

JORGE SIGFRIDO ARRIVILLAGA SARAVIA



**DEFLEXIONES EN VIGAS
DE
CONCRETO REFORZADO**

GUATEMALA, C. A.

**BIBLIOTECA CENTRAL-USAC
DEPOSITO LEGAL
PROHIBIDO EL PRESTAMO EXTERNO**

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA**

ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

**DEFLEXIONES EN VIGAS
DE
CONCRETO REFORZADO**

TESIS

*Presentada a la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de San Carlos*

POR

JORGE SIGFRIDO ARRIVILLAGA SARAVIA

al conferírsele el título de:

INGENIERO CIVIL

Guatemala, Julio de 1973

**BIBLIOTECA CENTRAL-USAC
DEPOSITO LEGAL
PROHIBIDO EL PRESTAMO EXTERNO**

D2
08
T(262)C

**JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

DECANO: Ing. HUGO QUAN MA
VOCAL PRIMERO: Ing. MARCO TULIO SAMAYOA
VOCAL SEGUNDO: Ing. RODOLFO GONZALEZ
VOCAL TERCERO: Ing. ADOLFO BEHRENS
VOCAL CUARTO: Br. JAIME E. KLUSSMANN F.
VOCAL QUINTO: Br. EDGAR DANIEL DE LEON M.
SECRETARIO: Ing. JOSE LUIS TERRON

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO: Ing. HUGO QUAN MA
SECRETARIO: Ing. JOSE LUIS TERRON
EXAMINADOR: Ing. WALTER LANGE
EXAMINADOR: Ing. MANUEL CASTILLO BARAJAS
EXAMINADOR: Ing. LEONEL ASTURIAS

**TESIS DE REFERENCIA
NO
SE PUEDE SACAR DE LA BIBLIOTECA
BIBLIOTECA CENTRAL - USAC.**

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

Cumpliendo con lo establecido por la ley universitaria presento a vuestra consideración, previo a optar el título de Ingeniero Civil, mi trabajo de tesis titulado:

**DEFLEXIONES EN VIGAS
DE
CONCRETO REFORZADO**

Tema que me fue asignado por la Honorable Junta Directiva de la Facultad.

ACTO QUE DEDICO:

A DIOS

A MIS PADRES

*Mario Arrivillaga Rubio
Gloria Saravia de Arrivillaga*

A LA MEMORIA DE MI HERMANO

Mario Arrivillaga Saravia

A MIS ABUELITOS

*Lic. Francisco Fonseca Penedo
Magdalena Gual de Fonseca*

A MIS HERMANOS

*Eduardo Asturias Orellana
Gloria A. de Asturias
Juan José Mosquera Estrada
Margarita A. de Mosquera
Rolando Figueroa de León
Clara A. de Figueroa
Gloria M. de Arrivillaga e hijo
Juan Miguel Arrivillaga Saravia*

DEFLEXIONES EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

CONTENIDO	Pág.
1. INTRODUCCION	1
2. DEFORMACIONES	2
2.1 Generalidades	2
2.2 Deformaciones Instantáneas	2
2.3 Deformaciones Diferidas	4
3. CREEP EN EL CONCRETO	7
3.1 Historia	7
3.2 Generalidades	8
3.3 Naturaleza	8
3.4 Efecto de los Constituyentes	9
3.5 Efecto de las Proporciones	10
3.6 Efecto del Curado	10
3.7 Efecto del Tiempo de Carga	11
3.8 Efecto de la Magnitud de los Esfuerzos	11
3.9 Influencia de los Aceleradores	12
3.10 Efecto de las Cargas Sostenidas sobre las Propiedades del Concreto	13
3.11 Expresiones Matemáticas para obtener la Deformación debida al Creep	14
4. METODOS DE CALCULOS DE LAS DEFLEXIONES INSTAN- TANEAS	17
4.1 Conceptos	17
4.2 Método de la Doble Integración	18
4.3 Método del Area de Momentos	23
5. FACTORES QUE AFECTAN LAS DEFLEXIONES EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO	28
5.1 Generalidades	28
5.2 Módulo de Elasticidad	30
5.3 Momento de Inercia	32
5.4 Tiempo de Aplicación de las Cargas	35

6.	<i>CALCULO DE DEFLEXIONES EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO</i>	36
6.1	<i>Generalidades</i>	36
6.2	<i>Descripción del Proceso de Deflexión</i>	37
6.3	<i>Deflexiones bajo Cargas de Corta Duración</i>	40
	<i>Procedimientos de Cálculo</i>	41
6.4	<i>Deflexiones bajo Cargas de Larga Duración</i>	46
	<i>Efecto del Creep del Concreto</i>	46
	<i>Curvatura por Contracción de las Vigas</i>	47
	<i>Procedimientos de Cálculo</i>	48
7.	<i>EJEMPLOS BASADOS EN LAS ESPECIFICACIONES DEL CODIGO ACI 318-71</i>	51
8.	<i>ENSAYOS DE LABORATORIO</i>	60
8.1	<i>Resultados Prácticos</i>	60
8.2	<i>Resultados Analíticos</i>	67
8.3	<i>Comparación</i>	67
9.	<i>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</i>	76
—	<i>APENDICE</i>	
	<i>—Especificaciones del Código ACI 318-71 para el Control de Deflexiones</i>	78
	<i>—Evaluación Gráfica del Momento Efectivo de Inercia para Deflexión</i>	82
—	<i>BIBLIOGRAFIA</i>	91

1.— INTRODUCCION

El estudio y control de las deflexiones en vigas es un factor de suma importancia que debe ser tomado en cuenta para el diseño de elementos estructurales, ya que para satisfacer los propósitos con que fue planeada una estructura, ésta debe ser segura, funcional y agradable estéticamente. Una estructura es segura si es capaz de resistir las fuerzas que actuarán sobre ella en el transcurso de su vida útil. Su funcionalidad y belleza implican, entre otras cosas, que las deflexiones y otras distorsiones que ocurren por la acción de las cargas sean relativamente pequeñas. Por ejemplo, si en una viga o losa se desarrollan deflexiones excesivamente grandes, se puede tener como resultado grietas en las paredes, problemas de ajuste en puertas y ventanas, malos drenajes debido al estancamiento del agua, funcionamiento deficiente en maquinaria y equipo altamente sensitivo, vibraciones excesivas, etc. Puede el lector darse cuenta de la importancia que tiene el poder predecir las deflexiones que ocurrirán, con razonable exactitud, para así poder dimensionar los miembros de manera que se proporcione al mismo tiempo la resistencia adecuada y deflexiones dentro de límites tolerables.

Para el diseño de un miembro es de interés la deflexión que se produce bajo condiciones normales de servicio, o sea, la deflexión que se origina por la acción de la carga muerta más una cierta fracción de la carga viva que se considera actuando en forma permanente sobre dicho miembro. En ocasiones es de interés el conocer la deflexión instantánea, pero, por lo general, preocupa más al ingeniero la deflexión total que llegará a ocurrir durante el transcurso de la vida útil de dicho miembro.

En los capítulos posteriores se hará un análisis de los factores que deben ser tomados en cuenta para el estudio de las deflexiones, dándole primordial importancia al "creep", especie de flujo, que es el principal agente en el desarrollo de las deflexiones diferidas del concreto, o sea, de aquellas deflexiones que ocurren a través del tiempo sin que haya un incremento de esfuerzos. Además, se da información sobre los distintos métodos empleados para el cálculo de las deflexiones, así como ejemplos de cómo determinarlas utilizando el método propuesto por el Instituto Americano del Concreto (ACI), basado en las experiencias de Dan E. Branson (11). En el Capítulo 8 se indica los resultados obtenidos de ensayos realizados en cinco vigas con carga concentrada al centro, y se comparan con los resultados analíticos determinados siguiendo las normas que especifica el método del Instituto Americano del Concreto (ACI).

2.— DEFORMACIONES

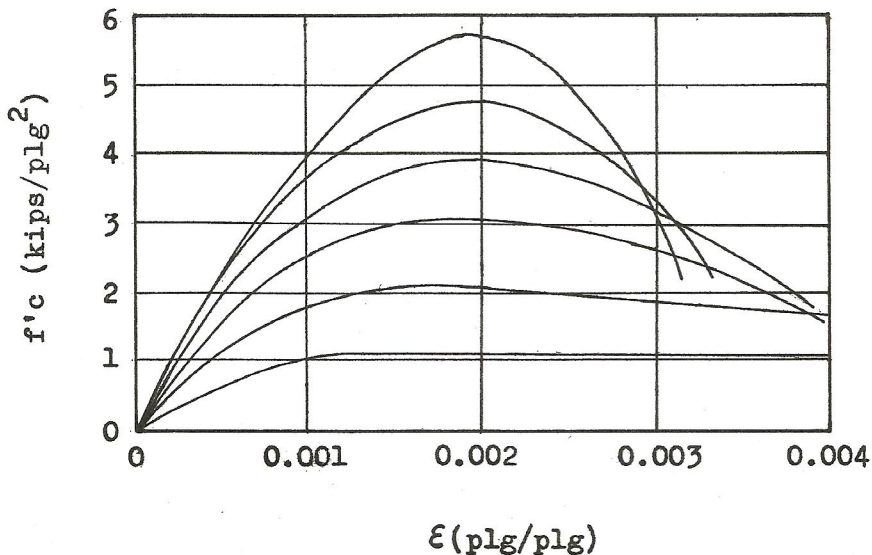
2.1.— GENERALIDADES

El comportamiento de una estructura bajo carga depende, hasta un cierto punto, de la relación esfuerzo-deformación propia del material de que está fabricada. Infiuye también el tipo de esfuerzos a que dicho material estará sometido en la estructura. Ya que el concreto es usado primordialmente en compresión (debido a su baja resistencia a los esfuerzos de tensión), su relación esfuerzo deformación bajo condiciones de compresión es de principal interés. Esta relación puede ser obtenida en ensayos de laboratorio, midiendo las deformaciones que ocurren en un cilindro de concreto de dimensiones conocidas, y que está sometido a carga. También se puede determinar esta relación en base a las deformaciones que ocurren en el lado de compresión de vigas. Puede interesar además, la relación deformación-tiempo, que puede ser obtenida midiendo las deformaciones que se producen a través del tiempo, bajo una carga constante. El primer ensayo mencionado sirve como base para la determinación de las deformaciones instantáneas, y el segundo, para la determinación de las deformaciones diferidas, en las que afecta principalmente el "creep" del concreto. En la página 3 se muestran curvas típicas de la relación esfuerzo-deformación para el concreto, y en el Capítulo 8 se muestran las curvas obtenidas para dicha relación en cilindros de prueba ensayados en el laboratorio de la Facultad de Ingeniería para determinar las propiedades de las vigas deflectadas. En la página 6 se presentan curvas típicas para la relación deformación-tiempo.

2.2.— DEFORMACIONES INSTANTANEAS

Con este nombre se designa a todas aquellas deformaciones que se producen inmediatamente bajo la aplicación de las cargas. Estas deformaciones son recuperables, es decir, puede recobrase la forma original, siempre que no se alcance el límite elástico del material, o sea, cuando no se exceda el esfuerzo en que se principie a generar deformaciones permanentes.

En la figura se muestra una serie de curvas típicas para la relación esfuerzo-deformación en concretos con distinto grado de resistencia.



Se puede observar que todas las curvas presentan características similares. Inicialmente tienen una porción elástica relativamente recta, en donde los esfuerzos y las deformaciones son aproximadamente proporcionales. Luego presentan un sector intermedio en donde tienden a ser horizontales, siendo ésta la zona en que alcanzan su máximo esfuerzo, el cual se presenta acompañado de una deformación sensible de 0.002 plg/plg. Finalmente descienden hasta alcanzar valores de deformación de 0.003 plg/plg y aún mayores, con valores de esfuerzos menores.

Se puede apreciar también en dichas curvas que en el caso de concretos de baja resistencia, o sea, aquéllos en los cuales f'_c es menor o igual a 4000 lbs/plg², se presenta un comportamiento menos frágil, soportando deformaciones unitarias mayores que las que pueden absorber los concretos de alta resistencia.

Es también en estas curvas en las que se obtiene el módulo de elasticidad del concreto. Estrictamente hablando para el concreto no existe una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones, por lo que el módulo de elasticidad no puede ser obtenido en una forma realmente directa de los valores obtenidos. Para su determinación existen varios métodos, entre los que se tiene el módulo de elasticidad tangente (que viene dado por la pendiente inicial de la curva), módulo de elasticidad secante (que es la pendiente de la recta que va del origen

hasta un punto aproximado de 0.45 $f'c$), etc. Hay otro método para determinar el módulo de elasticidad, basado en el límite elástico aparente de Johnson. En este método se toma la pendiente de la curva inicial, y se disminuye en un 50 o/o, corriéndose después esta última recta (o sea, la que tiene pendiente 50 o/o menor), hasta encontrar el punto de tangencia con la curva. La recta se corre de manera que siempre conserve su pendiente. Después, se toma la pendiente de la recta que, partiendo del origen, llega hasta el punto de tangencia. La pendiente de esta recta define el valor del módulo de elasticidad.

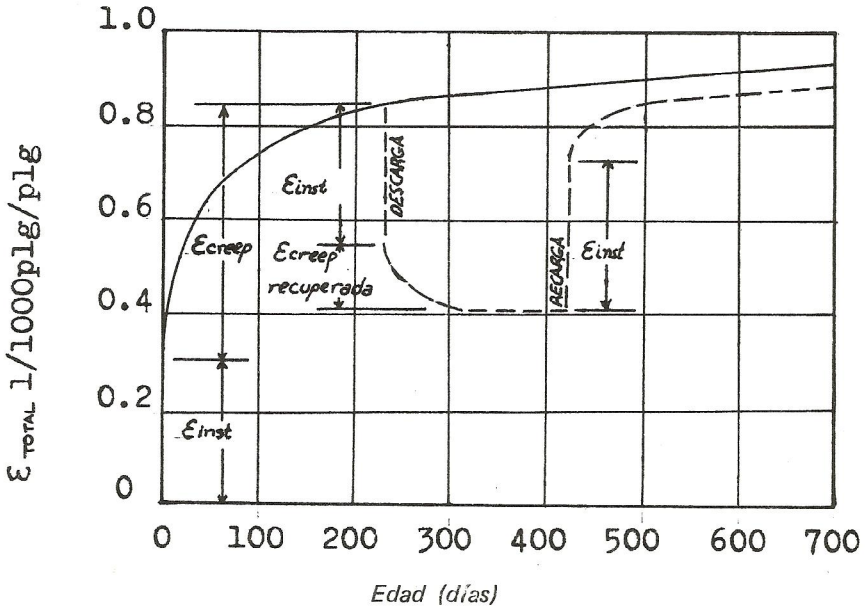
Para el módulo de elasticidad el Instituto Americano del Concreto (ACI) recomienda el valor $E_c = w^{1.5} 33 f'c^{0.5}$, en donde w es el peso unitario del concreto, en lbs/pie³, y $f'c$ es la resistencia del concreto, en lbs/plg². Según los ensayos que llevé a cabo en el laboratorio de la Facultad de Ingeniería, el valor del módulo de elasticidad que más se aproxima al dado por la ACI es el del módulo tangente. Como comparación, ver la página en donde tabulo los módulos tangentes obtenidos de las curvas esfuerzo-deformación de los cilindros ensayados, y los valores obtenidos aplicando esta expresión para un peso unitario de 145 lbs/pie³, en el capítulo 8.

2.3.— DEFORMACIONES DIFERIDAS

En algunos materiales empleados en ingeniería, siendo el caso más específico el del acero, la resistencia y la relación esfuerzo-deformación son independientes de el tiempo de aplicación de la carga, siempre que se esté dentro de los rangos usuales de esfuerzo, temperatura y otra serie de variables. En el caso del concreto el efecto del tiempo de aplicación de la carga debe ser tomado en cuenta en las consideraciones de recuperación elástica, ya que ésta disminuye con el tiempo a causa del "creep" del concreto principalmente. "Creep" es la propiedad de ciertos materiales, por la cual ellos continúan deformándose a través del tiempo, cuando están sometidas a carga sostenida, sin necesidad de que haya un incremento en los esfuerzos. La deformación causada por el "creep" del concreto es generalmente mayor que la deformación instantánea, llegando a alcanzar valores del orden de dos y hasta tres veces la deformación instantánea. Esta deformación debida al "creep" varía dependiendo de la edad del concreto, relación agua-cemento, zonas de refuerzo, etc.

Esta deformación se incrementa rápida e inmediatamente después de la aplicación de la carga, variando cada vez menos a medida que

transcurre el tiempo, siendo entonces, una curva de tipo exponencial. En la figura inferior se muestra una curva típica para el "creep", en un concreto de 28 días de edad, bajo un esfuerzo de 600 lbs/plg².



—Curva Típica del Creep—

Se puede observar que en menos de ocho meses la deformación total fue cerca de 3 veces la deformación instantánea. Si la carga se hubiese mantenido, la deformación habría seguido la línea llena. Al retirar la carga a los 230 días, se presentó una recuperación elástica equivalente a la deformación instantánea más un cierto valor de la deformación diferida. Al volver a cargar el concreto en una fecha posterior, las deformaciones hubiesen seguido la línea punteada.

Prácticamente, las deformaciones diferidas son aproximadamente proporcionales a la magnitud de los esfuerzos aplicados. Como se indicó anteriormente, la deformación diferida varía según una ley exponencial, en donde la pendiente de la curva es más pronunciada al inicio y va decreciendo gradualmente con el paso del tiempo, llegando a ser los valores de deformación total entre 2 y 3 veces la instantánea, en un

lapso que oscila entre 2 y 5 años. Se observa entonces la importancia que tiene el "creep" en el estudio de las deformaciones, por lo que se tratará más detalladamente en el capítulo siguiente.

3.— CREEP EN EL CONCRETO

3.1.— HISTORIA

Es muy probable que el fenómeno del "creep" haya sido observado por primera vez alrededor del año 1907, año en que Hatt (23), de la Universidad de Purdue, reportó que en los resultados de una serie de ensayos de deflexión en vigas se observó una cierta plasticidad en el concreto bajo la aplicación de una carga sostenida durante un largo período de tiempo. En 1915, en Minnesota, McMillan (23) realizó una serie de ensayos similares a los de Hatt, incluyendo losas y vigas, observando además de la deflexión los cambios de deformación en las fibras. Estas observaciones llamaron la atención sobre la necesidad de separar las deformaciones por "creep" y por contracción del concreto.

Goldbeck y Smith (23) en el año de 1916 encontraron que el "creep" es más rápido al inicio, y va disminuyendo progresivamente. Además reportaron que cuando se retira una carga que fue aplicada durante mucho tiempo, la recuperación de la deformación diferida, o sea, aquella que se debe al "creep", es relativamente pequeña. En 1917, Lord (23) confirmó los reportes anteriores y enfatizó que la contracción del concreto disminuye los esfuerzos de tensión en el acero a flexión. También indicó que el "creep" tiende a disminuir la resistencia en las regiones de momento negativo sobre los apoyos, así como a incrementar las deflexiones en las regiones de momento positivo. Shank (23), en la Universidad del Estado de Ohio, inició sus investigaciones sobre el "creep" en el año de 1919. Realizó ensayos bajo condiciones de esfuerzos sostenidos, y también, de deformaciones sostenidas, por un período de varios años. Presentó una fórmula para el cálculo de la deformación debida al "creep", así como ejemplos de aplicación en vigas y columnas.

En 1927, Faber (23), en Inglaterra, publicó los resultados de sus ensayos y presentó una teoría en la cual los efectos de la contracción y del "creep" fueron incorporados para tomar en cuenta los cambios del módulo de elasticidad a través del tiempo. En el mismo año, Davis (23), de California, realizó ensayos bajo condiciones de temperatura y humedad controladas. En el año de 1930, Glanville, de Inglaterra, reportó una serie de ensayos y formuló la mecánica teórica del "creep". Más recientemente Whitney, y también Straub (23), mostraron cómo el "creep" y la inelasticidad reducen los esfuerzos secundarios en los arcos de las

estructuras. McHenry (23) y otros demostraron que, en el rango elástico, o sea, el rango de trabajo, las deformaciones por "creep" son aproximadamente proporcionales a las deformaciones instantáneas.

Entre los años de 1947 y 1952, Washa y Fluck (34), reportaron sobre sus ensayos de deflexión a largo plazo, realizados en vigas simple y doblemente reforzadas, que habían sido impermeabilizadas sellándolas, y curadas al aire. Ellos variaron las resistencias de los concretos, relaciones luz-peralte y porcentajes de acero. Chequearon los efectos elásticos de "creep" y por contracción en forma separada. Determinaron la importancia y efectividad del acero en compresión para disminuir las deflexiones por "creep". Ultimamente Branson (11), y otros investigadores ha realizado otros ensayos. Para mayor detalle ver el Capítulo 6, Sección 6.4.

3.2.— GENERALIDADES

Como se indicó en el capítulo 2, el concreto sometido a la acción de las cargas, al igual que otros materiales, desarrolla una deformación elástica instantánea proporcional a la magnitud de la carga. Adicionalmente, si la carga es sostenida, el concreto continúa deformándose por un cierto tiempo, según una ley exponencial. Debido a que esta deformación secundaria no aparece inicialmente en forma proporcional a la magnitud de las cargas o esfuerzos aplicados, se dio en llamarla "deformación diferida". Esta deformación se ve influenciada principalmente por el efecto del "creep". En los incisos siguientes se dará una información general sobre factores incidentes en el "creep", como es su naturaleza, el efecto que tienen los constituyentes, las proporciones de los materiales, el curado, etc. . . .

3.3.— NATURALEZA

La hidratación del cemento portland se lleva a cabo a través de un proceso que incluye la formación de una especie de gelatina alrededor de cada una de sus partículas. Este proceso continúa hasta que la partícula ha completado su hidratación. El tiempo requerido para que dicho proceso se concluya puede variar grandemente dependiendo de las condiciones imperantes. Además influye notablemente el tamaño de las partículas del cemento, la cantidad de agua presente, influencia de

aceleradores y retardadores, etc.

El "creep" es debido principalmente a la compresión de dicha gelatina por la aplicación de la carga. Parte de él puede ser debida también a la pérdida de volumen de agua que se ve forzada a salir a la superficie a través de las capilaridades. Por esta razón, las deformaciones por "creep" son mayores en regiones de atmósfera seca. También, los efectos del "creep" son grandes en miembros pequeños, concretos con alta relación agua-cemento, concretos curados en atmósferas secas, miembros cargados a temprana edad, etc. Los efectos del "creep" son mayores inmediatamente después de la aplicación de la carga, y disminuyen rápidamente a través del tiempo.

Para concretos curados al aire, se puede esperar que cerca de una cuarta parte de la deformación total ocurrirá en los primeros catorce días de carga, la mitad en los primeros tres meses, y las tres cuartas partes en el primer año. A los cuatro años el "creep" que pueda ocurrir es (bajo recuperándose su efecto completamente al retirar la carga. Se cree que el concreto alcanza un estado estable a los cinco años, debido a la solidificación de las gelatinas.

3.4.— EFECTO DE LOS CONSTITUYENTES

Tanto la composición como el grado de fineza del cemento portland influyen las características del "creep". Concretos hechos con cementos que generan bajas temperaturas son afectados por el "creep" más que aquellos concretos hechos con cemento normal. En una serie de ensayos realizados por Washa (34) para el Instituto Americano del Concreto (ACI), concretos hechos con cementos normales presentaron menos deformación que aquellos hechos con cementos que generan baja temperatura.

Los datos sobre el efecto del grado de fineza del cemento en las propiedades del "creep" son escasos pero se tiene la idea de que este no es un factor muy importante. En general, no se ha realizado mucho trabajo para determinar los efectos de los constituyentes en las propiedades del "creep" del concreto de cemento portland. Se ha podido observar que el empleo de inclusores de aire no tiene mayor efecto en el "creep", así como también se ha notado que los concretos que incluyen puzolanas presentan mayor efecto que los que no las contienen. Como

regla, en aquellos elementos estructurales en los que las deformaciones sea un factor importante, o lo que es lo mismo, que se deba tener cuidado con el "creep", es mejor no utilizar elementos adicionales a los necesarios para obtener concretos normales, a menos que sus efectos en la contracción y el "creep" hayan sido determinados.

El tamaño, graduación y característica mineral de los agregados tienen efectos apreciables en el "creep" del concreto de cemento portland. Bajo condiciones comparables, los efectos del "creep" y de la contracción disminuyen cuando el tamaño máximo del agregado grueso se incrementa, así como también disminuyen cuando se utiliza agregados finos de buena calidad, bien graduados, y con poco contenido de vacíos. Agregados duros y densos con bajo índice de absorción y alto módulo de elasticidad son deseables cuando se quiere obtener un concreto de deformaciones bajas.

3.5.— EFECTO DE LAS PROPORCIONES

En la consideración de los efectos de las proporciones de mezcla sobre el "creep", hay que tomar en cuenta las curvas de interrelación entre el contenido de agua, asentamiento, relación agua-cemento, y proporciones de los constituyentes. Mediante ensayos de varios experimentadores se ha demostrado que el "creep" del concreto decrece cuando también la relación agua-cemento y el volumen de la pasta de cemento decrecen. Además, se ha mostrado que cuando se mantiene constante la relación agua-cemento, el "creep" aumenta cuando se incrementa el volumen de la pasta de cemento. Washa (34) determinó que concretos "puyados" (vibrados manualmente), con asentamiento del orden de dos pugladas, presentan deformaciones por "creep" 1 1/2 o 2 veces mayores que aquéllos vibrados con equipo, y con asentamientos nulos, conservados para ambos la misma relación agua-cemento.

3.6.— EFECTOS DEL CURADO

La temperatura y el grado de humedad durante el período de curado anterior a la aplicación de la carga afectan notablemente al "creep". Este disminuye en el concreto cuando el grado de hidratación aumenta. Consecuentemente, considerando la hidratación independientemente de los demás factores, el concreto curado con agua presenta menos "creep" que el concreto curado al aire. Se debe también

tomar en cuenta que las condiciones de temperatura y humedad durante el curado pueden causar deformaciones por contracción en el concreto, lo cual puede tener una decidida influencia en el "creep". Los efectos del tamaño del miembro tienen influencia sobre el "creep", ya que miembros pequeños responden más rápidamente que los miembros grandes a los cambios de humedad. O sea, que bajo condiciones similares de curado, el grado de hidratación y contenido de humedad en miembros grandes y pequeños es distinto a través del tiempo, con lo que el efecto del "creep" es distinto en ambos.

3.7.- EFECTO DEL TIEMPO DE CARGA

Mediante ensayos se ha demostrado que los efectos del "creep" incrementan rápidamente durante el período inicial de aplicación de las cargas, y luego continúan incrementándose pero con un rango de variación menor. Aproximadamente entre una cuarta y una tercera parte de la deformación total debida al "creep" ocurre durante el primer mes de carga sostenida en miembros de concretos de sección moderada. Por lo general, las deformaciones por "creep" cesan a los cinco años, o por lo menos, son completamente despreciables. Se puede considerar con razonable exactitud que la deformación que ocurre a los dos años de carga sostenida es sensiblemente igual a la deformación máxima a esperar, o lo que es igual, que después de los dos años se puede considerar que los incrementos en deformación son despreciables.

3.8.- EFECTO DE LA MAGNITUD DE LOS ESFUERZOS

Los efectos del "creep" han sido observados aún a esfuerzos tan bajos como el 1 o/o de la resistencia última del concreto ensayado. También se ha notado que las deformaciones por "creep" son aproximadamente proporcionales al esfuerzo sostenido, siempre que se esté dentro de los rangos usuales de esfuerzos de trabajo. La tendencia a separarse de una exacta proporcionalidad aumenta cuando los esfuerzos sostenidos se incrementan. Esfuerzos sostenidos arriba de los esfuerzos normales de trabajo producen "creep" cuyos efectos se incrementan rápidamente en forma progresiva, dependiendo de la razón de incremento de los esfuerzos. En el caso de oscilaciones en los esfuerzos, o sea, para esfuerzos sostenidos altos y bajos en períodos produce cambios en la razón de incremento del "creep". La deformación instantánea debida a la

primera aplicación de carga es mayor que cualquier valor subsiguiente. Generalmente el cambio en el valor de la deformación instantánea debido a la recarga y el valor de la recuperación de dicha deformación debido a la descarga no son afectados apreciablemente por el número de oscilaciones. En ensayos realizados para ciclos de variación de carga alta a baja en intervalos de tiempo iguales, se ha observado que para condiciones similares de esfuerzos las deformaciones residuales son las mismas al final de un período dado independientemente del número de ciclos.

La recuperación de la deformación diferida que se obtiene después de suprimir los esfuerzos aplicados es relativamente pequeña, y se obtiene en un tiempo corto. Esta deformación se puede recuperar totalmente si se toma en cuenta los cambios en las propiedades del concreto durante el período de carga y descarga.

3.9.— INFLUENCIA DE LOS ACELERADORES

En ensayos realizados por el Instituto Americano del Concreto (ACI) se observó que las mezclas conteniendo aceleradores presentaban diferencias en el "creep" respecto a aquellas mezclas simples, al cabo de unos cuantos días. Para especímenes cargados a los siete días de edad, y bajo condiciones de humedad relativa iguales, las mezclas presentaron comportamientos similares. En ambientes secos se observó que mezclas conteniendo aceleradores a base de cloruro de calcio presentaban deformaciones por "creep" alrededor de dos veces las que se desarrollaban en mezclas simples. Después de noventa días de carga las mezclas con aceleradores a base de cloruro de calcio tenían deformaciones siete veces mayores que las deformación instantánea registrada en ellas.

Por lo general, el uso de los aceleradores en los concretos cargados a los siete días no produjo deformaciones sensiblemente diferentes a las de los concretos simples, pero en el caso de carga a los veintiocho días de edad sí se observó un cierto incremento en las deformaciones en aquellos concretos que incluían aceleradores a base de cloruro de calcio. Los otros aceleradores no tuvieron mayor influencia en el "creep".

También se observó que la edad del concreto bajo carga fue de menor importancia en las muestras almacenadas en ambientes húmedos.

La disminución del "creep" con la edad del concreto fue, sin embargo, mayor en las muestras guardadas en ambientes secos que aquéllas que se almacenaron en ambientes húmedos.

Otra observación fue sobre la falta de correlación entre el "creep", el grado de hidratación y la velocidad en la obtención de la resistencia última del concreto en el caso de muestras con aceleradores. Esto es debido a un cambio fundamental en la morfología de la "gelatina" referida anteriormente, como resultado de la utilización de los aceleradores. También se ha notado el desarrollo de cambios aislados en la estructura química y física en las pastas de cementos o en los componentes individuales del cemento, bajo la presencia de aceleradores.

3.10.— EFECTO DE LAS CARGAS SOSTENIDAS SOBRE LAS PROPIEDADES DEL CONCRETO.

Los períodos largos de carga sostenida también influyen otras propiedades del concreto. Experimentalmente se ha demostrado que el módulo de elasticidad de los cilindros de concreto que han absorbido carga durante períodos bastante largos, de alrededor de diez años, es aproximadamente un 25 o/o mayor del módulo de elasticidad de otros cilindros que no han recibido carga durante el mismo período. Los efectos sobre la resistencia última no están bien definidos, ya que cilindros "puyados" (vibrados a mano) y cargados durante períodos de diez años y medio han mostrado una resistencia mayor en aproximadamente un 5 o/o de la que muestran los que no han sido cargados, pero con cilindros de concretos vibrados con equipo presentan una resistencia menor que la mostrada por los que no han sido vibrados, en un porcentaje también del 5 o/o. Se ha llegado a determinar relaciones definitivas entre el módulo de elasticidad (a varias edades) y el "creep" que ocurre en volúmenes determinados de concreto curado.

Información sobre la influencia del tiempo en la relación de Poisson está inconclusa actualmente. Además, es conveniente que se realice investigación adecuada para determinar la naturaleza de las variaciones en el comportamiento del concreto bajo diferentes tipos de esfuerzos.

3.11.— EXPRESIONES MATEMATICAS PARA OBTENER LA DEFORMACION DEBIDA AL CREEP

Muchos intentos se han llevado a cabo con el fin de desarrollar expresiones matemáticas basadas en las curvas de relación deformación-tiempo, con objeto de que éstas sirvan para predecir la deformación por "creep" del concreto sujeto a cargas constantes, y también variables que se apliquen en forma más o menos continuada. Sin embargo, estas fórmulas no han recibido mayor aceptación, y mucho menos han sido usadas, ya que la mayoría de los diseñadores previenen los efectos del "creep" utilizando un módulo de elasticidad modificado, el cuál se encuentra comúnmente dividiendo el módulo de elasticidad real por dos. Este método tan simple resulta razonablemente aceptable para una gran variedad de problemas de concreto, pero no siempre es válido y puede en ocasiones proporcionar resultados engañosos.

Entre las fórmulas que se han propuesto, está la de Lorman (34), basada en la ecuación de la hipérbola:

$$Q_c = \frac{m \cdot t \cdot g}{n + t}$$

en la cual Q_c es la deformación por "creep" en M pulgada/pulgada, g es el esfuerzo en libras/pulgada cuadrada, t es el tiempo de aplicación de carga en días, m es una constante llamada coeficiente del "creep" dada en pulgada/pulgada/libra/pulgada cuadrada, y n es una constante para la relación creep-tiempo medida de días. Además presentó ecuaciones para la relación creep-tiempo cuando el concreto está sometido a cargas variables sostenidas.

También McHenry (34) ha sugerido que la siguiente ecuación proporciona resultados satisfactorios para los efectos del "creep" cuando el concreto está sometido a esfuerzos constantes sostenidos:

$$Q = A(1 - e^{-rt}) + B e^{-pk}(1 - e^{-mt})$$

en la que Q es la deformación por "creep" debida a una carga unitaria, k es la edad del concreto al tiempo de carga, t , es el tiempo de duración de la aplicación de la carga, y A , B , r , p y m son constantes que deben ser determinadas en ensayos de laboratorio. Al igual que Lorman, McHenry también ha propuesto fórmulas para obtener la deformación cuando el concreto está sometido a esfuerzos variables sostenidos.

Otra fórmula es la propuesta por Shank (34), basada en la suposición de que el "creep" es proporcional a los esfuerzos sostenidos aplicados:

$$Q = Ct^{1/r}$$

en la que Q es la deformación unitaria del concreto debida al "creep" en $\frac{1}{4}$ pulgada/pulgada/libra/pulgada cuadrada de los esfuerzos aplicados, t es el tiempo de aplicación de la carga en días, C es un coeficiente deducido de ensayos, correspondiente a la deformación por "creep" producida por un esfuerzo unitario en el primer día de aplicación de la carga, y r es una constante también deducida de ensayos.

En la fórmula de Shank se encuentra de resultados experimentales que para aquellos concretos en los cuales la resistencia varía entre 2500 y 3750 lbs/plg², hechos con cemento portland standard y con un buen agregado de piedra caliza, y bajo aplicación de carga a la intemperie, a una edad de 28 días, que ésta toma la forma:

$$Q = .13t^{-.33}$$

Esta fórmula se considera satisfactoria para el primer año de carga, utilizando los siguientes factores que afectan al valor de Q cuando los períodos son mayores:

Números de años de carga	Factor
1	1.00
2	1.17
3	1.26
4	1.30
5 o más	1.33

Si el concreto es hecho de cemento portland ordinario, y es sometido a carga inicial a edades distintas de 28 días, Shank modifica el valor de C dado en la fórmula anterior a:

$$C = \frac{0.500}{2.5a^{0.5}}$$

en la que a es la edad en días al tiempo de aplicación de la carga. La siguiente tabla es aplicable para concretos cargados en la intemperie, y utilizando como agregado en su fabricación piedra caliza de buena calidad.

Clase de Concreto	Edad de Carga	Coeficiente C	
		Cemento Portland Standard	Cemento Portland Alta Resistencia Inicial
$f_c = 2500-3750 \text{ #/plg}^2$	3 días	---	0.15
	7 días	0.23	0.10
	14 días	0.17	0.07
	28 días	0.13	0.05
	60 días	0.10	0.034

Para concreto de alta resistencia, o sea, entre 4000 y 5000 lbs/plg², la información es escasa. Usando como agregado silicio, Shank encontró que C es aproximadamente 0.085 cuando el concreto tiene 28 días de edad al tiempo de carga, y ésta se aplica a la intemperie.

4.— METODOS DE CALCULO DE LAS DEFLEXIONES INSTANTANEAS.

4.1.— CONCEPTOS

—*Definición de Flecha de una Viga:* La deformación de una viga se suele expresar en función de la flecha desde la posición no deformada. Se mide desde la superficie neutra de la viga deformada hasta la posición original de dicha superficie. La figura adoptada por la superficie neutra de la viga deformada se conoce con el nombre de curva elástica de la viga. En la figura de la izquierda se representa esquemáticamente una viga cualquiera sin deformar, y en la figura de la derecha se muestra la forma que toma la misma viga bajo la acción de la carga aplicada.



Se dice que el desplazamiento "y" es la flecha de la viga. Generalmente, sólo interesa el valor de la flecha en los puntos máximos, pero en determinadas ocasiones es de utilidad el poder determinar la flecha "y" para cada valor de "x" a lo largo de la viga.

—*Importancia de la Flecha de las Vigas:* Las condiciones de diseño de las vigas imponen frecuentemente limitaciones sobre las flechas, lo mismo que sobre los esfuerzos. Por consiguiente, además del cálculo de la resistencia de la viga, es esencial que el diseñador sea capaz de determinar las flechas. Así, una viga bien diseñada no sólo debe ser capaz de resistir la acción de las cargas a que estará sometida, sino que además deberá tener flechas dentro de límites tolerables. Por ejemplo, la máxima flecha permitida por el código de el Instituto Americano del Concreto (ACI) es de $L/180$ (L es la luz) para la deflexión instantánea causada por carga viva, y ésta para el caso en que no exista elementos no-estructurales que puedan ser dañados por deflexiones mayores.

Otro punto importante de las deflexiones es que el cálculo de las reacciones en vigas estáticamente indeterminadas se realiza con ayuda de relaciones entre las cargas actuantes y las deformaciones.

4.2.- METODO DE LA DOBLE INTEGRACION

—Deducción de la Fórmula General: Asumamos que se tiene la viga mostrada en la figura de la izquierda, sometida a la acción de dos momentos iguales y contrarios de magnitud M . La barra está en equilibrio estático.

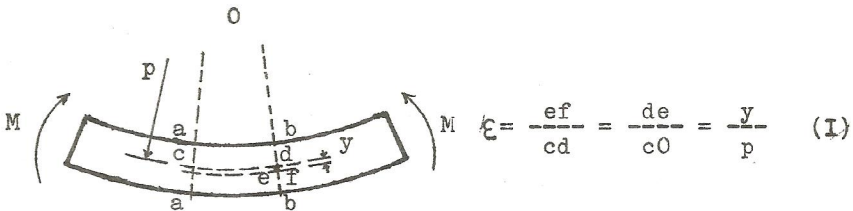


Como el momento flector tiene el mismo valor en todos los puntos de la barra, se dice que la viga está en un estado de flexión pura. Para determinar la distribución de esfuerzos, cortemos la viga por un plano que pase por ella perpendicularmente a su eje geométrico. De este modo, las fuerzas a determinar son exteriores al nuevo cuerpo formado, aún cuando son efectos internos con respecto al cuerpo original sin cortar. El diagrama de cuerpo en libertad de la parte de la viga a la izquierda del plano de corte aparece ahora como en la figura de la derecha. Evidentemente, debe actuar un momento M sobre la sección cortada por el plano para que la parte izquierda de la viga esté en equilibrio estático. Este momento M que actúa en la sección del corte representa el efecto de la parte derecha de la viga sobre la izquierda. Como se ha suprimido la parte derecha, hay que sustituirla por su efecto sobre la izquierda, y este efecto está representado por el momento M , que es la resultante de los momentos de las fuerzas que actúan perpendicularmente a la sección del corte en el plano del papel. Ahora es necesario hacer varias hipótesis para determinar la naturaleza de la variación de estas fuerzas sobre la sección.

Es útil considerar que la viga está formada por un número infinito de fibras delgadas longitudinales. Se supone que cada fibra longitudinal actúa independientemente de cada una de las demás, ésto es, que no hay presiones laterales ni esfuerzos cortantes entre dos fibras continuas, por lo que cada una está sometida solamente a tensión o compresión axial. Se supone además que una sección plana de la viga normal a su eje antes de aplicar la carga sigue siendo plana y normal a su eje después de aplicarla. Finalmente, se admite también que el material sigue la ley de

Hooke (ya que por tratarse de deformaciones instantáneas se supone que se está dentro del rango elástico), y que el módulo de elasticidad en tensión y compresión son iguales (lo que teóricamente se obtiene en vigas de concreto reforzado con el uso del área de acero transformada).

Considerando ahora dos secciones transversales contiguas "aa" y "bb" marcadas en el lado de la viga, como se muestra en la figura de la parte inferior. Antes de aplicar la carga estas reacciones son paralelas entre sí. Después de aplicados los momentos, estas secciones siguen siendo planas, pero han girado entre ellas hasta la posición representada, donde el punto O es el centro de curvatura de la viga. Evidentemente, las fibras de la cara superior están en un estado de compresión, mientras que las de la cara inferior están sometidas a esfuerzos de tensión. La línea "cd" indica la superficie en que las fibras no sufren ninguna deformación durante la flexión, por lo que se le designa con el nombre de superficie neutra, y a su intersección con una sección cualquiera se le llama eje neutro. El alargamiento de la fibra longitudinal situada a la distancia "y" (considerada positiva hacia abajo) se puede encontrar trazando la línea "de" paralela a "aa". Si "p" representa el radio de curvatura de la viga flexada, se obtiene mediante triángulos semejantes cOd y edf que la deformación de dicha fibra es:



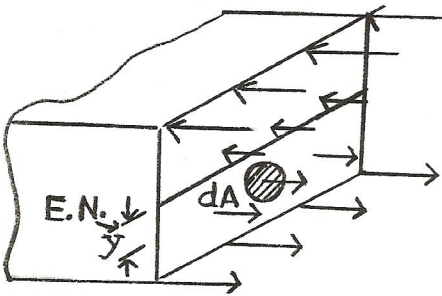
Por lo tanto, las deformaciones de las fibras longitudinales son proporcionales a la distancia "y" al eje neutro.

Como se cumple la ley de Hooke y, por lo tanto, el módulo de elasticidad del material es igual al cociente de dividir el esfuerzo por la deformación ($E = \sigma / \epsilon$), se deduce inmediatamente que los esfuerzos que existen en las fibras longitudinales son proporcionales a la distancia "y"

de la fibra al eje neutro:

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} \quad (II)$$

Consideremos una viga de sección rectangular, aunque la deducción sirve realmente para cualquier sección que tenga un plano de simetría. En este caso los esfuerzos de flexión aparecen como en la figura mostrada. Sea dA un elemento de área de la sección a la distancia " y " del eje neutro. El esfuerzo que actúa en dA viene dado por la expresión (II) y, por consiguiente, la fuerza de este elemento es el producto del esfuerzo por el área dA , o sea:



$$dF = \frac{E y}{\rho} dA \quad (III)$$

Sin embargo, la fuerza longitudinal resultante que actúa sobre la sección es nula (para el caso de flexión pura) y puede expresarse esta condición para la suma de todas las fuerzas dF en la sección por la integral:

$$\int \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y \cdot dA = 0 \quad (IV)$$

Evidentemente, la integral de $y \cdot dA = 0$, y esta integral representa el momento estático o primer momento de la sección respecto al eje neutro, pues " y " se mide a partir de este eje. Esta integral se puede escribir como $\bar{y}A$, donde \bar{y} es la distancia desde el eje neutro hasta

hasta el centro de gravedad de la sección. De aquí se ve que si $\bar{y}A = 0$ y A no es cero, ha de serlo \bar{y} , o sea, que $\bar{y} = 0$. Por lo tanto, el eje neutro pasa siempre por el centro de gravedad de la sección. El momento de la fuerza elemental dF respecto al eje neutro está dado por:

$$dM = y \cdot dF = y \left(\frac{E y}{\rho} dA \right) \quad (V)$$

La resultante de los momentos de todas esas fuerzas elementales en toda la sección ha de ser igual al momento flector M que actúa en ella, por lo que podemos escribir:

$$M = \int \frac{E y^2}{\rho} dA \quad (VI)$$

pero en ella $I = \int y^2 \cdot dA$, por lo que resulta:

$$M = \frac{E I}{\rho} \quad (VII)$$

que puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I} \quad (VIII)$$

en la que el segundo miembro representa la curvatura de la superficie neutra de la viga. Como M variará a lo largo de la viga, la curva deformada tendrá curvatura variable. Por cálculo diferencial se encuentra una expresión de la curvatura en un punto cualquiera de la curva que representa la viga deformada. La fórmula exacta de la curvatura es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (IX)$$

En esta expresión, dy/dx representa la pendiente de la curva en un punto cualquiera, y para deformaciones pequeñas (como ocurre por lo general), esta cantidad, y sobre todo su cuadrado, son despreciables en comparación con la unidad, por lo que dicho término puede omitirse. Esta hipótesis de las deformaciones pequeñas simplifica la expresión de la curvatura que queda en la forma:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (X)$$

o sea, que para deformaciones dentro de los rangos usuales, tenemos, sustituyendo en la ecuación (VIII):

$$EI = \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (XI)$$

que es la ecuación diferencial de la curva deformada de una viga cargada con fuerzas que produzcan flexión. En cada condición específica es necesario integrar esta ecuación para obtener una relación algebraica entre la flecha y la coordenada "x" a lo largo de la viga. O sea, resumiendo, la ecuación (XI) representa analíticamente la curva deformada de una viga, en la que E es el módulo de elasticidad del material del cual está construida la viga, I es el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro (que coincide con el centro de gravedad de la sección), y M es el momento flector a la distancia "x" de uno de los extremos de la viga. Generalmente, M será función de "x", y para obtener una expresión algebraica de la flecha en función de "x" será necesario integrar dos veces dicha ecuación. En aquellos casos en los cuales I varíe con "x", se deberá también expresar el momento de inercia en función de "x", o sea, referir su variación a la variación de "x".

—Proceso de Integración: El método de la doble integración para calcular la flecha de las vigas consiste simplemente en integrar dos veces la ecuación (XI). La primera integración nos dará la ecuación de variación de la pendiente, o sea, el valor de la pendiente en cualquier punto de la viga, y la segunda, la flecha "y" para cada valor de "x". Indudablemente, el momento flector M ha de estar expresado como

función de la coordenada "x" antes de poder integrar la ecuación, así como también el momento de inercia I si varía con la longitud. Como la ecuación diferencial es de segundo grado, su solución incluirá dos constantes de integración, las cuales deberán ser determinadas a partir de condiciones de pendiente y flecha conocidas en determinados puntos de la viga. Por ejemplo, en el caso de una viga en voladizo, se determinarán las constantes por las condiciones de pendiente y flecha cero en el extremo empotrado; para una viga simplemente soportada, la pendiente es cero al centro si tiene cargas simétricas aplicadas, así como la flecha es cero en los apoyos.

Para el caso de que las ecuaciones del momento flector varían a lo largo de la viga, se deberá escribir la ecuación (XI) para cada región, y en cada una de dichas regiones se obtendrán dos constantes de integración, las cuales serán determinadas basándose en que las deformaciones y pendientes son las mismas en los puntos comunes de las regiones. Si se tiene cambios bruscos de inercia, nuevamente se escribirá la ecuación (XI) para las regiones comprendidas entre dichos cambios, y las constantes de integración que aparezcan para cada región se determinarán igual que en el caso anterior, o sea, tomando en cuenta que la pendiente y la flecha debe ser la misma en el punto común entre cada dos regiones.

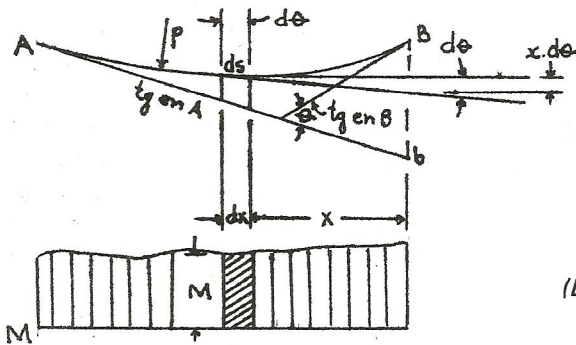
4.3.—METODO DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS

El método para determinar las deformaciones a partir del diagrama de momentos actuantes en el miembro, se debe al profesor Charles E. Greene (18), de la Universidad de Michigan, quién lo empleó por primera vez en el año de 1893. Por este método es posible encontrar las deformaciones con relación a una tangente trazada por un punto de la curva elástica. Dichas deformaciones se denominan relativas, ya que no es posible conocer su valor absoluto a menos que se conozca el valor de la pendiente de la tangente trazada que sirve de referencia. El procedimiento, aunque no siempre es el más corto, indica claramente el comportamiento físico de la pieza, y puede usarse directamente en piezas de rigidez flexional variable. Sus expresiones, al igual que las del método de la doble integración, son válidas únicamente para el cálculo de las deformaciones instantáneas, y éstas dentro de los rangos usuales de

trabajo (rangos elásticos).

—Teorema 1: El ángulo formado por las tangentes trazadas desde dos puntos A y B, o sea, el cambio angular entre ambas tangentes, viene dado por el área del diagrama de momentos flectores entre esos dos puntos, dividida por el producto del módulo de elasticidad por el momento de inercia (EI).

Si Θ representa el ángulo formado por las dos tangentes, como se muestra en la figura, este teorema puede expresarse por la siguiente expresión:



$$\Theta = \int_A^B \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (I)$$

(Diagrama de Momentos)

que se obtiene como sigue:

Sea la figura mostrada una porción de la elástica de una viga sometida a la acción de momentos flexionantes. Al igual que para el método de doble integración, representaremos por p el radio de curvatura de el elemento AB de la viga, y con M al momento flector. En el proceso de deducción de la fórmula de doble integración se encontró la fórmula (VII):

$$M = \frac{EI}{p} \quad (II)$$

donde E representa el módulo de elasticidad del material, y con I representamos el momento de inercia de la sección de la viga a su eje neutro. El elemento "ds" subtende un ángulo "d Θ ", medido respecto al

centro de curvatura del elemento "ds", como se ve en la figura mostrada. Es evidente que $ds = p \cdot d\theta$, de donde $p = ds/d\theta$. Sustituyendo en la ecuación II:

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds \quad (III)$$

Como sólo se está considerando deformaciones laterales muy pequeñas, podemos sustituir "ds" por su proyección horizontal "dx", con lo que la ecuación se transforma a:

$$d\theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (IV)$$

Este ángulo $d\theta$ puede considerarse también como el ángulo entre las tangentes a la elástica en los extremos del elemento de longitud ds., ya que los lados de esos dos ángulos son perpendiculares. Ahora, puede hallarse el ángulo θ entre las tangentes a la elástica en los puntos A y B sumando todos estos ángulos $d\theta$, lo que viene dado por la integral:

$$\theta = \int d\theta = \int_B^A \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (V)$$

Para criterio de signos, se tomará como áreas positivas las que provienen de momentos positivos, o sea, aquéllos que producen concavidad hacia arriba. Áreas positivas indicarán que la tangente derecha en B forma un ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj con la tangente izquierda en A.

—Teorema 2: La distancia vertical entre el punto B de una elástica y la tangente trazada a la curva por A es igual al momento respecto a la vertical trazada por B del área del diagrama de momentos flectores entre A y B, dividida por el producto del módulo de elasticidad por el momento de inercia (EI). Este teorema se utiliza aplicando la siguiente ecuación:

$$y' = \int_B^A \frac{M \cdot x \cdot dx}{EI} \quad (VI)$$

Para deducir esta ecuación, se hará referencia a la figura mostrada en la deducción del primer teorema del área del diagrama de momentos.

El problema estriba en calcular la distancia vertical del punto B de la elástica, a la tangente trazada a esta curva por A, que se ha representado en la figura por Bb. La contribución a esta longitud Bb de el elemento "ds" es el valor elemental $x \cdot d\Theta$ representado en dicha figura. En el teorema 1 se demostró que:

$$d\Theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (VII)$$

con lo que, multiplicado por "x" se obtiene:

$$x \cdot d\Theta = \frac{M \cdot x \cdot dx}{EI} \quad (VIII)$$

En la figura, el segundo miembro de esta ecuación representa el momento del área sombreada ($M \cdot dx$) respecto a una vertical por B, dividido por EI. La integración resulta en:

$$y' = Bb = \int_A^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{EI} \quad (IX)$$

Esta ecuación indica que si A y B son puntos de la elástica de una viga, la distancia vertical desde B a la tangente a la curva trazada por A es igual al momento con respecto a la vertical por B del área del diagrama de momentos flectores entre A y B, divididos por EI.

Como criterio de signos, se tomará como positivos los momentos de diagramas de momentos flectores positivos (concavidad hacia arriba), y estos momentos de áreas positivas darán origen a desplazamientos positivos. Desplazamientos positivos serán aquéllos en los cuales el punto B esté por encima de la tangente trazada por A. Es importante recordar,

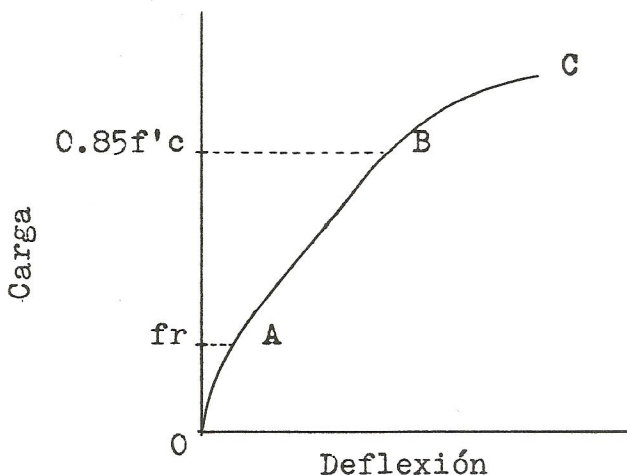
como se indicó al principio, que este teorema indica desplazamientos relativos, por lo que para obtener las flechas totales hay que combinar estos resultados con los obtenidos del primer teorema, o sea, hay que conocer el valor de la pendiente de la tangente trazada por A para poder encontrar la flecha real del punto B.

Para conocer la aplicación de este método en vigas de inercia variable, observar el ejemplo mostrado en el Capítulo 7, en que se utiliza el segundo teorema.

5.- FACTORES QUE AFECTAN LAS DEFLEXIONES EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

5.1.- GENERALIDADES

La teoría de la deflexión en vigas de concreto reforzado está basada en las limitaciones y suposiciones usuales de la teoría general de vigas. Sin embargo, una viga de concreto reforzado no llena completamente todos esos requisitos, ya que en la teoría de las deflexiones se supone materiales elásticos, y el concreto reforzado no es un material perfectamente elástico. No es un material homogéneo y tampoco isotrópico, además de que tampoco tiene una sección transversal uniforme como es requerida por las limitaciones. La suposición de que los esfuerzos en las fibras varían uniformemente con su distancia al eje neutro es cierta para el acero, pero para el concreto es solamente aproximada cuando está sometido a esfuerzos de compresión dentro de los rangos usuales de trabajo. En la figura se muestra una curva típica de deflexión de una viga de concreto reforzado.



Mientras el concreto aún absorbe algo de tensión, la gráfica carga-deflexión será curva como se muestra en la porción OA. Al alcanzar el concreto su esfuerzo de ruptura f_r , la sección se fractura y el concreto sólo absorbe esfuerzos de compresión (teóricamente) y el acero de tensión, presentándose entonces la gráfica como una línea recta, tal como se indica en la porción AB. Cuando el concreto alcanza su resistencia última en flexión, y el acero sobrepasa su límite elástico, el diagrama deja de ser una línea recta, observándose entonces deflexiones cada vez mayores para los mismos incrementos de carga, que corresponde a la parte BC de la gráfica.

La dificultad en preparar una teoría de deflexión adecuada para el concreto, que incluya a la vez las porciones OA y AB del diagrama, y que permita cubrir los casos de concreto de distinta resistencia, y también las posibles variaciones en el arreglo del acero de refuerzo, es visible. Las ecuaciones usuales para obtener la máxima flecha "y" en vigas son de la forma:

$$y_{\text{máx}} = C \frac{PL^3}{EI} = C_1 \frac{ML^2}{EI} = C_2 \frac{WL^4}{EI}$$

en donde:

- P = carga total aplicada
- M = momento total aplicado
- W = carga distribuida aplicada
- L = Luz
- E = módulo de elasticidad del material
- I = momento de inercia de la sección

C, C_1, C_2 = coeficientes que varían con el tipo de empotramiento, tipo de carga (concentrada, distribuida, momento, etc. . . .)

El problema para la aplicación de estas fórmulas en las vigas de concreto reforzado consiste en decidir qué módulo de elasticidad será el apropiado a emplear, y cuál será la inercia representativa de la viga. En los siguientes incisos se dará información sobre los distintos conceptos que se tiene acerca de estos dos factores, y en el Capítulo 6 se volverá a tocar el mismo tema, pero ya directamente desde el punto de vista de los métodos que se han empleado para calcular las deflexiones, tanto instantáneas como diferidas. En el Capítulo 8 se compara resultados de ensayos realizados en el Laboratorio de la Facultad de Ingeniería con los valores obtenidos aplicando las recomendaciones de Branson (11), que son las aceptadas y especificadas por el Instituto Americano del Concreto (ACI).

5.2.- MODULO DE ELASTICIDAD

La teoría de deflexiones en vigas asume que el módulo de elasticidad es igual en tensión y en compresión. Esta suposición no se cumple en las vigas de concreto reforzado, ya que para cargas normales el concreto en el lado de tensión está fracturado, y no contribuye notablemente a disminuir las deflexiones. Estas fracturas se presentarán en las secciones de máximo momento aún para cargas bajas. En otras secciones es posible que el concreto aún absorba algo de los esfuerzos de tensión. Para secciones con poco momento flexionante, los esfuerzos de tensión máximos en el concreto estarán alrededor de f_r (esfuerzo de ruptura en tensión). En tal caso las partículas tienen un módulo de elasticidad en tensión, el cual es constante aproximadamente, y está dado por la pendiente de la línea OA en la gráfica de la página 36. Este valor del módulo de elasticidad en tensión se aproxima bastante al valor del módulo de elasticidad en compresión. En secciones más cargadas los esfuerzos varían entre cero y $0.85f_c$ en la región de compresión. Las partículas cuyos esfuerzos son menores de más o menos $0.5f_c$ presentan un módulo de elasticidad aproximadamente constante, que viene dado por la pendiente de la curva esfuerzo-deformación para el concreto en compresión, obtenida de un cilindro de ensayos. Las partículas con esfuerzos mayores presentan módulos de elasticidad completamente diferentes, los cuales van disminuyendo en valor a medida que aumenta el esfuerzo. De aquí la necesidad de que las estructuras mantengan siempre sus cargas normales de servicio dentro de rangos elásticos. Por otro lado, en la región de tensión, los esfuerzos provocan fracturas en el concreto, por lo que sólo se considera el módulo de elasticidad del acero de refuerzo, el cual es constante.

Para efectos de cálculo se utiliza una sección transformada,

tomando como módulo de elasticidad para la fórmula de deflexión y para transformar el área de acero a su equivalente en concreto el módulo de elasticidad en compresión. Se toma el módulo de elasticidad en compresión debido a la dificultad que hay para obtener un módulo promedio más real, pero se ha determinado que este módulo proporciona razonable exactitud en los cálculos.

Como no siempre es posible realizar ensayos de laboratorio para obtener curvas esfuerzo-deformación y así poder determinar el módulo de elasticidad del concreto, se puede utilizar la fórmula recomendada por el Instituto Americano del Concreto (ACI), que proporciona bastante exactitud. La fórmula es:

$$E_c = 33 w^{1.5} f'_c{}^{0.5}$$

En esta fórmula, E_c es el módulo de elasticidad del concreto en compresión, w es el peso unitario del concreto en libras por pie cúbico, y f'_c es la resistencia del cilindro de pruebas en libras por pulgada cuadrada. La fórmula da resultados satisfactorios para concretos con pesos entre las 90 y las 155 libras por pie cúbico. Para concretos de peso normal, o sea, aquéllos cuyo peso es de 145 libras por pie cúbico, la ecuación toma la forma:

$$E_c = 57000 f'_c{}^{0.5}$$

Respecto al acero de refuerzo, el Código ACI 318-71 especifica en la sección 8.3.2 que su módulo de elasticidad podrá ser tomado como 29000000 libras por pulgada cuadrada, a menos que sea determinado de ensayos de laboratorio.

Como algo adicional hago notar que, según los cilindros de prueba que yo ensayé en el Laboratorio de la Facultad, el módulo de elasticidad recomendado por el Instituto Americano del Concreto (ACI) se aproxima bastante al módulo de elasticidad tangente, o sea, a aquél módulo que viene dado por la pendiente de la tangente en el origen a la curva esfuerzo-deformación. Para comparaciones, ver el Capítulo 8.

5.3.- MOMENTO DE INERCIA

Para el caso de vigas de concreto reforzado el momento de inercia empleado para el cálculo de las deflexiones depende de varios factores. Como se expuso anteriormente, la sección de la viga varía a lo largo de ella, dependiendo del momento flexionante que actúe en cada punto, ya que en función de dicho momento se coloca el refuerzo necesario, y además, también como función de dicho momento se producen las fracturas en la zona de tensión del concreto. Como ejemplo, en la porción central de una viga continua, o sea, en la región de momentos positivos, la sección mostrada en la figura A puede presentar las secciones transformadas indicadas en las figuras B y C, dependiendo de la posición del eje neutro.

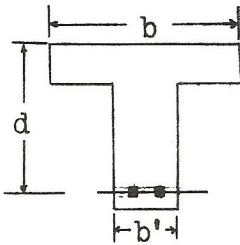


Fig. A

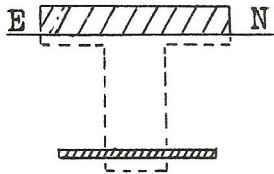


Fig. B

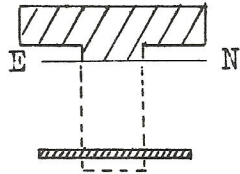


Fig. C

En los apoyos, o sea, en las regiones de momento negativo, una sección característica con refuerzo en compresión tendría el aspecto de la figura D. Su sección transformada equivalente sería la de la figura E. Se puede observar muy fácilmente que las secciones transformadas para regiones de momento positivo y negativo son completamente diferentes, y por lo tanto, sus momentos de inercia también lo serán.

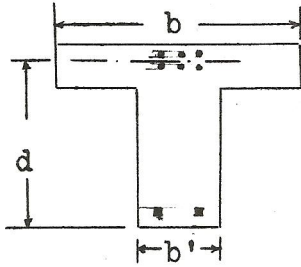


Fig. D

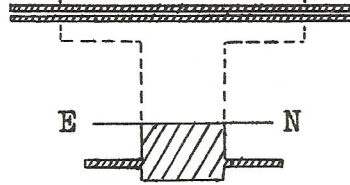


Fig. E

Cerca de los puntos de inflexión, en donde el acero de refuerzo cambia de la parte superior a la inferior, el momento de inercia varía continuamente. Debido a todas estas condiciones se observa lo difícil que es el obtener un momento de inercia representativo, ya sea por teoría o por ensayos, que sea fácil de calcular. Además, para un cálculo realista, habría que tomar en cuenta que las porciones de concreto en tensión localizados entre las fracturas también proporcionan cierta inercia.

Por considerar que la fórmula analítica desarrollada por Dan E. Branson (11) para calcular la inercia efectiva a aplicar en la determinación de deflexiones, paso a explicar su desarrollo. Vale la pena indicar que el Instituto Americano del Concreto recomienda esta fórmula en el Código ACI 318-71.

—Desarrollo de la fórmula del momento efectivo de inercia:

En las zonas fracturadas de una viga de concreto reforzado, el momento efectivo de inercia, I_{eff} , bajo la aplicación de carga instantánea, es menor que el momento de inercia de la sección transformada sin fracturar, pero mayor que el momento de inercia de la sección fracturada transformada, o sea, I_{cr} (sección transformada sin fracturar) es mayor que I_{eff} (momento efectivo), y éste a su vez es mayor que I_{cr} (sección fracturada transformada). El valor de I_{eff} en una sección dada dependerá principalmente de la extensión de las fracturas así como de la magnitud del momento flexionante, incluyendo además las características de la sección y la resistencia del concreto.

Una forma lógica de una expresión para I_{eff} , en una sección dada, que satisfaga las condiciones límites ($I_{eff} = I_{ucr}$ cuando el momento de fractura del concreto M_{cr} sea igual o mayor al momento actuante, y que $I_{eff} = I_{cr}$ cuando el momento actuante sea mucho mayor que el momento de fractura), viene dada por:

$$I_{eff} = I_{ucr} - (I_{ucr} - I_{cr}) \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^m \right]$$

en la cual m es una potencia desconocida. Ya que el momento de inercia de la sección transformada sin fracturar es apenas ligeramente mayor que el momento de inercia de la sección total sin transformar (I_g), se puede utilizar este último sin cometer un error apreciable. En los casos en que se tengan vigas altamente reforzadas, será más conveniente utilizar I_{ucr} . Sustituyendo I_g por I_{ucr} en la ecuación para I_{eff} se tiene:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^m I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^m \right] I_{cr}$$

Branson realizó una serie exhaustiva de ensayos para determinar el valor de la potencia m a utilizar en su fórmula, llegando a encontrar que el valor más adecuado para ella es de cuatro (4). Entonces, la fórmula queda:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 \right] I_{cr}$$

Además, llegó a determinar que el valor más apropiado para el momento efectivo de inercia promedio (que recomienda el Código ACI 318-71) es:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr}$$

en la que M_a es el máximo momento actuando en la viga.

5.4.- TIEMPO DE APLICACION DE LAS CARGAS

Las cargas aplicadas en forma sostenida durante largo tiempo en las vigas de concreto reforzado causan en ellas, además de las deflexiones instantáneas, otras deflexiones posteriores debidas principalmente al "creep". Como se indicó en el Capítulo 3, se cree que las deformaciones causadas por efecto del "creep" son proporcionales a los esfuerzos de compresión aplicados sobre la viga. El cálculo de las deformaciones por "creep" es muy complicado, por lo que siempre se ha tratado de cubrirlas mediante algunos factores que aplicados a la deformación instantánea, proporcionen el valor de la deformación total o de la deformación adicional.

En investigaciones realizadas en la Cornell University se determinó, mediante ensayos exhaustivos, que el siguiente método simplificado lleva a una estimación adecuada de las deflexiones a largo plazo, incluyendo los efectos de la contracción. Primero se calcula la deflexión instantánea producida por la carga sostenida, empleando fórmulas de deflexión elástica, y luego se multiplica este valor por un cierto coeficiente, con lo que se obtiene la deflexión adicional que ocurrirá a través del tiempo. Dicho coeficiente depende de la duración de la carga sostenida, así como de las zonas de refuerzo en la sección de la viga. Las deflexiones por "creep" son considerablemente reducidas por la acción del refuerzo de compresión. Esto se debe a que, cuando no existe refuerzo en compresión, el concreto está sujeto a los efectos del "creep" y de la contracción totalmente. En el caso de tener acero de refuerzo en la zona de compresión, y ya que éste no presenta "creep", ayudará a reducir las deformaciones en el concreto a través de la adherencia. Además, como ya se indicó varias veces, se cree que las deformaciones por "creep" son proporcionales a los esfuerzos aplicados, y si se colocan barras de refuerzo en la zona de compresión, éstas absorberán parte de los esfuerzos aplicados, con lo que el concreto soportará menor carga, y sufrirá menores deformaciones.

Valores apropiadas para el coeficiente que proporciona la deformación adicional se puede obtener en el Apéndice A, los cuales fueron determinados a partir de la fórmula especificada en la sección 9.5.2.3 del Código ACI 318-71.

6.— CALCULO DE DEFLEXIONES EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

6.1.— GENERALIDADES

En este capítulo se discutirán, en forma ya integrada, los principales factores que afectan las deflexiones instantáneas y las diferidas, indicándose también las fórmulas de cálculo para ellas en base a varios métodos propuestos a través de los años. Para poder determinar la deflexión de una viga en cualquier momento, se deberá conocer la magnitud y la distribución de curvaturas (ϕ = cambio de ángulo por unidad de longitud), a lo largo de la viga en ese instante. Cualquier procedimiento de integración, o método equivalente, puede ser usado para obtener las deflexiones a partir de esas curvaturas.

Para un miembro elástico homogéneo se tiene, como se encontró en la fórmula (IV) de la página 25, que:

$$d\Theta = \frac{M \cdot dx}{EI}$$

$$\phi = \frac{d\Theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

y la deflexión en cualquier punto particular podrá ser expresada como:

$$y = C \frac{PL^3}{EI}$$

en la cual C es una constante que depende del tipo de carga y restricción de los apoyos, P es la carga total en la longitud L de la viga, y EI es la rigidez en flexión.

Los principales factores que influyen el comportamiento de un miembro en sus deflexiones instantáneas son la magnitud y la

distribución de la carga, la longitud del miembro, restricciones de los apoyos, las propiedades de la sección incluyendo los porcentajes de acero, las propiedades de los materiales, y la magnitud y extensión de las fracturas por flexión. Las deflexiones diferidas, las cuales por lo general son de mayor importancia, son debidas principalmente a los efectos del "creep", así como también a la contracción del concreto. Los valores para estos efectos deberán ser aproximados usualmente, ya que ellos ocurren bajo un cambio constante en la distribución de los esfuerzos y de las deformaciones a lo largo de el espesor de la sección transversal y de la longitud de la viga. Los factores que afectan principalmente las deformaciones diferidas son los esfuerzos aplicados al miembro, las condiciones de curado, temperatura, humedad relativa, edad del concreto al tiempo de aplicación de cargas, y la duración de las cargas sostenidas.

6.2 - DESCRIPCION DEL PROCESO DE DEFLEXION

Una viga de concreto reforzado es un miembro cuyas secciones a lo largo de su longitud están sujetas a distintas configuraciones de esfuerzos durante la flexión. Su comportamiento se muestra esquemáticamente en la figura A. En los lugares sujetos a poca flexión el concreto trabaja tanto en compresión como en tensión. En los lugares en que el momento flexionante es mayor, el concreto en tensión falla en las fibras extremas, originándose pequeñas fracturas espaciadas. En las regiones de máximo momento la falla por tensión en el concreto es mayor, y las fracturas, ahora más anchas, se extienden hasta cerca del eje neutro. Sin embargo, el concreto localizado entre estas fracturas aún absorbe algo de tensión. Por esta razón los esfuerzos de tensión a que está sometido el acero comprendido entre dichas fracturas son menores que los esfuerzos en el acero situado directamente en ellas. La relación entre estos esfuerzos puede llegar a ser hasta de un orden del 60 o/o, siempre afectado por todos los factores indicados.

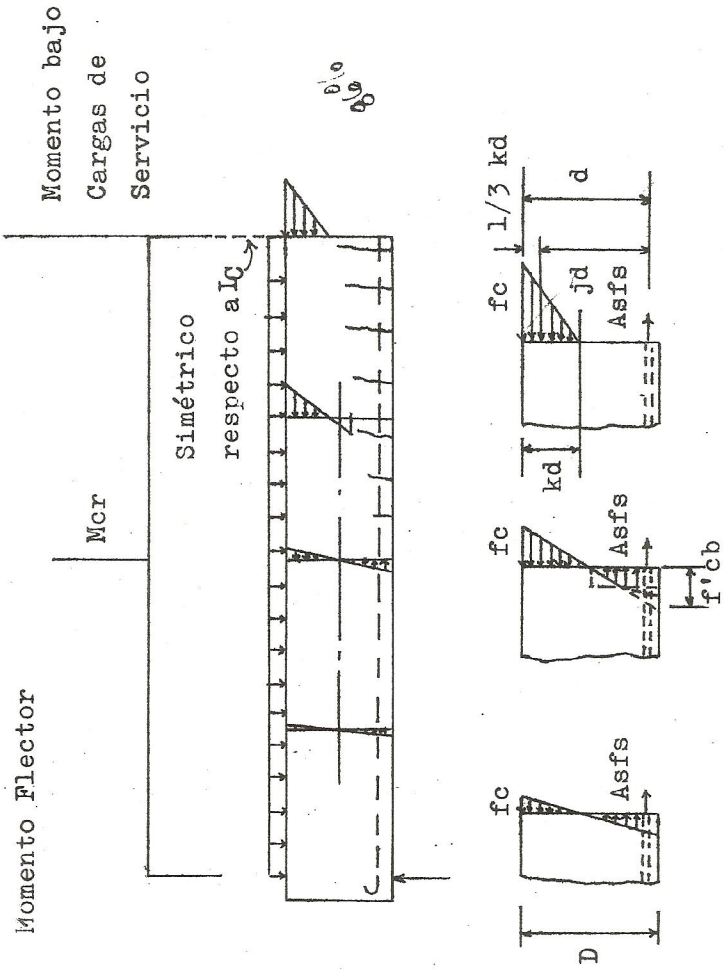


Figura A

Observando la figura B se encuentran dos fases distintas, la primera donde predomina el comportamiento de la sección sin fracturar, y la segunda, en la zona de flexión alta, en donde prevalece el comportamiento de la sección fracturada.

Para la condición de cargas sostenidas de larga duración, la formación de nuevas fracturas, el ensanchamiento de las fracturas iniciales, y los efectos de la contracción y del "creep" causan deflexiones adicionales las cuales pueden ser dos o tres veces las deflexiones instantáneas. La contracción del concreto produce un acortamiento en la viga, el cual es resistido por el acero de refuerzo, lo cual induce esfuerzos de compresión en el acero y de tensión en el concreto. La magnitud de la curvatura ocasionada por la contracción depende de la asimetría del refuerzo y de las áreas relativas de concreto y acero. Dichas curvaturas son mayores en las vigas que no tienen refuerzo en compresión (notar la importancia del refuerzo adicional en compresión), y generalmente, tienen la misma concavidad que las debidas a cargas de flexión, por lo que contribuyen a incrementar las deflexiones que producen dichas cargas.

Tomando en cuenta los efectos del "creep" solamente, el incremento en deformación con el tiempo será como se indica en la figura C mediante la línea B, indicando la línea A la distribución de deformaciones inmediatamente después de la aplicación de la carga.

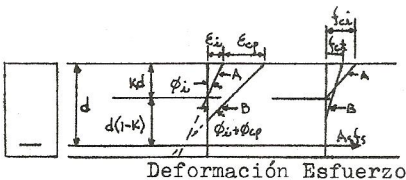


Figura C

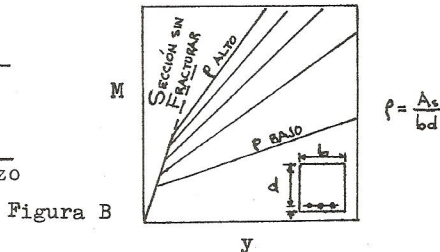


Figura B

Las deformaciones para la fibra extrema en compresión aumentan considerablemente, mientras que a la altura del acero varían muy poco. Como esto ocurre, los esfuerzos de compresión en el concreto se reducen (debido al movimiento del eje neutro hacia el refuerzo), mientras que los esfuerzos en el acero aumentan por tener menos brazo de palanca. El incremento relativo en curvatura causado por el "creep" es menor que el incremento relativo en deformación (también debida al "creep"), o sea:

$$\frac{\phi_{cp}}{\phi_i} = K \frac{\epsilon_{cp}}{\epsilon_i}$$

en donde ϕ_{cp} es la curvatura debida al "creep", ϕ_i la curvatura inicial (o instantánea), ϵ_{cp} es la deformación por "creep", y ϵ_i la deformación inicial instantánea. K es un factor de proporcionalidad menor que uno. Por lo tanto, el incremento relativo en la deflexión es menor que el incremento relativo en deformación, ambas debidas al "creep".

Las deflexiones debidas a las cargas sostenidas producidas por la contracción y el "creep" pueden ser reducidas sustancialmente proporcionando a la viga refuerzo adicional en compresión. Este tiende a compensar la diferencia de restricción a la contracción del concreto en las partes superior e inferior de la viga, con lo que se produce una deformación más uniforme a todo lo largo de la sección transversal, disminuyendo así la curvatura. Con respecto al "creep", mientras que las deformaciones en el concreto incrementan con el tiempo, los esfuerzos de compresión son gradualmente transmitidos al refuerzo en compresión, lo cual tiende a limitar la curvatura de la viga ocasionada por el "creep".

6.3.— DEFLEXIONES BAJO CARGAS DE CORTA DURACION

Debido a la variación de las cantidades de refuerzo y a la extensión de las fracturas del concreto en toda la longitud de la viga, la rigidez flexural EI no es constante. Se podría pensar en evaluar las zonas para las cuales el momento teórico de fractura ha sido excedido, y entonces calcular la sección transformada correspondiente y su respectivo momento de inercia, en distintos puntos a lo largo de la viga, basado en la condición apropiada de estado de la sección, o sea, fracturada o no

fracturada. Con EI conocido a lo largo de la viga, las ecuaciones usuales de deflexión podrían utilizarse. Este procedimiento podría subestimar la rigidez flexural de la viga, ya que probablemente se estaría despreciando la participación del concreto en tensión situado entre fracturas.

—Procedimientos de Cálculo: Debido a la complejidad en el comportamiento de las vigas de concreto reforzado sometidas a flexión, incluyendo el deseo de disponer de un método simplificado para calcular las deflexiones debidas a cargas de corta duración, o sea, las deflexiones instantáneas, se ha propuesto varios métodos. A continuación serán descritos los más importantes de ellos, por orden de aparición.

En el año de 1914, G. A. Maney, en el artículo "Relation Between Deformations and Deflections in Reinforced Concrete Beams", propuso la siguiente fórmula:

$$y = K_1 L^2 \frac{M_{\text{máx}}}{EI} = K_1 L^2 \frac{f_s + n \cdot f_c}{E_s \cdot d}$$

en la que K_1 es una constante que depende de las condiciones de carga y restricción en los apoyos, y $M_{\text{máx}}$ es el máximo momento flexionante en la viga. E_s es el módulo de elasticidad del acero, f_s es el esfuerzo en el acero y f_c es el máximo esfuerzo de compresión en el concreto, d es el peralte efectivo y n es la relación modular. Dicha ecuación está basada en una sección fracturada transformada a lo largo de la longitud de la viga.

En 1924 G. I. Swain, en el libro "Structural Engineering, Strength of Materials", presentó una expresión para calcular EI en base a la sección fracturada:

$$\frac{M}{E I} = \frac{\epsilon_s}{(1-k) d}$$

pero como $\epsilon_s = f_s/E_s$ y $M = f_s A_s \cdot j d$, se obtiene sustituyendo:

$$EI = E_s A_s (1-k) j d^2$$

As es el área de acero, k y j son factores que indican la posición del eje neutro. Los demás elementos ya fueron definidos.

En 1931, T. D. Myrlea, en el artículo "Deflections of Reinforced Concrete Members", sugirió, como director del Comité 307 de la ACI, el uso de la fórmula de Swain para el cálculo de las deflexiones.

En el año de 1940, V. E. Murashev, en el libro "Theory of Appearance and Opening of Cracks, Computation of Rigidity of Reinforced Concrete Members", propuso que la sección transformada debía ser empleada para calcular el momento de inercia, pero con un módulo de elasticidad del acero E_s incrementado (\bar{E}_s), para tomar en cuenta la participación del concreto de tensión entre fracturas.

$\bar{E}_s = E_s/T$ donde T es menor o igual que 1.0

$$T = 1 - (2/3) (M_{cr}/M)^2$$

en la que M es el momento producido por la carga de servicio, y M_{cr} es el momento de fractura del concreto. Para propósitos prácticos, el momento de fractura vendrá dado por:

$$M_{cr} = f'_{cb} I_g / y_t$$

en la que f'_{cb} es el esfuerzo de ruptura del concreto en tensión, I_g es el momento de la sección sin fracturar ni transformar, y y_t es la distancia del eje neutro de dicha sección a la fibra extrema en tensión.

En 1947 la Portland Cement Association recomendó el uso del momento de inercia de la sección sin fracturar, despreciando los efectos del acero. Para las secciones usadas en los miembros en esa época, que no eran muy esbeltas, y con cargas de trabajo, se obtenía resultados satisfactorios. Sin embargo, en vigas de sección reducida, empleando aceros de alta resistencia, se obtenía deflexiones menores que las calculadas.

En el año de 1960 Yu y Winter en el artículo "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads", basados en un estudio extensivo sobre la información existente acerca de las deflexiones en vigas, sugirieron dos métodos de cálculo para

la estimación de las deflexiones instantáneas.

Método A: Utiliza el momento de inercia de la sección fracturada transformada como un valor constante a lo largo de toda la longitud en vigas simplemente apoyadas, y un momento de inercia promedio para las regiones de momento positivo y negativo en el caso de vigas continuas.

Método B: Para tomar en cuenta la participación del concreto en tensión entre fracturas, las deflexiones calculadas por el método A serán multiplicadas por el siguiente factor de corrección:

$$\left(1 - b' \frac{M_1}{M_{\text{máx}}}\right)$$

en la cual $M_{\text{máx}}$ es el momento debido a cargas de trabajo, b' es el ancho de la viga en la zona de tensión, y M_1 viene dado por:

$$M_1 = 0.1 (f'_c)^{2/3} D (D - kd)$$

en la que D es el espesor total de la viga. La derivación de estas ecuaciones se basó en una teoría elástica aproximada, con el factor 0.1 determinado empíricamente, para la base de que $M_{\text{máx}}$ es el momento máximo. El método B es aplicado directamente en los cálculos de deflexiones con el uso del siguiente momento efectivo de inercia de la misma manera que el momento de inercia de la sección fracturada transformada es usado en el método A:

$$I_{\text{eff}} = I_{cr} / \left(1 - b' \frac{M_1}{M_{\text{máx}}}\right)$$

Mediante ensayos se determinó que por lo general, el método B proporciona mejores resultados que el método A.

En 1961, el Comité Europeo del Concreto (CEB) recomendó que las deflexiones debían ser calculadas en dos partes:

Parte 1:

$M_1 =$ momento correspondiente a la parte de carga que produce la fractura inicial $= f'_{cb} l g / y_t$; $K_1 = E_c l g$, y $E_c = 73500 f'_{c0.5}$. Con estos valores se obtiene y_1 .

Parte 2:

$M_2 = M - M_1$, donde M es el momento correspondiente a la carga total.

$K_2 = E_s A_s d^2 (1-2q) (1-2q/3)$, la cual equivale a la rigidez elástica en flexión para una sección fracturada, tal como la ecuación propuesta por Swain, pero sustituyendo $(1-k)$ y j por sus equivalentes aproximados en resistencia última, siendo estos $(1-2q)$ y $(1-2q/3)$ respectivamente. El valor de q es $q = (A_s/bd) (f_y/f'_c)$. Con estos valores se obtiene y_2 , empleando como momento M .

y'_2 se obtiene empleando M_2 con $K'_2 = 0.75K_2$

La flecha total se obtiene mediante:

$$y = y_1 + y'_2 \text{ menor o igual que } y_2$$

Su desventaja se debe a que no toma en cuenta las variaciones de la rigidez en flexión a lo largo de la viga.

El Código ACI 318-63 especifica que para el cálculo de las deflexiones a corto plazo (instantáneas), el momento de inercia debe ser tomado como el de la sección sin fracturar cuando $p.f_y$ sea menor que 500, y que debe ser empleado el de la sección fracturada transformada cuando $p.f_y$ sea mayor que dicho número. Esto se hizo con el fin de evitar el cálculo de deflexiones menores que las reales (con el uso de la sección sin fracturar) en vigas con valores por encima de 500. Para vigas continuas, la ACI fija que se puede tomar un momento de inercia promedio entre las regiones de máximo momento positivo y negativo. En el caso de resistencia última, la sección 1507 del Código indica que las deflexiones se deben chequear utilizando las cargas de servicio, en los

casos en que p , $(p-p')$, o (p_w-p_f) excedan $0.18f'_c/f_y$, o en todos aquellos casos en los cuales f_y sea mayor de 40000 libras por pulgada cuadrada. Cuando se diseña con el método de Whitney en resistencia última, un porcentaje balanceado de acero viene dado por:

$$p_{bal} = 0.46f'_c/f_y$$

Los investigadores han determinado que las deflexiones se deben chequear cuando p para vigas simplemente reforzadas, $(p-p')$ para vigas doblemente reforzadas, y (p_w-p_f) para vigas T, excedan $0.18f'_c/f_y$. Este porcentaje es muy similar al porcentaje balanceado que se obtiene en la teoría elástica, y un poco menor de la mitad del porcentaje balanceado para resistencia última. Para vigas simplemente reforzadas se tiene entonces que el porcentaje es $p = 0.18f'_c/f_y$, de donde $p \cdot f_y = 0.18f'_c = 450$ y 540 cuando $f'_c = 2500$ y 3000 lbs/plg² respectivamente. Por esta razón, la ACI aceptó el valor $p \cdot f_y = 500$ como criterio, tanto para estos concretos como para los de alta resistencia.

En el año de 1963 Dan E. Branson (11) presentó una expresión empírica para obtener el momento efectivo de inercia en cualquier sección de una viga. Por estar ésta explicada detalladamente en la sección 5.3 del Capítulo 5, no entró a mayores detalles. La ecuación es:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 \right] I_{cr}$$

donde $M_{cr} = f_{ct} I_g / y_t$. Como un promedio del momento de inercia a través de la longitud de la viga, para el caso de secciones rectangulares o T, se tiene:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr}$$

en la que M_a es el máximo momento actuante. Estas ecuaciones se aplican sólo en los casos en los cuales M o M_a son mayores que M_{cr} ; cuando sean menores, se toma $I_{eff} = I_g$. Para el caso de vigas continuas, Branson determinó que el promedio de los momentos de inercia para las regiones de máximo momento positivo y negativo da resultados ampliamente

satisfactorios. Esta última es la expresión que recomienda el Código ACI 318-71, para el cálculo de las deflexiones instantáneas.

6.4.— DEFLEXIONES BAJO CARGAS DE LARGA DURACION

—Efectos del Creep del Concreto: Las deflexiones diferidas, o sea, aquéllas que dependen del tiempo de aplicación de las cargas, en miembros de concreto reforzado sometido a flexión, son usualmente mayores que todas aquéllas originadas por otros efectos combinados durante la vida de dicho miembro. A menudo son de dos a tres veces más grandes. Debido a ésto, las deflexiones debidas al "creep" son de interés primordial, y siempre deberán ser añadidas a las deflexiones instantáneas.

Adicionalmente a la dificultad de obtener un registro de la relación creep-tiempo para un concreto particular, bajo esfuerzos constantes y uniformemente distribuidos, se presenta el hecho de que un miembro de concreto reforzado en flexión se encuentra sometido a una distribución de esfuerzos no uniformes, así como a cargas variables. Un análisis minucioso de los efectos de esfuerzos variables requiere muchas curvas de la relación creep-tiempo, así como un récord de la variabilidad de la carga. Cuando se tiene todos estos datos se puede utilizar para el cálculo de las deflexiones métodos tales como el "método de la velocidad del creep", o el "método de la superposición". Por ser estos métodos muy complicados, y que además en Guatemala no se acostumbra realizar todos estos ensayos, los cuales son largos, laboriosos, tediosos y problemáticos, no pasará a mayores detalles. Sin embargo, existe un método bastante corto y aproximado, el cual no requiere ensayos. Tal método recibe el nombre del método del "módulo sostenido". En este método se supone que el concreto va a estar sometido a esfuerzos constantes. Aunque esto no es cierto, se ha comprobado experimentalmente que los resultados que con él se obtienen son ampliamente satisfactorios. En este método lo que se hace es encontrar un módulo de elasticidad reducido o módulo efectivo, el cual recibe el nombre de módulo de elasticidad sostenido. Este módulo de elasticidad es usado para calcular la deflexión total, o sea la instantánea más la debida al "creep".

$$E_{ct} = \frac{\sigma \text{ constante}}{\epsilon_{inicial} + \epsilon_{creep}} = \frac{\sigma \text{ constante}}{(1 + C_t) \epsilon_{inicial}} = \frac{E_c}{1 + C_t}$$

Como se puede observar, éste es el método empleado por el Código ACI 318-71, con una variante en la forma de cálculo, ya que la ACI no emplea directamente el módulo sostenido, sino que utiliza el módulo normal, y la deflexión resultante la multiplica por el factor $(1 + C_t)$, o sea:

$$y = K \frac{w^m L n}{E_{ct} I} = K \frac{w^m L n}{\frac{E_c}{1 + C_t} I} = K \frac{w^m L n}{E_c I} (1 + C_t)$$

El factor que emplea la ACI incluye directamente los efectos sobre las deflexiones causadas por la contracción del concreto.

—Curvatura por Contracción de las Vigas: La contracción del concreto introduce esfuerzos en las estructuras de concreto reforzado. El acortamiento de la viga causado por la contracción es resistido por el acero de refuerzo, lo que induce esfuerzos de compresión en el acero, y de tensión en el concreto. Los esfuerzos de tensión en el concreto son máximos en las proximidades del refuerzo, y éstos, combinados con los esfuerzos de tensión originados por las cargas de flexión, provocan grietas adicionales. En los casos en que el refuerzo no tiene un arreglo simétrico, la contracción causa distribuciones de esfuerzo no uniformes, las cuales dan origen a un combeo en la viga. Hay que tomar en cuenta que, aunque los efectos de la contracción podrían ser considerados separadamente de los causados por las cargas de flexión, la curvatura por contracción es obviamente afectada por la fractura del concreto, y por lo tanto, por las cargas de flexión.

Para los casos en los cuales el contenido de acero y la excentricidad son constantes a lo largo de la viga, e iguales en las regiones de momento positivo y negativo en vigas continuas, las deflexiones por la contracción del concreto pueden ser calculadas usando:

$$y_{sh} = A \phi_{sh} L^2$$

en la que $A =$

1/2 para vigas en voladizo

1/8 para vigas simplemente apoyadas

11/128 para vigas continuas en un solo extremo

1/16 para vigas continuas en ambos lados.

Para el cálculo de ϕ_{sh} se puede utilizar la siguiente expresión:

$$\phi_{sh} = \frac{\epsilon_{sh} - \epsilon_s}{d} = \frac{\epsilon_{sh}}{d} \left(1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{sh}} \right)$$

en la que ϵ_s es la deformación del acero, ϵ_{sh} es la deformación por contracción del concreto sin ninguna restricción, y d es el peralte efectivo de la viga. Se puede utilizar valores empíricos para la relación ϵ_s/ϵ_{sh} , siendo éstos $\epsilon_s/\epsilon_{sh} = 0.1$ para vigas bastante reforzadas, y $\epsilon_s/\epsilon_{sh} = 0.3$ para vigas con refuerzo moderado. Para mayores referencias, ver el artículo "Warping of Reinforced Concrete Due to Shrinkage" por Alfred L. Miller, en el Journal de la ACI, Mayo 1958.

—Procedimientos de Cálculo: Los siguientes procedimientos para calcular deflexiones diferidas (dependientes del tiempo), están relacionados con los correspondientes procedimientos para calcular las deflexiones instantáneas descritos anteriormente en este Capítulo. Los efectos de la contracción y el "creep" están combinados en un cálculo simple en todos los métodos, excepto en el primero y el último.

En el año de 1947 la Portland Cement Association recomendó el uso del siguiente factor para ser aplicado a la deflexión instantánea (basada en la sección sin fracturar), y así obtener la deflexión total (inicial + creep) bajo cargas sostenidas:

$$K_t = \frac{t}{20.6 + 0.263 t}$$

en la que t es el tiempo de duración de la carga sostenida en días. Para $t = 5$ años, el valor $K_t = 3.6$, y para t tendiendo a infinito, $K_t = 3.8$. No indica ninguna distinción para vigas con refuerzo en compresión.

En la edición de 1961 del Manual del CRSI se sugiere que para la obtención de la deflexión "adicional" causada por la contracción y el "creep", se debe multiplicar la deflexión instantánea basada en el momento de inercia de la sección sin fracturar, por un factor que se recomienda igual a 3.0 cuando $A'_s = 0$, y como 1.5 y 1.0 para vigas simplemente apoyadas y para vigas continuas respectivamente, cuando $A'_s = A_s$

En 1960 Yu y Winter recomendaron, basados en los resultados de ensayos en 68 vigas, el uso de factores empíricos (aplicados a la deflexión calculada según el Método A, usando la sección fracturada transformada), para obtener la deflexión adicional debida a la contracción más el "creep". Dichos factores, dados para diferentes períodos de carga sostenida, son:

Duración de la Carga	Factor F		
	$A'_s = 0$	$A'_s = 0.5A_s$	$A'_s = A_s$
1 mes	0.58	0.42	0.27
3 meses	0.95	0.77	0.55
6 meses	1.17	0.95	0.69
1 año	1.42	1.08	0.78
3 años	1.78	1.18	0.81
5 años	1.95	1.21	0.82

El Comité Europeo del Concreto, en su reporte de 1961 establece: "Para cargas de larga duración se puede considerar los efectos de la contracción y el "creep" multiplicando por 3 la deflexión instantánea debida a la carga sostenida". No hace mención para vigas continuas.

El Código ACI 318-63 adopta los resultados de Yu y Winter para 5 años en el cálculo de la deflexión adicional, siendo estos de 2.0 cuando $A'_s = 0$, 1.2 cuando $A'_s = 0.5A_s$ y 0.8 para $A'_s = A_s$. No hace distinción entre vigas simples y continuas para el cálculo de las

deflexiones por cargas sostenidas, excepto la indicación de que en vigas continuas se debe emplear un promedio de la inercia de las regiones de máximo momento positivo y negativo.

Branson (11) presentó un método en 1963, en el cual provee consideraciones para el cálculo separado de los factores de "creep" y contracción. Los factores para el cálculo del "creep" que él recomienda son 1.7 cuando $A'_s = 0$, 1.2 cuando $A'_s = 0.5A_s$ y 0.8 cuando $A'_s = A_s$.

El Código ACI 318-71 utiliza los mismos factores que el Código ACI 318-63, o sea, que nuevamente emplea los valores de Yu y Winter. La principal diferencia del Código ACI 318-71 al 318-63 (en lo que a deflexiones se refiere), está en que el del año 1971 recomienda el uso del momento efectivo de inercia presentado por Branson (11), para el cálculo de las deflexiones.

7. EJEMPLOS BASADOS EN LAS ESPECIFICACIONES DEL CODIGO ACI 318-71

En el presente capítulo se hará una ejemplificación de la forma de calcular las deflexiones instantáneas y diferidas utilizando las especificaciones del Código ACI 318-71. Asimismo, se tratará de indicar un orden lógico a seguir en el cálculo, para evitar pasos innecesarios. También se presenta un ejemplo usando la fórmula de Dan E. Branson (11) en su forma original, para una viga simplemente apoyada con carga concentrada al centro. Este ejemplo indica la forma analítica en que se procedió a determinar las deflexiones de las vigas ensayadas, cuyos resultados se presentan en el Capítulo 8.

Pasos a seguir en el cálculo:

- a) Chequear si el peralte de la viga satisface lo indicado por la tabla 9.5 (a) pág. 27 del Building Code Requirements ACI 318-71. Si el peralte es igual o mayor que lo recomendado en dicha tabla, no es necesario calcular las deflexiones. Si es menor, continuar con el siguiente paso.
- b) Determinar el momento de fractura del concreto (M_{CR}), mediante la fórmula $M_{CR} = f_r I_g / \gamma_t$, en la cual I_g es el momento de inercia de la sección sin fracturar, γ_t es la distancia entre la fibra extrema en tensión y el eje neutro, y f_r es el esfuerzo de ruptura del concreto en tensión, que está dado por $f_r = 7.5 f'_c / 0.5$ para concretos de peso normal. Para concretos livianos, ver las indicaciones de modificación a dicho esfuerzo que especifica el Código.
- c) Comparar el momento de fractura con el momento actuante. Si M_{CR} es menor que $M_{actuante}$, calcular l_{cr} y luego, l_e . Si M_{CR} es mayor que $M_{actuante}$, entonces hacer $l_e = l_g$. Para el cálculo de l_e en el primer caso, emplear la fórmula:

$$l_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 l_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] l_{cr}$$

Hay que tomar en cuenta que el momento actuante M_a es el máximo momento. En vigas continuas, se calcula I_e para la región de máximo momento positivo, y también para la región de máximo momento negativo y se saca promedio.

- d) Calcular la deflexión con la fórmula indicada para el caso, o sea, si es simplemente soportada con carga uniforme, concentrada, etc., o continua, en la que se puede utilizar:

$$y_{lc} = \frac{5L^2}{48EI} \left[M_m + 0.1 (M_a + M_b) \right]$$

en la que y_{lc} es la deflexión en la línea central de la viga, M_m se puede tomar como el momento positivo en la sección crítica, M_a y M_b son los momentos en los extremos (conservando su signo), L es la luz de la viga, y EI es el producto del módulo de elasticidad del concreto $E_c = 33 w^{1.5} f_c^{0.5}$ (w = peso unitario lbs/pie³), por el momento de inercia promedio I_e encontrado en el paso anterior. Es importante recordar que los momentos son los producidos por cargas de servicio. Esta fórmula se aplica para carga uniformemente distribuida. Para otros casos, se puede deducir ecuaciones por el método de doble integración, área del diagrama de momentos u otros, o bien, sacarse de manuales.

- e) Comparar la deflexión obtenida (por unidad de longitud y/L) con los límites de la tabla 9.5 (b) pág. 28 del citado código. Esto para la deflexión instantánea. En caso de no llenar los requisitos de esta tabla, aumentar la sección, o bien, utilizar refuerzo adicional en compresión para incrementar I_{cr} .
- f) Calcular la deflexión diferida adicional empleando la expresión $(2-1.2(A'_s/A_s))$ mayor o igual que 0.6 para obtener el factor que multiplicado por la deflexión instantánea nos la proporcione (la diferida adicional). Este factor se aplica a la deflexión instantánea causada por la carga sostenida.
- g) En caso de que exista carga viva u otra que será aplicada a la viga durante un período lo suficientemente largo para influenciar el "creep", encontrar en la gráfica 9.2 pág. 110 del Building Code

Comentary el factor que, aplicado a la deflexión instantánea producida por dicha carga, nos de la deflexión diferida adicional debida a esa carga.

- h) Sumar la deflexión instantánea debida a carga muerta (y a aquélla parte de carga viva que pueda influirla) con la deflexión diferida adicional total (debida a cargas sostenidas, incluyendo las de corta duración que influencien el "creep"). Compararla nuevamente con lo especificado por la tabla 9.5 (b) pág. 28 del Código. En caso de no satisfacer el requisito exigido, lo más aconsejable es colocar acero de refuerzo adicional en la zona de compresión, con lo que se consigue una reducción notable en los efectos del "creep".

—Todas las tablas y gráficas aquí indicadas se presentan en el Apéndice A.

EJEMPLO 1: Determinar si la viga simplemente apoyada y con carga uniformemente distribuida, cuyas propiedades y condiciones se indican, satisface los requisitos del Código ACI 318-71. Asíumase que el 50 o/o de la carga viva se aplicará constantemente durante 12 meses.

Propiedades de los Materiales:

$$f'_c = 3000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$w = 145 \text{ lbs/pie}^3$$

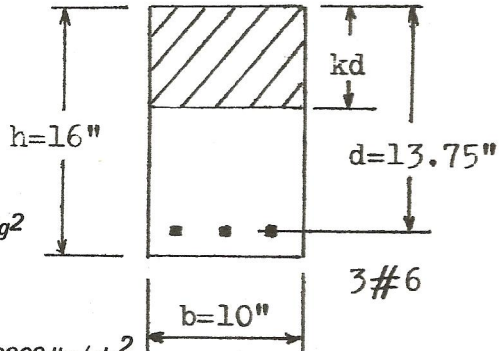
$$f_r = 7.5f'_c \cdot 0.5 = 411 \text{ lbs/plg}^2$$

$$f_y = 40000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$E_c = 33w^{1.5}f'_c \cdot 0.5 = 3160000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$E_s = 29000000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$n = E_s/E_c = 9$$



Condiciones de servicio:

$$L = 30 \text{ pies}$$

$$M_D = 217500 \text{ lbs-pies (al centro de la luz)}$$

$$M_L = 177500 \text{ lbs-pies (al centro de la luz)}$$

Pasos:

- a) Chequeando el espesor mínimo requerido por el Código:

$$h_{\min} = L/20 = 30 \times 12/20 = 18 \text{ plg}$$

Ya que el peralte de la viga (h) es menor, se debe chequear la deflexión.

- b) Determinar el valor de M_{cr} :

$$I_g = bh^3/12 = 3410 \text{ plg}^4$$

$$M_{cr} = f_r I_g / y_t = 411 \times 3410/8 = 175000 \text{ lbs-pies}$$

- c) Como este es menor que M_D , encontrar I_{cr}

La posición del eje neutro se determina mediante una igualación de momentos estáticos:

$$b(kd)(kd)/2 = n.A_s(d-kd)$$

$$10(kd)^2/2 = (9)(1.32)(13.75-kd)$$

Resolviendo se obtiene: $kd = 4.65 \text{ plg}$.

$I_{cr} = b(kd)^3/3 + n.A_s(d-kd)^2$, en la que sustituyendo tenemos:

$$I_{cr} = 1320 \text{ plg}^4$$

Hallando I_e para cada una de las condiciones, o sea, carga muerta, carga muerta + 50 o/o carga viva, carga muerta + carga viva, tenemos:

Carga muerta, $M_{cr}/M_a = 175/217.5$, $I_e = 2420 \text{ plg}^4$

Carga muerta + 50 o/o carga Viva, $M_{cr}/M_a = 175/306.3$, $I_e = 1720 \text{ plg}^4$

Carga muerta + Carga Viva, $M_{cr}/M_a = 175/395$, $I_e = 1520 \text{ plg}^4$

- d) Calcular la deflexión instantánea para cada una de las condiciones, empleando la fórmula de deflexión para una viga simplemente soportada con carga uniformemente distribuida:

$$y = 5L^2M/48EI$$

Carga Viva, $I_e = 1520 \text{ plg}^4$, $M = 177500 \text{ lbs-pie}$, $y_L = 0.50 \text{ plg}$.

Carga Muerta, $I_e = 2420 \text{ plg}^4$, $M = 217500 \text{ lbs-pie}$, $y_D = 0.38 \text{ plg}$.

50 o/o Carga Viva, $I_e = 1720 \text{ plg}^4$, $M = 88.8 \text{ lbs-pie}$, $y_{LS} = 0.22 \text{ plg}$.

La deflexión diferida es:

$$y_{LT} = y_L + A y_D + B y_{LS} = 0.50 + 2 \times 0.38 + 1.4 \times 0.22 = 1.57 \text{ plg}$$

Comparando con los límites del Código:

$$L/180 = 2.00 \text{ plg mayor que } y_L$$

$$L/360 = 1.00 \text{ plg mayor que } y_L$$

$$L/480 = 0.75 \text{ plg menor que } y_{LT}$$

$$L/240 = 1.50 \text{ plg mayor que } y_{LT}$$

Esta viga deberá estar limitada a pisos y techos que no soporten o tengan elementos no estructurales agregados, que puedan ser dañados por las deflexiones excesivas.

EJEMPLO II: Determinar la deflexión instantánea debida a la carga concentrada aplicada al centro de una viga simplemente apoyada, cuyas condiciones se indican. Comparar la deflexión obtenida utilizando el momento de inercia efectivo I_e especificado por el Código, con la fórmula original de momento efectivo de inercia I_{eff} deducida por Branson (11)

Propiedades de los Materiales:

$$f'_c = 4000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$w = 145 \text{ lbs/pie}^3$$

$$f_r = 7.5 f'_c 0.5 = 474 \text{ lbs/plg}^2$$

$$f_y = 40000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$E_c = 33w^{1.5} f'_c 0.5 = 3644000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$E_s = 29000000 \text{ lbs/plg}^2$$

$$n = E_s/E_c = 8$$

Condiciones de Servicio:

$$P = 16500 \text{ lbs}$$

$$L = 13 \text{ pies}$$

$$M_a = PL/4 = 643560 \text{ lbs-plg}$$

Determinando M_{cr} :

$$I_g = bh^3/12 = 1152 \text{ plg}^4$$

$$M_{cr} = f_r I_g / y_t = 474 \times 1152 / 6 = 91000 \text{ lbs-plg}$$

Como es menor que M_a , encontrar I_{cr}

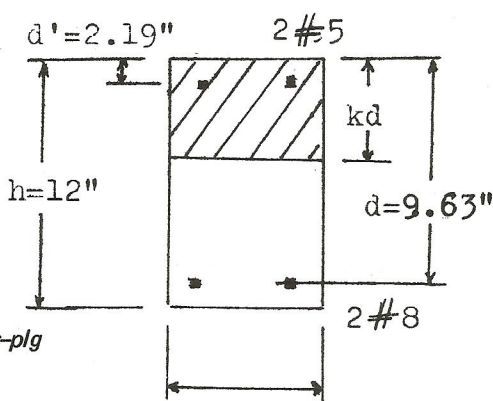
$$b(kd) (kd)/2 + (2n-1) (A'_s) (kd-d') = n(A_s) (d-kd)$$

$$8(kd)^2/2 + (2 \times 9 - 1) (0.61) (kd - 2.19) = 8 (1.57) (9.63 - kd)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta, se obtiene:

$$kd = 3.81 \text{ plg}$$

Encontrando el valor de I_{cr} :



$$I_{cr} = b(kd)^3/3 + (2n-1) (A'_s)(kd-d')^2 + (n) (A_s) (d-kd)^2, \text{ y}$$

sustituyendo obtenemos: $I_{cr} = 596 \text{ plg}^4$

Aplicando la fórmula del momento efectivo de inercia:

$$I_e = \left(\frac{91000}{643560} \right) 1152 + \left[1 - \left(\frac{91000}{643560} \right)^3 \right] 596$$

$$I_e = 598 \text{ plg}^4$$

Calculando la deflexión instantánea:

$$y = PL^3/48EI = 16500 \times (13 \times 12)^3 / (48 \times 3644000 \times 598)$$

$$y = 0.60 \text{ plg.}$$

—Realizando ahora el cálculo, tomando en cuenta la variación de inercia a lo largo de la longitud de la viga, mediante la fórmula de momento efectivo de inercia I_{eff} :

Dividiendo la viga en seis tramos, y determinando el valor del momento efectivo de inercia en cada uno de ellos, se puede obtener el valor M/EI para cada uno de los puntos de división.

x'	$M(\text{lbs-plg})$	$I_{eff}(\text{plg}^4)$	M/I_{eff}	
2.17	214830	614	350	$M = Px/2 = 16500x/2$
4.33	428670	597	718	$M_{cr} = 91000 \text{ lbs-plg}$
6.50	643500	596	1080	$I_g = 1152 \text{ plg}^4$

La fórmula para obtener I_{eff} fue:

$$I_{eff} = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^4 \right] I_{cr}$$

Aplicado el segundo teorema del método del área del diagrama de momentos, tenemos, suponiendo (lo cual es razonablemente cierto para una viga con carga concentrada) que entre punto y punto se tiene una variación uniforme de l_{eff} :

Figura	Area	Brazo/A	Momento
I	$350 \times 2.17/2$	$2 \times 2.17/3$	549
II	350×2.17	$2.17 + 2.17/2$	2472
III	$368 \times 2.17/2$	$2.17 + 2.17 \times 2/3$	1444
IV	718×2.17	$4.33 + 2.17/2$	8436
V	$362 \times 2.17/2$	$4.33 + 2.17 \times 2/3$	<u>2268</u>
Momento total =			15169

$$E(y_{A/tg_C}) = 15169$$

$$y_{A/tg_C} = 15169 \times 12 \times 12 / 3644000 = 0.60 \text{ plg.}$$

Para el procedimiento se tomó en cuenta que la tangente trazada por C (punto medio de la viga) tiene pendiente cero, por lo cual, la deflexión del apoyo A (que en realidad es cero) vista desde la tangente trazada por C, es igual a la deflexión de C.

—Se puede observar que el resultado obtenido empleando I_{eff} es exactamente igual al obtenido empleando el promedio I_e , demostrándose su utilidad (de I_e). No siempre, como en el ejemplo mostrado, serán iguales los resultados, pero siempre estarán dentro de los rangos razonables de exactitud. En el cálculo analítico de los ensayos de laboratorio, presentados en el Capítulo 8, se empleó este método para obtener mayor aproximación. Es conveniente hacer notar que, según ensayos realizados por Dan E. Branson (11) y por el Instituto Americano del Concreto ACI, los resultados que se obtienen analíticamente oscilarán de un + 20 o/o a un - 20 o/o de las deflexiones reales, por lo que en los casos en que se esté muy cerca de los límites de deflexión establecidos por el Código ACI 318-71, será más conveniente o ampliar la sección de la viga (proporcionando más peralte) o añadir refuerzo adicional en compresión, para cubrir este rango de variación hacia un lado seguro.

8. ENSAYOS DE LABORATORIO

Fueron ensayadas cinco vigas, midiéndose la deflexión al centro producida por una carga concentrada aplicada a la mitad de la luz. Las vigas fueron colocadas en una posición de simple soporte, con una luz de 12.60 pies, colocándose un deflectómetro directamente al centro. La carga fue aplicada con incremento de 200 libras para todas las vigas, excepto para la viga más peraltada, en la cual fueron de 1000 libras. Se preparó tres cilindros de prueba para cada viga, los cuales fueron ensayados para así poder determinar el módulo de elasticidad del concreto y su esfuerzo de ruptura, mediante las curvas esfuerzo-deformación. Dichas curvas están mostradas en las figuras A (Vigas I, II), B (Viga III), C (Viga IV) y D (Viga V).

8.1. RESULTADOS PRACTICOS

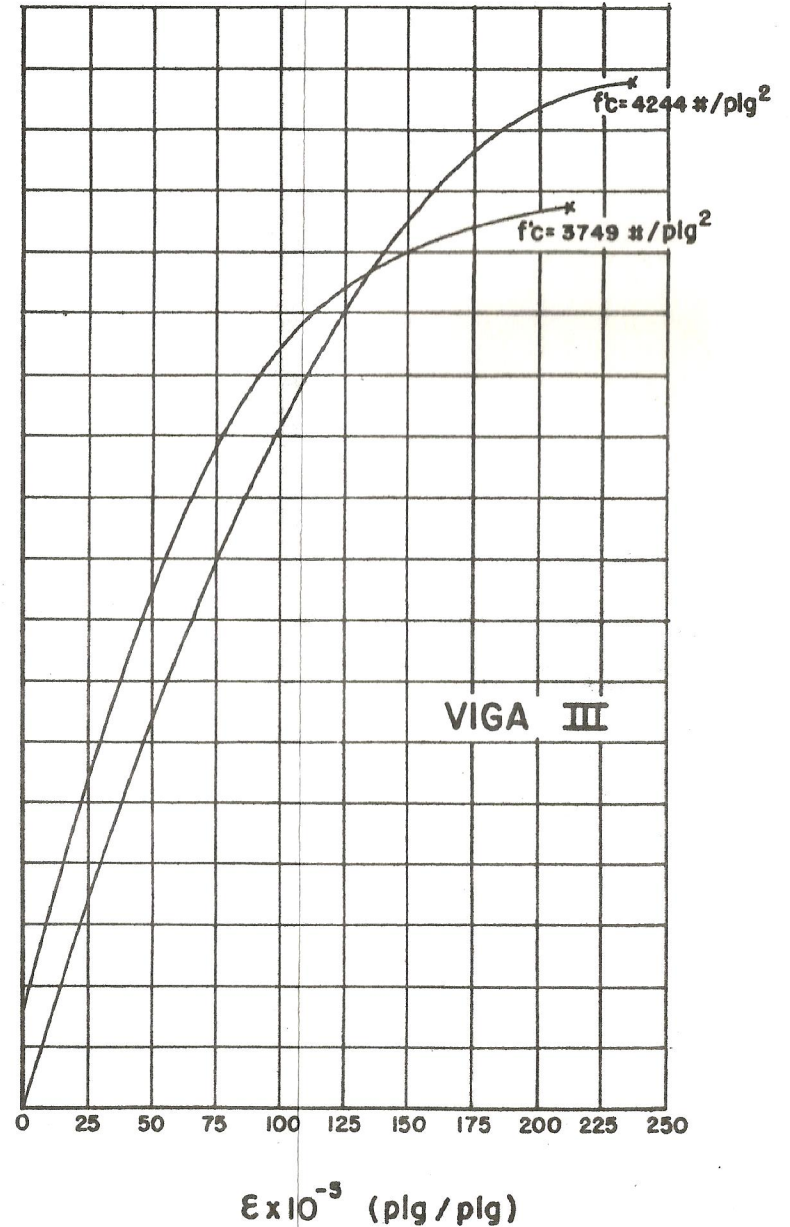
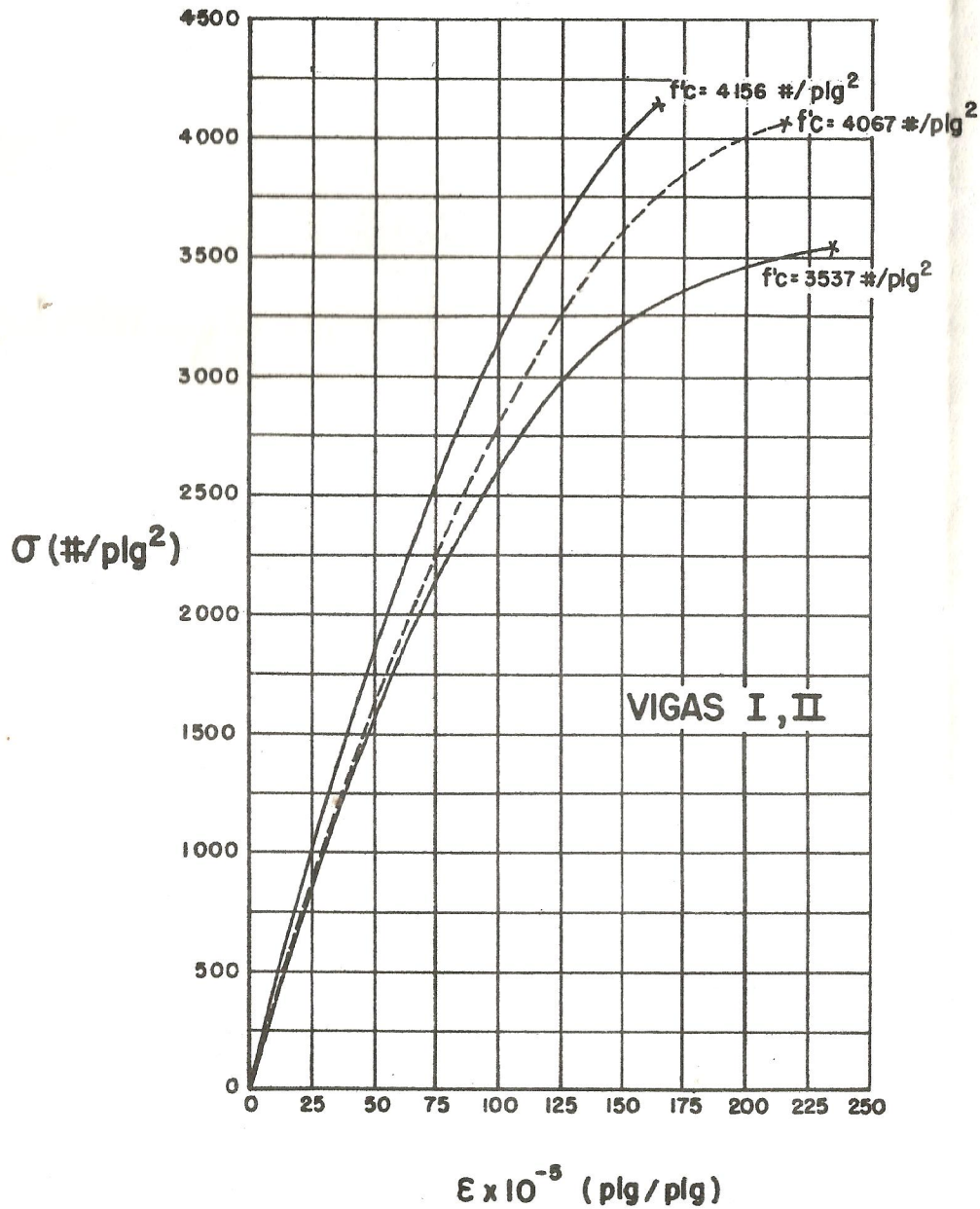
Las características de las vigas ensayadas se muestran en la siguiente tabla:

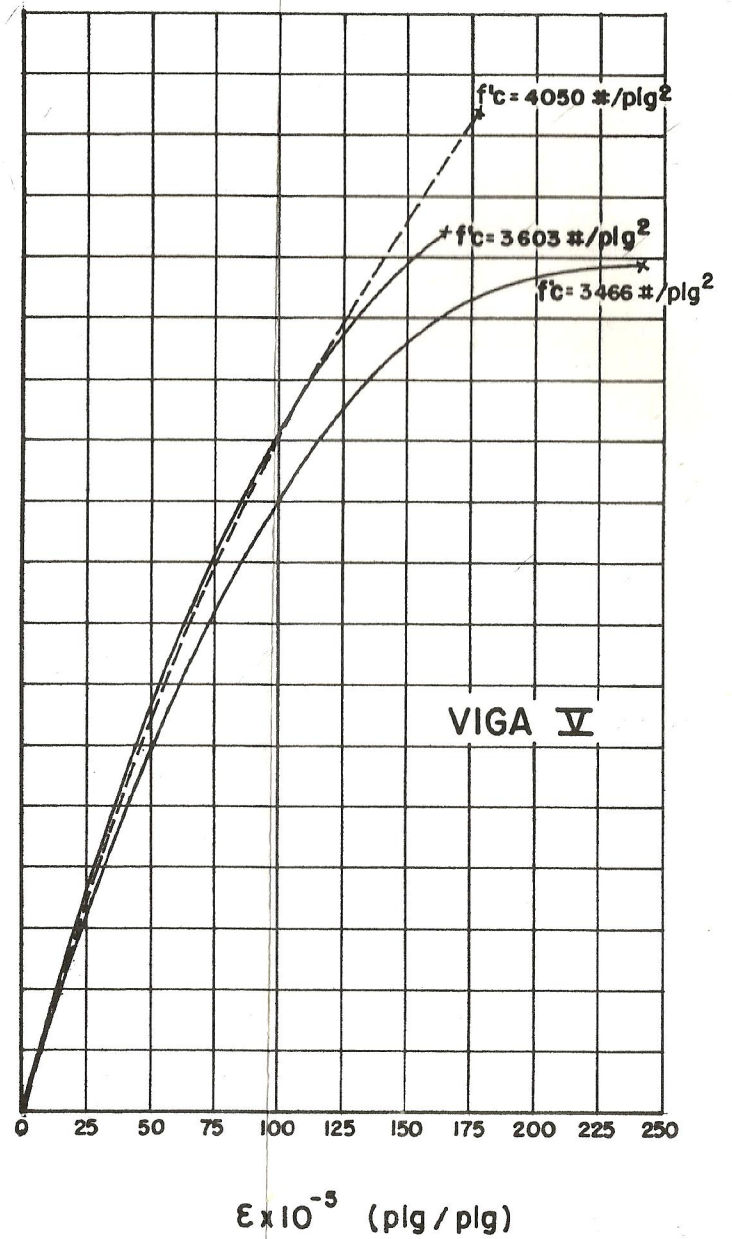
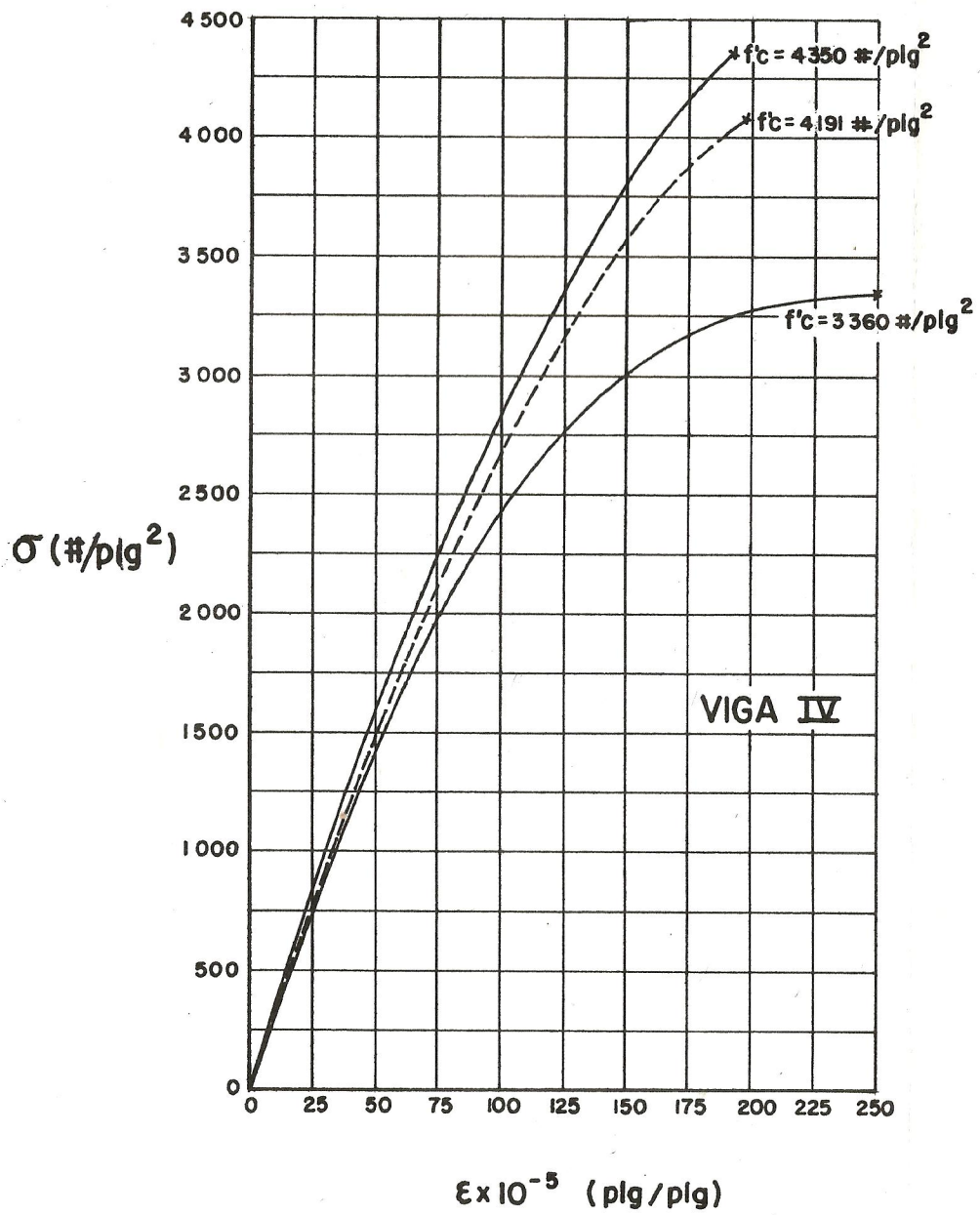
No.	b(plg)	h(plg)	d(plg)	d'(plg)	A_s	A_s'
I	6	8	5.54	2.20	2No.6	2No.5
II	6	8	5.42	-----	2No.8	-----
III	8	12	9.35	2.26	2No.8	2No.5
IV	6	8	5.54	2.20	2No.6	2No.4
V	6	8	5.48	-----	2No.7	-----

En las curvas esfuerzo-deformación se obtuvo los correspondientes módulos de elasticidad tangentes, los cuales, como ya se indicó en el Capítulo 1, corresponden a la pendiente de la recta que es tangente a la curva (esfuerzo-deformación) en el origen. En la tabulación siguiente se dan los resultados encontrados, así como el valor del módulo de elasticidad recomendado por el Código ACI 318-71 para un concreto de $w = 145 \text{ lbs/pie}^3$ y f'_c igual al promedio de los cilindros ensayados para cada viga.

Viga	f_c^2 (lbs/plg ²)	E_c (lbs/plg ²)	E_c ACI (lbs/plg ²)
I,II	4156	4333333	
	4067	3625000	
	<u>3537</u>	<u>3625000</u>	
	3920	3861111	<u>3607521</u>
III	3749	3800000	
	<u>4244</u>	<u>3500000</u>	
	3997	3650000	<u>3642553</u>
IV	4350	3500000	
	4191	3200000	
	<u>3360</u>	<u>3100000</u>	
	3967	3266667	<u>3629084</u>
V	3603	3833333	
	4050	3500000	
	<u>3466</u>	<u>3428571</u>	
	3706	3587301	<u>3507669</u>

El módulo de elasticidad del acero fue determinado utilizando probetas de ensayo fabricadas con el mismo acero de refuerzo empleado en las vigas. El valor promedio obtenido fue $E_s = 33500000$ lbs/plg². Se puede observar que el valor recomendado por la ACI de 29000000 lbs/plg² es más bajo, con lo que se logra un valor más conservador en l_{cr} . Los valores reales de deflexión se muestran en las tablas I-V de la sección 8.3, para las cargas aplicadas.





8.2.- RESULTADOS ANALITICOS

Con los resultados anteriores, se procedió a determinar I_{cr} para cada viga. Hay que hacer notar que el acero de refuerzo era constante a lo largo de la viga, por lo que I_{cr} será el mismo en toda la viga, no así I_{eff} que varía con el momento aplicado. Los resultados para I_{cr} son:

Viga	n	kd plg.	I_{cr} plg. ⁴	I_g plg. ⁴
I	9	2.62	104.58	240.25
II	9	3.24	134.49	240.25
III	9	3.91	605.72	1081.13
IV	10	2.69	112.10	240.25
V	9	3.01	120.01	240.25

Para determinar las deflexiones se usó un procedimiento similar al mostrado en el ejemplo II del Capítulo 7, pero dividiendo la sección en 44 partes. Para ello se utilizó un programa en Fortran, que se muestra al final de este Capítulo. El objeto de dividir en tantas partes fue de obtener la mayor aproximación posible en el cálculo. Los resultados se muestran en las tablas I-V de la sección 8.3, para las cargas correspondientes.

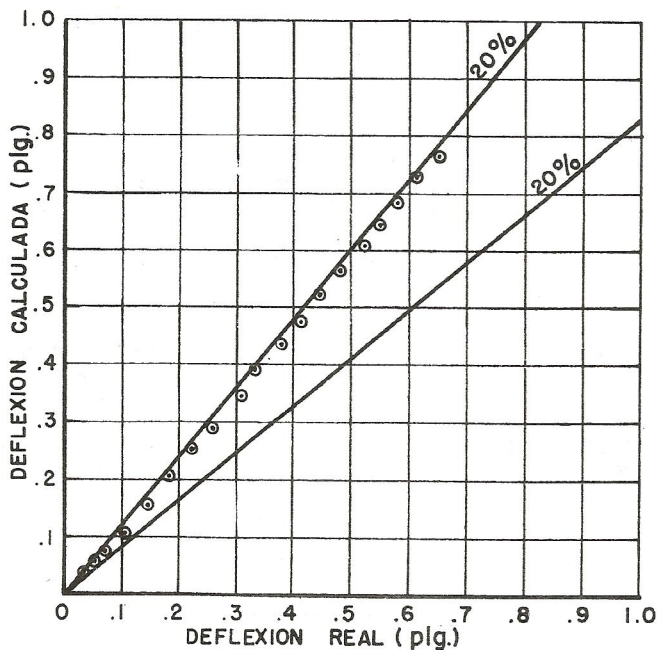
8.3.- COMPARACION

En las tablas siguientes, I a V, se presentan simultáneamente los datos reales y calculados para las deflexiones, indicándose la carga correspondiente a dicha deflexión. Además, en las figuras que van de la E a la I, se encuentran ploteados los puntos cuya abscisa corresponde a la deflexión calculada, y cuya ordenada representa la deflexión real. Si las dos deflexiones fuesen iguales los puntos estarían guiados según una línea recta orientada a 45° con referencia al eje de las abscisas, partiendo del origen. Sin embargo, ésto no se cumple, y los puntos se alejan más o menos de dicha recta. Branson (11) indica que los valores obtenidos con

su fórmula del Momento Efectivo de Inercia I_{eff} o I_e pueden variar entre + 20 o/o y -20 o/o del valor de las deflexiones reales. Estos límites están indicados por dos rectas en las figuras referidas. Los puntos que se acercan a la línea marcada con + 20 o/o indican que la deflexión calculada fue mayor que la real, y aquéllos que se acercan a la línea señalada con -20 o/o indican que la deflexión calculada fue menor que la real. Estas gráficas son la mejor comparación que puede efectuarse entre las deflexiones reales y las calculadas. Adicionalmente, al lado de cada gráfica se presenta una pequeña discusión sobre los resultados obtenidos en ella.

VIGA No. 1

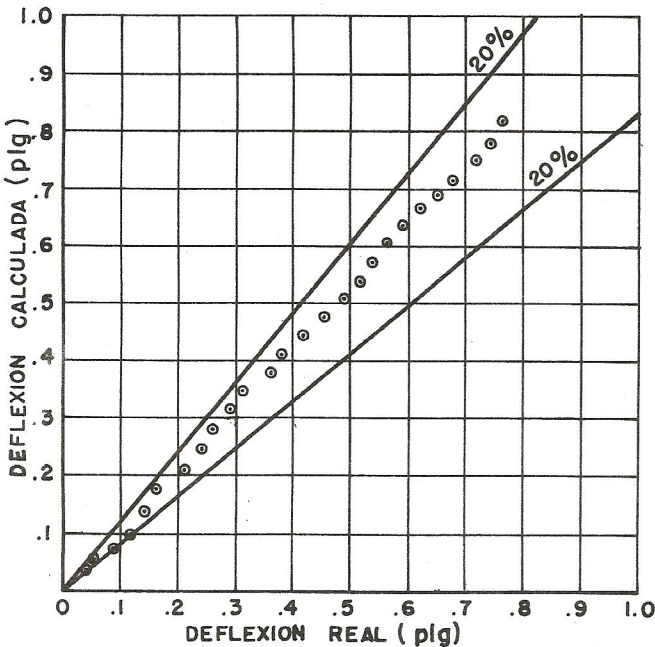
Carga Lbs.	Deflexión PLG Calculada	Deflexión PLG Real
400.	.034	.037
600.	.051	.056
800.	.070	.074
1000.	.106	.102
1200.	.153	.149
1400.	.202	.186
1600.	.251	.222
1800.	.299	.261
2000.	.345	.301
2200.	.390	.338
2400.	.435	.380
2600.	.478	.412
2800.	.521	.448
3000.	.563	.484
3200.	.605	.528
3400.	.646	.550
3600.	.687	.584
3800.	.728	.617
4000.	.769	.651



Se observa claramente que las deflexiones están dentro del rango de variación permitido. Los puntos tendieron a la línea de + 20 o/o, o sea, que se obtuvo resultados ligeramente conservadores.

VIGA No. 2

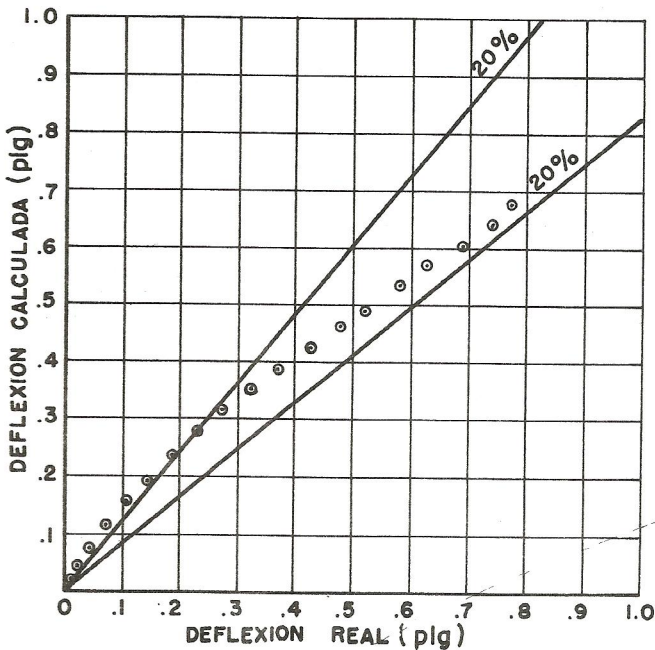
Carga Lbs.	Deflexión PLG Calculada	Deflexión PLG Real
400.	.034	.043
600.	.051	.058
800.	.070	.092
1000.	.100	.121
1200.	.136	.144
1400.	.173	.165
1600.	.209	.209
1800.	.245	.243
2000.	.280	.266
2200.	.313	.296
2400.	.347	.317
2600.	.379	.364
2800.	.412	.388
3000.	.444	.424
3200.	.476	.459
3400.	.507	.494
3600.	.539	.520
3800.	.570	.541
4000.	.601	.566
4200.	.633	.597
4400.	.664	.622
4600.	.695	.655
4800.	.726	.687
5000.	.756	.720
5200.	.787	.746
5400.	.818	.768



Todos los valores están situados entre las rectas límites. Se observa una cierta tendencia hacia la recta orientada a 45° , lo que indica que lo analítico y lo real se aproxima mucho.

VIGA No. 3

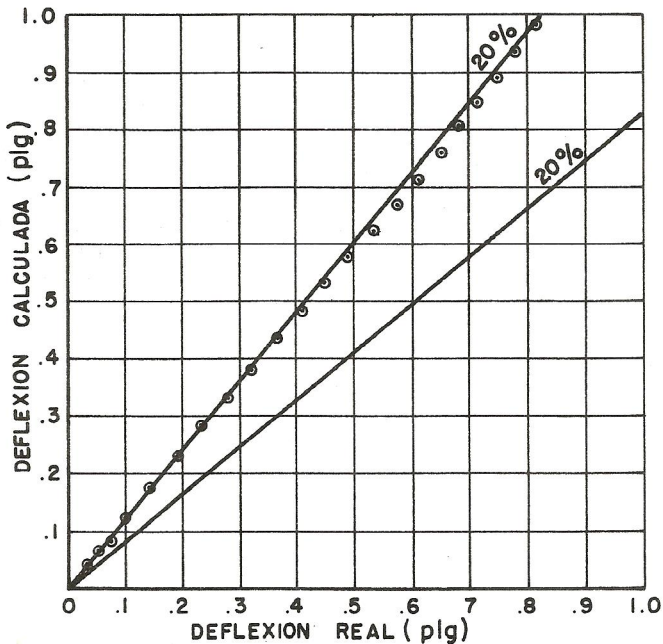
Carga Lbs.	Deflexión PLG Calculada	Deflexión PLG Real
1000.	.020	.013
2000.	.040	.027
3000.	.070	.048
4000.	.113	.074
5000.	.156	.108
6000.	.197	.148
7000.	.236	.192
8000.	.275	.231
9000.	.313	.275
10000.	.350	.325
11000.	.387	.377
12000.	.424	.430
13000.	.460	.480
14000.	.497	.529
15000.	.533	.582
16000.	.569	.630
17000.	.605	.690
18000.	.641	.743
19000.	.677	.776



Para valores de carga bajos, las deflexiones se salieron de los límites, pero hacia el lado conservador. Para valores altos, se mantuvieron dentro de los límites, tendiendo hacia el lado crítico.

VIGA No. 4

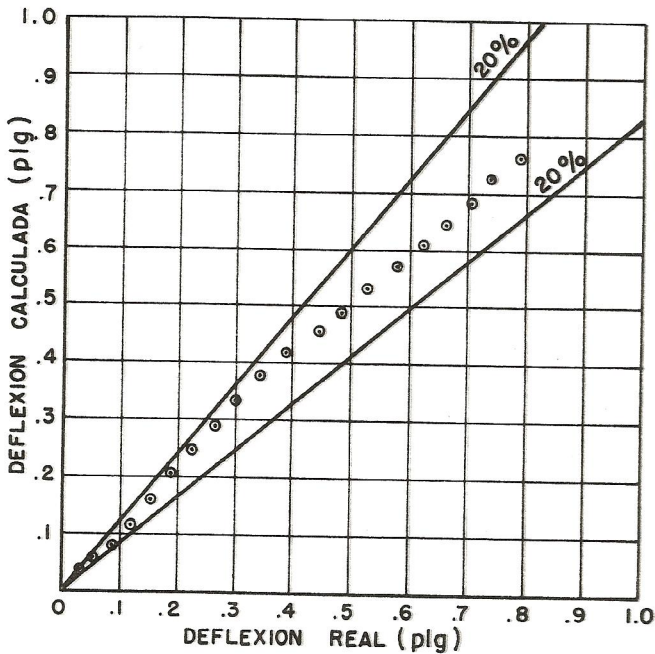
Carga Lbs.	Deflexión PLG Calculada	Deflexión PLG Real
400	.040	.034
600	.060	.053
800	.082	.076
1000	.123	.100
1200	.174	.148
1400	.228	.191
1600	.281	.236
1800	.333	.281
2000	.384	.320
2200.	.434	.367
2400.	.482	.411
2600.	.530	.453
2800.	.577	.496
3000.	.623	.538
3200.	.669	.579
3400.	.714	.616
3600.	.759	.652
3800.	.804	.684
4000.	.849	.718
4200.	.893	.751
4400.	.938	.780
4600.	.982	.816



Nuevamente los valores están dentro de los límites indicados. Se observa la tendencia al límite 20 o/o, o sea, hacia el lado conservador. Hay puntos en el 20 o/o

VIGA No. 5

Carga Lbs.	Deflexión PLG Calculada	Deflexión PLG Real
400.	.037	.032
600.	.055	.060
800.	.076	.092
1000.	.113	.123
1200.	.157	.155
1400.	.203	.193
1600.	.248	.228
1800.	.291	.267
2000.	.334	.300
2200.	.375	.343
2400.	.415	.397
2600.	.455	.448
2800.	.495	.486
3000.	.534	.530
3200.	.572	.581
3400.	.611	.625
3600.	.649	.665
3800.	.687	.706
4000.	.724	.744
4200.	.762	.791



Los puntos se conservan muy bien dentro de los límites. Se vuelve a observar la tendencia a la línea de 45°, o sea, a la igualdad entre las deflexiones calculadas y las reales.

Programa en fortran para calcular la deflexión máxima de una viga simplemente soportada, con carga al centro.

```

PROGRAM DEF01
DIMENSION XM(25)
PAUSE 1
READ (1,*) IE, IS
READ (IE,*) XIG, XICR, XMCR,E
READ (IE,*)P,XL,XNT
WRITE (IS,105)
DL1 = XL*12./XNT
XNT1 = XNT/2.+ 1
XM(1) = 0
XI = 0
NT1 = XNT1
DO 5 N = 2,NT1
XI = XI + DL1
XM(N) = P*XI/2.
T = XMCR/XM(N)
IF (T-1.)15,15,20
20 T = 1.
15 XIEF = T**4*XIG + (1. - T**4)*XICR
5 XM(N) = XM(N)/XIEF
XI = 0
Y = 0
N = 0
M = 1
80 XI = XI + DL1
N = N + 1
M = M + 1
IF(NT1 - N)70,70,75
75 Y1 = (XM(M) - XM(N))*0.5*DL1*(XI - DL1/3.)
Y2 = XM(N)*DL1*(XI - 0.5*DL1)
Y = Y + Y1 + Y2
GO TO 80
70 Y = Y/E
WRITE(IS, 110)P,XL,Y
105 FORMAT(/8X"CARGA"1X"LBS"12X"LUZ"1X"PIES"15X"DEFLEXION"1X"PLG"/)
110 FORMAT(11X,F6.0,13X,F7.2,22X,F6.3/)
END
END$

```

Este fue el programa utilizado para calcular las deflexiones analíticas en las vigas ensayadas.

Entrada de Datos:

I_g (plg^4); I_{cr} (plg^4); M_{cr} ($lbs.-plg$); E_c (lbs/plg^2)

Carga (lbs); Luz ($pies$); Número de tramos

9.— CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

I — Las deflexiones deben ser calculadas siempre que los peraltes de las vigas no satisfagan los requerimientos de la Tabla 9.5 (a) del Código ACI 318-71, o cuando el acero de refuerzo tenga f_y mayor de 40000 libras por pulgada cuadrada. Además es conveniente su cálculo (aún cuando se cumpla con los requisitos anteriores), en aquellas vigas que soporten elementos no-estructurales altamente susceptibles de ser dañados por las deflexiones, o que sirvan de apoyo a pisos con maquinaria o equipo sensible a los desniveles.

II — Para el cálculo de las deflexiones instantáneas es aconsejable el uso del momento efectivo de inercia I_e tomando en cuenta que los resultados obtenidos pueden variar entre un +20 o/o y un -20 o/o del valor de las deflexiones reales. Si se tiene el caso de una viga sometida a la acción de una diversidad de cargas, será más conveniente usar I_{eff} en un procedimiento de cálculo similar al mostrado en el ejemplo II del Capítulo 7.

III — Es de principal importancia el cálculo de las deflexiones diferidas (dependientes del tiempo), las cuales por lo general son de mayor valor. Su cálculo se puede efectuar por cualquiera de los métodos propuestos en el Capítulo 6, recomendándose el indicado por el Código ACI 318-71 que ha demostrado su efectividad mediante un gran número de ensayos.

IV — Desde el punto de vista de las deflexiones no es recomendable hacer uso de aceleradores (especialmente a base de cloruro de calcio), a menos que se haya determinado sus efectos sobre las propiedades del concreto, principalmente sobre el módulo de elasticidad y el "creep".

V — El módulo de elasticidad recomendado por el Código ACI 318-71 proporciona resultados sumamente satisfactorios en el cálculo de deflexiones. Si se hace uso de cilindros de prueba, es conveniente determinar el "módulo de elasticidad tangente", que proporciona resultados decididamente más reales que el módulo "secante" y otros. El valor del módulo de elasticidad tangente se aproxima bastante al recomendado por ACI 318-71, como se puede observar en el Capítulo 8.

VI — Se recomienda colocar el refuerzo simétrico respecto al eje que, pasando por el centro de gravedad de la sección, es perpendicular a la base. Esto se hace con el objeto de evitar combeos en la viga ocasionados por la contracción del concreto.

VII — Es conveniente colocar refuerzo adicional en compresión a fin de disminuir las deflexiones originadas por los efectos de la contracción y el "creep" del concreto.

A P E N D I C E

ESPECIFICACIONES DEL CODIGO ACI 318-71 PARA EL CONTROL DE DEFLEXIONES

9.5 Control de Deflexiones

9.5.1 Generalidades. Los elementos de concreto reforzado sujetos a flexión, deben diseñarse para tener una rigidez adecuada para limitar las deflexiones, o cualquier deformación que pudiese afectar adversamente la resistencia o funcionamiento de la estructura para las cargas de servicio.

Tabla 9.5 (a)

Peralte mínimo de vigas, o losas en una dirección, cuando no se calculan deflexiones.

	<i>Peralte mínimo h</i>			
<i>Miembros</i>	<i>Libremente apoyados</i>	<i>Con un extremo continuo</i>	<i>Ambos extremos continuos</i>	<i>Volido</i>
<i>Miembros que no soportan, o están ligados, a divisiones u otro tipo de construcción susceptibles de dañarse por grandes deflexiones.</i>				
<i>Losas Macisas en una dirección</i>	<i>L/20</i>	<i>L/24</i>	<i>L/28</i>	<i>L/10</i>
<i>Vigas o losas nervadas en una dirección</i>	<i>L/16</i>	<i>L/18.5</i>	<i>L/21</i>	<i>L/8</i>

Los valores dados en esta tabla se deben usar directamente en miembros de concreto reforzado no presforzado hechos con concreto de peso

normal ($w = 145 \text{ lbs/pie}^3$) y acero de refuerzo grado 60. Para otras condiciones, los valores deben modificarse como siguen:

a) Para concreto estructural ligero de peso volumétrico dentro del intervalo de $90\text{-}120 \text{ lbs/pie}^3$, los valores de la tabla deberán multiplicarse por $1.65\text{-}0.005w$, pero no menos de 1.09, estando w medida en lbs/pie^3 .

b) Para refuerzo no presforzado que tenga una resistencia a la fluencia distinta de 60000 lbs/plg^2 , los valores de esta tabla deberán multiplicarse por $0.4 + f_y/100000$.

9.5.2.2. Cálculo de la deflexión instantánea. Cuando se vayan a calcular las deflexiones, aquellas que ocurran instantáneamente por la aplicación de la carga deberán calcularse por los métodos o fórmulas usuales para las deflexiones elásticas. A menos que los valores se obtengan por un análisis más comprensivo, las deflexiones deberán calcularse tomando el módulo de elasticidad del concreto recomendado por este código. El momento de inercia efectivo debe tomarse como se indica a continuación, pero no debe ser mayor que I_g

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (9-4)$$

donde

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (9-5)$$

y $f_r = 7.5 f_c'^{0.5}$

Cuando se emplean concretos con agregado ligero, debe aplicarse cualquiera de las modificaciones siguientes:

a) La ecuación de f_r debe modificarse sustituyendo $f_{ct}/6.7$ por $f_c' 0.5$ pero el valor de $f_{ct}/6.7$ usado no debe exceder $f_c' 0.5$. El valor de f_{ct} será el especificado, y el concreto deberá estar dosificado según lo indicado por la Sección 4.2 del mismo Código. (f_{ct} = esfuerzo de tensión en el concreto de agregado ligero).

b) Cuando no se especifique f_{ct} , la ecuación para f_r debe multiplicarse por 0.75 para concreto "completamente ligero" y por 0.85 para concreto "ligero con arena". Se puede interpolar linealmente cuando se use una sustitución parcial de arena. Para luces continuas, el momento efectivo de inercia efectivo se puede tomar como el promedio de los valores obtenidos en la Ec. (9-4), para las secciones críticas de momento negativo y positivo.

9.5.2.3 Cálculo de las deflexiones de larga duración. A menos que se obtengan los valores por un análisis más comprensivo, la deflexión adicional de larga duración para elementos de concreto de peso ligero y normal sujetos a flexión, se puede obtener multiplicando la deflexión instantánea provocada por la carga sostenida considerada, calculada de acuerdo con la Sección 9.5.2.2, por el factor

$$A = \left[2 - 1.2 (A'_s / A_s) \right] \text{ mayor o igual que } 0.6$$

9.5.2.4 Deflexión permisible. La deflexión calculada de acuerdo con las Secciones 9.4.2.2 y 9.5.2.3 no debe exceder los límites estipulados en la Tabla 9.5(b).

Tabla 9.5(b). Deflexiones máximas permisibles calculadas.

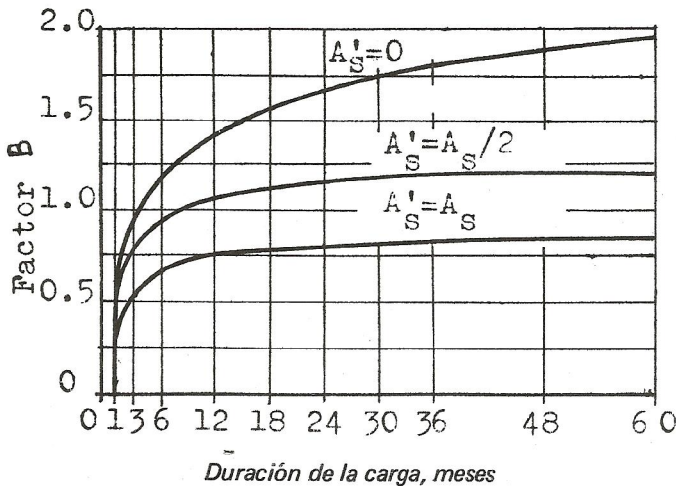
Tipo de miembro	Deflexión considerada	Deflexión Límite
Techos planos que no soporten, o estén ligados, a elementos no estructurales que pueden ser dañados por grandes deflexiones	Deflexión instantánea debida a la carga viva, L	L/180 (1)
Pisos que no soporten, o estén ligados, a elementos no estructurales que puedan ser dañados por grandes deflexiones.	Deflexión instantánea debida a la carga viva, L	L/360
Sistema de piso, o techo, que soporte o esté ligado, a elementos no estructurales que puedan ser dañados por grandes deflexiones.	La parte de la deflexión que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales, la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas sostenidas, y la deflexión instantánea debida a cualquier carga adicional viva.	L/480 (3)
Sistema de piso o techo que soporte, o esté ligado a elementos no estructurales que puedan ser dañados por grandes deflexiones.		L/240 (4)

(1). Este límite no abarca la protección extra contra inundaciones. Las deflexiones deben verificarse para inundaciones, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al agua estancada, y considerando los efectos de larga duración de todas las cargas sostenidas, contraflecha, tolerancias de construcción, y la confiabilidad de las disposiciones de drenaje.

(2). Las deflexiones de larga duración deben determinarse de acuerdo con la Sección 9.5.2.3, pero se puede reducir una cantidad igual a la deflexión que ocurre antes de ligar los elementos no estructurales. Esta cantidad se determinará con base en los datos de ingeniería aceptados respecto a las características de tiempo-deformación de miembros semejantes a los que están siendo considerados.

(3). Este límite se puede exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyados, o unidos.

(4). Pero no mayor que la tolerancia prevista para los elementos no estructurales. Este límite se puede exceder si se proporciona una contraflecha tal que la deflexión total, menos la contraflecha, no exceda dicho límite.



Factores para obtener la deflexión diferida

—Este artículo es reproducido con el permiso del Instituto Americano del Concreto (American Concrete Institute ACI).

EVALUACION GRAFICA DEL MOMENTO EFECTIVO DE INERCIA PARA DEFLEXION.

Con el uso de refuerzo de alta resistencia en las vigas, y el incremento en flexibilidad permitido por los métodos de resistencia última en el diseño de vigas, los ingenieros se encuentran con muchas ocasiones en que se debe chequear las deflexiones. Las gráficas que se presentan a continuación tienen como objeto el facilitar la determinación del momento efectivo de inercia (I_e).

La expresión para el momento efectivo de inercia presentada por la ACI en el Código 318-71, y que desarrolló originalmente Dan E. Branson (11) es:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad , \quad M_a \text{ mayor que } M_{cr}$$

Si M_a es mayor que M_{cr} entonces $I_e = I_g$

En la gráfica 1 se obtiene fácilmente el momento de inercia de la sección bruta (sin fracturar). Esta inercia puede ser usada para determinar la rigidez de la viga tanto en el análisis del marco, como para cálculo de deflexiones. La relación de el ancho del patín al ancho del nervio varía desde un límite inferior igual a 0.5, para incluir vigas que soporten losas pretensadas, así como vigas T.

Usando la gráfica 2 se puede obtener el momento de fractura para el caso en que la cara superior esté en tensión, y también para el caso en que sea la cara inferior la que esté en tensión. Se entra a ella con la relación b/b_w y se sube hasta encontrar el valor apropiado de h_f/h , seleccionándose la gráfica que convenga al caso. Hecho esto se lee en el eje de las ordenadas el valor del parámetro $M_{cr}/f_c^{0.5}bh^2$. Si se desea obtener M_{cr}/bh^2 , se debe seguir moviendo hacia la gráfica izquierda hasta llegar al valor apropiado de f_c . Para relaciones b/b_w menores que uno, se debe utilizar las gráficas pequeñas que se muestran en la parte superior de la gráfica 2.

Cuando se esté usando unidades métricas, o sea, si b y h están en centímetros, f'_c en kilogramos por centímetro cuadrado, entonces en las gráficas se obtiene el valor anterior dividido por 0.265. Usando la gráfica de la izquierda con el valor de f'_c adecuado se obtiene entonces $Mcr/(.0703 bh^2)$. Para concretos livianos, el valor obtenido deberá ser multiplicado por $f_{ct}/6.7bh^2$. Si f_{ct} no está especificado, se aplicará factores a Mcr entre 0.75 y 0.85 tal y como lo indica la sección 9.5.2.2 del Código ACI 318-71.

En la determinación de I_g y Mcr , b es considerado el ancho del patín más bien que el ancho de la zona de compresión. I_g es independiente de la localización de la zona de compresión. Mcr se presenta en una forma más sencilla si se da en términos del ancho del patín, ya sea la tensión esté en el patín o en el nervio.

De la figura 3 se puede obtener el momento de inercia de la sección fracturada para cualquier tipo de sección, sea esta simple o doblemente reforzada, rectangular o viga T. Cuando el máximo momento aplicado a la sección exceda el momento de fractura, entonces el momento efectivo de inercia es fácilmente obtenido de la gráfica 4. La porción derecha de la gráfica 4 convierte I_g/bh^3 en I_g/bd^3 . La porción izquierda es usada para evaluar I_e/bd^3 (en la relación apropiada de Ma/Mcr) mediante una línea recta entre I_g/bd^3 y I_{cr}/bd^3 .

EJEMPLO: Determinar el momento efectivo de inercia de una viga de un solo tramo. La sección es de 14x24 plg (35.6x61cm), con tres barras No. 10, y $f'_c = 4000 \text{ lbs/plg}^2$ (281 kg/cm²), cuando el momento máximo es de 1000000 lbs-plg (1151000 kg-cm).

De la figura 1 para $b/b_w = 1$, $I_g/bh^3 = 0.0833$

De la figura 2 para $b/b_w = 1$.

$$\frac{Mcr}{f'_c 0.5bh^2} = 1.25 \left[\frac{Mcr}{f'_c 0.5bh^2} = 0.265 (1.25) = 0.331 \right]$$

o para $f'_c = 4000 \text{ lbs/plg}^2$ (281 kg/cm²) en la izquierda de la figura 1.

$$\frac{M_{cr}}{bh^2} = 79 \left[\frac{M_{cr}}{bh^2} = 0.0703 (79) = 5.55 \right]$$

Entonces, el momento de fractura es:

$$M_{cr} = 79 \times 14 \times 24^2 = 637000 \text{ lbs-pie}$$

$$M_{cr} = 5.55 \times 35.6 \times 61^2 = 735000 \text{ kg-cm}$$

y la razón del momento máximo al momento de fractura es:

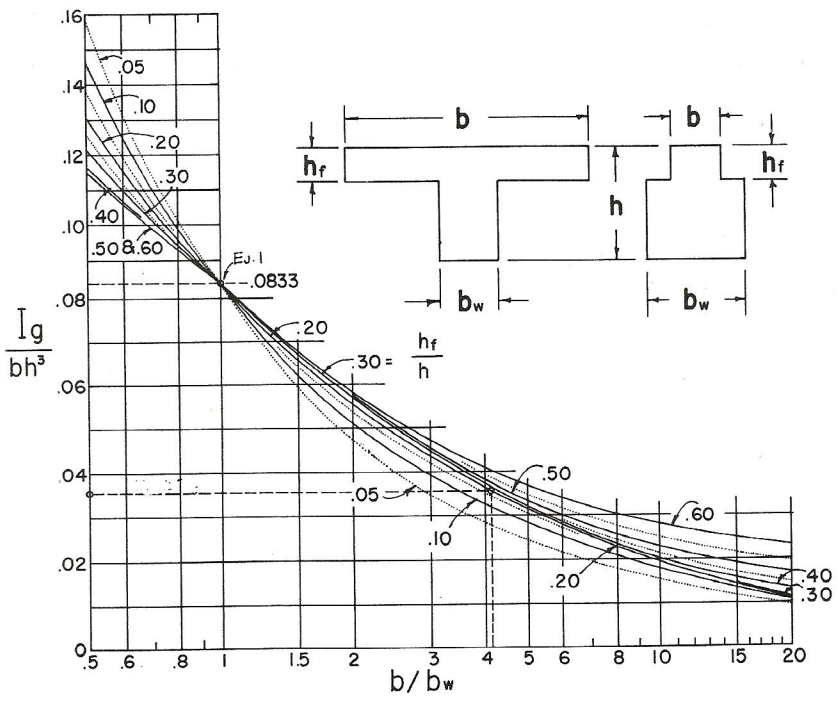
$$\frac{M_a}{M_{cr}} = \frac{1000000}{637000} = 1.57 \left[\frac{M_a}{M_{cr}} = \frac{1151000}{735000} = 1.57 \right]$$

Como la sección está fracturada, calcular el porcentaje de acero:

$$p = \frac{3 (1.27)}{14 (21.5)} = 0.01265 \left[p = \frac{3 (8.2)}{35.6 (54.6)} = 0.01265 \right]$$

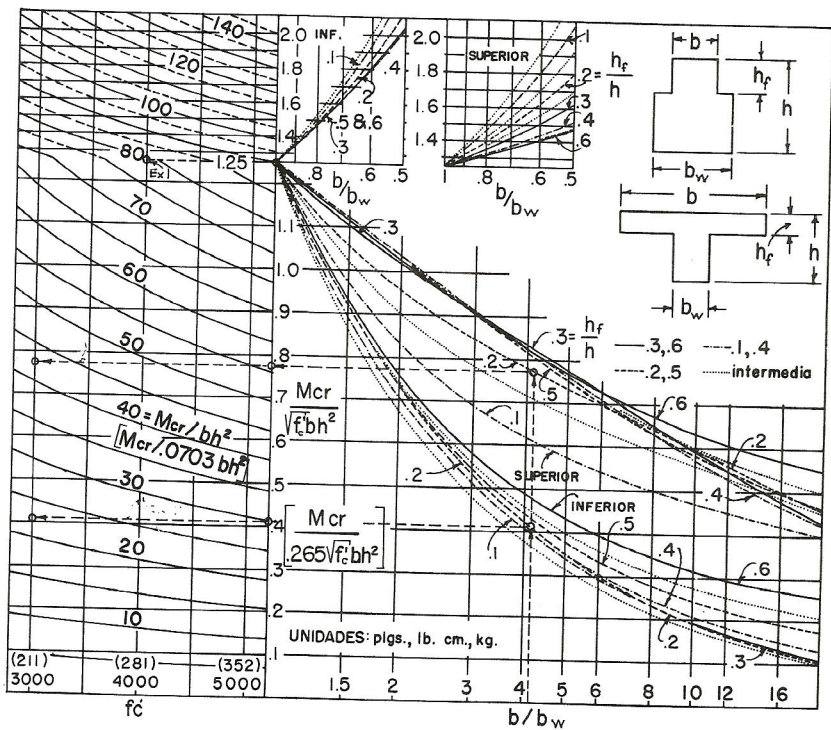
Con una relación modular de 8:

$$p_n = 0.01265(8) = 0.1013$$



Momento de inercia de la seccion sin fracturar. (I_g)

FIGURA 1



Momento de fractura. (M_{cr})

FIGURA 2

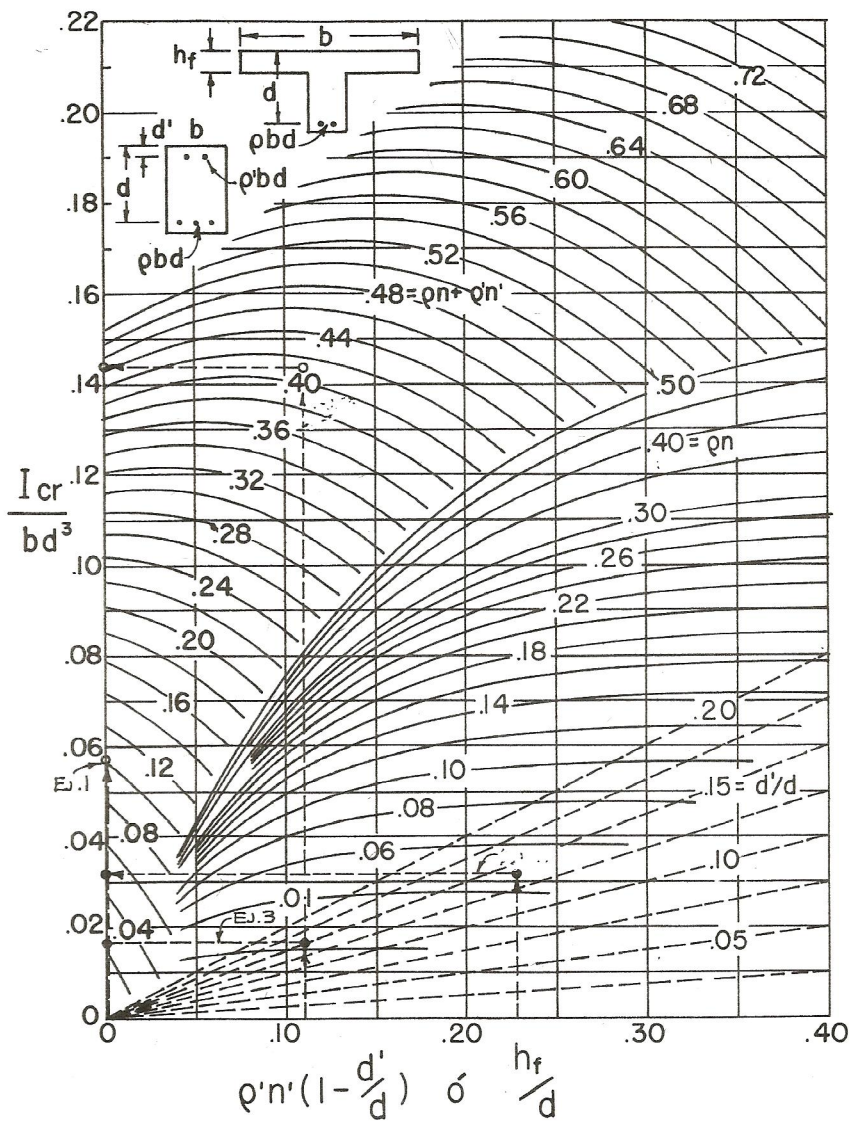
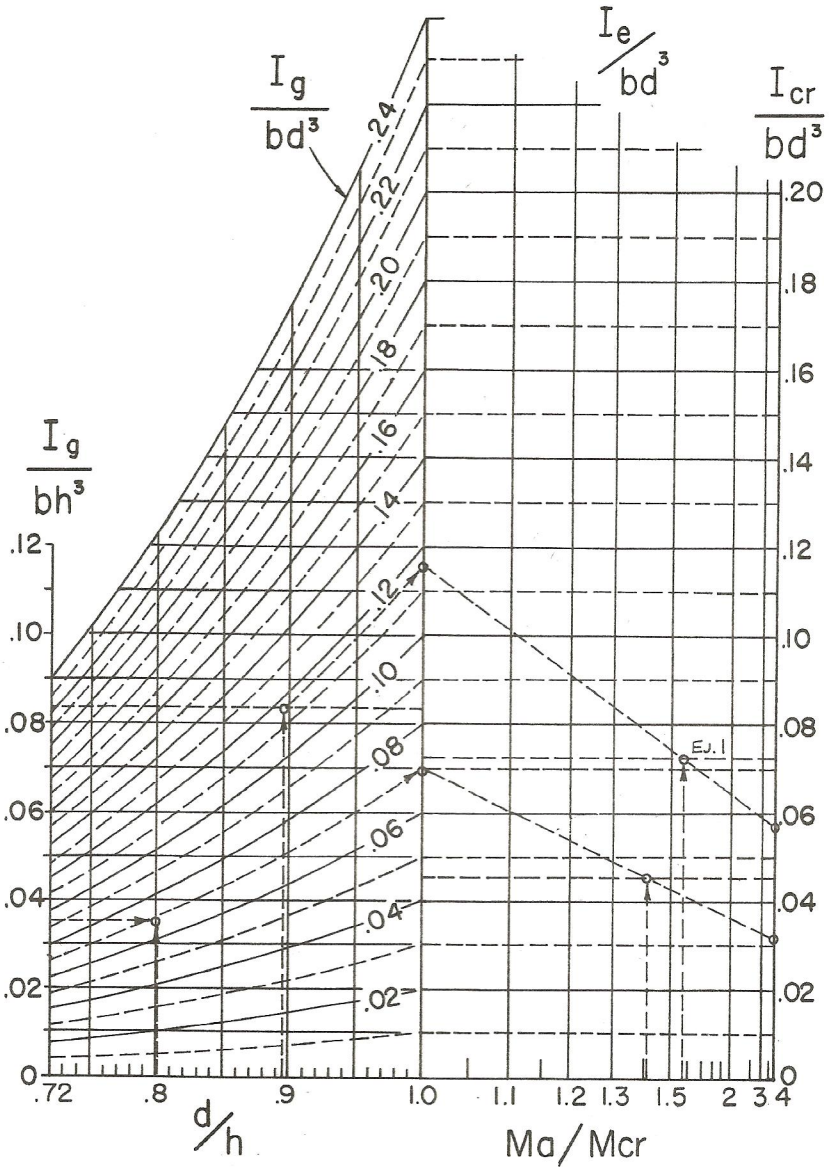


FIGURA 3



Momento efectivo de inercia. (I_e)

FIGURA 4

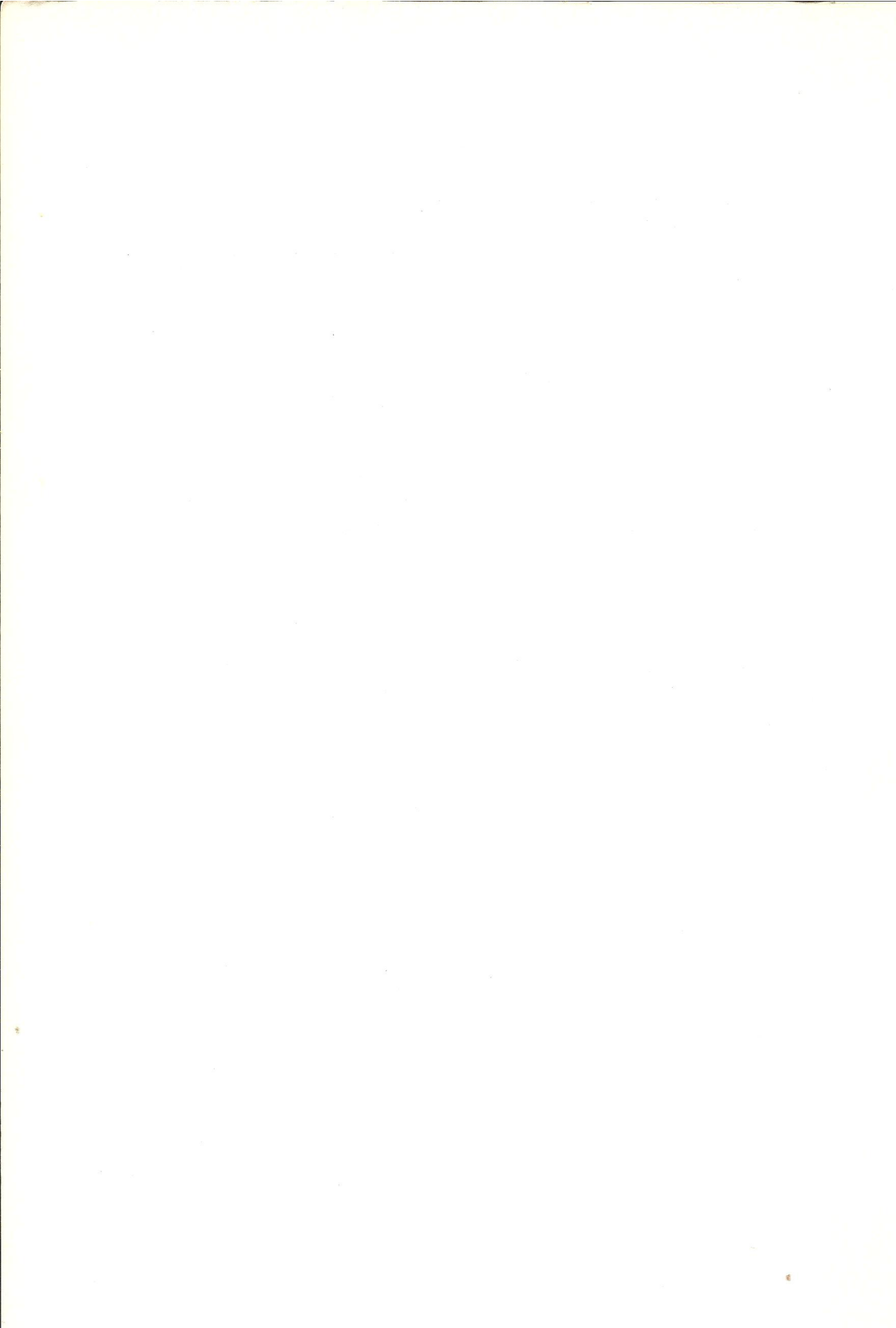
De la figura 3, para $pn + p'n' = 0.1013$ y $p'n'(1-d'/d) = 0$ (no hay refuerzo en compresión), se encuentra $I_{cr}/bd^3 = 0.057$. Se procede ahora en la figura 4. Con $d/h = 0.896$ y $I_g/bh^3 = 0.0833$, se encuentra $I_g/bd^3 = 0.116$. Siguiendo este valor de $I_g/bd^3 = 0.057$ intercepta $M_a/M_{cr} = 1.57$ en $I_e/bd^3 = 0.0725$. Entonces:

$$I_e = 0.0725(14) (21.5)^3 = 10100 \text{ plg}^4$$

$$\left[I_e = 0.0725 (35.6) (54.6)^3 = 420000 \text{ cm}^4 \right]$$

—Para mayores detalles, ver la referencia 24 de la bibliografía, "Graphical Evaluation of the Effective Moment of Inertia for Deflection", por Leroy A. Lutz; *Journal of the American Concrete Institute*, Marzo 1973.

Nota: Este artículo es reproducido parcialmente, con la aprobación del Instituto Americano del Concreto (American Concrete Institute ACI).



—BIBLIOGRAFIA

1. *ACI Committee 318. Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71). American Concrete Institute. (1971).*
2. *ACI Committee 318. Comentary of Building Code Requirements for Reinforced Concrete. American Concrete Institute. (1971).*
3. *American Concrete Institute. Designing for Effects of Creep, Shrinkage and Temperature in Concrete Structures. American Concrete Institute. (1971).*
4. *American Concrete Institute. ACI Manual of Concrete Practice (Part 2). American Concrete Institute. (1972).*
5. *ACI Committee 318. Proposed Revision of ACI 318-63: Building Code Requirements for Reinforced Concrete. Journal of the American Concrete Institute. (Febrero, 1970).*
6. *ACI Comittee 435. Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. Journal of the American Concrete Institute. (Junio, 1966).*
7. *ACI Committee 435. Variability of Deflections of Simply Supported Reinforced Concrete Beams. Journal of the American Concrete Institute. (Enero, 1972).*
8. *ACI Committee 317. Reinforced Concrete Design Handbook. American Concrete Institute. (1965).*
9. *ACI Committee 340. Ultimate Strenght Design Handbook. American Concrete Institute. (1967).*
10. *Bazant, Zdenek. Prediction of Concrete Creep Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. Journal of the American Concrete Institute. (Abril, 1972).*
11. *Branson, Dan. Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams. Alabama Highway Research. (1965).*

12. *Branson, Dan. Compression Steel Effect on Long-Time Deflections. Journal of the American Concrete Institute. (Agosto, 1971).*
13. *Comité ACI 318. Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-63). American Concrete Institute. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C. México. (1964).*
14. *Corley, Williams y Sozen. Time-Dependent Deflections of Reinforced Concrete Beams. Journal of the American Concrete Institute. (Marzo, 1966).*
15. *England, George. Numerical Creep Analyses Applied to Concrete Structures. Journal of the American Concrete Institute. (Junio, 1967).*
16. *England, George. Method of Estimating Creep and Shrinkage Strains in Concrete from Properties of Constituent Materials. Journal of the American Concrete Institute. (Noviembre, 1965).*
17. *Ernst, G. C. y Riveland, A. R. Ultimate Loads and Deflections from Limit Design of Continuous Structural Concrete. Journal of the American Concrete Institute. (Octubre, 1959).*
18. *Ferguson, Phil M. Teoría Elemental del Concreto Reforzado. John Wiley & Sons, Inc. New York. (1961).*
19. *Hausen, Torben y Mattock. Influence of Size and Shape of Member on the Shrinkage and Creep of Concrete. Journal of the American Concrete Institute. (Febrero, 1966).*
20. *Hoyos, Manuel de. Concreto, Tomo I. México, D. F. (1951).*
21. *Illston, John and Jordaan, Ian. Creep Prediction for Concrete Under Multiaxial Stress. Journal of the American Concrete Institute. (Marzo, 1972).*
22. *Kripanarayanan, Koladi y Branson, Dan. Short-Time Deflections of Beams Under Single and Repeated Load Cycles. Journal of the American Concrete Institute. (Febrero, 1972).*

23. *Large, George. Basic Reinforced Concrete Design: Elastic and Creep. The Ronald Press Company, New York. (1957).*
24. *Lutz, Leroy A. Graphical Evaluation of the Effective Moment of Inertia for Deflection. Journal of the American Concrete Institute. (Marzo, 1973).*
25. *Nash, William. Resistencia de Materiales. McGraw-Hill, New York. (1969).*
26. *Nasser, Karim and Neville, Adam. Creep of Concrete at Elevated Temperature. Journal of the American Concrete Institute. (Diciembre, 1965).*
27. *Neville, Adam and Stanton, Michael. Method of Estimating Creep of Concrete when the Stress-Strength Ratio Varies with Time. Journal of the American Concrete Institute. (Octubre, 1965).*
28. *Peabody, Dean. The Design of Reinforced Concrete Structures. John Wiley & Sons, Inc. New York. (1953).*
29. *Pectu, Valeriu. A Method for Determining Deflections in Beams of Variable Stiffness. Journal of the American Concrete Institute. (Febrero, 1964).*
30. *Portland Cement Association. Notes on ACI 318-71; Building Code Requirements with Design Applications. Portland Cement Association. (1972).*
31. *Timoshenko and Young. Elements of Strength of Materials. D. Van Nostrand Company, Inc. New Jersey. (1962).*
32. *Wang, Chu-kia and Salmon, Charles. Reinforced Concrete Design. International Textbook Company. Pennsylvania. (1967).*
33. *Wang, Ping-Chun. Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics. John Wiley & Sons, Inc. New York. (1966).*

34. *Washa, G. and Fluck, P. Creep of Plain and Reinforced Concrete. Journal of the American Concrete Institute. (Abril, 1958).*
35. *Washa, G. and Fluck, P. Plastic Flow (Creep) of Reinforced Concrete Continuous Beams. Journal of the American Concrete Institute. (Enero, 1956).*
36. *Winter, George; O'Rourke, C.E. and Nilson, Arthur. Design of Concrete Structures. McGraw-Hill Book Company. New York. (1964).*

JORGE SIGFRIDO ARRIVILLAGA SARAVIA

Vo. Bo.

ING. JUAN JOSE MOSQUERA E.

Asesor

Vo. Bo.

ING. JOAQUIN LOTTMANN E.

Jefe del Departamento
de Estructuras

Vo. Bo.

ING. MANUEL CASTILLO PARRAJAS

Director de la Escuela de
Ingenieria Civil

IMPRIMASE:

ING. HUGO GUAN MA

Decano