



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

**APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE  
POTENCIA**

**Luis Antonio Álvarez Muñoz**

Asesorado por el Ing. Jorge Luis Pérez Rivera

Guatemala, febrero de 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE  
POTENCIA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**LUIS ANTONIO ÁLVAREZ MUÑOZ**

ASESORADO POR EL ING. JORGE LUIS PÉREZ RIVERA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA**

GUATEMALA, FEBRERO DE 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Luis Diego Aguilar Ralón
VOCAL V	Br. Christian Daniel Estrada Santizo
SECRETARIA	Inga. Lesbia Magalí Herrera López

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

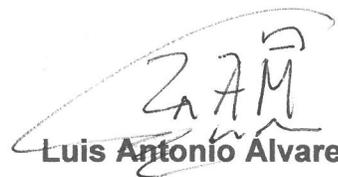
DECANO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
EXAMINADOR	Ing. Víctor Manuel Ruiz Hernández
EXAMINADOR	Ing. Julio Rolando Barrios Archila
EXAMINADOR	Ing. Marvin Marino Hernández Fernández
SECRETARIA	Inga. Lesbia Magalí Herrera López

## HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, con fecha 28 de agosto de 2017.

  
**Luis Antonio Alvarez Muñoz**

Guatemala, 01 de agosto de 2018

Ingeniero Saul Cabezas  
Coordinador Área de Potencia  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos de Guatemala

Estimado ingeniero:

Por medio de la presente de acuerdo con la designación efectuada por la Dirección de la Escuela, me permito informarle que he procedido a asesorar el Trabajo de Graduación titulado: **APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA**, desarrollado por el estudiante LUIS ANTONIO ÁLVAREZ MUÑOZ, con número de carné 2013-14568, encontrándolo satisfactorio en su contenido y resultados. Me permito dar aprobación al mismo, remitiéndolo a dicha Coordinación para el trámite pertinente, en el entendido que el autor y este asesor somos responsables del contenido del trabajo.

Agradeciendo su atención y deseándole éxitos en sus labores cotidianas, me despido de usted.

Atentamente

  
Ing. Jorge Luis Pérez Rivera **Jorge Luis Pérez Rivera**  
Colegiado 3057 **Ingeniero Electricista**  
**Colegiado No. 3057**

Asesor



REF. EIME 60. 2018.  
11 DE SEPTIEMBRE 2018.

FACULTAD DE INGENIERIA

Señor Director  
Ing. Otto Fernando Andrino González  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería, USAC.

Señor Director:

Me permito dar aprobación al trabajo de Graduación titulado:  
**APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO  
DE SISTEMAS DE POTENCIA,** del estudiante **LUIS  
ANTONIO ÁLVAREZ MUÑOZ,** que cumple con los requisitos  
establecidos para tal fin.

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarle.

Atentamente,  
D. Y ENSEÑAD A TODOS

M.B.A. Ing. Saul Cabezas Durán  
Ingeniero Electricista  
Colegiado No. 4648

Ing. Saul Cabezas Durán  
Coordinador Área de Potencia





REF. EIME 60. 2018.

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Área, al trabajo de Graduación del estudiante; **LUIS ANTONIO ÁLVAREZ MUÑOZ**, titulado: **APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA**, procede a la autorización del mismo.

  
Ing. Otto Fernando Andriño González



GUATEMALA, 19 DE SEPTIEMBRE 2018.

Universidad de San Carlos  
De Guatemala

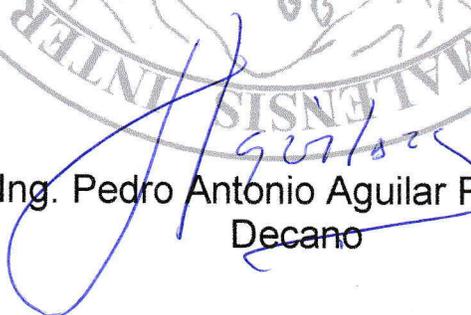


Facultad de Ingeniería  
Decanato

Ref. DTG.81.2019

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica del trabajo de graduación titulado: **“APLICACIÓN DE TEORÍA DE GRAFOS EN EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA”** presentado por el estudiante universitario: **Luis Antonio Álvarez Muñoz** y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, se autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

  
Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco  
Decano



Guatemala, Febrero de 2019

/echm

## **ACTO QUE DEDICO A:**

<b>A Dios</b>	Por darme la vida y permitirme culminar esta carrera universitaria.
<b>Mis padres</b>	Verónica Muñoz y Gustavo Álvarez, por el amor, apoyo y sacrificio incondicional que siempre me han brindado.
<b>Mi hermana</b>	Verónica Álvarez, por el amor, apoyo y sacrificio incondicional que siempre me ha brindado.
<b>Mis abuelos</b>	María del Carmen Sánchez y Gonzalo Muñoz. Por todo el amor y apoyo que me han dado.
<b>Mis tíos</b>	Brenda y María del Carmen Muñoz, Genaro Molina y Luis Méndez, por todo su apoyo y cariño.
<b>Mis primos</b>	Maricarmen, Eleazar, Genaro, Luis Fernando y Héctor Eduardo, por su cariño.
<b>Mis amigos</b>	A todos los amigos que conocí en la Universidad, quienes me brindaron su amistad en todos estos años.

## AGRADECIMIENTOS A:

Universidad de San Carlos de Guatemala	Por formarme como profesional y permitirme alcanzar mis metas.
Catedráticos	Por ser mis guías en la formación en especial a los catedráticos de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica y la Escuela de Ingeniería Mecánica.
Ing. Jorge Pérez	Por ser el asesor de este trabajo de graduación, sus revisiones, comentarios, correcciones y sugerencias que me guiaron para obtener el mejor conocimiento plasmado en este trabajo.

# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	VII
LISTA DE SIMBOLOS .....	XIII
GLOSARIO .....	XV
RESUMEN.....	XVII
OBJETIVOS.....	XIX
INTRODUCCIÓN.....	XXI
1.    CONCEPTOS DE SISTEMAS DE POTENCIA .....	1
1.1.    Conceptos básicos .....	1
1.1.1.    Introducción .....	1
1.1.2.    Simbología.....	1
1.1.3.    Diagrama unifilar.....	2
1.1.4.    Valores por unidad.....	3
1.1.5.    Potencia en circuitos trifásicos.....	4
1.1.6.    Transformadores .....	6
1.1.7.    Barras .....	8
1.1.8.    Cargas .....	9
1.2.    Generación, transmisión y distribución de energía eléctrica.....	9
1.2.1.    Sistemas de generación de energía eléctrica .....	9
1.2.1.1.    Generadores.....	9
1.2.1.2.    Plantas de generación .....	11
1.2.2.    Sistemas de transmisión de energía eléctrica .....	12
1.2.2.1.    Líneas de transmisión.....	12

1.2.2.2.	Clasificación de las líneas de transmisión .....	14
1.2.2.3.	Capacidad disponible de transmisión...	15
1.2.2.4.	Límites de capacidad disponible de transmisión .....	17
1.2.3.	Sistemas de distribución de energía eléctrica .....	18
1.2.3.1.	Demanda.....	18
1.2.3.2.	Demanda máxima .....	19
2.	FLUJOS DE POTENCIA .....	21
2.1.	Conceptos básicos.....	21
2.1.1.	Introducción.....	21
2.1.2.	Modelo de impedancias.....	21
2.1.2.1.	Matriz de impedancia .....	22
2.1.2.2.	Matriz de admitancia .....	23
2.1.3.	Ecuaciones de flujo de potencia.....	24
2.2.	Método de solución de Gauss-Seidel.....	26
2.3.	Método de solución de Newton-Raphson.....	29
2.4.	Estudios de flujos de potencia en el diseño y operación de sistemas de potencia.....	35
3.	FALLAS Y ANÁLISIS DE CONTINGENCIAS EN SISTEMAS DE POTENCIA.....	37
3.1.	Fallas.....	37
3.1.1.	Fallas simétricas.....	37
3.1.1.1.	Máquina síncrona bajo falla trifásica ....	39
3.1.1.2.	Cálculo de falla trifásica en sistemas de gran tamaño .....	40

3.1.2.	Componentes simétricas y redes de secuencia.....	44
3.1.2.1.	Componentes simétricas .....	44
3.1.2.2.	Redes de secuencia .....	47
3.1.3.	Fallas asimétricas .....	48
3.1.3.1.	Falla bifásica.....	49
3.1.3.2.	Falla bifásica a tierra.....	51
3.1.3.3.	Falla monofásica a tierra .....	52
3.2.	Análisis de contingencias .....	55
3.2.1.	Métodos de análisis .....	55
3.2.2.	Análisis de contingencias basados en factores de distribución e índices de severidad.....	60
4.	TEORÍA DE GRAFOS .....	63
4.1.	Definiciones .....	63
4.1.1.	Grafo.....	63
4.1.2.	Grafo no dirigido .....	63
4.1.3.	Grafo dirigido .....	64
4.1.4.	Grado de un vértice .....	65
4.1.5.	Multígrafo.....	67
4.1.6.	Subgrafo .....	68
4.2.	Lazos, caminos y ciclos .....	69
4.2.1.	Lazos .....	69
4.2.2.	Caminos .....	70
4.2.3.	Ciclo.....	71
4.3.	Conectividad.....	72
4.3.1.	Grafo conexo .....	72
4.3.2.	Grafo desconexo.....	73
4.3.3.	Componentes conexas .....	74
4.3.4.	Puntos de articulación y puentes .....	75

4.4.	Árboles.....	77
4.4.1.	Definiciones y propiedades .....	77
4.4.2.	Árboles con raíz .....	79
4.4.3.	Búsqueda en profundidad .....	80
4.4.4.	Búsqueda en anchura .....	83
4.4.5.	Componentes biconexas y puntos de articulación ..	85
4.5.	Optimización .....	89
4.5.1.	Grafos ponderados.....	89
4.5.2.	Camino más corto .....	90
4.5.3.	Árboles recubridores .....	94
4.6.	Redes de transporte.....	97
4.6.1.	Definiciones y propiedades .....	97
4.6.2.	Teorema del flujo máximo .....	100
4.6.3.	Teorema del flujo máximo y corte mínimo.....	102
4.6.4.	Modelos de redes.....	108
5.	ANÁLISIS PROPUESTO PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA.....	111
5.1.	Medidas y métricas de las redes.....	111
5.2.	Modelos de red: red aleatoria.....	117
5.2.1.	Número de aristas y grado promedio .....	118
5.2.2.	Distribución de grado .....	119
5.2.3.	Componente gigante y pequeñas componentes ...	122
5.3.	Robustez de la red .....	126
5.3.1.	Eliminación aleatoria uniforme de vértices .....	127
5.3.2.	Eliminación no uniforme de vértices.....	133
5.4.	Comunidades .....	136
5.5.	Estructura de los sistemas de potencia.....	141

5.5.1.	Método propuesto para análisis de la estructura de sistemas de potencia .....	141
5.5.1.1.	Criterios de interpretación de los resultados generados por el método propuesto para el análisis de estructura de sistemas de potencia ...	143
5.5.1.2.	Conexión de la red.....	146
5.5.1.3.	Centralización de la red .....	164
5.5.1.4.	Agrupamiento de la red .....	177
5.6.	Operación de los sistemas de potencia .....	184
5.6.1.	Método propuesto para análisis de operación de sistemas de potencia .....	184
5.6.2.	Criterios de interpretación de los resultados generados por el método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia .....	186
5.6.3.	Análisis de flujo máximo en redes de transporte para flujos de potencia.....	196
5.7.	Diseño y planificación de sistemas de potencia .....	202
6.	APLICACIÓN DEL ANÁLISIS PROPUESTO EN EL SISTEMA NACIONAL INTERCONECTADO (SNI) .....	211
6.1.	Análisis de estructura del sistema .....	211
6.2.	Análisis de operación del sistema .....	233
6.3.	Diseño y planificación del sistema.....	239
6.4.	Utilidad en el sistema de potencia .....	245
	CONCLUSIONES .....	251

RECOMENDACIONES .....253  
BIBLIOGRAFÍA.....255  
APÉNDICES.....261  
ANEXOS.....287

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

### FIGURAS

1.	Simbología utilizada en sistemas de potencia.....	2
2.	Ejemplo de diagrama unifilar .....	3
3.	Transformador monofásico con núcleo real .....	7
4.	Ejemplo de diagrama fasorial trifásico.....	38
5.	Gráfica de la corriente de armadura en cortocircuito simétrico de una máquina síncrona.....	39
6.	Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla bifásica.....	50
7.	Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla bifásica a tierra.....	52
8.	Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla monofásica a tierra .....	54
9.	Ejemplo de un grafo no dirigido .....	64
10.	Ejemplo de un grafo dirigido .....	65
11.	Ejemplo de un multígrafo.....	67
12.	Ejemplo de un subgrafo .....	68
13.	Ejemplo de un lazo en el vértice (a) de un grafo dirigido.....	69
14.	Ejemplo de un camino (P) de longitud 6 en un grafo no dirigido (G).....	71
15.	Ejemplo de un ciclo (aristas gruesas) en grafo no dirigido .....	72
16.	Ejemplo de un grafo conexo de seis vértices .....	73
17.	Ejemplo de un grafo desconexo de seis vértices.....	73
18.	Ejemplo de un dígrafo y sus componentes fuertemente conectadas .....	75

19.	Ejemplo de un grafo conexo con los puntos de articulación (v, x, y) así como el puente xy (e) .....	76
20.	Ejemplo de un árbol .....	79
21.	Ejemplo del algoritmo de búsqueda en profundidad aplicado a G obteniendo T .....	83
22.	Ejemplo del algoritmo de búsqueda en anchura .....	85
23.	Ejemplo de puntos de articulación y componentes biconexas aplicadas al árbol T del grafo G .....	88
24.	Ejemplo de un grafo ponderado dirigido .....	90
25.	Ejemplo del algoritmo de Dijkstra aplicado al grafo ponderado de la figura 24. ....	93
26.	Ejemplo del algoritmo de Kruskal aplicado al grafo G para obtener el árbol recubridor de mínimo peso T. ....	96
27.	Ejemplo de una red, $N = (G, s, t, c)$ .....	100
28.	Ejemplo del teorema de flujo máximo y cortadura mínima, para una red $N = (G, s, t, c)$ con $s = a$ y $t = z$ . ....	105
29.	Ejemplo de red multifuente-multisumidero .....	109
30.	Ejemplo de una red con restricciones en los vértices, donde $s = a$ , $t = z$ y los números en paréntesis son la restricción de flujo. ....	110
31.	Ejemplo de distribución de grado (distribución de poisson en verde y distribución de ley de potencia en morado) .....	117
32.	Ejemplo de distribución de grado para una red aleatoria (Distribución binomial contra distribución de Poisson) .....	121
33.	Ejemplo de gráfica de $k$ frente a $S$ evolución de la red) .....	124
34.	Ejemplo de gráficas de $S_c$ y $P_\infty$ (teoría de percolación). ....	133
35.	Ejemplo de gráficas de $S$ vrs $k$ y $S$ frente a fracción de vértices.....	136
36.	Redes (grafos) obtenidas de la modelación de los sistemas de 9, 14, 30 y 57 barras de la IEEE .....	144

37.	Red (grafo) obtenido de la modelación del sistema de 118 barras de la IEEE .....	145
38.	Distribución de grado de las redes analizadas .....	149
39.	Distribución de grado de la red de 118 barras (distribución de Poisson correspondiente en rojo).....	150
40.	Gráfica resultante del criterio de centro más grande para las redes analizadas (9, 14, 30, 57, 118 barras) .....	151
41.	Gráfica resultante del criterio de significado del término libre de escala para las redes analizadas (9, 14, 30, 57, 118 barras) .....	152
42.	Distribución de grado en escala logarítmica y ajuste de distribución para la red de 118 barras .....	154
43.	Diámetro en función del número de vértices de las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118).....	157
44.	Tamaño de rango (diferencia de límites) para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118).....	159
45.	Distancia promedio (camino) en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118).....	160
46.	Densidad en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118) .....	163
47.	Centralidad promedio y puntos de articulación generalizados en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118) .....	177
48.	Modelación del número de comunidades y la modularidad de estas para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118).....	181
49.	Modelación del número de comunidades en función del coeficiente de agrupamiento promedio para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118).....	182
50.	Gráficas de eliminación aleatoria uniforme de vértices, obtenidas del paso 2 para las redes IEEE (9, 14, 30, 57 y 118 barras).....	187
51.	Gráficas de S en función de f para la eliminación no uniforme de vértices, obtenidas del paso 3 en las redes IEEE	

	(9, 14, 30, 57 y 118 barras).....	190
52.	Gráficas de S en función de k para la eliminación no uniforme de vértices, obtenidas del paso 3 en las redes IEEE (9, 14, 30, 57 y 118 barras).....	191
53.	Gráficas de S en función de f para la eliminación aleatoria uniforme de aristas, obtenidas del paso 4 en las redes IEEE (9, 14, 30, 57 y 118 barras).....	193
54.	Árboles recubridores de peso mínimo obtenidos del paso 6 del método propuesto para las redes IEEE (9 y 14 barras) .....	195
55.	Diagrama de flujo del algoritmo propuesto por N. Sánchez. ....	198
56.	Red primitiva para el caso hipotético ejemplificado .....	207
57.	Red nueva obtenida del proceso de árbol recubridor de máximo peso y puntos de articulación para el caso hipotético ejemplificado .....	208
58.	Red nueva mejorada para el caso hipotético ejemplificado analizando comunidades .....	209
59.	Red obtenida de la modelación del Sistema Nacional Interconectado de Guatemala (SNI).....	212
60.	Distribución de grado de la red del SNI.....	213
61.	Distribución de grado de la red del SNI en escala logarítmica .....	214
62.	Comparación de distribución de grado contra distribución de Poisson para la red del SNI .....	216
63.	Visualización de la centralidad de cercanía para la red del SNI .....	224
64.	Visualización de la centralidad intermedia para la red del SNI .....	225
65.	Visualización de la centralidad de grado para la red del SNI .....	226
66.	Visualización de los puntos de articulación para la red del SNI .....	227
67.	Gráfica de eliminación aleatoria uniforme de vértices para la red del SNI .....	234
68.	Gráfica de eliminación dirigida de vértices para la red del SNI (S en función de k y f) .....	235

69.	Gráfica de eliminación aleatoria de aristas para la red del SNI .....	236
70.	Gráfica del árbol de resistencia mínima para la red del SNI.....	238
71.	Diagrama de las partes del método de análisis propuesto para el estudio de sistemas de potencia .....	246

## TABLAS

I.	Comportamiento de parámetros en la evolución de la red .....	124
II.	Resultados obtenidos del paso 2 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia .....	151
III.	Resultados obtenidos del paso 4 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia .....	155
IV.	Resultados obtenidos del paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia .....	168
V.	Resultados obtenidos del criterio de nivel aplicado a los datos generados en el paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia .....	171
VI.	Resultados obtenidos del paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia (promedios y ecuación 5.60) .....	173
VII.	Resultados obtenidos del paso 7 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia. ....	179
VIII.	Resultados obtenidos del paso 2 y 3 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia..	188
IX.	Resultados obtenidos del paso 4 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia.....	194
X.	Resultados obtenidos del paso 6 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia.....	195
XI.	Resultados obtenidos de la metodología propuesta por	

	Nidia Sánchez (también resultados experimentalmente en este trabajo de graduación) .....	200
XII.	Resultados de flujo máximo en relación con el flujo real (casos estudiados por N. Sánchez) .....	201
XIII.	Datos de potencia en vértices para el caso hipotético de ejemplificación para el árbol recubridor de máximo peso .....	206
XIV.	Datos de posibles conexiones entre vértices para el caso hipotético de ejemplificación para el árbol recubridor de máximo peso.....	206
XV.	Datos de robustez obtenidos de la red nueva mejorada del caso hipotético analizado .....	210
XVI.	Datos obtenidos de los pasos 3 y 4 del método propuesto de análisis de estructura aplicado a la red del SNI .....	217
XVII.	Datos obtenidos de los pasos 5 y 6 del método propuesto de análisis de estructura aplicado a la red del SNI .....	221
XVIII.	Datos obtenidos del criterio de nivel aplicado a la red del SNI .....	228
XIX.	Datos obtenidos del criterio de medida generalizado aplicado a la red del SNI .....	230
XX.	Datos obtenidos del paso 7 del método propuesto para el análisis de estructura aplicado a la red del SNI .....	231
XXI.	Datos obtenidos de los pasos 2, 3 y 4 del método propuesto para el análisis de operación aplicado a la red del SNI.....	233
XXII.	Resultados de la aplicación de comunidades en la red del SNI.....	239
XXIII.	Nodos y líneas de transmisión nuevas según expansión de la red del SNI .....	242
XXIV.	Comparación de las redes de SNI antes y después de expansión, parte I .....	242
XXV.	Comparación de las redes de SNI antes y después de expansión, parte II .....	244

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$Y$	Admitancia
$\alpha$	Ángulo de desfase entre el voltaje y corriente
$M$	Aristas presentes en el grafo
$J_i$	Bloques de la matriz jacobiana
$C_i^{\ell}$	Centralidad de cercanía
$x_i$	Centralidad intermedia
$C$	Coefficiente de agrupamiento de la red
$C_i$	Coefficiente de agrupamiento local
$\langle C \rangle$	Coefficiente de agrupamiento promedio de la red
$R^2$	Coefficiente de determinación
“ $Y$ ”	Conexión en estrella de un sistema trifásico
$X^*$	Conjugado de un número complejo
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales positivos
$I$	Corriente
$\Delta$	Delta, cambio de estado de una variable
$L(v)$	Distancia del camino más corto
<b>FP</b>	Factor de potencia
$1 \angle 120^\circ$	Fasor magnitud unitaria, desplazamiento 120 grados
$e_1$	Fem del primario de un transformador
$e_2$	Fem del secundario de un transformador
$Gen_{PA}$	Generalización de los puntos de articulación
$Z$	Impedancia
$\rightarrow$	Implica en un solo sentido

$x$	Incógnita principal de una ecuación
<b>km</b>	Kilómetros
$J$	Matriz jacobiana
$\rho$	Notación de la densidad de la red
<b>G</b>	Notación del grafo analizado
$\langle \mathbf{m} \rangle$	Notación del número promedio de aristas en un grafo
$\forall$	Notación matemática de “para todo”
:	Notación matemática de “tal que”
$\{u, v\}$	Notación matemática de un arco
$[x]$	Notación matemática de una matriz
$i$	Número imaginario igual a $\sqrt{-1}$
$\in$	Pertenece a cierto conjunto
$\mathbf{Pe}(e_{ij})$	Peso de una arista
<b>P</b>	Potencia activa
<b>Q</b>	Potencia reactiva
$y$	Resultado del eje vertical por operación de incógnita
$\Sigma$	Sumatoria de una función
$\langle s_c \rangle$	Tamaño promedio de las pequeñas componentes
<b>R</b>	Tamaño promedio de una componente
$\cup$	Unión de conjuntos
$ x $	Valor absoluto de un número o incógnita
<b>min</b>	Valor mínimo de un numero en un conjunto
<b>N</b>	Vértices del grafo
<b>V</b>	Voltaje
$V_i^{(0)}$	Voltaje de las fases en cada secuencia (0, 1, 2)

## GLOSARIO

<b>Acíclico</b>	Grafo que no contiene ciclos.
<b>Admitancia</b>	Es el inverso de la impedancia.
<b>Barra <i>slack</i></b>	Barra infinita es la barra de compensación.
<b>Barra oscilante</b>	Otro nombre de la barra de compensación.
<b>Circuito serie R-L</b>	Circuito compuesto por una resistencia e inductancia en serie.
<b>Fasor</b>	Es la representación vectorial de un numero complejo en el plano complejo.
<b>Grafo no vacío</b>	Es aquel grafo que presenta elementos, vértices y aristas.
<b>IEEE</b>	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i> (Instituto de ingenieros eléctricos y electrónicos).
<b>Impedancia</b>	Es la oposición al paso de corriente que presenta un componente de un circuito.

<b>NERC</b>	<i>The North American Electric Reability Corporation</i> (Corporación norteamericana de fiabilidad eléctrica).
<b>Número complejo</b>	Conjunto de números que se integran por una parte real y una parte imaginaria.
<b>Periodo permanente</b>	Periodo estable después de una falla.
<b>Periodo subtransitorio</b>	Periodo comprendido en los primeros instantes después de una falla.
<b>Periodo transitorio</b>	Periodo comprendido después del subtransitorio se busca la estabilización después de falla.
<b>Reactancia</b>	Parte imaginaria de una impedancia producida por inductancia y capacitor.
<b>SNI</b>	Sistema Nacional Interconectado de Guatemala.
<b>Vértice vecino</b>	Cualquier vértice adyacente al vértice analizado.

## RESUMEN

La aplicación de la teoría de grafos en los sistemas de potencia es el tema desarrollado en este trabajo de graduación. La teoría de grafos es un tema de la matemática en el cual se modelan ciertos sistemas o relaciones que se presentan entre ciertos objetos, con el fin de describir características de su comportamiento. Los sistemas de potencia son toda la integración de los componentes eléctricos necesarios para generar, transmitir y distribuir energía eléctrica.

El desarrollo de este trabajo de graduación se elaboró con el fin de estructurar la introducción al concepto de sistemas de potencia, así como los distintos métodos y ecuaciones requeridos para su análisis. Posteriormente, se presenta la teoría de grafos explicando los conceptos más fundamentales para su comprensión y aplicación; esto integra las herramientas matemáticas, algoritmos, ecuaciones y definiciones necesarias para poderse aplicar en un análisis detallado. Toda la anterior es la base teórica que permitirá cumplir con el objetivo de este trabajo.

La obtención del objetivo principal de esta investigación se lleva a cabo por medio de la aplicación de métodos que integran algoritmos y ecuaciones que al ejecutarse en las redes (grafos) generan datos, los cuales se interpretan para determinar el estado del sistema modelado en base a características específicas en áreas de los sistemas de potencia correspondientes a estructura, operación, diseño y planificación.

Los métodos propuestos son aplicados a un sistema real, siendo este el Sistema Nacional Interconectado. En el análisis se observa su estado, permitiendo la identificación de puntos de primordial interés, además de la obtención de parámetros indicativos de la respuesta del sistema a ciertos eventos que lo modifican.

# OBJETIVOS

## General

Aplicar la teoría de grafos en el estudio de los sistemas de potencia

## Específicos

1. Establecer mediante la teoría de grafos un método para analizar la estructura de un sistema de potencia.
2. Analizar la aplicación de flujos y redes de transporte de teoría de grafos en los flujos de potencia.
3. Describir el análisis de operación de los sistemas de potencia mediante la teoría de grafos.
4. Determinar las herramientas matemáticas de la teoría de grafos útiles en la planeación y diseño de sistemas de potencia.
5. Aplicar la información obtenida en esta tesis para el estudio del Sistema Nacional Interconectado (SNI).



## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de graduación aborda el estudio de los sistemas de potencia, dada la importancia de estos en desarrollo de una sociedad y en la realización de las actividades cotidianas de los seres humanos, requiere de tener el mayor conocimiento e información posible de estos sistemas para actuar de manera óptima, mejorando su desempeño. Esta información y conocimiento del comportamiento de los sistemas de potencia genera la necesidad de buscar herramientas de análisis necesarias para ejecutar estudios detallados de estos sistemas que brinden información acerca del estado de estos, las herramientas matemáticas de análisis son las idóneas para llevarlos a cabo.

La aplicación de la teoría de grafos en el estudio de los sistemas de potencia es el tema de desarrollo de este trabajo como herramienta matemática que ayude a analizar el comportamiento de los sistemas de potencia obteniendo información que describa a este en aspectos de estructura, de operación y diseño; dichos puntos son abordados desde un enfoque distinto al tradicional que se realiza en los análisis de sistemas de potencia actuales. La teoría de grafos analiza el comportamiento y modelación del sistema de manera colectiva, es decir las características que nacen de la conexión de los elementos que la conforman, las relaciones que establecen entre ellos para optimizar su desempeño en las actividades que estos sistemas realizan.

La aplicación de la teoría de grafos a los sistemas de potencia toma en consideración como punto inicial la modelación de dichos sistemas en forma de

grafos con variables relacionadas a su estructura y a su conexión, tales como los nodos del sistema y las líneas de transmisión que los conectan.

La modelación antes mencionada permite determinar el tipo de conexiones que se presentan, así como la determinación de puntos especiales de interés debido a características que se explicarán en el desarrollo de este trabajo, las cuales indicarán el estado del sistema ante ciertos eventos o en su funcionamiento normal.

El estudio realizado es exploratorio dado que permite conocer la aplicación de la teoría de grafos en el análisis de los sistemas de potencia en áreas puntuales delimitadas en la estructura, operación y diseño que se presentarán en los apartados que las desarrollarán, por lo que la información generada será sustancial para la teoría de análisis de sistemas de potencia y la determinación de características especiales de estos necesarias para optimizar las funciones de estos sistemas.

Dentro de lo abordado por este trabajo de graduación cabe mencionar que se presenta una aplicación de este análisis propuesto al Sistema Nacional Interconectado de Guatemala, obteniendo información de su comportamiento. Los métodos propuestos requieren de la elaboración de algoritmos obtenidos de la teoría de grafos aplicables a redes, para obtención de información que indica el estado de estas para su posterior interpretación; dichos algoritmos fueron de elaboración propia mediante un lenguaje de programación de uso libre, gratuito, denominado R software, permitiendo que dicha información fuera transformada en gráficas para mejor interpretación presentes en este trabajo.

# **1. CONCEPTOS DE SISTEMAS DE POTENCIA**

## **1.1. Conceptos básicos**

A continuación, se presentan los conceptos básicos que se requieren para comprender un sistema de potencia como son las herramientas básicas y los elementos que lo conforman.

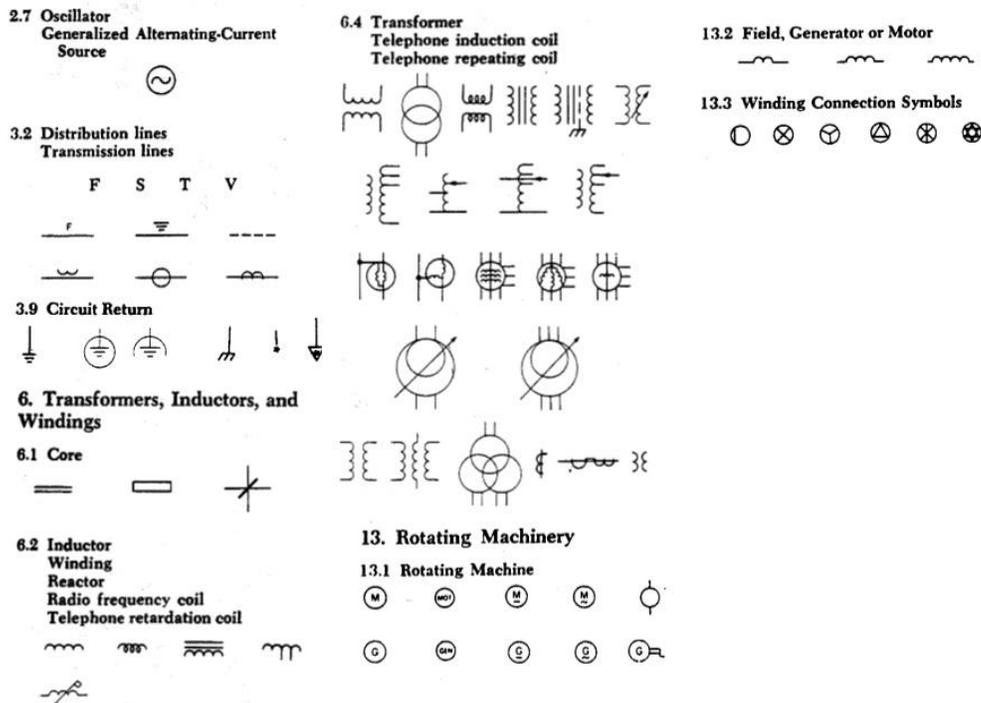
### **1.1.1. Introducción**

La energía eléctrica en la actualidad es uno de los servicios indispensables en las actividades cotidianas de la vida humana. Al manejar todo lo relacionado con la energía eléctrica es necesario utilizar la definición de sistema, el cual abarque todas las etapas que requiere el proceso previo al consumo de dicha energía en nuestros hogares. El sistema antes planteado recibe el nombre de sistema de potencia, que es un conjunto de elementos eléctricos que al conectarse crean una red, cuyo objetivo es la generación, transmisión y distribución de la energía eléctrica.

### **1.1.2. Simbología**

Se define como un conjunto de símbolos que representan los elementos eléctricos que se utilizan en ingeniería, el Instituto de ingenieros eléctricos y electrónicos (IEEE por sus siglas en inglés) brinda una simbología estándar según la norma IEEE 315, de la cual se recopilan los símbolos de elementos eléctricos utilizados en los sistemas de potencia, que a continuación se muestran.

Figura 1. Simbología utilizada en sistemas de potencia



Fuente: IEEE, Norma 315-1975, p. XIV-XVII.

### 1.1.3. Diagrama unifilar

Es una representación gráfica en la que se muestran las conexiones de los elementos que modelan un sistema de potencia trifásico completo, de manera simplificada y monofásica por esto recibe el nombre de unifilar. Este diagrama suministra de forma breve información importante del sistema.

Figura 2. **Ejemplo de diagrama unifilar**



Fuente: elaboración propia, *Power World Simulator*.

#### 1.1.4. **Valores por unidad**

Los valores por unidad son las magnitudes de las variables por estudiar en los sistemas de potencia expresadas en forma decimal, porcentual, resultado de una relación que se define de la siguiente manera:

$$\text{Valor por unidad} = \frac{\text{Valor real}}{\text{Valor base}} \quad (1.1)$$

Donde:

- Valor base: se refiere a la magnitud de la variable estudiada que se tomará como referencia en todo el sistema por trabajar.
- Valor real: se refiere a la magnitud de la variable estudiada.

Los valores por unidad son utilizados en el análisis de los sistemas de potencia debido a que evitan el manejo de grandes cantidades de dígitos en las magnitudes de las variables por estudiar y evita la referenciación de los transformadores del secundario con respecto al primario.

### **1.1.5. Potencia en circuitos trifásicos**

La potencia es la variación de energía con respecto al tiempo, donde la energía se suministra o se absorbe. Para los sistemas de potencia es utilizado el sistema trifásico, en las cuales se distribuye la potencia por utilizar que será la suma de estas fases. Dado que la energía se puede suministrar o absorber, la potencia también tendrá este comportamiento por lo que un generador trifásico suministrará potencia mientras que una carga trifásica absorberá potencia.

Dentro de los sistemas de potencia se trabaja la potencia generalizada comúnmente denominada potencia aparente, que es la potencia total suministrada al sistema. Se sabe que la potencia aparente consta de una parte real que se denomina potencia activa y otra parte imaginaria que se denomina potencia reactiva, dado que se representa con números complejos.

La potencia activa es aquella parte de la potencia aparente que se transforma en trabajo por lo cual se dice que es “consumida” por cargas en el sistema. Por otro lado, la potencia reactiva es aquella parte de la potencia aparente que se transforma en otro tipo de energía que se almacena en forma de campo eléctrico o campo magnético, en los sistemas de potencia esta ayuda a la magnetización de las máquinas eléctricas como lo son los generadores y transformadores.

El concepto de factor de potencia que es la relación que existe entre la potencia activa y la potencia aparente, esta relación indica la potencia que realiza un trabajo en el sistema o que se consume en él. Las ecuaciones para la calcular las potencias antes mencionadas es sistemas balanceados con cargas conectadas en “Y” son las siguientes:

Potencia activa ( $P$ )

$$P = \sqrt{3}|V_L||I_L| \cos \theta_p \quad (1.2)$$

Potencia reactiva ( $Q$ )

$$Q = \sqrt{3}|V_L||I_L| \sen \theta_p \quad (1.3)$$

Potencia aparente ( $S$ )

$$S = |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}|V_L||I_L| \quad (1.4)$$

Potencia compleja ( $S$ )

$$S = P + jQ = \sqrt{3}V_L I_L^* \quad (1.5)$$

Factor de potencia

$$FP = \frac{P}{S} = \cos \theta_p \quad (1.6)$$

Donde:

- $|V_L|$ : es la magnitud del voltaje de línea que en conexión estrella que es igual a raíz cuadrada de tres veces la magnitud del voltaje de fase ( $V_p$ ).

$$|V_L| = \sqrt{3}|V_p| \quad (1.7)$$

- $|I_L|$ : es la magnitud de la corriente de línea que en conexión estrella es igual a la magnitud de la corriente de fase ( $I_p$ ).
- $\theta_p$ : ángulo de desfase entre la señal de corriente y la señal de voltaje.
- $V_L$ : fasor de voltaje de línea, representado con magnitud y ángulo.

- $I_L$ : fasor de corriente de línea, representado con magnitud y ángulo.
- $j$ : representa la notación del número imaginario "i".

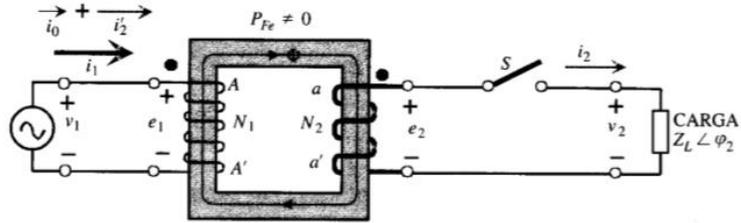
### 1.1.6. Transformadores

Se define como una máquina eléctrica que en simplicidad consiste en dos bobinas entrelazadas por el mismo circuito magnético a lo cual, se le denomina bobinas acopladas magnéticamente. Como elemento del sistema de potencia tiene las funciones la de enlazar los generadores a líneas de transmisión y entre líneas de transmisión de distintos niveles de voltaje, también transforma voltaje y corriente a otros niveles necesarios en el sistema.

El análisis presenta las relaciones de transformación, para esto se supone el caso más simplificado denominado transformador ideal, el cual es un núcleo de material ferromagnético al cual se le agregan dos devanados de cobre, es decir cable de cobre enrollado a las columnas del núcleo.

Las terminales de estos devanados presentarán una diferencia de potencial que están en función del voltaje de alimentación y el número de vueltas que contenga cada devanado ( $fem$ ) por lo que se determina una relación con el número de vueltas de cada devanado. Comúnmente se le denomina a un lado primario y al otro secundario, a lo anterior se le denomina relación de transformación ( $r_t$ ).

Figura 3. Transformador monofásico con núcleo real



Fuente: MORA, Jesús. *Máquinas eléctricas*. p. 172

La relación antes mencionada, los voltajes y corrientes en un transformador son descritos por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} V_1 = e_1 &= N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \\ V_2 = e_2 &= N_2 \frac{d\phi_m}{dt} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{V_2}{N_2} \quad (1.9)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow r_t = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.10)$$

$$N_1 I_1 = N_2 I_2 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{r_t} \quad (1.11)$$

Donde:

- $\phi_m$ : flujo magnético mutuo en el núcleo del transformador
- $V_{1,2}$ : voltaje del lado primario (1) y del secundario (2) del transformador
- $I_{1,2}$ : corriente del lado primario (1) y secundario (2) del transformador

### 1.1.7. Barras

Una barra es un elemento del sistema de potencia el cual funciona como uno nodo al que las líneas de transmisión se unen con otras líneas, con generadores o con cargas, para conformar una red eléctrica de potencia. Dentro del análisis de flujos de potencia se presentan en las barras cuatro variables, que son: potencia activa, potencia reactiva, voltaje y ángulo del voltaje, en base a estas variables se clasificas tres tipos de barras las cuales son:

- Barras de compensación
- Barras de voltaje controlado
- Barras de carga

Para comprender cada tipo de barra se parte la potencia compleja, en los sistemas de barras se analiza como potencia generada y potencia demandada, es aquí donde se diferencian los tres tipos de barras. Comúnmente la potencia generada es brindada a la barra por medio de un generador y la potencia demanda es consumida por cargas conectadas a las barras.

La barra de compensación es aquella que presenta potencia generada, magnitud y ángulo del voltaje, comúnmente se asocia cero al ángulo de voltaje dado que es esta barra se toma como de referencia para el voltaje. La barra de voltaje controlado presenta la magnitud del voltaje de la barra y la potencia activa, la característica que presenta es que busca mantener constante el voltaje. Por último, la barra de carga solo presenta potencia demandada y la potencia generada es cero.

### **1.1.8. Cargas**

Una carga es un elemento del sistema de potencia, el cual actúa como un sumidero de potencia, dado que esta consume potencia activa y potencia reactiva para transformarla en otra forma de energía o utilizarla en forma de trabajo. Estas cargas pueden ser elementos estáticos como también máquinas rotativas, comúnmente motores, esto indica que se representan como impedancias o admitancias. Otro punto por considerar es que al estar conectadas en los sistemas de potencia presentan un factor de potencia que se manifiesta en el voltaje y corriente en las terminales a donde se conecta esta carga.

## **1.2. Generación, transmisión y distribución de energía eléctrica**

En los sistemas de potencia las funciones realizadas por este se distribuyen según las actividades que realizan, las tres principales actividades son la generación, transmisión y distribución de energía eléctrica por lo que a continuación se describirán.

### **1.2.1. Sistemas de generación de energía eléctrica**

Esta actividad se centra en generar energía eléctrica por medio de equipos especiales en áreas de trabajo específicas, describiéndose a continuación.

#### **1.2.1.1. Generadores**

Un generador es un elemento del sistema de potencia, que se define como una máquina eléctrica que transforma energía mecánica en energía

eléctrica y de esta forma suministra la potencia eléctrica al sistema. Esto sucede por fenómenos físicos modelados por las leyes de la teoría electromagnética. Los generadores utilizados en los sistemas de potencia generan corriente alterna, la gran mayoría de ellos, en base a este criterio se dividen en dos grandes tipos analizados en la teoría de máquinas eléctricas los cuales son:

- Generadores síncronos
- Generadores asíncronos

La máquina síncrona es la más utilizada en los sistemas de potencia, la cual consta de dos partes una móvil llamada rotor y una estática, sin movimiento, denominada estator. Ambas cuentan con devanados de cobre que en sus terminales son alimentados de corriente directa para el devanado del rotor, también denominado devanado de campo y corriente alterna para el devanado en el estator denominado devanado de armadura.

Para este devanado puede alimentarse si funciona como motor o suministrar corriente alterna. Si actúa como generador, que es el caso estudiado, se utilizan tres bobinas que componen este devanado separadas 120 grados eléctricos entre ellas para generar corriente y voltaje trifásico.

Básicamente, la máquina síncrona funcionando como generador necesita de una alimentación de corriente directa conectada a las terminales del devanado de campo. A partir de este escenario se necesita aplicar movimiento al rotor por medio de una fuente mecánica lo que hace rotar el devanado de campo en el cual se ha generado un campo magnético.

Gracias a esta rotación se consigue un campo magnético variable en el tiempo, este campo es cortado por las espiras del devanado de armadura situadas en el estator. Por la ley de Faraday se sabe que la variación de flujo respecto del tiempo en una espira producirá una fem, la que suministrará de potencia a la carga conectada a las terminales del devanado de armadura. En sistemas de potencia estas terminales se conectan a la red.

### **1.2.1.2. Plantas de generación**

Una planta de generación es aquella instalación y conjunto de equipos electromecánicos donde se transforma una fuente de energía natural o artificial a energía eléctrica teniendo como intermediaria en esta transformación un generador u otros dispositivos de conversión de energía.

Las plantas de generación suministran la potencia consumida por la carga que es debida a los clientes, dentro de la potencia que se consume esta no es constante o con un valor fijo durante un periodo de tiempo, sino que fluctúa entre límites mínimos y máximos de potencia; esta demanda en función del tiempo introduce los términos de carga base, carga pico y carga intermedia.

Se entiende por carga base como el límite mínimo de potencia que es consumida en el sistema y debe ser alimentada la totalidad del tiempo. Carga pico es el límite máximo de potencia consumida en el sistema, que debe alimentarse por un breve porcentaje del tiempo. Por último, la carga intermedia que es la potencia consumida dentro de los límites de potencia base y potencia pico, que debe ser alimentada en un porcentaje entre los tiempos de la carga base y carga pico.

Con estos bloques de energía mencionados en el párrafo anterior se pueden clasificar las plantas generadoras como:

- Plantas de potencia base son aquellas que suministran potencia en todo momento para satisfacer la carga base.
- Plantas de potencia intermedia son aquellas que suministran potencia con una respuesta relativamente rápida según los cambios de demanda.
- Plantas de generación pico son aquellas que suministran potencia durante breves intervalos de tiempo a lo largo de un día, por lo que la respuesta de estas debe ser muy rápida adecuándose a las bruscas variaciones de demanda (carga pico) por medio de mecanismos de puesta en marcha que necesiten el menor tiempo posible.

### **1.2.2. Sistemas de transmisión de energía eléctrica**

Los elementos principales que componen este sistema son las líneas de transmisión por lo que se describirá en este apartado todo lo relacionado con estas.

#### **1.2.2.1. Líneas de transmisión**

Es un elemento del sistema de potencia cuya función es transportar la potencia eléctrica desde la fuente (generador) hasta el consumidor (carga), o donde esta se distribuye. Se utiliza como medio un conductor eléctrico con geometría cilíndrica (cable).

Hay que entender que el comportamiento de las líneas de transmisión tiene características debidas a los efectos electromagnéticos que en ellas se presentan, por lo cual se definen dichas características como parámetros debido al control realizado para obtener la adecuada operación de la línea de transmisión, es decir, maximizar el flujo de potencia que ella transporta. Los 4 parámetros son los siguientes:

- Resistencia: representa la oposición al paso de corriente por el conductor, siendo una de las causas más importantes de pérdida de potencia en las líneas de transmisión. Este parámetro se presenta en serie con el generador.
- Inductancia: dado que los sistemas de potencia utilizan la corriente alterna, lo que brinda un flujo variable el cual genera una fem; esta relación se origina en los conductores y entre ellos; este fenómeno es debido solo a la corriente que circula por él, denominándose autoinducción y se indica como inductancia de la línea. Este junto con la resistencia forman la impedancia de la línea de transmisión.
- Capacitancia: se presenta entre conductores debido a la circulación de corriente, generándose un campo eléctrico entre esta diferencia de potencial que depende del medio dieléctrico que existe entre ellos, por esta razón indica la carga por unidad de diferencia de potencial entre dos conductores.
- Conductancia: utilizada para modelar la corriente de fuga a través del dieléctrico, presente en los aisladores de las líneas y el aislamiento de los conductores que se presenta a lo largo de la línea; entre los

conductores de una línea, la corriente de fuga entre ambos resulta ser mínima, por lo que se desprecia.

### **1.2.2.2. Clasificación de las líneas de transmisión**

Según la teoría de sistemas de potencia se establece el criterio de clasificación en sentido de la longitud de cada línea, dado que los comportamientos de los parámetros de línea están en función de la longitud. De acuerdo con esto se clasifican las líneas en:

- Línea corta
- Línea media
- Línea larga

Línea corta: se tipifica a esta como todas las líneas menores a 80 km, que presentan un comportamiento de los parámetros de líneas de resistencia e inductancia, no se toma en cuenta la conductancia y la capacitancia. La primera se desprecia en los dos primeros tipos de líneas, mientras que la capacitancia en estas líneas es tan pequeña que se desprecia dicho parámetro para los cálculos correspondientes de voltaje y corriente en la línea.

Línea media es toda línea con longitud comprendida entre los 80 km a los 240 km, los parámetros por considerar son la resistencia, inductancia y capacitancia, se desprecia la conductancia dadas las longitudes de esta línea.

Línea larga es toda aquella línea de longitud mayor a 240 km, para este tipo se debe considerar que los parámetros de línea se distribuyen uniformemente a lo largo de la longitud de esta, mientras las líneas anteriores se consideraban agrupados.

### 1.2.2.3. Capacidad disponible de transmisión

*The North American Electric Reability Corporation* (NERC) define la capacidad de transmisión como la medida de la habilidad o capacidad de los sistemas eléctricos interconectados para mover o transferir potencia eléctrica de manera fiable de un área a otra por todas las líneas de transmisión o caminos, entre estas áreas bajo condiciones específicas del sistema.

La definición de capacidad disponible de transmisión (CDT) según NERC, es la medida de la capacidad de transferencia restante en la red de transmisión física para una actividad comercial adicional por encima de los usos ya comprometidos. La ecuación matemática que describe CDT es la siguiente.

$$CDT = CTT - MFT - CTE \text{ (incluyendo MBC)} \quad (1. 12)$$

Donde:

- CTT: capacidad total de transferencia
- MFT: margen de fiabilidad de la transmisión
- CTE: compromisos de transmisión existentes
- MBC: margen de beneficio de capacidad

La capacidad total de transferencia (CTT), se define como la cantidad de potencia eléctrica que puede ser transferida sobre la red de transmisión interconectada de manera fiable.

El margen de fiabilidad de la transmisión (MFT) se define como la cantidad de la capacidad de transferencia en la transmisión, necesaria para asegurar que

la red de transmisión interconectada es segura bajo un rango razonable de incertidumbres en las condiciones del sistema.

El MFT proporciona una reserva en la capacidad de transferencia que garantiza la fiabilidad de la red de transmisión interconectada, esta cuenta la incertidumbre en las condiciones de los sistemas y los efectos asociados en el cálculo del CTT y CDT, así como la flexibilidad operativa, para asegurar un funcionamiento fiable del sistema a medida que cambian las condiciones de este.

El margen de beneficio de capacidad (MBC), se define como la cantidad de la capacidad de transferencia en la transmisión reservada por entidades de servicio de carga, para asegurar el acceso a la generación de sistemas interconectados para cumplir con los requisitos de fiabilidad de generación.

La reserva que plantea el MBC por entidad de servicio de carga, permite que dicha entidad reduzca la capacidad de generación instalada por debajo de aquella que de otra manera habría sido necesaria sin utilizar las interconexiones, para cumplir con los requisitos de confiabilidad de generación.

El MBC es un margen que se aplica localmente en su mayoría a diferencia del MFT que es más un margen de red, conforme las entidades encargadas de generación aplican políticas y procedimientos para reservar la capacidad de transferencia con fines de confiabilidad de generación este debe incluirse en los usos del sistema reservados o comprometidos con el cálculo del CDT.

Los compromisos de transmisión existentes (CTE), es la suma de todos los compromisos de transmisión que existen en los cuales se incluye el servicio al cliente al por menor y el margen de beneficio de capacidad.

#### **1.2.2.4. Límites de capacidad disponible de transmisión**

La capacidad de las redes de transmisión interconectadas para transferir potencia eléctrica de manera fiable se ve limitada por características físicas y eléctricas del sistema. A continuación, se presentan los límites que se analizan para la transferencia de potencia eléctrica.

**Límite térmico:** este establece la cantidad máxima de corriente eléctrica que una línea de transmisión o instalación eléctrica puede conducir sobre un determinado periodo de tiempo antes de que sufra un daño permanente por sobrecalentamiento o antes de que viole los requisitos de seguridad pública.

**Límite de voltaje:** indica que los voltajes del sistema y los cambios de voltaje deben mantenerse dentro del rango de límite máximo y mínimo aceptables. Un colapso extendido del voltaje del sistema puede resultar en un apagón por sectores o generalizado en la red interconectada. Se pueden establecer los voltajes límites por la cantidad de potencia eléctrica que puede transferirse en el sistema eléctrico.

**Límite de estabilidad:** la red de transmisión debe ser capaz de sobrevivir a perturbaciones a través de los periodos transitorios y dinámicos después de la perturbación, dado que todos los generadores de un sistema interconectado funcionan en sincronismo. Para que el sistema sea estable, las oscilaciones deben disminuir a medida que los sistemas eléctricos alcanzan un nuevo punto de funcionamiento estable, si este punto no se establece rápidamente es probable que los generadores pierdan sincronismo entre sí y todos o parte de los sistemas eléctricos interconectados pueden volverse inestables. Esto puede

dañar a los equipos provocando una interrupción incontrolada y generalizada en el suministro hacia los clientes.

Estos límites afectan al CTT, elemento que compone el cálculo del CDT, dado que las condiciones de operación de los sistemas varían, esto produce que el límite más restrictivo para la determinación del CTT se mueva de una instalación o límite del sistema a otro.

### **1.2.3. Sistemas de distribución de energía eléctrica**

En este apartado se describirán los conceptos básicos requeridos para la comprensión del funcionamiento de este sistema.

#### **1.2.3.1. Demanda**

La demanda es la cantidad de potencia, tomada en valor medio, que un consumidor, instalación o sistema utiliza en determinado intervalo de tiempo; así también puede ser interpretada como el valor medio de la carga en las terminales receptoras en un determinado intervalo de tiempo. El intervalo en el cual se analiza se denomina intervalo de demanda, la duración de este depende de la aplicación específica que se desee conocer.

Es indispensable que para establecer una demanda es necesario indicar el intervalo de demanda. Las cargas de manera simple pueden ser instantáneas o cargas continuas; la demanda media, entonces, se considera como la cantidad de potencia consumida dividido el número de horas del periodo analizado.

### **1.2.3.2. Demanda máxima**

Se puede generalizar que las cargas son muy poco constantes durante un periodo, es decir, fluctúan de manera continua; por lo que se pueden registrar variaciones, aumentos o disminuciones, en la carga durante un tiempo de análisis. Considerando este registro se define la demanda máxima también llamada carga máxima como la mayor carga que se presenta en un sistema en un periodo de tiempo o trabajo previamente establecido.

La importancia de conocer esta demanda máxima se debe a que esta determinará la capacidad que requiere el sistema. Al analizar esta demanda máxima combinada de un grupo pequeño de consumidores determina la capacidad del transformador que se necesita para suplirlas. Así, las cargas combinadas necesarias para alimentar el grupo de transformadores da como resultado una demanda máxima que determinará el calibre del conductor y la capacidad del interruptor que forma parte del alimentador primario.

La demanda máxima de un grupo de alimentadores determinará la capacidad de la subestación eléctrica y de manera consecutiva esta demanda máxima determinará la capacidad de generación necesaria para satisfacer al sistema.



## **2. FLUJOS DE POTENCIA**

### **2.1. Conceptos básicos**

En este apartado se definirá el término flujo de potencia, además se describirán los conceptos introductorios.

#### **2.1.1. Introducción**

El estudio de flujos de potencia es de gran ayuda para el sistema de potencia, dado que brinda información necesaria para la operación, planeación y diseño de dichos sistemas. Estas razones indican que tiene una importancia especial resolver dichos flujos en el sistema estudiado.

Dentro del análisis de sistemas de potencia, un flujo de potencia consiste en la transferencia de potencia activa y reactiva, la cual es generada para alimentar cargas que requieren dicha potencia, utilizando como medio de transporte las líneas de transmisión. La información principal que se obtiene del estudio de los flujos de potencia es: la magnitud y ángulo del voltaje en cada barra, así como la potencia activa y reactiva que fluye en las líneas de transmisión.

#### **2.1.2. Modelo de impedancias**

El modelo se basa en la representación matemática de las impedancias para ser utilizadas en la determinación de los flujos de potencia.

### 2.1.2.1. Matriz de impedancia

La una matriz de impedancia es la representación matemática de las conexiones presentes en un sistema de potencia de n barras, a través de las líneas de transmisión tomando en cuenta únicamente su impedancia (tomada en su forma compleja).

De esta matriz se puede mencionar que: es simétrica respecto de la diagonal principal, además las impedancias que se sitúan en esta diagonal principal, para libros de análisis de sistemas de potencia, se les suele denominar impedancias de punto de operación de las barras. A las impedancias que no se encuentran dentro de la diagonal principal, pero sí en la matriz, se les denomina impedancias de transferencia de las barras.

La matriz de impedancia para un sistema de n barras, se considera como la resultante de aplicar el concepto de impedancia (Z) y admitancia (Y), con la consideración que ambas son matrices. Matemáticamente, se puede expresar esta relación con la siguiente ecuación.

$$Z_{barra} = Y_{barra}^{-1} \tag{2. 1}$$

La construcción de esta matriz se puede hacer con la utilización de la ecuación 2.1 o por medio de las impedancias de líneas, mediante algoritmos sencillos de construcción, de elemento por elemento, en base a las barras del sistema y la forma en que las líneas conectan a estas barras. La forma general de una matriz de impedancias para un sistema de tres barras es la siguiente:

$$Z_{barras} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad (2. 2)$$

### 2.1.2.2. Matriz de admitancia

El estudio de dicha matriz se centra al igual que la matriz de impedancias, en una representación matemática en forma matricial de la conexión presente en una red o sistema de potencia. Según Stevenson y Grainger, la matriz de admitancias de nodo da el comportamiento en estado estable de todas las componentes que actúan juntas para formar el sistema. El anterior concepto indica que debe tenerse presente el sistema de ecuaciones que modelen el comportamiento de las variables de análisis en flujo de potencia, se utilizan en forma de matrices y vectores, lo que genera la ecuación matricial y vectorial correspondiente.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2. 3)$$

La ecuación 2.3, también denominada ecuación de admitancias de nodo contiene la matriz de admitancias de nodo, primera matriz de izquierda a derecha. La diagonal principal de la matriz representa la sumatoria de las impedancias de todas las líneas de transmisión.

Las admitancias fuera de la diagonal principal son iguales al negativo de las admitancias de rama, es decir, las admitancias de las líneas que conectan las barras según el orden dictado por los subíndices presentes; estas

claramente no presentan un carácter negativo, pero por la deducción matemática de la ecuación de admitancias de nodo se convierten en negativas.

Tomando como eje la diagonal principal, dicha matriz es simétrica respecto de este eje, por lo que la construcción puede hacerse para una de las mitades de la matriz y se tiene los datos para toda. Para sistemas de más barras se cumple con algoritmos de construcción presentes en la teoría de flujos de potencia, se presenta una matriz para tres barras.

$$Y_{barras} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} \\ -Y_{31} & -Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.3. Ecuaciones de flujo de potencia

En base a las ecuaciones de nodo, sobre todo la utilizada como ecuación de admitancias de nodo (ecuación 2.3), expresada en forma general, se parte para encontrar las ecuaciones que relacionen la potencia en los sistemas, presentada de la siguiente ecuación:

$$I = Y_{barras} V \quad (2.5)$$

Con esta ecuación se puede determinar la corriente presente en un nodo cualesquiera, en este caso el nodo se traduce como una barra del sistema de potencia, por lo que la ecuación antes mencionada (ecuación 2.5) se puede representar en forma de sumatoria debido a la cantidad de líneas que se conecten a la barra. Para una corriente de barra específica se analizan todas

las admitancias relacionadas a esta barra y los voltajes que le inyectan potencia, como se expresa a continuación.

$$I_k = \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \quad (2.6)$$

Donde:

- $I_k$ : corriente en la barra k.
- $Y_{kn}$ : admitancias de las líneas de transmisión relacionadas a la barra.
- $V_n$ : voltaje de barra del sistema, presente según subíndice.

La determinación de la potencia para los sistemas analizados utiliza la potencia compleja debido a que esta presenta la suma fasorial de la potencia activa y reactiva necesarias para determinar el estado del sistema, que es de interés en los flujos de potencia, por lo que para la barra analizada k se tiene:

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k I_k^* \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación de corriente en la barra ( $I_k$ ) dentro de la potencia compleja de la misma barra, se obtiene la ecuación de potencia compleja ( $S_k$ ), potencia activa ( $P_k$ ) y reactiva ( $Q_k$ ).

$$S_k = V_k \left( \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \right)^* \quad (2.8)$$

$$P_k = \text{Re} \left\{ V_k \left( \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \right)^* \right\} \quad (2.9)$$

$$Q_k = -\text{Im} \left\{ V_k \left( \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \right)^* \right\} \quad (2.10)$$

Dentro de los flujos de potencia, se manejan los términos de potencia programada que es la diferencia entre la potencia programada generada y la potencia programada demandada para la barra en estudio, como lo muestra la siguiente expresión.

$$P_{i\ prog} = P_{gi} - P_{di} \quad (2.11)$$

$$Q_{i\ prog} = Q_{gi} - Q_{di} \quad (2.12)$$

A los valores de potencia obtenidos mediante las ecuaciones de potencia activa y reactiva (ecuaciones 2,9 y 2,10), se les denomina potencia calculada ( $P_{i\ cal}$  y  $Q_{i\ cal}$ ), dado que durante la solución de flujos de potencia ocurren errores estos se definen a continuación.

$$\Delta P_i = P_{i\ prog} - P_{i\ cal} \quad (2.13)$$

$$\Delta Q_i = Q_{i\ prog} - Q_{i\ cal} \quad (2.14)$$

Cuando los valores calculados y programados de potencia son iguales el error será cero y se dice que existe un balance.

## 2.2. Método de solución de Gauss-Seidel

Es un método matemático iterativo para la solución de ecuaciones no lineales, que se presentan como ecuaciones de nodo para el sistema de barras por trabajar. Se dice que es iterativo dado que se utilizan valores recién calculados para determinar nuevos valores. A cada cálculo de este nuevo conjunto de valores de las incógnitas por controlar en flujos de potencia para todo el sistema se le denomina iteración. El uso de las ecuaciones de flujo de

potencia vistas en el apartado anterior es la base para utilizar el proceso iterativo de Gauss-Seidel. Se puede plantear este método en forma de secuencia de actividades por realizar:

- Paso 1: determinación de la matriz de admitancias de barras del sistema analizado.
- Paso 2: asignación de los valores iniciales, estos son los valores conocidos de las barras del sistema: magnitud y ángulo del voltaje presentes en cada barra.
- Paso 3: cálculo de la potencia programada necesaria para los cálculos posteriores, esto se hace para las barras que componen el sistema, según el tipo de barra se podrán calcular estas potencias o se calcularán adelante.
- Paso 4: cálculo del conjunto de nuevos valores de voltaje de barra, el cual se calcula para todas las barras con dos excepciones: la primera es relacionada a la barra oscilante, slack o compensación dado que dicha barra se toma como referencia obliga a que se especifique la magnitud y ángulo del voltaje presente, por lo cual no es necesario su cálculo, la ecuación por utilizar en esta parte es la siguiente.

$$V_i^{(k)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \frac{P_i \text{ prog} - jQ_i \text{ prog}}{V_i^{(k-1)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} V_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N Y_{ij} V_j^{(k-1)} \right] \quad (2. 15)$$

Donde

- k: representa el número de iteración por realizar.
- i: representa el número de barra analizado.
- j: representa el número de barra que inyecta corriente a la barra analizada.

Dentro de esta actividad la segunda excepción es en la barra de voltaje controlado o también llamada de generación, se usa cuando se conoce la potencia activa y reactiva. Se debe calcular la potencia reactiva y luego el valor de voltaje por lo que se utiliza la ecuación de potencia reactiva, si esta potencia reactiva excede alguno de los límites de generación establecidos para la barra, dicha potencia se le asigna como valor de potencia reactiva, el del límite más cercano, es decir del límite excedido.

$$Q_i^{(k)} = -Im \left\{ V_i^{(k-1)*} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} V_j^{(k)} + \sum_{j=i}^N Y_{ij} V_j^{(k-1)} \right] \right\} \quad (2.16)$$

Donde:

- k: representa el número de iteración por realizar.
  - i: representa el número de barra analizado.
  - j: representa el número de barra que inyecta corriente a la barra analizada.
- Paso 5: se procede al cálculo de potencia compleja en las líneas del sistema, en los dos sentidos determinados por las barras para lo cual se utiliza la ecuación siguiente.

$$S_{ij} = V_i [(V_i - V_j) Y_{ij}]^* \quad (2.17)$$

Donde:

- $V_i$ : es el voltaje de la barra tomada como inicio en el flujo de potencia, el valor es el resultado de la última iteración realizada
- $V_j$ : es el voltaje de la barra tomada como final en el flujo de potencia, el valor es el resultado de la última iteración realizada

- $Y_{ij}$ : es la admitancia correspondiente según los valores de  $i$  y  $j$  respectivos, tomada de la matriz de impedancia de barra, mediante ecuación transformándola en admitancia
- Paso 6: calcular la potencia necesaria a generarse en la barra de compensación, oscilante o slack para satisfacer la demanda de esta. También se procede a calcular errores y pérdidas. Esta última actividad se realiza para obtener la información de las variables de control en los flujos de potencia, se utiliza la expresión siguiente para determinar las pérdidas de potencia activa en las líneas.

$$Pe_{ij} = Re\{S_{ji} - S_{ij}\} \quad (2. 18)$$

Donde:

- $S_{ji}$  &  $S_{ij}$ : potencia aparente compleja de las barras analizadas en sentido indicado por subíndices

### 2.3. Método de solución de Newton-Raphson

El método iterativo de Newton-Raphson es utilizado para sistemas ecuaciones no lineales, también trabajadas como funciones, que presentan un modelamiento de la forma.

$$y = f(x) \quad (2. 19)$$

Gracias a la bibliografía consultada se indica que la base de este método es la expansión de las series de Taylor para las ecuaciones de flujos de potencia, en torno al punto que indica la iteración.

El proceso iterativo generalizado matemáticamente de manera simple para una ecuación o función no lineal viene determinado por el siguiente modelo:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2. 20)$$

Donde:

- $x^{n+1}$ : representa la incógnita por determinar en la nueva iteración.
- $x^n$ : representa la incógnita determinada en la iteración actual.
- $f(x)$ : indica la función de la incógnita determinada en la iteración actual.
- $f'(x)$ : es la primera derivada de la función en la iteración actual.

En los sistemas de potencia, se maneja un sistema de ecuaciones en base al número de incógnitas por averiguar, estas vienen determinadas por los tipos de barra que presentan dichas variables, debido a esta razón se trabaja de manera matricial dicho proceso iterativo. El método propiamente aplicado a la solución de flujos de potencia se desarrolla, partiendo que los voltajes y potencias por utilizar y que se trabajarán en su forma fasorial. Los siguientes párrafos explican los pasos de este método, para determinar las variables que permitan la obtención de flujos y pérdidas en el sistema de barras analizado.

El primer paso es el establecimiento de las variables de flujos de potencia, determinando que los valores iniciales presentes en el sistema se asumirán como datos conocidos, esto solo se efectúa en la primera iteración para las

siguientes iteraciones se usan los datos calculados en el sexto y séptimo paso, y las variables que no se tiene un valor en las condiciones iniciales, se tomaran como las variables desconocidas. También se establecen las ecuaciones de potencia para calcular las mismas, las variables desconocidas y las ecuaciones dependen de los tipos de barras que integran el sistema.

(variables desconocidas):  $\delta_i$  y  $|V_i|$

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2. 21)$$

$$Q_i = - \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \text{sen}(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2. 22)$$

Dónde:

- $\delta_i$ : representa el ángulo del voltaje desconocido en el sistema.
- $|V_i|$ : representa la magnitud de voltaje desconoció en el sistema.
- $\theta_{ij}$ : representa el ángulo de la admitancia por utilizar en la ecuación.
- $i$ : es el número de barra actual analizado.

El segundo paso es la fabricación de la matriz de admitancias de barra, necesaria para la resolución de este método y el cálculo de las potencias programadas expuestas en el inciso de ecuaciones de flujo de potencia.

El tercer paso integra la formulación de las potencias residuales, que es la diferencia entre la potencia programada y la calculada, representado matemáticamente por ecuaciones siguientes

$$\Delta P_i^{(k)} = P_{i\ prog} - P_i^{(k)} \quad (2.23)$$

$$\Delta Q_i^{(k)} = Q_{i\ prog} - Q_i^{(k)} \quad (2.24)$$

Donde:

- k: es el número de iteración actual
- i: es el número de barra actual analizado

El cuarto paso es la construcción del jacobiano o matriz de jacobiana, esta es una matriz que se conforma de las primeras derivadas parciales de las ecuaciones de potencia de las n barras del sistema, respecto de las variables desconocidas en dichas barras. Para ello se toma las potencias como funciones, asumiendo que la primera barra se toma como referencia por lo que no entra en dicha matriz. La estructura de esta matriz se divide en bloques y se dice que:

- Contará con n -1 restricciones de potencia real o activa.
- Contará con n -1 – m restricciones de potencia reactiva, donde m es la cantidad de barras de voltaje controlado presentes en el sistema.
- El orden de la matriz jacobiana es  $(2n - 2 - m) \times (2n - 2 - m)$ .

Y los bloques de dicha matriz quedan del siguiente orden:

- $J_1: (n - 1) \times (n - 1)$
- $J_2: (n - 1) \times (n - 1 - m)$
- $J_3: (n - 1 - m) \times (n - 1)$
- $J_4: (n - 1 - m) \times (n - 1 - m)$

La matriz resultante se muestra a continuación, de manera simplificada primero y la matriz como tal de segundo.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \quad (2. 25)$$

$$J = \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{ccc} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_n} \end{array} \right| & \left. \begin{array}{ccc} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \end{array} \right| \\ \hline \left. \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_n} \end{array} \right| & \left. \begin{array}{ccc} \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \end{array} \right| \end{bmatrix} \quad (2. 26)$$

Como quinto paso es la resolución de la ecuación matricial que relaciona los pequeños cambios en magnitud y ángulo del voltaje con las potencias residuales y la matriz jacobiana. Tanto los pequeños cambios, como las potencias son un conjunto de variables acorde (n-1) barras estas se almacenarán en vectores.

Para la primera iteración se asumen los valores de magnitud y ángulo de voltaje iniciales como los valores de los pequeños cambios de magnitud y ángulo de volta; las demás iteraciones se calculan mediante las ecuaciones que se mostrarán en el siguiente paso. (k representa la iteración actual).

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta |V_2^{(k)}| \\ \vdots \\ \Delta |V_n^{(k)}| \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

En el sexto paso se determinan los nuevos valores de magnitud y ángulo de voltaje con ayuda de las siguientes expresiones.

$$\delta_i^{(k+1)} = \delta_i^{(k)} + \Delta \delta_i^{(k)} \quad (2.28)$$

$$|V_i^{(k+1)}| = |V_i^{(k)}| + \Delta |V_i^{(k)}| \quad (2.29)$$

Donde:

- k: representa el número de la iteración actual
- i: es el número de barra analizado
- $\Delta \delta_i^{(k)}$ : representa el pequeño cambio del ángulo del voltaje
- $\Delta |V_i^{(k)}|$ : representa el pequeño cambio en la magnitud del voltaje

Como séptimo paso se calculan las potencias residuales mediante las ecuaciones del tercer paso y los valores obtenidos en la solución de la ecuación matricial. Se revisa que dichas potencias sean menores o iguales a la exactitud especificada ( $\varepsilon$ ), de ser esto afirmativo se concluye con el método iterativo.

Por el contrario, este método continuará con más iteraciones hasta cumplir con dicha condición.

$$|\Delta P_i^{(k)}| \leq \varepsilon \quad (2.30)$$

$$|\Delta Q_i^{(k)}| \leq \varepsilon \quad (2.31)$$

#### **2.4. Estudios de flujos de potencia en el diseño y operación de sistemas de potencia**

En los estudios de sistemas de potencia se presenta la terminología de un caso base, el cual según Grainger y Stevenson, se define como un estudio de flujos de potencia aplicado a un sistema que trabaja bajo condiciones de operación reales o proyectadas como normales. Los resultados obtenidos de la modelación y análisis de este caso base se toman como medio de comparación con los datos de flujo obtenidos, cuando el sistema se encuentra bajo condiciones de contingencia.

Dentro del diseño y análisis de los sistemas de potencia a gran escala es muy común la representación de este sistema en un equivalente sencillo, el cual contiene datos a escala que permite un análisis bastante preciso con lo esperado en la realidad.

El tema de planificación de manera simplificada trata de satisfacer el cumplimiento de una adecuada operación dando con esto confiabilidad al sistema, esta actividad requiere de metodologías que permitan determinar objetivos específicos para llevar a cabo la meta general propuesta. Mediante la aplicación de herramientas de análisis adecuadas genera un resultado eficaz,

siendo los métodos probabilísticos de gran ayuda en la gestión del análisis de contingencias.

La forma en que se aborda el tema de planificación genera dos enfoques, estos se mencionan en [9], los cuales se denominan “planificación de abajo hacia arriba”, cuando se comienza con las necesidades de los clientes y “planificación de arriba a abajo” cuando se abordan los requisitos generales del propio sistema.

La operación de los sistemas en la realidad se puede trabajar como un intercambio de potencia entre áreas, por lo tanto, los flujos de potencia determinan, si un área estudiada está produciendo la cantidad de potencia necesaria en el intercambio deseado. La actividad de resolución de flujos de potencia aplicado a la operación de sistemas requiere plasmar características reales en métodos teóricos; saber cómo modelar ciertas partes del sistema se vuelve algo importante.

### **3. FALLAS Y ANÁLISIS DE CONTINGENCIAS EN SISTEMAS DE POTENCIA**

#### **3.1. Fallas**

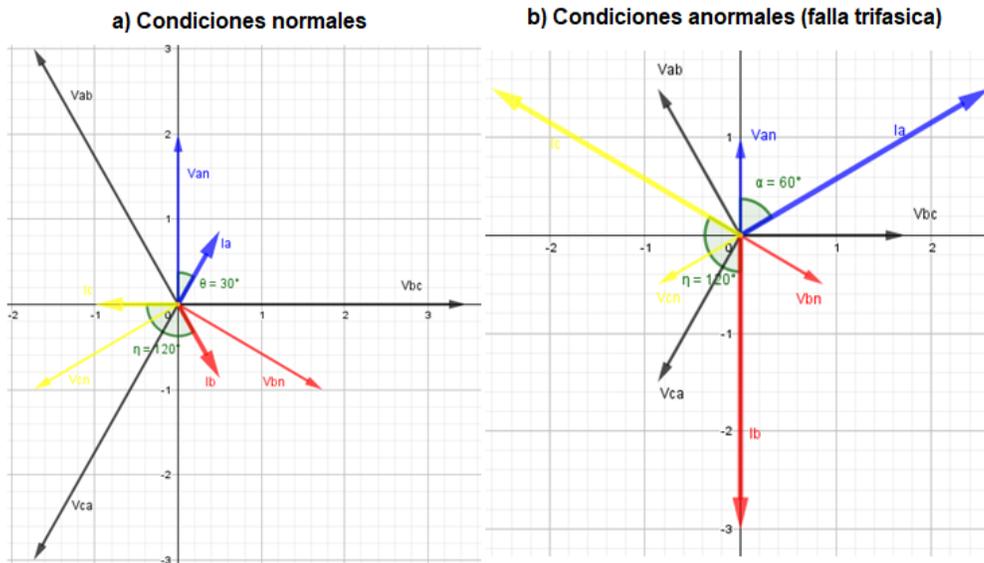
Para un sistema de potencia una falla es cualquier evento en el circuito (sistema) que interfiere con el flujo de corriente, que afecta directamente el flujo de potencia en la red.

##### **3.1.1. Fallas simétricas**

Una falla simétrica es en la cual se ven afectadas todas las fases de un sistema, con la característica de mantener el balance entre las fases, aún bajo condiciones anormales. Se consideran dos variedades importantes de estas fallas al trabajar sistemas trifásicos, las cuales son: falla trifásica y trifásica a tierra.

Analizando la falla trifásica por medio de su diagrama fasorial, se pueden encontrar las características presentes en dicha falla, las condiciones anormales que se generan, para ello se parte de la consideración de un sistema trifásico balanceado que se representa con el siguiente diagrama fasorial.

Figura 4. Ejemplo de diagrama fasorial trifásico



Fuente: elaboración propia, *GeoGebra*.

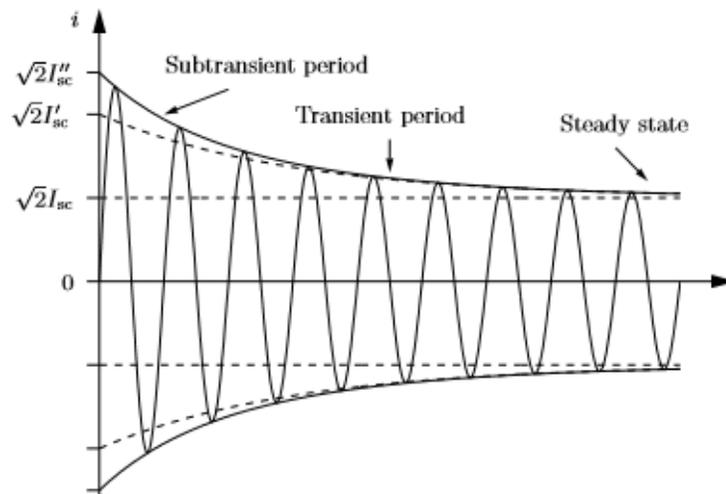
En la figura 4.a, se observa el diagrama fasorial de un sistema trifásico en condiciones normales, dentro de las consideraciones se tiene: el ángulo theta es el ángulo de desfase entre la corriente y el voltaje debido a la impedancia de carga. En la figura 4.b, se muestra el sistema trifásico anterior en condiciones anormales, dado que se produce una falla trifásica. Los puntos importantes en este nuevo diagrama son:

- Amplia reducción en las tensiones, tanto de línea como de fase.
- Gran incremento en la magnitud de la corriente para cada fase.
- La aparición de un nuevo ángulo de desfase entre el voltaje y la corriente ( $\alpha$ ) viene determinado por la impedancia del sistema en condiciones de falla (impedancia de falla del generador y de la línea de transmisión).

### 3.1.1.1. Máquina síncrona bajo falla trifásica

Las máquinas síncronas sometidas a condiciones anormales por fallas trifásicas se modelan como un circuito serie R-L, con énfasis en el estado transitorio. Utilizando como impedancia, una inductancia en función del tiempo, que generará una reactancia inductiva en función del tiempo. En el estudio de dicha corriente de falla se distinguen tres periodos: el primer periodo subtransitorio, el segundo periodo transitorio y el tercer periodo permanente.

Figura 5. **Gráfica de la corriente de armadura en cortocircuito simétrico de una máquina síncrona**



Fuente: ANDERSSON, Göran. *Power system analysis*. p. 66.

Una importancia especial en este tema es la definición de las distintas reactancias dado que sirven para la determinación de la intensidad de la corriente en cada periodo, estas son recogidas de la teoría de las máquinas síncronas. Esto define las siguientes:

- $X''_d$ : reactancia subtransitoria de eje directo
- $X'_d$ : reactancia transitoria de eje directo

- $X_d$ : reactancia síncrona de eje directo

Donde:

$$X_d'' < X_d' < X_d \quad (3. 1)$$

Asumiendo que la resistencia de armadura es lo bastante pequeña, la reactancia de cuadratura no afecta significativamente a la corriente de cortocircuito y usando la reactancia de eje directo la corriente instantánea de falla en corriente alterna. Se expresa por la siguiente ecuación.

$$i_{ac}(t) = \sqrt{2}E_g \left[ \left( \frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_d'} \right) e^{-\frac{t}{T_d''}} + \left( \frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T_d'}} + \frac{1}{X_d} \right] \text{sen} \left( \omega t + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3. 2)$$

Donde:

- $E_g$ : es el voltaje de terminales de prefalla línea a neutro en rms de la máquina síncrona descargada.
- $\alpha$ : ángulo de desfase entre la señal de corriente de falla AC y la señal de voltaje en función del tiempo.
- $T_d''$ : constante de tiempo subtransitoria de cortocircuito en eje directo.
- $T_d'$ : constante de tiempo transitoria de cortocircuito en eje directo.

### 3.1.1.2. Cálculo de falla trifásica en sistemas de gran tamaño

El cálculo de fallas trifásicas en las redes de gran tamaño necesita un cambio en: las reactancias síncronas, impedancias de transformadores, líneas y voltajes. Dicho cambio cumple con la representación adecuada para el análisis, dándose los cambios siguientes: las máquinas síncronas se representan ahora

por las reactancias subtransitorias, los voltajes generados se convierten en los voltajes internos subtransitorios, los transformadores se representan por una reactancia equivalente (reactancia de dispersión) y las líneas de transmisión se representan por la reactancia serie equivalente. Los cambios realizados obedecen a la obtención de una red que se considera como el circuito equivalente monofásico de un sistema trifásico balanceado.

En el comienzo de dicho estudio es común la selección de una barra para la aplicación del cálculo de fallas o también seleccionando la barra en la cual se presente una falla trifásica. Se designa como  $V_f$  al voltaje real en la barra antes de que ocurra la falla. Una falla trifásica en la barra seleccionada se simula, si es el caso o se analiza si esta sucede, con una red donde las fuentes de voltaje  $V_f$  y  $-V_f$  conectadas en serie, a su vez conectadas con la barra seleccionada y la referencia, forman una rama en cortocircuito.

La fuente de voltaje  $V_f$  actúa solo en la rama mencionada, siendo igual al voltaje de prefalla en la barra seleccionada y, por lo tanto, no generará un flujo de corriente en la rama. La corriente de la rama es  $I_f''$  que se origina al añadir la fuente  $-V_f$  anteriormente expuesta. Esta corriente se distribuye a través del sistema partiendo del nodo de referencia, antes de fluir hacia afuera de la barra seleccionada, lo que se alcanza gracias a la fuente  $-V_f$ . Lo anterior expuesto produce cambios en los voltajes de barra que ocurren en el sistema gracias a la falla presente.

Si los voltajes subtransitorios internos de los generadores presentes en la red y  $V_f$  se cortocircuitan,  $-V_f$  actuará sola y la corriente  $-I_f''$  que se dirige hacia la barra seleccionada será la única corriente que se inyecte a la red desde fuentes externas. Dado que  $-V_f$  es la única fuente en la red, esta presenta las

ecuaciones de impedancias de nodos en la forma de la matriz de impedancias, añadiendo un término  $\Delta V$  que indica los cambios en los voltajes en las barras debidos a la corriente antes mencionada, la cual se inyecta a la barra seleccionada para la falla. Esto se representa a continuación.

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \vdots \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_i \\ -V_f \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}_{barra\ n \times n}] \begin{bmatrix} 0 \\ -I_f'' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Los valores numéricos de  $\mathbf{Z}_{barra\ n \times n}$  serán diferentes a los de la matriz de impedancias, porque ahora se emplean las consideraciones de los cambios mencionados en el primer párrafo de este apartado. El cambio de los voltajes de barra debido a  $-I_f''$  está dado por la expresión.

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \vdots \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_i \\ -V_f \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = (-I_f'') \begin{bmatrix} \text{Columna} \\ S \\ \text{de} \\ \mathbf{Z}_{barra\ n \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_{is}I_f'' \\ \vdots \\ -Z_{ns}I_f'' \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde:

- S: es el número de la barra seleccionada del sistema donde ocurre la falla.

De la fila con el número de la barra seleccionada, se obtiene:

$$I_f'' = \frac{V_f}{Z_{ss}} \quad (3.5)$$

Donde  $Z_{ss}$  es el elemento de la diagonal de  $\mathbf{Z}_{barra\ n \times n}$  que representa la impedancia de Thévenin de la red en la barra seleccionada. Cuando el voltaje  $-V_f$  se cortocircuita, los demás voltajes de generadores presentes en la red y

voltaje  $V_f$  vuelven a funcionar y las corrientes y voltajes en cualquier parte de la red van a ser iguales a los que existían antes de la falla. Mediante la aplicación del principio de superposición los voltajes prefalla se sumarán a los cambios de voltajes con el fin de determinar los voltajes totales presentes después de la falla.

En las redes analizadas para estos cálculos se supone que no existen corrientes de prefalla, esto se debe a que una red antes de la falla se supone sin carga. Sabiendo que en ausencia de cargas no fluirá corriente alguna, indica que no habrá diferencias de potencial en las impedancias de las ramas, haciendo que los voltajes de barra sean iguales a  $V_f$ . Esta suposición facilita el cálculo de los voltajes de falla que se determinan mediante la expresión siguiente.

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_f \\ \vdots \\ V_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \vdots \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = (V_f) \begin{bmatrix} 1 - \frac{Z_{is}}{Z_{ss}} \\ 0 \\ 1 - \frac{Z_{ns}}{Z_{ss}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De manera general se puede expresar el voltaje en cualquier barra durante la falla como:

$$V_i = V_f - Z_{is} I_f'' = V_f \left( 1 - \frac{Z_{is}}{Z_{ss}} \right) \quad (3.7)$$

Si el voltaje prefalla de la barra  $i$  no es igual al voltaje prefalla de la barra seleccionada ( $s$ ), se reemplaza  $V_f$  por el voltaje prefalla real de la barra  $i$  (barra analizada en ese momento). Se pueden calcular las corrientes subtransitorias

de las líneas de transmisión entre barras, sabiendo que esta posee una impedancia, de la siguiente manera.

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{Z_b} = -I_f'' \left( \frac{Z_{is} - Z_{js}}{Z_{ij}} \right) \quad (3.8)$$

La anterior expresión, representa la corriente subtransitoria de la línea analizada como una fracción de la corriente de falla ( $I_f''$ ) que se interpreta como un flujo de la línea desde la barra i a la barra j de la red en falla. Se enfatiza que solo se necesita de la columna s (número de barra seleccionada donde ocurre la falla) de la  $Z_{barra \times n}$  para evaluar el impacto en la red de una falla simétrica trifásica ocurrida en dicha barra.

### 3.1.2. Componentes simétricas y redes de secuencia

A continuación, se describe la importancia de las componentes simétricas y redes de secuencia en la determinación de fallas.

#### 3.1.2.1. Componentes simétricas

El método de componentes simétricas es utilizado para el análisis fasorial de las fallas asimétricas, estas a diferencia de las simétricas presentan un desbalance en las fases. Para solucionar este problema y simplificar dichas fallas al tratarlas de forma similar a las simétricas, se aplica el teorema de Fortescue. El teorema de Fortescue básicamente plantea que: “en un sistema desbalanceado de n fasores relacionados, se puede resolver con n sistemas de

fasores balanceados denominados componentes simétricas de los fasores originales”.<sup>1</sup>

En un sistema trifásico desbalanceado este se descompone en tres sistemas balanceados de fasores que al sumarse determinarían los valores bajo condiciones de falla asimétrica de los voltajes o corrientes según se analicen. Cuando se estudia las componentes simétricas se considera que los voltajes y corrientes utilizados son los de línea a neutro de cada fase. Los tres sistemas de fasores balanceados denominados componentes simétricas son:

Componentes de secuencia positiva: estos tres fasores (uno por cada fase) tienen la misma magnitud, están separados  $120^\circ$  uno del otro y conservan la misma secuencia que los fasores originales antes de la falla. Esta secuencia es la que se analiza en las fallas trifásicas y se dice que esta es creada por los generadores del sistema en condiciones de balance.

Componentes de secuencia negativa: Son tres fasores que tienen la misma magnitud, están separados  $120^\circ$  uno del otro y la secuencia de sus fases se invierte con respecto a la presente en las fases antes de la falla. En condiciones de desbalance en un sistema trifásico se generan dichas componentes que se suman por principio de superposición a las anteriores componentes.

Componentes de secuencia cero: Este sistema de tres fasores poseen la misma magnitud, son paralelos entre sí, lo que indica que el ángulo entre ellos es cero y por lo anterior no poseen una secuencia de fases. Se dice que esta secuencia se genera junto con las dos componentes anteriores cuando un sistema trifásico desbalanceado presenta fallas a tierra. Las tres componentes se suman por principio de superposición aplicando de esta manera el teorema

---

<sup>1</sup> GRAINGER, John y STEVENSON, William. *Análisis de sistemas de potencia*. p 391.

de Fortescue. Para el cálculo de dichas componentes se utiliza el operador fasorial  $a$  que matemáticamente se expresa como:

$$a = 1 \angle 120^\circ \quad (3. 9)$$

En el análisis de las componentes simétricas se parte de que el fasor de voltaje de la fase a,  $V_a$ , se toma como referencia en las secuencias positiva, negativa y cero que se abreviarán como 1, 2 y 0 respectivamente. Por medio del análisis fasorial se deduce que:

$$\begin{aligned} V_b^{(0)} &= V_a^{(0)}; V_c^{(0)} = V_a^{(0)} \\ V_b^{(1)} &= a^2 V_a^{(1)}; V_c^{(1)} = a V_a^{(1)} \\ V_b^{(2)} &= a V_a^{(2)}; V_c^{(2)} = a^2 V_a^{(2)} \end{aligned} \quad (3. 10)$$

Utilizando el principio de superposición en el teorema de componentes simétricas, el voltaje en la fase a, se encuentra el sistema de ecuaciones para determinar el voltaje de esta fase; se representa de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (3. 11)$$

El sistema puede redactarse en términos de corriente y con ello determinar las componentes simétricas de las corrientes de falla asimétrica en cada fase.

### 3.1.2.2. Redes de secuencia

El método de componentes simétricas determina las corrientes y voltajes de secuencia simétricos que componen en suma una corriente o voltaje de fase en falla asimétrica, debido al desbalance presente. Por este motivo al circular en el sistema analizado las corrientes de secuencia generan una caída de voltaje al pasar por una impedancia, esta se denominará impedancia de secuencia. Cada elemento que compone el sistema analizado (máquinas síncronas, transformadores, líneas de transmisión y cargas) en condiciones de componentes simétricas responde de manera distinta y a su vez cada elemento se modela de manera diferente dependiendo del tipo de secuencia a la que se someten.

Esto lleva a la concepción de un circuito de secuencia (positiva, negativa y cero) equivalente para cada elemento, la conexión de estos circuitos de la misma secuencia forma una red, a la cual se le denomina red de secuencia.

La máquina síncrona es representada por su impedancia de secuencia, por lo general es la reactancia subtransitoria, para el caso de la red de secuencia positiva esta presenta una fuente de voltaje en serie con dicha impedancia, dado que representan los voltajes de frecuencia positiva. Como se mencionó en las fallas simétricas esta secuencia es la única que se origina en los generadores. Otro aspecto importante en dicho circuito de la red de secuencia cero, es la corriente que se presenta si esta se conecta a referencia o tierra por medio de una impedancia, por lo que circularán estas corrientes de las tres fases por dicha impedancia.

Para las líneas de transmisión se representan mediante la impedancia de secuencia analizada, la cual para el análisis de fallas se asume como una

reactancia inductiva pura. Esta impedancia se conecta en serie con el circuito equivalente de la misma secuencia del elemento al cual esta línea se encuentra conectada en el sistema.

En los transformadores los circuitos equivalentes de secuencia cero están en función de las conexiones del lado primario y secundario, estas toman en cuenta la conexión a referencia que se presente en ambos lados del transformador. Si se tiene una corriente de secuencia cero en uno de los lados del transformador, esta se presentará en el lado restante pero no se propagará a los circuitos siguientes, si en el lado que se analiza no existe una conexión a referencia.

Por el contrario, los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa son una impedancia de secuencia, generalmente una reactancia inductiva pura, que se conecta en serie con los demás elementos.

### **3.1.3. Fallas asimétricas**

Las fallas asimétricas como su nombre lo indica son fallas que producen en el sistema falta de simetría, esto indica que producen un desbalance en las fases, provocando corrientes desbalanceadas de falla. Para determinar dichas corrientes de falla, se aplica el método de componentes simétricas y las redes de secuencia. Los tipos de fallas estudiadas asimétricas en un sistema trifásico son: bifásica, bifásica a tierra y monofásica a tierra.

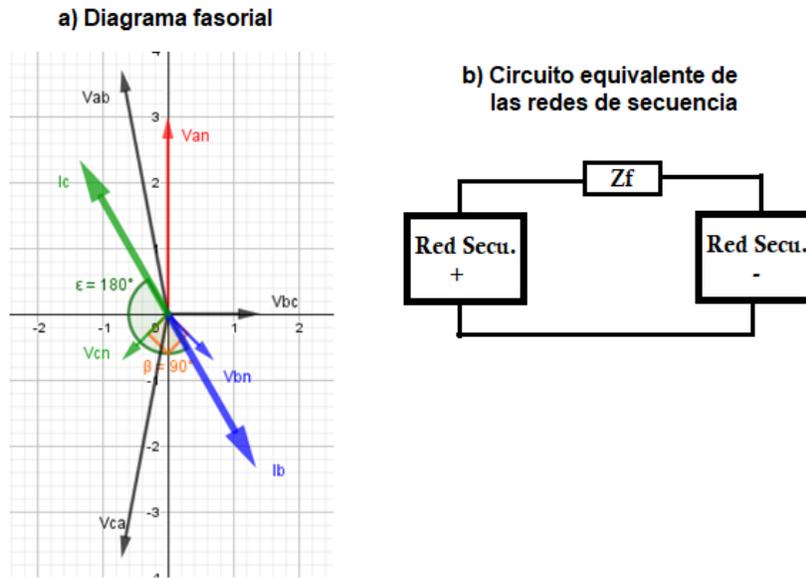
### 3.1.3.1. Falla bifásica

Esta falla es la que se produce entre dos fases, al ocurrir un cortocircuito entre fases, un cortocircuito de línea a línea sin tierra. Esta genera las siguientes características en el sistema:

- Reducción en el voltaje de fase a tierra en las fases cortocircuitadas cercano a cero, reducción del voltaje fase a fase, de las fases involucradas.
- El ángulo de desplazamiento entre los voltajes de fase a tierra, de las fases involucradas en la falla ( $\beta$ ), se reduce considerablemente (menor a  $120^\circ$ ).
- Reducción de la corriente en la fase que no está en falla, cercana a cero, lo que provoca en el voltaje una reducción del ángulo entre el voltaje de la fase sin falla con el voltaje de las fases en falla.
- La corriente que recorre una de las fases en falla se considera como la alimentación de la falla, provocando un retraso en la corriente de esta fase. Obteniendo como consecuencia que la otra fase bajo falla se tome como el retorno de la falla.

Las condiciones descritas anteriormente se traducen en un diagrama fasorial como el que a continuación se muestra, donde se ejemplifica una falla bifásica en las fases B y C.

Figura 6. **Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla bifásica**



Fuente: elaboración propia, *GeoGebra, Paint*.

Tomando en cuenta la falla bifásica en las fases B y C del ejemplo de la figura 6.a, se determina la corriente de falla obteniendo:

$$I_a^{(0)} = 0 ; I_a^{(1)} = -I_a^{(2)} \quad (3.12)$$

$$I_{falla} = I_b = (a^2 - a)I_a^{(1)} \quad (3.13)$$

Dichas ecuaciones se traducen a un circuito equivalente donde se integran las redes de secuencia, dado que esta falla no presenta unión a referencia o tierra, solo se tendrán la secuencia positiva y negativa, además de una impedancia de falla que se conectan de la siguiente manera.

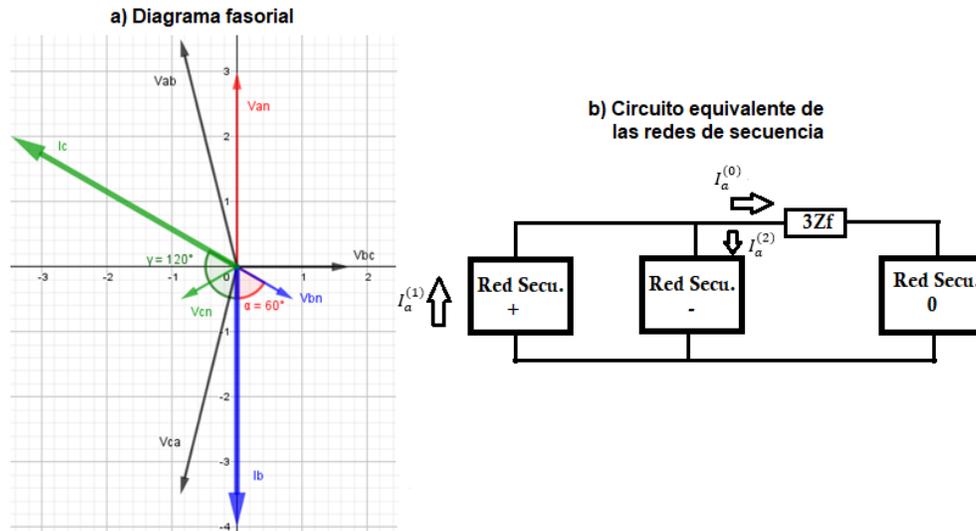
### 3.1.3.2. Falla bifásica a tierra

La falla bifásica a tierra, al igual que la falla anterior, se produce por un cortocircuito de dos fases con la diferencia que para esta falla el cortocircuito de las dos fases se aterriza. Esto indica que la corriente que inyecta cada fase involucrada circulará a referencia o tierra. Las características que detallan dicha falla son las siguientes:

- Se presenta una reducción del voltaje de fase en donde ocurre la falla, pero se conserva el ángulo de desplazamiento entre estos, es decir se encuentran desplazados  $120^\circ$ . También hay una reducción en el voltaje de fase a fase de las fases involucradas.
- El ángulo entre la corriente y el voltaje de fase ( $\alpha$ ) en las fases bajo falla aumenta considerablemente.
- La corriente de la fase que no está involucrada en la falla disminuye a cero.

Las condiciones descritas para esta falla se muestran mediante el diagrama fasorial de la siguiente figura, donde se ejemplifica una falla bifásica entre la fase B, C y tierra.

Figura 7. Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla bifásica a tierra



Fuente: elaboración propia, GeoGebra y Paint.

Para una falla bifásica a tierra, ejemplificándola en las fases B y C a tierra se obtendrán las siguientes condiciones.

$$I_a = 0 ; I_{falla} = I_b + I_c \quad (3.14)$$

$$I_{falla} = 2I_a^{(0)} + (a^2 + a)I_a^{(1)} + (a^2 + a)I_a^{(2)} \quad (3.15)$$

La representación de dichas corrientes y ecuaciones obtenidas para esta falla se representa a través de un circuito equivalente de las redes de secuencia e impedancia de falla.

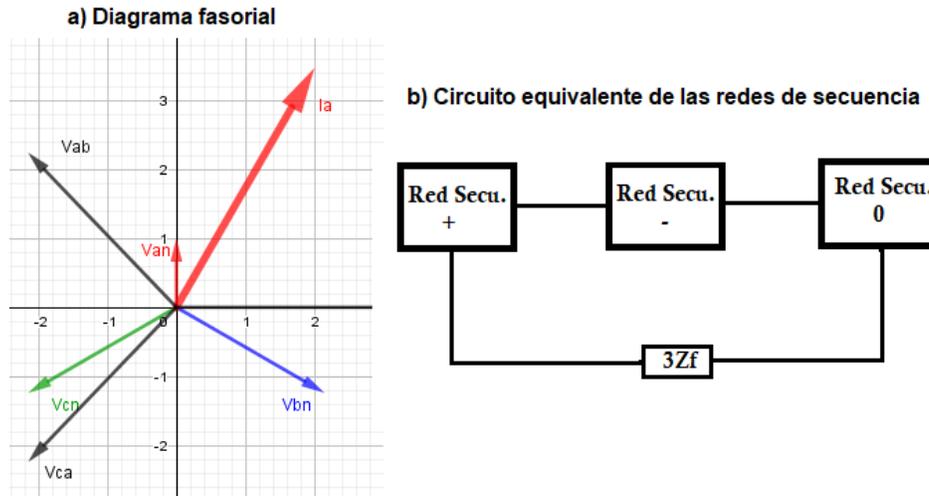
### 3.1.3.3. Falla monofásica a tierra

Este tipo de falla sucede en una sola fase, cuando esta presenta un cortocircuito con referencia. Las características que presenta son las siguientes:

- Los voltajes en las fases que no se involucran en la falla, se mantiene igual que antes de la falla, al igual que el voltaje de fase a fase de las fases que no fallaron.
- 
- Los voltajes de fase a fase donde se involucra la fase en falla se reducen, llegando aproximadamente a cero, si la impedancia de falla es cero de lo contrario se presentará un pequeño voltaje.
- 
- La corriente fase donde se presenta la falla aumenta drásticamente, porque solo la limita la impedancia de falla.
- 
- Aumento de potencias del neutro de la fuente de alimentación del sistema este puede ser de distinta magnitud dependiendo del arreglo de la conexión a tierra real que se tenga.
- 
- Se dice que la corriente de carga es cero debido a que la corriente circula a través de la impedancia de falla por lo que las corrientes de las fases restantes se asumen cero, pero no necesariamente lo son.

Mediante el diagrama fasorial de una falla monofásica se puede notar las condiciones anteriormente expuestas, para ejemplo del diagrama fasorial se asume una falla a tierra en la fase A.

Figura 8. **Ejemplo de diagrama fasorial y circuito equivalente de una falla monofásica a tierra**



Fuente: elaboración propia, *GeoGebra* y *Paint*.

La determinación de la corriente de falla para el ejemplo antes mencionado, en la figura 8.a, asume las siguientes condiciones:

$$I_b = I_c = 0 \quad (3.16)$$

Aplicando las condiciones anteriores se obtiene.

$$I_a^{(0)} = I_a^{(1)} = I_a^{(2)} \quad (3.17)$$

$$I_{falla} = I_a = 3I_a^{(1)} \quad (3.18)$$

Con la interpretación de las ecuaciones se obtiene un circuito equivalente de las redes de secuencia, para este caso positiva, negativa y cero dado que sí existe referencia. Este circuito está en serie con una impedancia de falla, con valor de tres veces esta dado las corrientes de secuencia.

### 3.2. Análisis de contingencias

Un análisis de contingencias “es un estudio de flujos de potencia donde se simula que alguno o varios elementos del sistema que no estarán en operación.”<sup>2</sup> Este análisis se resuelve con la siguiente ecuación.

$$[Y] = [A][X] \quad (3. 19)$$

Donde:

- $[A]$ : es la matriz que representa la red
- $[X]$ : vector de respuesta del sistema
- $[Y]$ : vector de inyecciones del sistema

En base a la ecuación anterior se tienen dos posibles formas de alterar el sistema, lo cual generará contingencias, estas son: por cambios de la topología y por cambios de inyecciones en la red. Esto se traduce como salidas de líneas o salidas de generadores; las primeras originan cambios en la topología de la red, manteniendo las inyecciones, mientras las segundas ocasionan que un nodo (barra) cambie de tipo, modificando la red (topología) y las inyecciones.

#### 3.2.1. Métodos de análisis

De los dos casos mencionados, matemáticamente existen dos métodos de cálculo, el primero que es el cambio de topología se traduce en una modificación de la matriz A. Se le denomina método de modificación de datos y el segundo que es un cambio de inyecciones adicionales en forma externa el cual se nombra método de compensación.

---

<sup>2</sup> ABOYTES, Florencio. *Análisis de sistemas de potencia*. p 263.

El método de modificación de datos modifica  $[A]$  para cada cambio de topología de la red, por lo que no es necesario calcular las inyecciones, partiendo de la siguiente ecuación.

$$[Y_o][V_o] = [I] \quad (3.20)$$

Donde:

- el subíndice  $_o$  indica que son los valores iniciales, es decir antes del cambio en la red.
- $[V_o]$ : es el voltaje inicial de la red.

Para contingencias en líneas de transmisión, el cambio de topología se puede representar mediante  $[\Delta Y]$ , lo que indica que el vector de inyecciones para los cambios analizados, obteniéndose el valor de voltaje para los cambios sufridos en la red.

$$[\Delta V] = [V_o] - [Y_n]^{-1}[\Delta Y][V_o] \quad (3.21)$$

El segundo método, llamado método de compensación, se basa en el principio de superposición, mediante el cual se puede simular la salida o adición de líneas de transmisión, mediante inyecciones del sistema. Se calcula la inyección necesaria para que los flujos en las líneas sean los que se tendrían después de agregar o quitar una línea, sin modificar la matriz  $A$ . Este método se aplica en sistemas lineales y no lineales; para los primeros sistemas se explicará su procedimiento en los párrafos siguientes, en cuanto a los sistemas no lineales se debe hacer una aproximación o transformación en una secuencia de sistemas lineales.

El uso de sistemas lineales indica que un sistema eléctrico de potencia se puede linealizar, basado en las siguientes consideraciones:

- Las magnitudes de los voltajes deben ser nominales o trabajarse en valores por unidad.
- Despreciar las resistencias de las líneas de transmisión y la de los transformadores.
- La diferencia angular en líneas y transformadores entre nodos es pequeña, por lo que se asume:

$$\text{sen}(\delta_{ij}) = \delta_i - \delta_j \quad (3.22)$$

Por lo tanto, el flujo entre dos nodos  $i$  y  $j$ , es determinado por la expresión siguiente.

$$P_{ij} = \frac{(\delta_i - \delta_j)}{X_{ij}} \quad (3.23)$$

Donde:

- $X_{ij}$ : es la reactancia de la línea de transmisión que conecta a los nodos o barras  $i$  y  $j$ .
- $\delta_i - \delta_j$ : ángulos de fase para los nodos o barras analizadas.

Generalizando la anterior expresión para multinodos, se utiliza la siguiente expresión matricial.

$$[P] = [B_p][\delta] \quad (3.24)$$

Donde:

- $[B_p]$ : es la matriz de reactancias de las líneas de transmisión del sistema.

En una contingencia donde una línea de transmisión conectada a los nodos  $i$  y  $j$  sale de operación, genera que los flujos en el resto de las líneas se vean afectados, este efecto se simula por medio de una inyección en el nodo  $i$  ( $P_{x_{ij}}$ ) y otra del mismo valor saliendo de  $j$ . Esta simulación de flujo correspondiente debe ser cero, para lo cual se debe incluir una línea ficticia con reactancia  $-X_{ij}$  que se sitúa en paralelo con la línea por sacar, la combinación de la reactancia equivalente del sistema y la reactancia ficticia se denomina  $X_s$ .

Tomando en cuenta dicha simulación y que la diferencia angular de los nodos  $i$  y  $j$  es independiente de la rama que se escoja, la inyección se determina de la siguiente manera.

$$P_{x_{ij}} = P_{ij} \left( \frac{-X_{ij}}{X_{eq} - X_{ij}} \right) = \frac{-(\delta_i - \delta_j)}{X_{eq} - X_{ij}} \quad (3.25)$$

La anterior ecuación determina la inyección compensadora necesaria para simular la salida de una línea de transmisión. La reactancia equivalente ( $X_{eq}$ ) depende de la diferencia angular, la cual es producida por las inyecciones de potencia iguales y de signo contrario ( $P_o$ ) en los nodos  $i$  y  $j$ , dichas diferencias se determinan por la expresión siguiente.

$$[\delta] = [X][P] \quad (3.26)$$

Dado que solo se necesita determinar dicha diferencia se obtiene que:

$$\delta_i = X_{ii}P_o - X_{ij}P_o \quad (3.27)$$

$$\delta_j = X_{ji}P_o - X_{jj}P_o$$

Las anteriores ecuaciones determinan que la reactancia equivalente se expresa como.

$$X_{eq} = X_{ii} + X_{jj} - 2X_{ij} \quad (3.28)$$

Las reactancias presentes se toman de la matriz  $[B_p]$  para los índices indicados, según los nodos estudiados. Mediante la expresión de inyección de potencia se sustituye la ecuación 3.30, logrando así una expresión general para las inyecciones compensadoras.

$$Px_{ij} = \frac{-(\delta_i - \delta_j)}{X_{ii} + X_{jj} - 2X_{ij} - X_{ij}} \quad (3.29)$$

La simulación de contingencias para el método antes descrito se puede resumir en los siguientes pasos:

- Paso 1: determinar los ángulos de fase mediante la ecuación 3.29
- Paso 2: calcular la reactancia equivalente mediante la ecuación 3.30.
- Paso 3: calcular las inyecciones compensadoras utilizando la ecuación 3.31.
- Paso 4: con las inyecciones  $Px_{ij}$  y  $-Px_{ij}$  se calculan los incrementos de los ángulos de fase en los nodos o barras ( $\Delta\delta$ ) por medio de la expresión siguiente.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Px_{ij} \\ \vdots \\ -Px_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [B_p][\Delta\delta] \quad (3.30)$$

- Paso 5: por superposición, se calculan los flujos en las líneas con el vector siguiente.

$$[\delta^0 + \Delta\delta] \quad (3.31)$$

### 3.2.2. Análisis de contingencias basados en factores de distribución e índices de severidad

Los estudios de contingencia generalmente simulan una gran cantidad de salida de líneas, transformadores y generadores, lo que hace necesario identificar y clasificar las contingencias, así como el comportamiento de los elementos restantes. Para los factores de distribución se utiliza el método de compensación de sistemas lineales y las ecuaciones presentes de este apartado.

Con base en lo anterior, un factor de distribución de la potencia activa inyectada a los nodos o barras se define como “el incremento de potencia en un elemento en concreto que une a los nodos m y n, ante un incremento unitario en la potencia inyectada en el nodo i,”<sup>3</sup> expresado matemáticamente como:

---

<sup>3</sup> MORATAYA, Juan. *Análisis de la capacidad de transporte actual del sistema nacional interconectado*. p 51.

$$\rho_{nm}^i = \frac{\Delta\delta_m - \Delta\delta_n}{X_{nm}} S_{nm,i} \quad (3.32)$$

Donde:

- $\Delta\delta_{m \text{ o } n}$ : representan los cambios en los ángulos de fase de los nodos analizados.
- $X_{nm}$ : es la reactancia de la línea de transmisión que conecta los dos nodos.
- $S_{nm,i}$ : representa la matriz de sensibilidades entre los flujos de potencia y la potencia inyectada a los nodos. Indica cómo se incrementa el flujo de potencia en las ramas de una red en función del flujo de las inyecciones en la misma.

Por lo que un cambio de potencia en un elemento mn por una salida de un generador localizado en el nodo i, se podrá determinar en base a si un generador o el resto de los generadores asumen la generación perdida mediante la siguiente expresión.

$$\Delta P_{mn} = \begin{cases} (\Delta P_i)(\rho_{mn}^i), & \text{Un generador} \\ (\Delta P_i) \left( \rho_{mn}^i - \sum_{j \neq i}^N \rho_{mn}^i \cdot \gamma_{ij} \right), & \text{Resto de generadores} \end{cases} \quad (3.33)$$

Dónde:

- $\gamma_{ij}$ : es el coeficiente de contribución, que indica la contribución de cada generador de la red con respecto a la pérdida de generación, la suma de todos los coeficientes de los generadores de la red debe ser igual a la unidad.

El comportamiento del sistema puede ser evaluado cuantitativamente en términos de índices que reflejen la severidad de los valores de voltajes fuera de los límites o sobrecargas en elementos que conecten los nodos del sistema.

Un índice de severidad se define como “funciones que penalizan cualquier violación de un límite operativo”<sup>4</sup> (límite térmico, límite de voltaje y límite de estabilidad).

Existen índices de severidad para voltajes, para flujos de potencia y generales, la manera de calcularlos es a través de ecuaciones matemáticas que siguen una estructura como la de la ecuación siguiente, “para calcular el índice de severidad de potencia para la contingencia analizada.”<sup>5</sup>

$$IS = \frac{1}{b} \left( \sum_{k=1}^b \frac{|P_f|}{P_{f \max}} \right)^2 \quad (3.34)$$

Donde:

- $P_f$ : es la potencia del elemento que se analiza, determinada por algún método de cálculo expuesto en análisis de contingencias.
- $b$ : total de elementos que conectan los nodos del sistema (líneas y transformadores).

---

<sup>4</sup> ABOYTES, Florencio. *Análisis de sistemas de potencia*. p 277.

<sup>5</sup> MORATAYA, Juan. *Análisis de la capacidad de transporte actual del sistema nacional interconectado*. p 53.

## 4. TEORÍA DE GRAFOS

### 4.1. Definiciones

En este apartado se presentarán las definiciones de todos los temas relacionados con la teoría de grafos.

#### 4.1.1. Grafo

Un grafo es una representación gráfica de elementos que mantienen una relación entre ellos los cuales por medio de vértices o nodos se representan a los elementos y como aristas o puentes a la relación entre los elementos. Matemáticamente, Bondy y Murty<sup>6</sup>. definen al grafo como un par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste en un conjunto de vértices  $V(G)$  y un conjunto  $E(G)$ , disjuntos de  $V(G)$ , de aristas, junto con una función de incidencia  $(\varphi_G)$  que se asocia con cada arista del grafo y un par desordenado de vértices del grafo. La anterior definición de la notación matemática para un grafo cualquiera se muestra en la siguiente ecuación.

$$G = (V(G), E(G)) \quad (4. 1)$$

#### 4.1.2. Grafo no dirigido

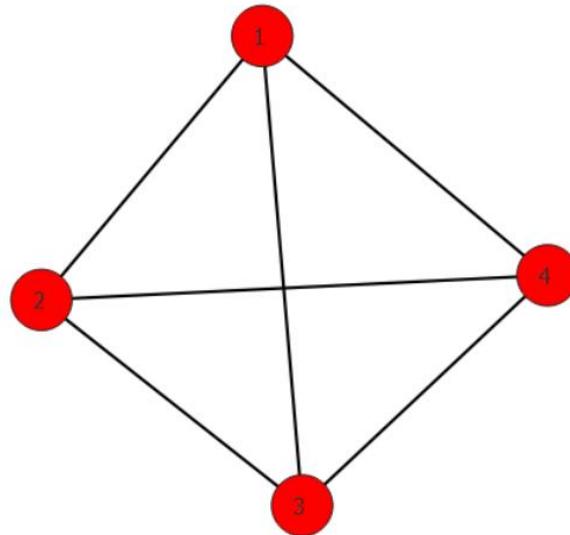
Un grafo no dirigido es el grafo en el cual, su conjunto de aristas  $(E(G))$  está conformado por pares no ordenados sobre el conjunto de vértices  $(V(G))$  y

---

<sup>6</sup> BOUNDY, J. y MURTY, U. *Teoría de grafos*. p 2.

es un conjunto no vacío. Esto se traduce como un grafo en el cual no importa la dirección de las aristas, vértice inicial y vértice final, si no solo la conexión del par de vértices, teniéndose la posibilidad de establecer ambas direcciones.

Figura 9. **Ejemplo de un grafo no dirigido**



Fuente: elaboración propia, *Social Network Visualizer 2.3*.

#### 4.1.3. Grafo dirigido

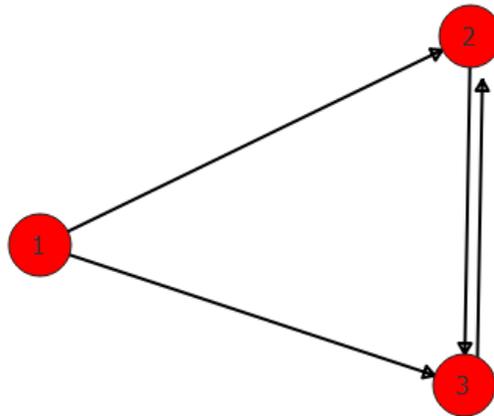
Es aquel grafo en el cual las aristas que unen a los vértices tienen un orden establecido por la relación de incidencia, generando un vértice de inicio y un vértice final, comúnmente se les llama dígrafos. Las aristas de este grafo se llaman puentes o arcos y son representadas con flechas (cola es el vértice inicial y punta vértice final).

Formalmente según Bondy y Murty<sup>7</sup>, un grafo dirigido (D) es un par ordenado  $(V(D), A(D))$  que consiste en un conjunto de vértices ( $V := V(D)$ ) y un

<sup>7</sup> BOUNDY, J. y MURTY, U. *Teoría de grafos*. p 31.

conjunto ( $A := A(D)$ ) disjunto de  $V(D)$ , de arcos y junto con una función de incidencia ( $\varphi_D$ ) que asocia cada arco de  $D$  con un par ordenado de vértices de  $D$ , que no necesariamente son distintos.

Figura 10. **Ejemplo de un grafo dirigido**



Fuente: elaboración propia, *Social Network Visualizer 2.3*.

#### 4.1.4. **Grado de un vértice**

El grado de un vértice ( $v$ ) es una propiedad clave de este, representa el número de aristas que posee dicho vértice, en otras palabras, indica la cantidad de enlaces que el vértice tiene a otros vértices mediante una arista. Este concepto aplica para grafos no dirigidos.

$$k_i = k(v) = |E(v)| \quad (4.2)$$

Donde:

- $k_i$ : representa el grado del vértice ( $v$ ) analizado, representando el vértice por un número  $i$ , notación utilizada en redes.
- $|E(v)|$ : representa la cantidad de aristas que posee el vértice analizado.

Para un dígrafo el concepto anterior aplica haciendo la siguiente corrección, el grado de un vértice en un dígrafo es la suma de los arcos provenientes de otros vértices que llegan al vértice analizado, más lo que sale de él hacia otros vértices.

$$k(v) = |A_{in}(v)| + |A_{out}(v)| = k_i = k_i^{in} + k_i^{out} \quad (4.3)$$

Donde:

- $|A_{in}(v)|$ : representa la cantidad de arcos que entran al vértice analizado.
- $|A_{out}(v)|$ : representa la cantidad de arcos que salen del vértice analizado.
- $k_i^{in}$ : representa la misma cantidad que  $|A_{in}(v)|$ , la única diferencia es que esta notación es utilizada en redes.
- $k_i^{out}$ : representa la misma cantidad que  $|A_{out}(v)|$ , la única diferencia es que esta notación es utilizada en redes.

Otro término que nace de esta propiedad es el grado promedio de un grafo, como su nombre lo indica es el promedio de los grados obtenidos de los vértices que conforman el conjunto de vértices del grafo ( $V(G)$ ). Matemáticamente se expresa como.

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N k_i \right) \quad (4.4)$$

Donde:

- N: representa el número de vértices que conforman el conjunto de vértices del grafo.

Este grado promedio se puede aplicar a los grafos dirigidos por medio de la siguiente expresión:

$$\langle k_i^{in} \rangle = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N k_i^{in} \right) = \langle k_i^{out} \rangle = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N k_i^{out} \right) \quad (4.5)$$

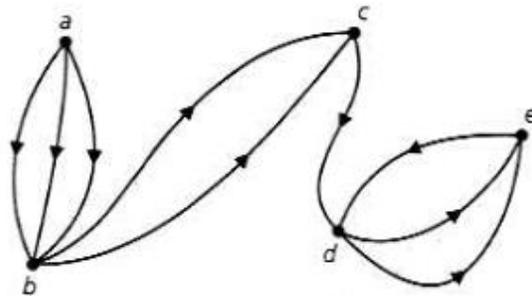
El grado de un vértice se relaciona con el número de enlaces o aristas (L) que conforman el conjunto de aristas del grafo no dirigido ( $E(G)$ ), expresando matemáticamente como:

$$L = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N k_i \right) \quad (4.6)$$

#### 4.1.5. Multígrafo

Un multígrafo es un grafo en el cual para un par de vértices cualesquiera a y b que pertenecen al conjunto de los vértices del grafo ( $V(G)$ ) están conectados por dos o más aristas (grafo no dirigido) o arcos (dígrafo). Para estos dos vértices el número de aristas o arcos k que poseen, se denomina multiplicidad n, dependiendo de los n enlaces que poseen estos vértices.

Figura 11. Ejemplo de un multígrafo



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 534.

#### 4.1.6. Subgrafo

Un subgrafo es un grafo en el cual su conjunto de vértices y aristas pertenecen al conjunto de vértices y aristas de otro grafo que es mayor. En otras palabras, si a un grafo cualquiera se le elimina aleatoriamente, un número de vértices y aristas que pertenecen al conjunto de vértices y aristas del grafo, se obtendrá un subgrafo. Formalmente Grimaldi,<sup>8</sup> define que si un grafo  $G = (V(G), E(G))$  sea dirigido o no, entonces:

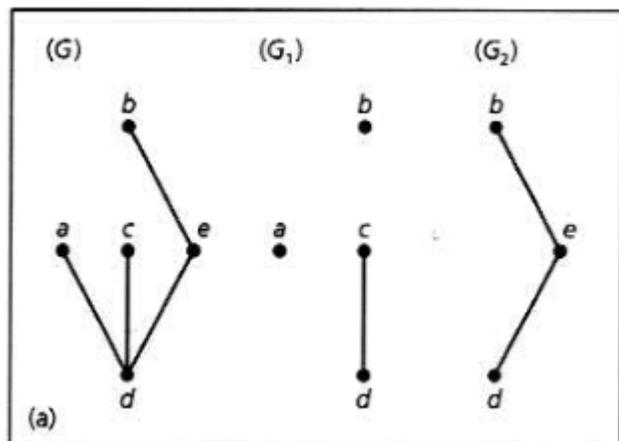
$$G_1 = (V_1(G), E_1(G)) \quad (4.7)$$

Es un subgrafo de  $G$  si:

$$\emptyset \neq V_1(G) \ \& \ E_1(G) \subseteq E(G) \quad (4.8)$$

Donde cada arista de  $E_1(G)$  es incidente con los vértices de  $V_1(G)$ .

Figura 12. Ejemplo de un subgrafo



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 538.

<sup>8</sup> GRIMALDI, R. *Matemáticas discretas y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 538.

La figura 12 presenta un grafo  $G$  y dos subgrafos ( $G_1$  y  $G_2$ ), los cuales son distintos, pero nacen del mismo grafo  $G$ , con variaciones en los conjuntos de vértices y aristas que conforman cada subgrafo, que pertenecen al conjunto de aristas y vértices del grafo  $G$ .

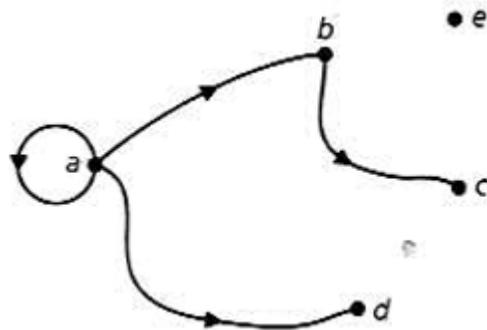
## 4.2. Lazos, caminos y ciclos

Los lazos, caminos y ciclos presentan conceptos relacionados entre sí, por lo que se definirán estos términos, a continuación.

### 4.2.1. Lazos

Un lazo es aquella arista cuyos vértices de conexión son el mismo, es decir es la arista que une a un vértice consigo mismo, solo un vértice se presenta en esta relación de incidencia. Este se da en cualquier tipo de grafo. Otro concepto de lazo se da en Grimaldi<sup>9</sup> donde un circuito, como se definirá en 4.2.2, donde existe una sola arista se denomina lazo.

Figura 13. Ejemplo de un lazo en el vértice (a) de un grafo dirigido



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 530.

<sup>9</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 532.

#### 4.2.2. Caminos

El concepto de camino entre dos vértices cualesquiera es una sucesión alternada finita de vértices y aristas (sin lazos) de un grafo  $G$ , que tiene un vértice inicial y uno final. Esta definición es tomada de Grimaldi.<sup>10</sup> Otra definición para un camino es la dada por Bondy y Murty<sup>11</sup> en él se define como, un grafo simple cuyos vértices se pueden organizar en secuencia lineal de tal manera, que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia de lo contrario no lo son.

En palabras más simples un camino se puede interpretar como un grupo de vértices de un grafo conectados en serie mediante aristas o arcos, con la condición de no presentar lazos. Comúnmente a los vértices de los extremos se les da el nombre de vértice inicial, donde se comienza el camino y vértice final donde se termina. La longitud de un camino es el número de aristas que hay en el camino.

Dependiendo de cómo se construya un camino se le denomina de otra forma, siendo estas las siguientes:

- Cualquier camino donde el vértice inicial y final son el mismo y su longitud es mayor a 1 se le denomina camino cerrado, de lo contrario se le llamará camino abierto.
- Si no se repite ninguna arista en el camino analizado este se denomina recorrido, tomando la condición anterior si el vértice inicial y final de este recorrido son el mismo a este recorrido se le denomina circuito.

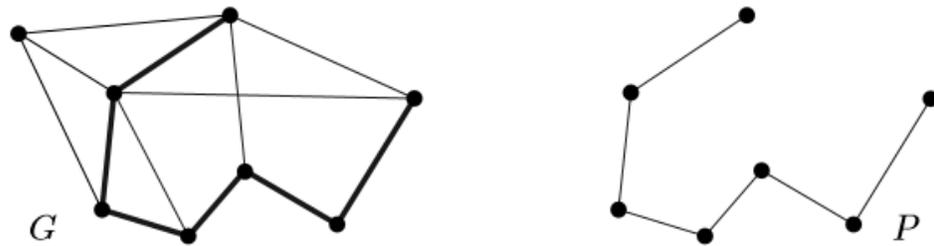
---

<sup>10</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 531.

<sup>11</sup> BOUNDY, J. y MURTY, U. *Teoría de grafos*. p 4.

- Si ningún vértice de un camino analizado se presenta más de una vez, se le llama camino simple.

Figura 14. **Ejemplo de un camino (P) de longitud 6 en un grafo no dirigido (G)**



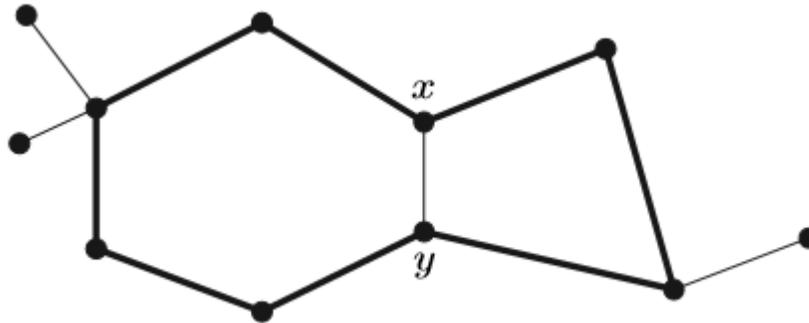
Fuente: DIESTEL, Reinhard. *Graph theory*. p 6.

#### 4.2.3. Ciclo

La definición de ciclo parte de la denominación de camino simple, cuando este cumple con la condición de que su vértice inicial y final son el mismo, se interpreta como camino simple cerrado, al cual se le denomina ciclo. En esta última definición existe un convenio presentado por Grimaldi<sup>12</sup> el cual dice: que el término ciclo implicará siempre la presencia de al menos tres aristas distintas, del grafo.

<sup>12</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p. 532.

Figura 15. **Ejemplo de un ciclo (aristas gruesas) en grafo no dirigido**



Fuente: DIESTEL, Reinhard. *Graph theory*. p 8.

### 4.3. Conectividad

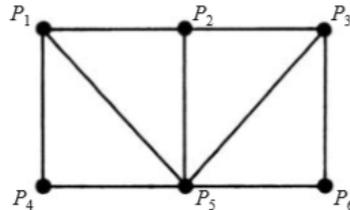
El concepto de conectividad requiere de la introducción de conceptos más simples que en conjunto definen la conectividad de un grafo.

#### 4.3.1. Grafo conexo

Si se tiene un grafo no vacío y no dirigido este se denominará grafo conexo, si existe un camino entre dos vértices cualesquiera distintos, que pertenecen al conjunto de vértices del grafo y el camino que los conecta está contenido en el grafo. Para un grafo dirigido este concepto aplica al sustituir los arcos por aristas convirtiéndolo de esta manera en no dirigido y asociado al grafo dirigido. Se debe tener cuidado con aristas múltiples, en el grafo no

dirigido asociado, dado que solo se representan mediante una sola. Este método de grafo no dirigido asociado se toma de Grimaldi.<sup>13</sup>

Figura 16. **Ejemplo de un grafo conexo de seis vértices**

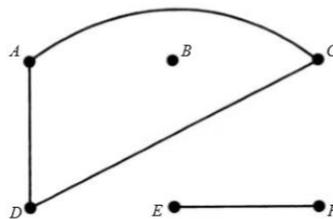


Fuente: LIPSCHUTZ, Seymour y LIPSON, Marc. *Matemáticas discretas*. p. 159.

#### 4.3.2. Grafo desconexo

En un grafo no vacío y no dirigido, en el que no existe un solo camino que conecte dos vértices distintos cualesquiera, no es conexo por lo tanto se denomina grafo desconexo. Es decir que este grafo tiene un conjunto de vértices del grafo, pero no todos estos poseen un camino a otro vértice. A partir de este grafo desconexo se puede analizar las componentes o subgrafos, que si se encuentran conectados y la suma de estos subgrafos brinda al grafo desconexo analizado.

Figura 17. **Ejemplo de un grafo desconexo de seis vértices**



Fuente: LIPSCHUTZ, Seymour y LIPSON, Marc. *Matemáticas discretas*. p. 159.

<sup>13</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 533.

### 4.3.3. Componentes conexas

Las componentes conexas se plantean en 4.3.2, como subgrafos de un grafo desconexo, es decir que las componentes conexas son subgrafos de un grafo  $G$ , que presentan la característica de ser conexos. Surge un nuevo concepto de desconexo, un grafo no dirigido será desconexo si y solo si su conjunto de vértices puede separarse en al menos dos subconjuntos. Esto indica que un grafo conexo está compuesto por una única componente conexa.

La nomenclatura matemática para el número de componentes conexas de un grafo es  $\kappa(G)$ , lo que lleva a la definición de conectividad como.

Grafo conexo:

$$\kappa(G) = 1 \quad (4.9)$$

Grafo desconexo:

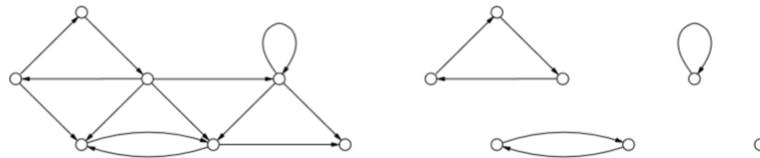
$$\kappa(G) \geq 2 \quad (4.10)$$

En un grafo dirigido se habla de componentes fuertemente conectadas, las cuales se dan cuando existe un camino que conecte a dos vértices cualesquiera distintos en orden de  $a$  hasta  $b$ , teniendo como condición adicional que exista otro camino que conecte a los dos vértices en el orden contrario, de  $b$  hasta  $a$ . Los dos caminos anteriores forman las componentes fuertemente conectadas, al no existir uno de estos caminos el dígrafo es simplemente conexo.

Un ejemplo de componentes conexas es la figura 17, la cual muestra un grafo desconexo formado por tres componentes conexas, una de ellas como se habló en el grado de un vértice, se le denomina un vértice asilado (vértice B). La

figura siguiente ejemplifica el concepto de componentes fuertemente conectadas.

Figura 18. **Ejemplo de un dígrafo y sus componentes fuertemente conectadas**



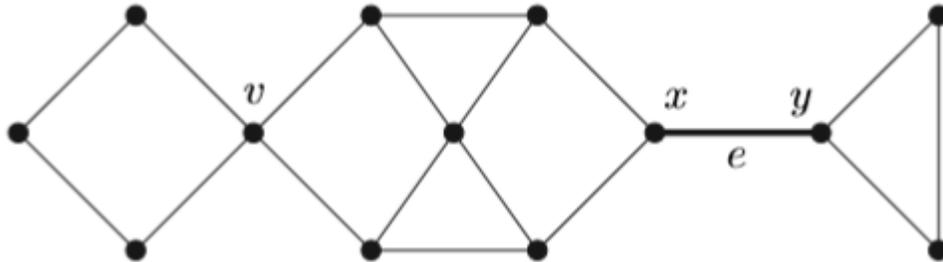
Fuente: BONDY, J y MURTY, U. *Graph Theory*. p. 91.

#### 4.3.4. Puntos de articulación y puentes

Un punto de articulación o vértice de corte es aquel vértice de un grafo conexo, que al eliminarlo del conjunto de vértices del grafo y eliminar las aristas que conectan con dicho vértice, generan un nuevo grafo el cual resulta ser desconexo.

Un puente es una arista contenida en el conjunto de aristas de un grafo conexo que, al eliminarla de dicho conjunto se obtiene un nuevo grafo, el cual es desconexo. La relación entre los dos términos se presenta con dos vértices que se conectan mediante un puente, estos vértices resultan ser puntos de articulación. Pero un punto de articulación no necesariamente se conecta a otro vértice por un puente.

Figura 19. **Ejemplo de un grafo conexo con los puntos de articulación (v, x, y) así como el puente xy (e)**



Fuente: DIESTEL, Reinhard. *Graph theory*. p 10.

Una manera de determinar si un grafo es conexo o desconexo (si es desconexo saber sus componentes conexas) es mediante el siguiente algoritmo (explicado de manera simple). Cuenta con los siguientes pasos:

- Paso 1: se inicializa la variable  $n$  con el valor de 1 ( $n=1$ , la función de  $n$  se explica en el paso 4), se escoge un vértice cualquiera etiquetándolo con el valor de  $n$  y se recorren los vecinos de este vértice etiquetándolos con el valor de  $n$ .

Paso 2: para cada vértice vecino del paso anterior, se visita a sus vecinos y se etiqueta con el valor de  $n$ . Si no se cuenta con vecinos que visitar y el conjunto de vértices del grafo ya fue etiquetado en su totalidad, se ejecuta el paso 4. Por el contrario, si el conjunto de vértices del grafo tiene vértices no etiquetados, se le da el nuevo valor a  $n$  de  $n = n+1$  y se escoge uno de los vértices no etiquetados para etiquetarlo con el valor  $n$ .

- Paso 3: para el vértice etiquetado con  $n=n+1$  del paso anterior, se repite nuevamente el paso 2, hasta que se hayan etiquetado todos los vértices del conjunto de vértices del grafo.

- Paso 4: ya que se han etiquetado todos los vértices del conjunto de vértices del grafo se revisa el valor de  $n$ , el cual indica el número de componentes conexas presentes en el grafo ( $\kappa(G)$ ). Se determina si el grafo analizado en este algoritmo es conexo o no, dependiendo de que cumpla con la ecuación 4.10 o 4.11.

#### 4.4. Árboles

En este apartado se describe la definición de este término, sus propiedades, los tipos y la aplicación de estos.

##### 4.4.1. Definiciones y propiedades

Sea un grafo  $G$  ( $G = (V, E)$ ) el cual es conexo, no contiene ciclos y no presenta lazos en sus vértices, se le denomina árbol, la notación para estos tipos de grafos se realiza como lo muestra la siguiente ecuación.

$$T = (V, E) \quad (4.11)$$

Para un grafo no dirigido se puede afirmar que es un árbol, si cumple con el siguiente enunciado:

“Un grafo  $G$  no dirigido simple (sin lazos) es un árbol si y solo si, hay un solo camino entre cada pareja de vértices.”<sup>14</sup> El anterior enunciado cumple con la definición de un árbol dado que, al solo existir un camino entre dos vértices, no se presentan ciclos en el grafo, así también indica que dicho grafo es conexo. Para grafos dirigidos se explicarán en el siguiente inciso.

---

<sup>14</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. *Definición y propiedades de árboles, UPV.* [https://www.youtube.com/watch?v=bFUFHC6I\\_\\_Q&index=38&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q](https://www.youtube.com/watch?v=bFUFHC6I__Q&index=38&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q). Consulta: noviembre de 2017.

Las propiedades que presenta un árbol de forma abreviada son:

- Para un árbol  $T$ , los vértices que presenten un grado como lo indica la ecuación 4.12, son llamados “hojas”.

$$k(v) = 1 \quad (4.12)$$

- Si se tiene un grafo el cual no desconexo, en el cual las componentes conexas son árboles, dicho grafo o conjunto de árboles se denominará “bosque”.

- En un árbol  $T$  en el que, su número de vértices es mayor o en todo caso dos, se tiene siempre al menos dos hojas.

$$|V(T)| \geq 2 \Rightarrow \text{numero de hojas de } T \geq 2 \quad (4.13)$$

- Si un árbol ( $T = (V, E)$ ) tiene  $n$  vértices tendrá entonces  $n-1$  aristas. Estableciendo la siguiente relación entre el número de vértices y el número de aristas.

$$|E| = |V| - 1 \quad (4.14)$$

- Un árbol  $T$  es conexo y acíclico (no ciclos), pero si se elimina cualquiera de sus aristas quedará desconexo, en dos subgrafos.

Figura 20. **Ejemplo de un árbol**



Fuente: DIESTEL, Reinhard. *Graph theory*. p 12.

#### 4.4.2. **Árboles con raíz**

Un árbol con raíz parte de grafo dirigido  $G$ , el cual al transformar sus arcos en aristas se convierte en su grafo no dirigido al que se denomina “grafo subyacente”,<sup>15</sup> si este grafo es un árbol entonces el grafo dirigido inicial es un árbol. Teniendo un árbol entonces este será con raíz, si solo un vértice ( $v_o$ ) del conjunto de vértices del árbol, tiene grado de entrada cero, a este se le llama raíz, y todos los vértices restantes tienen grado de entrada uno.

$$k_{v_o}^{in} = 0 \text{ y } k_{v_i}^{in} = 1, \quad i = \{1, 2, \dots (|V| - 1)\} \quad (4. 15)$$

Los arboles dirigidos con raíz presentan ciertas propiedades como:

En un árbol con raíz, dado un arco  $\{u, v\}$ , los vértices reciben nombres especiales que indican el sentido de dicho arco, el vértice  $u$  suele denominarse padre de  $v$  y a  $v$  se le denomina hijo de  $u$ .

---

<sup>15</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. *Definición y propiedades de arboles*, UPV. [https://www.youtube.com/watch?v=bFUFHC6I\\_\\_Q&index=38&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q](https://www.youtube.com/watch?v=bFUFHC6I__Q&index=38&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q). Consulta: noviembre de 2017

A los vértices con grado de salida cero, se les llama hojas

$$k_i^{out} = 0 \quad (4. 16)$$

Si en un árbol cada vértice  $v$  tiene cuando mucho dos hijos se le llamará árbol binario y si para todo vértice del árbol el grado de salida es cero o dos entonces se le llamará “árbol binario completo”.<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad & \text{Si } k_{v_i}^{out} = 0, 1 \text{ o } 2 \text{ es un árbol binario} \\ & \text{Si } k_{v_i}^{out} = 0 \text{ o } 2 \text{ es un árbol binario completo} \end{aligned} \quad (4. 17)$$

El grafo subyacente como bien se mencionó, resulta de sustituir los arcos por aristas, si existen los arcos  $\{u, v\}$  y  $\{v, u\}$  ambos se sustituirán por una sola arista entre dichos vértices. La notación matemática comúnmente usada es  $\bar{G}$ .

La relación que presenta el árbol con su grafo subyacente determina ciertas características como la existencia de un solo camino entre la raíz y cualquiera de los vértices del grafo subyacente, aplica también para este grafo la ecuación 4.14, el grafo subyacente es acíclico (no ciclos), es conexo y resulta ser un árbol.

#### 4.4.3. Búsqueda en profundidad

Antes de explicar la búsqueda en profundidad se debe introducir el concepto de matriz de acceso y matriz de adyacencia, dado que estas ayudan en el proceso de implementación del algoritmo para la búsqueda de profundidad. La matriz de adyacencia es una de las representaciones de un grafo, además de la representación gráfica y otras.

---

<sup>16</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones.* p 617.

La matriz de adyacencia es la representación matemática a través de filas y columnas (matriz) la cual demuestra, que la posición en la matriz indica la existencia o no existencia de una arista o arco que conecte al vértice que hace referencia el número de fila y al vértice que hace referencia el número de columna, esto genera dos valores posibles:

- Valor de 1, si existe una arista o arco, entre el par de vértices seleccionados.
- Valor de 0, si no existe una arista o arco, entre el par de vértices seleccionados.

Por su parte la matriz de acceso al igual que la matriz de adyacencia representa la conexión entre vértices, esta matriz indica si existe una arista, arco o camino entre dos vértices según el subíndice de la fila y columna analizados. El valor de las casillas en la matriz de acceso tiene dos posibilidades:

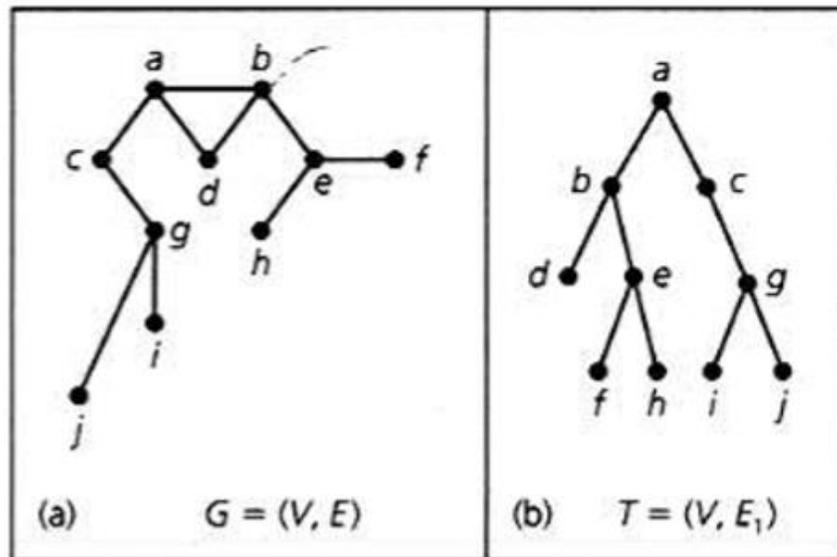
- Valor de 1, si existe una arista, arco o camino, entre el par de vértices seleccionados.
- Valor de 0, si no existe una arista, arco o camino, entre el par de vértices seleccionados.

La relación que existe entre la matriz de acceso y el algoritmo de búsqueda en profundidad o *Depth First Search* (DFS), es que dicho algoritmo permite armar la matriz de acceso de un grafo dado, esto se debe a que indica si existen caminos que conecten a los dos vértices analizados en las casillas de la matriz. El algoritmo DFS o búsqueda en profundidad origina un árbol recubridor o generador, del grafo G dado con esto se enlistan los pasos del algoritmo:

- Paso 1: dado un grafo  $G$  sin lazos, se selecciona un vértice inicial el cual será la raíz ( $r$ ) del árbol que se origina de esta búsqueda.
- Paso 2: se visita a los vértices adyacentes (vecinos) de este vértice de inicio, de forma que el orden común utilizado es comenzar con el vértice de menor numeración o el primero según orden alfabético.
- Paso 3: una vez visitado este vecino, se deben visitar a los vecinos de este nuevo vértice actualmente visitado, según el paso dos con la modificación que ahora el vértice de inicio (vértice padre) es el vértice actualmente visitado. Si este vértice no tiene vecinos o hijos se debe retroceder al vértice anterior visitado y visitar a los vecinos restantes no visitados del vértice de inicio actual, según el paso 2.
- Paso 4: se realiza el paso 2 y 3 de forma consecutiva hasta que se hayan visitado todos los vértices del grafo, de esta forma se da por concluido el algoritmo y el árbol resultante es el árbol recubridor o generador para el grafo  $G$  dado.

Uno de los puntos por tener en cuenta para este algoritmo es la condición de visitar solo una vez cada vértice del grafo por lo que, si se presenta el caso de un vértice que tiene como vecino un vértice ya visitado, este no se tomará en cuenta y deberá seguirse con el algoritmo. Terminado el algoritmo las aristas que no fueron recorridas es decir que no forman parte del árbol se denominan comúnmente como aristas de retroceso, estas tienen una aplicación en búsqueda de puntos de articulación como se verá más adelante.

Figura 21. **Ejemplo del algoritmo de búsqueda en profundidad aplicado a G obteniendo T**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 625.

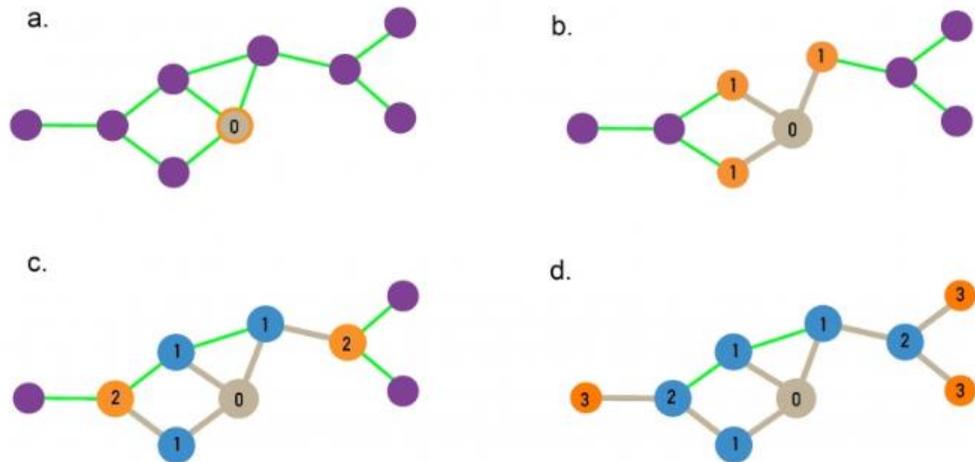
#### 4.4.4. Búsqueda en anchura

El algoritmo de búsqueda en anchura o en inglés *Breadth First Search* (BFS), es un algoritmo aplicado a grafos sin lazos y que genera un árbol recubridor o generador al igual que el algoritmo DFS. El algoritmo BFS genera un árbol distinto dado el orden en el cual son visitados los vértices del grafo. Los pasos que integran dicho algoritmo son los siguientes:

- Paso 1: dado un grafo  $G$  sin lazos, se selecciona un vértice del conjunto de vértices del grafo, al cual se le denominará vértice inicial este será la raíz ( $r$ ) del árbol generado por dicho algoritmo, el cual será el primer nivel  $n=0$ , las aristas de este árbol serán las aristas que se recorran por este algoritmo del grafo  $G$ . A este vértice se le denominara de  $n$  nivel.

- Paso 2: se visitarán todos los vecinos (hijos) de este vértice inicial (para estos vértices  $n=n+1$ ), comenzando por el vértice vecino con menor numeración o según el orden alfabético de los vértices vecinos. Se procederá a realizar dichas visitas hasta que todos los vértices vecinos sean visitados, con la condición de visitar solo una vez cada vértice. Estos vértices vecinos visitados se les denominara de n nivel.
- Paso 3: dados los vértices de n nivel actual, se procederá a nombrar como vértice inicial el primero visitado de n nivel actual y se procederá a visitar a sus vértices vecinos según el paso 2. Al terminar de recorrer estos vértices vecinos, se procede a nombrar como nuevo vértice inicial al del mismo nivel que el inicial anterior, que sigue según orden de visita. Se realiza el paso 2 con la condición de que el valor de n será el mismo (no se le sumará otra unidad) para los siguientes vértices visitados (hijos) y así se realizará consecutivamente hasta que todos los vértices de este nivel hayan sido nombrados como vértices iniciales.
- Paso 4: se realizará el paso 3 hasta que todos los vértices del grafo hayan sido visitados. Con esto finaliza el algoritmo y el árbol obtenido será el árbol recubridor o generador de G. Para el caso de que un vértice no tenga hijos se procede con el siguiente vértice visitado del mismo nivel y continua el algoritmo. Las aristas que no forman parte del árbol obtenido, pero si del grafo G, se les llamará aristas de retroceso, se verá su aplicación más adelante.

Figura 22. **Ejemplo del algoritmo de búsqueda en anchura**



Fuente: BARABASI, Albert-László. *Network Science*. Consulta: noviembre de 2017. [http://barabasi.com/networksciencebook/chapter/2#paths].

#### 4.4.5. Componentes biconexas y puntos de articulación

Para definición de componente biconexa se debe definir lo que se entiende por biconexo, por lo tanto “aquel grafo no dirigido, sin lazos, conexo y sin puntos de articulación se denominara biconexo”.<sup>17</sup> La definición de componente biconexa de un grafo “es aquel subgrafo, de ahí el término componente, que tienen la característica de ser biconexo y además no está contenido dentro de otro subgrafo biconexo”.<sup>18</sup> Al referirse a “contenido dentro” indica que pueda existir otro subgrafo mayor a él (tiene los mismos vértices y aristas que el subgrafo analizado más otros).

Dentro de los conceptos útiles en este tema esta las aristas de retroceso que como se vio involucran un grafo no dirigido, sin lazos y a su árbol recubridor

<sup>17</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 645.

<sup>18</sup> *Ibíd.*

o generador, generado por los algoritmos de búsqueda. Las aristas de corte se suelen definir como aquellas “aristas que pertenecen al conjunto de aristas del grafo  $G$  pero que no pertenecen al conjunto de aristas del árbol  $T$ , el cual es recubridor de  $T$ , por lo que los vértices de estas aristas en el árbol  $T$  recubridor o generador se interpretan que un vértice es ascendiente o descendiente del otro”.<sup>19</sup> Formalmente, una arista de retroceso se define como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Sea } G = (V, E) \text{ y } T = (V, E') \\ \text{Si } \{a, b\} \in E(G) \text{ pero } \{a, b\} \notin E'(T) \end{aligned} \quad (4. 18)$$

Basándose en el párrafo anterior y sobre la aplicación del algoritmo DFS se puede determinar los puntos de articulación de un grafo  $G$  dado, a partir de encontrar vértices en el árbol  $T$ , generado por el algoritmo, que presenten características necesarias para determinar que estos vértices son puntos de articulación para  $T$  y para  $G$ . Además, se indicará las componentes biconexas en las cuales se dividirá el árbol y el grafo en caso existan puntos de articulación. Para determinar dichos puntos se necesita cumplir ciertas condiciones que a continuación se mencionan.

Como primera condición la raíz del árbol obtenido mediante DFS debe tener como mínimo dos hijos para que esta sea un punto de articulación.

Segunda condición los vértices analizados deben tener por lo menos un hijo, de lo contrario no podrán ser puntos de articulación y además deben cumplir con:

$$pro(x) \geq ip(v) \quad (4. 19)$$

---

<sup>19</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 645-646.

Donde:

- $v$ : es el padre de  $x$ , por notación  $v$  es el vértice analizado
- $x$ : es el hijo de  $v$
- $ip(v)$ : es el índice de profundidad de un vértice  $v$  analizado
- $pro(x)$ : es la profundidad del vértice  $x$

El índice de profundidad indica el orden en el que fue visitado el vértice al ejecutar el algoritmo DFS, por lo tanto, se le da un valor numérico que indica la posición en dicho orden. La profundidad de un vértice analizado indica el mínimo índice de profundidad de cualquiera de los vértices, que puede alcanzar el vértice analizado cumpliendo con:

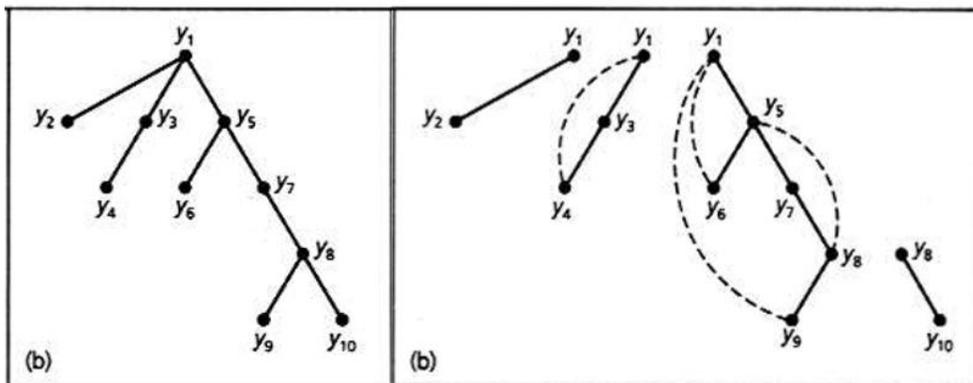
- Utilizando  $n$  cantidad de aristas hacia sus hijos (NO hacia su padre), para alcanzar al de menor índice.
- Utilizando solo una arista de retroceso que lo lleve a un ascendiente (vértice anterior al vértice analizado según orden de visita) de mínimo índice de profundidad.

Al cumplir con estas condiciones se tendrán los puntos de articulación y se determinan las componentes biconexas. Las componentes biconexas son los subárboles generados a partir de tomar el punto de articulación como raíz y los vértices por debajo de este (descendientes) hasta otro punto de articulación (incluyendo este último punto de articulación), utilizando las aristas y aristas de retroceso para conectar a los vértices.

El algoritmo por utilizar para hallar los puntos de articulación y las componentes biconexas es el siguiente:

- Paso 1: para un grafo  $G$  sin lazos dado, ejecutar el algoritmo DFS, agregando que al ejecutar este algoritmo se etiquete al vértice visitado con su índice de profundidad.
- Paso 2: al obtener el árbol  $T$  de  $G$  se debe agregar las aristas de retroceso señalándolas de manera diferente a las aristas normales, con lo que se procede a determinar la profundidad de cada vértice según lo mencionado.
- Paso 3: para cada vértice del árbol  $T$ , mediante las condiciones mencionadas determinar si es o no punto de articulación, con ello generar las componentes biconexas del árbol, por lo tanto, del grafo  $G$ .

Figura 23. **Ejemplo de puntos de articulación y componentes biconexas aplicadas al árbol  $T$  del grafo  $G$**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 648.

En la figura 23, se aprecia en el lazo izquierdo el árbol  $T$  generado por el algoritmo DFS a partir del grafo  $G$ , dado en forma matricial “el cual fue tomado

del ejemplo 12.18<sup>20</sup> y al lado derecho se aprecia las componentes biconexas y los puntos de articulación ( $y_1$  e  $y_8$ ).

## 4.5. Optimización

En este apartado se presentan los temas de teoría de grafos que se utilizan para optimizar los problemas modelados por grafos.

### 4.5.1. Grafos ponderados

Para “un grafo dirigido o no dirigido  $G$ , en el que cada arista o arco ( $e$ ) tiene asociado un valor, un número real positivo generalmente, al cual se le denomina peso”,<sup>21</sup> se denomina grafo ponderado.

El peso o coste (según bibliografía consultada) asociado a una arista o arco es asignado mediante una función a la que se le llama “función de peso”<sup>22</sup> ( $p(e)$  o  $p(a, b)$ ), esta función depende de las variables por analizar mediante el grafo ponderado que modela un fenómeno o evento cualquiera.

Para representar los grafos ponderados se realiza de forma gráfica o de forma matricial, la forma gráfica es la comúnmente utilizada. La matriz que representa los pesos de las aristas o arcos de dicho grafo es similar a la matriz de adyacencia.

---

<sup>20</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 647-648.

<sup>21</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. *Grafos ponderados*.  
<https://www.youtube.com/watch?v=AJrKEY0eRul&index=27&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q>. Consulta: noviembre de 2017

<sup>22</sup> HERKE, Sarada. *Problema del camino más corto de aristas con peso*.  
<https://www.youtube.com/watch?v=38G5uSxylaY>. Consulta: noviembre de 2017.

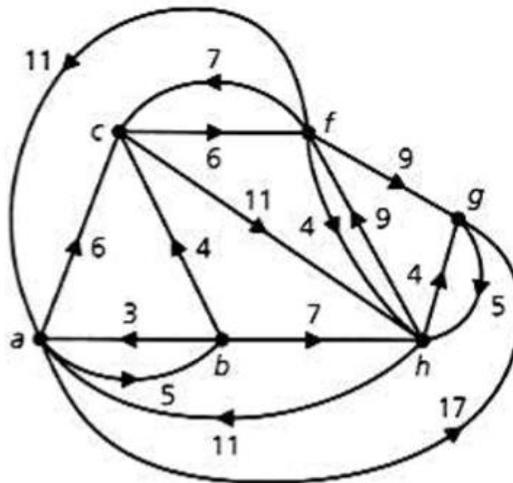
Esta “matriz se denomina matriz de pesos de  $G$ ”,<sup>23</sup> es una matriz de  $n \times n$ , en la cual sus elementos  $(P_{ij})$  se definen de la siguiente manera:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{Si } i = j \\ p(v_i, v_j), & \text{Si } i \neq j \text{ y } (v_i, v_j) \in E(G) \\ \infty, & \text{Si } i \neq j \text{ y } (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases} \quad (4. 20)$$

Donde:

- $i$ : es el número de la fila de la matriz de pesos
- $j$ : es el número de la columna de la matriz de pesos

Figura 24. **Ejemplo de un grafo ponderado dirigido**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 658.

#### 4.5.2. Camino más corto

En un grafo  $G$  el camino más corto, tiene como parte fundamental comprender el peso de una arista, así como la distancia de un camino o el peso

<sup>23</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. *Grafos ponderados*. <https://www.youtube.com/watch?v=AJrKEY0eRul&index=27&list=PL6kQim6lJTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q>. Consulta: noviembre de 2017.

del camino, para ello es necesario indicar que para un camino P de N vértices dado, el peso de este o distancia será:

$$d(P) = d(v_o, v_f) = \mathbf{p}(v_o, v_f) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(v_i, v_{i+1}) \quad (4. 21)$$

Esta ecuación en forma sencilla indica que la distancia o peso de dicho camino P, no es más que la suma de los pesos de las aristas o arcos que conforman el camino. Si el grafo no es ponderado la distancia del camino será la suma de los pesos de las aristas o arcos que conforman dicho camino, que para este caso específico valdrán uno, aquí la terminología “peso del camino” no están utilizada, dado que este grafo no presenta pesos, se asume el peso que será igual para todas las aristas o arcos.

La resolución del problema del camino más corto emplea el algoritmo de Dijkstra, el cual para un vértice inicial seleccionado indica las distancias mínimas de los caminos desde este a los demás vértices, así también determina la distancia del camino más corto hacia un vértice destino. Este algoritmo emplea la siguiente ecuación.

$$L(v) = \min_{u \in S_i} \{d(v_o, v), [d(v_o, u) + \mathbf{p}(u, v)]\} \quad (4. 22)$$

Donde:

- v: es el vértice actual analizado en el algoritmo, si se han recorrido todos los demás vértices del grafo o camino entonces este será el vértice final o destino.
- u: es el vértice anterior a v en la secuencia del algoritmo para el camino por determinar.

- $v_0$ : es el vértice seleccionado que en el algoritmo es el vértice inicial del camino por determinar.
- $S_i$ : es el conjunto de vértices que conforman el camino por determinar.

La “ecuación 4.22, indica la distancia del camino más corto (menor peso)”,<sup>24</sup> desde el vértice seleccionado como inicial hasta el vértice destino o el vértice que actualmente se analiza. El algoritmo de Dijkstra para un grafo de  $n$  vértices consta de los siguientes pasos:

- Paso 1: se hace

$$i = 0 \text{ y } S_0 = \{v_0\} \quad (4.23)$$

- Se etiqueta  $v_0$  con  $(0, -)$  y cada vértice  $v \neq v_0$  de  $G$ , con  $(\infty, -)$ . Se procede con la siguiente decisión.
- Si  $n = 1$ , entonces  $V = \{V_0\}$  y el problema está resuelto.
- Si  $n > 1$ , se procede con el paso 2.

- Paso 2: para cada

$$v \in \bar{S}_i \text{ donde } \bar{S}_i = V(G) - S_i \quad (4.24)$$

- Se reemplaza, cuando sea posible, la etiqueta de  $v$  por la nueva etiqueta la cual es  $(L(v), y)$ , siendo  $y$  el vértice anterior al analizado para el cual  $L(v)$  es el mínimo.
- Paso 3: cada vértice de  $\bar{S}_i$  ( $0 \leq i \leq (n - 2)$ ) este etiquetado con  $(\infty, -)$ , entonces se concluye con el algoritmo. Si no existe cuando menos un vértice  $v \in \bar{S}_i$ , que no esta etiquetado como se mostró antes, se realiza:
    - Se selecciona un vértice ( $v_{i+1}$ ) en el que  $L(v_{i+1})$  sea mínimo, en el caso de que existan varios se selecciona el más cercano a  $v_0$ .

---

<sup>24</sup> GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. p 659-660.

- El conjunto  $S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$ .
- Se incrementa  $i$  teniendo.

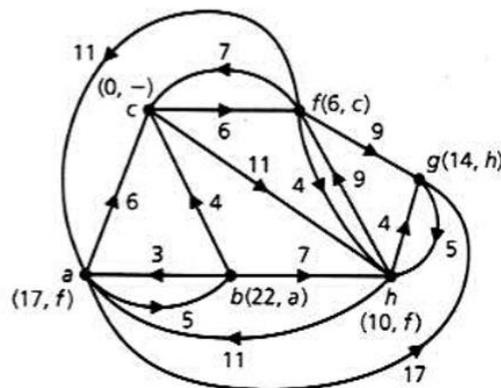
$$i = i + 1 \text{ donde } S_i$$

$$i = \begin{cases} n - 1, & \text{Finaliza algoritmo} \\ \neq \text{ si } no < n - 1, & \text{Ejecutar paso 2} \end{cases} \quad (4. 25)$$

Estos pasos son los necesarios para obtener el camino más corto mediante el algoritmo de Dijkstra. Para determinar el camino entre el vértice inicial  $v_o$  y el vértice final  $v_f$ : se lee la etiqueta del vértice, que como se mencionó, el primer lugar indica la distancia mínima desde  $v_o$  a  $v_f$  y el segundo muestra el vértice del cual procede, por lo que al seguir este segundo lugar en las etiquetas de los vértices que se van nombran se obtiene el camino.

Para entender la aplicación de dicho algoritmo a un grafo ponderado se presenta la figura 25, en la cual se evidencia el uso de las etiquetas que corresponden a lo descrito en el algoritmo. Es de resaltar que el primer lugar de las etiquetas se determina mediante el paso 2 por medio de la ecuación 4.22 indicando de que vértice procede dicha arista con peso mínimo que conformará el camino más corto del vértice en análisis.

Figura 25. **Ejemplo del algoritmo de Dijkstra aplicado al grafo ponderado de la figura 24**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 662.

### 4.5.3. Árboles recubridores

Un árbol recubridor también llamado árbol generador de un grafo ( $G = (V, E)$ ), es aquel árbol ( $T = (V, E)$ ) que cumple con el siguiente enunciado.

$$V(T) = V(G) \ \& \ E(T) \subseteq E(G) \quad (4.26)$$

Para estos árboles se evidencia de la ecuación 4.26, que varía su conjunto de aristas ( $E(T)$ ) dependiendo de las aristas seleccionadas, por lo que, teniendo un grafo  $G$  puede haber más de un árbol recubridor. Esta razón permite utilizar el concepto de grafo ponderado, del cual se obtiene un árbol recubridor, aplicando como criterio de eliminación para dicho árbol recubridor, el peso del árbol o la distancia del árbol por seleccionar.

Este criterio de eliminación presenta dos enfoques los cuales son:

- Encontrar un árbol recubridor de mínimo peso
- Encontrar un árbol recubridor de máximo peso

Con esto se logra pasar de  $n$  cantidad de árboles recubridores para un grafo  $G$ , a un árbol recubridor (puede haber más de uno según aristas de pesos iguales) que posee un camino, o más, que une a todos los vértices de  $G$ , con el menor o mayor peso posible, dependiendo su aplicación. Si no se pondera dicho grafo se tendrán los  $n$  arboles recubridores y quedará a consideración del analista seleccionar el árbol recubridor con el que se trabajará.

Los algoritmos por utilizar para determinar este árbol recubridor sea de mínimo o máximo peso son: el algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim. Para

este trabajo de graduación se presenta el algoritmo de Kruskal como el medio para obtener el árbol recubridor de un grafo  $G$ , a continuación, se presentan los pasos por realizar en este algoritmo:

- Paso 1: sea un grafo  $G$  y teniendo el conjunto de aristas del grafo ( $E(G)$ ). Se ordenan dichas aristas de forma que su aplicación cumplan con:
  - Un orden creciente según el peso de las aristas ( $p(e)$ ), es decir, la primera arista es la de menor peso y la última arista será la de mayor peso, para obtener el árbol recubridor de mínimo peso de  $G$ .
  - Un orden decreciente según el peso de las aristas ( $p(e)$ ), es decir la primera arista es la de mayor peso y la última arista será la de menor peso, para obtener el árbol recubridor de máximo peso de  $G$ .

Se procede con hacer el contador  $i = 1$  y  $p(T) = 0$

- Paso 2: para  $i$  dentro del siguiente rango:

$$1 \leq i \leq (n - 1) \tag{4. 27}$$

- Se selecciona la arista ( $e_i$ ) del conjunto de aristas de  $G$ , que cumpla con la condición de ser una arista del subgrafo de  $G$  (el cual será el árbol recubridor  $T$ ) que no genere un ciclo en este subgrafo de  $G$ .
- De ser verdadera dicha condición la arista pasa a formar parte del conjunto de aristas del subgrafo mencionado (uniendo los vértices correspondientes) y su peso pasa a formar parte del peso del subgrafo de  $G$ .

$$p(T) = p(T) + p(e_i) \tag{4. 28}$$

- De ser falsa dicha condición se descarta esta arista, reemplazándola por la arista siguiente en orden ( $e_{i+1}$ ) y se analiza nuevamente la condición de no ciclos.

$$e_i = e_{i+1} \ \& \ \mathbf{p}(e_i) = \mathbf{p}(e_{i+1}) \quad (4. 29)$$

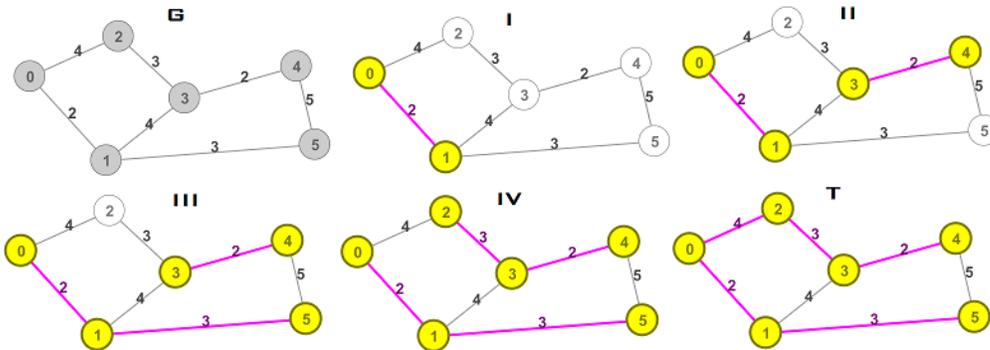
- Paso 3: se reemplaza  $i$  con  $(i = i + 1)$  y se procede con la verificación de las siguientes condiciones:

*Si  $i > n - 1$  procede caso 1*

*Si  $i \leq n - 1$  procede caso 2* (4. 30)

- Caso 1: el subgrafo de  $G$  determinado por los pasos anteriores es un árbol recubridor óptimo para  $G$ , el cual tiene los mismos vértices que el grafo  $G$ , integrado por las aristas seleccionadas por el paso 2 y su peso es  $\mathbf{p}(T)$ .
- Caso 2: se regresa al paso 2.

**Figura 26. Ejemplo del algoritmo de Kruskal aplicado al grafo  $G$  para obtener el árbol recubridor de mínimo peso  $T$**



Fuente: elaboración propia, *GraphTea 1.5.4*.

## 4.6. Redes de transporte

A continuación, se definen las redes de transporte, así también se presentan las propiedades que estas poseen y los conceptos relacionadas a estas.

### 4.6.1. Definiciones y propiedades

Una red o red de transporte es aquel grafo que cumple con las siguientes cuatro condiciones:

- El grafo  $G$  (grafo dirigido) es débil conexo.
- Posee un vértice del cual salen arcos, al que se le llama fuente ( $s$ ), dado que alimenta a la red y por lo general se asume que no posee arcos que lleguen a él desde otros vértices. Para este vértice se cumple con:

$$k_s^{out} \neq 0 \quad (4.31)$$

- Posee un vértice al cual llegan arcos, este es llamado sumidero ( $t$ ), dado que consume de la red y por lo general se asume que no posee arcos que salgan de él hacia otros vértices. Para este vértice se cumple con:

$$k_t^{in} \neq 0 \quad (4.32)$$

- Es un grafo ponderado, donde la función de peso es llamada función de capacidad ( $c$ ), la que asigna un número real positivo como peso a cada arista ( $c(e)$ ).

$$c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (4.33)$$

Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, una red o red de transporte ( $N$ ) se expresa matemáticamente como:

$$N = (G, s, t, c) \quad (4.34)$$

Una red N presenta un analiza el movimiento o flujo de un elemento en sus arcos, este elemento es determinado por la función de capacidad que presenta la red. Lo anterior establece las propiedades que tiene una red N, las cuales son:

Se llama flujo en la red (flujo de los arcos de N) a la función que asigna un valor a sus arcos (un número real positivo) tal que se verifica lo siguiente:

$$f: E(N) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (4.35)$$

Límite de capacidad:

$$\forall e \in E(N) ; 0 \leq f(e) \leq c(e) \quad (4.36)$$

- Ecuación de conservación

$$\forall v \in [V(N) - \{s, t\}] ; \sum_{(v,u) \in E} f(v,u) = \sum_{(u,v) \in E} f(u,v) \quad (4.37)$$

Donde:

- v: es un vértice cualquiera del conjunto de vértices de la red N.
- u: es un vértice cualquiera del conjunto de vértices de la red N, adyacente a v.

El límite de capacidad del flujo en la red para un arco cualquiera indica que un flujo en la red debe ser como mínimo cero y como máximo el valor de la

capacidad del arco analizado. La ecuación de conservación como su nombre lo indica, muestra que el total flujo que entra en un vértice debe ser igual al flujo total que sale de dicho vértice.

Se llama flujo de la red al valor del flujo que circula por la red en general, se calcula como:

$$f(N) = \sum_{(s,v) \in E} f(s,v) - \sum_{(v,s) \in E} f(v,s) \quad (4.38)$$

Esto se traduce como el flujo que sale de la fuente menos el que entra a la fuente, si se asume que (generalmente se asume):

$$k_s^{in} = 0 \rightarrow \sum_{(v,s) \in E} f(v,s) = 0 \quad (4.39)$$

Entonces el flujo de la red resulta ser solo el que sale de la fuente, como se muestra:

$$f(N) = \sum_{(s,v) \in E} f(s,v) \quad (4.40)$$

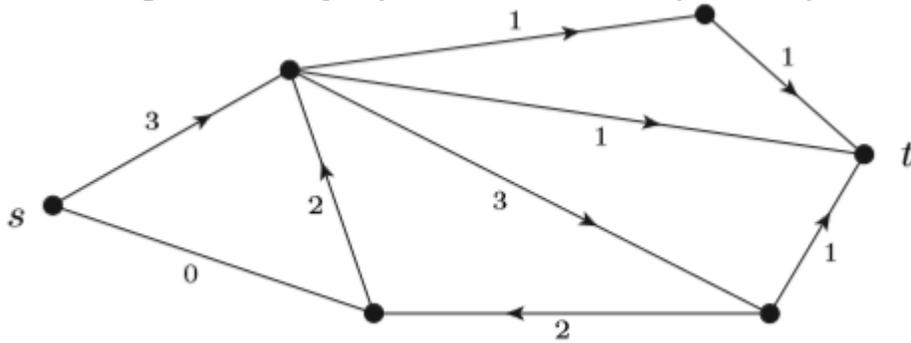
Otra propiedad define el flujo de la red en base al sumidero como:

$$f(N) = \sum_{(v,t) \in E} f(v,t) - \sum_{(t,v) \in E} f(t,v) \quad (4.41)$$

De forma equivalente a la fuente, si se asume que solo llega flujo al sumidero se tiene:

$$k_t^{out} = 0 \rightarrow f(N) = \sum_{(v,t) \in E} f(v,t) \quad (4.42)$$

Figura 27. **Ejemplo de una red,  $N = (G, s, t, c)$**



Fuente: DIESTEL, Reinhard. *Graph theory*. p 126.

#### 4.6.2. Teorema del flujo máximo

La idea de un flujo máximo en una red  $N$ , es la obtención del mayor valor de flujo de la red, al indicar que es el flujo de la red, hace inmediatamente referencia a la fuente, dado que es la forma de calcular dicho flujo. Esta maximización de flujo es brindada por la fuente  $s$ , lo que ella puede brindar como máximo a la red sin violar ninguna de las propiedades anteriores. El teorema de flujo máximo de la red lleva primero a la explicación de los denominados caminos  $f$ -incrementables para definir seguidamente dicho teorema.

Un camino  $f$ -incrementable es aquel camino de  $s$  a  $t$  (sentido del camino) donde sus arcos presentan las siguientes características:

- Si un arco del camino está a favor del sentido del camino, se dice que es un arco propiamente orientado, formalizado matemáticamente en la

ecuación 4.43, y la capacidad de estos arcos sea estrictamente mayor que el flujo en dicho arco, expresado en la ecuación 4.44.

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(N) \quad (4.43)$$

$$c(v_i, v_{i+1}) > f(v_i, v_{i+1}) \quad (4.44)$$

- Si un arco del camino está en contra del sentido del camino, se dice que es un arco impropriamente orientado, formalizado matemáticamente en la ecuación 4.45, y el flujo de este arco sea estrictamente un número positivo, como se expresa en la ecuación 4.46.

$$(v_{i+1}, v_i) \in E(N) \quad (4.45)$$

$$f: (v_{i+1}, v_i) \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (4.46)$$

Otra forma de plantear esto es mediante el grafo subyacente que en resumen es el grafo al cual se le agregan arcos en sentido contrario a los arcos presentes en la red, el peso de estos arcos agregados es el flujo del arco presente en la red y el peso de los arcos presentes en la red es la diferencia entre la capacidad y el flujo para dicho arco presente analizado. Con este concepto se plantean, de forma análoga a los caminos  $f$ -incrementables, los semicaminos  $f$ -incrementables que en esencia es el mismo concepto solo que estos caminos son calculados del grafo subyacente.

El teorema del flujo máximo de la red define que: Sea  $f$  un flujo de la red  $N$ ,  $f$  es un flujo máximo ( $f_{max}$ ) si y solo si, no existe ningún camino  $f$ -incrementable (o semicamino  $f$ -incrementable) en la red  $N$ . Este teorema indica que para obtener el flujo máximo se debe buscar caminos  $f$ -incrementables en la red, lo que comúnmente se denomina incrementar el flujo. Un camino  $f$ -incrementable está conformado por arcos no saturados, es decir:

$$f(e) < c(e) \quad (4.47)$$

### 4.6.3. Teorema del flujo máximo y corte mínimo

Este introduce el concepto de corte mínimo que lleva al termino cortadura, para ello una cortadura, que es similar al concepto introducido de conjunto de corte en grafos planos y grafo dual. “Para una red N con s como fuente y t como sumidero, se dice que el conjunto de arcos definido como”.<sup>25</sup>

$$(S, T) \subseteq E(N) \quad (4.48)$$

Donde:

- S y T : son conjuntos de vértices

Dicho conjunto de aristas formara una cortadura de la red N si cumple con”.<sup>26</sup>

- Presentar una partición en el conjunto de vértices de la red N tal que:

$$\begin{aligned} S, T \subseteq V(N) \quad \text{donde } S \neq \emptyset, T \neq \emptyset, S \cup T \\ = V(N) \end{aligned} \quad (4.49)$$

- Si existe dicha partición en los conjuntos de vértices dados se verifica que:

$$s \in S \ \& \ t \in T \quad (4.50)$$

- Para cada arco de (S, T) se tiene uno de sus extremos en S y el otro en T

$$v \in S \ \& \ w \in T, (v, w) \in (S, T) \quad (4.51)$$

<sup>25</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. Op.cit.

<sup>26</sup> Ibíd. y DEVADAS, Srinivas. *Mejora incremental: flujo máximo y cortadura mínima*. [https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr\\_As&t=4s](https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr_As&t=4s). Consulta: noviembre de 2017.

Con estas condiciones establecidas, se menciona otra más que resulta ser muy interesante, dado que presenta dicho conjunto de arcos  $(S, T)$ , esta relaciona el flujo de la red  $(f(N))$  con el conjunto de arcos y que junto con las tres condiciones anteriores convierten a  $(S, T)$  en una cortadura, la cual indica que:

“Si  $f$  es el flujo en la red  $(f(N))$  entonces el flujo a través de la cortadura será  $f(S, T)$ ”.<sup>27</sup>

Esto indica que la suma de todo el flujo suministrado por la fuente  $s$  que es enviado al sumidero  $t$  que cumple con la ecuación 4.49, será el flujo que atraviese todos los arcos que conforman la cortadura.

Puede haber una manera simple de encontrar los arcos de la red  $N$ , que sean candidatos por conformar una cortadura, con ello se necesita el concepto de arco saturado, para lo cual un arco está saturado si:

$$f(e) = c(e) \tag{4. 52}$$

Con esto se plantea que, en una red  $N$  con un flujo  $f$ , los arcos saturados de esta red pueden conformar un conjunto de arcos  $(S, T)$  y este puede ser una cortadura si cumple con las condiciones vistas.

---

<sup>27</sup> DEVADAS, Srinivas. *Mejora incremental: flujo máximo y cortadura mínima*. [https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr\\_As&t=4s](https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr_As&t=4s). Consulta: noviembre de 2017.

La última de las condiciones de una cortadura introduce el tema de flujo de una cortadura y esto asocia la capacidad de la misma, por ello: “Si se tiene una cortadura  $(S, T)$  se define el flujo (ecuación 4.53) y la capacidad de la cortadura (ecuación 4.54) como”.<sup>28</sup>

$$f(S, T) = \sum_{\substack{v \in S \\ w \in T}} f(v, w) \quad (4.53)$$

$$c(S, T) = \sum_{\substack{v \in S \\ w \in T}} c(v, w) \quad (4.54)$$

Todo lo anterior en este inciso, lleva al teorema de flujo máximo y cortadura mínima el cual se define como:

“Sea una red  $N$  con  $s$  como fuente y  $t$  como sumidero, el valor del flujo máximo coincide con la capacidad de una cortadura mínima”.<sup>29</sup>

Lo que este importante teorema dice, es que para una red  $N$ , puedo encontrar la cortadura, que presente la menor capacidad posible, de todas las cortaduras que existan en la red, donde dicha capacidad será igual al flujo máximo en la red  $N$ . Esto genera otra alternativa para la búsqueda del flujo máximo en la red, cuando solo se quiere saber el valor de dicho flujo.

Por lo contrario, si es necesario determinar el estado de la red  $N$  para el flujo máximo se debe proceder con los caminos  $f$ -incrementables o con la

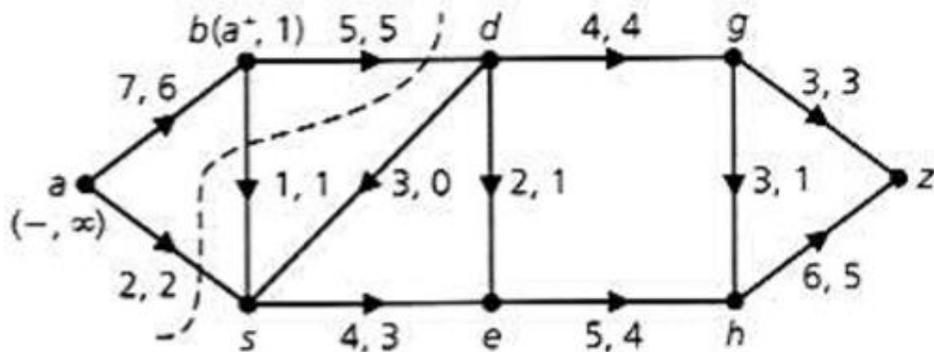
---

<sup>28</sup> JORDAN, Cristina y CONEJERO, José. *Flujo maximo-cortadura minia*, UPV. <https://www.youtube.com/watch?v=Fk8pQQNsvZY&index=34&list=PL6kQim6ljTJs2p7W1xMPheILR-xPuhtJj>. Consulta: noviembre de 2017.

<sup>29</sup> *Ibíd.*

aplicación de los algoritmos de flujo máximo, dentro de los cuales se encuentra el algoritmo de Ford-Fulkerson.

Figura 28. **Ejemplo del teorema de flujo máximo y cortadura mínima, para una red  $N = (G, s, t, c)$  con  $s = a$  y  $t = z$**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 679.

El algoritmo de Ford-Fulkerson implica la utilización de los caminos f-incrementables en la alternativa que se mencionó de los semicaminos f-incrementables, esto conlleva a la utilización del grafo residual de la red  $N$  analizada. El grafo residual como se indicó anteriormente es aquel que se conforma de la red  $N$  analizada más arcos que van en sentido contrario a los arcos existentes en la red  $N$ , para todos los arcos, el peso de cada arco se asigna de la siguiente manera:

- Si el arco es uno existente en la red  $N$  entonces el valor del peso de este se determina de la diferencia de la capacidad de dicho arco menos el flujo actual (flujo que circula en ese momento) por el arco, se puede denominar a esto capacidad actual ( $c_a(e_i)$ ), matemáticamente expresado como.

$$c_a(e_i) = c(e_i) - f(e_i) \quad (4.55)$$

- Si el arco es uno agregado a la red N para la creación del grafo residual, el valor del peso asignado para este arco es el valor del flujo actual entre los vértices que conecta el arco, que a su vez es el mismo que se utiliza para calcular la capacidad actual del arco existente asociado al arco agregado analizado.

Mediante dicha asignación se procede a presentar los pasos que integran el algoritmo de Ford-Fulkerson, los cuales son:

- Paso 1: dada una red N, generar su grafo residual asociado y asignar el peso de cada arco según se vio con anterioridad, con la condición de que para este paso inicial, el valor del flujo actual será de cero en todos los arcos. Se inicializa i con valor de cero.
- Paso 2: determinar un semicamino f-incrementable (P) en el grafo residual que vaya de s hasta t, donde:
  - Si existe proceder con el paso 3
  - Si no existir proceder con el paso 6
- Paso 3: el contador i se le asigna ( $i = i + 1$ ), con el semicamino f-incrementable (P) del paso 2, se calcula el valor del incremento por realizar el cual se determina mediante:

$$\Delta_i = \min_{\substack{(v_o, v) \in P \\ (v, v_f) \in P}} \{p(v_o, v), \dots, p(v, v_f)\} \quad (4. 56)$$

- Lo que la ecuación indica es que se debe escoger como incremento, el menor peso posible de los arcos del semicamino f-incrementable (P) del paso 2.
- Paso 4: se procede a incrementar el valor del flujo actual de los arcos agregados asociados que conforman el semicamino f-incrementable del paso 2, en el valor calculado por la ecuación 4.56 del paso 3 (es decir sumarle a todos los flujos actuales de los arcos agregados asociados del semicamino el valor de  $\Delta_i$  del paso 3) y calcular los nuevos valores de capacidad actual para los arcos existentes que conforman el semicamino f-incrementable del paso 2 mediante la ecuación 4.55.
- Paso 5: calcular el valor del incremento de flujo para la red N ( $\Delta$ ) como:
 
$$\Delta = \Delta_{i-1} + \Delta_i \quad (4.57)$$
  - Y repetir el paso 2
- Paso 6: al no existir más semicaminos f-incrementables, según el teorema de flujo máximo, el flujo actual de la red es el flujo máximo de la red, este se determina mediante:

$$f_{max}(N) = \Delta \quad (4.58)$$

En el algoritmo de Ford-Fulkerson antes explicado, se debe tener en cuenta, que un semicamino f-incrementable puede estar formado por arcos existentes (arcos que conforman la red N) y arcos agregados asociados (arcos que se agregan a los vértices en sentido contrario al arco existente, de ahí el termino asociado). Por lo tanto, el valor del peso de cada arco para realizar el cálculo de incremento de flujo (en el camino), es el valor del peso del arco

existente que conforma el semicamino analizado, aun cuando uno de los arcos sea un arco agregado, para este caso se toma el peso de su arco existente asociado.

#### **4.6.4. Modelos de redes**

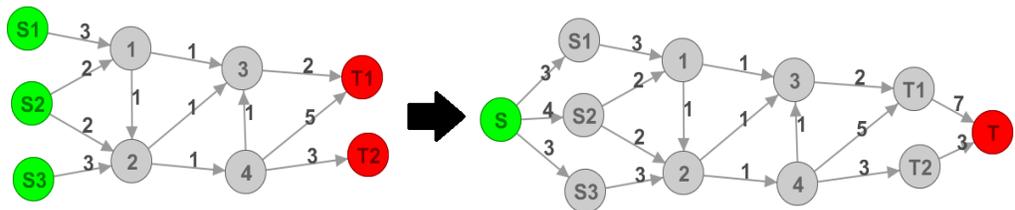
Dentro de las redes de transporte o redes, se presentan distintos modelos en base a su estructura. Al modelar casos de estudio mediante una red  $N$  no siempre cumple con lo definido como red  $N$ , por lo que a continuación se presentan estos casos y la forma en que estas se modifican para cumplir con la definición de una red.

Uno de los casos que se presentan es la red con multifuentes y multisumideros, es decir que contrario a las condiciones de una red  $N$ , esta presenta más de una fuente y más de un sumidero, por lo que es necesario modificar dicho grafo ponderado para que pueda llamarse red  $N$ . La modificación que se realiza en este caso es agregar al grafo ponderado (futura red  $N$ ) dos vértices más los cuales actuarán como fuente y sumidero (únicos), conectándose con las respectivas fuentes y sumideros que ahora serán vértices normales de paso, por lo que deberán cumplir con las propiedades que poseen estos en la red.

El peso de los arcos que conecta la nueva fuente con las antiguas fuentes es determinado por la capacidad que poseían las antiguas fuentes de suministrar flujo a la red, ahora esto se plasma en la capacidad de cada arco que conecta a cada exfuente con la nueva fuente. Esta solución se aplica de la misma forma para los sumideros y el nuevo sumidero. Realizado dicho ajuste al grafo ponderado puede llamarse red  $N$ , con ello podrá resolverse según lo visto en los incisos anteriores. Si en dado caso no se estableciera la capacidad de

las antiguas fuentes, la capacidad de los arcos de la nueva fuente a estas se asume muy grande en proporción a los valores del problema, comúnmente infinito.

Figura 29. **Ejemplo de red multifuente-multisumidero**



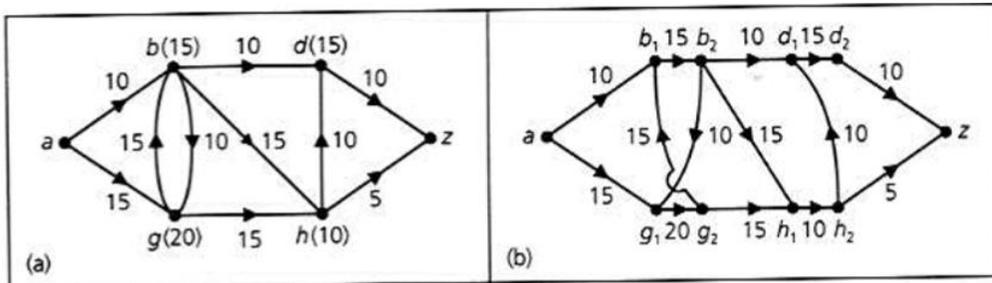
Fuente: elaboración propia, *GraphTea 1.5.4*.

Otro caso que se presenta es el denominado, red con restricciones en los vértices. Para esta red como lo indica el nombre ciertos vértices o todos presentan una restricción, es decir, solo permiten el paso de cierta cantidad de flujo, por lo que para el vértice analizado se viola la ecuación de conservación (ecuación 4.37). La forma de solucionar dicho caso es controlar el flujo de salida del vértice analizado con otro vértice ficticio que se agrega, con ello se preserva la ecuación de conservación y se permite restringir el flujo que pasa a través del vértice.

El nuevo vértice ficticio que se agrega se conecta con todos los arcos que salían antes del vértice analizado y a este vértice analizado solo se conectan los arcos que llegan a él, el paso crucial de esta solución es que el vértice analizado y el vértice ficticio agregado se conectan por medio de un arco que va del vértice analizado al vértice ficticio, cuya capacidad es determinada por la cantidad de flujo que se desea restringir en dicho vértice.

La capacidad de este arco de conexión restringe el flujo que puede circular en los arcos de salida debido a la ecuación de conservación aplicada al vértice ficticio agregado.

Figura 30. **Ejemplo de una red con restricciones en los vértices, donde  $s = a$ ,  $t = z$  y los números en paréntesis son la restricción de flujo**



Fuente: GRIMALDI, Ralph. *Matemática discreta y combinatoria*. p 681.

## **5. ANÁLISIS PROPUESTO PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE POTENCIA**

### **5.1. Medidas y métricas de las redes**

El concepto de “red” (para este capítulo) tal como se definió en el capítulo 4, es un grafo que cumple con las condiciones expuestas a excepción de condiciones que forman las diferencias entre ambas. La diferencia entre las redes de transporte y las “redes” también llamadas redes complejas, es que estas no tienen que ser obligatoriamente grafos dirigidos, poseen además multifuentes y multisumideros, trabajando estas redes tal cual forma poseen, sin necesidad de recurrir a las técnicas de modelación del capítulo 4.

Las redes complejas poseen ciertas propiedades estructurales (topológicas) a diferencia de las redes de transporte que se deben analizar de distinta manera (diferencia importante), es aquí donde las distribuciones de estas redes se vuelven cruciales para que por medio de la estadística y probabilidad se obtenga la información necesaria para comprender dicha estructura.

Estas características hacen a estas “redes” idóneas para modelar los sistemas de la naturaleza y ciencia, de aquí que una clasificación sea por medio de los sistemas que modelan dentro del cual los sistemas de potencia se clasifican dentro de redes tecnológicas.

Las medidas y métricas de las redes ayudan a “calcular una variedad de cantidades (valores) o medias útiles, que tienen como fin capturar las características particulares de la topología de la red, es decir, ayudan a cuantificar la estructura de la red”<sup>30</sup>. Dentro de las cuales se presentan en los párrafos siguientes, para esta tesis.

Centralidad de grado: La centralidad se introduce como el centro de la red área de concentración de vértices a ese vértice o vértices de mayor importancia en la red. Esta medida utiliza el grado de un vértice como medida de centralidad, esto indica que un vértice con un alto grado es aquel que tiene muchas conexiones con otros vértices de la red, haciéndolo una influencia entre los vértices debido a la alta conectividad que tiene (muchos vecinos).

Centralidad de cercanía: esta centralidad es más conocida como *Closeness centrality* por su denominación en inglés. “Esta mide la distancia promedio desde un vértice a los otros vértices”.<sup>31</sup> Una de las herramientas utilizadas en esta medida es la longitud del camino geodésico entre dos vértices ( $d_{ij}$ ), este camino geodésico no es más que el camino más corto entre dos vértices de una red. La fórmula para calcular esta centralidad es la siguiente.

$$C_i^{\ell} = \frac{n}{\sum_j^n d_{ij}} \quad (5.1)$$

Donde:

- $d_{ij}$ : longitud del camino geodésico entre los vértices  $i$  y  $j$ .
- $n$ : número de vértices de la red.

---

<sup>30</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 167.

<sup>31</sup> *Ibíd.* p 183.

Centralidad intermedia: esta centralidad es conocida como *Betweenness centrality* por su denominación en inglés. “Esta centralidad mide el valor en que un vértice se encuentra contenido en los caminos entre otros vértices”<sup>32</sup>. La forma de interpretación de esta medida es mediante el envío de información entre vértices, por lo que un vértice con un alto valor de esta centralidad indica que es un vértice por el cual pasa o fluye mucha información de camino al vértice destino. Estos vértices se dice que tienen una alta influencia en la red, lo que genera una atención para prevenir la desconexión de estos. Matemáticamente se expresa como:

$$x_i = \left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{st} \left(\frac{n_{st}^i}{g_{st}}\right) \quad (5.2)$$

Donde:

- $n_{st}^i$ : el número de caminos geodésicos desde s a t que pasan a por i.
- $g_{st}$ : el número total de caminos geodésicos desde s a t.
- n: número de vértices de la red.

Coeficiente de agrupamiento: el coeficiente de agrupamiento local “mide la probabilidad promedio de que un par de vecinos del vértice i, sean vecinos uno del otro”.<sup>33</sup> La forma de calcular el coeficiente de agrupamiento local es la siguiente:

$$C_i = \frac{2 L_i}{k_i(k_i - 1)} = \frac{R_i}{k_i - 1} \quad (5.3)$$

---

<sup>32</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 187.

<sup>33</sup> *Ibíd.* p 204.

Donde:

- $L_i$ : “representa el número de aristas entre vecinos del nodo  $i$ ”<sup>34</sup>
- $R_i$ : es la redundancia del vértice  $i$ , la cual se define como el número promedio de conexiones desde cada uno de los vecinos de  $i$  hasta los otros vecinos de  $i$ , sin contar la conexión con el vértice  $i$ .

Otra definición del coeficiente de agrupamiento es el coeficiente de agrupamiento global propuesto por Watts y Strogatz, que en este trabajo de graduación se toma el enfoque del coeficiente de agrupamiento promedio, también llamado el coeficiente de agrupamiento de la red, matemáticamente expresado como:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n C_i \right) \quad (5.4)$$

El anterior coeficiente, en la literatura donde se presenta, tiende a generar confusión dado que el nombre de coeficiente de agrupamiento global tiene dos enfoques: el visto en la ecuación 5.4 y el enfoque basado en triángulos y tripletes; estos dos enfoques no son equivalentes.

La solución optada en este trabajo de graduación es la dada por Barabasi, quien denomina al coeficiente de la ecuación 5.4 como coeficiente de agrupamiento promedio, y al coeficiente basado en triángulos y tripletes como coeficiente de agrupamiento global, también llamado relación de trillizos transitivos por su traducción al español (*ratio of transitive triplets* en inglés). En

---

<sup>34</sup> BARABASI, Albert-Làszlò. *Ciencia de las redes*. <http://networksciencebook.com/chapter/2#clustering>. Consulta: marzo de 2018.

este trabajo de graduación se usa el denominado coeficiente de agrupamiento promedio.

Excentricidad: “esta medición indica qué tan lejos está un vértice del vértice más alejado de él en la red”.<sup>35</sup> La herramienta por utilizar en esta medida es el camino geodésico más grande entre un vértice de la red y cualquiera de los otros vértices de la misma red.

Diámetro de la red: “esta medida indica la longitud del camino geodésico más grande entre dos vértices cualesquiera en la red”.<sup>36</sup> En otras palabras, es la máxima excentricidad de la red.

Radio de la red: “esta medida indica la longitud del camino geodésico más pequeño entre dos vértices cualesquiera en la red”.<sup>37</sup> En función de la excentricidad se dice que el radio es la mínima excentricidad de la red.

Densidad: la densidad de la red “es la fracción (porcentaje) de aristas que se encuentra presente actualmente en la red en base al número máximo posible de aristas de un grafo simple”<sup>38</sup>, en este caso la red. Matemáticamente se expresa como se muestra.

$$\rho = \frac{2 m}{n(n - 1)} \quad (5. 5)$$

---

<sup>35</sup> SYMANSKI, Boleslaw. y KUZMIN, Konstantin. *Introducción a las herramientas de Gephi para análisis y visualización de redes*. <https://slideplayer.com/slide/11624857/>. Diapositiva 21. Consulta: marzo de 2018.

<sup>36</sup> *Ibíd.*

<sup>37</sup> *Ibíd.*

<sup>38</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 126.

Donde:

- $m$ : es el número total de aristas de la red
- $n$ : es el número total de vértices de la red

Distribución de grado: esta medida es considerada una propiedad de las redes y no cualquier propiedad si no que la más fundamental de una red, dado que permite clasificar las redes en modelos con características especiales, uno de estos será estudiado en el siguiente inciso. “Esta distribución proporciona la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar en la red tenga un grado  $k$ ”.<sup>39</sup> Dado que es una distribución de nodos se calcula como una distribución de probabilidad, “donde  $p_k$  es la fracción de vértices en dicha red que tiene el grado  $k$ ”.<sup>40</sup> Expresado matemáticamente como.

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (5.6)$$

Donde:

- $N_k$ : es el número de nodos (vértices) de grado  $k$  en la red
- $N$ : es el número total de nodos (vértices) de la red

Esta probabilidad se grafica en función del grado del vértice ( $k$ ), para todos los grados presentes en la red, de manera que se obtenga una curva de distribución de grado que se analiza mediante distribuciones estadísticas para modelar su comportamiento. Dentro de las distribuciones encontradas está la distribución de Poisson y la distribución de ley de potencia (*Power law distribution* en inglés), estas dos son las distribuciones con las que se analizan los tipos de modelos de redes más importantes: modelo de red aleatoria

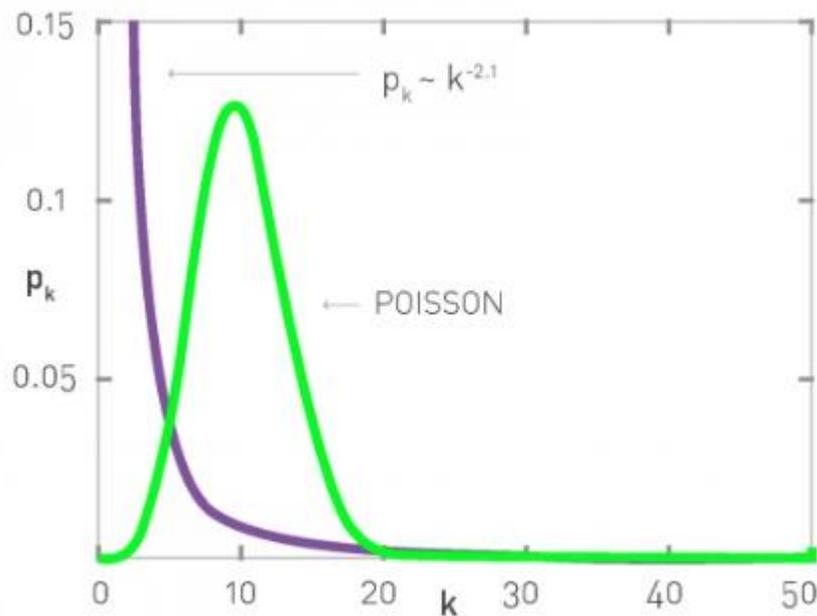
---

<sup>39</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*.  
<http://networksciencebook.com/chapter/2#degree>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>40</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 393.

(distribución de Poisson) y modelo de red libre de escala (distribución de ley de potencia).

Figura 31. **Ejemplo de distribución de grado (distribución de Poisson en verde y distribución de ley de potencia en morado)**



Fuente: BARABÁSI, Albert. *Network Science*.

(<http://networksciencebook.com/chapter/4#hubs>). Consulta: marzo de 2018.

## 5.2. Modelos de red: red aleatoria

El modelo de red aleatoria (por su traducción al español) es comúnmente llamado *random network* como también *random graph* (nombres dados en inglés). La red aleatoria o grafo aleatorio “es un modelo de red en el cual algunos conjuntos de parámetros específicos toman valores fijos, pero la red es aleatoria en otros aspectos”.<sup>41</sup>

<sup>41</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 389.

Esta definición es general dado que en esta red existen dos modelos matemáticos que tienen su propia definición, los cuales son:

- $G(N, M)$ : se define como “una red en la que  $N$  nodos etiquetados están conectados con  $M$  enlaces colocados al azar”.<sup>42</sup> Lo cual indica que, basado en la definición de red aleatoria, para este modelo se “fija solo el valor del número de vértices ( $N$ ) y el número de aristas ( $M$ )”.<sup>43</sup>
- $G(N, p)$ : este modelo se define como “una red en la que cada par de ( $N$ ) nodos etiquetados está conectado con probabilidad  $p$ ”.<sup>44</sup> Refiriéndose a la definición general en este modelo se “fija el valor de la probabilidad de las aristas que une a los vértices”.<sup>45</sup>

Para este trabajo de graduación se tratará sobre el modelo  $G(N, p)$  y los aspectos importantes en función a la información que obtiene de la red aleatoria.

### 5.2.1. Número de aristas y grado promedio

En la red aleatoria, siguiendo el modelo matemático  $G(N, p)$ , se puede obtener el número promedio de aristas que tendrá un grafo con la siguiente ecuación.

$$\langle m \rangle = p \left( \frac{N(N-1)}{2} \right) \quad (5.7)$$

---

<sup>42</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*.

<http://networksciencebook.com/chapter/3#random-network>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>43</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 389.

<sup>44</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*.

<http://networksciencebook.com/chapter/3#random-network>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>45</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 390.

Donde:

- $p$ : es la probabilidad de que exista una arista que una a un par de vértices
- $N$ : es el número total de vértices de la red

Dentro del análisis del número de aristas para una red aleatoria se puede obtener una estimación del número máximo de aristas posibles en una red, por medio de la expresión matemática siguiente.

$$m_{\max} = \frac{N(N - 1)}{2} \quad (5.8)$$

De este concepto de número de aristas sirve como una herramienta que permite determinar el grado promedio de una red (el cual como se vio en el capítulo 4 se puede obtener como la media de todos grados de la red) de manera rápida, según la siguiente expresión.

$$\langle k \rangle = \frac{2 \langle m \rangle}{N} = p(N - 1) \quad (5.9)$$

Este grado promedio de la red también suele representarse por “ $c$ ”, usando el último término de la ecuación 5.9 para determinarlo, dado que para este modelo matemático se tiene un valor fijo de  $p$ .

### 5.2.2. Distribución de grado

Como se vio en el apartado 5.1, esta distribución es muy importante. En las redes aleatorias con modelo matemático  $G(N, p)$ , “la probabilidad ( $p_k$ ) de

que un vértice escogido al azar tenga grado  $k$ <sup>46</sup> viene determinado por la siguiente ecuación.

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (5.10)$$

Dado que se presenta como una distribución de probabilidad la ecuación 5.10 que representa la distribución de grado de las redes aleatorias corresponde con una distribución binomial. La distribución binomial depende de dos parámetros los cuales son el tamaño del sistema analizado ( $N$  para este caso) y la probabilidad  $p$ , explicada con anterioridad.

La distribución de probabilidad de la ecuación 5.10, la cual tiene un comportamiento binomial, presenta un comportamiento distinto cuando dicha ecuación se encuentra en “el límite al cumplir con la siguiente desigualdad”.<sup>47</sup>

$$\langle k \rangle \ll N \quad (5.11)$$

El comportamiento de la ecuación 5.10 en dicho límite (ecuación 5.11) se modela como una distribución de Poisson la cual se representa matemáticamente como sigue.

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (5.12)$$

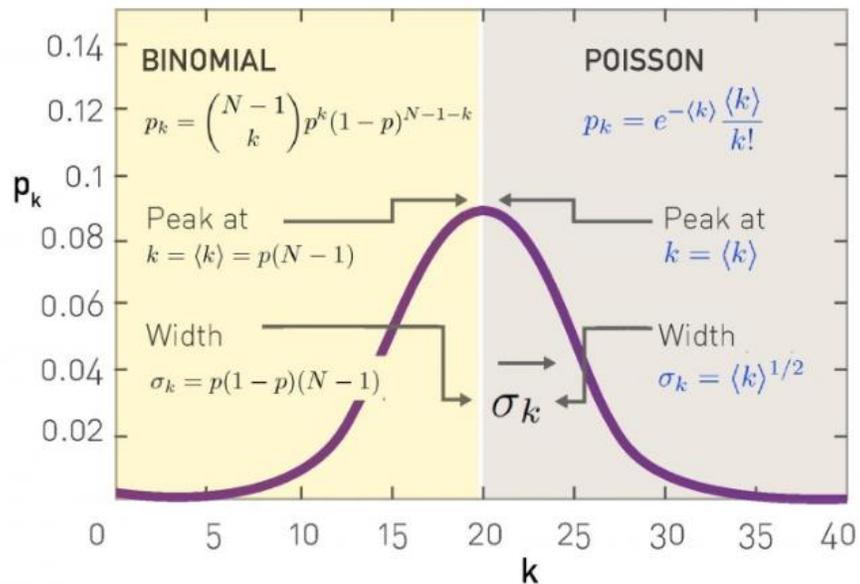
De acuerdo con este comportamiento para la distribución de grado de una red aleatoria con modelo  $G(N, p)$  con el límite de  $N$  grande, se analiza mediante una distribución de Poisson expresada matemáticamente por la ecuación 5.12.

---

<sup>46</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*. <http://networksciencebook.com/chapter/3#degree-distribution>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>47</sup> *Ibíd.*

Figura 32. **Ejemplo de distribución de grado para una red aleatoria (Distribución binomial contra distribución de Poisson)**



Fuente: BARABÁSI, Albert. *Network Science*..

(<http://networksciencebook.com/chapter/3#degree-distribution>). Consulta: marzo de 2018.

En las redes aleatorias una de las medidas utilizadas es el coeficiente de agrupamiento, que “es una medida de transitividad en la red definiéndose como la probabilidad de que dos vecinos de un vértice también sean vecinos uno de otro en la red”.<sup>48</sup> (Visto en el apartado 5.1), la diferencia de esta definición con la dada anteriormente es la expresión matemática con la que se determina el coeficiente de agrupamiento de la red, para estas redes se calcula como.

$$C = \frac{\langle k \rangle}{N - 1} \quad (5.13)$$

<sup>48</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 395.

### 5.2.3. Componente gigante y pequeñas componentes

La componente gigante “es un subconjunto de vértices de la red en donde cada uno de los cuales es alcanzable desde otros a lo largo de un camino, y que contiene un número de vértices que aumenta con el tamaño de la red en función de una potencia positiva de  $N$ ”.<sup>49</sup> Esta componente surge en la evolución de una red hasta llegar a la red totalmente formada (proceso de surgimiento de la red analizada).

Dentro de la evolución de la red con modelo  $G(N, p)$ , se tiene una fase importante la cual es llamada fase de transición definiéndose “como el cambio repentino que experimenta la componente gigante, desde un tamaño constante (menor) a un tamaño extenso en un valor específico de la probabilidad  $p$ ”.<sup>50</sup> También esta fase toma en cuenta un nuevo parámetro denominado  $S$  (como se verá a continuación).

De forma simple la red comienza como un número  $N$  de vértices con aristas nulas ( $p = 0$ ) y conforme se aumenta  $p$  se enlaza dichos vértices, hasta estar todos enlazados ( $p = 1$ ). En este proceso se presenta la componente gigante que emerge cuando se presenta un valor específico de  $\langle k \rangle$  el cual es:

$$\langle k \rangle = 1 \quad (5.14)$$

Con este valor se establece la condición del valor de  $p$  para el cual se obtiene la ecuación 5.14, dado que es  $p$  la que se manipula, ese valor de  $p$  se denomina punto crítico, el cual está en función del número de vértices  $N$  de la red, determinándose por la siguiente expresión:

---

<sup>49</sup> NEWMAN, Mark., BARABASI, Albert-László., WATTS, Duncan. *La estructura y dinámica de redes*. p 230.

<sup>50</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 396.

$$p_c = \frac{1}{N} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, la condición antes mencionada se expresa como:

$$p = p_c \quad (5.16)$$

Con lo anteriormente explicado, se determina un nuevo parámetro que nos indica la fracción de nodos (vértices) que pertenecen a la componente gigante durante este proceso de evolución, se denota por  $S$ . Para calcular  $S$  se utiliza la siguiente expresión.

$$S = 1 - e^{-\langle k \rangle(S)} \quad (5.17)$$

Este parámetro indica “el tamaño de la componente gigante como fracción del tamaño de la red en el límite del gran tamaño de la red, para cualquier valor dado de  $\langle k \rangle$ ”.<sup>51</sup> Lo antes mencionado es importante dado que mediante  $S$  es que se determina la ecuación 5.14, al considerar ciertas condiciones. También se define el parámetro  $N_G$  como “el tamaño del grupo más grande en función de  $N$ ”<sup>52</sup> presente en la evolución. Se puede relacionar los dos parámetros mediante la siguiente expresión.

$$S = \frac{N_G}{N} \quad (5.18)$$

Para tener un mejor panorama de cómo evoluciona la red se presenta la siguiente tabla que indica los regímenes (estados de la red) en los que va evolucionando la red, tomando como referencia los valores presentes.<sup>53</sup>

---

<sup>51</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 397.

<sup>52</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/3#evolution-network>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>53</sup> *Ibíd*

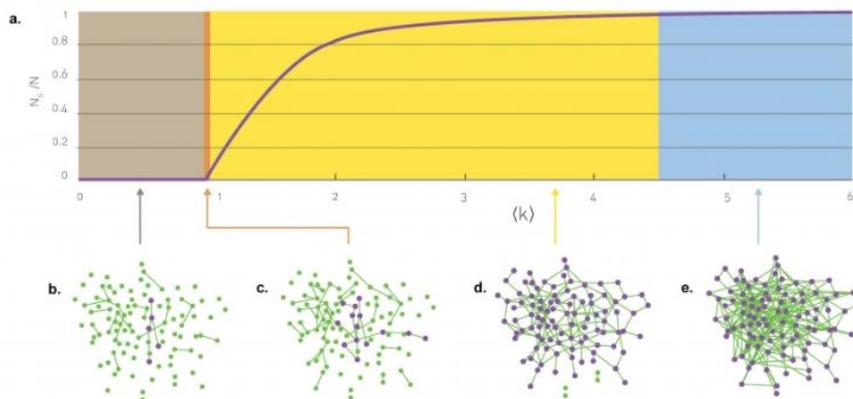
Tabla I. **Comportamiento de parámetros en la evolución de la red**

Régimen	Valor de $p$	Valor de $\langle k \rangle$	Valor de $S$	Valor de $N_G$
<b>Régimen Subcrítico</b>	$p < p_c$	$\langle k \rangle < 1$	$S = 0$	$N_G \sim \ln N$
<b>Punto crítico</b>	$p = p_c$	$\langle k \rangle = 1$	$S = 0$	$N_G \sim N^{2/3}$
<b>Régimen Supercrítico</b>	$p > p_c$	$\langle k \rangle > 1$	$S = 1 - e^{-\langle k \rangle S}$	$N_G \sim (p - p_c)N$
<b>Régimen Conectado</b>	$p > \frac{\ln N}{N}$	$\langle k \rangle \geq \ln N$	$S \cong 1$	$N_G \cong N$

Fuente: elaboración propia.

Para representar dicha evolución de la red y aparición de la componente gigante se puede utilizar una gráfica en la cual se plotea  $S$  en función del grado promedio, evidenciando los regímenes. La figura siguiente muestra dicha gráfica y el comportamiento de la red.

Figura 33. **Ejemplo de gráfica de  $\langle k \rangle$  vs  $S$  (evolución de la red)**



Fuente: BARABÁSI, Albert. *Network Science*..

(<http://networksciencebook.com/chapter/3#evolution-network>). Consulta: marzo de 2018.

Otro punto de vista de la evolución de la red indica que en lugar de analizar la componente gigante se centre el análisis en las componentes de la red que no pertenecen a la componente gigante. Esto se debe a que en el proceso de evolución se vio que al emerger la componente gigante esta no abarca todos los vértices de la red hasta entrar en el régimen conectado. Estas componentes que no pertenecen a la componente gigante se denominan pequeñas componentes las cuales se suelen definir como “las componentes cuyo tamaño no aumenta en proporción al tamaño de la red”.<sup>54</sup>

El tamaño de estas pequeñas componentes se puede calcular a partir de la distribución de probabilidad que un vértice cualquiera pertenezca a una componente pequeña de tamaño  $s_c$ , mediante una deducción matemática se puede obtener la función que indica el tamaño de dichas componentes. De manera simple en base a lo anterior se obtiene una fórmula para determinar el tamaño promedio del componente al que pertenece un vértice elegido al azar en función del grado promedio  $\langle k \rangle$  y  $S$ , como se muestra a continuación.

$$\langle s_c \rangle = \frac{1}{1 - \langle k \rangle + \langle k \rangle S} \quad (5.19)$$

Otra medida que es de interés en este tema es similar a  $\langle s_c \rangle$ , la cual indica el tamaño promedio de una componente, calculándose por la siguiente expresión.

$$R = \frac{2}{2 - \langle k \rangle + \langle k \rangle S} \quad (5.20)$$

---

<sup>54</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 401.

Al analizar estas dos ecuaciones 5.19 y 5.20, parecen similares e indican un tamaño promedio, pero con la diferencia que en su definición una se calcula sobre la componente a la que pertenece un vértice escogido y en la otra sobre una componente escogida. Las diferencias entre ambas se evidencian al evaluar estas ecuaciones con la condición de la componente gigante (ecuación 5.14). Los resultados de ambas son distintos para la ecuación 5.19, esta diverge hacia más infinito mientras que la ecuación 5.20 converge en un valor exacto ( $R = 2$ ).

En relación con estas diferencias entre  $\langle s_c \rangle$  y  $R$  se dice: que “ $\langle s_c \rangle$  no es estrictamente el tamaño promedio de una componente de la red, sino que es el tamaño promedio de la componente a la que pertenece un vértice escogido al azar” (vértice analizado).<sup>55</sup> De manera simple, si se quiere determinar el tamaño promedio de las componentes (pequeñas componentes) de una red se debe utilizar  $R$ , por lo contrario, si se quiere averiguar el tamaño promedio de una componente (pequeña componente) en función de escoger una en especial y a partir de esta estimar para la red entera, se utiliza  $\langle s_c \rangle$ .

### 5.3. Robustez de la red

La robustez de la red parte del concepto de percolación (traducción al español del término *percolation*). En una red el término percolación se define como “el proceso de tomar una red cualquiera e ir removiendo una fracción de vértices o aristas (en el caso de vértices se remueven las aristas que conectan con estos)”.<sup>56</sup> Cuando esta percolación se da al remover los vértices se le denomina percolación de vértices o percolación de sitio (traducción del término *site percolation* en inglés). Por lo contrario, al remover las aristas esta se

---

<sup>55</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 409.

<sup>56</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 613.

denomina percolación de aristas o percolación de enlaces (traducción del término *bond percolation* en inglés). En este trabajo de graduación se centra sobre la percolación de vértices.

La conexión entre el proceso de percolación y la robustez de la red se concentra en que la percolación pone a prueba la estructura de la red donde se efectúa. Al analizar cómo esta responde ante la remoción de fracciones de ella, brinda mayor entendimiento sobre qué tan fuerte o firme es la red ante posibles “fallas” o “ataques”.

En otras palabras, la percolación genera colapsos en la red y como esta responde a estos, indica su robustez ante estas acciones. La aplicación de robustez en las redes reales brinda gran información sobre lo segura que son, en el caso eléctrico como estas responden ante fallas o apagones generales.

Profundizando sobre el proceso de percolación de vértices existen dos enfoques: el primero es la eliminación aleatoria uniforme de vértices y el segundo es la eliminación no uniforme de vértices. Comúnmente el primer enfoque se denomina eliminación aleatoria y el segundo ataques. A continuación, se explica cada enfoque.

### **5.3.1. Eliminación aleatoria uniforme de vértices**

La eliminación aleatoria uniforme de vértices es el proceso de percolación en donde los vértices removidos son elegidos al azar, este proceso se parametriza por medio de una probabilidad  $\varphi$  definida como la probabilidad de que un vértice esté presente o funcionando en la red. También se suele decir que los vértices funcionales (presentes) están ocupados y de este término se le

denomina a esta probabilidad como probabilidad de ocupación. Los valores límites de esta probabilidad son:

$$\varphi = 1 \quad (5.21)$$

$$\varphi = 0 \quad (5.22)$$

La ecuación 5.21 indica que todos los vértices de la red están ocupados y no se ha removido a ninguno mientras que la ecuación 5.22 indica que no hay vértices en la red que estén ocupados, es decir se han removido todos los vértices.

La variación del anterior parámetro presenta un comportamiento de la red muy similar al comportamiento de evolución de la red. “Cuando  $\varphi$  tiende a valores grandes los vértices de la red tienden a conectarse juntos, formando una componente gigante (traducción del inglés *giant clúster*) que abarca la mayoría de la red. Pero si  $\varphi$  decrece en su valor, se llega a un punto en el que la componente gigante se rompe quedando solo pequeñas componentes”.<sup>57</sup>

“La formación o disolución de la componente gigante es llamada transición de percolación, aquí si la red contiene a la componente gigante se dice que está “filtrada” (traducción del término *percolates* en inglés) y en el punto donde la transición de percolación ocurre se denomina umbral de percolación”<sup>58</sup>.

Una de las conclusiones de este proceso es “que la presencia de la componente gigante es un indicador de que una red cumple al menos

---

<sup>57</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 615.

<sup>58</sup> *Ibíd.*

parcialmente con su función prevista, mientras que el tamaño de la componente gigante dice cuanto (fracción de vértices) está funcionando de la red”.<sup>59</sup>

La modelación matemática para este enfoque de eliminación aleatoria uniforme se presenta estrechamente ligado a la probabilidad de ocupación y al concepto de tamaño de la componente gigante. Uno de los puntos importantes por determinar en esta transición de percolación es aquel valor de  $\varphi$  para el cual ocurre el umbral de percolación denominado el valor crítico, denotado por  $\varphi_c$  calculado por la siguiente expresión.

$$\varphi_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \quad (5. 23)$$

Para una red con distribución de Poisson la ecuación 5.23 se simplifica como se muestra.

$$\varphi_c = \frac{1}{\langle k \rangle} \quad (5. 24)$$

Como dato importante en el apartado de métricas y medidas de redes se habló de otro modelo de red además de la red aleatoria, el cual es llamado redes libres de escala para estos modelos el valor crítico para el umbral de percolación es cero (en la realidad aproximado a cero). Los valores importantes de  $\varphi_c$  es que entre menor sea el valor de este la red puede tolerar una mayor fracción de vértices removidos, lo que se traduce directamente que la red en análisis es robusta contra las “fallas aleatorias” (eliminación aleatoria).

---

<sup>59</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 615.

Cuando se habla de este  $\varphi_c$  y la transición de percolación se introduce el concepto de transición de percolación inversa el cual representa la transición de percolación ya mencionada solo que, con una forma distinta de visualizar, es decir, que en lugar de utilizar  $\varphi$  como la probabilidad de ocupación esta se redefine como la probabilidad de no ocupación, es, centrándose en “la fracción de vértices que son removidos, denotándose por  $f$ ”.<sup>60</sup> Determinándose mediante la siguiente expresión.

$$f = 1 - \varphi \quad (5. 25)$$

En base al anterior concepto el valor crítico  $\varphi_c$  pasa a denotarse como  $f_c$  determinado por la siguiente expresión.

$$f_c = 1 - \varphi_c \quad (5. 26)$$

Por lo tanto, según la ecuación 5.26 los valores importantes se centran en un mayor  $f_c$  lo que indica directamente mayor robustez para la red.

El otro concepto importante en esta modelación es el tamaño de la componente gigante denotada  $S$  definida como “la fracción de vértices de la red que pertenecen a la componente gigante”.<sup>61</sup> Determinándose mediante la siguiente ecuación.

$$S = \varphi \left[ 1 - \left( \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k \right) \right] \quad (5. 27)$$

---

<sup>60</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/8#percolation-theory>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>61</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 616.

Donde:

- $p_k$ : es la distribución de grado de la red (para las redes aleatorias ecuación 5.12).
- $u$ : es la probabilidad promedio de que un vértice no esté conectado al componente gigante por medio de un vecino.
- $k$ : es el grado del vértice analizado durante el proceso de sumatoria.

La variable  $u$  se determina mediante la siguiente ecuación:

$$u = 1 - \varphi + \varphi \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(k+1)p_{k+1}}{\langle k \rangle} \right) u^k \right] \quad (5.28)$$

Este método de cálculo para estas medidas importantes en la transición de percolación, son adaptables a la transición de percolación inversa al sustituir  $\varphi \rightarrow f$ . Las ecuaciones 5.26 y 5.27 son obtenidas a partir de una “función generadora de distribución de grado”.<sup>62</sup> Otro de los métodos para determinar las ecuaciones que calculan las mediciones de la transición de percolación se explican en el siguiente párrafo.

“Para cuantificar la naturaleza de esta fase de transición se concentra en tres cantidades”,<sup>63</sup> las cuales son las siguientes:

Tamaño promedio de los grupos  $\langle s_c \rangle$ , que acorde con la teoría de percolación es el tamaño promedio de todos los grupos finitos. Determinado por la siguiente expresión.

---

<sup>62</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 616.

<sup>63</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/8#percolation-theory>. Consulta: marzo de 2018.

$$\langle s_c \rangle \sim |\varphi - \varphi_c|^{-\gamma_p} \quad (5.29)$$

Parámetro de orden  $P_\infty$ , es la probabilidad de que un vértice seleccionado al azar pertenezca a la componente gigante. Determinado por la siguiente expresión.

$$P_\infty \sim (\varphi - \varphi_c)^{\beta_p} \quad (5.30)$$

El parámetro anterior dada su definición es un equivalente del parámetro  $S$  calculado por la ecuación 5.27, el parámetro de la ecuación 5.29 es para las componentes pequeñas que existen dado que la componente gigante no ocupa toda la red durante la transición.

Los exponentes  $\gamma_p$  y  $\beta_p$  son llamados los exponentes críticos ya que caracterizan el comportamiento del sistema cerca del valor crítico  $\varphi_c$ . Para redes aleatorias estos exponentes toman valores como se muestra.

$$\gamma_p = 1; \beta_p = 1 \quad (5.31)$$

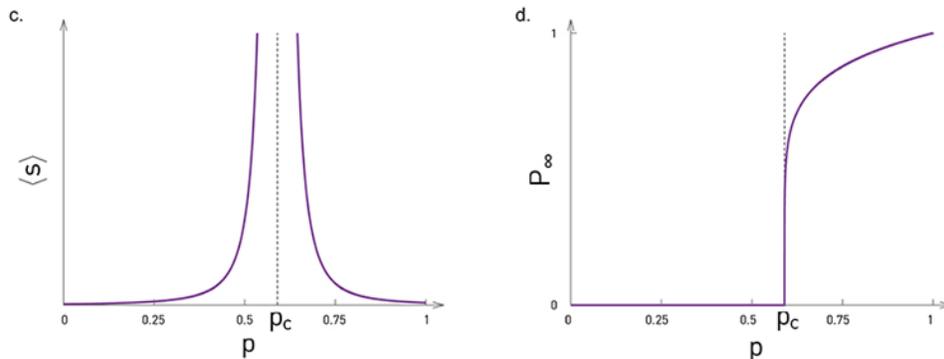
El parámetro determinado mediante las ecuaciones 5.30 es adaptable a los términos de transición de percolación inversa generando la siguiente ecuación.

$$P_\infty \sim |f - f_c|^{\beta_p} \quad (5.32)$$

Estos parámetros dados para transición de percolación inversa con respecto a la transición de percolación tienen un comportamiento contrario es decir las gráficas de estas ecuaciones sobre todo la 5.32 y 5.30, se podría decir que la 5.32 es una reflexión en el eje y de la ecuación 5.30 teniendo como eje el

valor crítico. A continuación, se muestran las gráficas de los parámetros mencionados en transición de percolación.

Figura 34. **Ejemplo de gráficas de  $\langle s_c \rangle$  y  $P_\infty$  (Teoría de percolación).**



Fuente: BARABÁSI, Albert. *Network Science*

(<http://networksciencebook.com/chapter/8#percolation-theory>). Consulta: marzo de 2018.

### 5.3.2. Eliminación no uniforme de vértices

Este enfoque de remover vértices se da de manera dirigida, es decir, a nodos de especial interés según la propiedad que se escoja de los vértices serán removidos antes que otros. Esto se puede entender como la elaboración de una lista en orden de la propiedad seleccionada, indicando de esta manera el orden de los nodos por remover. Una de las propiedades más utilizadas en el grado de un vértice, así los vértices de grado alto son removidos primero y consecutivamente. Dentro de este enfoque se redefine el término de  $\varphi$  a un  $\varphi_k$  que es “la probabilidad que un vértice con grado  $k$  está presente u ocupado en la red analizada”.<sup>64</sup>

<sup>64</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 630.

El comportamiento de este parámetro es como sigue, si todos los vértices de la red tienen un grado que cumple con la siguiente condición, se obtiene el valor  $\varphi_k$  dado.

$$\varphi_k = \begin{cases} 1, & k < k_o \\ 0, & k \geq k_o \end{cases} \quad (5.33)$$

Donde:

- $k_o$ : es un grado de valor constante fijado (según analista)

Entonces, para el valor cero de  $\varphi_k$  se concluye que se han eliminado de la red todos los vértices con grado mayor o igual a  $k_o$ . Por lo que no se maneja un valor crítico, sino uno promedio de  $\varphi_k$ , el cual se define como el promedio de la probabilidad de que un vértice este ocupado, denotado por  $\bar{\varphi}$  determinándose por la siguiente ecuación.

$$\bar{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi_k \quad (5.34)$$

Otro parámetro importante por determinar en este enfoque es el tamaño de la componente gigante  $S$ . Determinando dicho parámetro por la siguiente ecuación.

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi_k (1 - u^k) \quad (5.35)$$

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(k+1)p_{k+1}}{\langle k \rangle} \right) (1 - \varphi_{k+1} + \varphi_{k+1}u^k) \quad (5.36)$$

Donde:

- $u$ : se define como “la probabilidad promedio de que un vértice no esté conectado a la componente gigante por medio de un vecino”.<sup>65</sup>

Esta probabilidad se determina mediante la siguiente expresión.

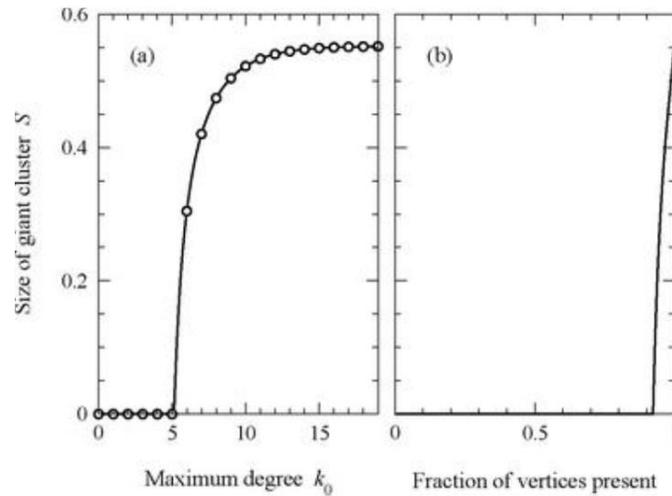
Una información importante en este enfoque es que las redes aleatorias tienen un comportamiento similar para los dos tipos de enfoque variando mínimamente. Por el contrario, las redes libres de escala en este tipo de enfoque muestran un comportamiento similar al de las redes aleatorias, lo que indica que los comportamientos en los dos tipos de enfoques para las redes libres de escala son distintos.

En términos de robustez para los dos tipos de enfoque las redes aleatorias muestran robustezes similares, mientras que las redes libres de escala son altamente robustas para el enfoque de eliminación aleatoria, pero para el enfoque de eliminación dirigida son considerablemente menos robustas. A continuación, se muestran las gráficas del tamaño de la componente gigante en función del grado y de la fracción de vértices no removidos.

---

<sup>65</sup> NEWMAN, Mark. *Redes una introducción*. p 630.

Figura 35. **Ejemplo de gráficas de S frente a k y S frente a fracción de vértices**



Fuente: NEWMAN, Mark. *Networks an introduction*. p 633.

#### 5.4. Comunidades

En el estudio de redes (ciencia de la red traducción del término en inglés *network science*) al enfatizar en la estructura de estas surge un tema de interés, el cual presenta cómo se agrupan los vértices dentro de esta. La comunidad se define como “un subgrafo local densamente conectado en una red”.<sup>66</sup> La anterior definición indica una estructura de comunidad en las redes. Conceptualmente este término se describe como “la aparición de grupos de vértices densamente conectados (comunidades), con conexiones más breves entre grupos”.<sup>67</sup>

Para describir esta estructura de comunidades y detectar estas comunidades surgen dos líneas de estudio: la primera de ellas llamada

<sup>66</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes* <http://networksciencebook.com/chapter/9#basics>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>67</sup> NEWMAN, Mark. *Modularidad y estructura de comunidades en redes*. p 1.

particionamiento de grafo (traducción del término en inglés *graph partitioning*) y el segundo comúnmente llamado detección de estructura de comunidades. Para esta tesis se explicará el segundo, detección de estructura de comunidades, el cual se puede entender cómo encontrar la división natural de la red en comunidades donde esta división no está especificada por el experimentador. Dentro de esta detección se busca encontrar la mejor división posible para la red dada.

En la detección de comunidades otro de los aspectos por tratar es el número y tamaño de las comunidades a encontrar, que para este método no se tiene fijo ni el número, ni el tamaño de estas comunidades esto se determina con el proceso de detección.

La manera de cuantificar esta detección de comunidades y de esta manera poder obtener la mejor división posible, utiliza una medida la cual es denominada modularidad, la cual se conceptualiza como “el número de aristas que se encuentran dentro de los grupos menos el número esperado en una red equivalente con aristas colocadas de forma aleatoria (al azar)”<sup>68</sup>. Se dice que es una medida del grado en cómo está conectado uno con otro en una red. La expresión matemática de esta medida está dada a continuación (la ecuación está dada para la modularidad en existencia de dos comunidades).

$$Q = \frac{1}{4m} \sum_{ij} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) s_i s_j \quad (5. 37)$$

Donde:

- $A_{ij}$ : posición de la casilla (i, j) de la matriz de adyacencia de la red
- m: número total de aristas de la red

---

<sup>68</sup> NEWMAN, Mark. *Modularidad y estructura de comunidades en redes*. p 2.

- $s_i$ : representa la división en dos comunidades para el vértice  $i$
- $s_j$ : representa la división en dos comunidades para el vértice  $j$

La representación matemática de la división de la red en dos comunidades se determina mediante la siguiente condición, esta ecuación se aplica para  $s_j$  también modificando  $i$  por  $j$ .

$$s_i = \begin{cases} +1, & \text{Si el vértice } i \text{ pertenece al grupo 1} \\ -1, & \text{Si el vértice } i \text{ pertenece al grupo 2} \end{cases} \quad (5.38)$$

Dado que el uso de la matriz de adyacencia indica que la modularidad (ecuación 5.37), se puede expresar en forma matricial como se muestra.

$$Q = \frac{1}{4m} \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s} \quad (5.39)$$

Dónde:

- $s$ : es el vector cuyos elementos son los valores de  $s_i$
- $B$ : representa a la matriz de modularidad

La matriz de modularidad se define como “la nueva matriz simétrica real cuyos elementos son determinados por la siguiente expresión”.<sup>69</sup>

$$B_{ij} = A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \quad (5.40)$$

Los valores de modularidad cercanos a 1 significa como una modularidad buena es decir que se tiene una buena división en comunidades para la red dada.

---

<sup>69</sup> NEWMAN, Mark. *Modularidad y estructura de comunidades en redes*. p 3.

Para dividir la red en más comunidades se debe seguir un proceso de dividir la red en dos comunidades en un inicio calculando la modularidad por medio de la ecuación 5.37, prosiguiendo con la selección de una de las dos comunidades dividiéndola en dos, para luego calcular la nueva modularidad de la red con la ecuación siguiente. Esto se realiza esto consecutivamente hasta tener el número de comunidades deseadas.

$$\Delta Q = \frac{1}{4m} \left[ \sum_{i,j \in c} B_{ij} s_i s_j - \sum_{i,j \in c} B_{ij} \right] \quad (5.41)$$

Dónde:

- C: representa el número de comunidad analizada de la red

Esta ecuación se puede expresar de manera matricial como se muestra a continuación:

$$\Delta Q = \frac{1}{4m} \mathbf{s}^T \mathbf{B}^{(c)} \mathbf{s} \quad (5.42)$$

Donde:

- $\mathbf{B}^{(c)}$ : representa la matriz de modularidad para el número de comunidades analizadas para cada término de la sumatoria.

Los elementos que integran la matriz de modularidad para el número de comunidades se determinan mediante la expresión dada.

$$B_{ij}^{(c)} = B_{ij} - \delta_{ij} \sum_{k \in c} B_{ik} \quad (5.43)$$

Donde:

- $\delta_{ij}$ : es la delta de Kronecker para los elementos dados

Centrando el análisis en una comunidad de las  $c$  comunidades presentes en una red se puede determinar la modularidad simple para esta comunidad ( $M_c$ ) con respecto a la red según la siguiente expresión tomada de:<sup>70</sup>

$$M_c = \frac{L_c}{L} - \left(\frac{k_c}{2L}\right)^2 \quad (5.44)$$

Donde:

- $L_c$ : es el número total de aristas dentro de la comunidad  $c$  analizada.
- $k_c$ : es el grado total de los vértices que pertenecen a la comunidad  $c$  analizada.
- $L$ : es el número total de aristas de la red.

Con base en la modularidad simple se puede generalizar considerando una red que está dividida en un número  $n_c$  de comunidades, por lo que se define la modularidad de la partición como “la sumatoria de las modularidades simples de todas las  $n_c$  comunidades”,<sup>71</sup> presentes en la red.

$$M_c = \sum_{c=1}^{n_c} \left[ \frac{L_c}{L} - \left(\frac{k_c}{2L}\right)^2 \right] \quad (5.45)$$

---

<sup>70</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/9#modularity>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>71</sup> *Ibíd.*

## **5.5. Estructura de los sistemas de potencia**

En el análisis propuesto para los sistemas de potencia se modela dichos sistemas como redes (grafos), en los cuales se establece que las aristas de estos son la representación de las líneas de transmisión del sistema y los vértices son la representación de los nodos, así como barras (arreglos de barras) presentes. Un punto importante es el peso de las aristas.

Para este trabajo de graduación, se modelará con peso uno a todas las aristas del grafo en el modelo utilizado en la estructura y para el modelo utilizado en la operación se le asignará un valor que se explicará en dicha sección.

El diagrama unifilar del sistema de potencia ayuda a modelar esta red dado que es una representación gráfica del mismo, función similar a la del grafo por construir. El primer tema por analizar en sistemas de potencia es la estructura de estos, por lo que los siguientes incisos lo expondrán.

### **5.5.1. Método propuesto para análisis de la estructura de sistemas de potencia**

El método contiene una serie de pasos en los cuales se aplican medidas y métricas de redes, así como características de los grafos a las redes obtenidas de los sistemas de potencia modelados para obtener información de la estructura de dicha red. Los pasos que lo integran son los siguientes:

- Paso 1: modelar la red a partir del diagrama unifilar del sistema de potencia (sistema de barras), mediante la asignación de un vértice en la

red (grafo) a los nodos, barras o arreglo de barras del sistema de potencia seleccionado; también se debe de asignar en dicha red una arista por cada línea de transmisión presente en el sistema de potencia. Como resultado se obtiene la red (grafo) por analizar.

- Paso 2: determinar la distribución de grado de la red obtenida en el paso 1, generando su debida representación gráfica en escala normal y si fuese necesario en escala logarítmica. La gráfica en escala normal se utilizará como la principal, si esta presenta el patrón de red aleatoria. Por lo contrario, si presenta un patrón semejante a una red libre de escala se debe graficar dicha distribución en escala logarítmica.
- Paso 3: obtener la desviación estándar, grado promedio y grado máximo de los datos de distribución de grado de la red analizada.
- Paso 4: calcular el valor de la densidad, diámetro, radio y distancia promedio (aristas) de la red obtenida en el paso 1.
- Paso 5: calcular para los vértices de la red del paso 1, las medidas de centralidad expuestas en este trabajo: centralidad de grado, centralidad de cercanía y centralidad intermedia. Seleccionando en cada una de estas medidas los vértices con centralidades más altas (redes con más de 30 vértices el 10 % superior, menores o iguales el 20 % superior primeros), así como el promedio de dichas centralidades.
- Paso 6: determinar los vértices que sean puntos de articulación en la red analizada.

- Paso 7: obtener el número de comunidades idóneo con su respectivo valor de modularidad para la red del paso uno. Calcular el coeficiente de agrupamiento promedio para la red del paso uno.

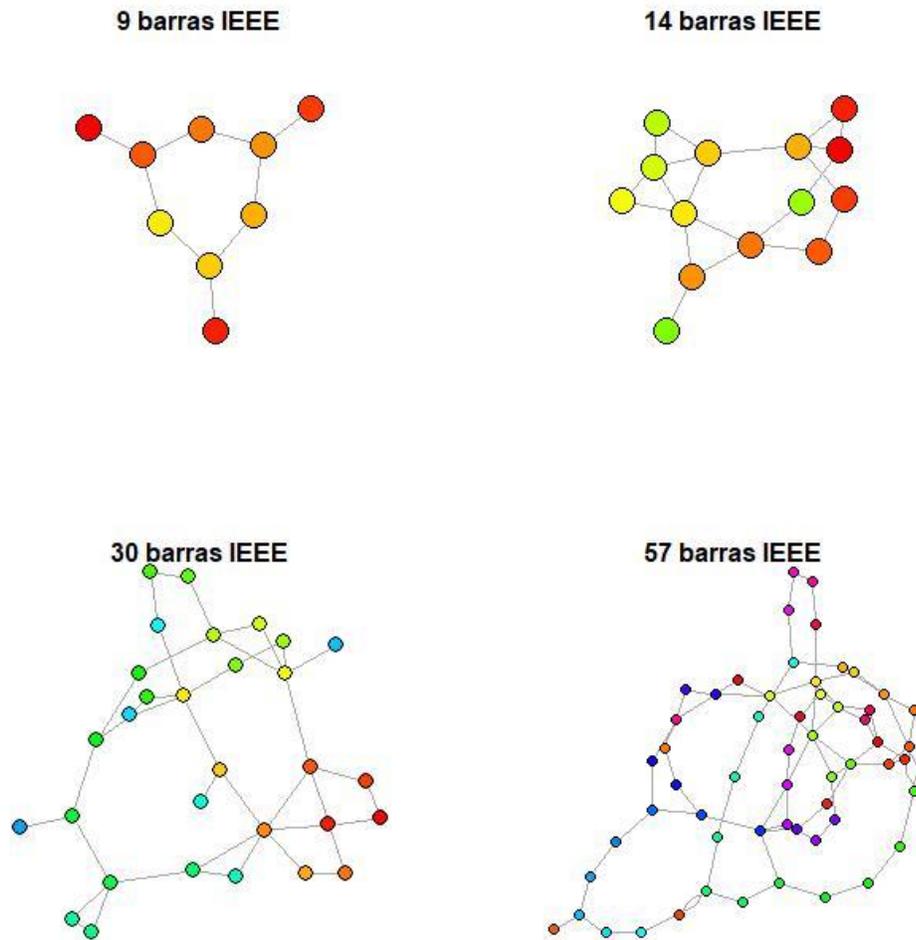
Los pasos anteriores presentan una relación entre las medidas, métricas y características de la red utilizadas en este método. Dichas relaciones se agrupan de la siguiente manera: conexión de la red lo cual presenta el comportamiento de los vértices y aristas respecto de cómo se conectan en la red (pasos dos, tres y cuatro), centralización de la red, es decir, los nodos y aristas más importantes de la red (pasos cinco y seis), agrupamiento de la red lo que indica como los vértices de la red forman comunidades y cómo se relacionan unos con otros, paso siete.

El paso uno, como se indicó, presenta la modelación del sistema de potencia como una red que permite su adecuado análisis por el método presentado.

#### **5.5.1.1. Criterios de interpretación de los resultados generados por el método propuesto para el análisis de estructura de sistemas de potencia**

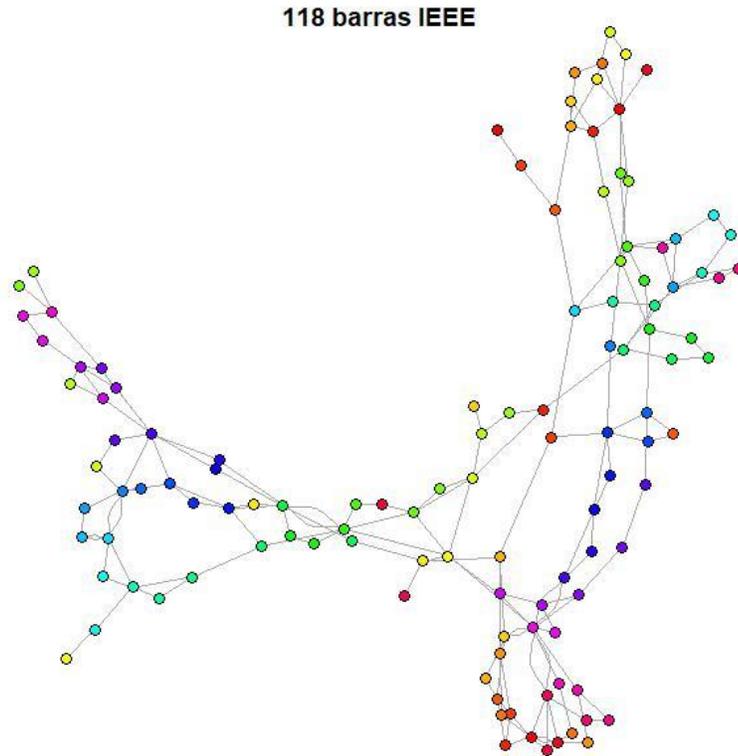
Como punto de partida para la interpretación de los datos resultantes del método propuesto, se considera la modelación de los sistemas de barras propuestos por la IEEE. En este trabajo de graduación se modela los sistemas de barras de la IEEE para 9,14, 30, 57 y 118 barras, lo cual transforma los diagramas unifilares de estos sistemas en redes (grafos) fundamentales para la aplicación de dicho método. A continuación, se presentan dichas redes.

Figura 36. **Redes (grafos) obtenidas de la modelación de los sistemas de 9, 14, 30 y 57 barras de la IEEE**



Fuente: elaboración propia. *Igraph* – R.

Figura 37. **Red (grafo) obtenido de la modelación del sistema de 118 barras de la IEEE**



Fuente: elaboración propia. *Igraph* – R.

De acuerdo con las figuras 36 y 37 se obtienen las redes por analizar en este método. Según el apartado anterior se presentan módulos, agrupación de pasos mediante características comunes, del método propuesto para el análisis de la estructura de los sistemas de potencia, abordando el primero de ellos (dado el orden de los pasos en el método que integran el módulo) denominado como módulo de conexión de la red.

### 5.5.1.2. Conexión de la red

La conexión de la red permite saber información de cómo se conectan los elementos que la conforman, es decir, como se conectan los vértices de la red entre sí, la conexión entre aristas de la red y como se relacionan los vértices con las aristas. También aborda el tema del tamaño de la red en función a dichas conexiones y del número de elementos que la conforman.

Los criterios de interpretación iniciales para la conexión de la red son los relacionados con la distribución de grado de esta, la cual indica el comportamiento de los nodos en base al modelo de red que se presenta, por lo que determinar dicho modelo es la primera tarea.

Los criterios para determinar este modelo se basan en que las redes eléctricas de potencia siguen un modelo de red aleatoria (distribución de Poisson), según literatura consultada.<sup>72</sup> El criterio del centro más grande (grado máximo) permite aclarar dicho tema, dado que “en una red aleatoria los centros están prohibidos de forma efectiva, mientras que en las redes libres de escala están naturalmente presentes”,<sup>73</sup> demuestra que en las redes aleatorias muchos nodos tienen grados similares.

El análisis para este caso se centra en el comportamiento de la gráfica de número de nodos frente al grado máximo en la red, en específico una red aleatoria presenta un comportamiento logarítmico en dicha gráfica, expresado matemáticamente como:

---

<sup>72</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/4#universality>. Consulta: marzo de 2018.

<sup>73</sup> BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/4#hubs>. Consulta: marzo de 2018.

$$k_{\max} \sim \ln N \quad (5.46)$$

La ecuación 5.46 indica que en las redes analizadas para este trabajo de graduación deben presentar un comportamiento de red aleatoria, lo que implica que la gráfica antes mencionada para las redes analizadas tiene que modelarse con dicha ecuación.

Otro criterio para determinar el modelo de la red analizada es el de significado del término libre de escala, ya que al analizar los momentos de la distribución de grado surge el segundo momento de la distribución que es también llamado la variancia que relaciona directamente a la desviación estándar de dicha distribución que para una red aleatoria sigue un comportamiento relacionado con el grado promedio de esta. Dicha relación se expresa matemáticamente como:

$$\sigma = \langle k \rangle^{1/2} \quad (5.47)$$

El anterior criterio indica que la desviación estándar en las redes aleatorias es de un valor relativamente pequeño en comparación a los valores de dicha desviación en las redes libres de escala, por lo que para las redes aleatorias en especial las redes eléctricas de potencia se prevén valores cercanos a los obtenidos por la ecuación 5.47.

El tercer criterio respecto de este tema es el de comportamiento esperado y escala logarítmica, como se indicó en este capítulo la apariencia gráfica de la de distribución de grado de las redes aleatorias es la presente en la figura 31. Si dicha apariencia no es evidente se procede a graficar la distribución en escala logarítmica lo que resultará en que, si el comportamiento de esa gráfica es lineal esta no es una red aleatoria, sino que es una red libre de escala.

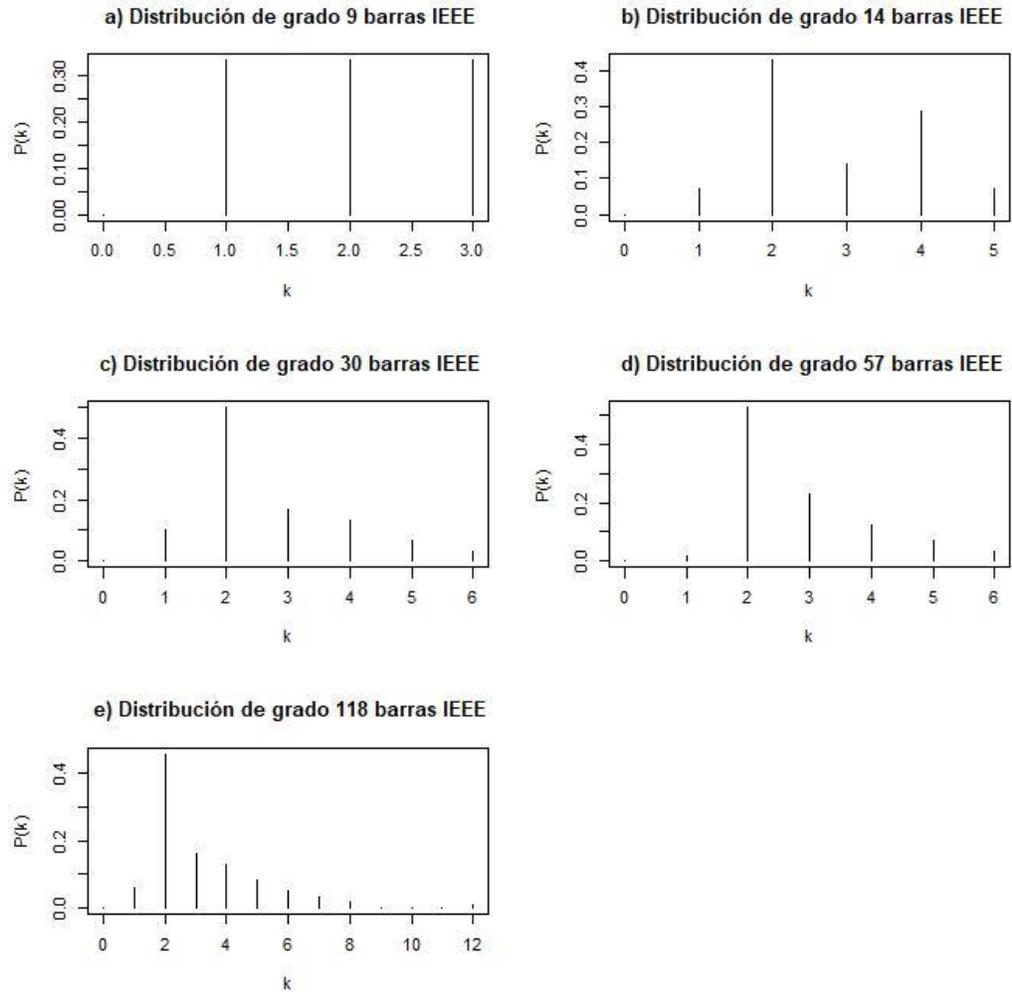
La interpretación de los tres criterios anteriores dice que, si la red eléctrica de potencia analizada cumple con ser una red aleatoria, entonces corrobora la teoría acerca de estas e indica que dicha red presenta las siguientes características en cuanto a conexión se refiere. La conexión de la red en función de los nodos (vértices) tiende a que la mayoría de los nodos presenta un número similar de conexiones, que es de grado bajo y que tiende a ser muy cercano al número promedio de conexiones.

Lo anterior se traduce directamente a los sistemas de potencia en que las barras en dichos sistemas se conectan en su mayoría con una poca cantidad de barras, dicha cantidad se aproxima al número promedio de conexiones (grado promedio). Esto presenta una explicación al aspecto de que los sistemas de potencia tengan un número amplio de barras para el área que abarca dicho sistema.

Para este trabajo de graduación se analizó la distribución de grado de las redes mencionadas con anterioridad, graficando dicha distribución en escala normal en la figura 38. En dicha figura se observa que el comportamiento de esta distribución tiende a ser como el de una distribución de Poisson, lo que se evidencia en la figura 39 donde se grafica la distribución de grado de la red de 118 barras juntamente con la distribución de Poisson modelada para esos datos (ejemplo demostrativo).

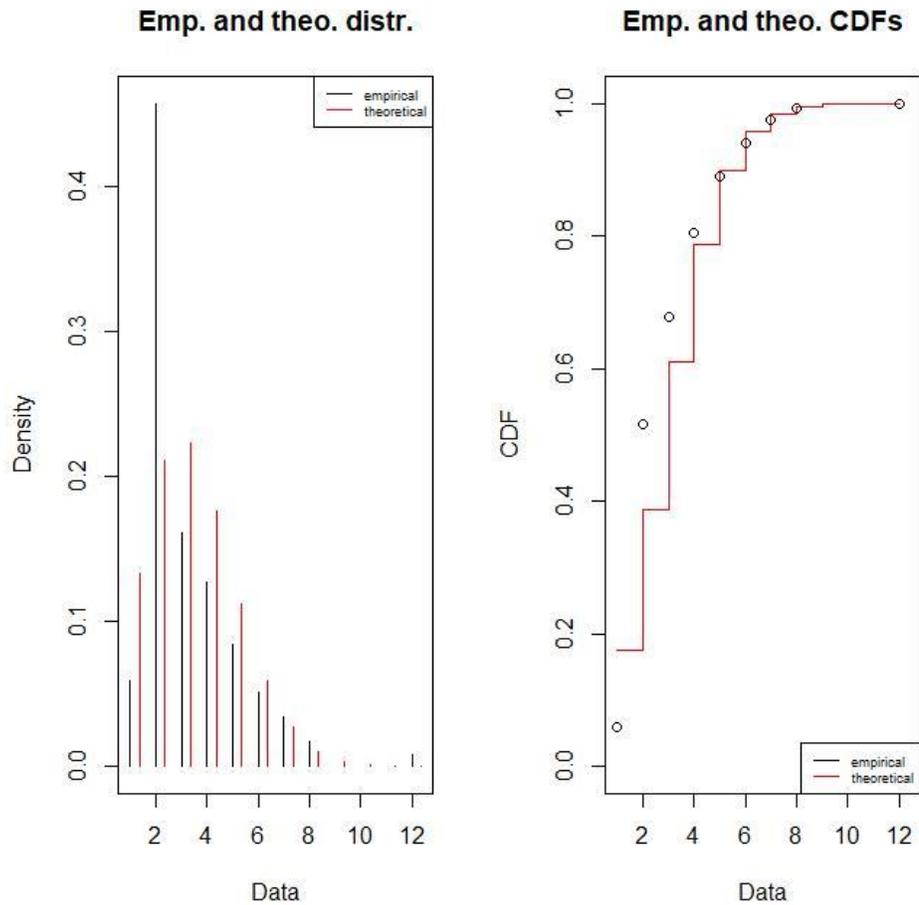
La distribución de Poisson obtenida para esta red es una distribución con un valor de  $\lambda$  de 3.169, graficada en color rojo. La figura 38 es la obtenida como resultado de la ejecución del paso 2 del modelo propuesto en la anterior sección.

Figura 38. **Distribución de grado de las redes analizadas**



Fuente: elaboración propia. *Igraph* – R.

Figura 39. **Distribución de grado de la red de 118 barras (distribución de Poisson correspondiente en rojo)**



Fuente: elaboración propia. *Igraph* – R.

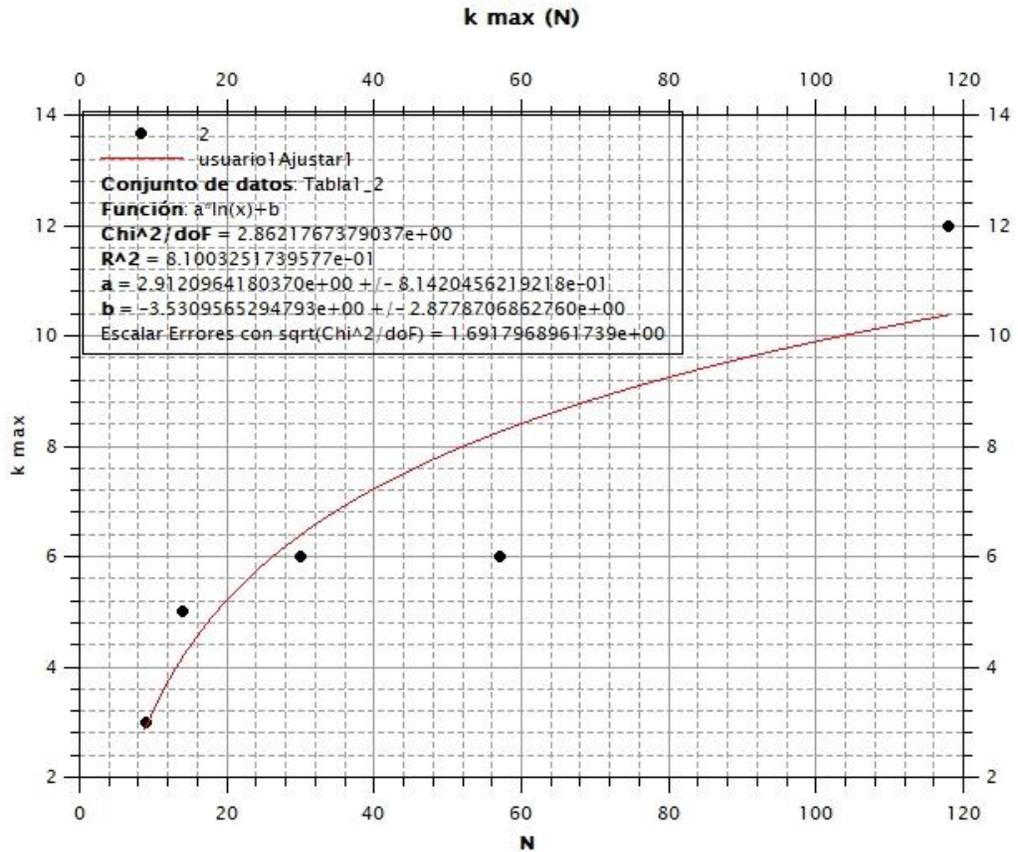
Dado que los criterios de interpretación antes mencionados necesitan de los datos que lo corroboren se procede a presentar los resultados obtenidos del paso 3 del modelo propuesto, generando la tabla siguiente. Para comprobar los criterios antes descritos se procede a graficar los resultados según los criterios de centro más grande y significado del término libre de escala, correspondientemente en las figuras 40 y 41.

Tabla II. Resultados obtenidos del paso 2 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia

Redes (grafos)	Grado medio <k>	Desviación estándar	K máx.
9 barras	2	0,866	3
14 barras	2,857	1,167	5
30 barras	2,667	1,241	6
57 barras	2,807	1,141	6
118 barras	3,169	1,808	12

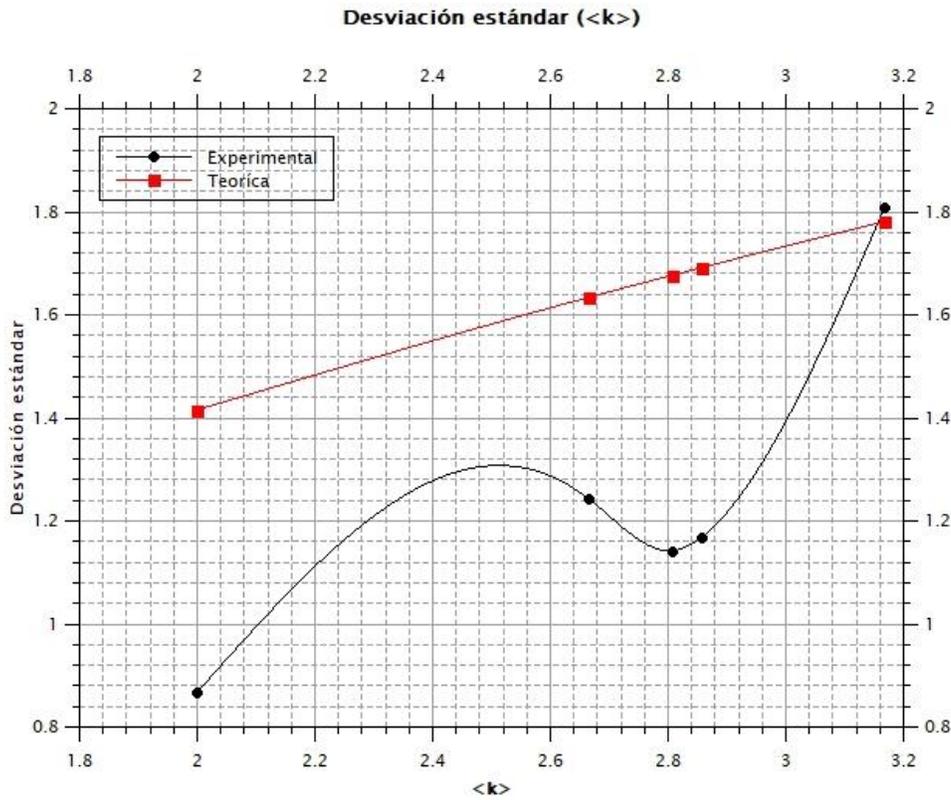
Fuente: elaboración propia.

Figura 40. Gráfica resultante del criterio de centro más grande para las redes analizadas (9, 14, 30, 57, 118 barras)



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

Figura 41. **Gráfica resultante del criterio de significado del término libre de escala para las redes analizadas (9, 14, 30, 57, 118 barras)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

Se determina a partir de las gráficas anteriores que el criterio de centro más grande indica el comportamiento de la curva en la figura 40 modelado por la ecuación 5.46. Esto se evidencia en la figura 40 dado que dicho modelo teórico de la ecuación se observa en la curva de color rojo y los datos experimentales en la curva de color negro. Por lo que sí cumplen con un comportamiento logaritmo corroborado por el ajuste realizado obteniendo el modelo para las redes analizadas y el ajuste como a continuación se presenta.

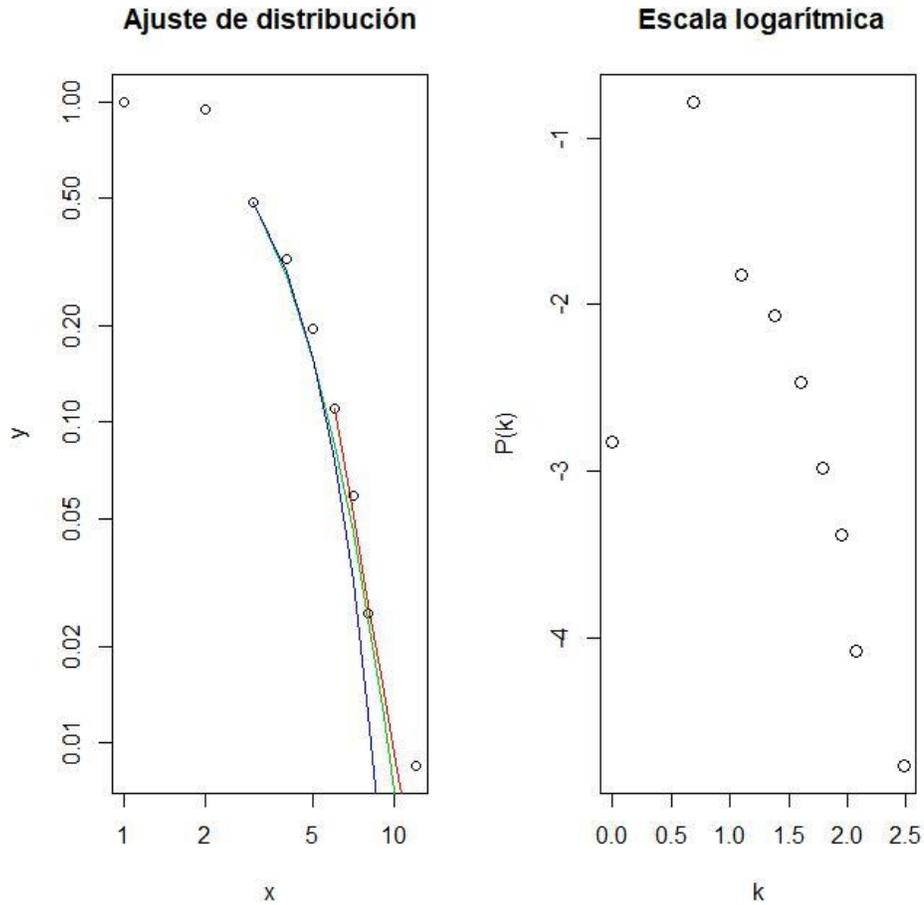
$$k_{\max} = 2,912 * \ln N - 3,531 \quad \text{con } R^2 = 0,810 \quad (5.48)$$

La comprobación del criterio de significado del término libre de escala se determina por medio de la figura 41 donde los valores teóricos calculados por la ecuación 5.47 para las redes analizadas se presentan en rojo mientras que los valores experimentales de dichas redes se muestran en negro. Lo anterior evidencia que los valores experimentales superan en una sola red a los valores teóricos, lo que indica que de acuerdo con la teoría de redes aleatorias estas presentan una desviación estándar de valor bajo en función de su grado medio, determinado que las redes analizadas cumplen en base a este criterio son redes aleatorias.

En cuanto al criterio de comportamiento esperado y escala logarítmica por medio de la figura 39 se corrobora un comportamiento de distribución de Poisson. También la figura 42 presenta un ajuste correspondiente para la distribución de Poisson (curva azul), la distribución de ley de potencia (curva roja) para la red de 118 barras analizada y la distribución de grado en escala logarítmica, evidenciando el comportamiento de esta distribución como red aleatoria.

Ya que en la escala logarítmica la gráfica no se comporta como una recta y en el ajuste la distribución de Poisson se ajusta más a la distribución analizada. Se utiliza la red de 118 barras a manera de ejemplo pudiéndose utilizar las demás redes analizadas, por motivo de simplicidad en este trabajo de graduación.

Figura 42. **Distribución de grado en escala logarítmica y ajuste de distribución para la red de 118 barras**



Fuente: elaboración propia. R software.

Por lo tanto, la conclusión de los tres criterios antes mencionados determina que las redes analizadas en este trabajo de graduación presentan un comportamiento de red aleatoria corroborando la teoría de las redes eléctricas de potencia dentro de la ciencia de redes y cumple en su totalidad con la interpretación de estos criterios en la conexión de la red, antes mencionada.

Los últimos criterios por considerar en la conexión de la red nacen de los resultados del paso 4 del modelo presentado en la sección anterior. Los criterios que se mencionarán analizan la conexión de la red (conectividad) desde el punto de la distancia entre vértices, lo cual en redes se denomina la longitud de los caminos que conectan a todos los vértices de la red. La longitud de dichos caminos se relaciona directamente con la conexión por que a mayor longitud de los caminos implicará mayor separación entre los vértices de la red causando más tiempo de transmisión de la información entre dos vértices cualesquiera.

El término más tiempo de transmisión de la información, en el caso del sistema potencia, se refiera al uso de un mayor número de aristas lo que indica un mayor número de conexiones (mayor número de vértices necesarios para hacer llegar la información al vértice deseado). Cabe resaltar que la longitud de estos caminos se mide en base a la cantidad de aristas que estos posean independientemente de la longitud física que presentan las líneas de transmisión representadas por las aristas que integran el camino analizado. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del paso 4 del método propuesto aplicado a las redes analizadas en este trabajo.

**Tabla III. Resultados obtenidos del paso 4 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia**

Redes (grafos)	N	Densidad	Diámetro [aristas]	Radio [aristas]	Distancia promedio [aristas]
9 barras	9	0,25	4	3	2,333
14 barras	14	0,2198	5	3	2,374
30 barras	30	0,09195	7	4	3,46
57 barras	57	0,0501	12	7	4,954
118 barras	118	0,0271	14	7	6,308

Fuente: elaboración propia.

El primer criterio que se presenta en este tipo de conexión (basada en longitud de caminos) es el de límites de la red, el cual indica la relación que presenta el diámetro y radio de una red con respecto a la conexión de esta, se plantea para poder analizar el tamaño de la red tomando en consideración únicamente la longitud de los caminos que la conforman. El diámetro de la red se denomina el límite máximo y el radio como el límite mínimo de la red.

La relación que existe entre este tamaño de la red (ambos límites) y la conexión de esta es que redes de tamaño menor (se considera menor comparándolo con el número de vértices que posee) presentan mejor conexión dado el tiempo de transmisión de la información, pero no implican que en con mayores tamaños la conexión sea baja. Se debe considerar los dos criterios siguientes: distancia media y densidad para determinar la conexión de la red, de manera idónea.

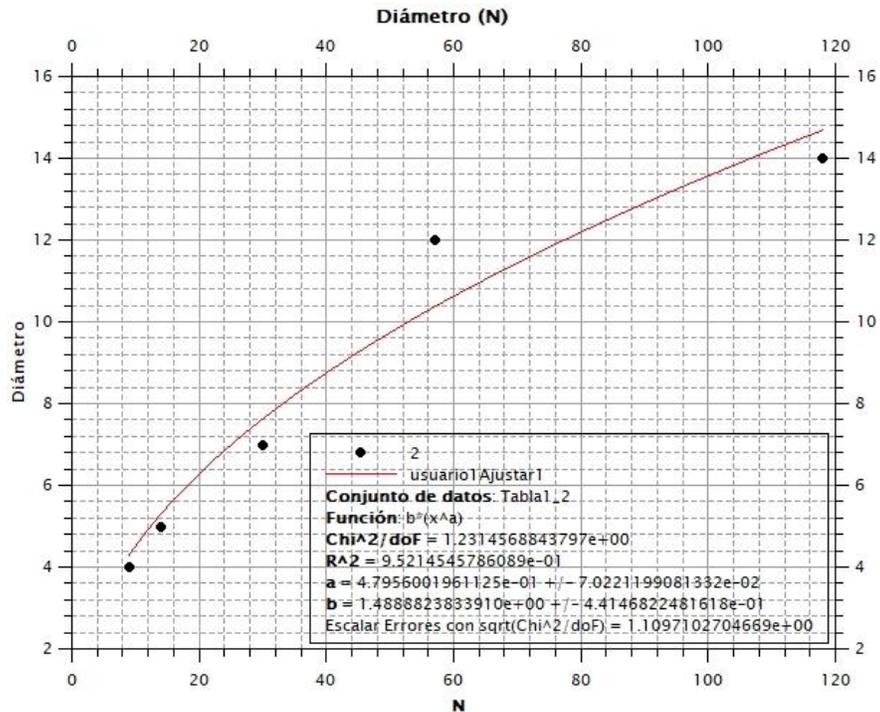
Centrando el análisis en el diámetro de la red en función del número de vértices se determina el tamaño antes mencionado. En la figura 43 se presenta el comportamiento del diámetro para las redes analizadas en este trabajo determinando un modelo matemático del comportamiento de la curva. El ajuste realizado para determinar la ecuación matemática que modela el diámetro en función de N se presenta a continuación.

$$\text{Diámetro} = 1,489 * N^{0,480} \quad (5. 49)$$

Presentando

$$R^2 = 0,952 \quad (5. 50)$$

Figura 43. **Diámetro en función del número de vértices de las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

Para estas redes analizadas el diámetro tiende a ser bajo respecto del número de vértices que presentan siguiendo un modelo de ley de potencia con exponente fraccionario, lo que corrobora el bajo diámetro ante amplios números de vértices. Para determinar por completo el criterio de límites se debe alizar el comportamiento del radio, como se muestra a continuación.

$$\text{Diámetro} = (2,107)(\text{Radio}) - 1,714 \quad (5. 51)$$

Presentando

$$R^2 = 0,966 \quad (5. 52)$$

La ecuación 5.51 evidencia una recta en el comportamiento del diámetro en función del radio con una pendiente de 2,107, lo cual indica que aproximadamente el diámetro es dos veces el radio. El criterio de límites, como su nombre lo indica, analiza estos límites en función del tamaño, como se hizo con anterioridad por separado (denominado diámetro por simplicidad); el último factor por considerar es tomar dichos límites como un rango y modelarlos con respecto a N. Obteniéndose la siguiente ecuación.

$$\text{Diámetro} - \text{radio} = \text{Tamaño de rango} = (2,294) \ln N - 4,223 \quad (5.53)$$

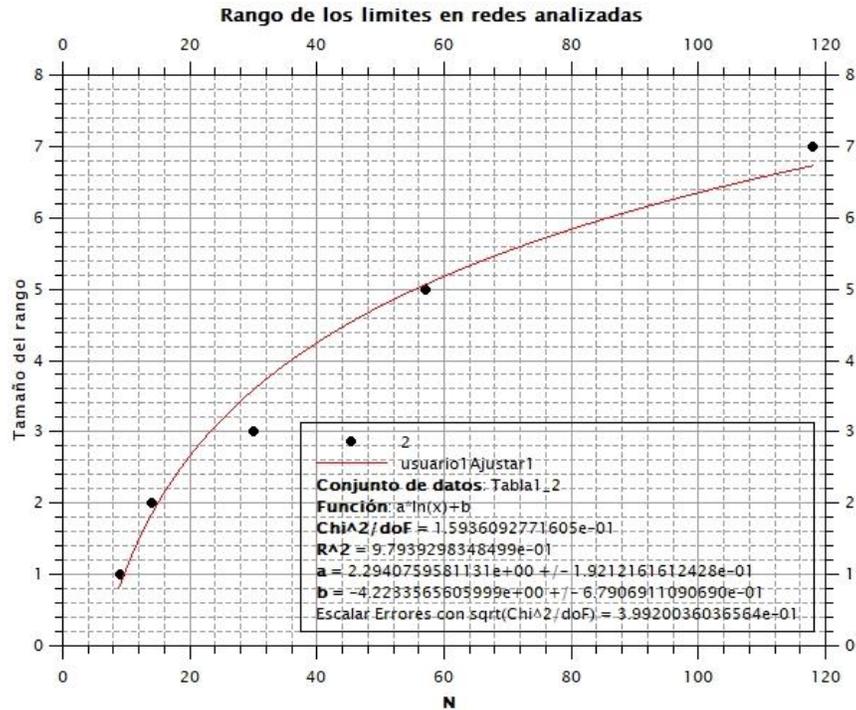
Presentando

$$R^2 = 0,979 \quad (5.54)$$

El criterio de límites determina que el reducido tamaño de las redes genera una mejor conexión en la red, por lo que en las redes analizadas tanto los límites por separado como el rango (diferencia de límites) presentan valores reducidos en comparación al número de vértices.

Se modela este comportamiento por las ecuaciones 5.49, 5.51, 5.53, resaltando la ecuación 5.53 dado que presenta un comportamiento de logaritmo natural, visible en la figura 44, el cual marca la tendencia de reducción de rango a mayores números de vértices incrementando la conexión de la red conforme esta adhiere más nodos. Las redes analizadas presentan un alto nivel de conexión; se debe tomar en cuenta los dos criterios que se presentan a continuación para ratificar dicho nivel.

Figura 44. **Tamaño de rango (diferencia de límites) para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

El criterio de distancia promedio presenta esta medida para determinar la conexión de la red, la conexión de una red posee un alto nivel si la distancia promedio de los caminos es pequeña. Este criterio implica que distancias promedio reducidas generan altos niveles de conexión dado al bajo tiempo de transmisión de la información. Esto se traduce en que los vértices en estas redes se encuentran cerca unos de otros (longitud del camino entre ellos) en su mayoría, dando esta alta conexión pero generando un problema gracias a esta característica, el cual es la proliferación o esparcimiento de virus, fallas o defectos en la transmisión de información (potencia en este caso) de manera acelerada en la red.

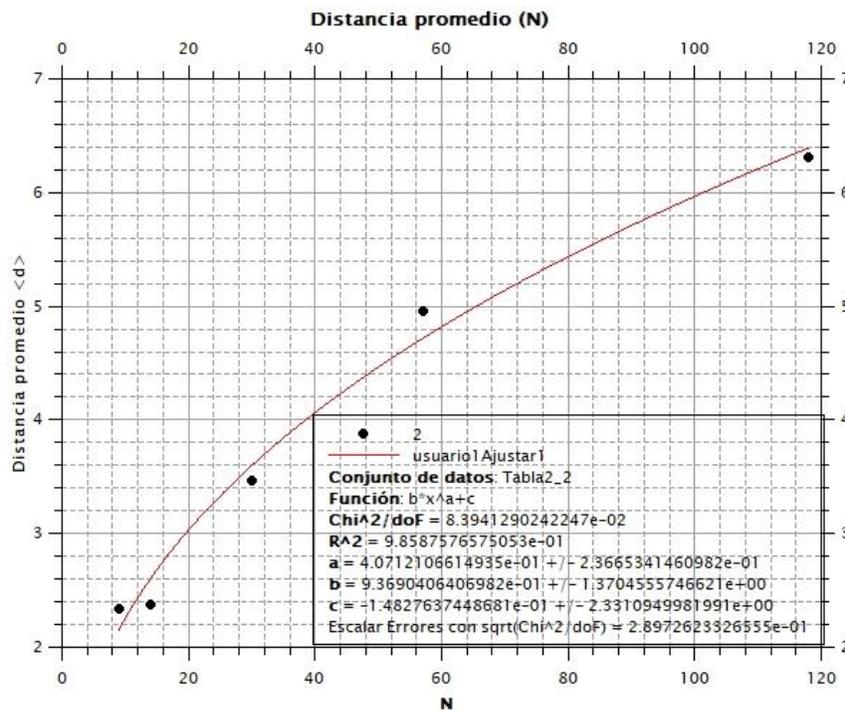
Por ello se hace esencial analizar este criterio para saber sobre el nivel de conexión, así como el nivel de esparcimiento de defectos que la red presenta. Para las redes analizadas en este trabajo de graduación de acuerdo con la tabla III, la distancia promedio tiende a ser pequeña respecto del número de vértices que presenta la red, dichos datos se modelan en la ecuación 5.55, observándose gráficamente esta modelación en la figura 45.

$$\langle d \rangle = (0,937)N^{0,407} - 0,148 \quad (5.55)$$

Presentando:

$$R^2 = 0,986 \quad (5.56)$$

Figura 45. **Distancia promedio (caminos) en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

El modelo obtenido de la ecuación 5.55 determina que las redes analizadas presentan una reducida distancia promedio respecto de  $N$  y que es directamente proporcional a esta, según la tendencia. Lo que este criterio interpreta acerca de estas redes analizadas es que al poseer una reducida distancia promedio presentan un alto nivel de conexión entre los vértices, pero como se expresó en este criterio esto implica que tienden a presentar un nivel alto de esparcimiento de defectos en la transmisión de información para dichas redes.

Lo mencionado con anterioridad indica que, para las redes eléctricas, en específico las aquí analizadas, se plantean que el control de esparcimiento de defectos en la transmisión de información debe ser efectivo desde la perspectiva de la minimización del tiempo de respuesta para actuar ante estos esparcimientos.

El último criterio de conexión de red es el de densidad el cual presenta la medida de densidad de la red para su análisis. Este criterio presenta si todos los vértices que integran la red están conectados entre sí, de no estarlo esta red se cataloga como dispersa dado que no todos sus vértices se encuentran conectados con cada vértice que conforma la red.

La cuantificación de dicho criterio lo brinda la medida de densidad de la red ( $\rho$ ) al presentar valores bajos indicará redes dispersas, lo que a su vez es un indicativo de que la red en su estructura puede presentar comunidades (apartado 5.4), las cuales serán analizadas por este método en el módulo de agrupamiento.

Este criterio determina, en primer lugar, el porcentaje de conexiones utilizado en la red, el cual genera al porcentaje de crecimiento disponible de

conexiones de esta, tomando como constante el número de vértices de dicha red. Este porcentaje de crecimiento disponible de conexiones (% *CDC*) se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\% \text{ CDC} = 1 - \rho \quad (5.57)$$

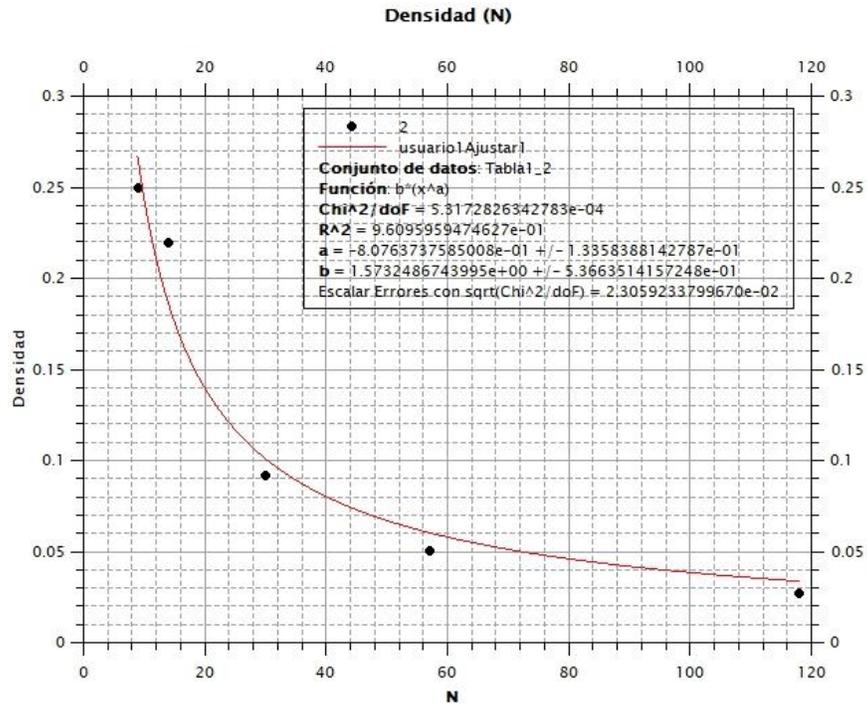
En segundo lugar, determina si la red presenta el mismo grado de conexión (grado de un vértice) en toda estructura o si presenta variaciones (indicativo de posibles comunidades y de vértices importantes). Aplicando este criterio en las redes analizadas y gracias a la tabla III, las redes presentan densidades reducidas modelando el comportamiento de las densidades en función del número de vértices en la ecuación 5.58 y en la figura 46.

$$\rho = (1,573)N^{-0,808} \quad (5.58)$$

Presentando

$$R^2 = 0,961 \quad (5.59)$$

Figura 46. **Densidad en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

El modelo de la ecuación 5.58 muestra que la relación entre la densidad y el número de vértices de la red es inversamente proporcional lo que se evidencia en la figura 46, lo que determina la tendencia de estas redes por valores de densidad sumamente reducidos, lo que brinda el término de redes esparcidas a estas.

El criterio de densidad aplicado a las redes bajo análisis dictamina que estas poseen un porcentaje de crecimiento disponible de conexiones alto, lo que indica una amplia posibilidad de aumento de conexiones, si dichas redes no poseen uniformidad en el grado de vértices en toda su extensión esto advierte

la presencia de vértices importantes y comunidades, tratados en este método en los módulos de centralización y agrupamiento de la red, respectivamente.

La interpretación final de este módulo para las redes bajo estudio, tras analizarse los criterios planteados concluye que dichas redes son modeladas por medio de las redes aleatorias, las cuales indican la conexión de estas basadas en el número de conexiones que poseen los vértices, generando que la mayoría de los vértices presenten pocas conexiones mientras que una minoría de vértices presenten muchas conexiones.

Este módulo también obtiene la conexión de la red en base a la distancia de estas conexiones, la cual concluye que estas redes presentan límites y distancias promedio reducidas indicativo de alta conexión, pero con ello un esparcimiento de defectos en la transmisión de información acelerado. También presenta la posibilidad de crecimiento de este nivel de conexión, así como la posible centralización y agrupamiento de estas redes, por el criterio de densidad.

### **5.5.1.3. Centralización de la red**

Este módulo parte de los pasos 5 y 6 del método propuesto en el apartado anterior. La centralización de la red resalta la importancia de ciertos vértices respecto de los demás que la integran, la importancia de estos se debe a características como la cercanía con un número elevado de vértices, alto grado de conexiones y la gran cantidad de caminos de los cuales forma parte.

Las características mencionadas generan en este nodo el énfasis de estar permanentemente conectado para garantizar: una red conectada (grafo onexo) y una trasmisión de información en la red (excluyendo las aristas en los dos casos).

La presencia de estas características en los vértices ocurre de dos formas: que un vértice posea todas estas o dicho vértice tenga al menos una. En una red respecto de todos sus vértices presenta en general las dos formas mencionadas, teniendo como objetivo identificar aquellos vértices presenten la mayoría de las características (de ser posible todas).

Para interpretar los criterios de centralización se debe establecer la cuantificación de dicha importancia basándose en las características anteriores, estableciendo el uso de las medidas de centralidad propuestas en los pasos 5 y 6 como parámetros de análisis.

El primer criterio de centralidad es el llamado criterio de medida individual, el cual inicia con la regla de selección presentada en el paso 5 y 6. Los nodos obtenidos de esta regla son los que presentan los mejores valores de centralidad en la red, esto generando especial atención en estos. La interpretación de este criterio es determinar la función correcta de los vértices seleccionados con respecto a la medida analizada. Según las medidas:

- Centralidad de cercanía: para esta medida, los vértices seleccionados cumplen con la función de ser difusores en la transmisión de información, así como también presentan la difusión de desperfectos o fallas en la misma, esto es que, gracias a su cercanía con gran cantidad de nodos, pueden esparcir a través de estos la información a gran cantidad de la red.
- Centralidad intermedia: los vértices seleccionados según esta medida son paso de una alta cantidad de información, lo que se traduce a que en la trasmisión de información en la red se debe utilizar al menos uno de

estos vértices. La desconexión de estos causará serios daños en los flujos de información, en este caso flujo de potencia. Su función se resume en ser pasos vitales en el flujo de potencia.

- Centralidad de grado: los vértices seleccionados por esta medida son conectores de la red (función), es decir enlazan a un vértice o grupos de vértices con el resto de la red; comúnmente son el centro de conexiones en comunidades de vértices.
- Puntos de articulación: los vértices obtenidos al aplicar dicho concepto de grafos cumplen la función de mantener conectada a la red (mantener el grafo conexo), la falta de estos vértices en la red genera una inmediata desconexión de la red dejando aislados sectores de esta.

El segundo criterio es el denominado criterio de nivel, para este se debe analizar los vértices obtenidos de la regla de selección (paso 5 y 6) y brindarles un nivel en función a la frecuencia de aparición en los nodos seleccionados según las cuatro medidas. Esto genera niveles desde 1 (si el vértice es seleccionado solo por una medida) hasta 4 (si el vértice es seleccionado por las 4 medidas).

El criterio de nivel indica que solo se escogerán los vértices que tengan niveles 3 y 4, si se presentase el caso de no tener vértices de estos niveles se escogerá el vértice o vértices de mayor nivel. La interpretación de este criterio indica que los vértices obtenidos por este proceso son los vértices vitales de la red, por lo que se les debe de vigilar constantemente y proteger de manera eficiente. El término vértices vitales se debe a que la presencia de estos (sin condiciones) brinda la seguridad a la red para cumplir con su función, lo que no

significa que dicha función sea efectuada al 100 %, dado por desperfectos en otros elementos de la red.

El tercer criterio de este módulo es el generalizado de medida, para el cual se utilizará la medida promedio como general de la red (paso 5), realizando esto con las 3 medidas de centralidad y para el caso de puntos de articulación la forma de generalizarlo es mediante la obtención de la proporción del número de puntos de articulación con relación al número de vértices para la red analizada. Calculado por la siguiente expresión.

$$\text{Gen}_{\text{PA}} = \frac{\text{Número de puntos de articulación en la red}}{\text{Cantidad total de vertices en la red}} \quad (5. 60)$$

Lo que este criterio obtiene es la tendencia de las medidas en función del número de vértices que integran la red analizada, la interpretación se focaliza en la modelización de las medidas de centralización en las redes eléctricas.

Para las redes analizadas en este trabajo de graduación se obtiene la tabla IV donde se presentan parte de los resultados del paso 5, como primer paso para analizar los criterios de medida individual y de nivel, lo cual genera la no presencia del promedio de las medidas en dicha tabla.

Tabla IV. **Resultados obtenidos del paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia**

Redes	Grado		Centralidad de cercanía (closeness)		Centralidad intermedia (betweenness)		Puntos de articulación
	Nodo	medida	Nodo	Medida	Nodo	Medida	
<b>9 barras</b>	4	3	8	0,5000	4	0,3571	6
	6	3	6	0,5000	6	0,3571	8
	8	3	4	0,5000	8	0,3571	4
<b>14 barras</b>	4	5	4	0,5417	4	0,3141	7
	9	4	9	0,5200	9	0,2692	
	6	4	5	0,5200	5	0,2692	
	5	4					
	2	4					
<b>30 barras</b>	6	6	6	0,3973	6	0,3842	27
	10	5	4	0,3671	12	0,2484	25
	12	5	9	0,3537	4	0,2365	12
	4	4	12	0,3494	10	0,2352	9
	27	4	10	0,3452	9	0,2019	
	15	4	28	0,3333	27	0,1970	
	2	4					
<b>57 barras</b>	9	6	13	0,2887	38	0,3180	32
	13	6	49	0,2786	13	0,2802	
	12	5	38	0,2718	9	0,2421	
	15	5	9	0,2679	49	0,2183	
	38	5	11	0,2593	22	0,1922	
	4	5					

Continuación de la tabla IV

<b>118 barras</b>	49	12	69	0,2354	69	0,3164	9
	80	8	68	0,2285	77	0,2940	8
	100	8	65	0,2267	80	0,2906	86
	77	7	49	0,2237	49	0,2752	85
	12	7	77	0,2171	65	0,2733	110
	92	7	38	0,2159	38	0,2640	100
	59	7	75	0,2112	30	0,2272	68
	69	6	70	0,2082	68	0,2088	71
	17	6	66	0,2071	100	0,2080	12
	37	6	81	0,2067	70	0,1634	
	54	6	80	0,2049	24	0,1349	
	89	6					
	56	6					

Fuente: elaboración propia.

En la tabla IV se observa el nombre de los nodos importantes de las redes analizadas para cada medida estos nodos corresponden a las barras de los sistemas de potencia modelados en este trabajo (número de nodo es igual al número de barra).

La interpretación del criterio de medida individual es que los nodos pertenecientes a la columna de centralidad de cercanía para las 5 redes analizadas tienen la función de difusores. Como se explicó con anterioridad estos son excelentes en el esparcimiento de la potencia pero se deben controlar en las redes donde pertenecen, dado a que estos son difusores de fallas o defectos en la transmisión de potencia, por lo que si llegan a estos nodos mencionados en esta columna se incrementará la propagación (aceleración en el crecimiento de nodos “infectados”) de dicha falla a lo largo de la red.

Los nodos presentes en la columna de centralidad intermedia son pasos de flujo de potencia en las redes a las que pertenecen, por lo que a través de estos circula gran porcentaje del flujo total de la red haciendo que estos sean

nodos (barras) donde se monitoreé las mediciones de voltaje, corriente y potencia. Los nodos anteriores deben tener las protecciones adecuadas (protecciones de barras) para garantizar la continuidad de servicio de estos, la desconexión de esta repercutirá en el flujo de potencia de la red, por esto su importancia.

Los puntos de articulación obtenidos de la tabla IV para las redes analizadas son vitales para que las redes estén conectadas, generando que estos nodos (barras) deban poseer (obligatorio) las protecciones necesarias, así como un control constante para evitar que estas salgan de operación debido a fallas u otras causas.

Por último, los nodos pertenecientes a la columna de centralidad de grado cumplen con la función de conectores de la red. Estos, por lo tanto, se vuelven importantes en el enlace de las comunidades que integran la red a la que pertenecen. Otro aspecto importante en estos nodos es la concentración de conexiones que presentan lo que los hace vulnerables contra la presencia de fallas o defectos en la transmisión de potencia lo que causará problemas en dichas subestaciones, esta consideración se debe tener presente en los nodos de centralidad intermedia.

Como interpretación final de este criterio los nodos presentes en la tabla IV son importantes en la centralización de las redes analizadas. A partir de los resultados obtenidos de la tabla IV mediante el proceso determinado por el criterio de nivel se determinan los vértices o nodos vitales de las redes analizadas, generando la tabla V que se muestra a continuación.

Tabla V. **Resultados obtenidos del criterio de nivel aplicado a los datos generados en el paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia**

Redes	Vértices	Nivel
<b>9 barras</b>	4	4
	6	4
	8	4
<b>14 barras</b>	4	3
	9	3
	5	3
<b>30 barras</b>	12	4
	6	3
	10	3
	4	3
	27	3
	9	3
<b>57 barras</b>	9	3
	13	3
	38	3
<b>118 barras</b>	49	3
	80	3
	100	3
	77	3
	69	3
	68	3

Fuente: elaboración propia.

La interpretación del criterio de nivel aplicado a las redes analizadas determina los nodos presentes en la tabla V, se evidencia que en dichas redes la mayoría de los nodos vitales presentes son de nivel 3.

Esto se debe a que la presencia de una característica de los vértices importantes (anteriormente descritas) se debe al valor elevado de la medida que cuantifica la característica en los nodos presentes en la red. Este resultado indica que las 3 medidas de centralidad utilizadas se relacionan entre sí pero que no implica que estas tres tengan relación con los puntos de articulación.

Los nodos vitales de nivel tres y cuatro en las redes analizadas son donde obligatoriamente deben tener un control, supervisión y protección permanente, dado a que presentan la suma de las funciones del criterio de medida individual, la salida de operación de estos nodos (barras) desencadenará en el mal funcionamiento de la red (fallas, desconexiones y desperfectos) llegando en casos críticos a provocar el colapso entero de la red.

Realizar las actividades antes descritas minimiza la salida de operación de dichos nodos (barras) pero no garantiza que esto no suceda, por lo que estos nodos deben considerarse primordiales en el análisis de contingencias por realizar.

Por último, la aplicación del criterio generalizado de medida en las redes analizadas se realiza mediante la obtención del promedio de las medidas en el paso 5, así como el uso de la ecuación 5,60, presentándose los resultados en la tabla VI, que a continuación se muestra.

Tabla VI. **Resultados obtenidos del paso 5 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia (promedios y ecuación 5.60)**

Redes	Grado medio	Centralidad de cercanía (promedio)	Centralidad intermedia (promedio)	Puntos de articulación (Gen PA)
9 barras	2,0000	0,4395	0,1905	0,3333
14 barras	2,8571	0,4310	0,1145	0,0714
30 barras	2,6667	0,2946	0,0878	0,1333
57 barras	2,8070	0,2074	0,0719	0,0175
118 barras	3,1695	0,1632	0,0458	0,0763

Fuente: elaboración propia.

Los datos de la tabla VI se modelan de forma matemática mediante las ecuaciones siguientes y se grafican en la figura 47. La interpretación del criterio generalizado de medida presenta la modelación de la centralidad de cercanía promedio en función del número de vértices (N) de las redes analizadas en la siguiente ecuación.

$$\overline{C_i^l} = 1,118(N^{-0,3977}) \quad (5. 61)$$

Presentando

$$R^2 = 0,959 \quad (5. 62)$$

La ecuación 5.61 y la figura 47 evidencian que la relación entre la centralidad de cercanía promedio y N es inversamente proporcional, lo que

indica que en las redes eléctricas la tendencia brinda que entre mayor es el número de vértices en la red estos presentan una centralidad de cercanía baja, pero dicho comportamiento no determina la no existan de vértices con valores altos en comparación al promedio, obteniendo así los vértices importantes presentes en la tabla IV. La modelación de la centralidad intermedia promedio en función del tamaño de la red (N) se presenta en la ecuación siguiente.

$$\bar{x}_i = 0,6069(N^{-0,5629}) \quad (5. 63)$$

Presentando

$$R^2 = 0,931 \quad (5. 64)$$

La ecuación 5.63 y la figura 77 ponen en evidencia que el modelo de la centralidad intermedia promedio en función de N presenta un comportamiento similar al del modelo de la centralidad de cercanía promedio (ambas tienen una relación inversamente proporcional con N); por lo tanto, gracias a la ecuación 5.61, 5.63 y figura 77 se genera que ambas centralidades guardan una relación entre ellas directamente proporcional.

Estos modelos pronostican la disminución en los parámetros de centralidad en las redes a medida que estas crecen, pero conservando la obtención de nodos importantes en dichas redes, dado a valores superiores a la media en dichos parámetros. La generalización de los puntos de articulación en función de N se presenta en la siguiente ecuación.

$$\text{Gen}_{PA} = 6,749(N^{-1,415}) \quad (5. 65)$$

Presentando

$$R^2 = 0,669 \quad (5. 66)$$

La ecuación 5.65 indica una relación inversamente proporcional entre la generalización de los puntos de articulación y el número de vértices de la red. La figura 77 pone en claro dicho comportamiento, pero muestra una convergencia no adecuada hacia la línea de tendencia, con lo cual el ajuste de dicha tendencia (ecuación 5.66) corrobora lo anterior.

Por lo tanto, la aparición de puntos de articulación en las redes eléctricas es bastante reducida comparándola con el total de vértices, lo cual indica que la conexión de la red (probabilidad de distribución de grado) es la encargada de generar estos puntos. Como última medida de este criterio se presenta el modelo matemático de la centralidad de grado promedio (grado medio) en función de N, ecuación 5.67.

$$\langle k \rangle = (0,3323) \ln(N) + 1,5669 \quad (5. 67)$$

Presentando

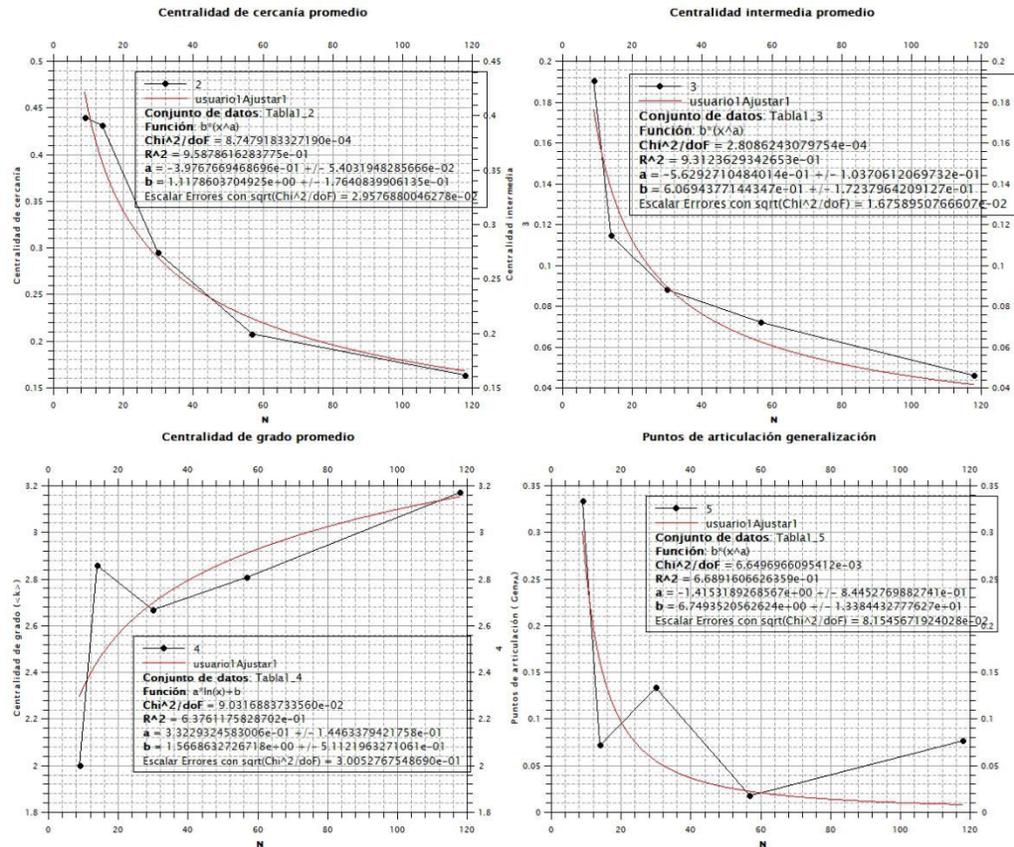
$$R^2 = 0,638 \quad (5. 68)$$

La interpretación acerca de esta medida indica que presenta un comportamiento distinto al de las otras medidas, estableciendo una relación directamente proporcional entre el grado medio y N, generando la tendencia que se observa en la figura 47.

La centralidad de grado, si bien es cierto que aumenta con el crecimiento de la red, es bastante reducida comparada al número de vértices, corroborando lo interpretado en el módulo de conexión de la red (la mayoría de los nodos presenta pocas conexiones con valores cercanos al grado medio de la red). Este criterio resalta que, en las redes eléctricas analizadas, así como también futuras, puede predecirse su comportamiento de centralidad en función del número de vértices por medio de las ecuaciones 5.61, 5.63, 5.65 y 5.67.

A continuación, se presentan la figura 47, la cual contiene las gráficas de centralidad de cercanía promedio, centralidad intermedia promedio, centralidad de grado promedio y la generalización de puntos articulas de las redes analizadas en este trabajo de graduación.

Figura 47. Centralidad promedio y puntos de articulación generalizados en las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

#### 5.5.1.4. Agrupamiento de la red

El último módulo por interpretar del método de análisis propuesto para la estructura de sistemas de potencia es el agrupamiento de la red, que parte de los resultados obtenidos del paso 7 del método. En este módulo se enfoca en la interpretación de tres criterios, los cuales abordan los temas del agrupamiento que presentan los vértices hacia sus vecinos, la tendencia de las redes a

generar grupos de vértices (comunidades) conectados internamente en un nivel alto y, por último, como se relacionan los criterios anteriores.

El primer criterio toma como medida de estudio (control) al coeficiente de agrupamiento promedio de la red, cuyo coeficiente promedio indica “la probabilidad de que dos vecinos de un nodo seleccionado al azar se conecten entre sí”.<sup>74</sup> Toma el nombre de criterio de agrupamiento e indica la probabilidad antes mencionada, y se debe interpretar como el enlazamiento entre vértices que comparten a un vértice en común (raíz).

Determinados los límites según el valor del coeficiente: superior cuando se presenta un valor cercano 1, lo que debe interpretarse que en esta red los nodos (barras) se conectan unos con otros en un nivel total (global) e inferior con un valor cercano a 0, interpretándose para esta red una conexión entre nodos (barras) en un nivel de puntos de aislamiento (vacíos en la red, puntos donde vértices cercanos no se conectan).

El nivel total se relaciona con el nivel de puntos de aislamiento en que en el total (global) la presencia de dichos puntos es baja o aproximable a ausente. El segundo criterio se basa en una medida denominada modularidad, que indica el nivel de calidad en la división de la red para cierto número de comunidades. Este criterio especifica tomar el número de comunidades óptimo para dividir la red analizada (maximizar el modularidad de las divisiones realizadas).

La interpretación de este criterio primero aborda el número óptimo de comunidades presentes en la red y, segundo, la calidad de la división realizada por dichas comunidades. El nombre de este es el criterio de comunidades, cuya

---

<sup>74</sup> BARABASI, Albert-Làszlò. *Ciencia de las redes*  
<http://networksciencebook.com/chapter/2#clustering>. Consulta: marzo de 2018.

esencia trata de la determinación del número de comunidades ideal, también resalta mediante el valor de modularidad la calidad de la división y que dicho valor es el máximo obtenido.

El tercer criterio que relaciona los dos anteriores es el criterio de relación agrupamiento-comunidad, el cual establece que los valores reducidos del coeficiente de agrupamiento promedio indican la formación de un mayor número de comunidades en la red.

Para las redes analizadas en este trabajo de graduación, se obtienen los resultados del paso 7 del método propuesto, los cuales son el punto de partida para la aplicación de los criterios antes mencionados a las redes presentadas en este estudio. A continuación, se presenta la tabla con los resultados obtenidos.

**Tabla VII. Resultados obtenidos del paso 7 del método propuesto para el análisis de estructura de los sistemas de potencia**

<b>Redes</b>	<b>Número de comunidades</b>	<b>Modularidad</b>	<b>Coficiente de agrupamiento promedio</b>
<b>9 barras</b>	3	0,3333	0,0000
<b>14 barras</b>	3	0,4038	0,3667
<b>30 barras</b>	5	0,5653	0,2222
<b>57 barras</b>	7	0,6360	0,1211
<b>118 barras</b>	7	0,7234	0,1691

Fuente: elaboración propia.

Interpretando los resultados de la tabla VII mediante el criterio de agrupamiento, las redes analizadas presentan valores reducidos del coeficiente

de agrupamiento promedio situándolos cercanos a cero, esto indica que dichas redes presentan un agrupamiento de nivel de puntos de aislamiento, por lo tanto, en la estructura de las redes bajo estudio existen vacíos. La red más afectada por estos puntos de aislamiento es la de nueve barras.

El criterio de comunidades se interpreta mediante la tabla VII, en la cual se observa que el número de comunidades en las redes analizadas es un número bajo y que la modularidad de dichas comunidades para las primeras dos redes es bajo, indicativo de que la máxima modularidad muestra una baja calidad en la división por comunidades realizada.

Sin embargo, para las siguientes redes la calidad de las divisiones por dichas comunidades resulta cercana a un valor de uno, demostrando la mejor calidad. Lo anterior evidencia la relación que presentan el número de comunidades y la modularidad de estas en función del tamaño de la red (número de vértices que la integran), esto se modela mediante la ecuación siguiente.

$$\text{Número de comunidades} = 1,842(\ln N) - 1,283 \quad (5. 69)$$

Presentando

$$R^2 = 0,916 \quad (5. 70)$$

También se presenta el modelo de la modularidad (Q) de las comunidades obtenidas en las redes analizadas, mediante la siguiente ecuación.

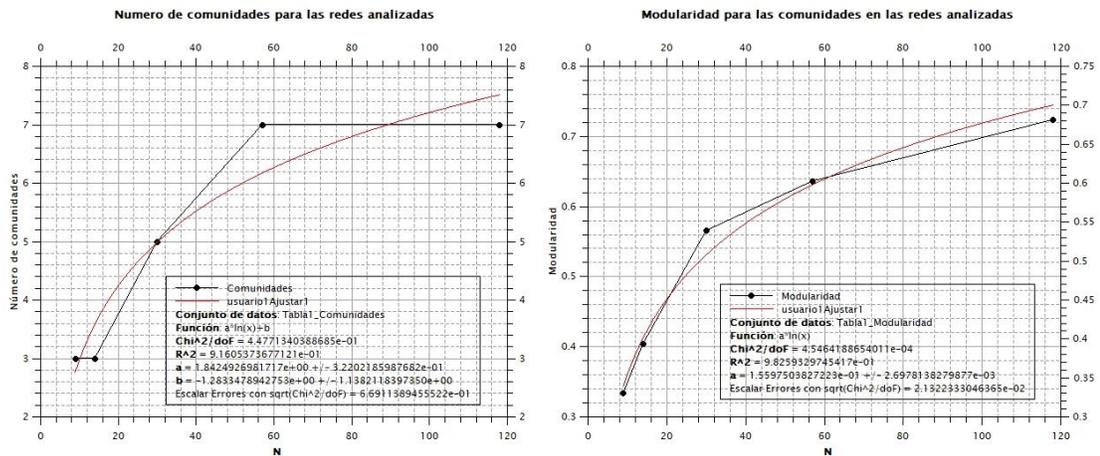
$$Q = 0,1560(\ln N) \quad (5. 71)$$

Presentando

$$R^2 = 0,983 \quad (5.72)$$

Las ecuaciones 5.69 y 5.71 modelan las medidas que estudian este criterio de comunidades resaltando que para ambos casos muestran un comportamiento de logaritmo natural, poniendo en evidencia los valores reducidos de estas respecto al tamaño de la red analizada, pero aclarando que el incremento de estas medidas está en función del aumento de la red. La figura siguiente muestra dicho comportamiento.

Figura 48. **Modelación del número de comunidades y la modularidad de estas para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

Como último punto, el criterio de relación agrupamiento-comunidad plantea la relación entre el coeficiente de agrupamiento promedio y el número de comunidades, sugiriendo una relación inversamente proporcional entre ambos. Para interpretar dicho criterio en las redes analizadas se grafica el número de

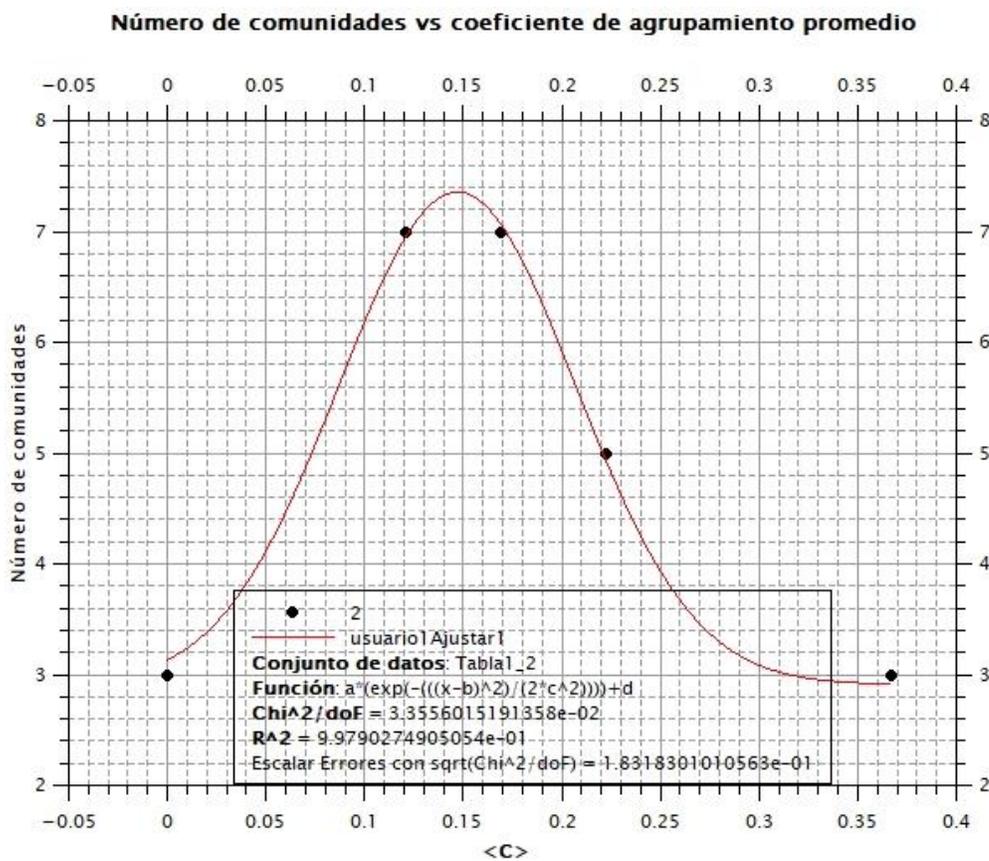
comunidades en función del coeficiente de agrupamiento promedio, obteniendo la figura 49. El modelo de dicha gráfica se presenta en la siguiente ecuación.

$$\text{Num. comunidades} = 4,448 \left( e^{-\left( \frac{((C)-0,1473)^2}{2(-0,06013^2)} \right)} \right) + 2,903 \quad (5.73)$$

Presentando

$$R^2 = 0,998 \quad (5.74)$$

Figura 49. **Modelación del número de comunidades en función del coeficiente de agrupamiento promedio para las redes analizadas IEEE (9, 14, 30, 57, 118)**



Fuente: elaboración propia. QtiPlot versión de prueba.

La ecuación 5.73, además de la figura 49, muestra que la relación entre el número de comunidades y el coeficiente de agrupamiento no son para todos los datos inversamente proporcionales. Gracias a la curva de la figura 49 se hace notorio la división de esta en dos partes, una inicial que es directamente proporcional y la última que es inversamente proporcional.

La anterior discusión determina que la interpretación del criterio de relación agrupamiento-comunidad presenta la relación en este descrita pero que no se cumple en su totalidad. Haciendo uso de la regresión lineal multivariada se determina el modelo descrito en la siguiente ecuación, en donde se introduce como otra variable independiente el número de vértices de la red.

$$\text{Num. comunidades} = 0,04(N) - (1,36)(C) + 3,51 \quad (5. 75)$$

Presentando

$$R^2 = 0,73 \quad (5. 76)$$

El modelo de la ecuación 5.75 presenta que el número de comunidades depende de dos cantidades; por un lado, del número de vértices y por otro del coeficiente de agrupamiento promedio, resaltando que la pendiente correspondiente al coeficiente es negativa, lo cual se interpreta como una relación inversamente proporcional entre el número de comunidades y este (cuando N es cero). Interpretando finalmente para este criterio de relación que debe introducirse el número de vértices para que este se cumpla en la mayoría de los datos.

## **5.6. Operación de los sistemas de potencia**

La operación de los sistemas de potencia desde el punto de estudio de este trabajo de graduación se centra en dos partes debido a las actividades a analizar, por lo que el modelado de la red es el punto de inicio para la determinación de los métodos a utilizar y serán presentados en los siguientes apartados. El primer modelo de red por utilizar es el obtenido en el paso uno del método propuesto para análisis de la estructura de sistemas de potencia, mientras que el segundo modelo se basa en las redes de transporte vistas en la teoría de grafos.

### **5.6.1. Método propuesto para análisis de operación de sistemas de potencia**

En este método se analiza la operación desde el punto de vista de la robustez (fortaleza) del sistema ante ataques o fallas a su estructura (barras y líneas de transmisión), así como las líneas de transmisión (aristas) en las cuales podrá fluir la mayor parte de la potencia transportada por la red (sistema de barras). A continuación, se presenta la serie de pasos por seguir.

- Paso 1: modelar la red a partir del diagrama unifilar del sistema de potencia (sistema de barras), mediante la asignación de un vértice en la red (grafo) a los nodos, barras o arreglo de barras del sistema de potencia seleccionado; también se debe asignar en dicha red una arista por cada línea de transmisión presente en el sistema de potencia. Como resultado se obtiene la red (grafo) por analizar.

- Paso 2: aplicar a la red obtenida del paso 1 la eliminación aleatoria uniforme de vértices vista en el tema de robustez de la red. Mediante esta eliminación obtener la gráfica característica del tamaño de la componente gigante ( $S$ ) en función de la probabilidad de no ocupación ( $f$ ). Para este trabajo de graduación se utiliza 100 corridas del algoritmo de eliminación utilizando la diferencia de iteraciones de 0.0005. Por último, obtener el  $f$  crítico de la red analizada determinado por la ecuación 5.26.
- Paso 3: aplicar a la red obtenida del paso 1 la eliminación no uniforme de vértices vista en el tema de robustez de la red. La eliminación no uniforme utilizada en este trabajo de graduación es la correspondiente al orden descendente de grado de la red. Mediante esta eliminación obtener las gráficas del tamaño de la componente gigante ( $S$ ) en función de la probabilidad de no ocupación ( $f$ ) y la de dicha componente en función del grado del vértice ( $k$ ). Estimando el valor de  $f$  crítico, así como el grado  $k$  crítico (mediante las gráficas).
- Paso 4: aplicar a la red obtenida del paso 1 la eliminación aleatoria uniforme de aristas, la cual cumple con la misma descripción de la eliminación aleatoria de vértices con la diferencia de eliminar aristas en lugar de vértices. Para dicha eliminación obtener la gráfica del tamaño de la componente gigante ( $S$ ) en función de la probabilidad de no ocupación ( $f$ ) tomando en cuenta que dicha probabilidad se maneja con la fracción de aristas removida. En lo concerniente a esta eliminación en este trabajo de graduación se utiliza 100 corridas del algoritmo de eliminación utilizando la diferencia de iteraciones de 0,0005. Estimar el valor de  $f$  crítico (mediante la gráfica).

- Paso5: para la red obtenida en el paso 1 agregar para cada arista el peso adecuado, el cual está determinado por el valor de la resistencia de la línea de transmisión correspondiente a la arista analizada. Obteniendo de esta manera una nueva red con pesos.
- Paso 6: utilizar la red obtenida del paso anterior y determinar para esta el árbol recubridor de mínimo peso.

### **5.6.2. Criterios de interpretación de los resultados generados por el método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia**

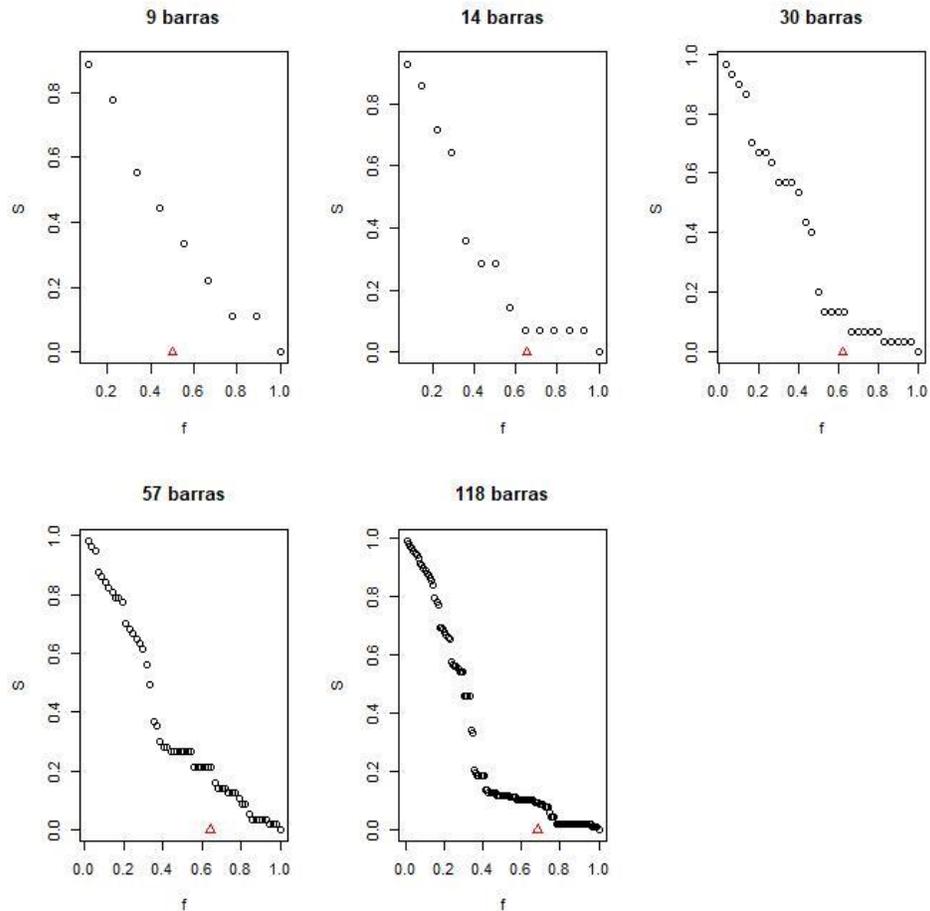
Los criterios de interpretación de este método abordan primero el uso de los sistemas de barras propuestos por la IEEE dentro de los cuales los utilizados en este trabajo de graduación son 9, 14, 30, 57 y 118 barras. Los mismos fueron modelados según el paso 1 de este método obteniendo las redes presentes en las gráficas 36 y 37. Luego se plantean los criterios utilizados en este método, así como la interpretación debida en base a la aplicación de dichos criterios en las redes analizadas.

El primer criterio de este método parte de la aplicación de la eliminación aleatoria uniforme de vértices, la cual también recibe el nombre de eliminación aleatoria, dando así el nombre a dicho criterio. Este criterio determina que tomando como indicador el  $f$  crítico de la red analizada, esta será más robusta si presenta un valor cercano a 1.

Simplificando dicho criterio una red es más robusta entre más grande sea el valor de su  $f$  crítico, esto se debe a que una mayor fracción de vértices (barras) debe ser afectada para presentar un colapso en la misma. En la

siguiente figura se presentan las gráficas obtenidas del paso 2, en las redes analizadas.

**Figura 50. Gráficas de eliminación aleatoria uniforme de vértices, obtenidas del paso 2 para las redes IEEE (9, 14, 30, 57 y 118 barras)**



Fuente: elaboración propia. R software.

Para los valores determinados y estimados de los pasos 2 y 3 se presentan estos resultados unificados en la siguiente tabla.

Tabla VIII. **Resultados obtenidos del paso 2 y 3 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia**

Redes	Eliminación aleatoria	Eliminación dirigida (ataque por k)	
	Fc	fc	kc
<b>9 barras</b>	0,5000	0,3333	2
<b>14 barras</b>	0,6500	0,4286	3
<b>30 barras</b>	0,6250	0,3000	3
<b>57 barras</b>	0,6437	0,4035	3
<b>118 barras</b>	0,6844	0,4153	4

Fuente: elaboración propia.

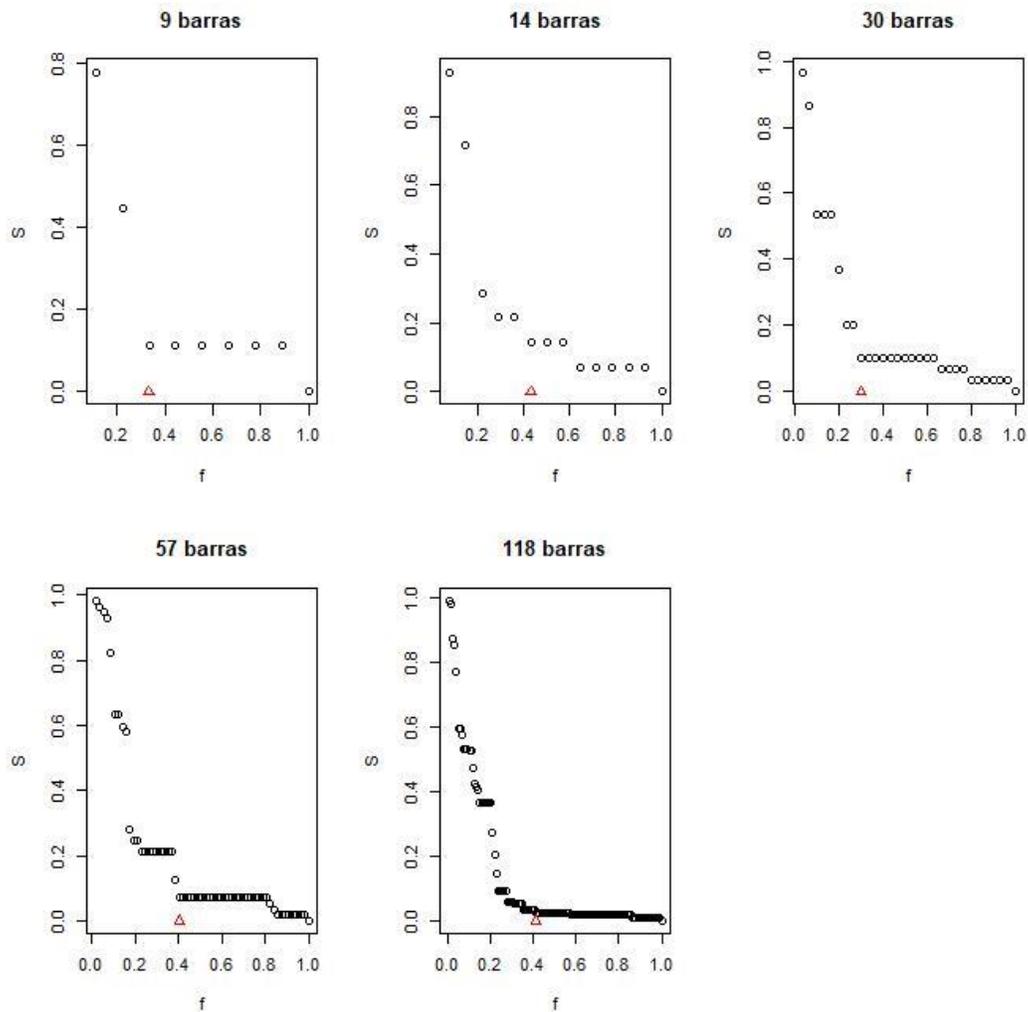
La interpretación del criterio de eliminación aleatoria indica que para las redes analizadas según los valores de la columna correspondiente en la tabla VIII, estos son cercanos a uno (promedio de 0,6206) lo que determina redes robustas ante eliminaciones aleatorias. Lo que se contrasta con lo observado en la gráfica 50 donde se presenta primero el comportamiento esperado de una red aleatoria ante esta prueba y luego que el punto crítico de ruptura de la componente gigante es cercano al calculado en la tabla VIII (punto rojo en la gráfica). Este criterio genera un nivel (indicador) de robustez por eliminación aleatoria gracias al valor del f crítico obtenido.

La diferencia entre el dato teórico y lo estimado experimentalmente (utilizando la gráfica) se debe al uso de aleatoriedad en el proceso de eliminación, respaldando el dato calculado. Experimentalmente, este dato se presenta cercano, para la mayoría de las redes analizadas, a un valor de S de 0.1, dicha proporción para las redes analizadas indica un número demasiado bajo de vértices para considerarse una componente gigante.

El segundo criterio en este método es el criterio de eliminación dirigida, también llamado criterio de ataque, que se basa en la eliminación no uniforme de vértices utilizando como discriminante de eliminación el grado de los vértices que integran la red analizada, comenzando con los vértices de mayor grado y continuando en forma descendente. Este criterio, al igual que el anterior, se basa en el valor del  $f$  crítico y del valor de grado de vértice crítico, los cuales son los valores o proporción de vértices a los cuales el tamaño de la componente gigante se toma como nulo.

El criterio de ataque determina que entre más cercano a uno sea el valor de  $f$  crítico más robusta será la red para eliminación dirigida, mientras que el  $k$  crítico indica el grado de vértice máximo (puede presentarse en más de un vértice) al cual la red bajo ataque (ya afectada) presenta una componente gigante; debajo de este  $k$  la red colapsa. Presentando en las siguientes figuras las gráficas del comportamiento de  $S$  en función de  $f$  crítico y en función de  $k$ , obtenidas del paso 3 del método propuesto.

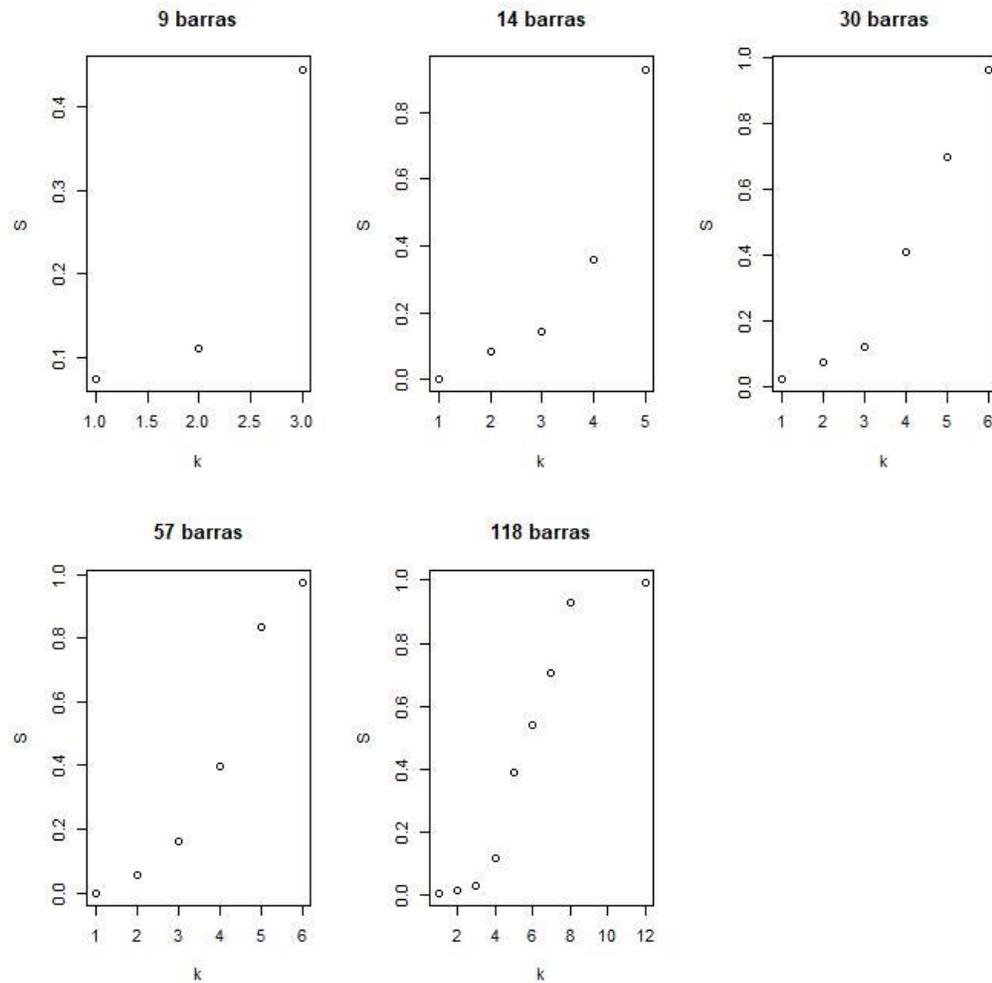
Figura 51. **Gráficas de S en función de f para la eliminación no uniforme de vértices, obtenidas del paso 3 en las redes IEEE (9, 14,30, 57 y 118 barras)**



Fuente: elaboración propia. R software.

La figura 52 presenta las gráficas de S en función de k para la eliminación no uniforme de vértices en las redes analizadas, dado que existe más de un vértice de grado k se promedió el valor de S en cada k.

Figura 52. **Gráficas de S en función de k para la eliminación no uniforme de vértices, obtenidas del paso 3 en las redes IEEE (9, 14,30, 57 y 118 barras)**



Fuente: elaboración propia. R software.

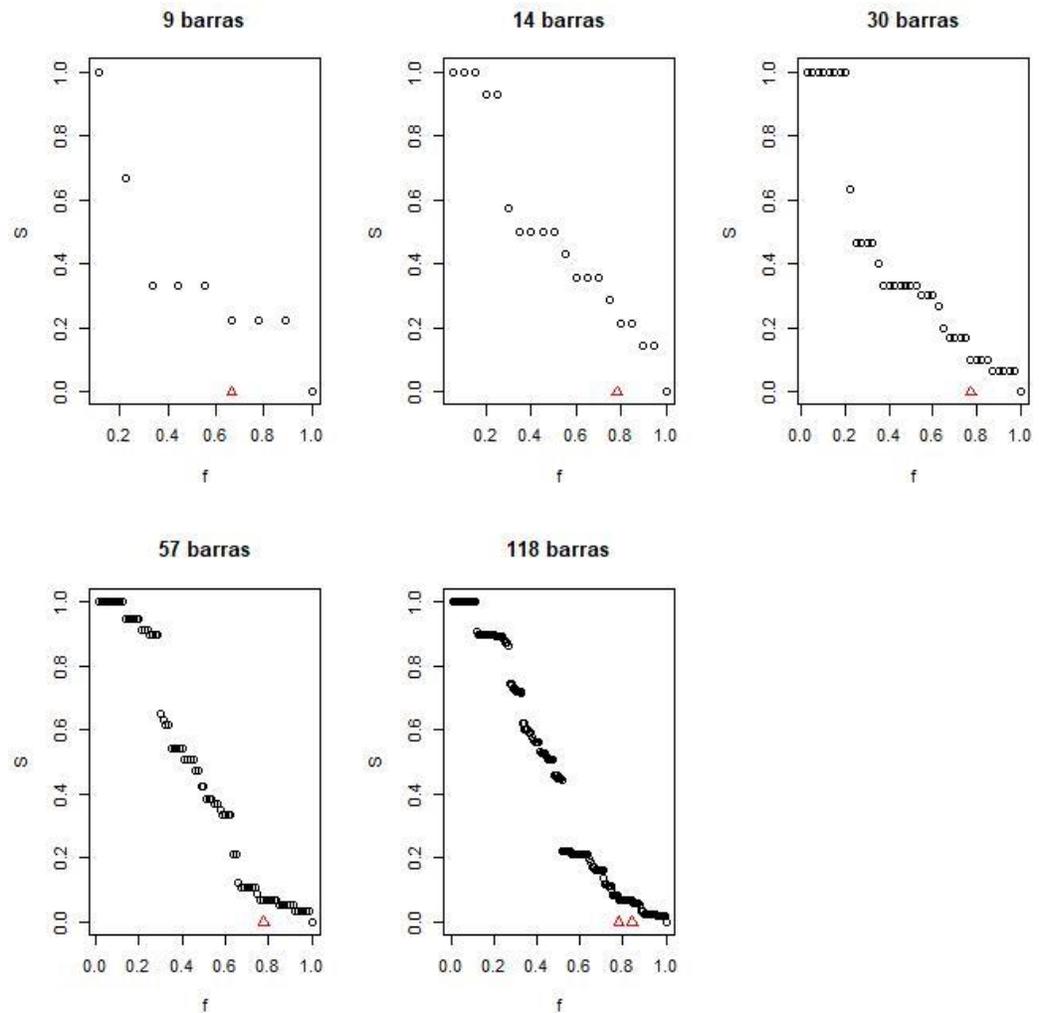
La interpretación del criterio de ataque determina que para las redes analizadas según los datos estimados gráficamente de  $f_c$  presentes en la tabla VIII, son cercanos a cero (promedio 0,3761) lo que indica que estas redes no son lo suficientemente robustas en cuanto a eliminación no uniforme de vértices se refiere. Lo anterior encaja con la teoría de robustez de las redes aleatorias,

las cuales presentan el comportamiento visto en eliminación aleatoria y que en la eliminación dirigida presentan valores de  $f$  crítico menores a los de eliminación aleatoria. Esto corrobora lo indicado en los criterios de estructura, que las redes eléctricas son redes aleatorias.

Los valores de  $k$  crítico indican que a valores cercanos del  $\langle k \rangle$  para cada una de las redes se encuentra el punto crítico de colapso, lo que indica que se deben eliminar los vértices con grado superior al del promedio para causar un colapso. Los valores estimados gráficamente de  $f$  crítico para este criterio se encuentran para un valor de  $S$  menor a 0.15, lo que en referencia al tamaño total de cada red es un número de vértices que no puede considerarse como componente gigante, de ahí su selección. Por otra parte, la selección del valor de  $k$  crítico correspondió a valores de  $k$  para los cuales el valor de  $S$  es menor a 0.2, determinando que esta fracción de vértices no puede considerarse como una componente gigante.

El tercer criterio, denominado de eliminación aleatoria de aristas, utiliza el resultado obtenido del paso cuatro, al igual que el criterio de eliminación aleatoria, entre más cercano sea el  $f$  crítico a uno más robusta será la red ante dicha eliminación. En la siguiente figura se presenta las gráficas de  $S$  en función de  $f$  crítico para las redes analizadas.

Figura 53. **Gráficas de S en función de f para la eliminación aleatoria uniforme de aristas, obtenidas del paso 4 en las redes IEEE (9, 14, 30, 57 y 118 barras)**



Fuente: elaboración propia. R software.

Los valores de  $f$  crítico se muestran en la siguiente tabla, para las redes analizadas.

Tabla IX. **Resultados obtenidos del paso 4 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia**

Eliminación aleatoria de aristas	
Redes	fc
<b>9 barras</b>	0,6667
<b>14 barras</b>	0,7826
<b>30 barras</b>	0,7750
<b>57 barras</b>	0,7790
<b>118 barras</b>	0,7808

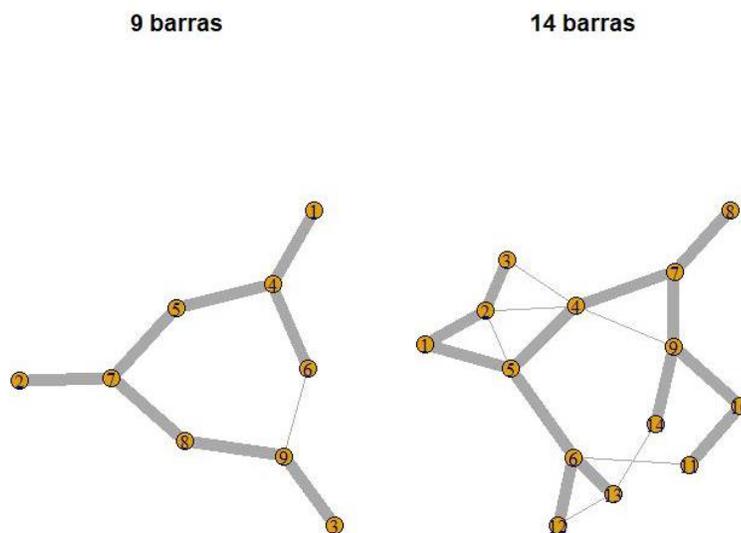
Fuente: elaboración propia.

La interpretación del criterio de eliminación aleatoria de aristas para las redes analizadas determina que los valores estimados mediante la gráfica de la figura 53 son cercanos a uno (promedio 0,7568), por lo que las redes son robustas para la eliminación aleatoria de aristas. La estimación de estos valores para  $f$  en los cuales los valores de  $S$  decaen de valores cercanos a 0,2 y menores a este, que para cada red indica números insignificantes de vértices comparados con el total de vértices de la red, por lo cual no se puede considerar una componente gigante para estos valores de  $f$  y mayores a este.

El último criterio de este método se especificado en la parte 1, es el de árbol de resistencia mínima, este se basa en el árbol recubierto de peso mínimo aplicado a las redes analizadas, tomando como pesos de las aristas el valor de resistencia de las líneas de transmisión correspondiente. Este criterio brinda el cálculo de dicho árbol de resistencia mínima del sistema de potencia, dado que la corriente tiende a buscar el camino con menor resistencia posible para fluir, lo que genera que las aristas del árbol obtenido tengan gran porcentaje de flujo de corriente respecto a las otras aristas (excluidas del árbol recubridor).

A continuación, se adjunta la gráfica que contiene las redes con los árboles obtenidos, así como la tabla con los resultados del peso total y el número de aristas seleccionadas. Para este trabajo de graduación en específico, en dicho criterio se utilizó únicamente las redes de 9 y 14 barras de la IEEE, dado que estas son presentadas como casos de ejemplo (casos guía para el análisis) de la aplicación del método propuesto centralizando el paso 6.

Figura 54. **Árboles recubridores de peso mínimo obtenidos del paso 6 del método propuesto para las redes IEEE (9 y 14 barras)**



Fuente: elaboración propia. R software.

Tabla X. **Resultados obtenidos del paso 6 del método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia**

Árbol recubridor de peso mínimo		
Redes	Peso total	No. De aristas
9 barras	0,0794	8
14 barras	0,56378	13

Fuente: elaboración propia.

La interpretación del criterio del árbol recubridor de resistencia mínima para estas dos redes analizadas determina las aristas de mínima resistencia en la red, lo cual se traduce como las líneas de transmisión de baja resistencia del sistema. Solo se considera la parte real de la impedancia dado que es aquí donde surgen las pérdidas, donde grandes porciones del flujo de corriente circularán, siendo este árbol el que genere las menores pérdidas posibles.

### **5.6.3. Análisis de flujo máximo en redes de transporte para flujos de potencia**

Para aplicar el método de flujo máximo de las redes de transporte a los sistemas de potencia se requiere la modelación de dicho sistema como una red de transporte, utilizada en la teoría de grafos, de esta manera los flujos de potencia circularán por las aristas desde la fuente hasta el sumidero. Como consecuencia de lo anterior, en el caso de los sistemas de potencia que cuentan con varias barras de generación (más de un generador) se utiliza el modelo visto en redes de transporte llamado multifuente.

Ya que en las redes de transporte se obtiene el flujo máximo se indica que este no obtendrá la solución de flujos de potencia de manera exacta, si este es el fin se deberá usar los métodos iterativos vistos con anterioridad.

El proceso (metodología) que se mencionará y estudiará a continuación es el presentado por Nidia Sánchez en su tesis de postgrado: *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia* (done botes se refiere a la desconexión de carga). Esta se centra en la utilización del flujo máximo de la red modelada para la obtención del bote de carga respectivo, cuando el sistema se encuentra en contingencia (salida de una línea de transmisión). Uno de los aspectos por resaltar es que

para aplicar el flujo máximo en una red de transporte se debe tener la capacidad de cada una de las aristas de dicha red.

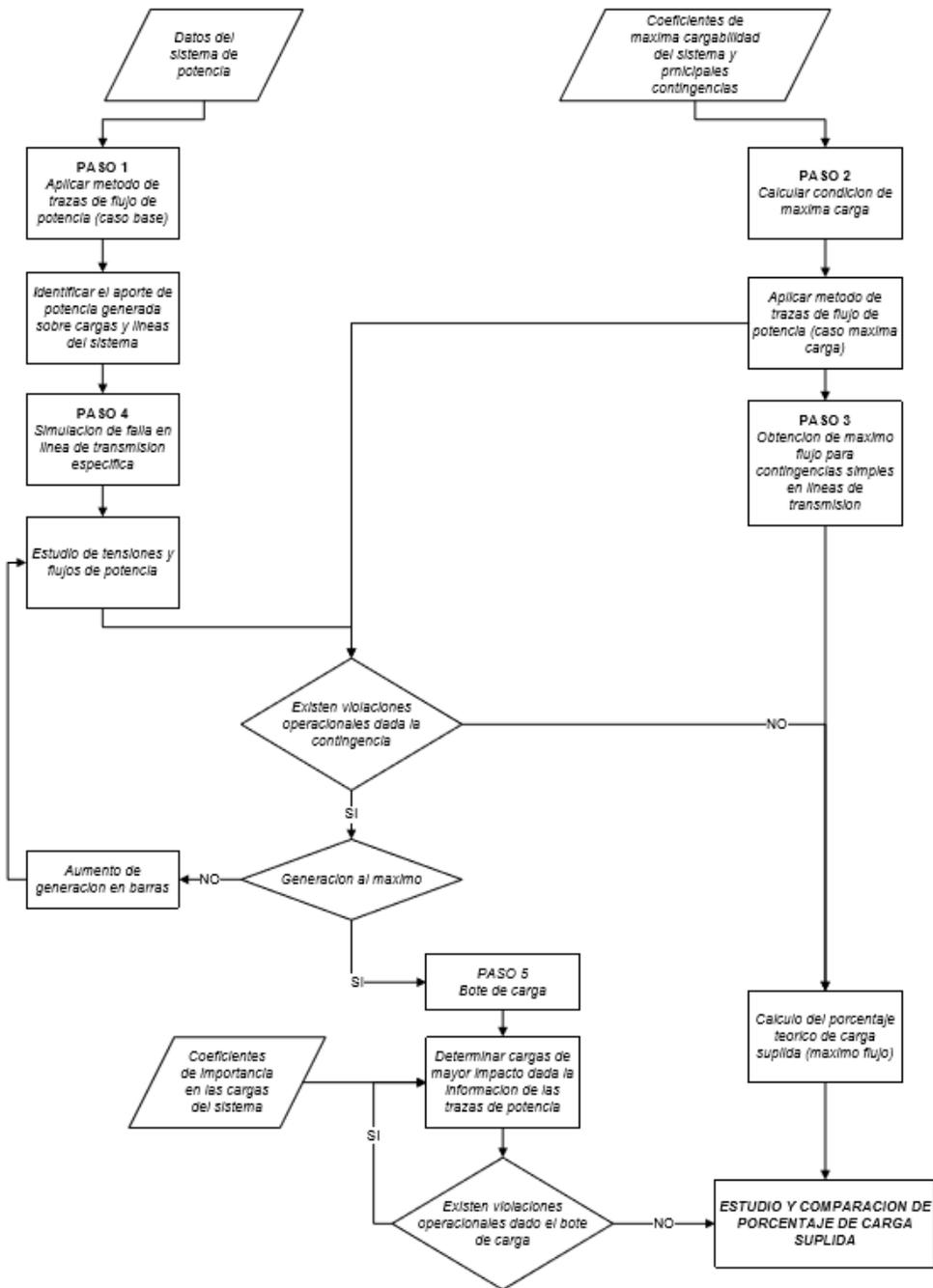
En la metodología mencionada esto queda claro, indicando que para obtener dicha capacidad es necesario determinar los aportes que cada generador hacia las líneas de transmisión, barras, cargas, así como otros elementos presentes y determinar el estado de carga máxima del sistema (potencia máxima que puede fluir por la línea de transmisión y brindarse por los generadores).

Con esto presente se puede llevar a cabo la aplicación de flujo máximo en la red modelada. Los aportes y el estado de carga máxima pueden obtener por los métodos de trazas de potencia y la determinación de límites operacionales de líneas de transmisión y generadores (presentes en).<sup>75</sup> A continuación, se presenta el algoritmo propuesto por esta metodología.

---

<sup>75</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia*. p 43-64, 75-76

Figura 55. Diagrama de flujo del algoritmo propuesto por N. Sánchez



Fuente: SÁNCHEZ, Nidia. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia.* p. 77.

Dicha metodología indica la desconexión de carga, por lo que para obtener el porcentaje de carga que se debe disminuir se utiliza la ecuación determinada por Sánchez.<sup>76</sup> La cual se muestra a continuación.

$$\% \text{Carg} = \frac{\text{Flujo máximo}}{\text{Potencia de generación}} \quad (5.77)$$

Con lo cual se obtiene el porcentaje de carga que disminuye en dado caso fuese necesario, dado que las líneas de transmisión o generadores violan los límites de operación para la condición de contingencia analizada. En esta metodología mencionada se tomó como caso de estudio el sistema de 14 barras, produciendo en las salidas individuales de cada una de sus líneas y ejecutando el algoritmo de la figura 85. Para este trabajo de graduación es importante mencionar los valores de flujo máximo obtenidos por Sánchez para esta prueba.

Es importante resaltar que para los datos obtenidos por Sánchez y los experimentales en base a los límites de operación y aportes de potencia propuestos,<sup>77</sup> se determina que el flujo máximo utilizado como método para predicción de solución de flujos de potencia en casos de contingencias presenta inconvenientes.

Esto se debe a que al ser un flujo máximo este no es el real para la condición estudiada, aun si se determina una relación en base al flujo real dividido el flujo máximo, este tiende a variar según el caso de contingencia que se obtiene, por lo que tomar esta relación como constante no dará un resultado

---

<sup>76</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia*. p 89.

<sup>77</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia*. p 82-85.

exacto; esto se presenta en la tabla XII donde se puede ver la diferencia de relaciones para los casos presentados.

**Tabla XI. Resultados obtenidos de la metodología propuesta por Nidia Sánchez (también resultados experimentalmente en este trabajo de graduación)**

<b>Salida individual de líneas de transmisión</b>			
<b>Barra inicial</b>	<b>Barra final</b>	<b>Flujo Max. (MW)</b>	<b>Flujo Max. (MW)</b>
		<b>Experimental</b>	<b>N. Sánchez</b>
1	2	147,2	130,02
1	5	228,911	234,61
2	3	226	227,26
2	4	244,74	245,4
2	5	265,17	277,17
4	3	284,41	284
5	4	244,76	243,3
7	4,9,8	253,5	218
4	9	285,65	285,74
5	6	251,76	251,7
6	11	295,75	295,73
6	12	295,03	295
6	13	284,05	284
9	10	295,98	296,09
9	14	293,02	293,1
11	10	301,07	301,06
12	13	302,89	302,95
13	14	298,69	298,71

Fuente: elaboración propia según datos de Sánchez Nidia.

Tabla XII. **Resultados de flujo máximo en relación con el flujo real (casos estudiados por N. Sánchez)**

Casos	Flujo Max. (MW)	Flujo Max. (MW)	Flujo Real (MW)	Relación FR/FM	
	Experimental	N. Sánchez		Exp.	N. Sánchez
<b>Condición inicial</b>	303,8	303,86	272,593	0,897	0,897
<b>Salida Línea b1-b5</b>	228,911	234,61	280	1,223	1,193

Fuente: elaboración propia según datos de Sánchez Nidia.

Analizando la metodología mencionada,<sup>78</sup> la utilización del flujo máximo para la determinación del porcentaje de carga por desconectar aplicado a la potencia real del sistema es confiable basado en las conclusiones de Sánchez.<sup>79</sup>

Uno de los temas importantes por considerar en esta metodología es que se puede determinar mediante las trazas de potencia el aporte de cada generador para soportar la salida individual de la línea según el caso estudiado<sup>80</sup>, así como las líneas de transmisión afectadas por dicha contingencia. Considerando una aplicación de dicha metodología del flujo máximo a los sistemas de potencia en contingencias como confiable.

<sup>78</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia.* p 75-77.

<sup>79</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia.* p 134.

<sup>80</sup> SANCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia.* p 89-90.

## 5.7. Diseño y planificación de sistemas de potencia

El diseño y planificación de un sistema de potencia debe requerir de un proceso de modelización como el utilizado por el método de estructura con la característica de que este debe generar un diagrama unifilar de un sistema de potencia a partir de una red modelada (grafo).

La modelación mencionada debe estar clara para saber que las herramientas de teoría de grafos por utilizar para el diseño y planificación deben de aplicarse a una red (grafo) y no directamente al sistema de potencia (diagrama unifilar). En este apartado se determina que las herramientas de teoría de grafos por utilizar se basan en la optimización de la red, por tanto, las herramientas seleccionadas son las siguientes:

- Árbol recubridor de máximo peso.
- Puntos de articulación.
- Robustez (eliminación aleatoria uniforme de vértices y eliminación no uniforme de vértices).
- Comunidades (modularidad y número óptimo de comunidades).

Para utilizar las herramientas antes mencionadas se inicia con una red (grafo) primitivo el cual solo cuenta con nodos (vértices) estos representan las barras y nodos del sistema de potencia, como se mencionó en el método de estructura, a estas se conectarán las cargas, generadores y líneas de transmisión. Los vértices de esta red primitiva tienen asociada la magnitud de potencia que estos manejan (potencia demandada, potencia generada o potencia transmitir dependiendo el caso).

Las futuras aristas que unirán estos vértices (líneas de transmisión) tienen asociado la magnitud de la distancia que existe entre cada par de vértices según las aristas, esta magnitud está dada en kilómetros.

Basado en lo anterior se procede a generar la red primitiva en la cual se tendrá dentro del conjunto de vértices del grafo a todos los vértices a los cuales se desea unir en una red y las aristas que pertenecerán al conjunto de aristas del grafo serán todas aquellas posibles conexiones que puedan darse entre cualesquiera de los vértices de dicho grafo. Esta red primitiva es un grafo ponderado, determinando el peso de cada arista por la siguiente expresión.

$$Pe(e_{ij}) = \frac{P(v_i) + P(v_j)}{d_{ij}} \quad (5.78)$$

Donde:

- $P(v_i)$ : potencia asociada al vértice  $i$  (nodo inicial)
- $P(v_j)$ : potencia asociada al vértice  $j$  (nodo final)
- $d_{ij}$ : distancia entre ambos vértices

La red primitiva permite tomar en cuenta todas las posibles líneas de transmisión (aristas) que puedan conectar a las barras (carga y generación) presentes en el nuevo sistema. La aplicación del árbol recubridor de máximo peso es determinar todas las aristas pertenecientes al grafo que maximicen la cantidad de potencia transportada por kilómetro de línea de transmisión en la nueva red. El árbol resultante de dicho algoritmo se convertirá en la red nueva a la cual se deberá de traducir a un diagrama unifilar y generar así el nuevo sistema de potencia con las  $n$  barras deseadas.

Un aspecto por considerar de esta red nueva es que dicha red solo será un bosquejo de lo que podrá ser el sistema de potencia por construir dado que para determinar este sistema se deberá analizar el flujo de potencia de este presistema (red nueva) y con ello analizar si este no viola los límites operacionales establecidos en el sistema de potencia, de lo contrario se deberá de hacer mejoras para el mismo.

En base a la red nueva, enfocándose en la estructura (conexión de los vértices) y como mejora de la misma, se toma en consideración los puntos de articulación, los cuales indicarán si la red nueva presenta dichos puntos o no, de presentarlos indicará cuáles son y con ayuda del algoritmo de árbol recubridor de máximo peso se procederá a integrar en la red nueva aquellas aristas de máximo peso (mayor a menor peso) que no fueron tomadas en cuenta, dado que estas generaban ciclos.

Esta herramienta brindará una red nueva mejorada con la arista agregada a la cual se ejecutará el algoritmo de puntos de articulación para determinar si existen o no; este proceso de revisión de puntos de articulación e insertar una nueva arista podrá realizarse las veces necesarias para eliminar los puntos de articulación existentes en la red o hasta disminuir la cantidad de estos a un número deseado.

Para estas herramientas de árbol recubridor de máximo peso y puntos de articulación se deben reconocer dos casos importantes respecto de las condiciones de diseño. El primero se origina al diseñar una red nueva (desde cero) y el segundo cuando se diseña una expansión de una red existente.

La diferencia entre estos casos para el análisis de aplicación de estas herramientas es que la red primitiva para el primer caso debe contener todos

los vértices por integrar en el sistema, así como las aristas posibles. Mientras que en el segundo caso la red primitiva debe contar con los vértices que se desean agregar, así como todos vértices existentes donde se conecten todas las aristas posibles (vértice existente, vértice nuevo). La revisión de puntos de articulación se realizará en el primer caso con la red nueva; por lo contrario, en el segundo caso deberá aplicarse dicha revisión con la red resultante de la expansión más la red existente.

Por último, las herramientas de robustez y comunidades serán aplicadas a las redes obtenidas (red nueva o red existente), para determinar la robustez de la red por medio del valor de  $f$  crítico, y con ello generar la porción crítica de vértices eliminados que producen el colapso de la red.

La herramienta de comunidad, en específico la modularidad, además de dar el valor característico de esta respecto del número óptimo de comunidades, también brinda el dato importante de cómo se integran estas comunidades, es decir, cuántas son y qué vértices abarcan. Con ello se consigue determinar las aristas que conectan dichas comunidades, las cuales se vuelven cruciales dado que son conexiones para mantener una única red; de lo contrario, esta red se conformaría de islas (componentes altamente conectadas internamente pero no conectadas entre ellas).

Para ejemplificar el uso de la herramienta de árbol recubridor de máximo peso se procede a ejecutar dicha herramienta junto con los puntos de articulación para obtener una red nueva a partir de una red primitiva. A continuación, se presentan los datos iniciales para la creación de la red primitiva hipotética.

Tabla XIII. **Datos de potencia en vértices para el caso hipotético de ejemplificación para el árbol recubridor de máximo peso**

Pg (MW)	Pd (MW)	Pprog (MW)
0	18	18
30	0	30
0	28	28
24	0	24
27	10	17
0	15	15
0	5	5
0	5	5

Fuente: elaboración propia.

En la tabla XIII se muestran los datos de la potencia asociada a cada vértice, para ser aplicada la ecuación 5,78 con los datos de la columna de Pprog que significa potencia programada. A continuación, se muestran las posibles conexiones con su debido peso obtenido de la ecuación antes mencionada.

Tabla XIV. **Datos de posibles conexiones entre vértices para el caso hipotético de ejemplificación para el árbol recubridor de máximo peso**

Posibles conexiones	Distancia (km)	Peso
AB	50	0,960
AC	70	0,657
AE	40	0,875
AF	40	0,825
AG	30	0,767
BC	55	1,055
BE	101	0,465
CD	50	1,04

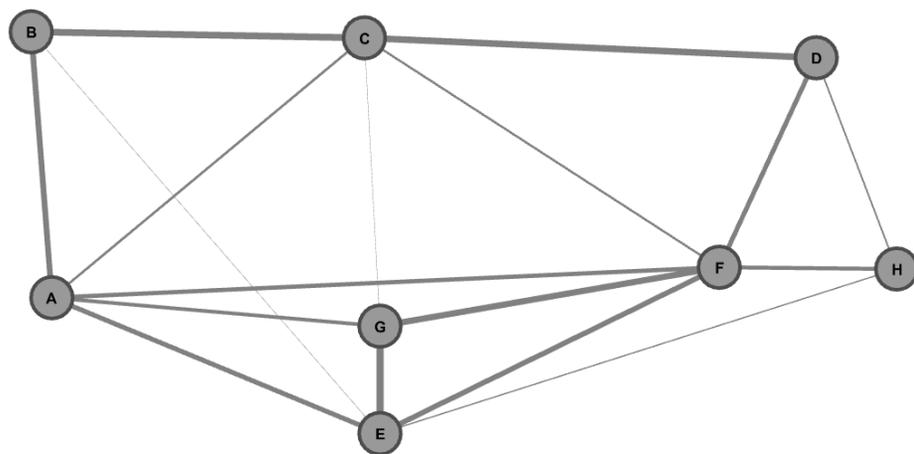
Continuación de la tabla XIV

<b>CF</b>	<b>68</b>	<b>0,632</b>
<b>CG</b>	72	0,458
<b>DF</b>	45	0,867
<b>EF</b>	35	0,914
<b>EG</b>	20	1,1
<b>FG</b>	20	1
<b>HD</b>	50	0,58
<b>HF</b>	25	0,8
<b>HE</b>	40	0,55

Fuente: elaboración propia.

Con los datos de la tabla XIII y XIV se procede a la elaboración de la red primitiva obteniendo el siguiente grafo.

Figura 56. **Red primitiva para el caso hipotético ejemplificado**

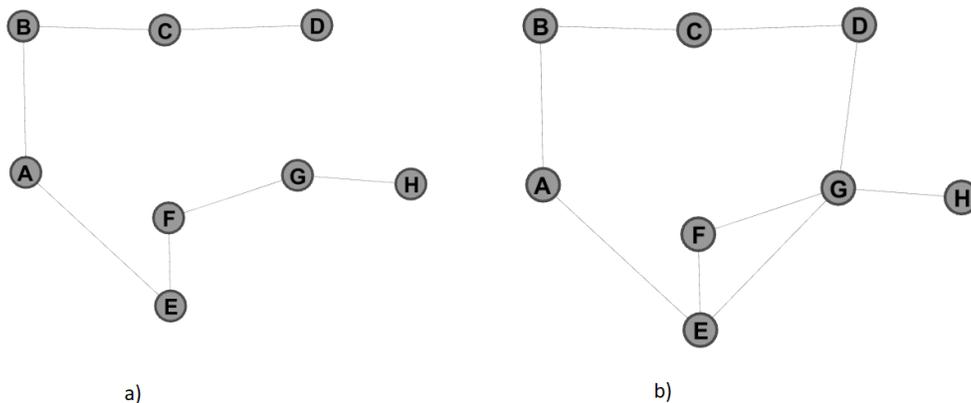


Fuente: elaboración propia, Gephi versión 0.9.2

Mediante la aplicación del árbol recubridor de máximo peso se obtiene la red nueva diseñada a partir de la red primitiva de la figura 56, esta se muestra en la figura 57.a, la cual presenta 6 puntos de articulación de los 8 vértices que integran la red. Por lo tanto, mediante el procedimiento mencionado con

anterioridad al insertar la siguiente arista de mayor peso y revisión de puntos de articulación se llega a la red nueva mejorada de la figura 57.b. Esta cuenta con solo un punto de articulación respecto de los seis puntos de su predecesora mejorando dicha cantidad de puntos, gracias a la agregación de dos aristas más.

Figura 57. **Red nueva obtenida del proceso de árbol recubridor de máximo peso y puntos de articulación para el caso hipotético ejemplificado**



Fuente: elaboración propia, Gephi versión 0.9.2

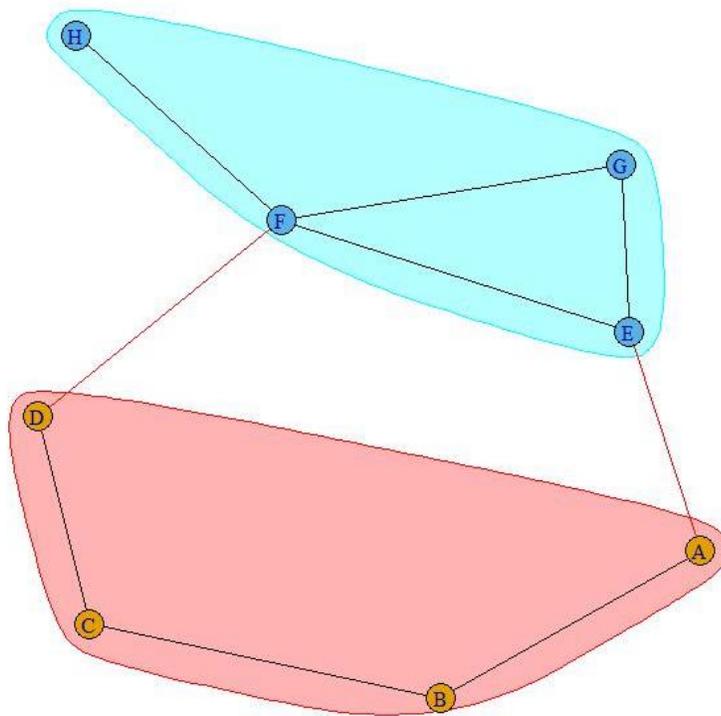
A la red nueva mejorada obtenida del anterior proceso (figura 57.b) se determinó el número de comunidades óptimas resultando ser 2, obteniendo una modularidad de 0,2716049. Las dos comunidades obtenidas están integradas por los siguientes vértices:

- Comunidad 1: A, B, C y D
- Comunidad 2: E, F, G y H

Con ello se logró determinar que las aristas importantes en dicha red son las siguientes: (A, E) y (D, F). Es de tomar en cuenta dichas aristas dado que

representan las líneas de transmisión que conectarán a dos comunidades, por lo que serán de importancia para el flujo de potencia y la continuidad de una sola red. A continuación, se presenta la red nueva mejorada con sus comunidades respectivas.

Figura 58. **Red nueva mejorada para el caso hipotético ejemplificado analizando comunidades**



Fuente: elaboración propia, R software.

Para la red nueva mejorada se aplicó por último la herramienta de robustez obteniendo los resultados de la tabla XV, los cuales indican que presenta una robustez cercana a uno, lo que indica que resiste una eliminación aleatoria mayor a la mitad de sus vértices antes de que la red colapse. Mientras que la eliminación dirigida en función del grado de sus vértices colapsa la red si se elimina la mitad de estos, o sea que, para valores menores resiste dicho

ataque. Con esto se terminan las herramientas para diseño y planificación de sistemas de potencia.

Tabla XV. **Datos de robustez obtenidos de la red nueva mejorada del caso hipotético analizado**

Eliminación aleatoria		Eliminación dirigida (k)
fc teórico	fc experimental	fc experimental
0,556	0,625	0,5

Fuente: elaboración propia.

## **6. APLICACIÓN DEL ANÁLISIS PROPUESTO EN EL SISTEMA NACIONAL INTERCONECTADO (SNI)**

### **6.1. Análisis de estructura del sistema**

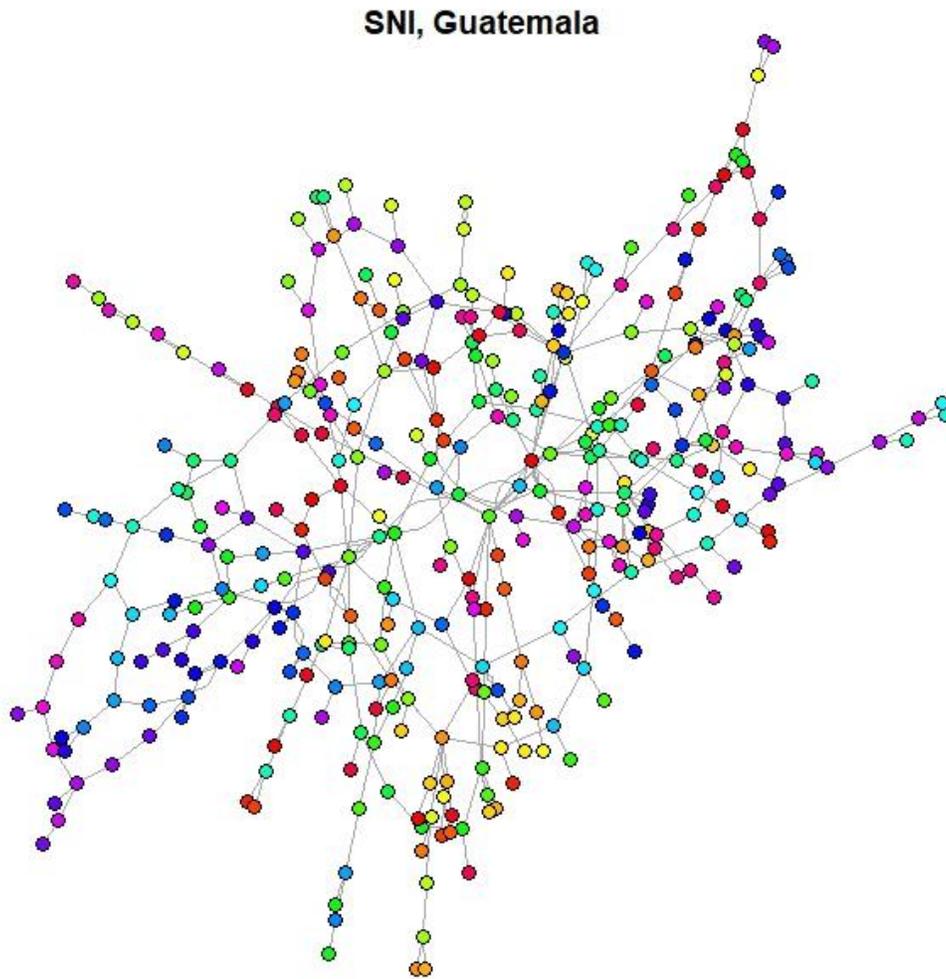
El análisis de la estructura del Sistema Nacional Interconectado se lleva a cabo por la implementación del método en el capítulo anterior. En este capítulo se trata de la presentación de los resultados obtenidos de este método para el SNI y la respectiva interpretación, mediante los criterios abordados en el capítulo anterior.

El inicio de este método contempla la modelación del sistema como una red, y luego se procede con los pasos siguientes del método, de los cuales se mencionan solo resultados obtenidos en forma de tabla. A continuación, se presentan la modelación del SNI, obtenida de los lineamientos propuestos por el método, cuya red se sirve para analizar en este capítulo.

La red de la figura 59 se obtiene a partir de la modelación del diagrama unifilar del SNI, actualizado con fecha 31/03/2017. Esta red cuenta con un número total de 373 vértices y 462 aristas.

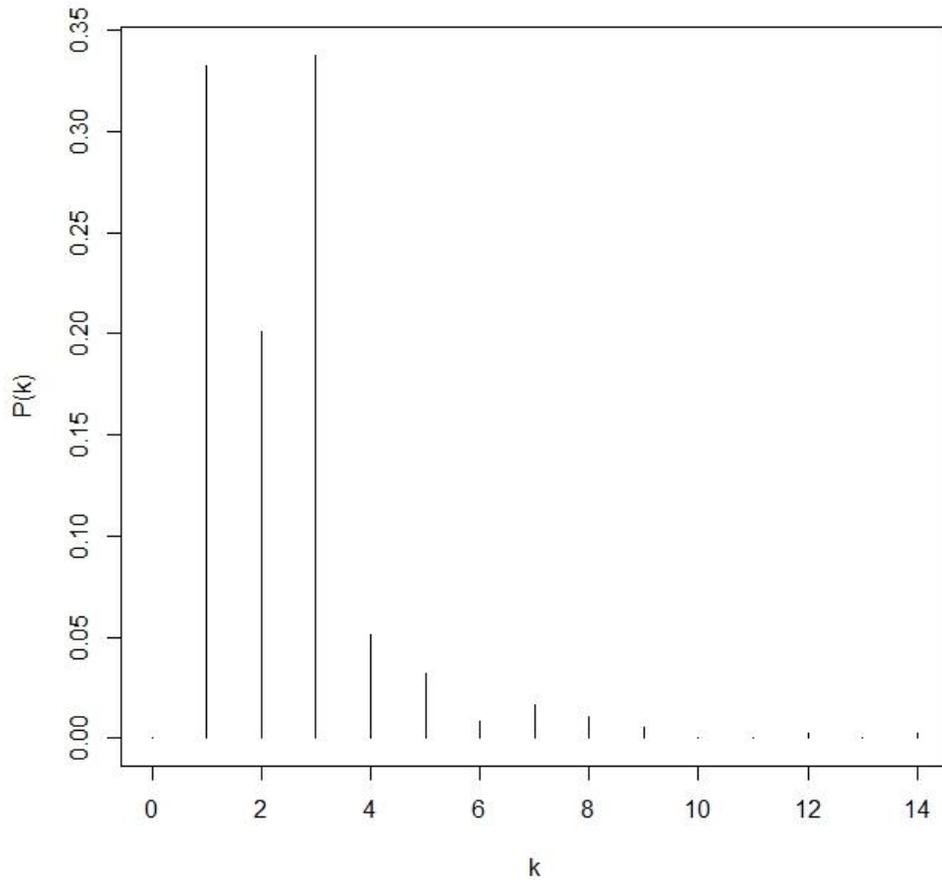
A partir de la red obtenida (figura 59) se determina la distribución de grado del SNI, la cual se presenta en forma de gráfica mediante la figura 60.

Figura 59. **Red obtenida de la modelación del Sistema Nacional Interconectado de Guatemala (SNI)**



Fuente: elaboración propia, R software.

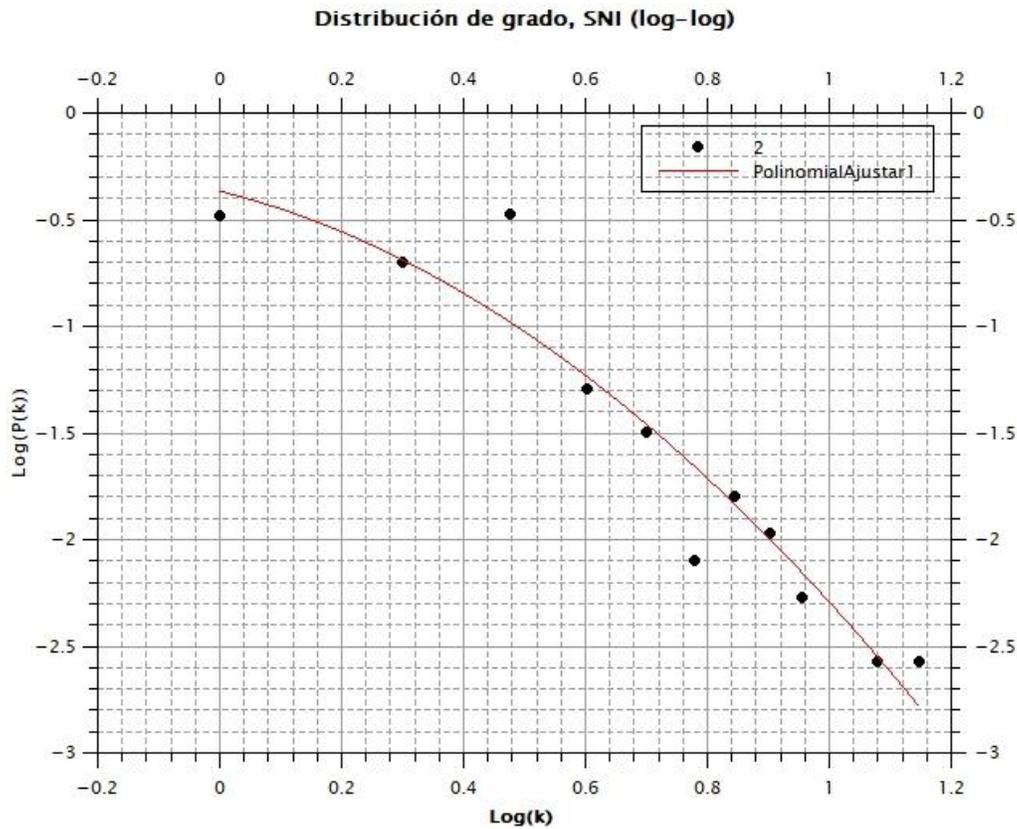
Figura 60. **Distribución de grado de la red del SNI**



Fuente: elaboración propia, R software.

La figura 60 muestra una distribución de grado con un comportamiento semejante al de una distribución de Poisson, pero este no se muestra con tanta evidencia, por lo que se reproduce esta grafica de distribución de grado en escala logarítmica para evidenciar el comportamiento de distribución de Poisson y no de una distribución de ley de potencia, dados los modelos de redes estudiados en este trabajo de graduación. A continuación, se presenta la gráfica logarítmica.

Figura 61. **Distribución de grado de la red del SNI en escala logarítmica**



Fuente: elaboración propia, QtiPlot versión de prueba.

De la figura 61 se modela la gráfica de distribución de grado, obteniéndose el siguiente modelo matemático que demuestra un comportamiento distinto al de una distribución de ley de potencia y cercano al de una distribución de Poisson.

$$\log P(k) = -1,2176 * (\log k)^2 - 0,7053 * (\log k) - 0,3693 \quad (6. 1)$$

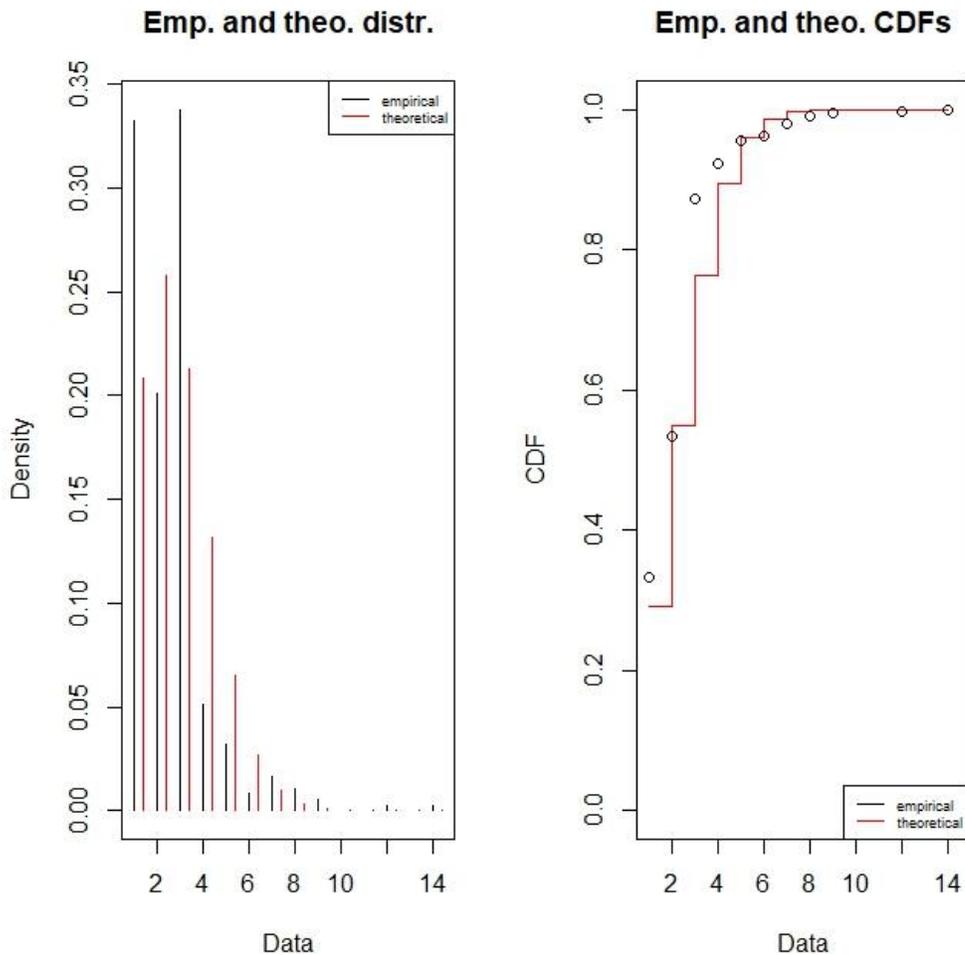
Presentando

$$R^2 = 0,9145 \quad (6. 2)$$

Para obtener los parámetros correspondientes a los de una distribución de Poisson se efectúa un análisis de ajuste de distribución de Poisson obteniendo un valor de lambda de 2,4772 y se muestra la siguiente gráfica donde se compara los valores obtenidos de la distribución de grado contra los valores teóricos de una distribución de Poisson con el lambda antes mencionado.

En la figura 62 se muestra los valores experimentales (color negro) obtenidos de la distribución de grado de la red del SNI y los teóricos obtenidos de la distribución de Poisson para el lambda antes mencionado (color rojo). Con lo anterior mencionado realizando los análisis mostrados en las figuras 61 y 62 se puede mencionar que la distribución de grado de la red sigue una distribución de Poisson lo que la convierte en una red aleatoria que se corroborará con los datos siguientes según la interpretación de los criterios de estructura.

Figura 62. **Comparación de distribución de grado contra distribución de Poisson para la red del SNI**



Fuente: elaboración propia, R software.

Continuando con el método propuesto de análisis de estructura se procede a la presentación de los resultados obtenidos para los pasos 3 y 4. También estos se comparan con los obtenidos teóricamente mediante las ecuaciones 5.46 a la 5.58. A los resultados obtenidos se les denominará experimentales y serán estos la base para la interpretación de los criterios respectivos.

Tabla XVI. **Datos obtenidos de los pasos 3 y 4 del método propuesto de análisis de estructura aplicado a la red del SNI**

Datos	Desviación estándar	$\langle k \rangle$	k máx.	Densidad	Diámetro [aristas]	Radio [aristas]	Tamaño de rango	Distancia promedio
Experimentales	1,6664	2,4772	14,0000	0,006659	21,0000	11,0000	10,0000	9,0447
Teóricos	1,5739		13,7126	0,013146	25,5455	10,7803	9,3611	10,2854

Fuente: elaboración propia.

El análisis de estos resultados comienza con el criterio del centro más grande el cual hace referencia al comportamiento determinado por las ecuaciones 5.46 y 5.48. Para este criterio la determinación del grado máximo se puede modelar por un logaritmo natural aplicado al número de vértices.

De acuerdo con el valor de grado máximo experimental obtenido, se distingue que este posee un valor reducido comparado con el valor de  $N$ . Así también el valor teórico determinado por la ecuación 5.48 es cercano al experimental, lo cual evidencia que, según el criterio del centro más grande la red del SNI tiene un comportamiento de red aleatoria, similar al de las redes eléctricas analizadas en el capítulo anterior.

El criterio de significado del término libre de escala centra su atención en la desviación estándar de los valores de grado de la red analizada. Para la red del SNI el valor experimental obtenido (tabla XVI) es notoriamente reducido, lo cual es contrario a los valores esperados en una red libre de escala, al comparar los valores teóricos esperados para una red aleatoria (ecuación 5.47)

presentado en la tabla anterior con este dato experimental, ambos son cercanos con una diferencia de 0.0925, que determina una cercanía aceptable, generando otro argumento para clasificar a la red del SNI como una red aleatoria.

El último criterio para determinar si dicha clasificación es correcta es el comportamiento esperado y escala logarítmica que fue analizado en las figuras 90, 91 y 92, y por la ecuación 6.1 indicando que la red del SNI sigue un comportamiento de Poisson, lo cual la clasifica como una red aleatoria. En conclusión, dado que cumple con estos criterios, la red del SNI es una red aleatoria (similar a las redes eléctricas analizadas de la IEEE) con un comportamiento cercano al de una distribución de Poisson con un  $\lambda$  de 2.4772, esto lleva a las características particulares de estas redes descritas en el capítulo anterior.

Para analizar la conexión de la red del SNI mediante los datos obtenidos presentes en la tabla XVI, se deben aplicar los criterios de conexión vistos en el capítulo anterior. El criterio de límites de la red evalúa el diámetro y radio, tomándolos por separado y luego juntos.

El diámetro de la red de manera experimental se presenta en la tabla XVI junto con el dato teórico, el cual se determinó por la ecuación 5,49, siendo la diferencia entre ambos de 4,5455, la cual es notoria indicando que la aproximación teórica es cercana pero no lo suficientemente ajustada para brindar confianza en los datos que genera; prosiguiendo con la comparación del radio experimental frente al teórico (ecuación 5,51, utilizando el diámetro experimental) la diferencia entre ambos es de 0,2197 la que es aceptable y con confianza adecuada para predicción.

Los modelos teóricos para determinar el diámetro y radio de la red son aproximaciones por utilizar, aunque cabe destacar que no son exactas. En lo referente al dato experimental y teórico del tamaño de rango de la red se obtiene una diferencia de 0,6389. Esta es una aproximación aceptable, presentando una confianza adecuada, aunque no ideal según los datos generados por la ecuación 5,53.

Centrándose en el criterio de límites propiamente, se observa que el diámetro y radio de la red son relativamente pequeños comparados con la cantidad de vértices y aristas presentes. Según este criterio, dicha comparación indica una buena conexión de la red lo que presenta dos enfoques: el primero, tener un diámetro y radio menores generan una conexión alta debido a la poca cantidad de arista por utilizar para conectar a cualquier pareja de vértices en la red y el segundo enfoque es desde el punto de vista de propagación.

Esto es un indicativo de una mayor facilidad de propagación de errores o fallas a lo largo de la red, por lo que se debe tener la protección referente a este tema. El tamaño del rango de la red del SNI es altamente reducido comparado al número de aristas que tiene la red corroborando la alta conexión de esta e indicando la formación de cierto centro y periferia de red, no constituidos como tal, pero si en una leve formación de estos.

Tomando como base el valor experimental y teórico (ecuación 5,55) de la distancia promedio (tabla XVI), se genera una diferencia de 1,2407 entre el modelo teórico y el dato experimental indicativo de un modelo aproximadamente cercano, pero medianamente confiable. El criterio de distancia promedio indica que la red del SNI presenta un valor de distancia altamente reducido en comparación a las aristas que tiene, y genera una alta conexión en la red entre cualesquiera par de vértices.

Por otro lado, como se analizaba en el criterio de límites de la red, el valor de la distancia promedio al ser reducido corrobora el esparcimiento de defectos en la transmisión de potencia, lo cual debe ser un punto importante en SNI debido a la contención y aislamiento de estos defectos (fallas o descargas atmosféricas) que se propagan rápidamente a lo largo de toda la red.

Por último, respecto de la conexión de la red se evalúa el criterio de densidad: primero se comparan los datos experimentales con los datos teóricos (ecuación 5,58) mostrados en la tabla anterior. La diferencia que existe entre estos dos datos es de 0,006487, la cual es baja pero al analizar los valores obtenidos de densidad esta es una aproximación cercana y confianza aceptable.

Interpretando directamente el criterio, el valor experimental (real) es drásticamente bajo, determinando que es una red dispersa, los dos enfoques que contiene este criterio son: primero, el cálculo del (%CDC) presenta un valor de 0,993 para esta red, el cual es un valor alto que predispone a que la red puede seguir creciendo en cuanto aristas por un porcentaje del 99 % aproximadamente.

El segundo enfoque indica si la red presenta el mismo grado de conexión en toda su estructura. Analizando la red del SNI esta presenta variaciones en el grado de conexión en toda la red lo que supone dos puntos importantes, por un lado la predisposición a presentar comunidades en la red y también la existencia de posibles vértices importantes en la misma, esto se corroborara con los criterios siguientes por evaluar de los pasos restantes del método propuesto.

Como resumen, con los criterios de límites de la red, distancia promedio y densidad, se llega a la conclusión que la red del SNI tiene una alta conexión entre los elementos de esta pero también presenta los inconvenientes de un rápido esparcimiento de fallas o defectos en la transmisión de potencia en la red. Esto manifiesta un adecuado sistema de protecciones para evitar dicho esparcimiento al aislar, contener y eliminar fallas o descargas atmosféricas.

Dentro del método propuesto para el análisis de estructura se presenta el módulo de centralización de la red, que abarca los pasos 5 y 6 del mismo, para la red del SNI se obtuvo los siguientes resultados.

**Tabla XVII. Datos obtenidos de los pasos 5 y 6 del método propuesto de análisis de estructura aplicado a la red del SNI**

Centralidad de grado		Centralidad de cercanía ( <i>closeness</i> )		Centralidad intermedia ( <i>betweenness</i> )		Puntos de articulación		
Nodo	Medida	Nodo	Medida	Nodo	Medida	Nodo	Nodo	Nodo
GSUR 69	14	GSUR 231	0,1836	GSUR 69	0,4406	Palin2138	PNT69	NCMO69
CEN 69	12	GSUR 69	0,1796	GSUR 231	0,4277	VBL138	ESC69	NASU69
SMO 69	9	GES 231	0,1742	GES 231	0,3039	LVG69	MIR69	NGEG694
GNO 69	9	ESC 231	0,1725	GNO 231	0,2908	RGR138	MIA69	NGEG693
ESC 231	8	ALB 231	0,1675	ESC 231	0,2493	HUE138	PSJ69	NMCR691
ALB 231	8	GNO 231	0,1642	CEN 69	0,1926	HUE1382	PQZ69	NTEX69D
GNO 231	8	CEN 69	0,1637	SMO 69	0,1843	ESC231	PRT69	NLAP69D
LBR 69	8	SMO 69	0,1613	SIQ 231	0,1803	ALB231	BLM69	PRO69
GSUR 231	7	CHM 69	0,1580	GNO 69	0,1680	SJQ231	PLM69	RGR69
GES 231	7	PTASIP 69	0,1579	LBR 231	0,1650	PAC230	SMM69	NOV69 0
CHX 233	7	SIQ 231	0,1559	ESC 69	0,1409	SNT231	NSLUPLI 69	SAN69
TIC 231	7	VIL 69	0,1553	PGO 231	0,1391	MAG230	PAL69	JAL69
ESC 69	7	LVG 69	0,1542	TIC 231	0,1299	PGO231	SGA69	SCR69
INC 69	7	GSUR 138	0,1535	LBR 69	0,1258	LBR231	NTDLSAU69	LRU69
PTASIP 69	6	ESC 69	0,1535	SAS 230	0,1220	COV 230	LAG69	GEN69

Continuación de la tabla XVII

RBR 69	6	GES 69	0,1518	PTASIP 69	0,1079	USP230	NTDLAP69	TEL69
SJU 69	6	SAS 230	0,1510	LDR 230	0,0986	CHX233	NALIPHI69	SEC69
PAC 230	5	SNT 231	0,1507	ALB 231	0,0946	TIC231	NMGOFRI69	SJU69
LBR 231	5	GNO 69	0,1504	ESP 230	0,0907	REN230	MGO69	SEL69
USP 230	5	ESC 138	0,1493	TIC 69	0,0830	PAN230	NOJOMGU69	SLM69
LVG 230	5	SJQ 231	0,1489	HUE 230	0,0812	AGU230	NMGUCOL69	CHS69
AGU 230	5	NKAM 69 1	0,1489	CHX 233	0,0788	CLI230	NCOL69	RAA69
ESP 69	5	LPAB 231	0,1472	LAG 69	0,0777	TEJ69	CEN69	LLB691
MIR 69	5	LDR 230	0,1462	CHM 69	0,0770	SMR69	PTASIP69	INC69
SMM 69	5	PAC 230	0,1459	SOL 69	0,0713	ESP69	VIL69	NHIP69
LAG 69	5	PAT 69	0,1441	PAN 230	0,0709	MAL69	CHA69	NCG569
GES 69	5	JUR 138	0,1439	SJU 69	0,0702	LIB691	NCORANT69	NKOR69D
NCDO 69 1	5	SID 231	0,1435	PAT 69	0,0699	LBR69	NIMP69	NMON691
LRU 69	5	TAM 230	0,1435	USP 230	0,0698	ISI69	NSAM69	NSJS69D
GSUR 138	4	ENR 230	0,1435	ESP 69	0,0684	SSE69	NFRI69	CQU69
Palin 2 138	4	CRI 69	0,1430	COV 230	0,0649	NEPILCR69	NBAR69	NROO692
ESP 230	4	NCG3 69 D	0,1424	GES 69	0,0587	LCR69	BAR69	NZAP693
SAS 230	4	NSMOLAG 69	0,1423	NSMOLAG 69	0,0547	LFU691	NVNU69	NAPA692
LDR 230	4	NKAM 69 2	0,1422	PLM 69	0,0534	NIRTREC69	NOLE69	NLRO69D
PAN 230	4	NCG6 69 1	0,1420	NHIP 69	0,0526	REC691	NRYE69	NHFL69D
SOL 69	4	MIX 69	0,1419	PAN 69	0,0487	REC693	MIX69	NLLA69D
COC 69	4	NHIP 69	0,1418	ALK 69	0,0460	NSFESMA69	SLU69	NMIL691
PNT 69	4					SMA69	NTIN69	NCG3691
SAA 69 3	4					CAN69	NLIZ69	LBR400
SMP 69	4					ALK69	NMNT69	
MIX 69	4					SOL69	HIN69	
GDA 69	4					QUI69	NCMB69	
PRO 69	4					PAT69	NLPR69	
SAN 69	4					CHM69	NOKM69	
PAN 69	4					COC69	NCVI69	
TIC 69	4					MAZ69	NGER69	
CHS 69	4					HUE69	NCDO691	
NLRO 69 D	4					IXY69	NVIG69	

Fuente: elaboración propia.

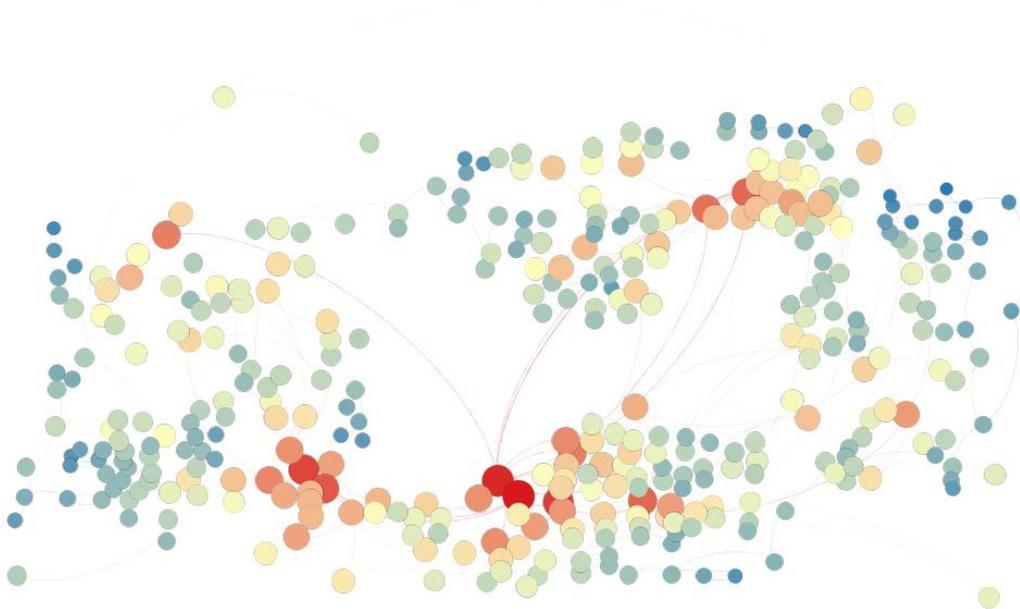
Dentro de la centralización de red se tiene el criterio de medida individual, el cual indica la función que realizan los vértices dentro de la red según el valor de la medida de centralidad asociado. En este criterio se seleccionan los vértices con valores de medidas altos según el paso 5.

Para la centralidad de cercanía se pueden observar los vértices de la red del SNI seleccionados por este criterio, esto en la columna de centralidad de cercanía tabla XVII, con sus respectivos valores. Estos vértices funcionan como difusores en la transmisión de potencia dado a que se encuentran a pocas aristas de gran cantidad de vértices.

Una representación visual de esta centralidad se determinada en la figura 63, la cual presenta los nodos con los valores más altos de color rojo y los nodos de color azul que indica el valor más bajo de esta centralidad. Para la red del SNI se determina que los vértices altamente difusores son: GSUR 231, GSUR 69, GES 231, ESC 231, ALB 231, GNO 231 y CEN 69. Visualizando que alrededor de los nodos antes mencionados se encuentra los vértices con los valores de centralidad más cercanos a estos difusores.

Prosiguiendo con este criterio se trata la centralidad intermedia la cual indica que los vértices con valores elevados sobre los demás de la red cumplen con una función de ser pasos de grandes cantidades de flujo de potencia, como se explicó en el inciso de centralidad intermedia en el criterio de medida individual del capítulo anterior.

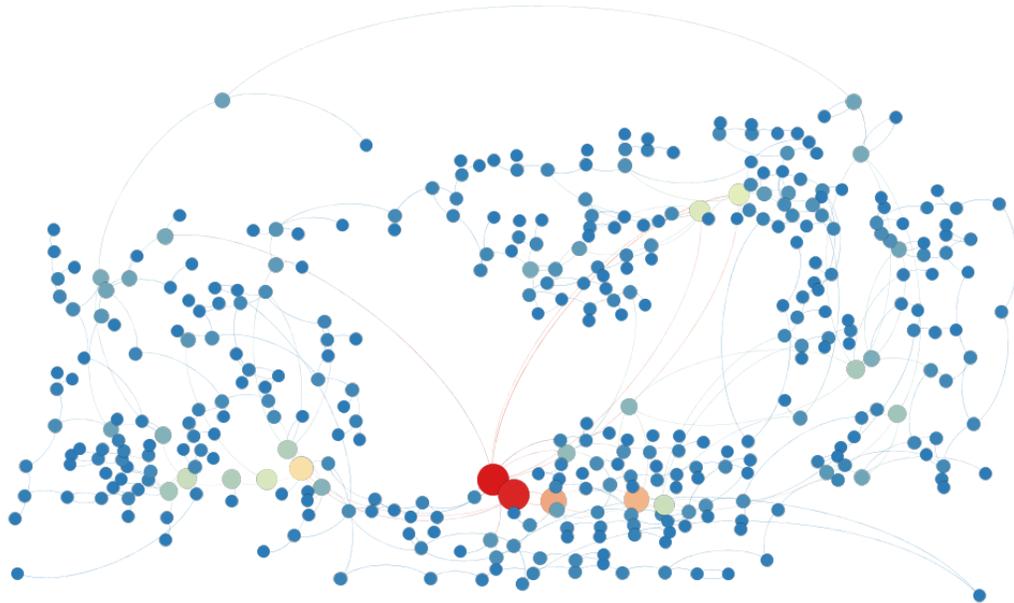
Figura 63. **Visualización de la centralidad de cercanía para la red del SNI**



Fuente: elaboración propia, Gephi 0.9.2.

Mediante la visualización de esta medida de centralidad (color rojo indica altos valores y azul los valores bajos) se puede observar en la figura 64 los vértices antes mencionados para la red del SNI, determinando que los nodos principales son: GSUR 69, GSUR 231, GES 231, GNO 231 y ESC 231. Se evidencia mediante esta figura que la gran mayoría de los vértices de la red presentan valores bajos de la centralidad intermedia esto agrega más importancia a los nodos principales antes mencionados.

Figura 64. **Visualización de la centralidad intermedia para la red del SNI**

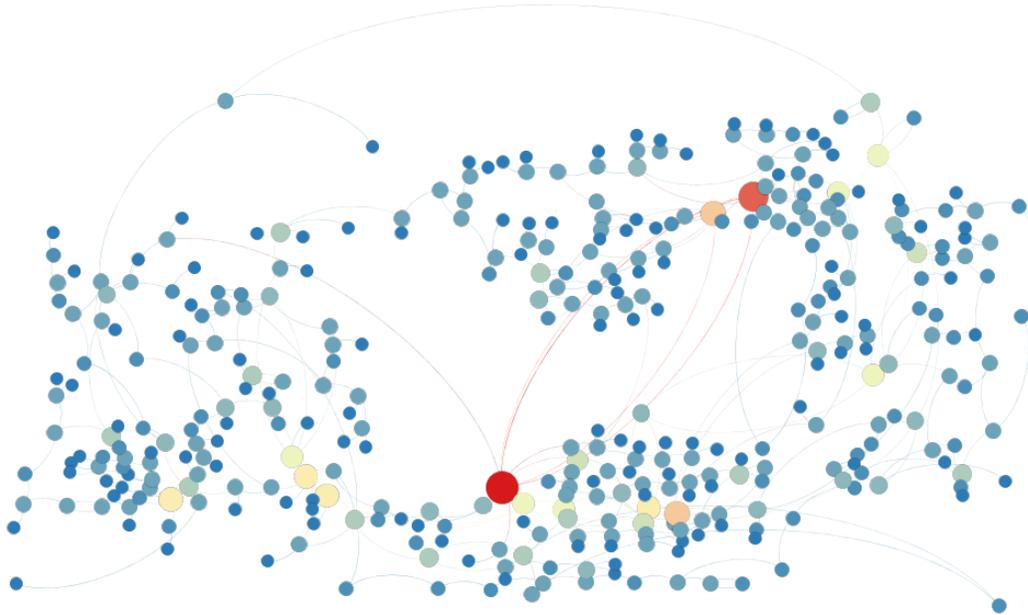


Fuente: elaboración propia, Gephi 0.9.2.

El criterio de medida individual analiza la centralidad de grado, la cual indica que los vértices con altos valores de esta centralidad cumplen con la función de ser conectores de la red, enlazan a vértices o grupos de vértices con el resto de la red. La figura 65 permite la visualización de esta centralidad en la red del SNI (nodos de color rojo, que presentan altos valores y nodos de color azul presentan bajos valores) lo que permite indicar a los vértices que son conectores importantes dentro de esta, siendo los siguientes: GSUR 69, CEN 69, SMO 69 y GNO 69.

Al observar la figura 95 se ve que cumple con el comportamiento de una red aleatoria dado que la mayoría de los nodos presenta un valor cercano al grado medio y pocos presentan una alta conexión, resultando la subred de vértices en 69 kV la que posee estos conectores principales.

Figura 65. **Visualización de la centralidad de grado para la red del SNI**

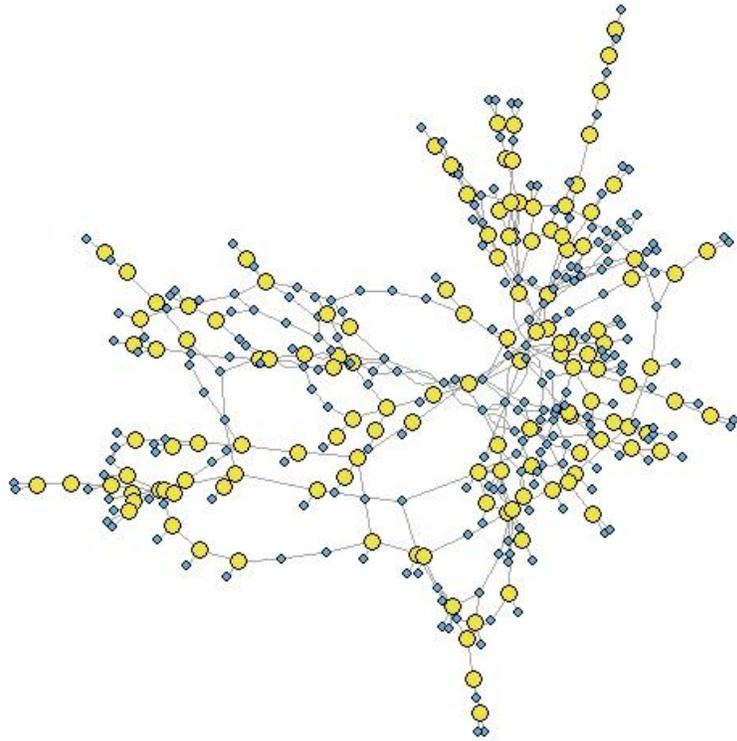


Fuente: elaboración propia, Gephi 0.9.2.

Por último, el criterio de medida individual analiza los puntos de articulación existentes en la red, dado que estos vértices cumplen con la función de mantener conectada a la red. En la red del SNI la tabla XVII en las columnas de puntos de articulación brinda todos los vértices existentes en la red con dicha función.

Mediante la figura 66 se pueden visualizar dichos nodos (los vértices de color amarillo son puntos de articulación y los celestes no lo son). Se evidencia mediante esta figura que gran parte de los nodos que son puntos de articulación son vértices colgantes los que pueden ser nodos con generación o carga.

Figura 66. **Visualización de los puntos de articulación para la red del SNI**



Fuente: elaboración propia, R software.

El criterio de nivel genera a partir de los nodos de la tabla XVII, los vértices vitales de la red. Según el nivel que estos nodos adquieran, dicho nivel se determina mediante la categorización explicada en el inciso de dicho criterio en el capítulo anterior. Para la red del SNI los vértices vitales se presentan en la siguiente tabla.

Tabla XVIII. **Datos obtenidos del criterio de nivel aplicado a la red del SNI**

<b>Vértices vitales</b>	<b>Nivel</b>
ALB 231	4
CEN 69	4
ESC 231	4
ESC 69	4
PTASIP 69	4
CHM 69	3
CHX 233	3
ESP 69	3
GES 231	3
GES 69	3
GNO 231	3
GNO 69	3
GSUR 69	3
GSUR 231	3
LAG 69	3
LBR 231	3
LBR 69	3
LDR 230	3
MIX 69	3
NHIP 69	3
PAC 230	3
PAN 230	3
PAT 69	3
SAS 230	3
SJU 69	3
SMO 69	3
SOL 69	3
TIC 231	3
USP 230	3

Fuente: elaboración propia.

Los 29 vértices presentes en la tabla XVIII son los denominados vértices vitales dado que poseen un nivel de 4 o 3, lo que indica su presencia en la mayoría de las centralidades expuestas en el criterio de medida individual. Los nodos de nivel más alto para esta red son: ESC 231, ALB 231, ESC 69, CEN 69 y PETSIP 69.

Estos nodos son vitales para el funcionamiento de la red lo que implica que dichas barras deben contar con todas las protecciones necesarias, además estos tienen que ser vigilados con más detalle, por los controladores de la red en todos los aspectos relacionados.

Es de resaltar que los nodos con altos valores durante todas las centralidades del anterior criterio presentan un nivel de 3; esto no es indicativo de no ser protegidos o controlados adecuadamente, sino todo lo contrario, en conjunto todos estos nodos son vitales, generando el cuidado especial a estos.

Una de las posibles causas de que estos nodos de nivel cuatro antes mencionados hayan adquirido esta clasificación, es que a estos nodos se conectan otros de generación (plantas generadoras) y/o cargas (consumidores) directamente, por lo que se convierten en puntos de articulación.

Con esto adquieren diferente nivel a nodos como: GSUR 69, GSUR 231, GES 231, GES 69, GNO 231 y GNO 69, los cuales son vitales, pero al no poseer nodos de generación o carga directamente conectados a ellos. Estos no adquieren el nivel, convirtiéndolos en nodos mayoritariamente importantes en centralidades de grado, cercanía e intermedia; más importancia hacia la actividad de transmisión de potencia en comparación con la actividad de conexión de red.

El último aspecto del módulo de centralización de la red es el criterio de medida generalizado, el cual toma los valores promedios y generalizados de las centralidades vistas en el criterio de medida individual. Los datos obtenidos para la red del SNI (datos experimentales) se presentan en la tabla siguiente junto con los datos teóricos calculados por las ecuaciones: 5.61, 5.63, 5.65 y 5.67.

**Tabla XIX. Datos obtenidos del criterio de medida generalizado aplicado a la red del SNI**

<b>Datos</b>	<b>Centralidad de grado (promedio)</b>	<b>Centralidad de cercanía (promedio)</b>	<b>Centralidad intermedia (promedio)</b>	<b>Puntos de articulación (Gen PA)</b>
<b>Experimentales</b>	2,4772	0,1140	0,0217	0,3619
<b>Teóricos</b>	3,5346	0,1061	0,0217	0,0015

Fuente: elaboración propia.

Las comparaciones entre los valores de los datos teóricos y experimentales generan diferencias estas son: la centralidad de grado es de 1,0574 la cual es contundente en que dicho modelo teórico no presenta una adecuada aproximación al valor real haciendo a este no confiable. La centralidad de cercanía posee una de 0,0079 indicando una buena aproximación, así como una alta confiabilidad del modelo.

La centralidad intermedia genera una de 0,00003 la cual brinda la mejor aproximación de todas las centralidades por lo tanto, una alta confianza en el modelo teórico y, por último, la generalización de los puntos de articulación genera una diferencia de 0,3604, la cual indica una baja aproximación y la falta de confianza en el modelo teórico.

Analizando los valores experimentales obtenidos de la red del SNI (tabla XIX), para la centralidad de grado un valor reducido comparado a la cantidad total de vértices, lo que afirma el comportamiento de dicha red modelada como red aleatoria. La centralidad de cercanía para la red es baja, lo que indica que una gran mayoría de los nodos posee una distancia notablemente alta entre sus vecinos y nodos adyacentes a estos vecinos.

Aunado a un valor reducido de centralidad intermedia indicando que gran mayoría de los nodos no son influyentes en la transmisión de potencia (paso de flujo de potencia), se corrobora la existencia de nodos vitales en la red, centros, siendo estos los expuestos en la tabla XVIII.

Por último, la generalización de los puntos de articulación tiene un valor bajo pero comparado con la tendencia de las redes eléctricas IEEE este es considerablemente alto, lo que indica que esta red presenta gran cantidad de vértices colgantes y formación de pocos ciclos en la estructura de esta.

El último módulo por analizar en el método propuesto es el agrupamiento de la red que corresponde al último paso de este. Para la red del SNI se presentan en la siguiente tabla los resultados obtenidos de manera experimental y de manera teórica (mediante las ecuaciones 5.13, 5.71 y 5.75).

**Tabla XX. Datos obtenidos del paso 7 del método propuesto para el análisis de estructura aplicado a la red del SNI**

Datos	Numero de comunidades	Modularidad	Coefficiente de agrupamiento promedio
Experimental	17	0,8198	0,03182
Teórico	18,3867	0,9238	0,00666

Fuente: elaboración propia.

Sometiendo los datos experimentales y teóricos a una comparación se establece que la diferencia entre las medidas es: 1,3867 para el número de comunidades lo que indica una aproximación poco exacta. También una confianza media para el modelo teórico; para la modularidad esta es de 0,1040 la cual es reducida pero no lo esperado, por lo que este modelo brinda una predicción con confianza aceptable. Por último, la diferencia en el coeficiente de agrupamiento promedio es 0,02516 generando una confiabilidad baja en el modelo teórico.

Centrándose en los datos experimentales obtenidos para la red se aplican los siguientes criterios: el primero es el denominado de agrupamiento el cual con el dato de coeficiente de agrupamiento promedio de la tabla XX, se determina que es cercano a cero. Esto genera la presencia de puntos de aislamiento y se traduce como vacíos en la red, dado que ciertos vértices no se conectaron entre sí, aunque compartían un vecino en común. Esto es característico de posibles formaciones de comunidades en la red.

El criterio de comunidades parte de las medidas de modularidad y número de comunidades, según tabla XX se evidencia que el valor de modularidad es cercano a 1 lo que indica una alta calidad en la división de la red. En términos matemáticos la maximización en la optimización de la división se encontró con 17 comunidades, esto afirma lo mencionado por el criterio anterior.

Por último, el criterio de agrupamiento-comunidad aplicado a la red determina que se presenta un comportamiento similar (diferencia marcada, pero acorde a la tendencia de los datos) al esperado en esta relación. Cabe anotar que dicha relación es entre tres variables, dos independientes (número de vértices y coeficiente de agrupamiento promedio) y el número de comunidades, la dependiente.

## 6.2. Análisis de operación del sistema

Este análisis para el SNI se basa en la aplicación del método propuesto para el análisis de operación de sistemas de potencia del capítulo anterior, los resultados obtenidos por este método se presentan a continuación (pasos 2, 3 y 4).

Tabla XXI. **Datos obtenidos de los pasos 2, 3 y 4 del método propuesto para el análisis de operación aplicado a la red del SNI**

Eliminación aleatoria de vértices		Eliminación dirigida de vértices		Eliminación aleatoria de aristas
Datos	fc	fc (aprox)	kc (aprox)	fc (aprox)
Experimental (aproximados)	0,5250	0,1555	3	0,6615
Teórico	0,5963	NC	NC	NC

Fuente: elaboración propia.

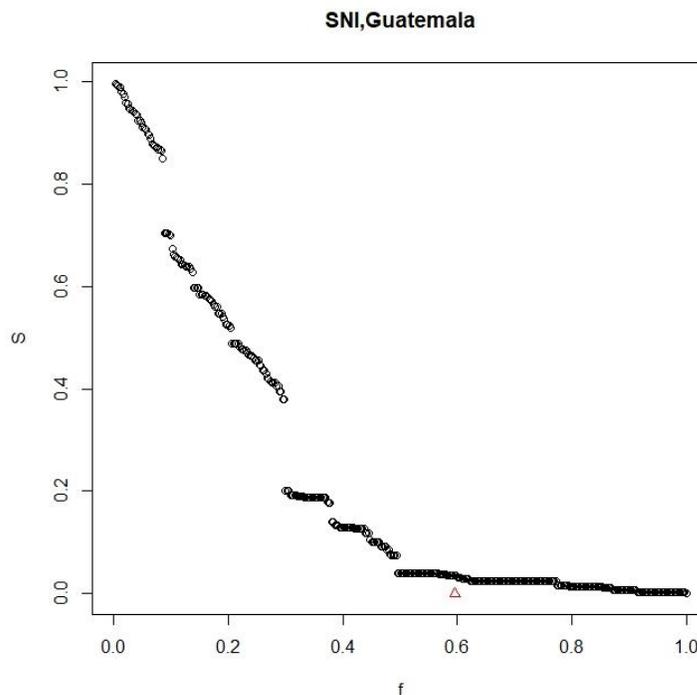
La tabla XXI presenta los valores de  $f$  crítico (fracción de nodos por eliminar para anular la componente gigante), para los tres tipos de eliminación mencionados en el capítulo anterior y con ello analizar la robustez de la red, la cual es fundamental para estudiar la operación del SNI.

Los valores NC de dicha tabla indican que estos datos no fueron calculados, dado que no se presenta ecuación para estos. Su determinación corresponde únicamente a los valores experimentales aproximados, esto dado a la variación presente en los datos al eliminarse los vértices y aristas de manera aleatoria, así como la distinta combinación de grados para eliminarse.

La comparación entre el valor teórico (ecuación 5,26) y el valor experimental de la eliminación aleatoria de vértices genera una diferencia de 0,0713, la cual aunque es evidente indicando confianza media en el modelo, resulta ser una aproximación adecuada para esta medida al considerar la variabilidad de este al obtenerse de manera experimental.

Aplicando el criterio de eliminación aleatoria indica que tanto el dato experimental como el teórico son superiores a 0,5, interpretando que la red del SNI soporta una eliminación aleatoria de la mitad de sus vértices, generando teóricamente una robustez en dicha eliminación de 0,5963 la cual para una red de 373 vértices es alta. Por lo tanto, la red del SNI es robusta en este criterio. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la eliminación aleatoria.

Figura 67. **Gráfica de eliminación aleatoria uniforme de vértices para la red del SNI**

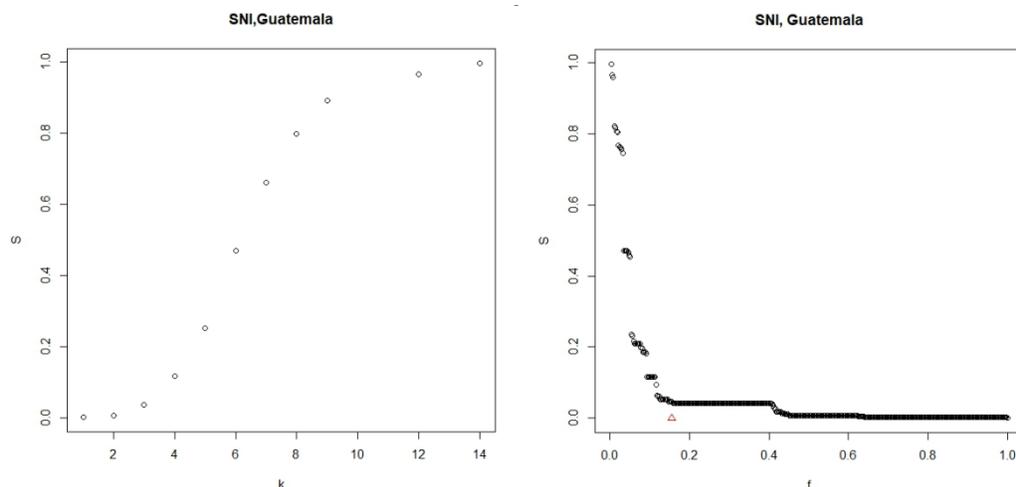


Fuente: elaboración propia, R software.

El criterio de ataque se basa en las medidas de eliminación dirigida de vértices, centrándose en el dato experimental de  $f$  crítico para esta eliminación presente en la tabla XXI. Se evidencia que este valor es cercano a cero indicando que la red del SNI no es robusta para la eliminación dirigida de vértices, tomando como orden de eliminación el grado del vértice, soportando solo una eliminación del 15 %.

Este criterio de ataque también centra su atención en el número de grado de los vértices para el cual sucede la no existencia de la componente gigante; en la red del SNI se determina que son los vértices de grado 3 los que presentan este comportamiento. Esto corresponde a que el promedio de la red es cercano a 3, según la distribución de grado, los grados superiores a este cuentan con pocos vértices corroborándose con el  $f$  crítico de 0,1555. El comportamiento descrito se visualiza mediante la siguiente gráfica.

Figura 68. **Gráfica de eliminación dirigida de vértices para la red del SNI (S en función de k y f)**

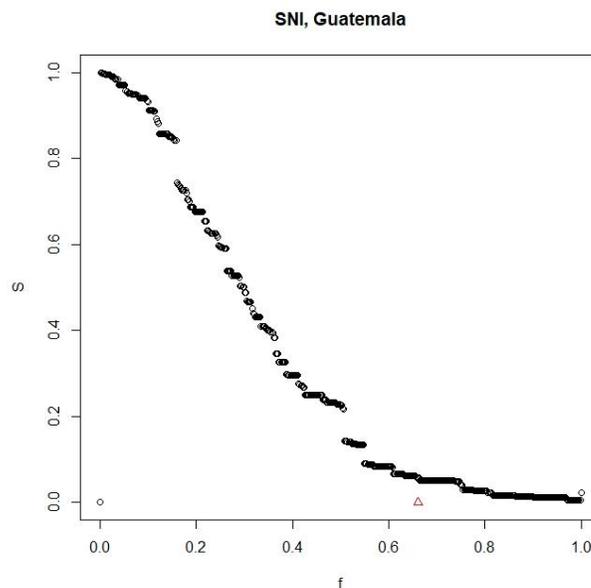


Fuente: elaboración propia, R software.

Analizando el criterio de eliminación aleatoria y el de ataque aplicado a la red del SNI, se ve que genera robustez en el primer criterio, pero debilidad (no robustez) en el segundo, y afirma que esta se comporta como una red aleatoria, lo que era de esperarse según el análisis de estructura.

La última eliminación por considerar es la aleatoria de aristas, la cual es base para el criterio del mismo nombre. Indica un valor (tabla XXI, utilizando un algoritmo de eliminación con una diferencia de iteraciones de 0,001 por la magnitud de los datos en lugar de la indicada por el paso 4) cercano a uno mostrando que la red del SNI resiste una eliminación aleatoria de sus aristas superior a un 60 %. Dicho criterio afirma que esta red es robusta para las eliminaciones aleatorias de aristas, interpretándose que el SNI aleatoriamente hablando es robusto a las salidas simultaneas de líneas de transmisión. La siguiente gráfica corrobora el comportamiento, lo cual es bueno para el sistema.

Figura 69. **Gráfica de eliminación aleatoria de aristas para la red del SNI**



Fuente: elaboración propia, R software.

Por último, mediante la aplicación de los pasos 5 y 6 del método propuesto de análisis de operación se presenta el criterio de árbol de resistencia mínima de la red del SIN. Como su nombre lo indica, este árbol está integrado por las líneas de transmisión de menor resistencia que conectan los vértices de la red, debido a que la corriente eléctrica tiende a fluir por los caminos de menor resistencia. Esto brinda que las aristas de este árbol presente la posibilidad de mayor flujo de potencia, lo cual hace a este árbol el esqueleto principal de la red en cuanto a flujo de potencia.

A continuación, se muestra la gráfica de la red del SIN resaltando las aristas de mayor grosor como las de menor resistencia y, por lo tanto, estas forman parte del árbol de resistencia mínima (372 aristas), los vértices en esta gráfica se muestran con un código para mejor visibilidad en una tabla posterior se encuentra el código correspondiente a cada vértice [anexo]. Las resistencias de las líneas de transmisión fueron tomadas del diagrama unifilar del SIN, para las líneas que no se encontró valor de resistencia fue utilizado el valor de 1, por lo tanto, el árbol de la figura 100 es un aproximado del árbol de resistencia mínima real para la red.

Este árbol presenta un vértice raíz, vértice inicial, el cual para la red del SIN es GSUR 69, de este se extienden las aristas de menor resistencia hacia todos los vértices de la red, generando que esta subestación sea importante en cuanto al flujo de potencia acorde al criterio.

Es de resaltar que, para la difusión de errores o fallas en el flujo de potencia, mediante este criterio de árbol de resistencia mínima se puede notar los vértices que pueden ser directamente “infectados”, dependiendo del vértice que sea difusor (lugar de falla o descarga atmosférica). Se considera también



### 6.3. Diseño y planificación del sistema

Para la red del SNI se aplicaron las herramientas de teoría de grafos descritas en el apartado de diseño y planificación del capítulo anterior, mediante la modularidad y el número de comunidades se obtuvo el número de comunidades óptimo, así como su modularidad para esta red según la tabla XX.

En este apartado se analizaron primero las comunidades que se obtuvieron en el método propuesto para análisis de estructura; también la obtención de las comunidades y la modularidad para una división deseada de 3 comunidades (esta división debido a los sistemas occidental, central y oriental que se manejan en el sistema de transmisión de la red del SNI). A continuación, se presentan los resultados.

Tabla XXII. **Resultados de la aplicación de comunidades en la red del SNI**

No. Comunidades	Modularidad	Comunidad	No. De vértices	% de vértices	Vértices Mayor grado
<b>17</b>	0,8198	4	41	10,99	ESC 231, ALB231
		8	37	9,92	GNO 69
		1	35	9,38	LBR 69
<b>3</b>	0,623	1	142	38,07	GSUR 69
<b>3</b>	0,604	3	126	33,78	LBR 69
		1	125	33,51	GSUR 69

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de la tabla XXII indican que para el número óptimo de comunidades que se determinó. De 17 se obtuvo una modularidad de 0,8198; cabe resaltar que en esta división, las comunidades con más vértices para la

red rondan entre el 9,38-10,99 % de vértices, esto se debe al número de comunidades obtenidas por lo que se generan dichos tamaños.

Los vértices de mayor grado para las tres comunidades resultan ser vértices vitales, dos de ellos de grado 4, resaltando que un 10,99 % de los vértices se unen a la comunidad que estos dos generan, brindando un aspecto importante para el análisis, dado que pueden existir mayor probabilidad a que nodos nuevos se agreguen a esta comunidad.

Respecto de la división en tres comunidades se observa que estas no siguen exactamente una división de regiones occidente, centro y oriente, sino que dichas comunidades abarcan vértices de regiones distintas. Esto indica que un vértice localizado en una determinada región geográfica no necesariamente se conecte altamente con los vértices de dicha región, sino tenderá a ser absorbido por comunidades que se forman teniendo como principales a los vértices de mayor centralidad.

Para las dos divisiones realizadas se obtuvo una modularidad promedio de 0,6135, la cual es cercana indicativo de una división aceptable; dentro de esta las comunidades más grandes obtienen un porcentaje promedio de 35,8575 % respecto del número total de vértices de la red, un tamaño considerable dado que supera la tercera parte de esta.

El punto por resaltar en esta división es que los vértices de mayor grado para las comunidades de mayor tamaño resultan ser GSUR 69 y LBR 69. Esto brinda una corroboración para que estos pertenezcan a los vértices vitales de la red. Además, estos generan en torno a ellos comunidades amplias que dominan la red, dejando en claro la importancia de estos y una posibilidad de

que nuevos nodos que se agregan a la red en futuras expansiones, se unan a las comunidades establecidas alrededor de estos dos nodos.

Estas expansiones futuras deberán realizarse con la planificación que mejoren las características actuales de la red según las medidas obtenidas por las herramientas presentadas en el diseño y planificación de sistemas de potencia del capítulo anterior.

En el apartado antes mencionado se describió una secuencia de aplicación de las herramientas presentadas y se ejemplificó; para este último apartado se presentan los resultados respectivos de la red del Sistema Nacional Interconectado antes y después de la expansión presente en el diagrama unifilar utilizado en este trabajo de graduación (mencionado al inicio del capítulo).

Las líneas y vértices que fueron agregados en esta expansión se presentan en la siguiente tabla. Nota: la red del SNI utilizada en el análisis de estructura y operación corresponde a la transformación del diagrama unifilar del sistema incluyendo los vértices y líneas de transmisión de la expansión mencionada.

Tabla XXIII. **Nodos y líneas de transmisión nuevas según expansión de la red del SNI**

<b>Vértices agregados</b>
LDR 230
<b>Aristas agregadas</b>
COV 230 – USP 230
LVG 230 – AGUA 230
MOR 230 – IZB 230
CHS 69 – FBA 69
SLM 69 – RAB 69

Fuente: elaboración propia.

Por medio de la red antes y después de dicha expansión se realiza una comparación entre ambas. Los resultados se obtuvieron de la aplicación de las herramientas siguientes: número de vértices, número de aristas, grado medio, densidad, diámetro, radio, distancia promedio, generalización de puntos de articulación, eliminación aleatoria de vértices y eliminación dirigida de vértices. Se dividen en dos tablas para mejor visibilidad de los datos. A continuación, se presenta la primera tabla.

Tabla XXIV. **Comparación de las redes de SNI antes y después de expansión, parte I**

<b>Datos</b>	<b>N</b>	<b>No. Aristas</b>	<b>&lt;k&gt;</b>	<b>Densidad</b>	<b>Diámetro</b>	<b>radio</b>	<b>Distancia promedio</b>	<b>GPA</b>
<b>Antes de expansión</b>	372	453	2,4350	0,0066	23,0000	12,000	9,2923	0,3656
<b>Después de expansión</b>	373	462	2,4772	0,0067	21,0000	12,000	9,1007	0,3619
<b>Diferencia</b>	1	9	0,0422	0,0001	-2,0000	0,0000	-0,1916	-0,0037
<b>Porcentaje de cambio</b>	0,27	1,99	1,73	1,44	-8,70	0,00	-2,06	-1,01

Fuente: elaboración propia.

La comparación realizada en la tabla XXIV muestra que la expansión representó un aumento en vértices del 0,27 % y del 1,99 % de aristas. Con esto se procede a analizar si dicha expansión fue adecuada o no mediante la comparación de las siguientes medidas: el grado medio de los vértices de la red se incrementó en 1,73 % lo que indica un cambio mínimo del mismo corroborando el crecimiento en el tamaño de la red.

Esto hace que la conectividad de la red decaiga significativamente en base a esta medida. El aumento del 1,44 % en la densidad indica que la nueva red es menos dispersa que su predecesora mejorando la conectividad. El diámetro de la red presentó una disminución del 8,70 % mientras que el radio no presentó cambios. Lo que se traduce en que la nueva red presenta una distancia menor entre vértices de extremos contrarios de la red, mejorando la conectividad de la red al reducir la distancia, pero indica menor tiempo de propagación de errores o fallas entre vértices.

La distancia promedio sufrió una disminución del 2,06 % mientras que la generalización de puntos de articulación un descenso del 1,01 %. Estos cambios son mínimos, pero para el número de vértices y aristas modificadas indican una mejora en la red en cuanto a conexión al estar más cerca los vértices unos de otros en promedio (menor distancia promedio). En cuanto a conectividad se lograron eliminar ciertos puntos de articulación que permiten un fortalecimiento de la red enfocado a eliminación selectiva de vértices.

Respecto de la eliminación de vértices, robustez, se presentan los resultados efectuando la comparación entre redes. Cabe resaltar que para esta aplicación la red antes de expansión presenta vértices aislados los cuales para ciertas medidas fueron tomados en cuenta y para otras no, esto se menciona en la tabla siguiente.

Tabla XXV. **Comparación de las redes de SNI antes y después de expansión, parte II**

Datos	Eliminación de vértices				
	Aleatoria (fc exp)		Aleatoria (fc Teo)	Dirigida (fc)	Dirigida (kc)
	Con vértices aislados	Sin vértices aislados	Con vértices aislados	Sin vértices aislados	Sin vértices aislados
<b>Antes de expansión</b>	0,5259	0,4757	0,5893	0,1189	3
<b>Después de expansión</b>	0,5250	0,5250	0,5963	0,1555	3
<b>Diferencia</b>	-0,0009	0,0493	0,0070	0,0366	0
<b>Porcentaje de cambio</b>	-0,18	10,37	1,19	30,76	0

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los resultados presentes en la tabla XXV se puede observar que para la mayoría de las eliminaciones de vértices se presentó un incremento del f crítico y del k crítico. En la eliminación aleatoria de vértices de manera experimental se mostró una disminución del 0,18 % con vértices aislados y un aumento de 10,37 % sin vértices aislados.

Esto se debe a que la cantidad de vértices totales para los dos casos cambia. En el primero es de 370 vértices y en el segundo de 372. La disminución presentada en este tema es mínima, lo cual la hace insignificante ante el aumento que se da en el segundo caso. Esto indica que existe un aumento en el fc experimental para eliminación de vértices aleatoria.

La eliminación aleatoria de vértices de forma teórica presenta un incremento del 1,19 % lo que corrobora lo expuesto con anterioridad, todo esto indica que la nueva red (después de expansión, utilizada para los análisis de estructura y operación presentados en este capítulo) posee una mejor robustez

ante las eliminaciones aleatorias. Esto es importante en una modificación del diseño, planificando una red robusta.

La eliminación dirigida de vértices presentó un incremento del 30,76 % en su  $f$  crítico y no presentó ningún cambio en su  $k$  crítico, lo que indica que la nueva red es más robusta en términos de eliminación dirigida en base al grado de un vértice, indicando una adecuada planificación de la expansión realizada para este tema. Esto concluye que la expansión de la red generó mejoras en conectividad de la red, así como en términos de robustez, haciendo un adecuado trabajo en el rediseño y planificación de la nueva red (después de expansión). Terminando con este párrafo el diseño y planificación aplicado a la red del SNI.

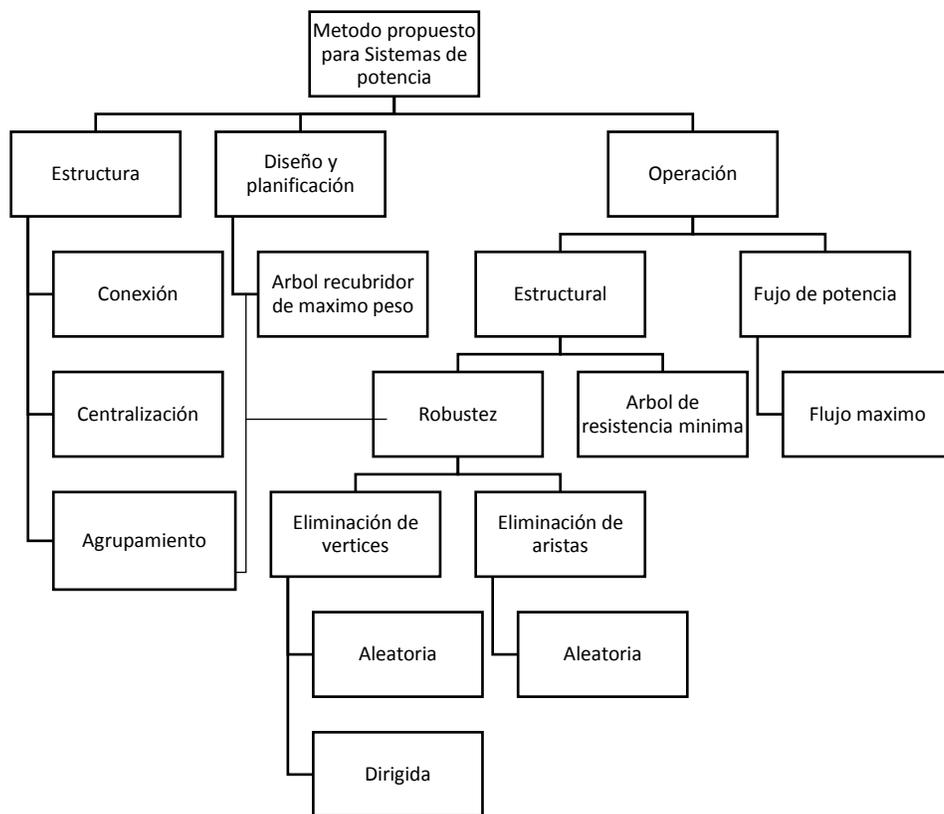
#### **6.4. Utilidad en el sistema de potencia**

Todo lo descrito en estructura, operación, diseño y planificación de los sistemas de potencia en este capítulo y el anterior brindan una cantidad de conocimiento distinto a los métodos comunes utilizados hoy día para el análisis de sistemas de potencia los cuales también se basan en herramientas matemáticas de optimización, solución de ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones de múltiples incógnitas. De ahí que dicho conocimiento es un complemento que ayuda a tener una visión más amplia de los sistemas de potencia.

La aplicación estudiada en este trabajo toma como enfoque fundamental la estructura de una red, es decir, cómo están conectados los elementos de este sistema de potencia, dado que al ser un sistema los comportamientos individuales de los elementos que lo conforman estudiados en forma aislada no indican el comportamiento de la red adecuadamente. Por lo que en este trabajo

centra el estudio de los elementos que componen la red como un todo, un conjunto de elementos relacionados por conexiones y el lugar que ocupan en el sistema. Para describir la utilidad que este método de análisis tiene en el sistema de potencia, en específico el SNI, se debe tener en cuenta las partes de este análisis y la relación que existen entre ellas, por lo que se detalla el siguiente diagrama.

Figura 71. **Diagrama de las partes del método de análisis propuesto para el estudio de sistemas de potencia**



Fuente: elaboración propia.

En base al diagrama de la figura 71 se puede establecer la utilidad que tiene este método para los sistemas de potencia. Comenzando con la parte de

estructura, una de las aplicaciones directas es la conexión la cual puede indicar la cantidad de posibilidades que se tiene en cualquier parte de la red para recibir o enviar potencia basado en un promedio de conexiones entre subestaciones (grado medio).

Esto brinda la información para el SNI de una subestación cualquiera dentro de este, se conecte con una media de 2 a 3 subestaciones con las líneas de transmisión correspondientes (entrantes y salientes) por lo que sirve para la delimitación de zonas de interés o afectadas. En el caso de fallas o propagación de descargas atmosféricas, deberán ser de 2 a 3 subestaciones a la redonda.

Dentro de esto, el concepto de red aleatoria indica que los sistemas de potencia por tendencia tienden a presentar pocas conexiones entre sus subestaciones eléctricas pero que existen pocas subestaciones que se conectarán con gran cantidad de estas. Por ello, cualquier falla que suceda en las líneas de transmisión que obligue a la salida de operación de esta pondrá en riesgo la operación de la subestación correspondiente dejando su capacidad disminuida en un 40,368 % menos de la capacidad normal.

Dentro de conexión también se puede comprender por qué la existencia de problemas de cobertura eléctrica se encuentra en ciertos departamentos del país, sobre todo, en los periféricos y por qué la alta cobertura en departamentos centrales. Esto se explica por la densidad de la red que es baja (0,0067), lo que indica que es una red altamente dispersa, generando puntos lejanos de los lugares centrales (alta cobertura), por lo que mejorar la densidad de la red ayudará a solucionar problemas de cobertura eléctrica en estos departamentos.

La evolución del SNI y otros sistemas de potencia se pueden analizar por medio del modelo de red aleatoria, lo que permitirá diseñar el surgimiento de

nuevas subestaciones eléctricas en áreas de interés partiendo del número de conexiones entre subestaciones deseado por el sistema.

La centralización tiene como fin primordial en un sistema de potencia detectar aquellas subestaciones que son vitales para el adecuado funcionamiento de la red y en el proceso descubrir las características que le dan dicha importancia. Se pueden encontrar las subestaciones idóneas para distribuir el flujo de potencia por toda la red. Así también, estas serán las primeras en prevenirse para la propagación de fallas y descargas atmosféricas, dado que distribuirán la falla o descarga por toda la red.

Se pueden determinar las subestaciones en las cuales se mide el flujo de potencia a detalle priorizando en recursos y dimensionando equipos con capacidades altas para estas. Debe ser así porque soportarán gran flujo de potencia, teniendo cuidado de no operar cercano al límite de capacidad establecido y protegiéndolas porque su pérdida será causante de disminución en el flujo de potencia.

Dentro de la conexión y flujo de potencia se pueden obtener las subestaciones eléctricas que interconectan el sistema, siendo las primeras en fortalecer (protecciones eléctricas adecuadas) para no obligar al sistema a encontrar rutas de transmisión de potencia más largas y costosas.

Dentro de esto encontrar las subestaciones que dan el soporte a un sistema conectado y no con islas, por lo que, si se desea evitar dejar el sistema de potencia operando en islas y con partes aisladas sin energía, se debe monitorear y proteger estas subestaciones que se generen por la herramienta de puntos de articulación.

Hay que hacer ver que existen subestaciones que presentan más de una de estas características, lo que las hace beneficiosa para el sistema, pero que la pérdida de estas pone en riesgo al sistema según las características que tenga.

Analizar qué pasará con el sistema en condición anómala, dado que este se desconecta generando islas y aislándose. Prever qué escenario se tendrá ante tal suceso es posible mediante agrupamiento y comunidades que indicará qué posibles islas se puedan generar y saber qué subestaciones quedarán conectas con otras, siendo estas conectas a suministro de carga o conexión de centrales de generación.

Un tema por estudiar en los sistemas de potencia es el análisis de contingencias del comportamiento de la red ante fallas que generen una salida de elementos (líneas de transmisión, transformadores, barras). Si se analiza desde el punto de líneas de transmisión y subestaciones eléctricas, se podrá determinar cómo el sistema se comporta ante estos sucesos. Así se podrá determinar la cantidad límite de subestaciones eléctricas que pueden perderse por salida de estas en simultáneo que no provoquen un *black out* se brinda a través de robustez y las herramientas que esta posee, con criterios como aleatoriedad o dirigida.

La cantidad de líneas límites que pueden salir de operación en simultáneo que no provoquen un *black out* es posible de manera aleatoria por este método. Saber esta cantidad límite en ambos casos es importante para describir cómo sucede este proceso, con ello ver las etapas en que evoluciona hasta culminar en *black out* y brindar un lapso de aplicación de soluciones posibles para evitar llegar a la pérdida del sistema de potencia.

En cuanto al diseño y análisis se puede encontrar el grupo de subestaciones eléctricas donde se conectan plantas generadoras, centros de consumo o de maniobra que están altamente conectados entre sí. También cuáles grupos poseen menos cantidad de subestaciones conectadas y relacionar estas con los lugares geográficos, así como los índices de cobertura eléctrica.

Mediante las comunidades analizar la mejor opción en cuanto a subestaciones eléctricas existentes donde se conecten nuevas líneas de transmisión para abastecer a más usuarios. Indicar las líneas de transmisión altamente probables donde se pueden propagar descargas atmosféricas, corrientes de fallas o corto circuito a partir de la línea de transmisión o subestación eléctrica donde se generó y cuáles subestaciones eléctricas puede dañar a su paso antes de ser debidamente tratada, evitando así las fallas en cascada.

## CONCLUSIONES

1. Los sistemas de potencia de la IEEE analizados con el método propuesto de análisis de estructura de sistemas de potencia, se clasificaron dentro del modelo de red aleatoria indicando un número bajo de conexiones (2-4 barras o nodos), que corresponde al término “redes dispersas” debido a su bajo valor de densidad. En estas redes se determina la existencia de pocos nodos vitales mediante la comparación de los criterios de centralidad utilizados.
2. La operación de los sistemas de potencia se describe a través del “método propuesto para el análisis de operación de los sistemas de potencia” resultado de este trabajo, el cual evidencia que los sistemas de la IEEE estudiados poseen una alta robustez en cuanto a la eliminación aleatoria de nodos y líneas, con valores iguales o superiores al 0,5. Mientras tanto, la robustez dirigida es baja con valores que oscilan el 0,3 – 0,43.
3. Las herramientas matemáticas de la teoría de grafos que son útiles para el diseño y planificación de los sistemas de potencia estudiados son las siguientes: árbol recubridor de máximo peso, puntos de articulación, eliminación aleatoria uniforme de vértices (robustez), eliminación no uniforme de vértices (robustez), modularidad (comunidades) y número óptimo de comunidades.
4. La implementación de los métodos propuestos y herramientas matemáticas presentados en este trabajo de graduación ejecutados en el

Sistema Nacional Interconectado de Guatemala determinaron que: se cataloga como una red aleatoria con un número promedio de conexiones bajo. Posee una alta conexión, es una red que presenta centralidad baja (29 vértices vitales), se agrupa en comunidades y posee una robustez alta para la eliminación aleatoria uniforme de vértices y aristas, así como baja robustez para la eliminación no uniforme de vértices.

5. El Sistema Nacional Interconectado fue analizado sin y con expansiones realizadas como medidas del plan de expansión que se está ejecutando, cuya comparación indica que en su estructura se generó una reducción del 8,7 % en el diámetro de esta. Los resultados importantes se dieron en la operación del sistema, obteniéndose aumentos en la robustez aleatoria y dirigida de vértices del 10,37 % y 30,76 %, respectivamente, demostrando un impacto positivo a la robustez del sistema.

## RECOMENDACIONES

1. En el análisis de estructura de los sistemas de potencia se debe realizar la modelación del sistema en base a la representación de nodos y barras como vértices, así como las líneas de transmisión representadas como aristas.
2. En el modelado de barras, nodos en el sistema de potencia, al trasladarlos a vértices de la red, es importante considerar los arreglos de barras como un solo vértice; al no hacerlo debe tenerse en cuenta para la interpretación de resultados dado la variación que se genera.
3. Estudiar la posibilidad de implementar más herramientas de la teoría de grafos para el análisis de estructura de los sistemas de potencia, en especial la coloración de grafos y el grafo dual.
4. Analizar la aplicación de los flujos y redes de transporte en los flujos de potencia en especial para la solución de: construcción de la matriz de impedancias, determinación de corrientes por matriz de adyacencia y teoremas de redes eléctricas.
5. Encontrar la aplicación del tema de difusión en redes de la ciencia de las redes (teoría de grafos) para el análisis de operación de los sistemas de potencia enfatizando las fallas en cascada.
6. Analizar la agrupación de nodos y/o barras presentes en las subdivisiones de los sistemas de potencia de acuerdo con sus regiones

geográficas mediante la aplicación de la herramienta matemática de mezcla selectiva (assortative mixing).

7. Efectuar estudios de la implementación de flujo máximo al Sistema Nacional Interconectado en tiempo real o por medio de simulaciones con datos actualizados del sistema.
8. Efectuar un estudio de la aplicación de teoría de grafos al Sistema Eléctrico Regional (SER) de Centroamérica con datos actualizados del sistema.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ABOYTES, Florencio. *Análisis de sistemas de potencia*. Comisión Federal de electricidad. México: Universidad Autónoma de Nuevo León, 1990. 364 p.
2. ANDERSSON, Göran. *Análisis de sistemas de potencia*. Lecturas de laboratorio de sistemas de potencia. Suiza: Editorial ETH, Escuela Politécnica Federal de Zúrich, 2012. 175 p.
3. BARABASI, Albert-László. *Ciencia de las redes*. [en línea]. <<http://networksciencebook.com/>>. [Consulta: noviembre 2017].
4. BOUNDY, J.A. MURTY, U.S.R. *Teoría de grafos*. Inglaterra. Editorial Springer, 2008. 651 p.
5. CORREA, Gabriel, YUSTA, José. *Representación topológica de los sistemas eléctricos de potencia y la aplicación al análisis de riesgos*. VII Simposio. Colombia: Simposio Internacional sobre Calidad de Energía Eléctrica (SICEL). 2013.
6. DEBAPRIYA, Das. *Sistemas eléctricos de potencia*. India: Editorial New Age International (P) Limited, publishers, 2006. 470 p.
7. DHAOU, Riadh. *Introducción a la ciencia de las redes*. Based on the lecturer of Albert-László Barabasi. [en línea]. <[http://irt.enseeiht.fr/dhaou/NetworkScience/Network\\_Science.pd](http://irt.enseeiht.fr/dhaou/NetworkScience/Network_Science.pd)>.

8. DIESTEL, Reinhard. *Teoría de grafos*. 2a ed. Estados Unidos: Editorial Springer- Verlag, 2000. 312 p.
9. DUNCAN GLOVER, J. MULUKUTLA, S. OVERBYE, Thomas. *Análisis de sistemas de potencia y diseño*. 5a. ed. Estados Unidos: Editorial Cengage Learning, 2008. 827 p.
10. GONZÁLEZ-LONGATT, Francisco. *Flujo de potencia en el sistema de 9 barras, P.M. Anderson*. Reporte de investigación 2007-14. 2007. 14 p.
11. GRAINGER, John & STEVENSON, William. *Análisis de sistemas de potencia*. 1a ed. México: Editorial McGraw-Hill. 1996. 731 p.
12. GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones*. 3a ed. Estados Unidos: Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1997. 874 p.
13. JORDAN, Cristina. CONEJERO, José. MOOC: *Aplicación de la teoría de grafos a la vida real (parte I)*. España. Departamento de matemática aplicada, Universidad Politécnica de Valencia. [en línea].<<https://www.youtube.com/watch?v=8ifsbUJHbak&list=PL6kQim6ljTJu44dsVeZifHHiuDC1MEZ7q>> [Consulta: mayo 2018].
14. JORDAN, Cristina. CONEJERO, José. MOOC: *Aplicación de la teoría de grafos a la vida real (parte II)*. España: Departamento de matemática aplicada, Universidad Politécnica de Valencia. [en

línea].<<https://www.youtube.com/watch?v=MYjNdwHlt0g&list=PL6kQim6ljTJs2p7W1xMPheILR-xPuhtJj>>[Consulta: mayo 2018].

15. JORDAN, Cristina. *Curso teoría básica de grafos y análisis de 4 conocidos problemas*. España: Instituto de Matemáticas Multidisciplinar, Universidad Politécnica de Valencia. [en línea]. <<https://www.youtube.com/playlist?list=PL5098BF5A01819B3B>> [Consulta: mayo 2018].
16. LEE, H. C. SING-GUAN, Rodolf. *Introducción a la teoría de redes. Laboratorio de biología computacional*. China: Instituto de sistemas biológicos y bioinformáticos. Universidad Nacional Central, 2009. 95 p.
17. LIPSCHUTZ, Seymour & LIPSON, Marc Lars. *Matemáticas discretas*. 3ª ed. México: Editorial McGraw-Hill, 2009. 471 p.
18. MORATAYA RAMOS, Juan Carlos. *Análisis de la capacidad de transporte actual del sistema nacional interconectado*. Trabajo de graduación de Ing. Eléctrica. Facultad de Ingeniería, Universidad San Carlos de Guatemala. 2004. 112 p.
19. NEWMAN, M. E. J. *Redes una introducción*. Estados Unidos: Oxford University Press, 2010. 1042 p.
20. NEWMAN, M. E. J. *Modularidad y estructura de comunidades en redes. Departamento de física y centro para el estudio de sistemas complejos*. Estados Unidos: Universidad de Michigan. 2006. 7 p.

21. NEWMAN, Mark. BARABASI, Albert-László. WATTS, Duncan J. *La estructura y dinámica de redes*. Estados Unidos: Princeton University Press, 2006. 582 p.
22. RODRÍGUEZ SANTIZO, Luis Fernando. *Estudio de la máxima transferencia de potencia en el sistema principal de transmisión, considerando el plan de expansión del sistema de transporte 2008-2018*. Trabajo de graduación de Ing. Eléctrica. Facultad de ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala, 2011. 135 p.
23. RODRÍGUEZ, Luis. *Análisis de estabilidad de tensión considerando sistemas de monitoreo de área amplia y características de cargas mixtas*. Trabajo de graduación de Magíster en Ingeniería Eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. 2014. 92 p.
24. RODRÍGUEZ, Maulio. *Análisis de sistemas de potencia*. 2a ed. Venezuela: Editorial de la Universidad de Zulia. 1992. 672 p.
25. SAADAT, Hadi. *Análisis de sistemas de potencia*. Estados Unidos: Editorial McGraw-Hill, 1999. 697 p.
26. SÁNCHEZ CHACÓN, Nilda Carolina. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia*. Trabajo de graduación de Especialista en Sistemas de Potencia. Decanato de estudios de postgrado, Universidad Simón Bolívar, Venezuela. 2011. 153 p.

27. SZYMANSKI, B., KUZMIN, K. *Clase 4: introducción a las herramientas de Gephi para análisis y visualización de redes*. Fronteras de la ciencia de redes. [en línea].  
<<https://slideplayer.com/slide/11624857/>>[Consulta: mayo 2018].
28. TORANZOS, Fausto. *Introducción a la teoría de grafos*. Universidad de Buenos Aires. Estados Unidos: Programa regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, OEA. 1976. 80 p.
29. WEEDY, B. M. *Sistemas eléctricos de gran potencia*. 2a ed. España: Editorial Reverté, 1982. 525 p.
30. Lectura 8. *Comunidades de redes*. [en línea].  
<<https://www.youtube.com/watch?v=IU1QEUH0nNc&t=5s>>  
[Consulta: marzo 2018].
31. 13 incremental improvement: Max Flow, min cut. Devadas, S. MIT 6.046J *Diseño y análisis de algoritmos, primavera 2015*. [en línea].  
<[https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr\\_As&t=4s](https://www.youtube.com/watch?v=VYZGlgzr_As&t=4s)>  
[Consulta: mayo 2018].



## APÉNDICES

**Apéndice 1. Lista de vértices que integran la red del SNI con código asignado**

Código	Nombre	Código	Nombre	Código	Nombre	Código	Nombre	Código	Nombre	Código	Nombre
0	GSUR 69	64	AGU230	127	EJO69	190	PTASIP69	253	NGEG 691	316	LLB69
1	GSUR 231	65	JEN230	128	ESC69	191	VIL69	254	NGEG 694	317	PET69
2	GSUR 138	66	CLI230	129	TND69	192	NSMOL AG69	255	ARR69	318	POP69
3	Palin2138	67	SJO230	130	MTI69	193	CHA69	256	NGEG 693	319	NCG6691
4	PLN138	68	ARI230	131	LUC69	194	NCORANT69	257	MEC69	320	NAR69
5	VBL138	69	TAC69	132	MIR69	195	COR69	258	NMCR 691	321	INC69
6	ORT138	70	TEJ69	133	GSL69	196	ANT69	259	NTEX 69D	322	NHIP69
7	LVG69	71	mar-69	134	LUN69	197	NIMP69	260	TEX69	323	HIP69
8	JUR138	72	SMR69	135	OBI69	198	IMP69	261	MCR69	324	NCG569
9	ESC138	73	ESP69	136	MIA69	199	NSAM69	262	PVE69	325	NKOR69D
10	GCS138	74	FLO69	137	ACA69	200	SAM69	263	NLAP 69D	326	KOR69
11	CLL138	75	MAL69	138	NMAGCIA69	201	NFRI69	264	LAP69	327	NKAM691
12	HRU138	76	MEL69	139	MAG69	202	FRI69	265	LES69	328	KAM69
13	MOY138	77	POR69	140	PSJ69	203	NBAR69	266	PRO69	329	NKAM692
14	PRO138	78	COA69	141	GGO69	204	BAR69	267	AMI69	330	STR69
15	IPA138	79	LIB691	142	PQZ69	205	PYT69	268	EJI69	331	NCG169D
16	RGR138	80	LIB69	143	DUK69	206	NVNU69	269	RGR69	332	NCG1692
17	CQM138	81	LBR69	144	PRT69	207	NOLE69	270	QUE69	333	EGU69
18	ZCA138	82	ISI69	145	IZT69	208	OLE69	271	NGNG 694	334	AUR69
19	PAN138	83	CHP69	146	EPQ69	209	NRYE69	272	GNO69	335	NLCA69D
20	HUE138	84	SSE69	147	BLM69	210	RYE69	273	nov-69	336	LCA69
21	HUE1382	85	REU69	148	BLM692	211	VNU69	274	CGP69	337	PAM69

Continuación apéndice 1.

22	POL138	86	NEPILCR 69	149	LLR69	212	CRI69	275	SAN6 9	338	NMON69 1
23	ESP138	87	EPI69	150	SAA693	213	MIX69	276	JAL69	339	MON69
24	ESC231	88	LCR69	151	SAA69	214	SLU69	277	MAT6 9	340	NSJS69 D
25	ALB231	89	LFU691	152	PLM69	215	SMC69	278	RAN6 9	341	SJS69
26	GES231	90	LFU69	153	CSU69	216	NTIN69	279	SAS69	342	CQU69
27	SIQ231	91	MNL69	154	SMM69	217	TIN69	280	TFM6 9	343	LVA69
28	SJQ231	92	NIRTREC 69	155	AGS69	218	NLIZ69	281	TEC69	344	NROO69 2
29	LPAB231	93	IRT69	156	CON69	219	LIZ69	282	SCR6 9	345	ROO69
30	SID231	94	REC691	157	SAL69	220	LFL69	283	PAS69	346	NCG269 D
31	TAM230	95	REC693	158	NSLUPL I69	221	NMNT69	284	PAN6 9	347	ESI69
32	ENR230	96	REC69	159	SLU69	222	MNT69	285	MYE6 9	348	SJD69
33	PAC230	97	REC692	160	PLI69	223	MRI69	286	LRU69	349	NZAP69 3
34	GNO231	98	NSFESM A69	161	PAL69	224	HIN69	287	RBO6 9	350	ZAP69
35	SNT231	99	SFE69	162	NPALPL I69	225	BHI69	288	GEN6 9	351	NOR69
36	MAG230	10 0	SMA69	163	SGA69	226	GDA69	289	PBA69	352	CEM69
37	MAG230 2	10 1	CAN69	164	SAU69	227	NCMB69	290	MOR6 9	353	NAPA69 2
38	SAA230	10 2	MTO69	165	NTDLS AU69	228	CMB69	291	RIO69	354	APA69
39	PGO231	10 3	ZUN69	166	TDL692	229	RBR69	292	EST69	355	NAPAG NO69
40	LBR231	10 4	XEL69	167	LAG69	230	NGEG69 2	293	IZA69	356	NLRO69 D
41	PGO230	10 5	ALK69	168	NTDLA P69	231	GES69	294	OXE6 9	357	LRO69
42	ESP230	10 6	TOT69	169	TDL69	232	NLPR69	295	TEL69	358	NHFL69 D
43	HUE230	10 7	SOL69	170	NALIPHI 69	233	LPR69	296	SEC6 9	359	HFL69
44	COV230	10 8	QUI69	171	ALI69	234	NOKM6 9	297	CND6 9	360	NLLA69 D
45	XAC230	10 9	ZCP69	172	PHI69	235	OKM69	298	CHO6 9	361	BAT69
46	USP230	11 0	PAT69	173	SMP69	236	NCVI69	299	STS69	362	LLA69
47	PVI230	11 1	CSA69	174	NMGOF RI69	237	CVI69	300	SJU69	363	NGNG69 1
48	CHX233	11 2	CHM69	175	MGO69	238	NGER69	301	REN6 9	364	NMIL691
49	CHX231	11 3	TER69	176	LLI69	239	GER69	302	TIC69	365	MIL69
50	TIC231	11 4	TOL69	177	ALA69	240	NCDO69 1	303	CAF69	366	KER69
51	SAS230	11 5	COC69	178	AMA69	241	NCDO69 2	304	MTZ6 9	367	NCG369 1

Continuación apéndice 1.

<b>52</b>	<b>REN230</b>	<b>11 6</b>	<b>CAO69</b>	<b>179</b>	<b>SAG69</b>	<b>242</b>	<b>CDO69</b>	<b>305</b>	<b>SEL69</b>	<b>368</b>	<b>LNI69</b>
<b>53</b>	REN2302	11 7	LNO69	180	NES69	243	NVIG69	306	SLM6 9	369	MIN69
<b>54</b>	LDR230	11 8	PNA69	181	NALAOJ O69	244	VIG69	307	RAB6 9	370	NCG369 D
<b>55</b>	IZA230	11 9	MAZ69	182	NOJOM GU69	245	NCMO6 9	308	COB6 9	371	BZA69
<b>56</b>	PAN230	12 0	LMA69	183	OJO69	246	CMO69	309	VDA6 9	372	LBR400
<b>57</b>	SANNIC OLAS	12 1	TUL69	184	NMGUC OL69	247	NASU69	310	CHS6 9	373	TAPACH ULA
<b>58</b>	MOR230	12 2	HUE69	185	MGU69	248	ASU69	311	FBA69		
<b>59</b>	LVG230	12 3	IXH69	186	NCOL69	249	INH69	312	RAA6 9		
<b>60</b>	SNT230	12 4	IXY69	187	COL69	250	NCGD69 1	313	PLA69		
<b>61</b>	MOY230	12 5	BRI69	188	SMO69	251	GDA693	314	SYX69		
<b>62</b>	AHUACH APAN	12 6	PNT69	189	CEN69	252	NGDA69 D	315	LLB69 1		

Fuente: elaboración propia.

**Apéndice 2. Programa en R software para generar la distribución de grado de una red**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
deg.dist <- degree_distribution(g, mode="all")
par(mfrow=c(3,2))
plot( x=0:max(degree(g)), y=deg.dist, pch=19, cex=1.2, type="h", col="black",
xlab="k", ylab="P(k)", main=" e) Distribución de grado 118 barras IEEE")
gsize(g)
```

Fuente: elaboración propia.

### Apéndice 3. Programa en R software para graficar el grafo de una red

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
l <- layout_with_fr(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
#par(mfrow=c(2,2))
plot(g, rescale=F, layout=l*1.2, vertex.size=4, vertex.label=NA,
vertex.color=rainbow(52), main="118 barras IEEE")
```

Fuente: elaboración propia.

**Apéndice 4. Programa en R software para análisis de ajuste de la distribución de grado a una distribución de Poisson**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
library(fitdistrplus)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
aa <- degree(g)
b <- fitdist(aa, "pois", method="mme")
b
summary(b)
plot(b)
```

Fuente: elaboración propia.

## Apéndice 5. Programa en R software para análisis de ajuste de la distribución de grado y la escala logarítmica

```
library(igraph)
library(ggplot2)
library(poweRlaw)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
aa <- degree(g)
m_pl <- displ$new(aa)
est <- estimate_xmin(m_pl)
m_pl$setXmin(est)
m_ln <- dislnorm$new(aa)
est1 <- estimate_xmin(m_ln)
m_ln$setXmin(est1)
m_pois <- dispois$new(aa)
est2 <- estimate_xmin(m_pois)
m_pois$setXmin(est2)
par(mfrow=c(1,2))
plot(m_pl,main="Ajuste de distribución")
lines(m_pl, col=2)#roja
lines(m_ln, col=3)#verde
lines(m_pois, col=4)#azul
secuencia <- c(0:12)
xx <- log(secuencia)
xx
yy <- log(degree.distribution(g))
yy
plot( x=xx, y=yy, pch=1, cex=1.2, col="black", xlab="k", ylab="P(k)", main="
Escala logarítmica")
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 6. **Programa en R software para determinación de las medidas del módulo de conexión de la red del método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
edge_density(g, loops=TRUE)
edge_density(simplify(g), loops=FALSE)
diameter(g)
radius(g)
mean_distance(g)
gsize(g)
a <- degree(g)
mean(a)
sd(a)
max(a)
dd <- ((2*gsiz(g))/(gorder(g)*(gorder(g)-1)))
dd
articulation_points(g)
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 7. **Programa en R software para determinación de los puntos de articulación de una red para el análisis de estructura de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
# vertices y puntos de articulacion
vv1 <- V(g)
vv <- articulation_points(g)
nvv1 <- length(vv1)
nvv <- length(vv)
ap <- numeric(nvv1)
# llenar score de ap
for (m in 1:nvv1){
  ap[m]<- 5
}
# ciclo
for (i in 1:nvv1){
  for(j in 1:nvv){
    if( vv[j] == vv1[i] ) {
      ap[i] <- 10
    }
  }
}
par(mfrow=c(2,2))
#plot(g, vertex.color= rainbow(52), vertex.size= ap*3, layout=
layout.fruchterman.reingold, main= " b) Grafo 30 barras IEEE")
l <- layout_with_fr(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
plot(g, rescale=F,vertex.color= rainbow(52), vertex.size= ap*3, layout=l*1.2,
main= " d) Grafo 57 barras IEEE")
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 8. **Programa en R software para la determinación de las medidas del módulo de centralización de la red en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
aa <- closeness(g, mode="all",normalized = TRUE)
plot(aa)
hist(aa, xlab="centralidad de cercania", ylab="Frecuencia", main= "Closeness
118")
a <- aa[order(-aa)]
a
mean(aa)
sd(aa)
lines(density(aa))
bb <- betweenness(g, v = V(g), directed = FALSE, weights = NULL,
  nobigint = FALSE, normalized = TRUE)
plot(bb)
hist(bb, xlab="centralidad intermedia", ylab="Frecuencia", main= "BEt118")
b <- bb[order(-bb)]
b
mean(bb)
sd(bb)
lines(density(bb))
cc <- degree(g, mode="all")
plot(cc)
hist(cc, xlab="k", ylab="Frecuencia", main= "grado 118")
c <- cc[order(-cc)]
c
mean(cc)
sd(cc)
```

## Continuación apéndice 8.

```
lines(density(cc))  
articulation_points(g)  
ap <- articulation_points(g)  
apscore <- (length(ap)/vcount(g))  
apscore
```

Fuente: elaboración propia.

**Apéndice 9. Programa en R software para la determinación de las medidas de agrupamiento de la red en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
l <- layout_with_fr(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
wc <- cluster_walktrap(g)
modularity(wc)
membership(wc)
plot(wc, g)
wc
length(wc)
w <- cluster_louvain(g)
modularity(w)
membership(w)
plot(w,g,rescale=F, layout=l*1.3, vertex.size=10)
w
length(w)
fc <- cluster_fast_greedy(g)
modularity(fc)
membership(fc)
plot(fc,g)
length(fc)
sizes(fc)
ca <- cluster_spinglass(g, spins=7)# determinar el numero de comunidades
modularity(ca)
membership(ca)
plot(ca,g)
length(ca)
sizes(ca)
```

## Continuación apéndice 9.

```
lec <- cluster_leading_eigen(g)
modularity(lec)
membership(lec)
plot(lec,g)
length(lec)
sizes(lec)
ra <- cluster_label_prop(g)
modularity(ra)
membership(ra)
plot(ra,g)
length(ra)
sizes(ra)
print("cluster walktrap")
modularity(wc)
length(wc)
print("cluster louvain")
modularity(w)
length(w)
print("cluster fast greedy")
modularity(fc)
length(fc)
print("cluster spinglass")
modularity(ca)
length(ca)
print(" cluster label prop")
modularity(ra)
length(ra)
oc <- cluster_optimal(g)
modularity(oc)
length(oc)
membership(oc)
plot(oc,g,rescale=F, layout=l*1.3, vertex.size=10)
vcount(g)
```

## Continuación apéndice 9.

```
transitivity(g)
t1 <- transitivity(g, type="global")
t1
t2 <- transitivity(g, vids=NULL, type="local")
ta <- length(t2)
for (i in 1:ta){
  if( t2[i] == "NaN") {
    t2[i] <- 0.000
  }
}
t2
mean(t2)
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 10. **Programa en R software para la eliminación aleatoria uniforme de vértices de la red en el método de análisis de operación de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
e <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
g <- e
m <- gsize(g)
n <- gorder(g)
f <- numeric(n)
s <- numeric(n)
a <- V(g)$name
sr <- numeric(n)
#for (j in 1:100){
x <- sample(1:n,n, replace=F)
for (i in 1:(n-1)){
f[i] <- i/n
g <- delete_vertices(g, a[x[i]])
clu <- components(g)$size
ma <- max(clu)
sr[i]<- ma/n
#er <- abs(sr[i]-s[i])
#if(er <= 0.05){
#sr[i] <- s[i]
#}else{
#sr[i] <- sr[i]
#}
}
#lines(f,s)
#}
f[m]<- 1
s[m]<- 0
#par(mfrow=c(3,2))
#plot(f,s,xlab="f", ylab="S", main="118 barras")
```

## Continuación apéndice 10.

```
#xx <- c(0.684)
#yy <- c(0.00)
#points(xx, yy, pch=2, col="red")
#plot(g)
for (ii in 1:100){
  g <- e
  m <- gsize(g)
  n <- gorder(g)
  f <- numeric(n)
  s <- numeric(n)
  a <- V(g)$name
  #for (j in 1:100){
  x <- sample(1:n,n, replace=F)
  for (i in 1:(n-1)){
    f[i] <- i/n
    g <- delete_vertices(g, a[x[i]])
    clu <- components(g)$csize
    ma <- max(clu)
    s[i] <- ma/n
    er <- abs(sr[i]-s[i])
    if(er <= 0.0005){
      sr[i] <- s[i]
    }else{
      sr[i] <- sr[i]
    }
  }
}
#lines(f,s)
#}
f[n] <- 1
s[n] <- 0
#par(mfrow=c(3,2))
#plot(f,s,xlab="f", ylab="S", main="118 barras")
#plot(g)
```

## Continuación apéndice 10.

```
}  
#par(mfrow=c(2,3))  
plot(f,sr, xlab="f", ylab="S",main="118 barras")  
xx <- c (0.6844)  
yy <- c(0.00)  
points(xx, yy, pch=2, col="red")  
#plot(error)  
#mean(error)  
length(f)  
length(sr)
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 11. **Programa en R software para la eliminación no uniforme de vértices (dirigida) de la red en el método de análisis de operación de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
k <- degree(g)
n<- gorder(g)
f <- numeric(n)
s <- numeric(n)
a <- V(g)$name
dd <- numeric(n)
for (m in 1:n){
dd[m] <- degree(g,v=m)
}
dd
rr <-max(dd)
jj <- numeric(n)
w<-1
ww <- max(dd)
for(y in 1:rr){
for(z in 1:n){
if (ww == dd[z]){
jj[w] <- z
w <- w+1
}
}
ww <- ww-1
}
jj
for (i in 1:(n-1)){
f[i] <- i/n
g <- delete_vertices(g, a[jj[i]])
```

## Continuación apéndice 11.

```
clu <- components(g)$csize
m <- max(clu)
s[i]<- m/n
}
#f[0]<-0
#s[0]<-1
f[n]<- 1
s[n]<- 0
#
#plot(f,s, xlab="f", ylab="S",main="118 barras")
tt <- k[order(-k)]
#plot(tt,s, xlab="k",ylab="S", main="118 barras")
s
tt
#f
r2 <-max(dd)
j2 <- numeric(r2)
j3 <- numeric(r2)
w2<-1
w3 <- max(dd)
w4 <- 0
for(y1 in 1:r2){
for(z1 in 1:n){
if (w3 == tt[z1]){
w4 <- w4 + 1
j2[w2] <- j2[w2]+ s[z1]
}
}
j3[w2]<- j2[w2]/w4
w4 <- 0
w2 <- w2+1
w3 <- w3-1
}
```

Continuación apéndice 11.

```
j3  
w5 <- c(1:r2)  
w6 <- numeric(r2)  
w6 <- w5[order(-w5)]  
#par(mfrow=c(2,3))  
plot(w6,j3,xlab="k",ylab="S", main="118 barras")
```

Fuente: elaboración propia.

**Apéndice 12. Programa en R software para la eliminación aleatoria uniforme de aristas de la red en el método de análisis de operación de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
n <- gorder(g)
m <- gsize(g)
f <- numeric(m)
s <- numeric(m)
sr <- numeric(m)
a <- E(g)$name
#par(mfrow=c(3,2))
#plot(f,sr)
#set_edge_attr(g,"name", value = LETTERS[1:m])
#edge_attr(g)
#vertex_attr(g)
for (j in 1:100){
x <- sample(1:m,m, replace=F)
for (i in 1:(m-1)){
f[i] <- i/m
g <- delete_edges(g, a[x[i]])
clu <- components(g)$size
ma <- max(clu)
s[i]<- ma/n
#lines(f,s)
}

for (k in 1:m){
if (j > 1){
dif <- abs(sr[k]-s[k])
if(dif < 0.001){
sr[k]<- s[k]
} else{
```

## Continuación apéndice 12.

```
sr[k]<- sr[k]
}
} else {
sr[k] <- s[k]
}
}
}
f[n]<- 1
s[n]<- 0
plot(f,sr,xlab="f", ylab="S", main="SNI, Guatemala")
xx <- c (0.6615)
yy <- c(0.00)
points(xx, yy, pch=2, col="red")
f
sr
```

Fuente: elaboración propia.

**Apéndice 13. Programa en R software para la obtención del árbol recubridor de mínimo en el método de análisis de operación de los sistemas de potencia**

```
library(igraph)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
a <- edge_attr(g, index = E(g))$Weight
tm <- mst(g, weights = a )
b1 <- edge_attr(tm, index = E(g))$ld
a1 <- edge_attr(g, index = E(g))$ld
bb1 <- edge_attr(tm, index = E(g))$Weight
bb1
sum(bb1)
n <- length(a1)
n
n1 <- length(b1)
n1
c <- numeric(n)
for (m in 1:n){
c[m] <- 1
}
for (i in 1:n){
for (j in 1:n1){
if( a1[i] == b1[j] ){
c[i] <- 5
}#else {
#c[i]<- 1
#}
}
}
c
V(g)
n2 <- gorder(g)
n2
```

### Continuación apéndice 13.

```
or <- numeric(n2)
or
re <- V(g)$name
re
re1 <- re[order(re)]
re1
for( p in 1:n2){
for( q in 1:n2){
if(re1[p]== re[q]){
or[q]<- p
}
}
}
#par(mfrow=c(1,2))
la <- layout.reingold.tilford(tm, params=list(1))
la <- norm_coords(la, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
plot(tm, vertex.label=V(g)$name, vertex.size=1, layout=la*1.3, edge.width = 1)
l <- layout_with_fr(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
plot(g, edge.width = c, vertex.label=V(g)$name, rescale=F,
layout=l*1.25, vertex.size=0)
```

Fuente: elaboración propia.

## Apéndice 14. Programa en R software para el flujo máximo de una red

```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
plot(g)
E(g)
a <- edge_attr(g,"Weight", index = E(g))
a
vertex_attr(g,"name", index = V(g))
max_flow(g, source=V(g)["0"], target=V(g)["15"], capacity = a )
c <- max_flow(g, source=V(g)["0"], target=V(g)["15"], capacity = a )$flow
c
j<-
l <- layout_on_grid(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
plot(g, edge.width = c,rescale=F, layout=l*0.8, main="14 barras")
g1 <- delete_edges(g,13)
#g1 <- delete_edges(g1,11)
#g1 <- delete_edges(g1,12)
plot(g1)
b <- edge_attr(g1,"Weight", index = E(g1))
b
max_flow(g1, source=V(g1)["0"], target=V(g1)["15"], capacity = b )
```

Fuente: elaboración propia.

Apéndice 15. **Programa en R software para obtener el número de comunidades óptimo y modularidad asociada de la red del SNI**

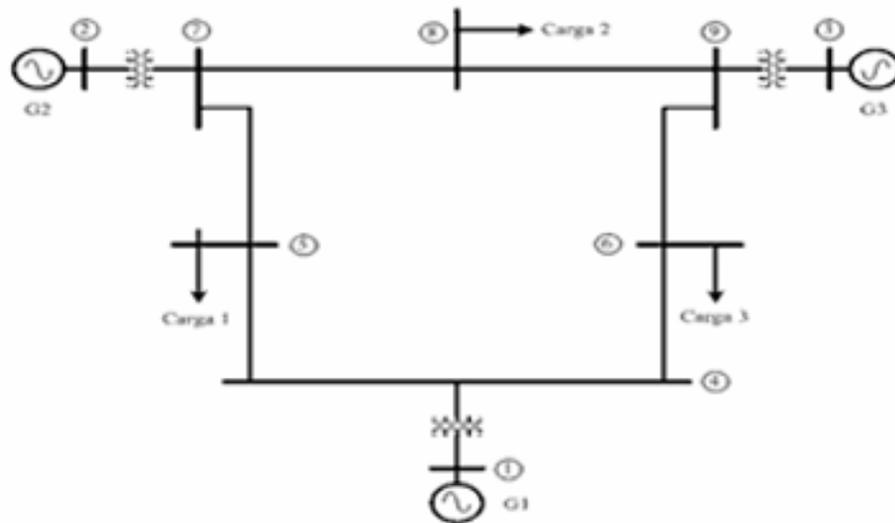
```
library(igraph)
library(ggplot2)
d <- read.csv(file.choose(),header=TRUE)
g <- graph.data.frame(d, directed=FALSE)
l <- layout_with_fr(g)
l <- norm_coords(l, ymin=-1, ymax=1, xmin=-1, xmax=1)
w <- cluster_louvain(g)
modularity(w)
membership(w)
plot(w,g,rescale=F, layout=l*1.25, vertex.size=5)
w
length(w)
sizes(w)
max(sizes(w))
ca <- cluster_spinglass(g, spins=3)# determinar el numero de comunidades
modularity(ca)
membership(ca)
plot(ca,g,rescale=F, layout=l*1.25, vertex.size=5)
length(ca)
sizes(ca)
```

Fuente: elaboración propia.

## ANEXOS

En este apartado se presentan los diagramas unifilares de los sistemas de barras de la IEEE utilizados para el análisis.

### Anexo 1. Diagrama unifilar del sistema de 9 barras IEEE utilizado en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia

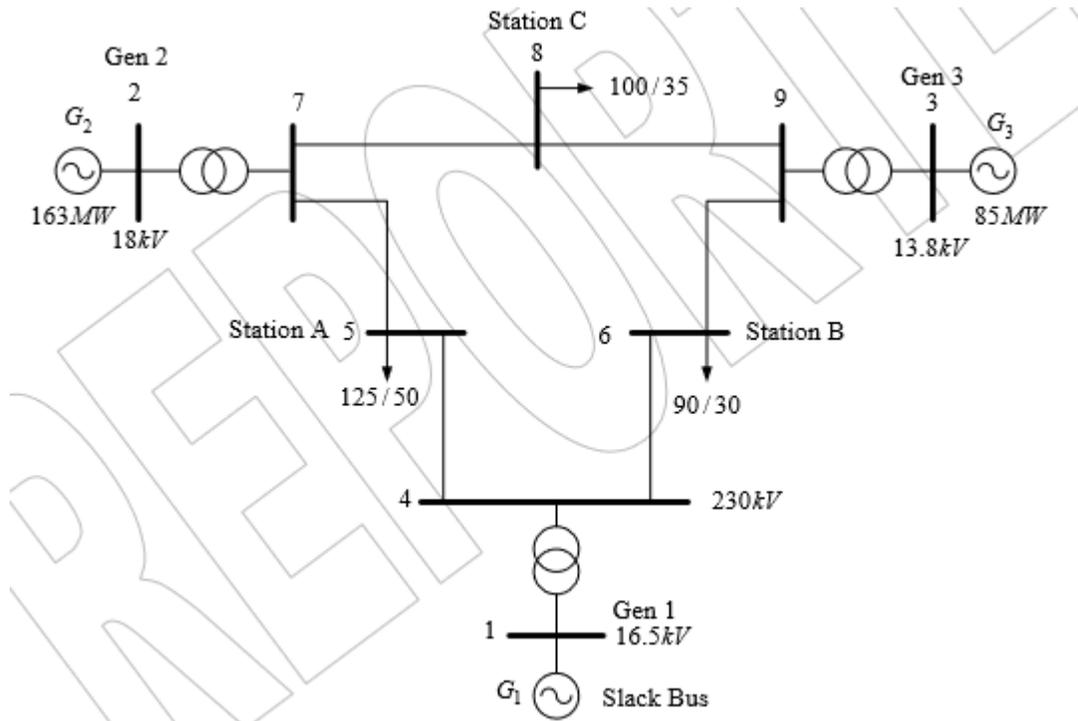


**Fig. 3.** Sistema típico de 9 barras de la IEEE.

Fuente: BOZA, Juan, RUIZ Walter. *Estudio del efecto del condensador estático de reactivos en el problema de flujo de carga. Ingeniería energética.*

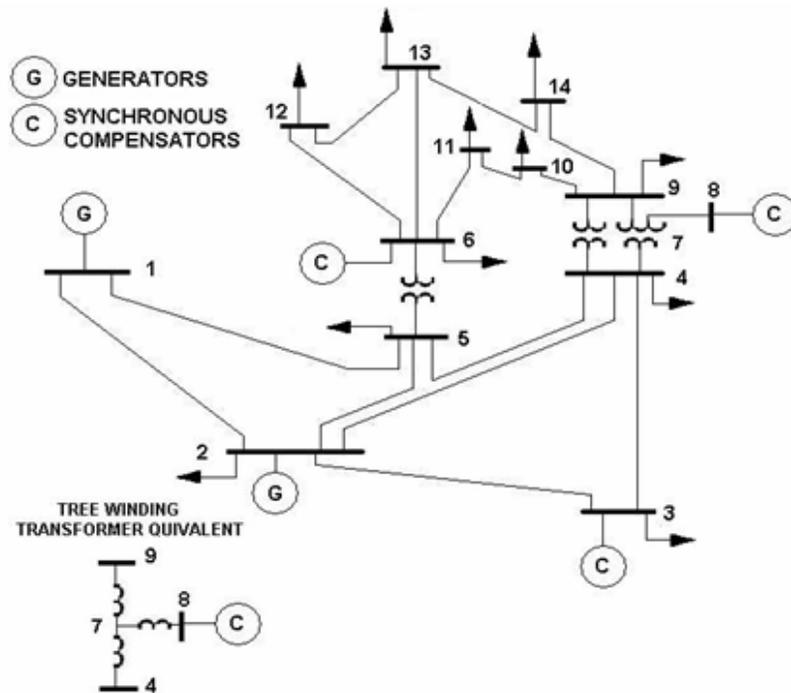
[http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1815-59012012000100001](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59012012000100001). Consultado: julio de 2018.

Anexo 2. **Diagrama unifilar del sistema de 9 barras IEEE utilizado en el método de análisis de operación de los sistemas de potencia**



Fuente: GONZALEZ-LONGATT, Francisco. *Flujo de potencia en el sistema de 9 barras*, P.M. Anderson. Reporte de investigación, p. 2.

Anexo 3. **Diagrama unifilar del sistema de 14 barras IEEE utilizado en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**



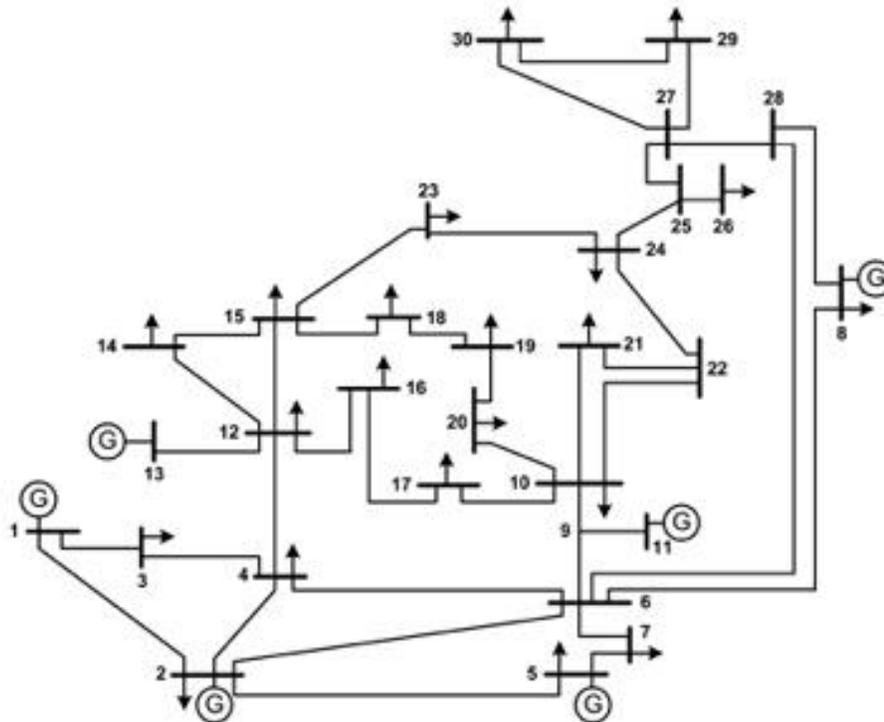
**Fig. 3.** Esquema típico de 14 barras de la IEEE.

Fuente: BOZA, Juan, ESTRADA, Raúl, HERRERA, Annavell, BARRETO, Moisés. *La estabilidad de la tensión de los sistemas eléctricos de potencia utilizando el programa "PSAF"*.

Ingeniería energética. [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1815-](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59012012000200001)

59012012000200001. Consulta: julio de 2018.

Anexo 4. **Diagrama unifilar del sistema de 30 barras IEEE utilizado en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**



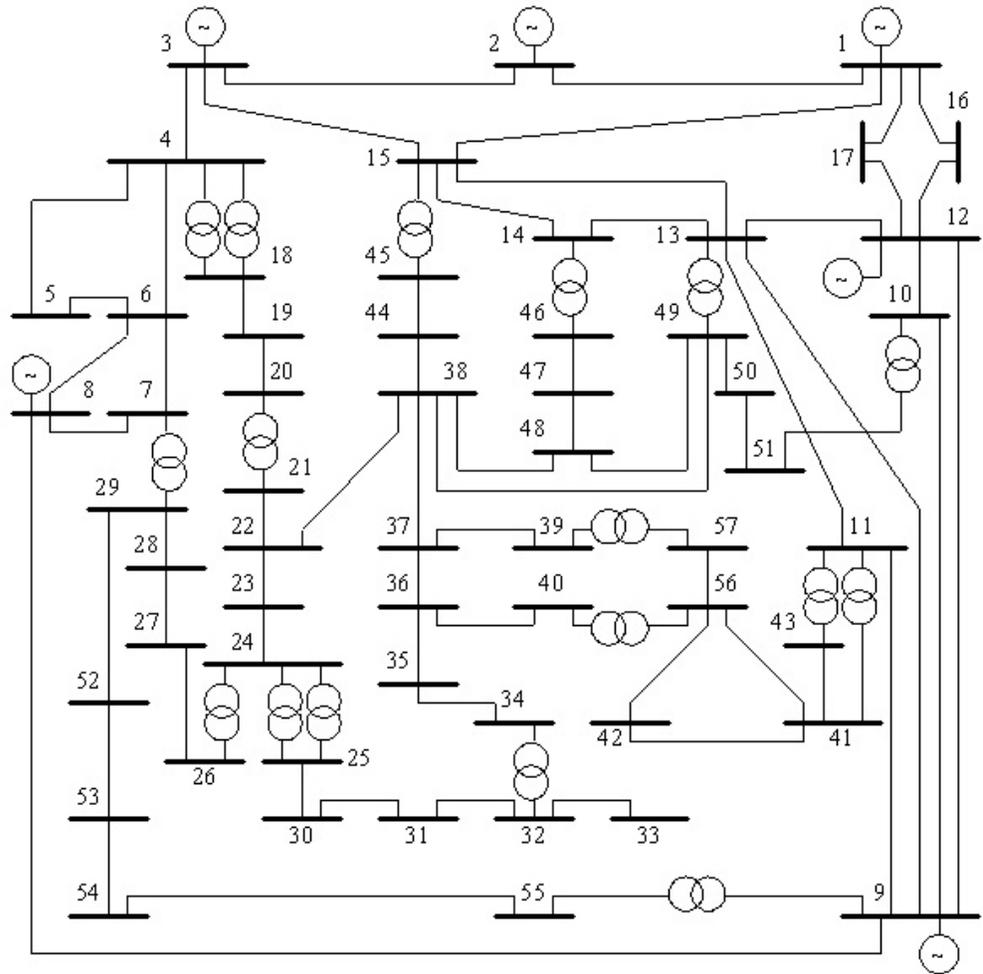
**Figura 2: Sistema IEEE 30 barras - Modelagem da Rede Elétrica no Nível Barra-Ramo.**

Fuente: ROSAS, Gracita. LOURENÇO, Elizete. FERNANDES, Thelma. *Modelado de ramas de impedancia nula en el problema de flujo de potencia óptimo (traducido del portugués).*

Control y automatización, Sociedad brasileña de automática.

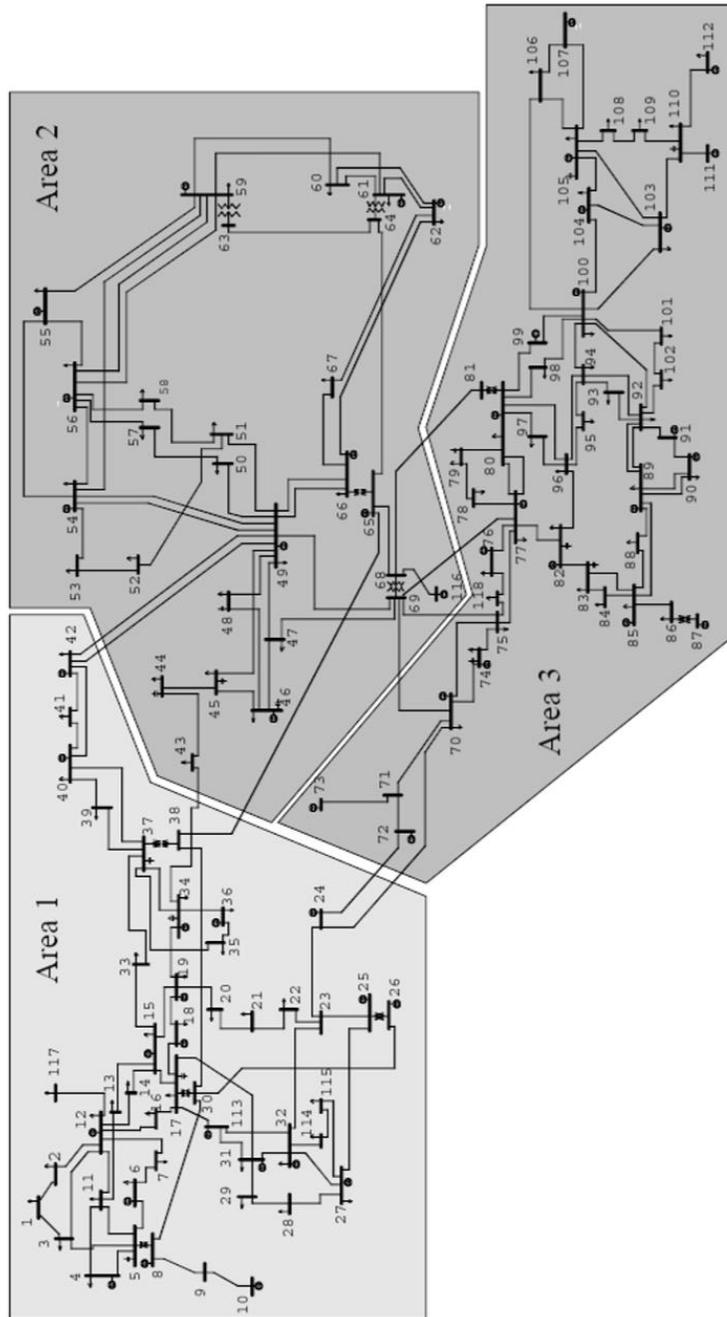
[www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-17592012000600009](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592012000600009). Consulta: julio de 2018.

Anexo 5. **Diagrama unifilar del sistema de 57 barras IEEE utilizado en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**



Fuente: *Electric Power Systems analysis and Nature-inspired optimization algorithms. 57-Bus System (IEEE Test case)*. <http://al-roomi.org/power-flow/57-bus-system>. Consulta: julio de 2018.

Anexo 6. Diagrama unifilar del sistema de 118 barras IEEE utilizado en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia



Fuente: S. Repo.; "On-line voltage Stability Assessment of Power System – An Approach of Black-box Modeling"

Fuente: PÉREZ, Sandra. *Propuesta para la identificación y monitoreo de áreas débiles con relación a la estabilidad de tensión en sistemas eléctricos de potencia.* pág 72.

Anexo 7. **Datos del sistema de 9 barras de la IEEE utilizados en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**

<i>Generadores*</i>	<i>Barra</i>	<i>Impedancia</i>		<i>Admitancia</i>	
		<i>R</i>	<i>X</i>	<i>G</i>	<i>B</i>
Generador 1	1-4	0	0.1184	0	-8.4459
Generador 2	2-7	0	0.1823	0	-5.4855
Generador 3	3-9	0	0.2399	0	-4.1684
<i>Líneas de Transmisión</i>					
	4-5	0.0100	0.0850	1.3652	-11.6041
	4-6	0.0170	0.0920	1.9422	-10.5107
	5-7	0.0320	0.1610	1.1876	-5.9751
	6-9	0.0390	0.1700	1.2820	-5.5882
	7-8	0.0085	0.0720	1.6171	-13.6980
	8-9	0.0119	0.1008	1.1551	-9.7843
<i>Admitancia Shunt*</i>					
Carga A	5-0			1.2610	-0.2634
Carga B	6-0			0.8777	-0.0346
Carga C	8-0			0.9690	-0.167
	4-0				0.1670
	7-0				0.2275
	9-0				0.2835

Fuente: GONZALEZ-LONGATT, Francisco. *Flujo de potencia en el sistema de 9 barras*, P.M. Anderson. pág. 3.

Anexo 8. **Datos del sistema de 14 barras de la IEEE utilizados en el método de análisis de estructura de los sistemas de potencia**

Nodo envió	Nodo recibo	$R$	$X$	$B$
2	5	0,05695	0,17388	0,034
6	12	0,12291	0,25581	0
12	13	0,22092	0,19988	0
6	13	0,06615	0,13027	0
6	11	0,09498	0,1989	0
11	10	0,08205	0,19207	0
9	10	0,03181	0,0845	0
9	14	0,12711	0,27038	0
14	13	0,17093	0,34802	0
7	9	0	0,11001	0
1	2	0,01938	0,05917	0,0528
3	2	0,04699	0,19797	0,0438
3	4	0,06701	0,17103	0,0346
1	5	0,05403	0,22304	0,0492
5	4	0,01335	0,04211	0,0128
2	4	0,05811	0,17632	0,0374
4	9	0,005	0,55618	0
5	6	0	0,25202	0
4	7	0	0,20912	0
8	7	0	0,17615	0

Fuente: RODRÍGUEZ, Luis. *Análisis de estabilidad de tensión considerando sistemas de monitoreo de área amplia y características de cargas mixtas*. Anexo A.1.2. pág. 84.

Anexo 9. **Datos del sistema de 14 barras de la IEEE utilizados en el flujo de potencia para obtener el flujo máximo**

**Tabla 4. 10** Aporte de potencia de cada generador sobre las líneas del sistema de 14 barras IEEE, condición máxima carga

# Líneas	Potencia Generada				Flujos de potencia máximos
	Pg1	Pg2	Qg6	Qg8	
1	173.24 - 24.15i	0.00	0.00	0.00	173.23 - 24.15i
2	86 + 5.47i	0.00	0.00	0.00	86.00 + 5.47i
3	58 - 16.06i	22.86 + 18.92i	0.00	0.00	80.86 + 2.86i
4	46 - 15.1i	19.09 + 14.25i	0.00	0.00	65.09 - 0.75i
5	35 - 9.55i	14.74 + 11.75i	0.00	0.00	49.741 + 2.2i
6	17 - 9.59i	5.45 + 2.32i	0.00	0.00	22.45 - 7.27i
7	57 - 20.12i	8.07 + 4.12i	0.00	0.00	65.07 - 16.00i
8	24 - 13.37i	8.15 + 3.41i	0.00	0.00	32.15 - 9.96i
9	14 - 3.16i	4.38 + 2.97i	0.00	0.00	18.38 - 0.1823i
10	48 + 5.14i	4.76 + 5.78i	0.00	0.00	52.76 + 10.92i
11	7 + 0.87i	1.17 + 0.95i	0.00 + 3.85i	0.00	8.17 + 5.67i
12	8 - 1.25i	1.24 + 0.72i	0.00 + 3.83i	0.00	9.24 + 3.3i
13	17 - 1.36i	3.27 + 1.78i	0.00 + 8.62i	0.00	20.22 + 9.04i
14	0.00	0.00	0.00	0 + 19.98i	19.98i
15	24.16 - 15.17i	7.99 + 2.99i	0.00	0 + 19.39i	32.15 + 7.21i
16	6.93 - 0.67i	0.92 + 1.67i	0.00	0 + 3.14i	7.85 + 4.14i
17	8.99 - 2.77i	1.99 + 1.72i	0.00	0 + 4.29i	10.98 + 3.24i
18	2 + 0.89i	0.76 + 0.42i	0 + 1.46i	0.00	2.76 + 2.77i
19	1.31 + 0.18i	0.08 + 0.17i	0 + 0.67i	0.00	1.39 + 1.02i
20	4.76 - 0.2i	0.55 + 0.49i	0 + 2.31i	0.00	5.31 + 2.59i

Fuente: SÁNCHEZ, Nilda. *Desarrollo de una metodología simplificada para la disminución de botes de carga en sistemas eléctricos de potencia.* pag 83-84.

