disminuyen el valor de la potencia disponible en el eje de la máquina. Esta potencia se denomina potencia convertida en la bibliografía.

La corriente en el rotor es un parámetro importante para el análisis del circuito equivalente de la máquina. Para el circuito equivalente por fase la magnitud de la corriente vendrá dada por la expresión siguiente, que puede verificarse en Chapman (2005, p. 396):

$$|I_r| = \frac{|V_s|}{\left| R_s + jX_s + \frac{1}{\frac{R_r}{s} + jX_r} + \frac{1}{R_M} - \frac{1}{X_M} j \right|} [A] \quad (\text{ecuación 1.12})$$

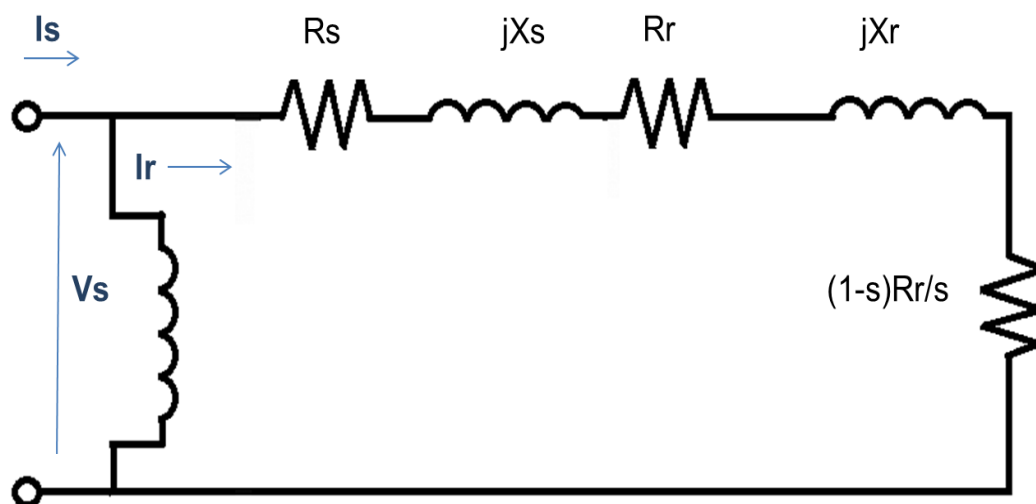


El análisis puede simplificarse sacrificando un poco de precisión. La resistencia de la rama en paralelo es difícil de estimar y su omisión no introduce errores de gran magnitud (Chapman, 205, p. 406); por lo que se retira del circuito equivalente por fase. La caída de voltaje en la rama del estator no es muy grande y suele trasladarse la rama en paralelo a los terminales de la fase. Estas convenciones hacen al circuito más inexacto, pero mucho más fácil de analizar, aplicándolas se obtiene el circuito equivalente aproximado por fase del motor de inducción.

Para el circuito equivalente simplificado se obtiene la corriente en la rama del rotor mediante la expresión siguiente, verificable en Chapman (2005, p. 408):

$$|I_r| = \frac{|V_s|}{\left| R_s + \frac{R_r}{s} + j(X_s + X_r) \right|} \text{ [A]} \text{ (ecuación 1.13)}$$

Figura 7. **Circuito equivalente aproximado por fase del motor de inducción**



Fuente: elaboración propia.

Se observa que con las simplificaciones adicionales el circuito es más sencillo de utilizar, aunque más inexacto.

## 1.5. Aplicación del circuito equivalente

El circuito equivalente es utilizado para analizar la máquina de inducción en régimen permanente; es decir que proporciona información útil para condiciones constantes en el tiempo. Entre las condiciones que pueden afectar la operación del convertidor se encuentran el desbalance de tensiones y el contenido de armónicos.

### 1.5.1. Eficiencia con alimentación balanceada

La eficiencia es uno de los temas de desarrollo en la actualidad debido al encarecimiento de los costos de producción de energía eléctrica y la creciente preocupación respecto de la sostenibilidad de los recursos energéticos. La expresión para la eficiencia corresponde a la razón entre la potencia de salida y la potencia de entrada:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \text{ (ecuación 1.14)}$$

La potencia de entrada es conocida. La potencia de salida es la potencia convertida menos la potencia de las pérdidas por fricción y misceláneas. (Chapman, 2005, p. 398):

$$P_o = P_{conv} - P_f - P_m = 3I_r^2 R_r \left( \frac{1-s}{s} \right) - (P_f + P_m) [kW] \text{ (ecuación 1.15)}$$

Se reescribe la expresión para la eficiencia:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{3 \times \text{Re}\{\vec{V}_s \vec{I}_s^*\}}{3I_r^2 R_r \left(\frac{1-s}{s}\right) - (P_f + P_m)} \quad (\text{ecuación 1.14})$$

Para comprender el flujo de potencia en el motor se suele recurrir a un diagrama. Ciertas cantidades se definirán para completar el diagrama de flujo de potencia. Las pérdidas en la resistencia del estator se expresan como:

$$P_{cs} = 3I_s^2 R_s \quad [kW] \quad (\text{ecuación 1.16})$$

En el sufijo se emplea la letra c, como abreviatura de *copper*, para indicar las pérdidas en el cobre. Una ecuación similar se utiliza para las pérdidas resistivas en el rotor:

$$P_{cr} = 3I_r^2 R_r \quad [kW] \quad (\text{ecuación 1.17})$$

Las pérdidas en el núcleo debido a corrientes parásitas se modelan con el auxilio de la resistencia  $R_m$ :

$$P_n = 3 \frac{E_s^2}{R_m} \quad [kW] \quad (\text{ecuación 1.18})$$

La potencia que atraviesa el entrehierro hacia el rotor es la potencia de entrada menos las pérdidas resistivas en el estator y las pérdidas en el núcleo. La expresión es verificable en Chapman (2005, p. 397).

$$P_{ag} = P_i - P_{cs} - P_n = 3 \times \text{Re}\{\vec{V}_s \vec{I}_s^*\} - 3I_s^2 R_s - 3 \frac{E_s^2}{R_m} \quad [kW] \quad (\text{ecuación 1.19})$$

Esta potencia también es la potencia disponible en la rama del rotor, por lo que se puede escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$P_{ag} = 3 \times \text{Re}\{\vec{V}_s \vec{I}_s^*\} - 3I_s^2 R_s - 3 \frac{E_s^2}{R_m} = 3I_r^2 \frac{R_r}{s} \text{ [kW]} \text{ (ecuación 1.19)}$$

La potencia disponible en la rama del rotor puede separarse en la potencia de pérdidas resistivas en el circuito del rotor:

$$\begin{aligned} P_{ag} &= 3 \times \text{Re}\{\vec{V}_s \vec{I}_s^*\} - 3I_s^2 R_s - 3 \frac{E_s^2}{R_m} \\ &= 3I_r^2 R_r + 3 \left( \frac{1-s}{s} \right) I_r^2 R_r \text{ [kW]} \text{ (ecuación 1.19)} \end{aligned}$$

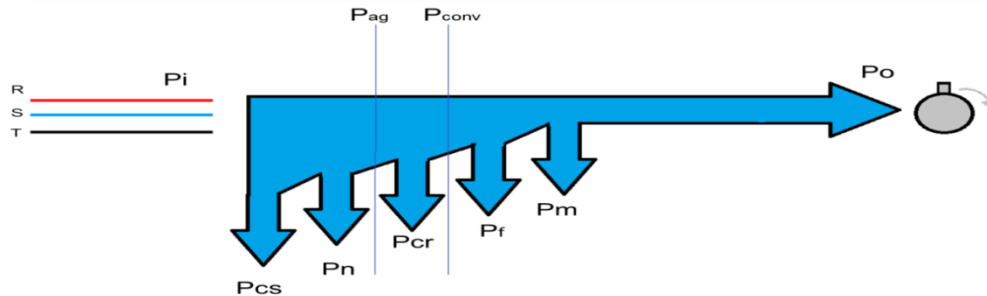
Con manipulación matemática se puede establecer que:

$$P_{cr} = sP_{ag} \text{ [kW]} \text{ (ecuación 1.20)}$$

$$P_{conv} = (1-s)P_{ag} \text{ [kW]} \text{ (ecuación 1.21)}$$

Como puede verificarse en Chapman (2005, p. 397). Con las anteriores cantidades se realiza el diagrama de flujo de eficiencia mostrado a continuación.

Figura 8. Diagrama de flujo de potencia en el motor



Fuente: elaboración propia.

### 1.5.2. Determinación del torque nominal, de arranque y máximo

El torque de desarrolla el motor durante el arranque, el torque máximo que alcanza y el torque nominal son cantidades útiles que también pueden estimarse con el circuito equivalente por fase el motor de inducción. El torque se obtiene de la expresión de la potencia de salida en el motor:

$$T_m = \frac{P_o}{\omega_m} \text{ [N * m]} \text{ (ecuación 1.22)}$$

Otro torque que puede calcularse es el torque inducido en el motor, el cual corresponde al torque de salida menos los torques de la fricción y rozamiento:

$$T_{ind} = T_m - T_f = \frac{P_{conv}}{\omega_o} = \frac{P_{ag}}{\omega_s} \text{ [N * m]} \text{ (ecuación 1.23)}$$

Se han utilizado resultados anteriores para simplificar la expresión anterior. El torque inducido es una primera aproximación al torque de salida.

Con el circuito equivalente aproximado, se puede obtener una expresión general para el torque, que puede verificarse en Cruz (2008, p. 82):

$$T_m \cong T_{ind} = \frac{P_{ag}}{\omega_s} = 3I_r^2 \frac{R_r}{s} \frac{1}{\omega_s} = \frac{3R_r}{s\omega_s} \left( \frac{|V_s|}{\left| R_s + \frac{R_r}{s} + j(X_s + X_r) \right|} \right)^2 [N * m] (ec 1.24)$$

La expresión se reescribe de la siguiente manera:

$$T_m \cong T_{ind} = \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{\frac{R_r}{s}}{\left( R_s + \frac{R_r}{s} \right)^2 + (X_s + X_r)^2} [N * m] (ecuación 1.24)$$

En el momento del arranque el deslizamiento equivale a la unidad, por lo que el par máximo estimado mediante el circuito equivalente aproximado es:

$$T_{m(st)} \cong T_{ind(st)} = \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{R_r}{(R_s + R_r)^2 + (X_s + X_r)^2} [N * m] (ecuación 1.25)$$

El par máximo se obtiene con el conocido método de la primera derivada, se dispondrá  $X_s + X_r = X_t$  y se utilizará como variable  $(R_r/s) = y$  para simplificar los cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{y}{(R_s + y)^2 + (X_t)^2} = 0 &\rightarrow \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{(R_s + y)^2 + (X_t)^2 - 2y(R_s + y)}{((R_s + y)^2 + (X_t)^2)^2} = 0 \\ &\rightarrow \frac{1}{(R_s + y)^2 + (X_t)^2} = \frac{2y(R_s + y)}{((R_s + y)^2 + (X_t)^2)^2} \rightarrow (R_s + y)^2 + (X_t)^2 \\ &= 2y(R_s + y) \rightarrow R_s^2 + y^2 + 2R_s y + X_t^2 = 2R_s y^2 + 2y^2 \rightarrow R_s^2 + X_t^2 \\ &= y^2 \quad (\text{desarrollo 1.26}) \end{aligned}$$

Con el anterior resultado se revierten las manipulaciones matemáticas y se obtiene:

$$\sqrt{R_s^2 + X_t^2} = \frac{R_r}{S_{Tm\acute{a}x}} \rightarrow S_{Tm\acute{a}x} = \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + (X_s + X_r)^2}} \quad (\text{ecuación 1.27})$$

Este resultado puede confirmarse en Cruz (2008, p. 82). Reemplazando el deslizamiento en el cual ocurre el par máximo en la ecuación del par se obtiene el par máximo:

$$\begin{aligned} T_{m(max)} &\cong T_{ind(max)} \\ &= \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{\sqrt{R_s^2 + (X_s + X_r)^2}}{(R_s + \sqrt{R_s^2 + (X_s + X_r)^2})^2 + (X_s + X_r)^2} [N * m] \quad (\text{ec. 1.28}) \end{aligned}$$

Para un cálculo rápido (aunque un poco más inexacto) se desprecia el valor de  $R_s$  y se obtiene:

$$T_{m(max)} \cong T_{ind(max)} = \frac{3V_s^2}{2\omega_s(X_s + X_r)} [N * m] \quad (\text{ecuación 1.29})$$

### 1.5.3. Curva característica par-velocidad

Una de las herramientas gráficas para el análisis del motor de inducción es la curva par-velocidad; en secciones anteriores se han obtenido expresiones para el par en función del deslizamiento. La expresión del torque se manipula para evitar la división por cero:

$$T_m \cong T_{ind} = \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{s^2}{s^2} \frac{\frac{R_r}{s}}{\left(R_s + \frac{R_r}{s}\right)^2 + (X_s + X_r)^2}$$

$$= \frac{3V_s^2}{\omega_s} \times \frac{sR_r}{(sR_s + R_r)^2 + s^2(X_s + X_r)^2} \quad [N * m] \text{ (ecuación 1.30)}$$

Con fines ilustrativos se proporciona la tabla I, la cual presenta los datos necesarios para el modelo para un motor de inducción trifásico.

Tabla I. **Ejemplo de datos para un motor de inducción**

(Valores por fase)

Parámetro	Valor	
Potencia nominal	$P_{nom}$	30hp (22,4 kW)
Voltaje	$V_s$	230 V
Corriente	$I_s$	39,5 A
Frecuencia	Hz	60
Deslizamiento nominal	$s_{nom}$	0,027
Torque nominal	$T_{nom}$	183Nm
Polos	$p$	12
Resistencia del estator	$R_s$	0,294Ω
Reactancia del estator	$X_s$	0,524Ω
Resistencia del rotor	$R_r$	0,156Ω
Reactancia del rotor	$X_r$	0,279Ω
Reactancia de magnetización	$X_m$	15 457Ω
Inercia del rotor	$J_m$	0,4kg*m <sup>2</sup>

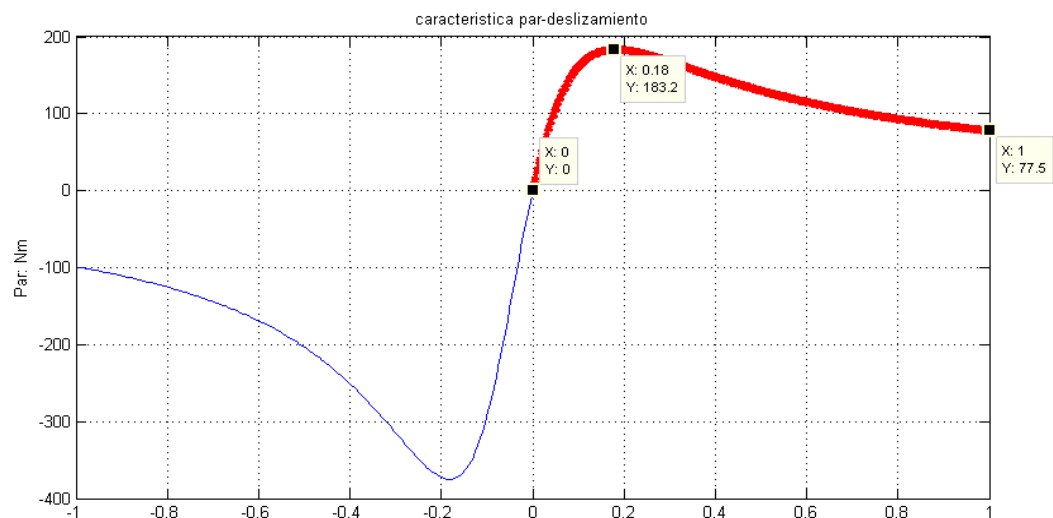
Fuente: Trzynadlowski, Andrzej M. *Control of induction motors*. (2001) página 32.



Con respecto a los valores anteriores una especificación es necesaria, las reactancias que se utilizan en el modelo representan el flujo que no se encadena magnéticamente entre los dos circuitos, se denominan reactancias de fuga o *leakage*. Las reactancias totales de los devanados son parámetros diferentes.

Con los parámetros anteriores graficamos la curva par-velocidad.

Figura 9. **Curva par-deslizamiento según fórmula aproximada**



Fuente: elaboración propia.

La parte roja es el comportamiento como motor y la parte azul es el comportamiento como generador. La gráfica muestra ciertos puntos de interés: el par de arranque es 77,5 Nm, el par máximo 183,2 Nm y el par cuando la velocidad del rotor alcanza la velocidad del campo magnético es 0. Entre cero deslizamiento y el deslizamiento correspondiente al par máximo el motor está en una zona estable. Entre el arranque y el deslizamiento correspondiente al par máximo el motor está en una zona inestable.

## 1.6. Operación sin alimentación balanceada

El modelo del circuito equivalente es útil también para analizar la máquina de inducción en régimen permanente ante fuentes de alimentación no ideales. Existen varios eventos adversos a la calidad de la energía. Se analizarán aquellos más relevantes a juicio del autor.

### 1.6.1. Alimentación desequilibrada

Una fuente trifásica equilibrada tiene un desfase constante entre sus fases y un valor eficaz constante. El análisis inicial se realiza bajo la suposición de que la fuente de alimentación está equilibrada. En la realidad es posible que existan condiciones de desequilibrio en el alimentador.

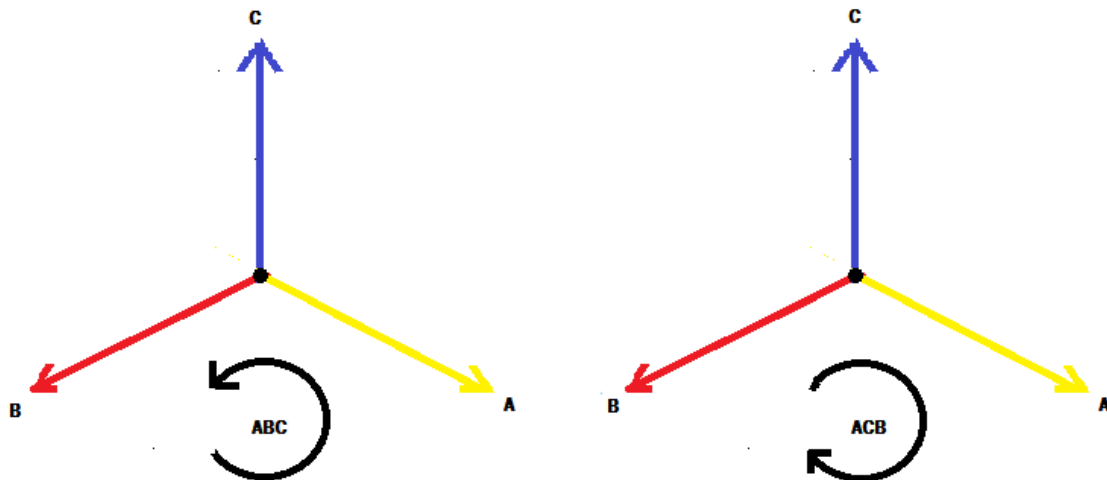
Para realizar el análisis de la operación del motor bajo alimentación desequilibrada se recurre al método de componentes simétricas. Dicho método descompone la alimentación desbalanceada en una suma de tres sistemas balanceados denominados de secuencia positiva, de secuencia negativa y de secuencia cero. Para obtener los componentes de secuencia se aplica la transformación siguiente (Glover, 2004, p. 359):

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 1.31})$$

El modelo equivalente corresponde al modelo de secuencia positiva. El modelo de secuencia negativa difiere solo en el deslizamiento. Para encontrar el circuito en secuencia negativa primero se establece una expresión para el deslizamiento del motor la secuencia negativa. Las secuencias negativa y

positiva pueden visualizarse como sendos opuestos de rotación en un diagrama fasorial de los voltajes o las corrientes, como se muestra en la figura siguiente.

Figura 10. **Secuencias positiva y negativa**



Fuente: elaboración propia.

La secuencia negativa correspondería a una inversión de fases en el estator (cambio de sentido de giro del campo magnético del estator), no obstante el rotor sigue girando en el mismo sentido. El deslizamiento respecto a la secuencia negativa puede expresarse en función del deslizamiento respecto a la secuencia positiva. Se definió el deslizamiento anteriormente mediante la expresión 1.3, verificable en Chapman (2005, p. 386):

$$s = \frac{\omega_{sinc} - \omega_m}{\omega_{sinc}} = 1 - \frac{\omega_m}{\omega_{sinc}} \quad (\text{ecuación 1.3})$$

Ante la inversión el campo magnético invierte su sentido:

$$s_- = \frac{-\omega_{sinc} - \omega_m}{-\omega_{sinc}} = 1 + \frac{\omega_m}{\omega_{sinc}} \quad (\text{ecuación 1.32})$$

Sumando las anteriores expresiones surge la expresión buscada:

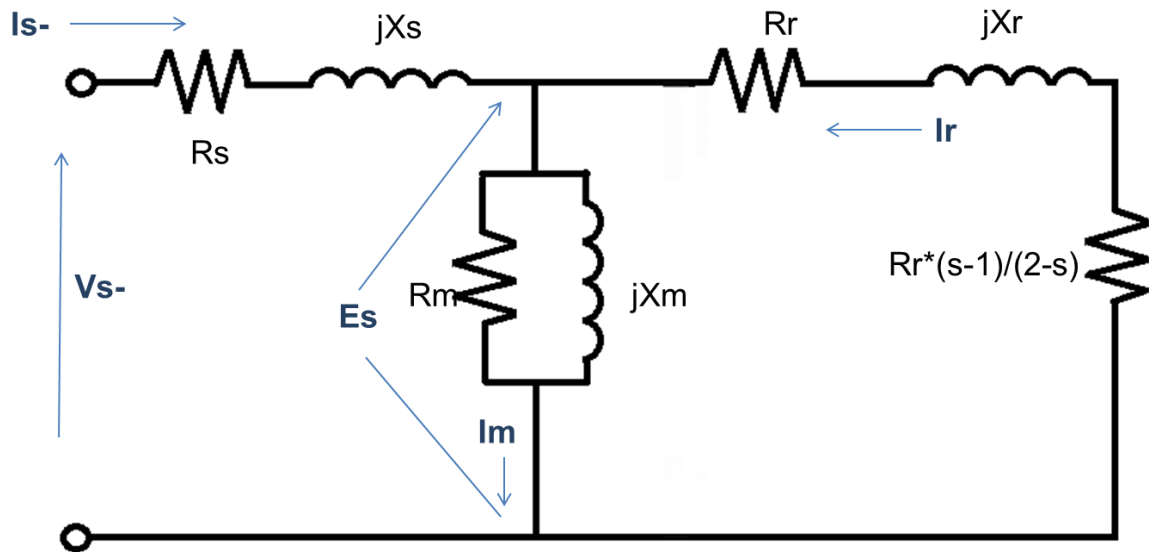
$$s + s_- = 1 - \frac{\omega_m}{\omega_{sinc}} + 1 + \frac{\omega_m}{\omega_{sinc}} = 2 \rightarrow s_- = 2 - s \quad (\text{ecuación 1.33})$$

En la deducción del modelo equivalente se realizaron manipulaciones algebraicas para que el deslizamiento afectara solo un término, el cual modelaba la energía mecánica disponible en el eje antes de las pérdidas mecánicas y misceláneas. Por un procedimiento análogo se deriva el término dependiente del deslizamiento en el circuito de secuencia negativa (Aller, 2007, p. 271).

$$\frac{R_r}{s_-} = \frac{R_r}{2-s} = R_r + \left(\frac{s-1}{2-s}\right) R_r \quad (\text{ecuación 1.34})$$

El circuito de secuencia negativa se muestra en la figura inferior.

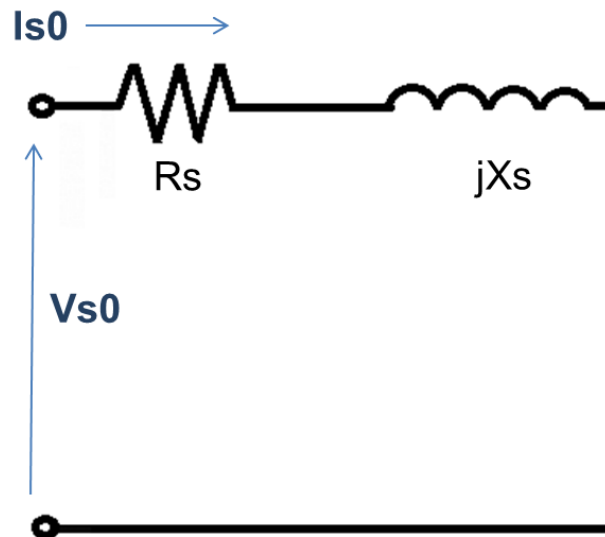
Figura 11. Circuito de secuencia negativa



Fuente: elaboración propia.

Falta definir el circuito para la secuencia cero. Los voltajes de secuencia cero están en fase. Alimentar una máquina trifásica con voltajes en fase no producirá movimiento (Aller, 2007, p. 370). Solo se consideran las pérdidas resistivas y el flujo disperso en el estator, lo que conlleva al circuito de la figura contigua. Esta red de secuencia se presenta en el caso de que el neutro de los devanados (el punto común en la configuración estrella) se encuentre conectado, lo que no es usual.

Figura 12. **Circuito de secuencia cero**



Fuente: elaboración propia.

Cuando se alimenta un motor con voltajes desbalanceados la corriente de secuencia negativa produce un par de frenado y la corriente de secuencia cero incrementa las pérdidas del motor; fenómenos que disminuyen la eficiencia y la vida útil del activo.

### 1.7. **Armónicas**

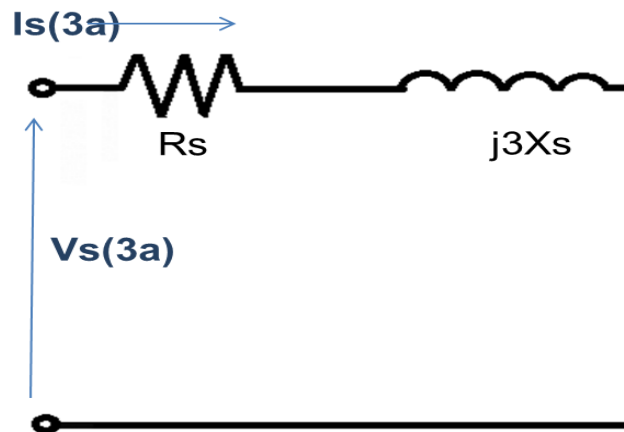
Se idealizó en los apartados anteriores que la alimentación tenía una forma senoidal consistente, puesto que es generada de esa manera. No obstante en la práctica las cargas interactúan con la red introduciendo perturbaciones periódicas que trasfiguran la forma original del voltaje (Aller, 2007, p. 278). Dichas perturbaciones periódicas se descomponen en componentes de frecuencia gracias al análisis de Fourier. Al asumir la linealidad de la conversión de energía, es posible aplicar el teorema de superposición.

La tercera armónica se produce debido a la saturación de flujo magnético en los núcleos de las máquinas eléctricas. La frecuencia de la tercera armónica viene dada por la definición citada a continuación:

$$3\omega_e = 3 * 2\pi * 60 = 360\pi \left[ \frac{rad}{s} \right] \quad (\text{ecuación 1.34})$$

El desfase entre los voltajes originales es de 120 grados eléctricos, a tres veces la frecuencia el periodo se reduce a un tercio; coincidiendo con los 120 grados eléctricos de desfase de las ondas originales. Por lo que las formas de onda en de las terceras armónicas están en fase. Esto es análogo a la red de secuencia cero, con la salvedad de que la reactancia se incrementa proporcionalmente a la frecuencia. Se desprecian los efectos de la frecuencia en la resistencia.

Figura 13. **Modelo del motor de inducción para la tercera armónica**



Fuente: elaboración propia.

Cada armónica requerirá de su propio modelo, dado que las relaciones para el análisis de circuitos se desarrollaron para señales senoidales puras. En

el caso de la quinta armónica se tendrá el sistema trifásico siguiente (Aller, 2007, p. 279):

$$\begin{aligned}\sqrt{2}V_{5a}\sin[5 * (\omega_e t)] &= \sqrt{2}V_{5a}\sin(5\omega_e t) \\ \sqrt{2}V_{5a}\sin\left[5 * \left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] &= \sqrt{2}V_{5a}\sin\left(5\omega_e t - \frac{10\pi}{3}\right) = \sqrt{2}V_{5a}\sin\left(5\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sqrt{2}V_{5a}\sin\left[5 * \left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] &= \sqrt{2}V_{5a}\sin\left(5\omega_e t - \frac{20\pi}{3}\right) = \sqrt{2}V_{5a}\sin\left(5\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

(sistema 1.35)

Obsérvese que las fases “b” y “c” tienen un desplazamiento que representa una inversión de fases. Por lo que el modelo para la quinta armónica es una red de secuencia negativa. Se tiene que calcular el desplazamiento del rotor respecto de del campo establecido por la corriente del 5to armónico (Aller, 2007, p. 281).

$$s_{5a} = \frac{-5\omega_e - \omega_r}{-5\omega_e} = 1 + \frac{\omega_r}{5\omega_e} \quad (\text{ecuación 1.36})$$

Con manipulación algebraica se logra expresar el deslizamiento respecto al 5to armónico en términos de la definición inicial de deslizamiento:

$$s_{5a} = \frac{5 + \omega_r/\omega_e}{5} = \frac{6 - (1 - \omega_r/\omega_e)}{5} = \frac{6 - s}{5} \quad (\text{ecuación 1.37})$$

Aplicando estos resultados al modelo conocido para secuencias negativas obtenemos el siguiente circuito mostrado en la figura 12. En el caso del séptimo armónico se tiene el siguiente sistema de tensiones (Aller, 2007, p. 281):

$$\sqrt{2}V_{7a}\sin[7 * (\omega_e t)] = \sqrt{2}V_{7a}\sin(7\omega_e t)$$



$$\sqrt{2}V_{7a}\sin\left[7 * \left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}V_{7a}\sin\left(7\omega_e t - \frac{14\pi}{3}\right) = \sqrt{2}V_{7a}\sin\left(7\omega_e t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{2}V_{7a}\sin\left[7 * \left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}V_{7a}\sin\left(7\omega_e t - \frac{28\pi}{3}\right) = \sqrt{2}V_{7a}\sin\left(7\omega_e t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

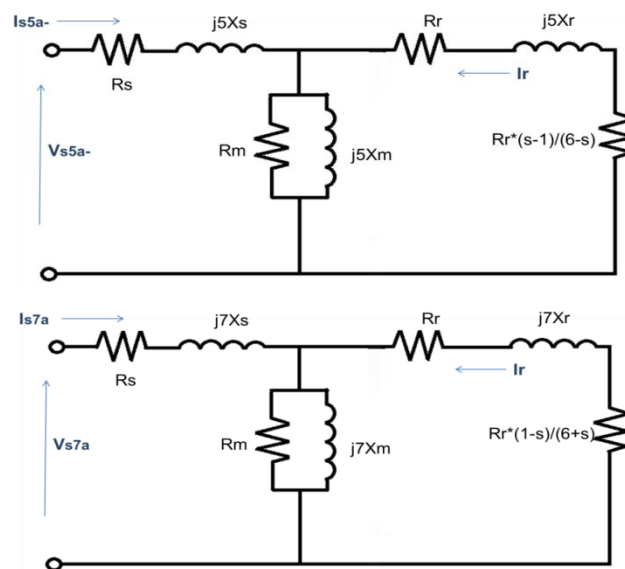
(sistema 1.38)

Este sistema es de secuencia positiva (lo que quiere decir que conserva la secuencia de fases de la componente fundamental), el deslizamiento para este caso viene dado por la expresión siguiente (Aller, 2007, p. 282).

$$s_{5a} = \frac{7 - \omega_r/\omega_e}{7} = \frac{6 + (1 - \omega_r/\omega_e)}{5} = \frac{6 + s}{7} \quad (\text{ecuación 1.39})$$

El circuito correspondiente se muestra en la figura 12.

Figura 14. **Modelo del motor de inducción para la quinta armónica y para la séptima armónica**



Fuente: elaboración propia.

Existen más armónicas, cada planta tiene una carga característica que ocasiona la presencia de armónicas específicas con distintas magnitudes. En los párrafos anteriores se han puesto de manifiesto tres situaciones (Aller, 2007, 283):

1. La armónica no genera par; caso de la tercera armónica.
2. La armónica genera un modelo de secuencia negativa; caso de la quinta armónica.
3. La armónica genera un modelo de secuencia positiva; caso de la séptima armónica.

Todas las armónicas múltiplos de 3 estarán en fase pues un número finito de periodos coincidirá con el desfase inicial del sistema. Estos armónicos no generan pares en la máquina asíncrona.

Para que una armónica presente la secuencia original de fases debe cumplirse la siguiente condición; sea “n” el orden del armónico (Aller, 2007, 283):

$$\begin{aligned} \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{2\pi n}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in (2,4,6,8 \dots) \rightarrow n = 1 + 3k \rightarrow n \\ &= (7,13,19 \dots) \quad (\text{ecuación 1.40}) \end{aligned}$$

Para que la armónica produzca la secuencia negativa se debe cumplir la siguiente condición (Aller, 2007, 283):

$$\begin{aligned} \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) &= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in (1,3,5,9 \dots) \rightarrow n = 2 + 3k \\ &\rightarrow n = (5,11,17 \dots) \quad (\text{ecuación 1.41}) \end{aligned}$$

## 2. MODELO DINÁMICO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN

### 2.1. Principios de la máquina generalizada

Las ecuaciones de la sección, ecuaciones 2.1-2.15, se basan en Aller (2007, p. 193-251). Se han agregado los procedimientos matemáticos para esclarecer los resultados finales. Aunque se utilizarán subsecuentemente solo los resultados es conveniente entender el razonamiento matemático detrás de los mismos.

En una máquina cilíndrica la divergencia de la densidad de flujo magnético es cero, lo que establece que el flujo que entra en la superficie cilíndrica sale de la misma, esto es una consecuencia de la ley de Gauss del campo magnético la cual establece la inexistencia de sumideros del mismo. Las áreas positiva y negativa de la densidad de flujo en función del ángulo son iguales (Aller, 2007, p. 98).

Cualquier distribución senoidal en el espacio puede ser obtenida a partir de la suma de dos componentes ortogonales (Aller, 2007, p. 101). Para la densidad de campo magnético adoptaremos la notación  $B_\alpha$  y  $B_\beta$ . Donde  $B_\alpha$  es un vector que representa la primera armónica en el eje  $\alpha$  y  $B_\beta$  es el vector que representa la primera armónica del eje  $\beta$ , los vectores tienen el mismo período en el tiempo y están en cuadratura. Las componentes ortogonales tienen un grado de libertad, pudiendo variar su magnitud (incluso invertir su polaridad) pero no su dirección.

Si la densidad de campo resultante  $B$  es senoidal, las componentes ortogonales también deberán serlo. Los conductores en un convertidor electromecánico se colocan de manera que al circular las corrientes  $i_\alpha$  y  $i_\beta$  la distribución del flujo sobre el cilindro sea aproximadamente senoidal. Cuando se analiza el cilindro en su circunferencia completa ( $2\pi$  radianes), se tiene siempre una parte de la superficie donde el campo es positivo, lo que quiere decir que el flujo desaloja el cilindro y que dicha área es un polo norte; mientras que en el resto de la superficie el campo es negativo, las líneas de flujo entran al cilindro constituyendo un polo sur.

Las máquinas eléctricas pueden tener más de un par de polos norte-sur. Para fines de análisis es suficiente considerar un solo par de polos y generalizarlo al resto de la máquina (Aller, 2007, p. 103). En una máquina de múltiples polos hay que diferenciar ángulos eléctricos y mecánicos. Los ángulos mecánicos son ángulos físicos. Para demarcar los ángulos eléctricos se toma un paso polar, la zona comprendida por un par de polos se define como  $2\pi$  radianes eléctricos. Si se toma una máquina de dos pares de polos,  $\pi$  radianes mecánicos serán equivalentes a  $2\pi$  radianes eléctricos. Definiendo a “ $p$ ” como el número de pares de la máquina se establece la expresión siguiente:

$$\theta_{electrico} = p \times \theta_{mecanico} \quad (\text{ecuación } 2.1)$$

Como se ha dicho anteriormente el análisis se realizan los cálculos sobre un par de polos. Para cálculos totales es necesario sumar la contribución de todos los polos; por ejemplo el par inducido total será la sumatoria de los pares inducidos en todos los polos.

El rotor y el estator de un convertidor siempre tienen el mismo número de polos. Si este no fuera el caso, habría pares de atracción y repulsión actuando

sobre el cilindro, nulificando el torque neto (Aller, 2007, p. 103). Lo necesario en las máquinas eléctricas es que dos superficies relativas tengan movimiento relativo entre sí; por lo que el inducido y el inductor pueden estar estáticos o en movimiento siempre que se cumpla la anterior condición, siendo el caso más común el del elemento interior móvil y el elemento exterior fijo.

Se establece ahora una máquina generalizada con un par de polos comprendidos en  $2\pi$  radianes eléctricos. El estator y el rotor tienen bobinas ortogonales en ejes que se identificarán como  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\alpha_e$ , y  $\beta_e$ . Para crear los campos se inyectan en las bobinas las corrientes  $i_r$ ,  $i_r$ ,  $i_e$ , y  $i_e$ . Sea  $T_m$  el par mecánico en el eje de la máquina generalizada. El sistema de ecuaciones que rige el convertidor será el siguiente, según Aller (2007, p. 104):

$$[v] = [R][i] + [L(\theta)] \frac{d}{dt} [i] + \dot{\theta} [\tau(\theta)][i]$$

$$T_m = -\frac{1}{2} [i]^t [\tau(\theta)][i] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{sistema } 2.2)$$

Donde  $\rho$  ( $\rho$ ) es el coeficiente de fricción y  $J$  es la inercia del eje de rotación. Las variables de estado son las corrientes  $[i]$ , la posición angular  $\theta$  y su derivada, denominada también como  $\omega_m$ . El sistema se expresa matricialmente y cada una de las matrices debe ser definida.

La matriz de resistencias es diagonal y representa las resistencias de las bobinas. Las bobinas están asiladas entre sí por lo que no hay resistencias mutuas. La matriz de resistencias se define entonces como sigue:

$$[R] = \begin{bmatrix} Re\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Re\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Rr\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Rr\beta \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación } 2.3)$$

Como se verifica en Aller (2007, p. 105). La máquina generalizada bajo análisis posee un rotor cilíndrico y su reactancia no cambia con la posición. Por lo que las auto-inductancias del estator y del rotor son constantes. Las inductancias mutuas entre los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  son cero puesto que son perpendiculares. La inductancia mutua entre los ejes  $\alpha$  del rotor y del estator es máxima cuando están alineados en  $\theta=0^\circ$ , por el movimiento circular se adopta una variación con la forma  $\cos(\theta)$ . En el caso de los ejes  $\beta$  del rotor y del estator el máximo se presenta en  $\theta=90^\circ$ , por lo que se adopta una variación con  $\sin(\theta)$ . Las bobinas  $\beta$  del rotor y  $\alpha$  del estator se alinean en  $\theta=-90^\circ$  produciendo en este punto se máxima inductancia mutua; por lo que la variación se denota con  $-\sin(\theta)$ . La matriz de inductancias es simétrica y se puede expresar de la forma indicada (Aller, 2007, p.106).

$$[L] = \begin{bmatrix} L_e & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta \\ 0 & L_e & L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta \\ L_{er}\cos\theta & L_{er}\sin\theta & L_r & 0 \\ -L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.4})$$

La matriz de par se definirá como la derivada de la matriz de inductancias respecto del ángulo  $\theta$  como se muestra a continuación (Aller, 2007, p. 106).

$$[\tau(\theta)] = \frac{d}{d\theta}[L]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_{er}\sin\theta & -L_{er}\cos\theta \\ 0 & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta \\ -L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & 0 \\ -L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.5})$$

El par eléctrico se define de la siguiente manera.

$$T_e = \frac{1}{2} [i]^t [\tau] [i] \quad (\text{ecuación 2.6})$$

Con las expresiones halladas para la máquina generalizada se obtiene la siguiente igualdad para el par eléctrico.

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{e\alpha} \\ i_{e\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_{er} \operatorname{sen} \theta & -L_{er} \operatorname{cos} \theta \\ 0 & 0 & L_{er} \operatorname{cos} \theta & -L_{er} \operatorname{sen} \theta \\ -L_{er} \operatorname{sen} \theta & L_{er} \operatorname{cos} \theta & 0 & 0 \\ -L_{er} \operatorname{cos} \theta & -L_{er} \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e\alpha} \\ i_{e\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación } 2.7)$$

Realizando las operaciones matemáticas indicadas se tendrá el desarrollo siguiente.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} L_{er} \{-2i_{e\alpha} i_{r\alpha} \operatorname{sen} \theta - 2i_{e\beta} i_{r\beta} \operatorname{sen} \theta - 2i_{r\beta} i_{e\alpha} \operatorname{cos} \theta + 2i_{e\beta} i_{r\alpha} \operatorname{cos} \theta\} \\ &= L_{er} \{(i_{e\beta} i_{r\alpha} - i_{r\beta} i_{e\alpha}) \operatorname{cos} \theta - (i_{e\alpha} i_{r\alpha} \\ &\quad + i_{e\beta} i_{r\beta}) \operatorname{sen} \theta\} \quad (\text{ecuación } 2.8) \end{aligned}$$

El par eléctrico depende de la corriente y es nulo en ausencia de esta. Si todas las bobinas se conectarán a una fuente de corriente directa, el par promedio sería cero. Con una velocidad angular constante  $\omega_m$ , se puede expresar el ángulo de la siguiente manera.

$$\theta = \omega_m t + \theta_0 \quad (\text{ecuación } 2.9)$$

Por conveniencia se expresan las corrientes en función de cosenos. Las corrientes efectivas se expresan con letras mayúsculas (Aller, 2007, p. 108).

$$i_{e\alpha} = \sqrt{2} I_{e\alpha} \operatorname{cos}(\omega_{e\alpha} t + \theta_{e\alpha})$$

$$i_{e\beta} = \sqrt{2} I_{e\beta} \operatorname{cos}(\omega_{e\beta} t + \theta_{e\beta})$$

$$i_{r\alpha} = \sqrt{2} I_{r\alpha} \operatorname{cos}(\omega_{r\alpha} t + \theta_{r\alpha})$$

$$i_{r\beta} = \sqrt{2}I_{r\beta} \cos(\omega_{r\beta}t + \theta_{r\beta}) \quad (\text{sistema 2.10})$$

Se introduce un conocido resultado de integración de funciones ortogonales que se muestra a continuación (Aller, 2007, p. 108).

$$\int_0^T \text{sen}\theta \cos\theta d\theta \rightarrow \int_0^T \text{sen}(u) du = -\cos(T) + \cos(0) = 0$$

Resultado válido para la integración entre cualquier par de puntos distanciados por un período (t a t+T). Con la definición de las corrientes se reescribe la ecuación del torque eléctrico y se encuentra su valor promedio por integración teniendo en cuenta que sólo los productos de cosenos producirán par considerando el resultado de integración expuesto anteriormente.

$$\bar{T}_e = \frac{L_{er}}{T} \int_0^T (-i_{e\alpha} i_{r\beta} + i_{e\beta} i_{r\alpha}) \cos(\omega_m t + \theta_0) dt$$

Se expresan ahora las corrientes totales del estator y del rotor como una serie de Fourier en términos del coseno.

$$i_e = \sum_{k=1}^{\infty} I_{ke} \cos(k\omega_e t - \gamma_e)$$

$$i_r = \sum_{j=1}^{\infty} I_{jr} \cos(j\omega_r t - \gamma_r) \quad (\text{sistema 2.11})$$



Se introduce la siguiente identidad trigonométrica.

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) = \frac{1}{4} [\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta - \gamma)] \quad (\text{ecuación } 2.12)$$

Considerando que los términos del par adoptan la forma siguiente al incluir el sistema 2.11.

$$\begin{aligned} & (-i_{e\alpha} i_{r\beta} + i_{e\beta} i_{r\alpha}) \times \cos(\omega_m t + \theta_0) \\ &= \cos(\omega_m t + \theta_0) \times \sum_{k=1}^{\infty} I_{ke} \cos(k\omega_e t - \gamma_e) \\ & \times \sum_{j=1}^{\infty} I_{jr} \cos(j\omega_r t - \gamma_r) \quad (\text{ecuación } 2.13) \end{aligned}$$

Y aplicando la identidad trigonométrica presentada con anterioridad se obtiene la expresión siguiente que multiplica a cualquier término del par.

$$\cos(\omega_m t + \theta_0 \pm k\omega_e t \pm j\omega_r t \pm \gamma_e \pm \gamma_r) \quad (\text{Expresión } 2.14)$$

Para que se produzca un par neto es necesario que se anule la dependencia del tiempo en la anterior expresión (Aller, 2007, p. 108):

$$\omega_m \pm k\omega_e \pm j\omega_r = 0 \quad (\text{ecuación } 2.15)$$

La anterior es la condición para la existencia del torque en una máquina eléctrica. Hay que tener presente que  $\omega_m$  representa la velocidad mecánica,  $\omega_e$  es la frecuencia angular de las corrientes en el estator y  $\omega_r$  es la frecuencia angular de las corrientes en el rotor.

## 2.2. Generalidades de la maquinaria trifásica

Las dificultades de modelado de la máquina de inducción provienen en parte del hecho de la variabilidad de las inductancias durante el giro del motor, como una introducción al respecto se presenta los principios del campo giratorio en el interior de la máquina y la transformación matricial que ayuda a neutralizar el efecto de dicha rotación.

### 2.2.1. Campo giratorio en el estator

La máquina trifásica cuenta con tres devanados repartidos en el perímetro del estator de manera simétrica. En el funcionamiento como motor los devanados del estator son alimentados con corrientes desfasados  $120^\circ$  ( $2/3 \pi$ ) grados eléctricos. Para fines ilustrativos consideremos una sola bobina concentrada por fase. Las ecuaciones e basan en Chapman (2005, p. 241-245).

La expresión para la densidad de flujo en magnético neto en el estator viene dada por la expresión (Chapman, 2005, p. 241).

$$\vec{B}_{net}(t) = \vec{B}_{aa'}(t) + \vec{B}_{bb'}(t) + \vec{B}_{cc'}(t) \quad (\text{ecuación } 2.16)$$

Que es la suma vectorial de las densidades de flujo producidas por cada fase. Se conoce que las fases están desfasadas en el tiempo y el espacio por 120 grados, y que tienen la misma magnitud  $B_m$ . Por lo que la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{net}(t) = B_m \text{sen}(\omega t) \angle 0^\circ + B_m \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \angle 120^\circ \\ + B_m \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \angle 240^\circ \quad (\text{ecuación } 2.17) \end{aligned}$$

Se realiza la adición de las componentes en “x” y “y” de la expresión anterior para obtener la subsecuente ( $\text{sen}(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\text{cos}(120^\circ) = -0.5$ ).

$$\begin{aligned}\vec{B}_{net}(t) = & B_m \text{sen}(\omega t) \hat{x} - 0.5 B_m \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \hat{y} \\ & - 0.5 B_m \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \hat{x} \\ & - \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \hat{y} \quad (\text{ecuación 2.17})\end{aligned}$$

Empleando la identidad trigonométrica de adición de ángulos.

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \text{cos}(b) + \text{cos}(a) \text{sen}(b) \quad (\text{identidad 2.18})$$

Se obtiene el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned}\vec{B}_{net}(t) = & B_m \text{sen}(\omega t) \hat{x} \\ & - 0.5 B_m [\text{sen}(\omega t) \text{cos}(-120^\circ) + \text{cos}(\omega t) \text{sen}(-120^\circ) \\ & + \text{sen}(\omega t) \text{cos}(-240^\circ) + \text{cos}(\omega t) \text{sen}(-240^\circ)] \hat{x} \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2} B_m [\text{sen}(\omega t) \text{cos}(-120^\circ) + \text{cos}(\omega t) \text{sen}(-120^\circ) \\ & - \text{sen}(\omega t) \text{cos}(-240^\circ) - \text{cos}(\omega t) \text{sen}(-240^\circ)] \hat{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{net}(t) = & B_m \text{sen}(\omega t) \hat{x} \\ & - 0.5 B_m \left[ -0.5 \text{sen}(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{cos}(\omega t) - 0.5 \text{sen}(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{cos}(\omega t) \right] \hat{x} \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \left[ -0.5 \text{sen}(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{cos}(\omega t) + 0.5 \text{sen}(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{cos}(\omega t) \right] \hat{y} \\ \vec{B}_{net}(t) = & 1.5 B_m \text{sen}(\omega t) \hat{x} - 1.5 B_m \text{cos}(\omega t) \hat{y} \quad (\text{ecuación 2.17})\end{aligned}$$

La anterior expresión denota un campo magnético giratorio de magnitud constante  $1.5B_m$  girando en contra del sentido de las manecillas del reloj (Chapman, 2005, p. 241). Para obtener un campo magnético en el sentido contrario basta con intercambiar la posición física de dos fases en el estator. Intercambiando las fases B y C la ecuación anterior se reescribiría de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\vec{B}_{net}(t) &= B_m \text{sen}(\omega t) \angle 0^\circ + B_m \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \angle 120^\circ + B_m \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \angle 240^\circ \\ &= 1.5B_m \text{sen}(\omega t) \hat{x} + 1.5B_m \cos(\omega t) \hat{y} \quad (\text{ecuación } 2.19)\end{aligned}$$

### 2.2.2. Transformación de coordenadas

El sistema de ecuaciones diferenciales planteado con anterioridad no es lineal. La dependencia de la variable  $\theta$  aumenta considerablemente la dificultad del modelo. Por lo que se suele recurrir a sistemas auxiliares de coordenadas para efectuar simplificaciones. Las ecuaciones 2.20 a 2.36 se basan en Aller (2007, p. 117-124).

$$\begin{aligned}[v] &= [R][i] + [L(\theta)] \frac{d}{dt}[i] + \dot{\theta}[\tau(\theta)][i] \\ T_m &= -\frac{1}{2}[i]^t[\tau(\theta)][i] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{sistema } 2.4)\end{aligned}$$

El nuevo sistema se define mediante una matriz de transformación que se denominará A. Las corrientes y voltajes se expresarán ahora en el nuevo sistema de coordenadas (Aller, 2007, p. 117).

$$\begin{aligned}[v_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] &= [A_{wxyz}][v_{wxyz}] \\ [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] &= [A_{wxyz}][i_{wxyz}] \quad (\text{sistema } 2.20)\end{aligned}$$

Es una condición necesaria que la potencia se mantenga constante, para calcular la potencia se recurre a la expresiones siguientes (Aller, 2007, p. 118).

$$p = [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]^{*t} \times [v_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]$$

$$p = [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]^{*t} \times [A_{wxyz}]^{*t} \times [A_{wxyz}] \times [v_{wxyz}] \quad (\text{ecuación 2.21})$$

Se tiene por la anterior expresión que la matriz A tiene que cumplir la siguiente condición.

$$[A_{wxyz}]^{*t} \times [A_{wxyz}] = [I] \quad (\text{ecuación 2.22})$$

Donde [I] representa a la matriz identidad, la expresión puede reescribirse de la manera siguiente.

$$[A_{wxyz}]^{*t} = [A_{wxyz}]^{-1} \quad (\text{ecuación 2.22})$$

La anterior es la condición para que a la matriz [A] se le denomine matriz hermitiana (Aller, 2007, p. 118). Cumpliendo este requisito no es necesario regresar al sistema de coordenadas original para realizar cálculos sobre la potencia. En una matriz hermitiana los elementos de la diagonal principal y el determinante son números reales.

Se reescribe el sistema matricial de ecuaciones diferenciales transformado.

$$[v_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] = [R_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}][i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] + [L_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}(\theta)] \frac{d}{dt} [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]$$

$$+ \dot{\theta} [\tau(\theta)_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}][i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]$$

$$T_m = -\frac{1}{2} [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]^t [\tau_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}(\theta)][i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{sistema 2.4})$$

Pasa a la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
 [A_{wxyz}][v_{wxyz}] &= \left[ [R_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] + [L_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]D + \dot{\theta}[\tau_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] \right] \times [A_{wxyz}] \\
 &\times [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] \quad (\text{sistema 2.23})
 \end{aligned}$$

$$T_m = -\frac{1}{2} [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}]^{*t} [A_{wxyz}]^{*t} [\tau_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] [A_{wxyz}] [i_{\alpha e, \beta e, \alpha r, \beta r}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta}$$

Se establecen las siguientes definiciones para simplificar el sistema (Aller, 2007, p. 119).

$$\begin{aligned}
 [R_{wxyz}] &= [A_{wxyz}]^{-1} [R_{wxyz}] [A_{wxyz}] \\
 [L_{wxyz}] &= [A_{wxyz}]^{-1} [L_{wxyz}] [A_{wxyz}] \\
 [\tau_{wxyz}] &= [A_{wxyz}]^{-1} [\tau_{wxyz}] [A_{wxyz}] \\
 [H_{wxyz}] &= [A_{wxyz}]^{-1} [L_{wxyz}] \dot{\theta} [A_{wxyz}] \quad (\text{sistema 2.24})
 \end{aligned}$$

Reescribiendo el sistema transformado.

$$\begin{aligned}
 [v_{wxyz}] &= \left[ [R_{wxyz}] + [L_{wxyz}]D + \dot{\theta}\{[\tau_{wxyz}] + [H_{wxyz}]\} \right] \\
 T_m &= -\frac{1}{2} [i_{wxyz}]^{*t} [\tau_{wxyz}] [i_{wxyz}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{sistema 2.23})
 \end{aligned}$$

En la ecuación del voltaje el segundo y el tercer término del lado derecho determinan las fuerzas electromotrices de transformación y generación. Las fuerzas de generación están representadas por la matriz de par  $[\tau_{wxyz}]$  y la matriz [H] que representa los términos de generación ocasionados por el movimiento relativo entre el sistema de ejes original y el transformado.

La proyección de las coordenadas del eje del rotor en ejes colineales con aquellos del estator constituye una de las transformaciones útiles para el estudio de máquinas eléctricas (Aller, 2007, p. 120). El par transformado de ejes contiene al eje directo  $d_r$  y al eje en cuadratura  $q_r$ . Esta transformación busca eliminar el movimiento relativo entre las bobinas del rotor y del estator para que las inductancias permanezcan constantes. La matriz de transformación es de  $4 \times 4$ , se separará en cuatro submatrices de  $2 \times 2$  para facilitar su visualización.

$$[A_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} [A_{ee}] & [0] \\ [0] & [A_{rr}] \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.25})$$

No se realizan modificaciones en el estator por lo que la matriz  $A_{ee}$  es una matriz identidad. Para encontrar la matriz  $A_{rr}$  se establece la siguiente relación (Aller, 2007, p. 120).

$$[i_{\alpha r, \beta r}] = [A_{rr}] \times [i_{d_r, q_r}] \quad (\text{ecuación 2.26})$$

La matriz  $A_{rr}$  es la proyección de los ejes  $\alpha_r$  y  $\beta_r$  sobre los ejes  $d_r$  y  $q_r$ , que produce una rotación inversa que contrarresta la rotación real del rotor. La transformación de coordenadas se realiza estableciendo los siguientes valores en la matriz  $A_{rr}$  (Aller, 2007, p. 120).

$$A_{rr} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.27})$$

Ahora se procede a demostrar que la matriz es hermitiana. Por el método de los determinantes la inversa de una matriz  $A$  se calcula de la manera siguiente.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (A^*)^t \quad (\text{ecuación } 2.28)$$

Se obtiene primero el determinante de la matriz  $A_{rr}$ .

$$|A| = \cos\theta \times \cos\theta - (-\text{sen}\theta) \times \text{sen}\theta = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$

De donde se infiere que la inversa de la matriz es igual a la conjugada traspuesta; por lo que la matriz  $A_{rr}$  es hermitiana. Con la matriz  $A$  determinada se proceden a calcular las demás matrices transformadas. La matriz de resistencias no sufre ninguna variación, pues no depende de la posición. Expresándola en notación compacta la matriz de resistencias corresponde a la expresión subsecuente (Aller, 2007, p. 121).

$$[R_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} R_e[I] & [0] \\ [0] & R_r[I] \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación } 2.29)$$

La matriz de inductancias se calcula con la fórmula proporcionada anteriormente.

$$[L_{wxyz}] = [A_{wxyz}]^{-1} [L_{wxyz}] [A_{wxyz}] \quad (\text{ec. 2 sistema } 2.24)$$

$$[L_{\alpha\beta dq}] = [A_{\alpha\beta dq}]^{-1} [L_{e\alpha, e\beta, r\alpha, r\beta}] [A_{\alpha\beta dq}]$$

$$[L_{\alpha\beta dq}] = [A_{\alpha\beta dq}]^{-1} \begin{bmatrix} L_e & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\text{sen}\theta \\ 0 & L_e & L_{er}\text{sen}\theta & L_{er}\cos\theta \\ L_{er}\cos\theta & L_{er}\text{sen}\theta & L_r & 0 \\ -L_{er}\text{sen}\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} [A_{\alpha\beta dq}]$$

$$[L_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A_{rr}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_e[I] & L_{er}[A_{rr}]^{-1} \\ L_{er}[A_{rr}] & L_r[I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A_{rr}] \end{bmatrix}$$



$$[L_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A_{rr}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Le[I] & L_{er}[I] \\ L_{er}[A_{rr}] & Lr[A_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Le[I] & L_{er}[I] \\ L_{er}[I] & Lr[I] \end{bmatrix}$$

$$[L_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} Le & 0 & L_{er} & 0 \\ 0 & Le & 0 & L_{er} \\ L_{er} & 0 & Lr & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & Lr \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.30})$$

La matriz de inductancias transformadas no depende de la posición. De manera análoga se calculan las matrices de par y de generación (Aller, 2007, p. 122).

$$[\tau_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -L_{er} \\ 0 & 0 & L_{er} & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & 0 \\ -L_{er} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.31})$$

$$[H_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L_{er} \\ 0 & 0 & -L_{er} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Lr \\ 0 & 0 & Lr & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.32})$$

Se denomina [G] a la matriz que abarca los términos de generación.

$$[G_{\alpha\beta dq}] = [H_{\alpha\beta dq}] + [\tau_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & Lr \\ -L_{er} & 0 & -Lr & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.33})$$

El sistema de ecuaciones diferenciales transformado que determina el comportamiento del convertidor que definido por las expresiones siguientes (Aller, 2007, p. 123):

$$[v_{\alpha\beta dq}] = ([R] + [L]D + [G])[i_{\alpha\beta dq}] \quad (\text{ecuación } 2.34)$$

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha e} \\ v_{\beta e} \\ v_{pr} \\ v_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e D & 0 & L_{er} D & 0 \\ 0 & R_e + L_e D & 0 & L_{er} D \\ L_{er} D & \dot{\theta} L_{er} & R_r + L_r D & \dot{\theta} L_e \\ -\dot{\theta} L_{er} & L_{er} D & -\dot{\theta} L_r & R_r + L_r D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \\ i_{pr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación } 2.34)$$

Es pertinente mencionar que la máquina descrita en la anterior ecuación existe físicamente y corresponde a una máquina de conmutador. El colector y las escobillas hacen que las inductancias vistas desde el estator siempre sean las mismas, neutralizando efectivamente el efecto de giro. El torque eléctrico y mecánico corresponde las expresiones siguientes (Aller, 2007, p. 123):

$$T_e = L_{er}(i_{\beta e} i_{dr} - i_{\alpha e} i_{qr}) \quad (\text{ecuación } 2.35)$$

$$T_m = L_{er}(i_{\beta e} i_{dr} - i_{\alpha e} i_{qr}) + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{ecuación } 2.36)$$

### 2.2.3. Modelo dinámico del motor de inducción

Se considera a continuación la máquina de inducción trifásica. El rotor y el estator tienen el mismo número de polos. En el estator se aplican corrientes trifásicas balanceadas y senoidales. Los modelos más inmediatos no toman en cuenta los efectos del ranurado, la distribución de los devanados, la excentricidad, las pérdidas en el hierro y las pérdidas mecánicas. Las ecuaciones 2.27 a 2.44 se basan en Aller (2007, 193-251).

Las corrientes y voltajes en el rotor correspondientes a cada fase se expresan matricialmente, la trasposición se utiliza para que su representación sea más sencilla (Aller, 2007, p. 196).

$$[v] = \begin{bmatrix} [v_e] \\ [v_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ea} & v_{eb} & v_{ec} \\ v_{ra} & v_{rb} & v_{rc} \end{bmatrix}^t$$

$$[i] = \begin{bmatrix} [i_e] \\ [i_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{ea} & i_{eb} & i_{ec} \\ i_{ra} & i_{rb} & i_{rc} \end{bmatrix}^t \quad (\text{sistema 2.37})$$

Las matrices de resistencia y enlaces de flujo se expresan también de forma simplificada (Aller, 2007, p. 197).

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} [\lambda_e] \\ [\lambda_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{ea} & \lambda_{eb} & \lambda_{ec} \\ \lambda_{ra} & \lambda_{rb} & \lambda_{rc} \end{bmatrix}^t$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_e[I] & [0] \\ [0] & R_e[I] \end{bmatrix} \quad (\text{sistema 2.38})$$

Con el fin de expresar de manera sintética las matrices de par y de inductancia se introducirán las matrices subsecuentes. La matriz  $[C(\theta)]$  especifica el comportamiento cíclico de los acoplamientos magnéticos entre las bobinas del estator y del motor. La matriz  $[S]$  representa los acoplamientos simétricos entre bobinas. El valor de 1 corresponde a las automagnetización. El valor  $-1/2$  corresponde a la magnetización entre bobinas desplazadas  $120^\circ$  o  $240^\circ$  ( $\cos(240^\circ)=\cos(120^\circ)=(-1/2)$ ).

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\theta}[C(\theta)] = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin\theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(sistema 2.39)

Con estas matrices se escriben las expresiones de la inductancia y el par.  $L_{\sigma}$  representa inductancias de dispersión,  $L_m$  inductancias de magnetización y  $L_{er}$  es la inductancia mutua de acoplamiento rotor-estator (Aller, 2007, p. 197).

$$[L(\theta)] = \begin{bmatrix} [L_{ee}] & [L_{er}(\theta)] \\ [L_{re}(\theta)] & [L_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma e}[I] + L_{me}[S] & L_{er}[C(\theta)] \\ L_{er}[C(\theta)]^t & L_{\sigma r}[I] + L_{mr}[S] \end{bmatrix}$$

$$[\tau(\theta)] = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta}[L_{ee}] & \frac{d}{d\theta}[L_{er}(\theta)] \\ \frac{d}{d\theta}[L_{er}(\theta)] & \frac{d}{d\theta}[L_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & L_{er} \frac{d}{d\theta}[C(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta}[C(\theta)]^t & [0] \end{bmatrix}$$

(sistema 2.40)

Con las definiciones anteriores se puede proceder a resolver el sistema 2.4.

$$[v] = [R][i] + [L(\theta)] \frac{d}{dt}[i] + \dot{\theta}[\tau(\theta)][i]$$

$$T_m = -\frac{1}{2}[i]^t[\tau(\theta)][i] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (\text{sistema } 2.4)$$

Más la dependencia del ángulo  $\theta$  complica la solución, por lo que se recurre a una transformación. Las matrices [C] y [S] son simétricas y es posible tornarlas diagonales. El método de las componentes simétricas es capaz de separar un sistema acoplado en tres sistemas independientes. Se definirá ahora

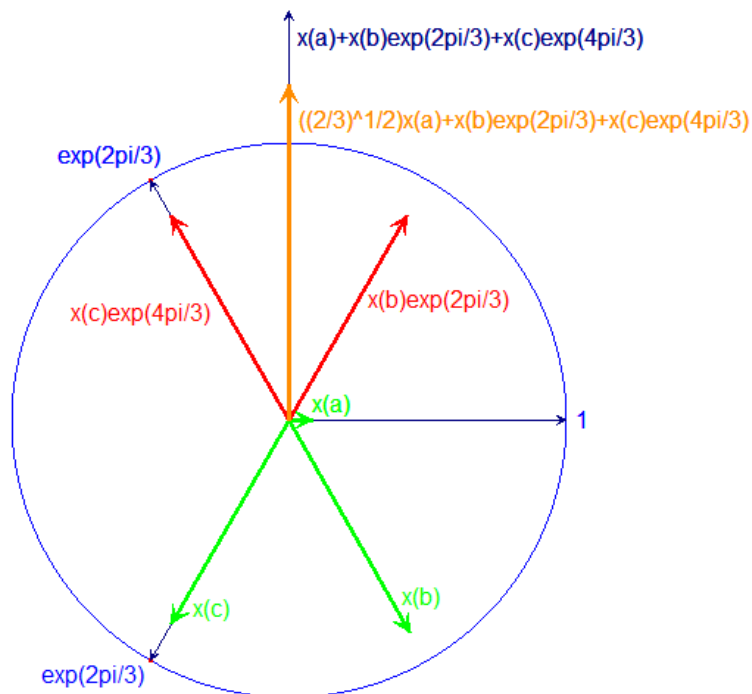
una transformación que permite conservar la potencia activa invariable (Aller, 2007, p. 198).

$$\vec{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

(ecuación 3.40)

Se obtiene mediante esta transformación el vector espacial del sistema trifásico. Un gráfico estático del mismo se muestra a continuación en el instante  $t=0$  para un sistema trifásico balanceado.

Figura 15. **Vector espacial**



Fuente: elaboración propia.

Se aplica ahora la transformación a las matrices establecidas para los parámetros del motor.

$$\vec{v}_e \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \times [v_{ea} \quad v_{eb} \quad v_{ec}]^t$$

$$\vec{v}_r \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \times [v_{ra} \quad v_{rb} \quad v_{rc}]^t$$

$$\vec{i}_e \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \times [i_{ea} \quad i_{eb} \quad i_{ec}]^t$$

$$\vec{i}_r \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \times [i_{ra} \quad i_{rb} \quad i_{rc}]^t$$

(sistema 2.41)

Para una ecuación vectorial sencilla de la forma  $y=Ax$ , la relación entre el vector “y” expresado como vector espacial y “x” expresado como vector espacial se proporciona a continuación para las matrices [S] y [C(θ)].

Para la matriz simétrica [S]:

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \angle \frac{2\pi}{3} & \frac{3}{2} \angle \frac{-2\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \right\} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \vec{x}$$

(desarrollo 2.42)

Para la matriz cíclica  $[C(\theta)]$ :

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$[C(\theta)] = \begin{bmatrix} \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} & \frac{e^{j\theta+j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{2\pi}{3}}}{2} & \frac{e^{j\theta+j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{4\pi}{3}}}{2} \\ \frac{e^{j\theta+j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{4\pi}{3}}}{2} & \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} & \frac{e^{j\theta+j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{2\pi}{3}}}{2} \\ \frac{e^{j\theta+j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{2\pi}{3}}}{2} & \frac{e^{j\theta+j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\theta-j\frac{4\pi}{3}}}{2} & \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[C(\theta)] = \begin{bmatrix} \frac{e^{j\theta}}{2} & \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} & \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{4\pi}{3}} & \frac{e^{j\theta}}{2} & \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} & \frac{e^{j\theta}}{2} e^{j\frac{4\pi}{3}} & \frac{e^{j\theta}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e^{-j\theta}}{2} & \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} & \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\ \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{4\pi}{3}} & \frac{e^{-j\theta}}{2} & \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} & \frac{e^{-j\theta}}{2} e^{-j\frac{4\pi}{3}} & \frac{e^{-j\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

Pero  $e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \alpha$ ,  $e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \alpha^2$

$$[C(\theta)] = \frac{e^{j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \left\{ \frac{e^{j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2} \{ e^{j\theta} [3 \quad 3\alpha \quad 3\alpha^2] + e^{-j\theta} [0 \quad 0 \quad 0] \} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \frac{3}{2} e^{j\theta} \vec{x}$$

(desarrollo 2.43)

Para la derivada de la matriz  $d/d\theta([C(\theta)])$

$$\vec{y} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin\theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\frac{d}{d\theta} [C(\theta)] = -1 \begin{bmatrix} \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} & \frac{e^{j\theta + \frac{2\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{2\pi}{3}}}{2j} & \frac{e^{j\theta + \frac{4\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{4\pi}{3}}}{2j} \\ \frac{e^{j\theta + \frac{4\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{4\pi}{3}}}{2j} & \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} & \frac{e^{j\theta + \frac{2\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{2\pi}{3}}}{2j} \\ \frac{e^{j\theta + \frac{2\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{2\pi}{3}}}{2j} & \frac{e^{j\theta + \frac{4\pi}{3}} - e^{-j\theta - \frac{4\pi}{3}}}{2j} & \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{bmatrix}$$



$$\vec{y} = -\sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \left\{ \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2j} \{ e^{j\theta} [3 \quad 3\alpha \quad 3\alpha^2] - e^{-j\theta} [0 \quad 0 \quad 0] \} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = -\frac{3}{2j} e^{j\theta} \vec{x}$$

(desarrollo 2.44)

Ahora los resultados anteriores se incluyen en la expresión del torque (Aller, 2007, p. 201):

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [i_e] \\ [i_r] \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} [0] & L_{er} \frac{d}{d\theta} [C(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [C(\theta)] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_e] \\ [i_r] \end{bmatrix} \quad (\text{del sistema 2.4})$$

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ [i_r]^t L_{er} \frac{d}{d\theta} C[\theta] [i_e] + [i_e]^t L_{er} \frac{d}{d\theta} C[\theta] [i_r] \right\} = [i_e]^t L_{er} \frac{d}{d\theta} C[\theta] [i_r] \rightarrow [i_r]^t [i_e]$$

$$= [i_e]^t [i_r]$$

$$T_e = L_{er} [i_e]^t \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \right\} [i_r]$$

aplicando la transformación ...

$$T_e = \frac{3}{2} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} i_e i_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} i_e^* i_r \right\} \quad (\text{ecuación 2.45})$$

La ecuación total de par de la máquina se reescribe de la siguiente manera.

$$\frac{3}{2}L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} i_e i_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} i_e^* i_r \right\} - T(\dot{\theta}) = J(\ddot{\theta}) + \rho(\dot{\theta}) \quad (\text{ecuación 2.46})$$

Expresado en vectores espaciales el sistema eléctrico del motor se expresa (Aller, 2004, p. 201):

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_e & \frac{3}{2}L_{er}e^{j\theta} \\ \frac{3}{2}L_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (\text{ecuación 2.47})$$

Donde “p” es el operador diferencial. Para eliminar la dependencia de  $\exp(j\theta)$  se aplica las siguientes definiciones:

$$\vec{x}_r^e \equiv \vec{x}_r \cdot e^{j\theta} \quad (\text{ecuación 2.48})$$

$$p\vec{x}_r^e = p\vec{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\vec{x}_r \cdot e^{j\theta} = p\vec{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\vec{x}_r^e \rightarrow p\vec{x}_r \cdot e^{j\theta} = p\vec{x}_r^e - j\dot{\theta}\vec{x}_r^e \quad (\text{ecuación 2.49})$$

Reescribimos las ecuaciones de par y voltaje; que constituyen el modelo dinámico de la máquina de inducción (Aller, 2007, p. 202).

$$\frac{3}{2}L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} i_e i_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} i_e^* i_r \right\} - T(\dot{\theta}) = J(\ddot{\theta}) + \rho(\dot{\theta})$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & \frac{3}{2}L_{er} \\ \frac{3}{2}L_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{2}L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix}$$

(sistema 2.50)

## **METODOLOGÍA A UTILIZAR Y TÉCNICAS CORRESPONDIENTES**

Se plantea el desarrollo de la investigación en tres fases. La primera fase consiste en el diseño de la investigación. La segunda abarcará el desarrollo completo del marco teórico (fallas, condiciones indeseables y modelos); y la tercera fase consistirá en el desarrollo del marco práctico aplicando el modelado al análisis de la máquina de inducción.

Primera fase: presentación y aprobación de protocolo. Mediante el análisis de estudios de calidad de la energía en planta, la naturaleza del entorno y las características de la cargas se establecerán las causas posibles de mal funcionamiento de los motores de inducción en la planta cementera. Se considerará el historial de fallas imprevistas de equipos críticos. Esto corresponde al primer objetivo.

Segunda fase: con los datos de placa, las mediciones nominales de parámetros eléctricos y datos de fabricantes disponibles se elaborarán los modelos para representar los motores. Con los modelos se simularan fallas para establecer patrones de detección útiles en el mantenimiento. Esto corresponde al segundo objetivo.

Tercera fase: análisis de datos de campo mediante modelos propuestos, procurando la detección de condiciones inapropiada para el funcionamiento de motores seleccionados actualmente en operación. Existe la posibilidad de que los motores se hallen en buen estado y funcionando en condiciones adecuadas,

caso en el cual no se detectarán fallas mayores. Esto corresponde al tercer objetivo.

Dos conjuntos de variables cuantitativas son necesarias para la operación de un modelo: las variables necesarias para el establecimiento del modelo y las variables necesarias como entradas para fines de análisis. Para establecer el modelo clásico, es necesario conocer la resistencia, la inductancia y el flujo disperso de los devanados del estator y del rotor; así como la resistencia y la inductancia que modelan la magnetización del entrehierro. Los datos pueden obtenerse del fabricante, por comparación con máquinas similares y por métodos experimentales. Las variables que alimentan el modelo incluyen medidas promedio e instantáneas de la corriente y el voltaje en los devanados del motor. Medidas adicionales para correlaciones útiles pueden abarcar valores de la temperatura, la potencia real, la potencia reactiva, desbalance de fases; entre otras.

El resultado del análisis corresponde a una variable cualitativa del estado de la maquinaria como aceptable o no aceptable. No obstante los criterios para la caracterización del estado de la máquina dependen de la organización, ya que este tipo de motor es capaz de soportar condiciones no óptimas por períodos prolongados.

El tipo de estudio corresponde al estudio explorativo en el ámbito académico nacional; ya que la técnica no es usual en el monitoreo de condición (mantenimiento proactivo) en las industrias del país.

## MÉTODOS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

La información de los casos prácticos proviene de datos de monitoreo de la planta San Miguel de Cementos Progreso. Los datos tienen una forma matricial, dependiendo todas las mediciones del tiempo de muestreo. Adicionalmente se planea la revisión de analizadores de carga que proporcionan mediciones puntuales. Las mediciones del monitoreo de condición se tratarán de manera estadística para encontrar las tendencias de funcionamiento del equipo a través de las medidas de tendencia central. Sobre los datos es posible aplicar un muestreo con el fin de tener una cantidad de datos más manejable.

La información puede aplicarse al modelo y a la vez provenir de él. Las fallas incipientes son raras y probablemente no se aprecien todas en los datos del monitoreo de condición. Más es posible simularlas una vez obtenidos los parámetros de la máquina, obteniendo patrones que luego pueden ser reconocidos cuando el suceso ocurra en la operación física.

Siempre que sea posible los datos se presentarán en modo gráfico para mejorar su comprensión.



## **RECURSOS FÍSICOS Y FINANCIEROS NECESARIOS PARA LA EJECUCIÓN Y FACTIBILIDAD DEL ESTUDIO**

Los recursos físicos incluyen un ordenador personal y software matemático, los cuales se hallan a disposición del autor. Las ventajas de los programas MATLAB® y SIMULINK® los hacen idóneos para la aplicación de simulación de los modelos. La interfaz de bloques y la capacidad gráfica de los anteriores programas se piensa pueden proporcionar soluciones adecuadas a los planteamientos del escrito.

Es posible cotejar las simulaciones con datos reales si el autor puede procurar el acceso a datos de un medidor de carga dedicado a un equipo en particular cuya carga se conozca bien y pueda ser modelada. Aunque aún con los datos del equipo existe la posibilidad de no darse la correlación al operar el motor sin problemas en un ambiente con la adecuada calidad de energía.

Tabla II. Recursos

Recursos	Costo/Origen	Costo Acumulado
Matlab & Simulink student versión	\$ 89,00/Q. 690,00	Q. 690,00
1 año de licencia de cabri	\$ 34,00/Q. 264,00	Q. 954,00
Fondo para adquirir bibliografía específica	Q. 1 000,00	Q. 1 954,00
Asesor	Q. 2 500,00	Q. 4 454,00
Revisor particular de ortografía y redacción	Q. 800,00	Q. 5 254,00
Datos de operación de campo	Planta San Miguel Cementos Progreso	-----

Fuente: elaboración propia.

El autor considera contar con los recursos adecuados en el tiempo que tomará desarrollar la investigación.



## CRONOGRAMA

CRONOGRAMA	01/06/2014	04/06/2014	07/06/2014	14/06/2014	21/06/2014	28/06/2014	05/07/2014	12/07/2014	19/07/2014	26/07/2014	02/08/2014	09/08/2014	16/08/2014	23/08/2014	30/08/2014	06/09/2014	13/09/2014	20/09/2014
Documentación																		
Identificación de fallas detectables (obj)																		
Elaboración capítulos teóricos																		
Revisión de capítulos teóricos																		
Establecer modelos útiles (obj) (fase 2)																		
Obtención de datos reales de Planta																		
Elaboración de modelos																		
Análisis preliminar de datos																		
Aplicar monitoreo y simulación a datos de planta (obj., f3)																		
Elaboración de maro práctico																		
Análisis de resultados (obj)																		
Redacción de conclusiones y recomendaciones																		



## BIBLIOGRAFÍA

1. Aller, J. Bueno, A. Machado, G. Salazar, L. (2012). *Evaluación Energética de Motores de Inducción Sub Cargados, En Presencia de Armónicas y Desequilibrios de Tensión*. Universidad Simón Bolívar. Venezuela.
2. Aller, José Manuel (2007). *Máquinas Eléctricas Rotativas: Introducción a la Teoría General*. Editorial Equinoccio de la Universidad Simón Bolívar. República Bolivariana de Venezuela.
3. Aller, José Manuel (1997). Tesis de ascenso a titular: Métodos para el Análisis y Control Dinámico de la Máquina de Inducción. Universidad Simón Bolívar, República Bolivariana de Venezuela.
4. Chapman J., Steven.(2005). *Máquinas Eléctricas*. Cuarta Edición. McGraw-Hill. Iztapalapa, México.
5. Cruz, Pedro y López, Javier Sampé (2008). *Máquinas Eléctricas y técnicas modernas de control*. Alfaomega. México.
6. Duncan Glover, J. y Sarma Mulukutla, S. (2004). *Sistemas de Potencia, Análisis y Diseño*. Thomson Editores S.A. México.
7. Duncan Glover, J. y Sarma Mulukutla, S. (2004). *Sistemas de Potencia, Análisis y Diseño*. Thomson Editores S.A. México.

8. Emadi, Ali (2005). *Energy-Efficient Electric Motors*. Tercera Edición. Editorial Marcel Dekker, Inc. New York, EEUU.
9. Fraile Mora, Jesús (2003). *Máquinas Eléctricas*. Quinta Edición. Editorial McGraw-Hill. Madrid, España.
10. Fraile Mora, Jesús (2003). *Máquinas Eléctricas*. Quinta Edición. Editorial McGraw-Hill. Madrid, España.
11. Fuchs, Ewald F. y Masoum, Mohammad (2008). *Power Quality in Power Systems and Electrical Machines*. Academic Press, EEUU.
12. Gourishankar, Vembu (1995). *Conversión de Energía Electromecánica*. Editorial Alfaomega. México.
13. Guru, Bhag S. y Hiziroglu, Hüseyin R (2003). *Máquinas Eléctricas y Transformadores*. Tercera Edición. Editorial Oxford. México.
14. Hamid A. Toliyat, Subhasis Nandi, Seungdeog Choi, Homayoun Meshgin-Kelk (2013), *Electric Machines Modeling, Condition Monitoring and Fault Diagnosis*. CRC Press. Boca Ratón, Florida, EEUU.
15. I.P. Kopylov (1984). *Mathematical Models of Electric Machines*. Mir Publishers. Moscú, Rusia
16. Krause, Paul C., Wasynczuk, Oleg y Sudhoff, Scott D. (2002). *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. IEEE press. EEUU

17. Lent, Craig S (2013). *Learning to Program with Matlab, Building GUI Tools*. Editorial Wiley. EEUU.
18. Ong, Chee-Mun (1998). *Dynamic Simulation of Electric Machinery*. Editorial Prentice Hall. EEUU.
19. R.J. Lawrie (1987). *Biblioteca Práctica de Motores Eléctricos Tomo I*. Grupo Editorial Oceano. Barcelona, España.
20. Rodríguez, Manuel Gil (2003). *Introducción Rápida a Matlab y Simulink para Ciencia e Ingeniería*. Editorial Díaz de Santos S.A. Madrid, España.
21. Sumper, Andreas y Baggini Angelo (2012). *Electrical Energy Efficiency, Technologies and Applications*. Editorial Wiley. EEUU.
22. Trynadlowski, Andrzej M (2001). *Control of Induction Motors*. Editorial Academic Press. San Diego, CA, EEUU.
23. Tong, Wei (2014). *Mechanical Design of Electrical Motors*. CRC Press Taylor & Francis Group. Boca Raton, FI, EEUU.

