



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

**DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS  
PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL  
IMPLEMENTADAS EN LABVIEW**

**Mario José Morales Batz**

Asesorado por el Ing. Gustavo Benigno Orozco Godínez

Guatemala, mayo de 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS  
PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL  
IMPLEMENTADAS EN LABVIEW**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**MARIO JOSÉ MORALES BATZ**

ASESORADO POR EL ING. GUSTAVO BENIGNO OROZCO GODÍNEZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO ELECTRÓNICO**

GUATEMALA, MAYO DE 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Ing. Miguel Ángel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. Juan Carlos Molina Jiménez
VOCAL V	Br. Mario Maldonado Muralles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Byron Odilio Arrivillaga Méndez
EXAMINADOR	Ing. Julio Rolando Barrios Archila
EXAMINADOR	Ing. José Aníbal Silva de los Ángeles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL IMPLEMENTADAS EN LABVIEW**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, el 23 de noviembre de 2009.

A handwritten signature in black ink, consisting of two large, stylized loops followed by a smaller signature.

Mario José Morales Batz

Guatemala, 28 de noviembre de 2011.

Ingeniero  
Romeo Nefalí López Orozco  
Coordinador del Área de Electrotecnia  
Escuela Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería  
USAC.

Ingeniero López:

De acuerdo con la designación efectuada por la Dirección de Escuela, me permito informarle que he procedido a asesorar el Trabajo de Graduación titulado: DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMATICOS DE CONTROL IMPLEMENTADAS EN LABVIEW, desarrollado por el estudiante MARIO JOSÉ MORALES BATZ, carne 2006-14749 y, encontrándolo satisfactorio en su contenido y resultados, me permito dar aprobación al mismo, remitiéndolo a esa Coordinación para el tramite pertinente, en el entendido que el Autor y este Asesor somos responsables del contenido y conclusiones del Trabajo.

Agradeciendo la atención a la presente, me es grato suscribirme, deseándole éxitos en sus labores cotidianas.

Atentamente,



Ing. Gustavo Benigno Orozco Godínez.  
Colegiado 1,879  
ASESOR

ING. GUSTAVO B. OROZCO  
COLEGIADO 1879



Ref. EIME 11. 2012  
Guatemala, 8 de MARZO 2012.

FACULTAD DE INGENIERIA

Señor Director  
Ing. Guillermo Antonio Puente Romero  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería, USAC.

Señor Director:

**Me permito dar aprobación al trabajo de Graduación titulado: DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL IMPLEMENTADAS EN LABVIEW, del estudiante Mario José Morales Batz, que cumple con los requisitos establecidos para tal fin.**

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarle.

Atentamente,  
ID Y ENSEÑAD A TODOS

  
Ing. Romeo Nefalí López Orozco  
Coordinador de Electrotécnica



RNLO/sro



FACULTAD DE INGENIERIA

REF. EIME 11. 2012.

**El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Área, al trabajo de Graduación del estudiante; Mario José Morales Batz titulado: DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL IMPLEMENTADAS EN LABVIEW, procede a la autorización del mismo.**

Ing. Guillermo Antonio Puente Romero

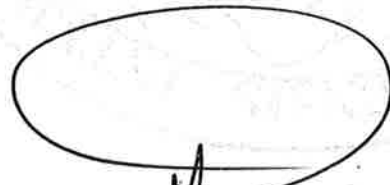
GUATEMALA, 16 DE MARZO 2012.





El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, al trabajo de graduación titulado: **DISEÑO DE APLICACIONES VIRTUALES PARA EL ANALISIS PRELIMINAR DE LOS SISTEMAS AUTOMATICOS DE CONTROL IMPLEMENTADAS EN LABVIEW**, presentado por el estudiante universitario **Mario José Morales Batz**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.



Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
Decano



Guatemala, mayo de 2012

/cc



## **ACTO QUE DEDICO A:**

- Dios** Gracias padre, por haberme permitido alcanzar esta meta, porque a ti te debo éste y todos mis logros, porque sin tu presencia a mi lado y en mi corazón nada tendría sentido.
- Mis padres** Ismael y Ana, por tantos sacrificios, trabajo y dedicación que han puesto para ayudarme, porque a pesar de todos mis errores y defectos siempre me han mostrado su apoyo.
- Mis hermanos** Marvin, Alex y Walter, por todo el apoyo que siempre me han mostrado y siempre darme un buen ejemplo, a Fabiola (q.e.p.d.), porque estoy seguro siempre estuviste a mi lado.
- Mis sobrinas** Melissa y Sofía, por ser dos angelitos que llegaron a nuestra familia en el momento que más necesitábamos de una razón para seguir adelante.
- Mis tíos** Fray Mario Batz (q.e.p.d.) y Leticia Morales (q.e.p.d.), porque un día les prometí alcanzar esta meta y hoy finalmente lo he logrado, ustedes serán siempre esa fuerza y razón para superarme.

**Mis amigos**

Manuel Márquez, Luis Rodríguez, Sergio Noriega, Daniel Camargo, Marcos Monzón y Julio Xocoy, por todos estos años juntos que trascienden la amistad y me permiten llamarlos hermanos, a Damaris Gómez por siempre estar ahí, cuando más te he necesitado.

## **AGRADECIMIENTOS A:**

- Ing. Gustavo Orozco** Por asesorar este trabajo de graduación, sus consejos, paciencia y opiniones sirvieron para que me sienta satisfecho con la realización de este trabajo.
- Ing. Byron Arrivillaga** Por creer en mí y mis capacidades, y permitirme empezar a crecer profesionalmente. Por brindarme su importante apoyo y conocimiento a cada momento, por enseñarme lo que es verdaderamente ser un ingeniero electrónico.
- Inga. María José Reiche** Por enseñarme que aun en las situaciones más difíciles, siempre debemos de mantener la fe y el ánimo, que no debemos dejarnos vencer.
- Mis catedráticos** Ing. Julio Barrios e Ing. Aníbal Silva, por todos sus consejos y apoyo durante la carrera, porque estoy seguro que todos y cada uno de ellos me servirán en mi vida profesional.

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	V
LISTA DE SÍMBOLOS .....	IX
GLOSARIO .....	XI
RESUMEN.....	XIII
OBJETIVOS.....	XV
INTRODUCCIÓN .....	XVII
1. LOS SISTEMAS DE CONTROL .....	1
1.1. Introducción a los sistemas de control.....	1
1.1.1. Componentes básicos .....	2
1.1.2. Aplicaciones de los sistemas de control .....	3
1.1.2.1. Sistema de control de velocidad.....	3
1.1.2.2. Sistema de control de un robot.....	4
1.1.2.3. Sistema de control de seguimiento del sol .....	5
1.1.3. Clasificación de los sistemas de control .....	6
1.1.3.1. Sistemas de control en lazo abierto.....	7
1.1.3.2. Sistema de control en lazo cerrado .....	8
1.2. Retroalimentación y sus efectos.....	9
1.2.1. Efectos de la retroalimentación en la ganancia global.....	10
1.2.2. Efectos de la retroalimentación en la estabilidad.....	11
1.2.3. Efecto de la retroalimentación en la sensibilidad.....	11
1.2.4. Efecto de la retroalimentación sobre ruido .....	12
1.3. Tipos de sistemas de control con retroalimentación.....	14
1.3.1. Sistemas de controles lineales y no lineales .....	14
1.3.2. Sistemas variantes e invariantes con el tiempo.....	16

1.3.2.1.	Sistemas de control en tiempo continuo .....	16
1.3.2.2.	Sistemas de control en tiempo discreto .....	19
2.	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.....	21
2.1.	Introducción a la teoría matemática .....	21
2.2.	Concepto de variable compleja .....	22
2.2.1.	Variable compleja.....	22
2.2.2.	Funciones de una variable compleja .....	23
2.2.3.	Polos de una función.....	23
2.2.4.	Ceros de una función .....	24
2.3.	Ecuaciones diferenciales.....	24
2.3.1.	Ecuaciones diferenciales ordinarias.....	25
2.3.1.1.	Ecuaciones de estado.....	25
2.3.1.2.	Variables de estado .....	26
2.3.1.3.	Ecuaciones de salida .....	27
2.4.	Transformada de Laplace .....	28
2.4.1.	Definición de la transformada de Laplace .....	28
2.4.2.	Transformada inversa de Laplace.....	29
2.4.3.	Teoremas de la transformada de Laplace.....	30
2.5.	Teoría de matrices .....	32
2.5.1.	Definición de una matriz.....	33
2.5.2.	Álgebra de matrices .....	34
2.5.2.1.	Igualdad de matrices .....	34
2.5.2.2.	Suma y resta de matrices.....	34
2.5.2.3.	Ley asociativa y conmutativa .....	35
2.5.2.4.	Multiplicación de matrices .....	35
2.5.2.5.	Inversa de una matriz.....	35
2.5.3.	Ecuaciones de estado en forma matricial.....	36

3.	HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS .....	37
3.1.	Introducción al análisis .....	37
3.2.	Sistemas lineales.....	38
3.2.1.	Respuesta al impulso .....	38
3.2.2.	Función de transferencia .....	38
3.3.	Diagramas de bloques.....	39
3.3.1.	Diagrama de bloques de un sistema de control.....	41
3.3.2.	Diagramas de bloques de sistemas multivariables.....	43
3.4.	Gráficas de flujo de señal .....	44
3.4.1.	Elementos básicos de una gráfica de flujo de señal.....	44
3.4.2.	Propiedades básicas de una gráfica de flujo de señal.....	45
3.5.	Diagrama de estado .....	46
4.	DISEÑO DE APLICACIONES DE TEORIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL.....	49
4.1.	Aplicación 1 - Definiciones de sistemas de control.....	49
4.2.	Aplicación 2 - Variables en sistemas de control .....	50
4.3.	Aplicación 3 - Ejercicios de variables .....	52
4.4.	Aplicación 4 - Componentes en sistemas.....	53
4.5.	Aplicación 5 - Ejercicios de componentes .....	55
4.6.	Aplicación 6 - Tipos de sistemas .....	56
4.7.	Aplicación 7 - Otros tipos de sistemas.....	58
4.8.	Aplicación 8 - Ejercicios de tipos de sistemas .....	59
4.9.	Aplicación 9 - Retroalimentación .....	61
4.10.	Aplicación 10 - Ejercicios de retroalimentación .....	63
5.	DISEÑO DE APLICACIONES DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS .....	65
5.1.	Aplicación 11 – Introducción a la teoría matemática .....	65
5.2.	Aplicación 12 – Variable compleja.....	67
5.3.	Aplicación 13 – Aplicaciones de variable compleja .....	68

5.4.	Aplicación 14 – Polos y ceros .....	70
5.5.	Aplicación 15 – Ecuaciones diferenciales .....	71
5.6.	Aplicación 16 – Aplicaciones de ecuaciones diferenciales.....	73
5.7.	Aplicación 17 – Transformada de Laplace .....	74
5.8.	Aplicación 18 – Aplicaciones de transformada de Laplace .....	76
5.9.	Aplicación 19 – Teoría de matrices .....	77
5.10.	Aplicación 20 – Aplicaciones de matrices .....	79
6.	DISEÑO DE APLICACIONES PARA HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS ....	81
6.1.	Aplicación 21 – Introducción al diseño y análisis .....	81
6.2.	Aplicación 22 – Función de transferencia.....	83
6.3.	Aplicación 23 – Ejemplos de funciones de transferencia .....	84
6.4.	Aplicación 24 – Diagramas de bloques .....	85
6.5.	Aplicación 25 – Ejercicios de diagramas de bloques .....	86
6.6.	Aplicación 26 – Gráficas de flujo de señal.....	88
6.7.	Aplicación 27 – Aplicaciones de gráficas de flujo de señal .....	89
6.8.	Aplicación 28 – Aplicación a diagramas de estado .....	91
	CONCLUSIONES.....	93
	RECOMENDACIONES .....	95
	BIBLIOGRAFÍA.....	97

# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1. Componentes básicos de un sistema de control.....	2
2. Sistema de control de velocidad.....	3
3. Sistema de control de un robot.....	5
4. Sistema de control de seguimiento del sol.....	6
5. Elementos de un sistema de control de lazo abierto.....	7
6. Diagrama de un sistema de control de lazo cerrado.....	8
7. Sistema de control retroalimentado.....	10
8. Sistema Retroalimentado con señal de ruido.....	13
9. Diagrama de sistema de control de CD en lazo cerrado.....	17
10. Diagrama de sistema de control de CA en lazo cerrado.....	18
11. Diagrama de un sistema de control de datos muestreados.....	19
12. Plano complejo S.....	22
13. Elemento de un diagrama de bloques.....	39
14. Diagrama de bloques con funciones de transferencia.....	40
15. Diagrama de bloques para referencia.....	40
16. Diagrama de bloques de puntos de resta y suma.....	42
17. Diagrama de un sistema de control con retroalimentación.....	42
18. Diagrama de un sistema de control mutivariable.....	43
19. Elemento básico de una gráfica de flujo de señal.....	45
20. Representación gráfica de la integración.....	46
21. Panel frontal de aplicación 1.....	50
22. Panel frontal de aplicación 2.....	51
23. Panel frontal de aplicación 3.....	52



24.	Panel frontal de aplicación 4.....	54
25.	Panel frontal de aplicación 5.....	55
26.	Panel frontal de aplicación 6.....	57
27.	Panel frontal de aplicación 7.....	59
28.	Panel frontal de aplicación 8.....	60
29.	Panel frontal de aplicación 9.....	62
30.	Panel frontal de aplicación 10.....	63
31.	Panel frontal de aplicación 11.....	66
32.	Panel frontal de representación geométrica.....	67
33.	Panel frontal de la aplicación 12.....	68
34.	Panel frontal de la aplicación 13.....	69
35.	Panel frontal de actividad polos y ceros.....	70
36.	Panel frontal de la aplicación 14.....	71
37.	Panel frontal de la aplicación 15.....	72
38.	Panel frontal de la aplicación 16.....	73
39.	Panel frontal de la aplicación 17.....	74
40.	Panel frontal de la actividad de transformada de Laplace.....	75
41.	Panel frontal de la aplicación 18.....	76
42.	Panel frontal de la actividad tipos de matrices.....	77
43.	Panel frontal de la actividad operaciones de matrices.....	78
44.	Panel frontal de la aplicación 20.....	79
45.	Panel frontal de la aplicación 21.....	82
46.	Panel frontal de la aplicación 22.....	83
47.	Panel frontal de la aplicación 23.....	84
48.	Panel frontal de la actividad álgebra de bloques.....	85
49.	Panel frontal de la aplicación 24.....	86
50.	Panel frontal de la aplicación 25.....	87
51.	Panel frontal de la aplicación 26.....	89
52.	Panel frontal de la aplicación 27.....	90

53.	Panel frontal de actividad de graficas de flujo.....	91
54.	Panel frontal de la aplicación 28.....	92

## **TABLAS**

I.	Tabla de transformadas de Laplace.....	29
----	--	----



## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$A_n$	Constantes
$K$	Constante de elasticidad
$f$	Frecuencia
$F$	Fuerza
$G$	Ganancia
$M$	Masa
$A$	Matriz
$B$	Parte imaginaria
$A_o$	Parte real
$X$	Posición
$\theta_0$	Posición angular
$E$	Señal de error
$N$	Señal de ruido
$T$	Tiempo
$S$	Variable compleja
$x_0$	Valor inicial
$v_0$	Velocidad inicial



## GLOSARIO

<b>Amplificador</b>	Es todo dispositivo que, mediante la utilización de energía magnifica la amplitud de un fenómeno.
<b>Controlador</b>	Este es el dispositivo en un sistema, que calcula la acción que debe aplicarse para modificar las variables de control en base a ciertos criterios.
<b>Estabilidad</b>	Esta es una medida de la capacidad de un sistema de resistir la perturbación. La capacidad de recuperar la posición original tras el cambio.
<b>GFS</b>	Gráfica de flujo de señal.
<b>Impulso</b>	Este se define como un pulso infinitamente corto en el tiempo, que concentra su área en un único punto.
<b>Máquina-herramienta</b>	Una máquina-herramienta es aquella que se utiliza para dar forma a materiales solidos, como el metal. Por lo tanto posibilita la fabricación de otras máquinas.
<b>Muestreo</b>	Consiste en tomar muestras de la amplitud de una señal analógica una frecuencia o tasa de muestreo constante, que luego se convierten en valores discretos.

<b>Par</b>	El par es la fuerza que define la rotación de un objeto respecto de su eje.
<b>Perturbación</b>	Esta es cualquier tipo de señal o fenómeno, que incide sobre un sistema y que altera su funcionamiento, provocando inestabilidad.
<b>Proceso</b>	Un proceso es un conjunto de actividades o eventos coordinados que se realizan o suceden bajo ciertas circunstancias con un fin determinado.
<b>Sensibilidad</b>	Esta es la capacidad de un sistema de detectar ondas o señales de forma precisa, para su posterior análisis o procesamiento.
<b>Sensor</b>	Este es un dispositivo que mide automáticamente una variable, como presión, temperatura, régimen de giro, entre otros, y la convierte en una señal eléctrica.
<b>Sincro</b>	Se llama sincro a un motor cuyo rotor es capaz de adoptar de forma precisa cierto ángulo que coincide con el ángulo que se gira el eje del controlador.
<b>Transductor</b>	Un transductor es un dispositivo capaz de transformar o convertir un determinado tipo de energía de entrada, en otra de diferente a la salida.

## **RESUMEN**

El presente trabajo de graduación tiene como principal finalidad proporcionar una herramienta de apoyo para los estudiantes del curso de sistemas de control, el cual tiene como principal objetivo introducir los criterios y fundamentos del funcionamiento de los sistemas de control.

Esta herramienta se basa en aplicaciones virtuales, o instrumentos virtuales, diseñados por medio de LabView. Cada una de estas aplicaciones trata de proporcionar un panorama mucho más práctico y físico, a los temas del curso.

Se inicia introduciendo a los temas teóricos, tales como las definiciones más importantes de los sistemas de control, sus fundamentos matemáticos y las herramientas de análisis. Finalmente a cada uno de estos temas se diseña una aplicación o actividad, que tratará de dar un mejor significado a los conceptos, definiciones, transformaciones, entre otros.





# OBJETIVOS

## General

Desarrollar por medio de la plataforma LabView, aplicaciones que muestren de forma gráfica el significado geométrico y físico de los fundamentos matemáticos del análisis de los sistemas de control automático, para facilitar la comprensión del estudiante a temas.

## Específicos

1. Desarrollar los principales temas que fundamentan del análisis y diseño de los sistemas de control.
2. Diseñar aplicaciones virtuales para proporcionar al estudiante una herramienta extra que demuestre la utilidad de los distintos principios conceptos sobre sistemas de control.
3. Diseñar aplicaciones virtuales para proporcionar al estudiante una herramienta extra que demuestre la utilidad de la teoría matemática que fundamenta el análisis de los sistemas de control.
4. Diseñar aplicaciones virtuales para proporcionar al estudiante una herramienta extra que demuestre la aplicación de los modelos de representación de sistemas físicos de los sistemas de control.



## INTRODUCCIÓN

Dentro del área de los sistemas de control, el diseño, implementación y puesta en marcha de estos sistemas es un proceso muchas veces complejo, pero que se fundamenta en métodos de la ingeniería, que básicamente están divididos en secciones. Hoy en día, la ingeniería electrónica es una parte integral de la ingeniería de sistemas de control, casi todos los sistemas automáticos funcionan con ayuda de la electrónica, quedando los sistemas automáticos basados en la mecánica en un segundo plano.

Esto, con el paso de los años ha generado cierta problemática, debido a que cada sección o método de la ingeniería que fundamenta el diseño y análisis, tiende a contener grandes cantidades de conceptos matemáticos, los cuales al ser estudiados en un inicio pueden ser muy abstractos. Para esto se presenta como una solución en cierta medida, a esta problemática, modificar el sistema de enseñanza actual, hacia uno mucho más interactivo, en cual el estudiante pueda comprender de forma más gráfica y física los conceptos que se adquieren por medio de los libros de texto.

La necesidad de implementar un sistema de este tipo, reside en la gran cantidad de sistemas y procesos de control que se encuentran actualmente en la industria, ya que es de suma importancia conocer sus principios de funcionamiento y bases teóricas, las cuales se encuentran en temas tales como sistemas de ecuaciones diferenciales, matrices, funciones de transferencia, etc. que se pueden comprender de mejor forma con sistemas de tipo didáctico, tales como el que se implementa en este trabajo de graduación.



# 1. LOS SISTEMAS DE CONTROL

## 1.1. Introducción a los sistemas de control

Al comenzar el estudio de los sistemas de control, una de las preguntas que más frecuentes es: ¿Qué es un sistema de control? Se puede empezar diciendo que en la vida diaria existen numerosas tareas que se deben de cumplir. Por ejemplo, cuando se requiere regular la temperatura y humedad de distintos lugares, o cuando se requiere controlar que un automóvil se mueva de un lugar a otro de forma precisa.

Tareas como tomar objetos o caminar de un punto a otro se realizan de forma normal y común. Es, dependiendo bajo qué condiciones se hagan estas tareas, que como se vera, distintos sistemas de control deben de entrar en acción, utilizando ciertas estrategias de control, para poder alcanzar los objetivos o cumplir con las tareas. Hoy en día los sistemas de control tienen un papel muy importante en el desarrollo de la tecnología.

Se puede decir que casi cualquier actividad de nuestra vida diaria está regida por algún tipo de sistema de control. Los sistemas de control se encuentran en su mayoría en los sectores de la industria, como control de calidad, líneas de ensamble automático, control de máquinas-herramienta, tecnología espacial, control por computadora, sistemas de transporte, sistemas de potencia, robótica y muchos otros. De hecho otros procesos ajenos a tecnología, como pueden ser el control de inventarios y los sistemas económicos, se pueden visualizar a través de la teoría de control automático.

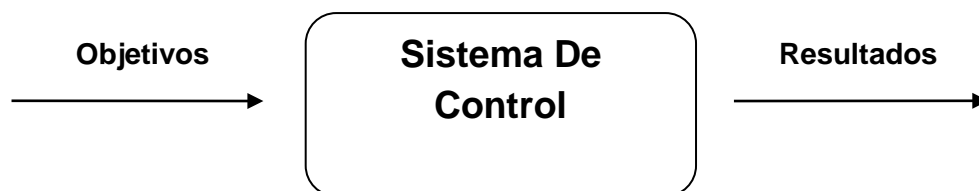
### 1.1.1. Componentes básicos

En un sistema de control básico, los principales componentes que este contiene se pueden describir mediante tres secciones, las cuales son:

- Objetivos de control
- Componentes del sistema de control
- Resultados

La relación básica entre estas tres secciones se ilustra en la figura 1. Se puede decir que los objetivos son las señales de entrada que harán actuar al sistema, y los resultados serán las señales de salida que proporcionara el sistema, los resultados son más comúnmente denominados variables controladas. Por lo tanto, el objetivo de un sistema de control de forma general, es controlar las salidas en alguna forma específica, la cual es determinada mediante las entradas y el control lo logra a través de los elementos del sistema de control. Por lo tanto a este conjunto de elementos que trabajan de forma coordinada para lograr una tarea de control, en algún tipo de proceso, lo se denomina como sistema de control.

Figura 1. Componentes básicos de un sistema de control



Fuente: elaboración propia.

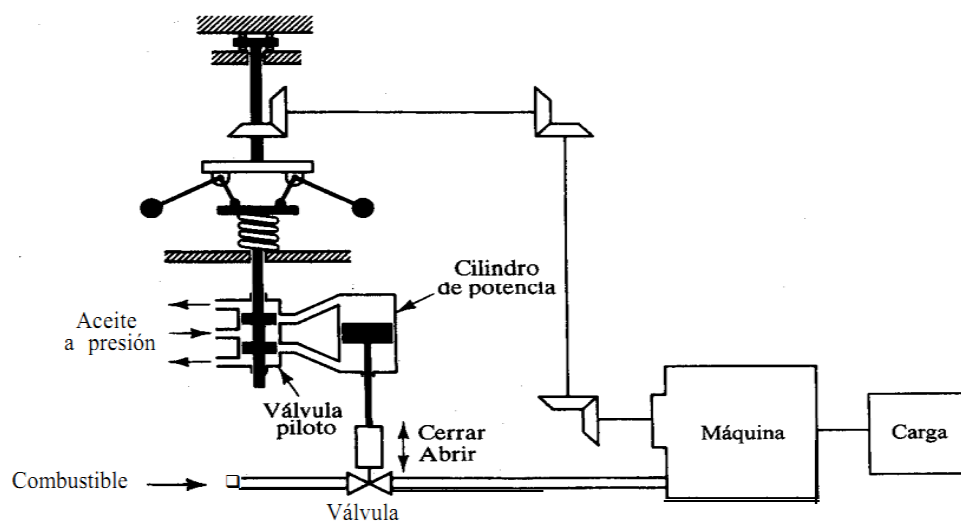
## 1.1.2. Aplicaciones de los sistemas de control

En lo que se refiere a las aplicaciones de los sistemas de control, se puede mencionar casi cualquier tarea de la vida diaria, la cual luego de analizarla poder ver que se modela por medio de un sistema de control. Debido a que la mayoría de las aplicaciones son del tipo industrial, a continuación se ven algunos ejemplos de sistemas de control.

### 1.1.2.1. Sistema de control de velocidad

En los sistemas de control de velocidad uno muy común es el regulador tipo watt, el principio básico de funcionamiento se puede ver en la figura 2. En este sistema la cantidad de combustible que se aplica a la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia entre la velocidad de la máquina que se desea y la velocidad real que esta tiene.

Figura 2. Sistema de control de velocidad



Fuente: OGATA, K. Ingeniería de control moderna. p. 3.



El proceso de regulación se puede describir del modo siguiente: el regulador se ajusta de modo que, a la velocidad deseada no fluya aceite del cilindro de potencia, si la velocidad real cae abajo del valor deseado la disminución de la fuerza centrífuga del regulador provoca que la válvula de control aporte más combustible y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado. Por otra parte, si la velocidad del motor aumenta sobre el valor deseado, el incremento en la fuerza centrífuga provoca que la válvula de control se mueva hacia arriba, esto disminuye el flujo de combustible y la velocidad del motor se reduce hasta alcanzar el valor deseado.

#### **1.1.2.2. Sistema de control de un robot**

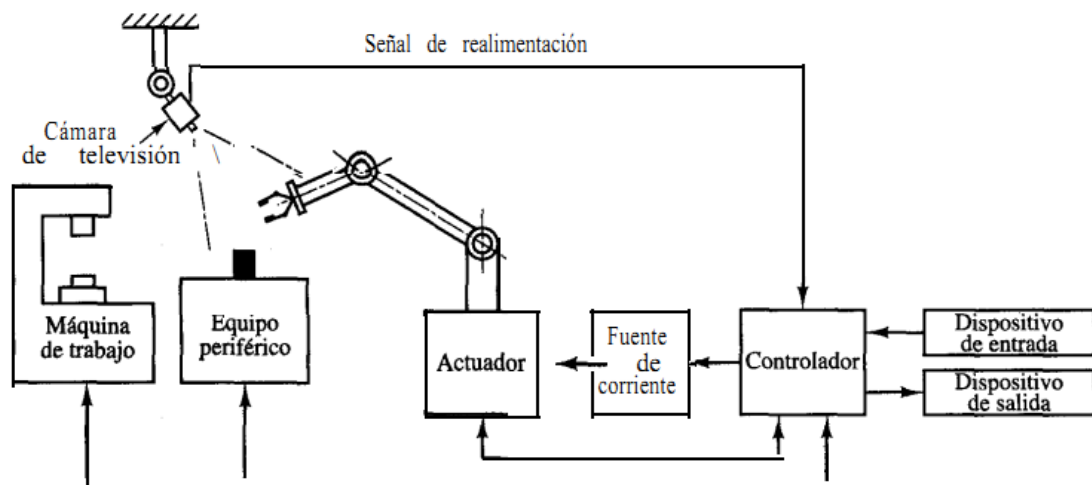
Es muy común encontrar robots en la industria, principalmente para mejorar la productividad de las empresas. Un robot puede realizar tareas tanto simples como tareas complejas, sin errores en la operación. Un robot también debe poder trabajar en ambientes que son intolerables para operadores, es decir los seres humanos.

Un robot debe manipular distintos objetos con formas y pesos determinados. Por tanto, debe tener al menos un brazo, una muñeca y un elemento terminal o mano. Debe tener la fuerza suficiente para realizar la tarea y la capacidad de al menos una movilidad limitada. Además de esto, el robot debe tener sensores. Los más sencillos tienen interruptores en los brazos como sensores, por lo tanto mediante los interruptores, el robot puede confirmar la existencia de objetos en el espacio.

En algunos robots más complejos se usa un medio óptico (visión artificial) para rastrear objetos. El robot reconoce el patrón y determina la presencia y orientación del objeto. Se requiere de una computadora para procesar las

señales del proceso de reconocimiento, como se muestra en la figura 3. Una vez completado este proceso el robot ya puede seguir con su programa y tomar el objeto para colocarlo en el lugar deseado.

Figura 3. **Sistema de control de un robot**



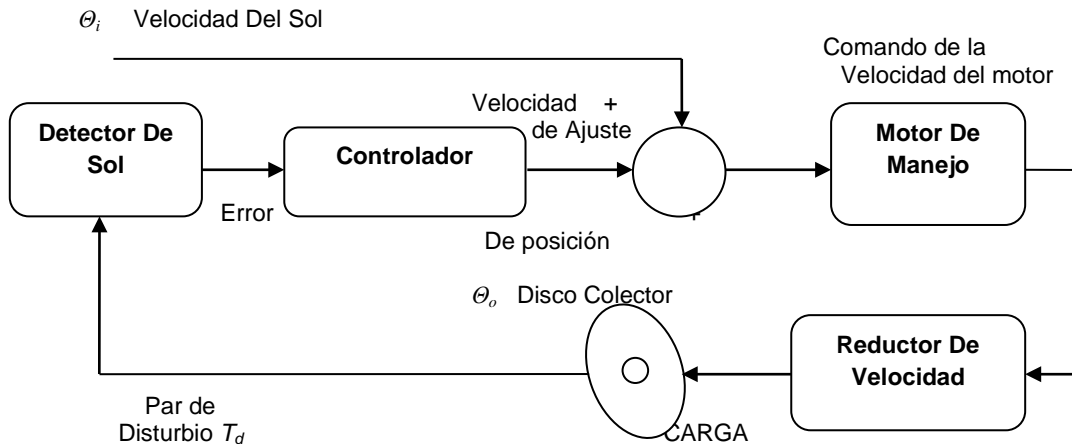
Fuente: OGATA, K. Ingeniería de control moderna. p.5.

### 1.1.2.3. **Sistema de control de seguimiento del sol**

Hoy en día, un medio para generar energía eléctrica económica se ha conseguido mediante el desarrollo de métodos de conversión de energía solar, que se fundamentan en el uso de las celdas solares. Para el uso de estos sistemas un factor determinante es la eficiencia, y con esto la necesidad de dispositivos para el seguimiento del sol.

Este trabajo se realiza por medio de los discos colectores solares. Por tanto, el movimiento del disco colector debe ser controlado por complejos sistemas de control. La figura 4, describe el proceso básico del sistema seguidor del sol junto con algunos componentes importantes.

Figura 4. Sistema de control de seguimiento del sol



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 8.

En este sistema el ángulo del disco colector se ajusta a una velocidad determinada mediante el error de posición actual, el cual es determinado por el detector del sol. El controlador asegura que el colector esté apuntando directamente al sol durante el día, este constantemente calcula la velocidad del sol para los dos ejes de control, azimut y elevación. El controlador emplea la velocidad del sol y la información del detector del sol como entradas, con esto genera las salidas que moverán al motor del disco colector.

### 1.1.3. Clasificación de los sistemas de control

Los sistemas de control se pueden clasificar de distintas formas, algunas de estas pueden ser dependiendo del tipo de control que realice un sistema, si posee o no retroalimentación, el tipo de señal que maneja, el tipo de variables que manipula, etc. Pero no importando esto, todos los sistemas de control básicamente se clasifican de la siguiente manera.

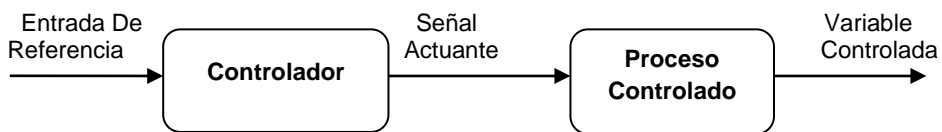
### 1.1.3.1. Sistemas de control en lazo abierto

Como se podrán imaginar existen toda clase de sistemas de control y como se ha visto previamente, así como existen sistemas tan complejos como el control del robot o seguimiento del sol, también hay sistemas menos complejos, estos sistemas se denominan sistemas de control en lazo abierto.

Lo más importante que se debe notar en estos sistemas es que no pueden satisfacer condiciones de trabajo críticas. Esto se puede ver en el caso de un sistema de control de velocidad de un motor, si en este se alimenta al motor con una determinada señal, al aplicar un par de carga, no existe forma de prevenir una caída en la velocidad del motor. La única forma de hacer que este sistema trabaje de forma correcta es tener algún medio para ajustar el nivel de señal que se aplica al motor, esto como respuesta a un cambio en la carga con el fin de mantener la velocidad en el nivel deseado.

Los elementos de un sistema de control en lazo abierto se pueden dividir en dos: el controlador y el proceso controlado, como se muestra en la figura 5. Una señal de entrada o comando se aplica al controlador, cuya salida actúa como señal actuante. Esta señal controla el proceso controlado de tal forma que la variable controlada se desempeñe de acuerdo a determinada forma.

Figura 5. **Elementos de un sistema de control de lazo abierto**



Fuente: elaboración propia.

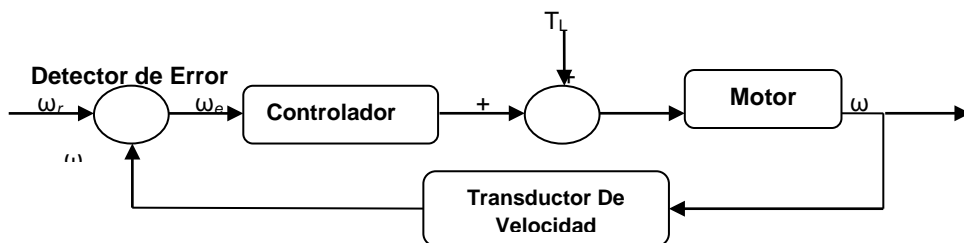
En los casos simples, el controlador puede ser un amplificador, unión mecánica, filtro, u otro elemento de control. En los casos más complejos, el controlador puede ser una computadora tal como un microprocesador. Debido a la simplicidad y bajo nivel económico de los sistemas de control en lazo abierto, se les encuentra en muchas aplicaciones.

### 1.1.3.2. Sistema de control en lazo cerrado

Para obtener un control más exacto, la señal controlada debe ser realimentada y comparada con la señal de entrada, es decir la señal de referencia, esto para enviar una señal actuante proporcional a la diferencia de la entrada y la salida, es decir una señal que corregirá el error entre ambas.

Un sistema con una o más trayectorias de retroalimentación como el que se acaba de describir se denomina sistema en lazo cerrado. Se puede ver a continuación un sistema de control en lazo cerrado de velocidad, este se muestra en la figura 6. La entrada de referencia proporciona la velocidad deseada, la velocidad del motor debe estar de acuerdo con el valor de la referencia y cualquier diferencia tal como la producida por el par de carga  $T_L$ , es detectada por el transductor de velocidad y el detector de error.

Figura 6. Diagrama de un sistema de control de lazo cerrado



Fuente: elaboración propia.

## 1.2. Retroalimentación y sus efectos

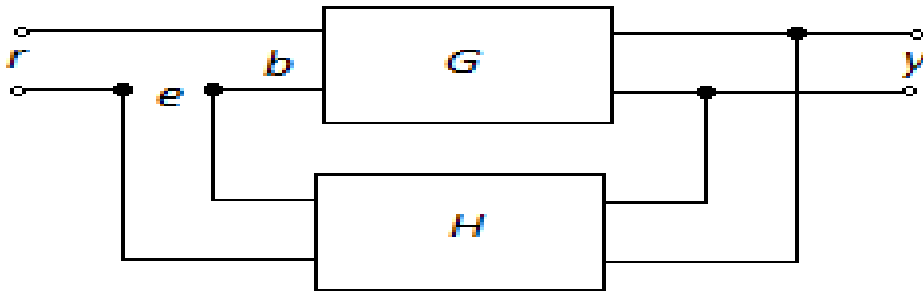
La principal razón de utilizar retroalimentación es para reducir el error entre la entrada y la salida del sistema. Sin embargo, el significado de los efectos de la retroalimentación en los sistemas de control, es muy complejo. La reducción del error es sólo uno de los efectos más importantes de la retroalimentación. La retroalimentación también tiene efectos en características como la estabilidad, ancho de banda, ganancia global, perturbaciones y sensibilidad de los sistemas.

Cuando se aplica retroalimentación a un sistema esta se puede identificar fácilmente, puesto que existirá una ruta exclusiva para la retroalimentación. Sin embargo, existen casos en los cuales se encuentran sistemas que a simple vista parecen no tener retroalimentación, pero que luego de analizarlos se puede ver donde se encuentra retroalimentado. Por lo tanto, se puede decir que cuando una secuencia cerrada de relaciones causa-efecto existe entre las variables de un sistema, existirá algún tipo de retroalimentación.

Se puede ver los efectos de la retroalimentación en el desempeño de los sistemas, como en el sistema de la figura 7, donde “ $r$ ” es la señal de entrada, “ $y$ ” la de salida, “ $e$ ” el error, y “ $b$ ” la señal de retroalimentación. Los parámetros  $G$  y  $H$  se pueden considerar como ganancias constantes. Mediante algebra se puede demostrar que la relación entrada-salida del sistema es:

$$M = \frac{y}{r} = \frac{G}{1+GH} \quad (1.1)$$

Figura 7. Sistema de control retroalimentado



Fuente: elaboración propia.

Empleando las ecuaciones básicas de la estructura de los sistemas retroalimentados, se pueden analizar algunos de los efectos significativos de la retroalimentación.

### 1.2.1. Efectos de la retroalimentación en la ganancia global

Como se puede observar en la ecuación (1.1), la retroalimentación afecta la ganancia  $G$  de un sistema no retroalimentado, esto en un factor de  $1 + GH$ . El sistema de la figura 7, se denomina como un sistema con retroalimentación negativa, ya que un signo menos se asigna a la señal realimentada. La cantidad  $GH$  puede incluir el signo menos, por tanto el efecto general de la retroalimentación es que puede incrementar o disminuir la ganancia  $G$ .

En un sistema de control común,  $G$  y  $H$  también son expresiones en función de la frecuencia, tema que se analizara en capítulos posteriores, por lo tanto la magnitud de  $1 + GH$  puede ser mayor que 1 en un intervalo de frecuencia, pero menor que 1 en otro y debido a esto la ganancia del sistema también se ve afectada dependiendo del intervalo de frecuencia en el cual opera el sistema.

### **1.2.2. Efectos de la retroalimentación en la estabilidad**

En lo que se refiere a control, la estabilidad es una característica o un parámetro que describe si un sistema es capaz de seguir a la señal de entrada, o en otras palabras, dice si el sistema es útil. Se puede decir que un sistema es inestable si sus salidas se salen de control. Para poder definir los efectos de la retroalimentación sobre la estabilidad, se debe apoyar en la expresión de la ecuación (1.1). Si  $GH = -1$ , la salida del sistema es infinita para cualquier entrada finita, y el sistema se dice inestable.

Por lo tanto, lógicamente se puede ver que la retroalimentación puede ocasionar que un sistema que es originalmente estable, se convierta en un sistema inestable. Esto deja muy marcado el hecho que la retroalimentación por tanto, puede ser beneficiosa como provocar problemas en los sistemas cuando no se usa adecuadamente. También se debe notar que para casos estáticos,  $GH \neq -1$  no es la única condición para la estabilidad.

### **1.2.3. Efecto de la retroalimentación en la sensibilidad**

En el diseño de los sistemas de control las consideraciones sobre sensibilidad son muy importantes. Lo más importante es saber que las propiedades de los elementos físicos van cambiando de acuerdo al ambiente y edad, por esta razón no se pueden considerar a los parámetros de un sistema de control como constantes durante la vida de operación del sistema.

Un ejemplo muy común de este fenómeno se ve en la resistencia del embobinado de un motor eléctrico, ésta cambia a medida que la temperatura del motor se eleva durante la operación. Y en general muchos otros equipos o sistemas que no funcionan normalmente cuando se encienden por primera vez,



debido a que los parámetros están cambiando durante la etapa de calentamiento. La mayoría de las máquinas de duplicación tiene un periodo de calentamiento durante el cual la operación es bloqueada cuando se encienden por primera vez.

En general, un buen sistema de control debe ser insensible a la variación de los parámetros pero sensible a las señales de entrada. La sensibilidad de la ganancia de un sistema total,  $M$ , con respecto a la variación de  $G$  se define como:

$$S_M^G = \frac{\partial G/G}{\partial M/M} = \frac{\text{Porcentaje de cambio en } M}{\text{Porcentaje de cambio en } G} \quad (1.2)$$

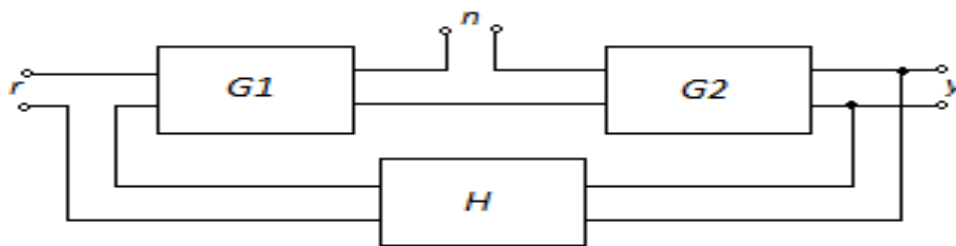
Por lo tanto si se aplica esto a la ecuación (1.1), la relación muestra que si  $GH$  es una constante positiva, la magnitud de la función de sensibilidad se puede hacer arbitrariamente pequeña cuando  $GH$  se incrementa, y esto dará como resultado que el sistema permanece estable.

#### **1.2.4. Efecto de la retroalimentación sobre ruido**

Todos los sistemas, no importando de qué tipo sean son susceptibles al ruido o perturbaciones durante su operación. Algunas de estas señales pueden ser el voltaje de ruido térmico en los circuitos electrónicos, el ruido de conmutación en los motores eléctricos, entre muchos otros. También están las perturbaciones de tipo externo, tal como lo puede ser el viento sobre las antenas, entre muchos otros tipos de perturbaciones comunes en los sistemas de control. Por lo tanto, al momento de diseñar un sistema todos estos factores deben entrar en consideración.

Los efectos del ruido y las perturbaciones en la retroalimentación dependen principalmente del punto o lugar en la cual estas señales entran al sistema. Es difícil poder determinar con total certeza estos efectos, pero en muchos casos la retroalimentación puede reducir los efectos del ruido y las perturbaciones sobre el desempeño del sistema. Se puede tomar como referencia el sistema de la figura 8, en este, “*r*” denota la señal de entrada o referencia y “*n*” la señal de ruido.

Figura 8. **Sistema retroalimentado con señal de ruido**



Fuente: elaboración propia.

Al analizar, en ausencia de retroalimentación,  $H=0$ , y sólo tomando la señal de ruido, se ve que  $y=G_2 n$ , por lo tanto la componente de ruido en la salida de la ecuación con retroalimentación estaría dada por la ecuación (1.3), y esto indicaría que la salida se reduce por el factor  $1 + G_1 G_2 H$ , para este sistema se dice que si el factor de reducción es mayor que la unidad el sistema permanece estable.

$$y = \frac{G_2}{1+G_1 G_2 H} n \quad (1.3)$$

En general, la retroalimentación también tendrá efectos sobre el ancho de banda, la impedancia, la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia, y los efectos en estos parámetros, dependerán del tipo de sistema que se analice.

### **1.3. Tipos de sistemas de control con retroalimentación**

Los sistemas de control retroalimentados se pueden clasificar de muchas formas, pero la clasificación dependerá principalmente del propósito del sistema. Los sistemas de control se clasifican en lineales y no lineales, variantes con el tiempo o invariantes con el tiempo. También se pueden clasificar de acuerdo con los tipos de señales que utilizan, es decir los sistemas en tiempo continuo y los sistemas en tiempo discreto, o sistemas modulados y no modulados.

Es común encontrar que los sistemas se clasifican de acuerdo a la aplicación que se les dará, es decir su propósito principal. Por ejemplo, un caso son los sistemas de control de nivel, los sistemas de control de temperatura y los sistemas de control de velocidad, entre otros, los cuales controlan las variables de salida de acuerdo con la forma como su nombre lo indica. En general existen muchas formas de identificar un sistema de control de acuerdo con alguna función especial del sistema, las principales clasificaciones se presentan a continuación.

#### **1.3.1. Sistemas de controles lineales y no lineales**

Para esta clasificación es importante aclarar que en la práctica los sistemas lineales no existen, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en cierta medida, y en algunos casos esto es más visible que en otros. En la realidad los sistemas de control retroalimentados son modelos ideales que se

plantean para simplificar el análisis y diseño. Un sistema de control se denominara lineal, cuando las magnitudes de las señales estén limitadas a intervalos en los cuales los componentes del sistema exhiban una característica lineal.

Por otra parte cuando las magnitudes de las señales se extiendan más allá del intervalo lineal, el sistema lógicamente pasa a considerarse un sistema no lineal, aunque también dependerá de la magnitud de la no linealidad. Un ejemplo muy común son los amplificadores usados en los sistemas de control, que a menudo exhiben un efecto de saturación cuando la señal de entrada es muy grande. También el campo magnético de un motor que normalmente tiene propiedades de saturación. Otros efectos no lineales que se encuentran en los sistemas de control son el juego entre los engranajes acoplados, la fuerza de fricción no lineal o par, entre dos partes móviles, etc.

Por otra parte, a veces estas características no lineales son introducidas de forma intencional a un sistema de control para mejorar su desempeño o para tener un control más preciso. Un ejemplo de esto se puede encontrar en sistemas dedicados a alcanzar un control de tiempo mínimo, como un controlador de tipo prendido-apagado.

Por lo tanto, en lo que se refiere al análisis y diseño de los sistemas, se vera que para sistemas lineales existe una gran cantidad de técnicas analíticas y gráficas, mientras que para los sistemas no lineales puesto que son más difíciles de tratar en forma matemática, no existen métodos generales para resolverlos o analizarlos.

En el diseño de los sistemas de control es bastante útil primero diseñar el controlador con base en un modelo de un sistema lineal, despreciando las

características no lineales. Esto con el fin de poder aplicar el modelo del controlador lineal, a un sistema no lineal, lo cual dará una mejor aproximación del comportamiento del sistema.

### **1.3.2. Sistemas variantes e invariantes con el tiempo**

En un sistema de control, cuando los parámetros de este son constantes con respecto al tiempo mientras se encuentra en operación, el sistema se denomina, sistema invariante con el tiempo. En la práctica, la mayoría de los sistemas físicos contienen elementos que varían con el tiempo. Esto se puede ver claramente en la resistencia de la bobina de un motor eléctrico, que variará cuando el motor es excitado por primera vez y su temperatura está aumentando.

También se puede asociar este tipo de sistemas en el caso de los controles para dispositivos aéreos, esto debido a que un factor importante en estos sistemas es la masa, pero esta varía conforme el combustible que los impulsa se va consumiendo. Un aspecto muy importante es, aunque un sistema variante en el tiempo se pueda considerar un sistema lineal, el análisis y diseño de esta clase de sistemas es mucho más complejo que el de un sistema lineal invariante con el tiempo.

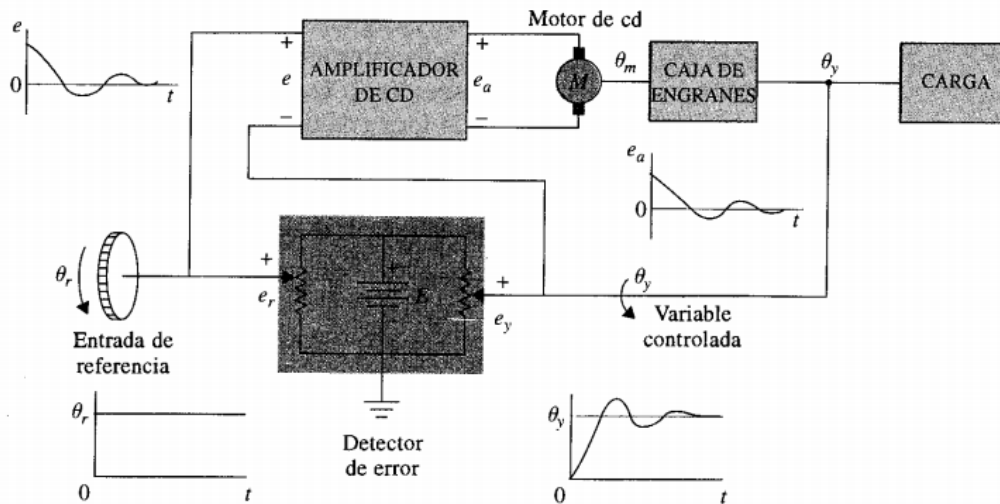
#### **1.3.2.1. Sistemas de control en tiempo continuo**

Un sistema en tiempo continuo es aquel en el que las señales en varias partes del sistema son todas funciones de la variable  $t$ , es decir tiempo continuo. En los sistemas de control en tiempo continuo, las señales se pueden clasificar como CA o CD, corriente alterna o corriente directa respectivamente. Pero es importante no confundir las definiciones más generales de las señales

de CA y CD utilizadas en ingeniería eléctrica, puesto que en los sistemas de control, las señales de CA y CD tienen un significado más específico.

Cuando se hace referencia a un sistema de control de CA, usualmente significa que las señales en el sistema están moduladas de acuerdo a algún esquema de modulación. También, cuando se hace referencia a un sistema de control de CD, no significa que las señales en el sistema sean unidireccionales. Un sistema de control de CD simplemente implica que las señales no son moduladas, pero aún son señales de CA. A continuación en la figura 9, se ve el esquema de un sistema de control de CD en lazo cerrado.

Figura 9. Diagrama de sistema de control de CD en lazo cerrado



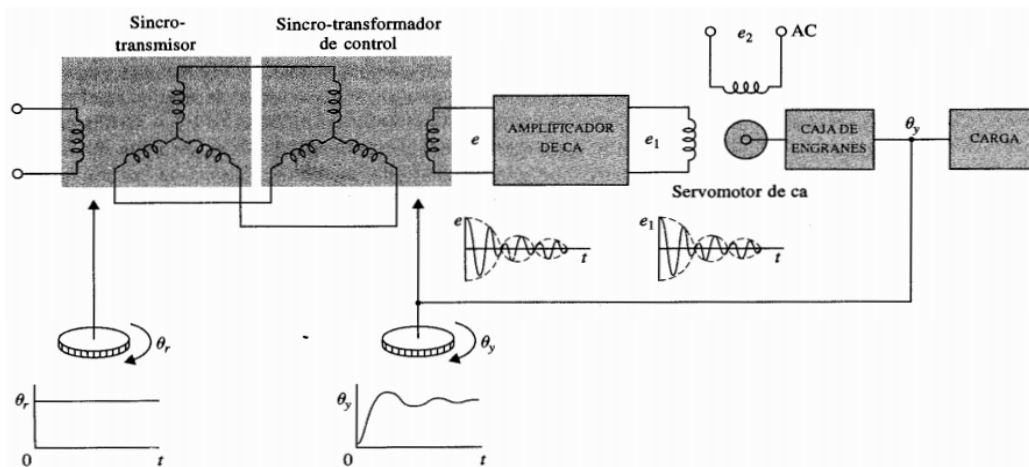
Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p.17.

Los componentes típicos de un sistema de control de CD son potenciómetros, amplificadores de CD, motores de CD, tacómetros de CD, etcétera. El esquema de un sistema de control de CA que desempeña

esencialmente la misma tarea que el de la figura 9, se presenta en la figura 10. En este caso, las señales en el sistema están moduladas, es decir la información se transmite mediante una señal portadora de CA. Como se puede ver, la variable controlada, es decir la salida, permanece aún similar a la del sistema de CD.

Para este caso específico las señales moduladas son demoduladas por la característica de paso bajo del motor de CA. Estos sistemas se utilizan en aplicaciones en las cuales el ruido y las perturbaciones crean problemas. Al utilizar sistemas de control de CA modulados con frecuencias relativamente altas, los sistemas se vuelven menos susceptibles a ruido de baja frecuencia.

Figura 10. **Diagrama de sistema de control de CA en lazo cerrado**



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 18.

Los componentes típicos de un sistema de control de CA son: sincros, amplificadores de CA, motores de CA, etcétera. En la práctica no todos los sistemas de control son estrictamente de CD o CA. Esto debido a que un sistema puede tener varios tipos de componentes de CA y CD.

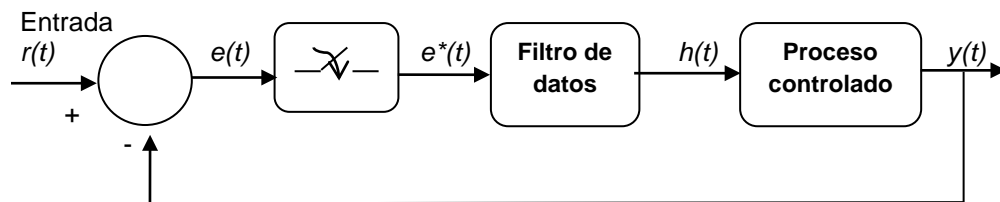
### 1.3.2.2. Sistemas de control en tiempo discreto

La diferencia entre los sistemas de control en tiempo discreto, respecto de los sistemas en tiempo continuo, se encuentra en que las señales en distintos puntos del sistema se encuentran en forma de pulsos o códigos digitales. Por lo general los sistemas en tiempo discreto se pueden clasificar en sistemas de control de datos muestreados y sistemas de control digital.

Los sistemas de control de datos muestreados se refieren a sistemas de tiempo discreto más generales, puesto que en estos las señales están en la forma de pulsos de datos. Por otra parte, un sistema de control digital se refiere al uso de las computadoras en los sistemas, de tal forma que las señales están en código digital, es decir un código binario.

Un ejemplo de estos sistemas se puede encontrar en las ruedas de impresión de dispositivos tales como las impresoras, de acuerdo al esquema de la figura 11, en este sistema de control digital el microprocesador recibe y envía datos digitales. Una característica de esos sistemas muestreados es que se reciben datos o información sólo en forma intermitente.

Figura 11. Diagrama de un sistema de control de datos muestreados



Fuente: elaboración propia.



La figura 11 ilustra cómo funciona un sistema de datos muestreados. Una señal continua de entrada  $r(t)$  es aplicada al sistema, la señal de error  $e(t)$  es muestreada por un dispositivo de muestreo, cuya salida es una secuencia de pulsos. Existen muchas ventajas al incorporar muestreo en un sistema de control. Una ventaja importante, es la capacidad de poder compartir los canales de comunicación y control, además de ser sistemas mucho menos susceptibles al ruido.

## 2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

### 2.1. Introducción a la teoría matemática

A la hora de analizar los sistemas de control, estos no tienen mucha diferencia respecto a cualquier otro tipo de sistema, y es por esta razón que para su diseño, análisis y comprensión, se depende en gran parte del uso y aplicación de las matemáticas. La principal razón del por qué estudiar los sistemas de control desde el punto de vista matemático, es para poder desarrollar métodos de diseño y análisis confiables, y así no depender en gran medida de la experimentación o de la simulación, puesto que esto puede traer consigo una serie de costos innecesarios.

El análisis de los sistemas de control requiere de manejar ciertos conceptos matemáticos, entre estos se pueden mencionar: la teoría de la variable compleja, las matrices, las ecuaciones diferenciales, el álgebra lineal, las transformaciones lineales, la transformada de Laplace, entre otros. Por lo cual cómo se podrá ver, tras del diseño y análisis de los sistemas de control esta una gran base matemática.

En el presente capítulo se dará un breve explicación sobre algunos de los principales conceptos matemáticos que se utilizan, a manera de tener estos conceptos lo más claro posible para que al momento de trabajar con las aplicaciones en capítulos posteriores no haya mayor problema y estas sean de fácil comprensión.

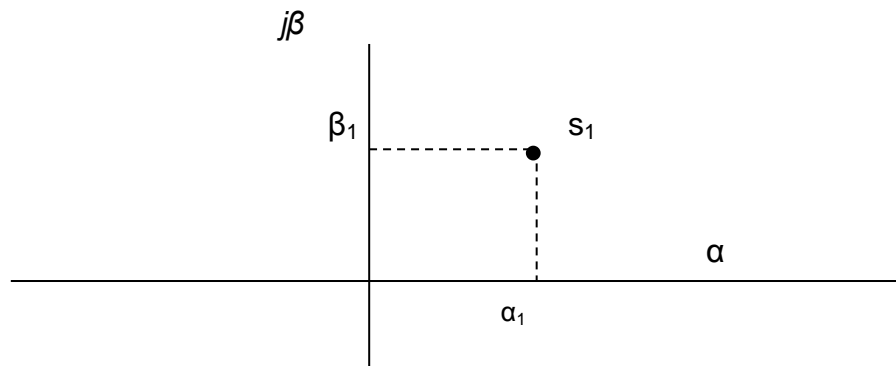
## 2.2. Concepto de variable compleja

El término de variable o número complejo, describe la suma de un número real y un número imaginario (el cual se indica con la letra  $j$ ), este análisis como se podrá ver, es necesario debido a su utilidad a la hora de describir estabilidad en sistemas, magnitudes eléctricas, entre otros.

### 2.2.1. Variable compleja

Una variable compleja se compone de dos partes, y se denomina una variable  $s$ , contiene una parte real, denominada  $\alpha$  y una parte imaginaria, denominada  $\beta$ . Para representar una variable compleja  $s$  de forma gráfica se utiliza el plano complejo, en el cual las componentes reales se representan en el eje horizontal, eje  $\alpha$ , y las componentes imaginarias se representan en el eje vertical, eje  $j\beta$ . En la figura 12 se puede ver una representación del plano complejo  $s$ , donde cualquier punto  $S_n$ , se define por sus coordenadas  $\alpha_n$  y  $\beta_n$ .

Figura 12. Plano complejo  $S$



Fuente: elaboración propia.

### 2.2.2. Funciones de una variable compleja

Se inicia recordando que una función  $f(x)$  de variable real, es una función que asigna a cada número real  $x$ , otro valor real  $f(x)$ . También se debe recordar que una función  $G(s)$  es una función de la variable compleja  $S$ , si para cada valor de  $s$  existen uno o más valores correspondientes de  $G(s)$ . Debido a que  $s$  se define con parte real e imaginaria, la función  $G(s)$  también está representada por sus partes real e imaginaria, es decir que se puede representar de acuerdo a la ecuación (2.1).

$$G(s) = Re G(s) + j Im G(s) \quad (2.1)$$

En esta ecuación  $Re G(s)$  denota la parte real de  $G(s)$  e  $Im G(s)$  representa la parte imaginaria de  $G(s)$ . La función  $G(s)$  también está representada mediante el plano complejo  $G(s)$ , con  $Re G(s)$  como el eje real e  $Im G(s)$  como el imaginario. Si para cada valor de  $s$ , existe sólo un valor correspondiente de  $G(s)$  en el plano  $G(s)$ , se dice que  $G(s)$  es una función univaluada. Sin embargo, existen muchas funciones cuyo mapeo en el plano de la variable compleja no es un solo valor.

### 2.2.3. Polos de una función

Por definición, en una función compleja, las singularidades son los puntos en el plano  $s$  en donde la función compleja o alguna de sus derivadas no existen. Un polo es el tipo más común de singularidad, y es importante conocerlos a la hora del diseño y análisis de los sistemas de control, debido a sus características únicas.

La definición más simple de un polo se puede enunciar de la siguiente forma: Para una función  $G(s)$  de orden  $r$ , existe un único polo en  $S = S_i$ , si el límite de la ecuación (2.2) es finito y es distinto de cero, de lo contrario no podrá ser tomado como un polo.

$$\lim_{s \rightarrow S_i} [(s - S_i)^r \cdot G(s)] \quad (2.2)$$

Una característica importante de los polos en una función compleja es: una función compleja  $G(s)$  es analítica, es decir que converge absoluta y uniformemente, en todo el plano  $s$ , excepto en los puntos donde se ubica un polo.

#### **2.2.4. Ceros de una función**

Los ceros de una función compleja se pueden definir de la siguiente forma: Si la función  $G(s)$  es analítica en  $S = S_i$ , se dice que existe un cero de orden  $r$  en  $S=S_i$ , si el límite en la ecuación (2.2) tiene un valor finito y es distinto de cero, o de forma más simple,  $G(s)$  tiene un cero de orden  $r$  en  $S=S_i$ , si  $1/G(s)$  tiene un polo de orden  $r$  en  $S=S_i$ . Una característica importante en una función compleja  $G(s)$ , es que el número total de polos es igual al número total de ceros, al contar los polos y ceros de orden múltiple, y al tomar en cuenta los polos y ceros en el infinito.

### **2.3. Ecuaciones diferenciales**

Las ecuaciones diferenciales tienden a ser de suma importancia para diseño de los sistemas de control, pues es directamente gracias a estas ecuaciones, que se pueden modelar los sistemas matemáticos capaces de predecir comportamiento.

### 2.3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial se puede definir, como una ecuación en la cual se relaciona una función desconocida y una o más de las derivadas de esta función desconocida, respecto de variables independientes. La principal utilidad de las ecuaciones diferenciales se debe a que una gran variedad de sistemas en ingeniería se modelan matemáticamente mediante estas ecuaciones. Por ejemplo, un circuito eléctrico *RLC* en serie (resistencia-inductancia-capacitancia) se puede representar por la ecuación diferencial que se ve en la ecuación (2.3).

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = e(t) \quad (2.3)$$

En esta ecuación, *R* es la resistencia, *L* la inductancia, *C* la capacitancia, *i(t)* la corriente en la red y variable dependiente, *t* la variable independiente y *e(t)* el voltaje aplicado. En este caso *i(t)* es la variable que será determinada.

La ecuación (2.3) se denomina como una ecuación diferencial de segundo orden, esto debido a que al manipular matemáticamente la ecuación se puede escribir únicamente con derivadas, y su mayor derivada sería de orden dos.

#### 2.3.1.1. Ecuaciones de estado

En general, una ecuación diferencial de *n*-ésimo orden se puede descomponer en *n* ecuaciones diferenciales de primer orden. Ya que las ecuaciones diferenciales de primer orden son más fáciles de resolver que otras de orden más alto. Esto se puede ver aplicado en la ecuación (2.3) de la siguiente forma:

$$x_1(t) = \int i(t)dt \quad (2.4)$$

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = i(t) \quad (2.5)$$

Ahora se descompone la ecuación (2.3) en las siguientes dos ecuaciones diferenciales de primer orden, partiendo de las ecuaciones (2.4) y (2.5).

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t) \quad (2.7)$$

Por lo tanto, al conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de una ecuación, tal y como se muestra en las ecuaciones (2.6) y (2.7), se conocen como ecuaciones de estado, y  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , son llamadas variables de estado.

### 2.3.1.2. Variables de estado

Cuando se habla sobre sistemas de control, el estado se refiere a las condiciones del sistema, ya sean estas pasadas, presentes o futuras. En el caso de los sistemas dinámicos, requieren definir un conjunto de variables de estado y ecuaciones de estado para modelar los sistemas.

Como ya se mencionó, el conjunto de variables  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ , son las variables de estado de un sistema, mientras que el conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, son las ecuaciones de estado. Las variables de estado deben satisfacer las siguientes condiciones:

- En cualquier tiempo inicial  $t = t_0$ , las variables de estado  $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)$ , definen los estados iniciales del sistema.
- Una vez que las entradas del sistema para  $t \geq t_0$ , y los estados iniciales son definidos, las variables de estado deben definir el comportamiento futuro del sistema.

En una forma más general, las variables de estado se definen como un conjunto de variables, con las cuales conociendo su valor en un tiempo  $t_0$  y conociendo información sobre la excitación que se aplica, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo  $t > t_0$ .

### 2.3.1.3. Ecuaciones de salida

Una variable de salida se puede definir como una variable que es posible medirla, lo cual no es siempre posible con las variables de estado, por lo tanto no se deben confundir estas variables. Un ejemplo de esto se puede ver en un motor eléctrico, en este las variables de estado pueden ser el flujo de corriente, la velocidad del rotor y el desplazamiento, las cuales son variables que se pueden medir físicamente, y al mismo tiempo estas variables se pueden tomar como variables de salida.

En el caso de una variable únicamente de estado, se puede tomar como ejemplo el flujo magnético, ya que representa el estado pasado, presente y futuro del motor, pero esto no puede ser medido directamente durante el funcionamiento, y por tanto, no califica como una variable de salida. En general, una variable de salida se puede expresar como una combinación algebraica de las variables de estado.



## 2.4. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un método matemático utilizado para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante el uso de la transformada de Laplace, es posible convertir funciones como las funciones senoidales y las funciones exponenciales, en funciones algebraicas de una variable  $S$  compleja.

Por lo tanto, en una ecuación algebraica, una ecuación diferencial lineal se transforma en una variable compleja  $S$ . Si se resuelve la ecuación algebraica en  $S$  para la variable dependiente, la solución de la ecuación diferencial se puede encontrar mediante una tabla de transformadas de Laplace o mediante otros métodos matemáticos, tales como la expansión en fracciones parciales. Una ventaja del método de la transformada de Laplace es que al resolver la ecuación diferencial, es posible obtener simultáneamente tanto el componente transitorio como el componente de estado estable de la solución.

### 2.4.1. Definición de la transformada de Laplace

Sea  $f(t)$  una función del tiempo  $t$ , para la cual  $f(t) = 0$ ; para  $t < 0$  y  $S$  una variable compleja, denominada operador de Laplace, entonces se puede definir a la transformada de Laplace de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) también se conoce como transformada de Laplace unilateral, ya que la integral se evalúa desde  $t=0$ , hasta  $\infty$ . Lo cual significa que toda la información de  $f(t)$  antes de 0, se considera cero. Es importante el notar que esto no limita de ninguna forma las aplicaciones con la transformada de Laplace, pues para estos la referencia siempre se toma en el tiempo cero.

### 2.4.2. Transformada inversa de Laplace

Dada la transformada de Laplace  $F(s)$ , la operación para obtener  $f(t)$  se denomina como la transformada inversa de Laplace, ecuación (2.9), la forma para determinar la transformada inversa de Laplace se da de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{e-j\infty}^{e+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) representa una integral que se evalúa en el plano  $s$ . Para funciones simples, la operación de la transformada inversa de Laplace se puede llevar a cabo simplemente refiriéndose a la tabla de transformadas de Laplace, tal como la que se presenta a continuación.

Tabla I. **Tabla de transformadas de Laplace**

Transformada de Laplace $F(s)$	Función tiempo $f(t)$
1	Función impulso unitario $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Función escalón unitario $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Función rampa unitaria $t$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$ ( $n =$ entero positivo)
$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$

Continuación de la tabla I.

$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t} \quad (n = \text{entero positivo})$
$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}) \quad (\alpha \neq \beta)$
$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[ t - \frac{1}{\alpha} + \left( t + \frac{2}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} \right]$

Fuente: KUO. B. Sistemas de control automático. Apéndice B.

Para funciones complejas, la transformada inversa de Laplace se puede obtener primero realizando una expansión en fracciones parciales de  $F(s)$  y después se utiliza la tabla de transformadas.

### 2.4.3. Teoremas de la transformada de Laplace

Existen muchos casos en los cuales trabajar con la transformada de Laplace se hace mucho más simple si se utilizan las propiedades de la transformada. Estas propiedades se pueden aplicar por medio de los teoremas de la transformada de Laplace, a continuación se explican algunos de los más importantes.

Multiplicación por una constante: sea  $k$  una constante y  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$ . Entonces:

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \quad (2.10)$$

Suma y resta: sean  $F_1(s)$  Y  $F_2(s)$  las transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente. Entonces:

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (2.11)$$

Diferenciación: sea  $F(s)$  la transformada de Laplace de  $f(t)$ , y  $f(0)$  es el límite de  $f(t)$ , cuando tiende a 0. La transformada de Laplace de la derivada con respecto al tiempo de  $f(t)$ , está dada por:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (2.12)$$

Integración: la transformada de Laplace, de la primer integral de  $f(t)$  respecto a  $t$ , es la transformada de Laplace de  $f(t)$  dividida entre  $s$ , es decir:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.13)$$

Traslación en el tiempo: la transformada de Laplace de  $f(t)$  retrasada un tiempo  $T$ , es la transformada de Laplace de  $f(t)$  multiplicada por  $e^{-Ts}$ , es decir:

$$\mathcal{L}[f(t - T)u(t - T)] = e^{-Ts}F(s) \quad (2.14)$$

En este caso  $u(t - T)$ , es la función escalón unitario desplazada un tiempo  $T$ , a la derecha.

Convolución real: sean  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  las transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente, y que  $f_1(t) = 0$ ,  $f_2(t) = 0$ , para  $t < 0$ ; entonces:

$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right] \quad (2.15)$$

Para este teorema, el símbolo \*, denota la convolución en el dominio del tiempo, lo que significa que la multiplicación de dos funciones transformadas en el dominio  $s$ , es equivalente a la convolución de dos funciones reales correspondientes en el dominio  $t$ .

## 2.5. Teoría de matrices

Cuando se refiere a los sistemas de control, comúnmente es mucho más eficiente usar notación matricial para las expresiones matemáticas. Esto se debe principalmente al hecho que los sistemas y sus características se pueden modelar de mejor forma de forma matricial. La forma más sencilla de representar la utilidad de la notación matricial, se encuentra en los sistemas de  $n$  ecuaciones, en los cuales se forman sistemas, tal y como el que se ve a continuación en (2.16).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para este sistema se puede utilizar la notación matricial por medio de la ecuación (2.17).

$$Ax = y \quad (2.17)$$

En esta ecuación, tanto  $A$ ,  $x$ , y  $y$ , están definidos como matrices, las cuales contienen los coeficientes y variables de las ecuaciones originales como sus elementos. Esto de la siguiente forma.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Por lo tanto como se puede observar, las matrices son simplemente arreglos entre corchetes de los coeficientes y variables, en donde se tienen las filas o columnas necesarias, para modelar los procesos y establecer las posibles variables que entran en juego en los sistemas de control.

### 2.5.1. Definición de una matriz

Una matriz es un conjunto de elementos arreglados en forma rectangular o cuadrada. Una matriz se encierra entre corchetes, tal y como se ve en las ecuaciones (2.18) a (2.20). Es importante no confundir una matriz y un determinante, el cual se encierra entre barras rectas. Las definiciones más importantes sobre las matrices se dan a continuación.

**Elementos de matrices.** Se define como una posición  $a_{ij}$ , al elemento en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna de la matriz. Siempre se indica primero la fila y luego la columna.

**Orden de una matriz.** El orden de una matriz se refiere al número total de filas y columnas de la matriz. Una matriz con  $n$  filas y  $m$  columnas se denomina como de  $n \times m$ .

Determinante. El determinante de una matriz, es un escalar o polinomio, que resulta de obtener todos los productos posibles de una matriz. El valor numérico es conocido también como módulo de la matriz.

Transpuesta. La transpuesta de una matriz se define como la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas.

## **2.5.2. Álgebra de matrices**

Al igual que cualquier otra notación matemática, en la notación por medio de matrices, también es posible realizar operaciones entre estas, para esto es necesario definir el álgebra de matrices en la forma de suma, resta, multiplicación, división y otras posibles operaciones entre matrices.

### **2.5.2.1. Igualdad de matrices**

Se dice que dos matrices  $A$  y  $B$  son iguales si satisfacen las siguientes condiciones:

- Son del mismo orden.
- Los elementos correspondientes son iguales.

### **2.5.2.2. Suma y resta de matrices**

Dos matrices  $A$  y  $B$  se pueden sumar o restar en la forma  $A \pm B$  si son del mismo orden. El orden de las matrices se conserva después de la suma o resta.

### 2.5.2.3. Ley asociativa y conmutativa

La ley asociativa y conmutativa escalar se mantiene para la suma y resta de matrices, es decir el orden de los factores, no afecta el resultado.

### 2.5.2.4. Multiplicación de matrices

Las matrices  $A$  y  $B$  se pueden multiplicar si son conformables, es decir que el número de columnas en  $A$  debe ser igual número de filas en  $B$ . Por lo tanto la matriz resultado tendrá el mismo número de renglones que  $A$  y el mismo número de columnas que  $B$ . Es importante notar que  $A$  y  $B$  pueden ser conformables para formar  $AB$ , pero pueden no serlo para formar  $BA$ .

El producto de dos matrices, si se tiene las matrices  $A(n \times p)$  y  $B(p \times m)$ , conformables, para la matriz  $C=AB$ , el  $ij$ -ésimo elemento,  $C_{ij}$ , está dado por:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (2.21)$$

La multiplicación de una matriz  $A$  por cualquier escalar  $k$  es equivalente a la multiplicación de cada elemento de  $A$  por  $k$ .

### 2.5.2.5. Inversa de una matriz

En el álgebra de matrices, si  $A*x=y$ , donde  $y$ ,  $x$  y  $A$  son matrices, se define a la matriz  $x$  como:  $x=A^{-1}*y$ , en donde  $A^{-1}$  denota la matriz inversa de  $A$ . Las condiciones para la existencia de  $A^{-1}$  son las siguientes.

- $A$  es una matriz cuadrada.
- $A$  debe ser no singular.



- Si  $A^{-1}$  existe, está dada por:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} \quad (2.22)$$

Es decir que la matriz inversa es igual al cociente entre la matriz adjunta y el determinante o módulo de la matriz.

### 2.5.3. Ecuaciones de estado en forma matricial

Como se vio en la sección 2.3.1., las ecuaciones de estado son de suma utilidad para el análisis de los sistemas de control, y estas se pueden expresar en forma matricial. Si se considera un sistema lineal de segundo orden, descrito con ecuaciones de estado, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{21}u(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En este sistema  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son las variables de estado,  $u(t)$  es la entrada y  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_{11}$ , y  $b_{21}$ , son coeficientes constantes. Por lo tanto, así se define al vector de estado, ecuación (2.24) y las ecuaciones de estado en forma matricial, ecuación (2.25).

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.25)$$

### **3. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS**

#### **3.1. Introducción al análisis**

Cuando se está analizando o diseñando sistemas de control, un primer paso muy importante es el modelado matemático, pues este ayuda de cierta forma a predecir el comportamiento del sistema. Para poder realizar este modelo es importante, en primera instancia, definir cuáles son las variables que describen las características de dicho proceso. Un ejemplo simple de esto lo se puede ver en un sistema de control de un motor, en este sistema las variables se pueden identificar como el voltaje aplicado, la corriente en el embobinado de armadura, el par en el eje del rotor, entre otros.

Debido a que todas estas variables están relacionadas entre ellas a través de leyes físicas, esto origina sistemas de ecuaciones matemáticas, en este caso que describen la dinámica del motor. En general para estos sistemas, la linealidad o no linealidad de las ecuaciones dependerá de las condiciones de operación del sistema. Es importante notar que en la vida real los principios de operación son bastante complejos, por lo que en su mayoría los sistemas se modelan con ecuaciones no lineales.

A pesar de la no linealidad de los sistemas en la vida real, estos se pueden aproximar a sistemas lineales, esto basado en dos justificaciones. Una, que el sistema es básicamente lineal, o que es operado en la región lineal, y la segunda, que el sistema es básicamente no lineal, pero al aplicar herramientas de análisis y diseño lineal, el sistema se linealiza.

## **3.2. Sistemas lineales**

La forma más común de modelar los sistemas de control lineales, es utilizar funciones de transferencia para representar las relaciones del tipo entrada-salida, entre variables. De forma simple se puede determinar la función de transferencia de un sistema empleando la respuesta al impulso, pues esta da como resultado la respuesta natural del sistema.

### **3.2.1. Respuesta al impulso**

En sistemas de control, la respuesta al impulso de un sistema es la que se presenta en la salida al aplicar una señal muy breve o impulso, en la entrada. Es importante tomar en cuenta que el concepto de impulso, aunque es imposible en cualquier sistema real, es un concepto útil para el análisis y diseño de los sistemas. Esto debido a que al conocer la respuesta al impulso de un sistema se puede conocer la respuesta del mismo sistema para cualquier entrada. Por lo tanto la respuesta al impulso se caracteriza por ser la función de transferencia del sistema.

### **3.2.2. Función de transferencia**

En la teoría de los sistemas de control, comúnmente se usan las funciones de transferencia para definir las relaciones de entrada-salida de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales. La función de transferencia se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y de la entrada, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, esto para sistemas de una entrada y una salida.

La definición de la función de transferencia se puede ampliar para sistemas con entradas y salidas múltiples, es decir un sistema multivariable. Esto ya que el principio de superposición es válido para estos sistemas, por lo que el efecto total sobre cualquier salida debido a las entradas que actúan simultáneamente se obtiene al sumar las salidas producidas por cada entrada.

### 3.3. Diagramas de bloques

Por lo general los sistemas de control están formados de diversos componentes. Para el análisis de los sistemas de control se utiliza, por lo general, la representación de los sistemas por medio de los diagramas de bloques. Los diagramas de bloques se pueden definir como una representación gráfica de las funciones de cada componente y el flujo de señales del sistema.

Este diagrama muestra las relaciones que hay entre los componentes, y esta es su principal ventaja frente a los modelos matemáticos, compuestos únicamente de ecuaciones matemáticas, puesto que este muestra de mejor forma el flujo de las señales del sistema real. En un diagrama de bloques se unen todas las variables del sistema mediante bloques funcionales. Cada bloque es un símbolo que se utiliza para representar la operación matemática que se aplica a la señal de entrada para producir la salida.

Figura 13. **Elemento de un diagrama de bloques**

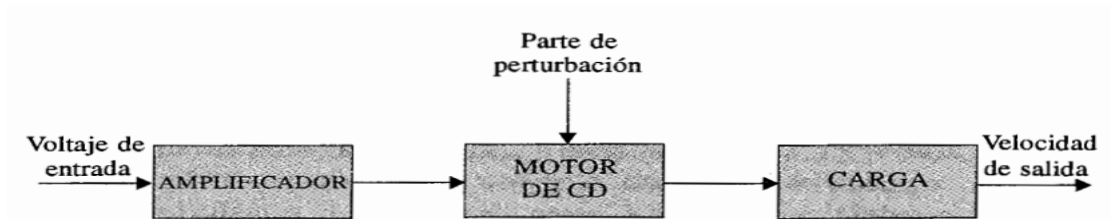


Fuente: elaboración propia.

Comúnmente se halla la función de transferencia de cada componente dentro del bloque correspondiente, y estos se conectan posteriormente por medio de flechas de flujo de señal. Debido a esto, el diagrama de bloques en los sistemas de control se puede utilizar ya sea para describir la conexión entre componentes o describir relación entrada-salida de un sistema.

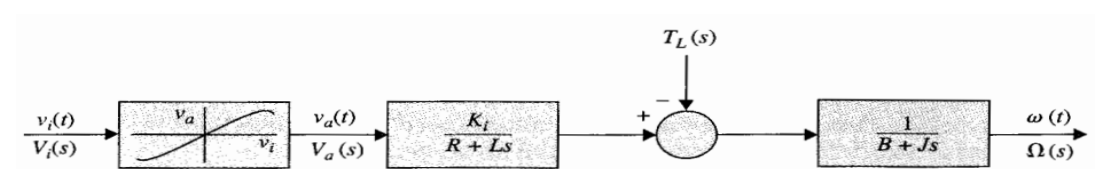
Un ejemplo de la utilidad de los diagramas se puede ver en la figura 14 y la figura 15, en las cuales se tienen los diagramas de bloques de un sistema de control de velocidad en lazo abierto, para un motor de cd. En la figura 14, el diagrama de bloques simplemente muestra cómo se conectan los componentes del sistema. En la figura 15, se hace el esquema en base a las operaciones que realiza el sistema, por el momento no se entra en detalle del significado de cada componente, pues esto se explica en temas posteriores.

Figura 14. **Diagrama de bloques para referencia**



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 93.

Figura 15. **Diagrama de bloques con funciones de transferencia**



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 93.

### 3.3.1. Diagrama de bloques de un sistema de control

Una vez determinado que es un diagrama de bloques, ahora se debe enfocar la atención en los diagramas para sistemas de control, en estos, uno de los componentes más importantes es el dispositivo detector que actúa como un punto de comparación de señales. Los componentes físicos para esta tarea son el potenciómetro, sincro, resolver, amplificador diferencial, entre otros. En general, los dispositivos detectores realizan operaciones matemáticas simples como suma, resta, multiplicación, y algunas veces combinaciones de éstas.

Las representaciones en diagramas de bloques de las operaciones antes mencionadas se muestran en la figura 16. Las operaciones de suma y resta son lineales, por lo que las variables de entrada y salida de estos elementos del diagrama de bloques pueden ser variables en el dominio del tiempo o variables en términos de la transformada de Laplace. Esto se puede ver a continuación.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.1)$$

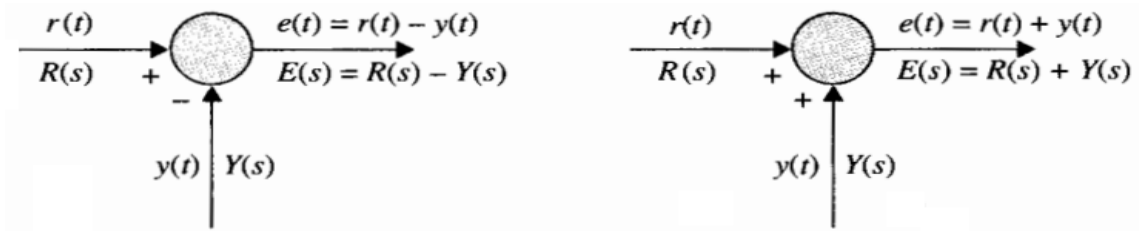
$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3.2)$$

Por otra parte la operación de la multiplicación es no lineal, por lo que la relación entrada-salida tiene significado solamente en el dominio real (tiempo). Es decir que la multiplicación en el dominio real no se traduce directamente al dominio de Laplace, en este caso se denomina convolución compleja.

$$e(t) = r(t) \times y(t) \quad (3.3)$$

$$E(s) = R(s) * Y(s) \quad (3.4)$$

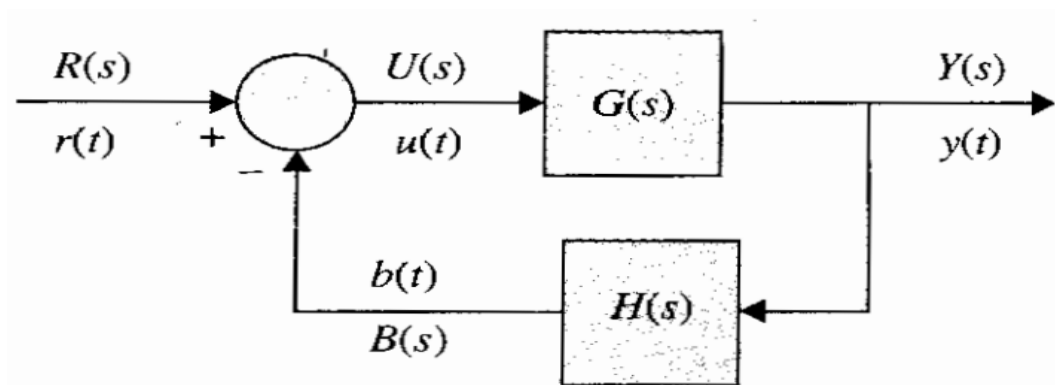
Figura 16. Diagrama de bloques de puntos de resta y suma



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 85.

La figura 17 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control retroalimentado linealmente, la función de transferencia en lazo cerrado  $Y(s)/R(s)$ , se puede expresar como una función de  $G(s)$  y  $H(s)$ .

Figura 17. Diagrama de un sistema de control con retroalimentación



Fuente: KUO, B. Sistemas de control automático. p. 86.

En este caso, figura 17, se describe la señal actuante  $U(s)$ , en términos de la señal del detector, y esto permite encontrar la relación entre  $R(s)$ , la entrada y  $Y(s)$ , la salida, la cual finalmente después de manejo algebraico queda de acuerdo a la ecuación (3.4).

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (3.4)$$

En general un sistema de control puede contener más de un lazo de retroalimentación, y la deducción de la función de transferencia a partir del diagrama de bloques, puede llegar a ser bastante compleja. Sin embargo, en principio el diagrama de bloques de un sistema con una entrada y una salida, se puede reducir a la forma básica del lazo sencillo de la figura 17.

### 3.3.2. Diagramas de bloques de sistemas multivariables

En el caso de los sistemas multivariables, estos se representan de forma matricial, tanto para los diagramas de bloques como las funciones de transferencia. La representación gráfica de estos puede ser de dos formas, una si las señales de entrada y salida se designan en forma individual, y otra, si en el diagrama la multiplicidad de las entradas y salidas se denotan por vectores.

En este caso de manera similar a los sistemas de una entrada y una salida, no importando cuantos lazos de retroalimentación contenga, este se puede reducir a un sistema con un único lazo. También es importante recordar que el principio de superposición se puede aplicar de forma libre.

Figura 18. Diagrama de un sistema de control multivariable



Fuente: Ilustraciones propias.



### 3.4. Gráficas de flujo de señal

Una gráfica de flujo de señal (GFS), se puede ver como una versión simplificada de un diagrama de bloques. El fin principal de la GFS, es para la representación de causa y efecto de sistemas lineales que son modelados por ecuaciones algebraicas. La gráfica de flujo de señal se puede tomar como un procedimiento restringido por reglas matemáticas, mientras que el uso del diagrama de bloques es más simple.

Una GFS se puede definir como un medio gráfico de esquematizar las relaciones entrada-salida, entre las variables de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. En el caso de que el sistema esté representado por un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales, primero se deben transformar en ecuaciones de la transformada de Laplace y después se deben reordenar.

#### 3.4.1. Elementos básicos de una gráfica de flujo de señal

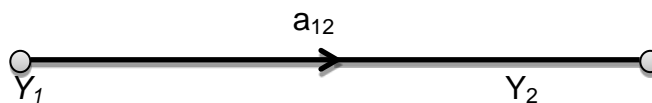
Cuando se construye una GFS, los puntos de unión o nodos, se utilizan para representar variables. Los nodos están conectados por segmentos lineales llamados ramas, de acuerdo con las ecuaciones de causa y efecto. Las ramas tienen ganancias y direcciones determinadas.

Una señal se puede transmitir a través de una rama solamente en la dirección de la flecha. En general, la construcción de una GFS consiste en seguir las relaciones de causa y efecto, relacionando cada variable en términos de sí misma y de las otras.

$$y_2 = a_{12}y_1 \quad (3.5)$$

De acuerdo con la ecuación 3.5, si se considera que esta representa un sistema lineal, en donde  $y_1$  es la entrada,  $y_2$  la salida, y  $a_{12}$  es la ganancia entre las dos variables, la representación por medio de una GFS de la ecuación (3-5), se muestra en la figura 19.

Figura 19. **Elemento básico de una gráfica de flujo de señal**



Fuente: elaboración propia.

La rama entre el nodo de entrada y el de salida se debe interpretar como un amplificador unilateral con ganancia  $a_{12}$ , por lo que cuando una señal de magnitud uno se aplica en la entrada  $y_1$ , una señal de magnitud  $a_{12}y_1$  se entrega en el nodo  $y_2$ .

### 3.4.2. **Propiedades básicas de una gráfica de flujo de señal**

Las propiedades básicas que se deben tener presente al trabajar con las gráficas de flujo de señal se pueden resumir de la siguiente forma:

- La GFS se aplica únicamente a sistemas lineales.
- Las ecuaciones para dibujar la GFS deben ser algebraicas.
- Los nodos se utilizan para expresar variables, de izquierda a derecha, entrada-salida.
- La señal viaja a través de las ramas solamente en la dirección descrita por las flechas.
- La señal a través de una rama se multiplica por la ganancia de la rama.

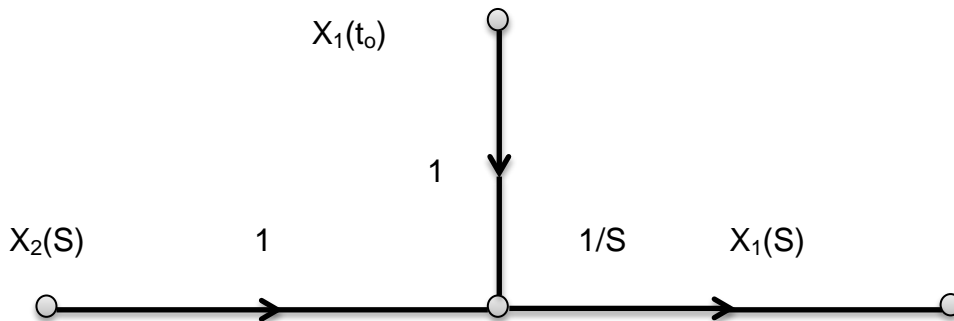
### 3.5. Diagrama de estado

Una herramienta más, de gran importancia en el análisis de los sistemas de control, es el diagrama de estado, el cual es una extensión de la GFS para describir las ecuaciones de estado y las ecuaciones diferenciales. El significado del diagrama de estado, es dar una relación entre las ecuaciones de estado, la simulación en ciertos casos y las funciones de transferencia. Un diagrama de estado se construye siguiendo todas las reglas de la GFS utilizando la transformada de Laplace de las ecuaciones de estado.

Los elementos básicos de un diagrama de estado son similares a los de la GFS común, a excepción de la operación de integración. Ya que el álgebra de las GFS no maneja integración en el dominio del tiempo, se debe tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación. Por lo tanto su transformación y su representación, quedan dadas de la siguiente forma:

$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s} \quad (3.6)$$

Figura 20. Representación gráfica de la integración



Fuente: elaboración propia.

La figura 20 muestra que la salida del integrador es igual a  $s^{-1}$  veces la entrada, más la condición inicial  $X_1(t_0)/s$ . Antes de construir diagramas de estado, se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Un diagrama de estado no se puede construir directamente a partir de la ecuación diferencial del sistema.
- Un diagrama de estado se puede construir a partir de la función de transferencia del sistema.
- El diagrama de estado es útil para simulación por computadora.
- Las ecuaciones de estado y las ecuaciones de salida se pueden determinar del diagrama de estado.

Por lo tanto como se vera posteriormente, al momento de analizar y diseñar sistemas de control, estas son herramientas de gran importancia. La principal diferencia entre este diagrama y la GFS, será directamente el uso de la transformada de Laplace para representar las operaciones.

Cada una de estas herramientas que se ha visto se relacionan entre sí de una u otra forma, a veces directamente y otras veces de forma indirecta, y es por esto que se puede hacer transformaciones directamente entre diagramas de estado, funciones de transferencia, ecuaciones de estado, diagramas de bloques etc., únicamente conociendo el camino o forma correcta de representarlos.



## **4. DISEÑO DE APLICACIONES DE TEORÍA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL**

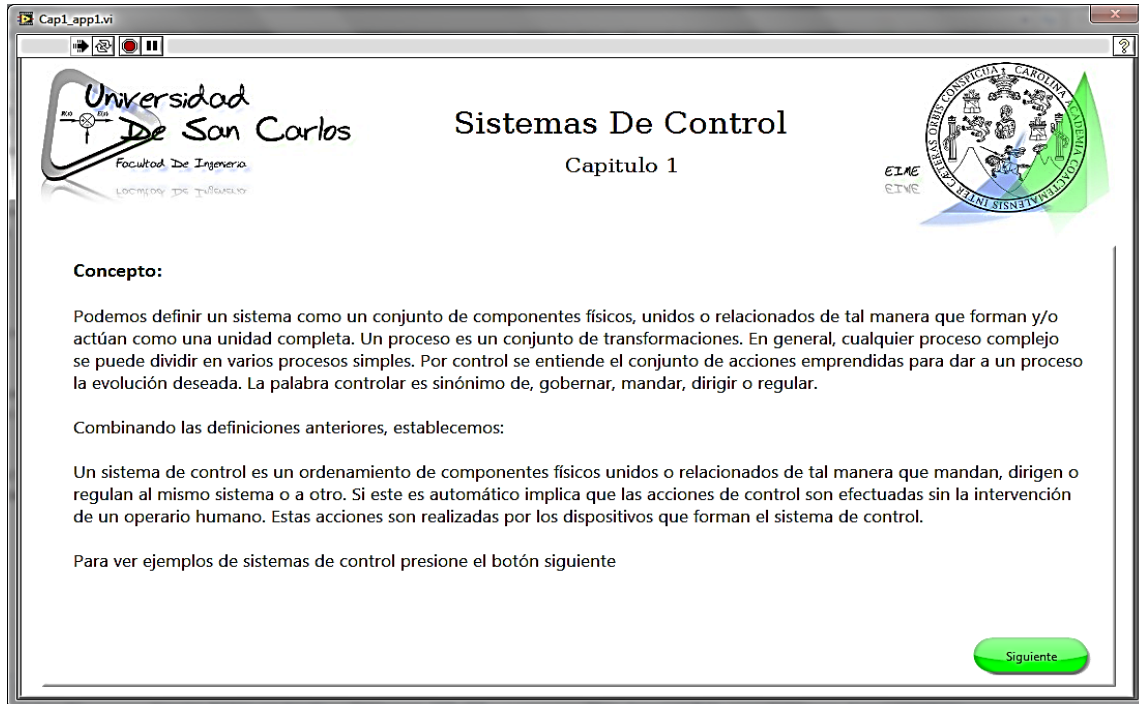
Como se ha visto hasta ahora, toda la teoría de los sistemas de control puede tender a ser confusa si no se comprende por completo cada uno de los conceptos previamente abordados, es por esto que como herramienta de comprensión se plantea el uso de las siguientes aplicaciones virtuales, que muestran la teoría de forma más gráfica, a modo de que los conceptos que suelen ser muy abstractos se puedan comprender de mejor forma.

### **4.1. Aplicación 1 - Definiciones de sistemas de control**

En esta aplicación se da una definición más breve de los sistemas de control, iniciando con un sistema como un conjunto de componentes físicos, relacionados de tal manera que forman y/o actúan como una unidad completa y a un proceso como un conjunto de transformaciones. Por lo tanto, un sistema de control es un ordenamiento de componentes físicos unidos o relacionados de tal manera que dirigen o regulan al mismo sistema o a otro.

A continuación en la figura 21 se puede ver la primera sección del panel frontal de la aplicación 1, esta aplicación se centra en dar la definición de los sistemas de control de forma simple y mostrar algunos ejemplos de sistemas de control, los cuales se encuentran muy comúnmente en la industria, como lo son: sistema de velocidad, de proximidad, de presión y de posición.

Figura 21. Panel frontal de aplicación 1



Fuente: elaboración propia.

Posteriormente en la sección dos y la sección tres de la aplicación se encuentran los ejemplos previamente mencionados, los cuales, para poder acceder a cada una de estas secciones siempre se contara con un botón Siguiete, el cual permitirá avanzar. Esto se aplicara para todas las aplicaciones diseñadas.

#### 4.2. Aplicación 2 - Variables en sistemas de control

En un sistema las variables son muy importantes, ya que son estas las encargadas de indicar que el sistema debe modificar algún parámetro y también serán las encargadas de modificar el comportamiento del sistema. En la aplicación 2 se da una definición simple de esto.

- Variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla.
- Variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada.

En las secciones dos y tres de esta aplicación se da un breve ejemplo de identificación de variables en un sistema de control, y posteriormente se plantea un ejercicio simple, en el que se debe elegir cuál es la variable controlada y cuál la variable manipulada de dicho sistema. En la figura 22 se observa el panel frontal la sección 2, de la aplicación 2. Este muestra un ejemplo sobre el tema de variables.

Figura 22. Panel frontal de aplicación 2

Cap1\_app2.vi

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería  
CARRERA DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE CONTROL

Sistemas De Control  
Variables  
Capitulo 1

EIME  
SIVE

**Ejemplo** **Control Manual De Nivel En Un Tanque**

En diversos procesos es esencial mantener la cantidad de determinados fluidos en niveles específicos, en muchos casos esto se hace de forma manual, principalmente cuando el movimiento del fluido es lento. En este caso el proceso es simple, pues únicamente se basa en un operador, el cual debe mantener el nivel de un fluido dentro en un tanque a un nivel específico, y esto lo hace revisando visualmente el nivel del fluido, y si el nivel debe subir o bajar para alcanzar en nivel determinado, abre o cierra la válvula.

Para este sistema podemos determinar tanto la variable controlada como la variable manipulada de la siguiente forma:

Variable controlada: en este caso la variable controlada está dada por el valor del nivel del fluido dentro del tanque, pues esta es la variable que nos interesa mantener en un determinado valor.

Variable manipulada: en este caso la variable manipulada está dada por la válvula, más específicamente la cantidad de abertura que esta tiene, pues esto determinara cuanto cambia el nivel en el tanque, o la variable controlada.

Para continuar con la aplicación de variables presione el botón "Siguiente".

Entrada Del Fluido

Operador

Salida Del Fluido

Válvula

Regresar Siguiente

Fuente: elaboración propia.



### 4.3. Aplicación 3 - Ejercicios de variables

En esta aplicación se diseñaron tres ejercicios con un nivel medio de dificultad en los cuales se plantean distintos sistemas de control, tratando de mostrar que en cualquier lugar se pueden encontrar procesos que se pueden modelar como sistemas de control. En la figura 23 se ve el panel frontal de la sección 2 de la aplicación.

Figura 23. Panel frontal de aplicación 3



Fuente: elaboración propia.

En cada ejercicio se plantea un sistema de control diferente, entre los cuales están un interruptor eléctrico, como un sistema de control para el flujo de electricidad, en el cual el movimiento se puede considerar como la entrada, o

variable manipulada. Por lo tanto la salida del sistema es el flujo de la corriente eléctrica, es decir la variable controlada.

Otro sistema utilizado en esta aplicación es el de un tostador automático, en el cual, el usuario puede determinar el tiempo de tostado, lo que funcionaría como variable manipulada, con el fin de obtener un resultado a través de la variable controlada que sería la calidad del tostado. En cada ejercicio se plantea una solución, a partir de la cual se debe determinar si es correcta o no, finalmente al determinar las soluciones se finaliza la actividad.

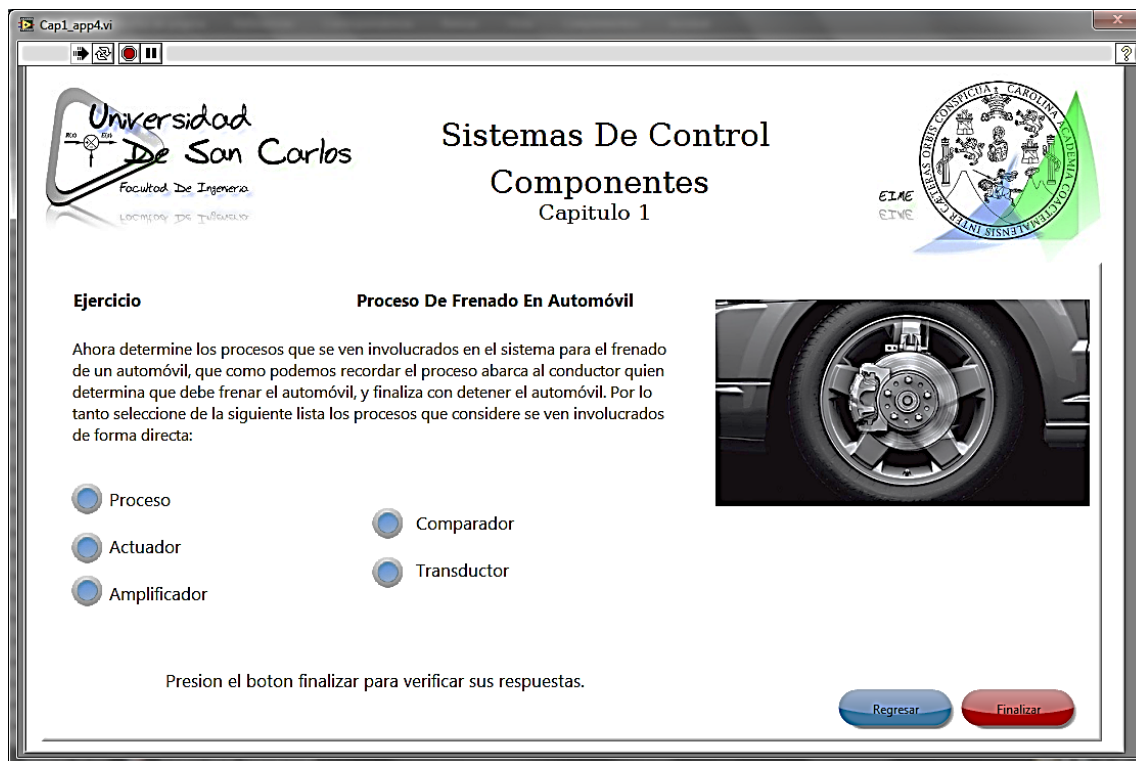
#### **4.4. Aplicación 4 - Componentes en sistemas**

En esta aplicación se trata nuevamente de definir los componentes que conforman un sistema de control, puesto que estos elementos son los que permiten que las variables modifiquen el sistema. Los elementos que se definen en la aplicación son los siguientes:

- Proceso es un conjunto de operaciones en un determinado orden y con un fin determinado.
- Actuador es el componente encargado de actuar en el sistema para lograr alcanzar el fin deseado, el encargado de modificar la variable controlada.
- Amplificador es elemento que aumenta una amplitud o intensidad.
- Comparador es el elemento que compara la señal controlada con la señal de referencia para proporcionar la señal de error.
- Transductor es el dispositivo que transforma un tipo de energía en otro.

En la figura 24 se ve la sección tres del panel frontal de esta aplicación, en donde se puede observar el ejercicio final para comprobar los conceptos previamente definidos. Al terminar de elegir las opciones para la respuesta correcta, se procede a presionar el botón finalizar, y si las respuestas son correctas, se verá una breve explicación de estas respuestas.

Figura 24. Panel frontal de aplicación 4



Fuente: elaboración propia.

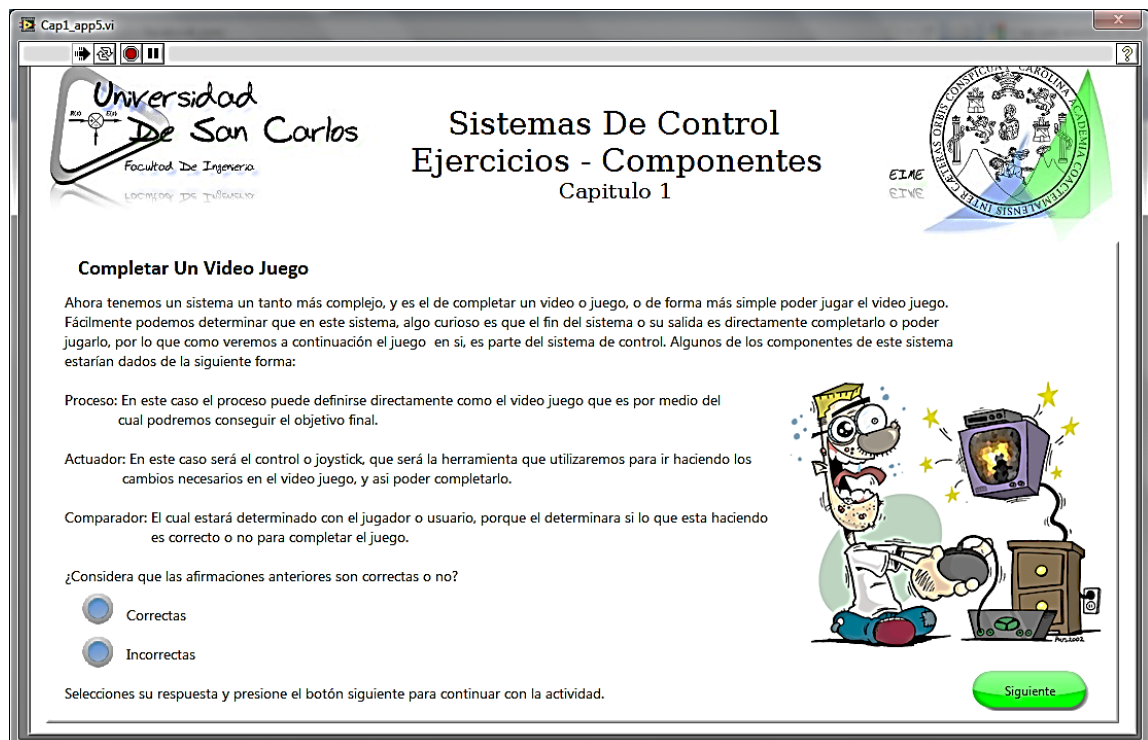
Adicionalmente previo al ejercicio se tiene un ejemplo en el cual se da una breve introducción al método de análisis para determinar cuáles son los componentes en los sistemas de control.

## 4.5. Aplicación 5 - Ejercicios de componentes

Esta aplicación está diseñada para poner en práctica las definiciones previamente vistas respecto a componentes en sistemas de control. Se plantean tres ejercicios con nivel medio de dificultad, a los cuales se da una solución, por lo tanto se debe determinar si las soluciones son correctas.

A continuación la figura 25, muestra el panel frontal de la aplicación, en la sección uno, en la cual como se ve, muestra un ejercicio sobre el proceso de completar un video juego, en esta se nombran los componentes y nuevamente se debe determinar si son correctos o no.

Figura 25. Panel frontal de aplicación 5



The screenshot shows a software window titled 'Cap1\_app5.vi'. The interface includes the logo of Universidad De San Carlos (Facultad De Ingenieria) on the left and the title 'Sistemas De Control Ejercicios - Componentes Capitulo 1' in the center. On the right, there is a circular seal of the university. The main content area is titled 'Completar Un Video Juego' and contains a paragraph of text explaining the exercise. Below the text, there are three definitions: 'Proceso', 'Actuador', and 'Comparador'. A question asks if the previous statements are correct or not, with two radio button options: 'Correctas' and 'Incorrectas'. A 'Siguiente' button is located at the bottom right. An illustration of a person playing a video game is on the right side of the text area.

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingenieria

Sistemas De Control  
Ejercicios - Componentes  
Capitulo 1

**Completar Un Video Juego**

Ahora tenemos un sistema un tanto más complejo, y es el de completar un video o juego, o de forma más simple poder jugar el video juego. Fácilmente podemos determinar que en este sistema, algo curioso es que el fin del sistema o su salida es directamente completarlo o poder jugarlo, por lo que como veremos a continuación el juego en si, es parte del sistema de control. Algunos de los componentes de este sistema estarían dados de la siguiente forma:

Proceso: En este caso el proceso puede definirse directamente como el video juego que es por medio del cual podremos conseguir el objetivo final.

Actuador: En este caso será el control o joystick, que será la herramienta que utilizaremos para ir haciendo los cambios necesarios en el video juego, y así poder completarlo.

Comparador: El cual estará determinado con el jugador o usuario, porque el determinara si lo que esta haciendo es correcto o no para completar el juego.

¿Considera que las afirmaciones anteriores son correctas o no?

Correctas

Incorrectas

Selecciones su respuesta y presione el botón siguiente para continuar con la actividad.

Siguiente

Fuente: elaboración propia.

Este se puede tomar como un ejemplo complejo debido a que completar un video juego es un proceso un tanto complicado, se puede determinar que en este sistema, el fin o su salida es completarlo, por lo tanto, como se ve en el análisis de la aplicación, el juego en sí es parte del sistema de control.

En esta aplicación las secciones dos y tres también contienen ejercicios del mismo tipo, con otros tipos de sistemas, como el de operación del lector del CD-ROM, o cualquier tipo de unidad de CD. También el sistema de refrigeración del automóvil y nuevamente, como en los casos anteriores, se plantea una solución posible y se debe determinar si correcta.

#### **4.6. Aplicación 6 - Tipos de sistemas**

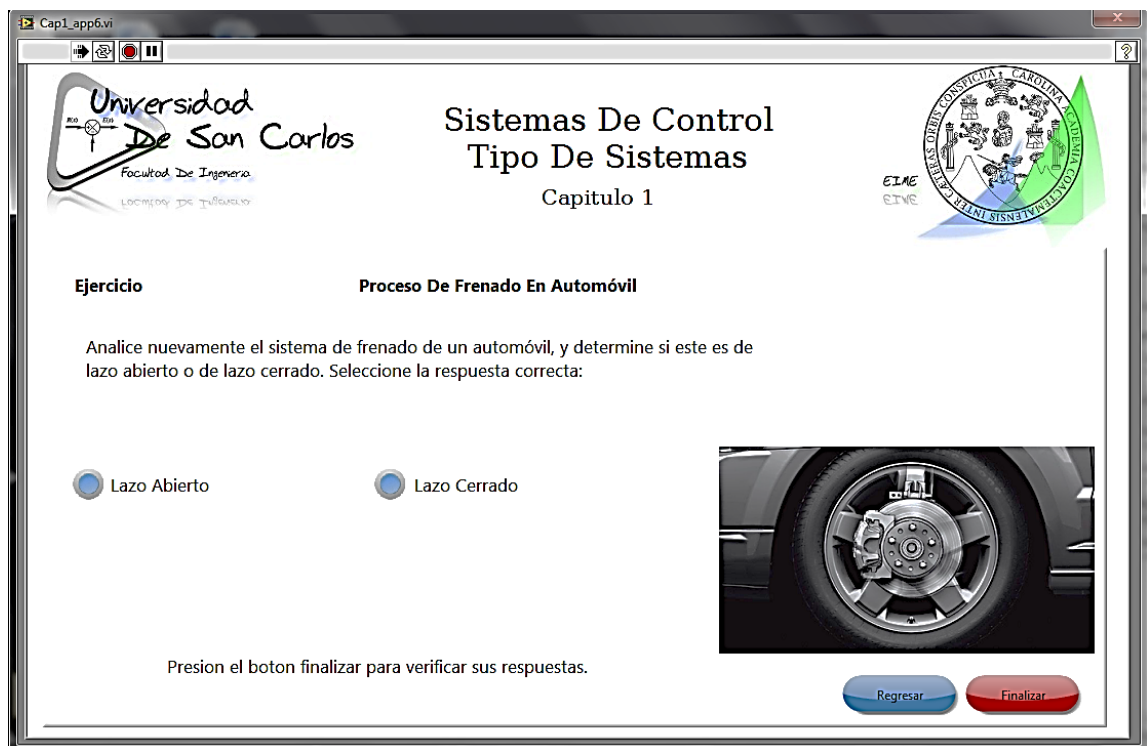
Esta aplicación trata de mostrar los tipos de sistemas de control que existen. Estos se pueden clasificar de muchas maneras, pero esta aplicación se centra en dar la diferencia entre los sistemas de lazo abierto y lazo cerrado, pues son los más comunes en cuanto a diseño de sistemas se refiere.

De forma simple se plantea como un sistema en lazo abierto, a aquel en el cual la acción de control es independiente de la salida, y un sistema en lazo cerrado a aquel en el cual la acción de control depende de alguna manera, de la salida, de aquí el nombre de retroalimentación, la cual es la principal característica de los sistemas en lazo cerrado.

En la sección dos de esta aplicación se vuelve a plantear como en otras el sistema de control manual del nivel de agua en un tanque, en el cual se explica que, el operador en todo momento mantiene un contacto visual con la variable controlada, o el nivel del fluido en el tanque, y por lo tanto utiliza esto para determinar como hacer cambiar el sistema. Que es la definición previa del

sistema de lazo cerrado. La acción de control depende de la salida, lo cual como se verá más adelante, de forma práctica se representa por una conexión directa entrada-salida.

Figura 26. Panel frontal de aplicación 6



Fuente: elaboración propia.

Como se puede ver en la figura anterior, la figura 26, muestra el panel frontal de la aplicación 6, en la sección tres. Esta sección tiene el ejercicio de la aplicación, en este se pide analizar el funcionamiento del proceso o sistema de control, para el frenado de un automóvil, y como se observase tienen ambas opciones, lazo abierto o lazo cerrado para seleccionar posterior al análisis, con esta sección finaliza la aplicación.

#### 4.7. Aplicación 7 - Otros tipos de sistemas

Esta aplicación se centra en continuar con el análisis que previamente se inició, con respecto a los distintos tipos o clasificaciones de los sistemas. Como se ha mencionado con anterioridad, los sistemas también se pueden clasificar de acuerdo a las tecnologías que utilizan (mecánicos, neumáticos, hidráulicos y electrónicos), atendiendo a las técnicas de procesamiento de señal (analógica y digital), etc.

En el área del diseño de los sistemas de control la segunda clasificación más importante es de acuerdo al procesamiento de la señal que se utiliza, y es por esto que la aplicación seis trata de dar una mejor idea de la diferencia entre un sistema analógico y uno digital, tomando como fundamento que las señales en un sistema de control de este tipo, siempre son funciones de alguna variable independiente, usualmente el tiempo, denotada por “ $t$ ”, por lo tanto:

- Una señal analógica es una señal dependiente continuamente de valores de la variable independiente  $t$ .
- Una señal digital es una señal definida solamente en los instantes discretos de la variable independiente  $t$ , de la cual depende.

En la figura 27, se puede ver el panel frontal de la aplicación siete, en la sección tres, donde se da un ejemplo de un sistema digital, y se explica de forma breve porque este es un sistema considerado digital, además de explicar características comunes en cualquier tipo de sistema digital, para su rápida identificación. De esta misma forma en la sección anterior se trata el tema de sistemas análogos.

Figura 27. Panel frontal de aplicación 7



Fuente: elaboración propia.

En la sección dos de esta aplicación se da un ejemplo en cuanto a los sistemas análogos, además de explicar sus características. En este caso el ejemplo tomado es con el sistema de control en lazo abierto de un amplificador de audio, el cual de acuerdo a su naturaleza trabaja con señales análogas.

#### 4.8. Aplicación 8 - Ejercicios de tipos de sistemas

La aplicación ocho también contiene ejercicios orientados a poner en práctica el análisis de los sistemas de control, lo cual es de gran utilidad en cuestiones de diseño, principalmente debido a que al momento de diseñar un sistema es importante saber que de qué tipo es. En este caso, nuevamente el



enfoque es únicamente a diferenciar un sistema en lazo abierto de un sistema en lazo cerrado. Es muy importante tener un concepto claro sobre como diferenciar un sistema lazo abierto de uno cerrado, debido a que en base a esto se podrán adoptar los criterios necesarios a la hora de definir aspectos tales como, el tipo de retroalimentación, la cantidad de retroalimentación, entre otros.

Los ejercicios en la aplicación muestran sistemas de control simples, como el de la figura 28, en la cual se tiene la sección dos de la aplicación, en esta se observa el sistema de control de un semáforo, el cual se plantea como un sistema de lazo abierto, esto debido a que la variable controlada del circuito es el flujo de automóviles, y la variable manipulada es la luz o color activado, y por lo tanto la señal de salida no se relaciona con la de entrada.

Figura 28. Panel frontal de aplicación 8

Cap1\_app8.vi

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería

Sistemas De Control  
Ejercicios - Tipos De Sistemas  
Capitulo 1

**Control De Semáforo**

Ahora tenemos el sistema de control de un semáforo común, y de nuevo debemos determinar qué tipo de sistema de control es este, si lazo abierto o lazo cerrado, y analizando cómo es que la variable controlada se ve afectada en base a la variable manipulada, por lo tanto podemos determinar que este es un sistema de tipo:

Lazo abierto: esto debido principalmente a que la variable controlada del circuito es el flujo de automóviles en determinada dirección, y la variable manipulada es la luz o color activado, y como sabemos, en un semáforo común, este no cambia de estado dependiendo flujo de autos.

¿Considera que la afirmación anterior es correcta?

Correcta

Incorrecta

Selecciones su respuesta y presione el botón siguiente para continuar con la actividad.

Regresar Siguiente

Fuente: elaboración propia.

En el caso de la sección uno y la sección tres también muestran ejercicios, el sistema de refrigeración del automóvil y sistema de motores en robótica, en los cuales luego de dar una breve idea de la aplicación para la cual se requieren, se plantea una solución de estos sistemas y se especifican las opciones para determinar si en dicho caso el sistema es de tipo lazo abierto o de tipo lazo cerrado. Posteriormente al análisis se determina si la solución es correcta o no.

#### **4.9. Aplicación 9 - Retroalimentación**

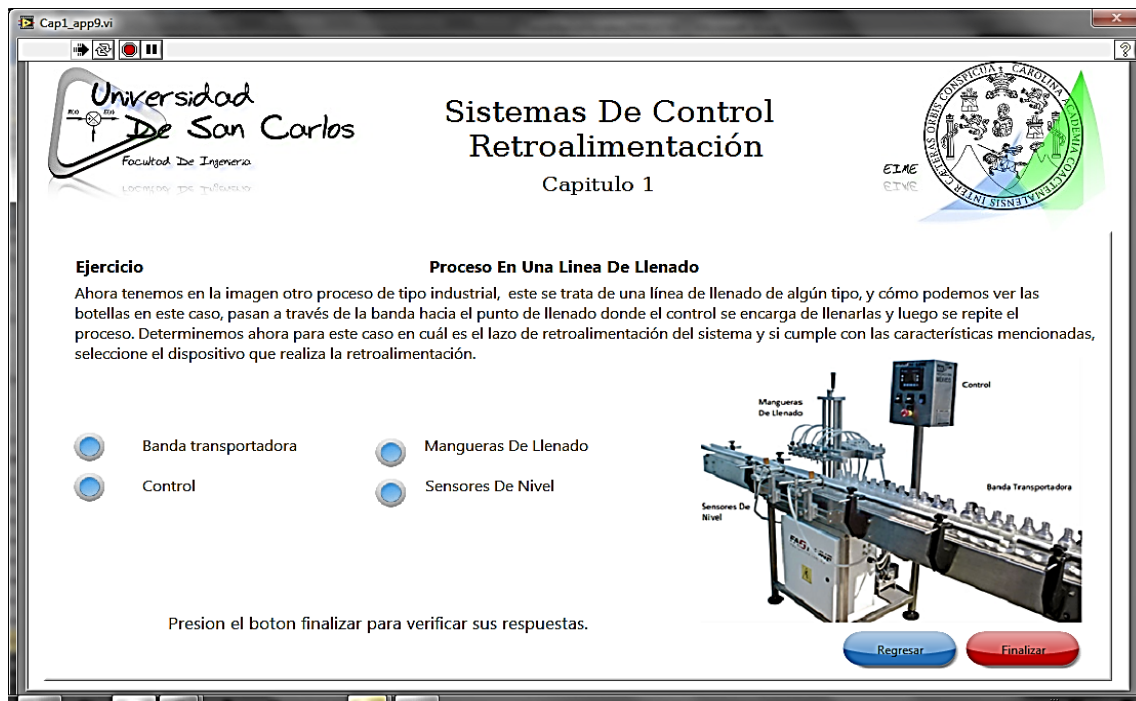
La retroalimentación es la propiedad de un sistema de lazo cerrado que permite que la salida, o cualquier otra variable controlada del sistema, sea comparada con la entrada al sistema, este es el tema correspondiente a la aplicación nueve, en la cual, la retroalimentación se atribuye a cualquier componente interno de un sistema, el cual puede establecer una acción de control y efecto entre las variables del sistema. Las principales características de la retroalimentación en un sistema son:

- Aumento de la exactitud
- Reducción de la sensibilidad de la salida
- Efectos reducidos de la no linealidad y de la distorsión
- Aumento del ancho de banda
- Tendencia a la oscilación o a la inestabilidad

La aplicación nueve define estos conceptos, pero su enfoque está en aprender a determinar cuál es el componente dentro de un sistema que proporciona la retroalimentación, debido a que en muchos casos es fácil determinar cuando el sistema es de lazo cerrado, pero tiende a ser complicado determinar cómo se produce la retroalimentación.

En la figura 29, se observa el panel frontal de esta aplicación, en la sección tres, en la cual como se puede observar se plantea un sistema de tipo industrial. Este se trata de una línea de llenado y, cómo se puede ver, las botellas pasan a través de la banda hacia el punto de llenado, donde el control se encarga de llenarlas y luego se repite el proceso.

Figura 29. Panel frontal de aplicación 9



Fuente: ilustraciones propias, usando LabView.

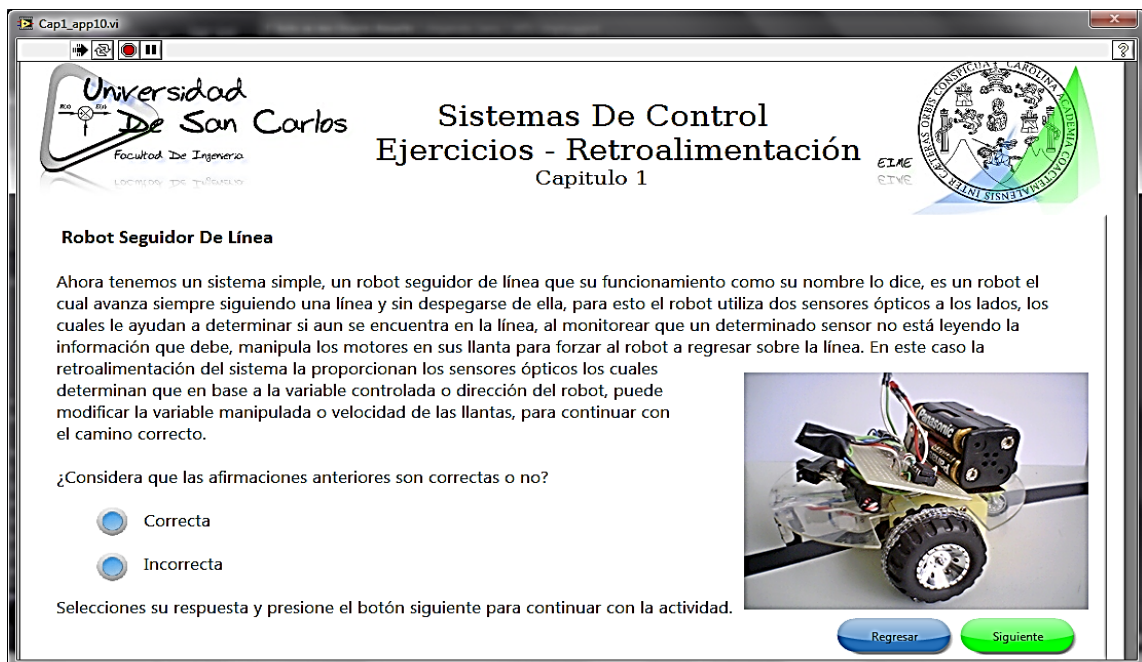
Por lo tanto se plantea determinar cuál es el lazo de retroalimentación del sistema. Para esto se proponen cuatro opciones de dispositivos dentro del sistema que realizan esta función, las cuales se deben evaluar para verificar cuál de estas cumple con las características mencionadas y posteriormente se selecciona como el dispositivo que realiza la retroalimentación.

#### 4.10. Aplicación 10 - Ejercicios de retroalimentación

La aplicación diez es la última diseñada para el capítulo uno, el cual introduce las definiciones básicas para los sistemas de control, en esta aplicación se pone en práctica las definiciones de dispositivos que proporcionan retroalimentación y las características que aportan a los sistemas de control.

La aplicación plantea tres ejercicios para determinar en base a análisis si el enunciado proporcionado es o no correcto. Por lo tanto cada ejercicio plantea un sistema distinto, teniendo en esta aplicación sistemas de depósitos de agua, sistemas de tensión en textiles y sistemas de robots seguidores de línea como se puede ver en la figura 30.

Figura 30. Panel frontal de aplicación 10



Fuente: elaboración propia.

Esta figura muestra la sección dos de la aplicación, el sistema del robot seguidor de línea, el cual avanza siempre siguiendo una línea y como se explica en la aplicación esta trata de nunca despegarse de ella, para lo cual utiliza sensores ópticos a los lados, los cuales le ayudan a determinar si aún se encuentra en la línea. Para esta aplicación se plantea nuevamente un dispositivo de retroalimentación, el cual luego de analizar, si este puede modificar la variable manipulada por medio de la variable controlada se determina si la solución dada es correcta o no.

De igual forma para las otras secciones con su respectivo sistema a analizar se plantea el problema y un dispositivo de retroalimentación o solución, el cual se debe de analizar para determinar si dentro del sistema dado, es capaz de proporcionar las características de la retroalimentación, y por lo tanto se elige como respuesta correcta o incorrecta.

Con esta finalizan las aplicaciones diseñadas para comprensión de la teoría básica y definiciones de los sistemas de control. A continuación se comienza a ver la aplicación de las herramientas matemáticas en el diseño y análisis de estos sistemas, a modo de dar una visualización más física de los conceptos.

## **5. DISEÑO DE APLICACIONES DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS**

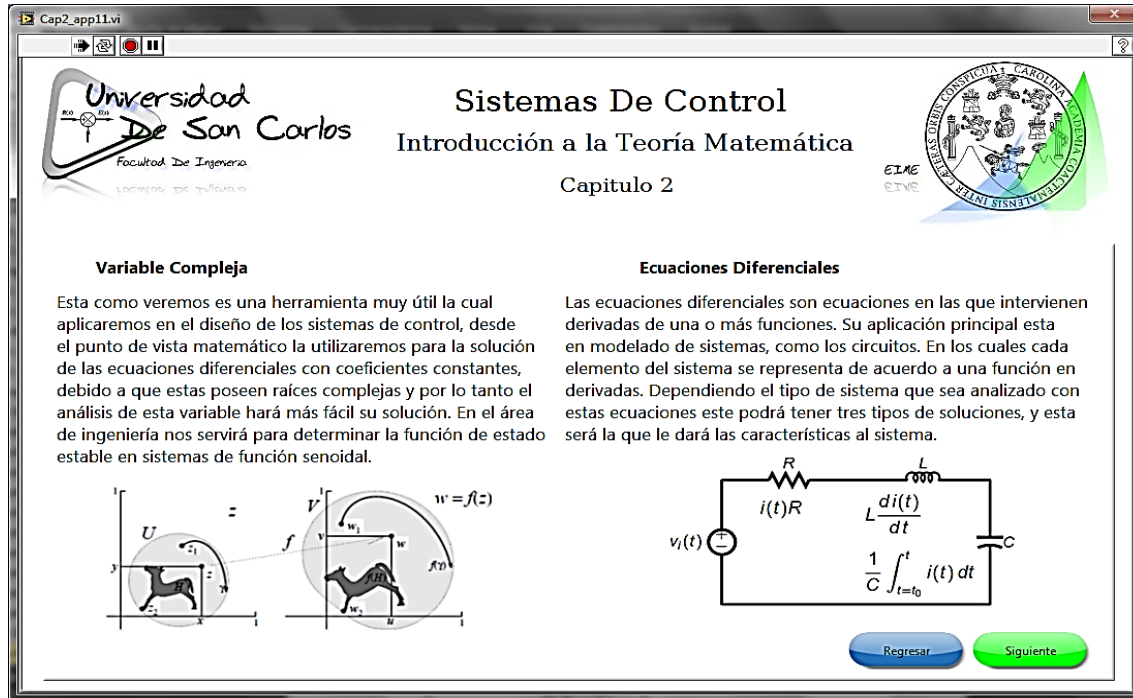
Ahora inicia a una parte más práctica en lo que se refiere al análisis y diseño de los sistemas de control, ya se ha definido y determinado los elementos más importantes en los sistemas de control, los cuales permitirán tomar decisiones, actuarán en los procesos, tomarán muestras, etc. Ahora toca la sección que fundamenta cómo es posible modelar y predecir el comportamiento de los sistemas, para esto se utilizan cálculos matemáticos.

En algunos casos los sistemas se podrán modelar con cálculos simples como los del álgebra y en otros se tendrá que recurrir a herramientas más avanzadas como las transformadas, etc. Para esto se define nuevamente una serie de aplicaciones con tres secciones, las cuales dan tanto definiciones, como ejercicios y aplicaciones de estos conceptos matemáticos.

### **5.1. Aplicación 11 – Introducción a la teoría matemática**

En esta aplicación nuevamente se inicia dando una justificación de por qué los sistemas de control se fundamentan en principios matemáticos, esto en la sección uno. Además de determinar en que principios se fundamenta, siendo estos la variable compleja, las ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace, el álgebra de matrices, entre otros. Así mismo presenta una breve introducción a cada uno de estos temas. A continuación se tiene la figura 31 que muestra el panel frontal de la aplicación once.

Figura 31. Panel frontal de aplicación 11



Fuente: elaboración propia.

En la figura anterior se observa la sección dos de la aplicación, la cual muestra cómo se aplica la variable compleja y ecuaciones diferenciales. En cada caso se da una síntesis sobre cómo es que el tema ayuda al análisis de los sistemas de control. Por lo tanto, en el caso del tema de variable compleja, se muestra que su principal uso es para determinar la estabilidad en los sistemas, esto por medio de la definición de los polos y los ceros.

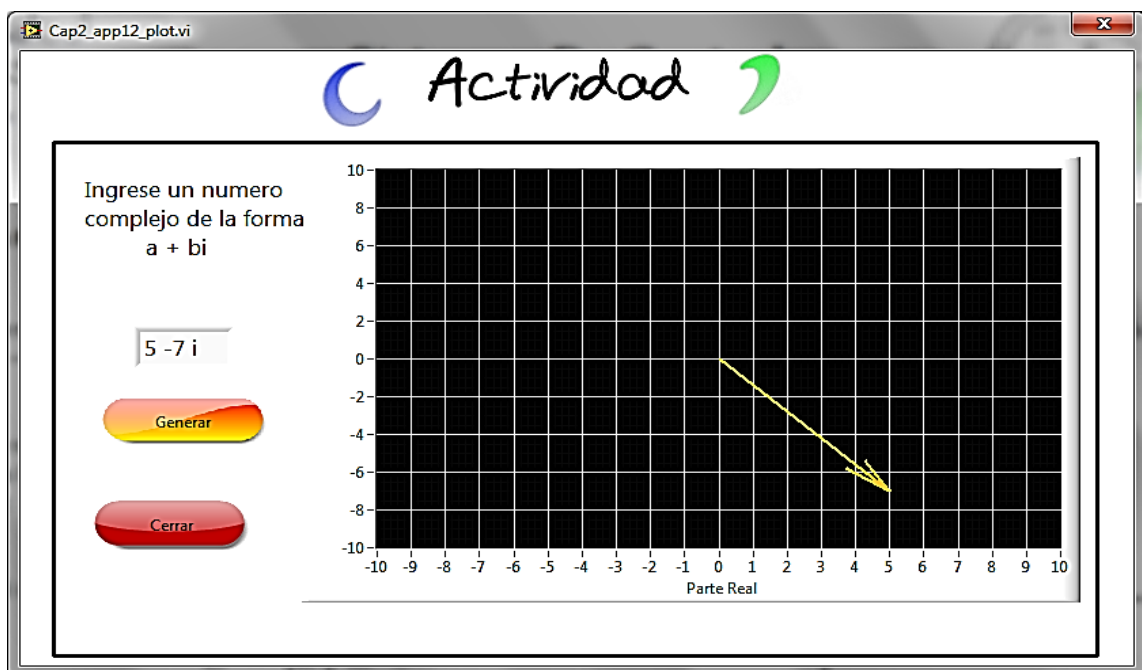
Por otra parte también se muestra la aplicación de las ecuaciones diferenciales. En este caso, se muestra cómo se pueden representar los elementos para formar una ecuación diferencial, la cual modela en el dominio del tiempo al sistema. En la sección tres de la aplicación se puede ver los temas correspondientes a transformadas y matrices.

## 5.2. Aplicación 12 – Variable compleja

Esta aplicación describe de forma más detallada la variable compleja. En esta se determina la unidad imaginaria y presentan los componentes de los números complejos, como parte real y parte imaginaria. En la sección uno, la aplicación se inicia con actividades de carácter interactivo, mostrando una sección para poder ingresar un valor complejo y determinar sus componentes.

La sección dos de la aplicación muestra cómo se determina la representación geométrica de un número complejo, los cuales se representan usando un sistema de coordenadas cartesianas. A continuación se observa en la figura 32, la aplicación interactiva de esta sección.

Figura 32. Panel frontal de representación geométrica

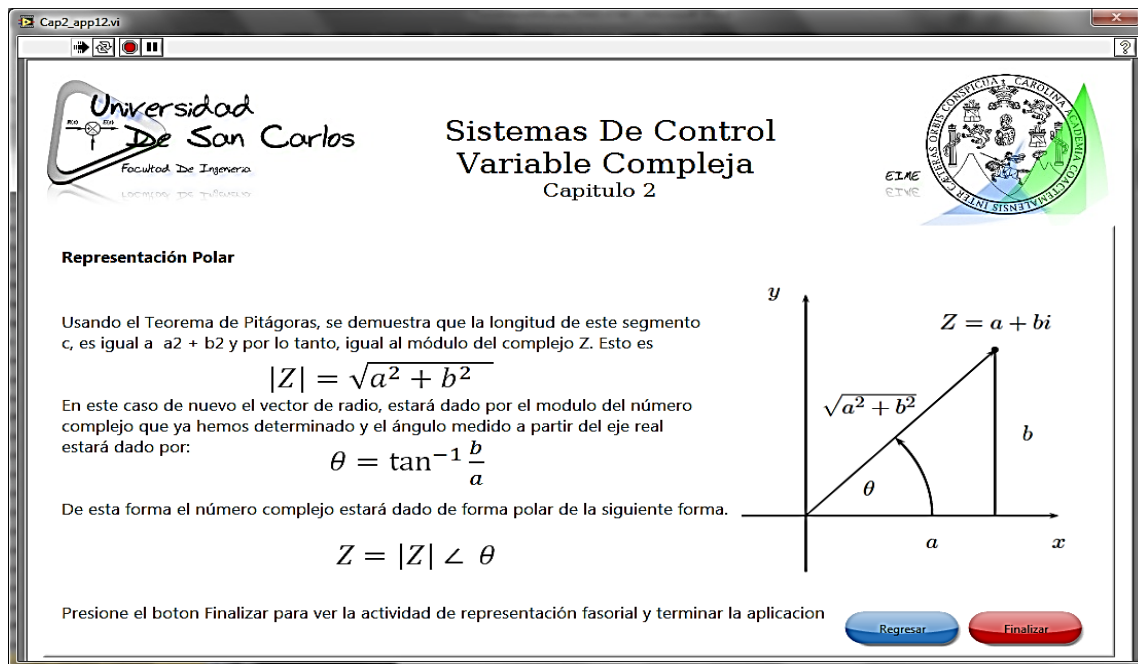


Fuente: elaboración propia.



En la figura 33, se puede ver el panel frontal de la sección tres, en la cual finalmente se ve la representación polar o fasorial de los valores complejos, por medio del cálculo de la magnitud y la fase, que gráficamente se representan por medio de un vector y un ángulo. Se finaliza la aplicación nuevamente con una actividad de cálculo de magnitudes y fases.

Figura 33. Panel frontal de la aplicación 12



Fuente: elaboración propia.

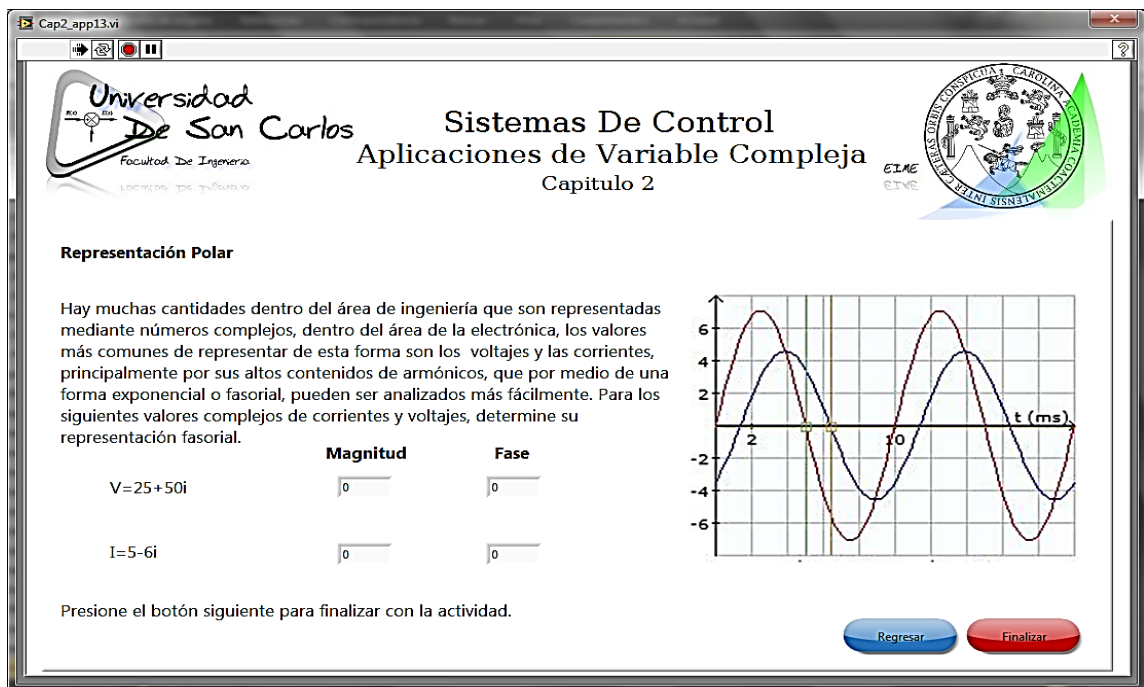
### 5.3. Aplicación 13 – Aplicaciones de variable compleja

Una vez que ya se ha determinado los principios básicos de la variable compleja, se da una aplicación más grafica a esto, puesto que la variable compleja por sí misma no representa mayor sentido. Para esto se analizan tres de sus principales aplicaciones en ingeniería y diseño.

Inicialmente en la sección uno se da significado a las cantidades complejas por medio de las reactancias en los componentes pasivos, de forma que en los circuitos de corriente alterna, se representan todos los componentes en ohmios y para esto se aplica una transformación que introduce la variable compleja como elemento de fase.

De este mismo modo se aplica la representación geométrica en la sección dos y en la sección tres. Como se ve en la figura 34, se tiene un significado físico para las cantidades polares, esto por medio de las señales de corriente y voltaje, las cuales indican un valor o amplitud máxima y su corrimiento o fase, para señales alternas.

Figura 34. Panel frontal de la aplicación 13



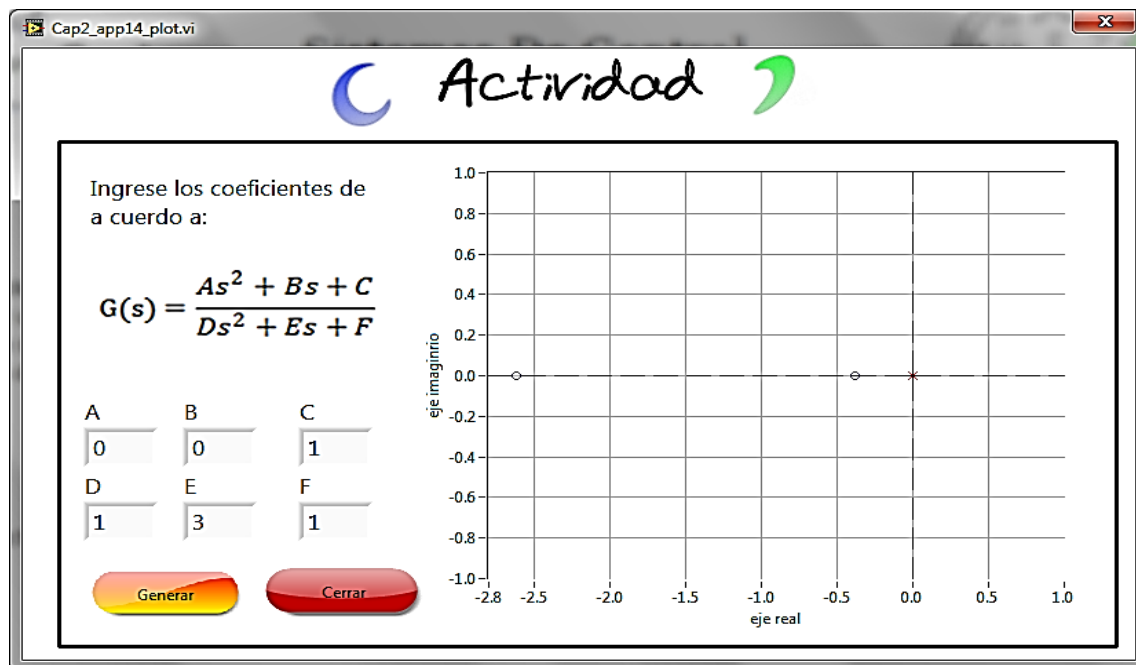
Fuente: elaboración propia.

#### 5.4. Aplicación 14 – Polos y ceros

Una aplicación de representar los números complejos en el plano Z, es la capacidad de estos para determinar funcionamiento o comportamiento de sistemas, para esto se inicia analizando los polos y ceros de las funciones, esta aplicación se centra en el análisis de estos, en la sección uno dando una introducción a la definición de un polo y un cero.

Posteriormente en la sección dos se define la forma de representar gráficamente a un polo y un cero, los cuales están en el denominador y numerador respectivamente de las funciones complejas, y se inicia la actividad respectiva en la cual se ingresa una función por medio de sus coeficientes y así gráficamente se observa la ubicación de los polos y ceros.

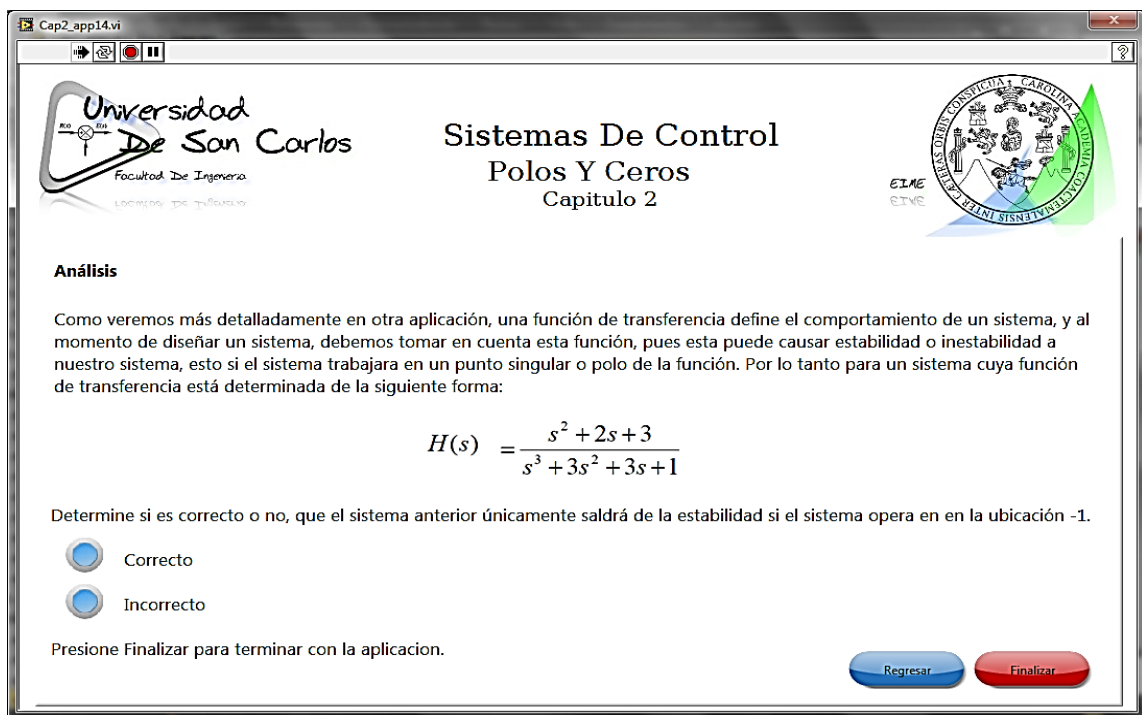
Figura 35. Panel frontal de actividad polos y ceros



Fuente: Ilustraciones elaboración propia.

La sección tres de esta aplicación se puede ver en la figura 36, se plantea el análisis de las funciones y plantea un ejemplo simple para analizar, en el que luego de encontrar las raíces o polos de la función hay que determinar si dicha función es estable en un punto en específico.

Figura 36. **Panel frontal de la aplicación 14**



Fuente: elaboración propia.

## 5.5. Aplicación 15 – Ecuaciones diferenciales

De la misma forma como se planteó en la sección 2.3, nuevamente es importante recordar que al referirse a ecuaciones diferenciales, se habla de ecuaciones en términos de derivadas de una o más funciones, y este es el tema de esta aplicación, definir sus aplicaciones en la ingeniería y diseño, por medio del modelado de los sistemas.

En la sección uno se da la introducción a las ecuaciones diferenciales y algunos tipos de ecuaciones, ya que estas se pueden variar dependiendo el tipo de elementos que posee la función, pudiendo ser polinomiales, exponenciales, trigonométricos, entre otros. La sección dos define las variables y ecuaciones de estado, las cuales se aplican con el fin de poder expresar una ecuación diferencial de orden  $N$ , en  $N$  ecuaciones de primer orden.

Figura 37. Panel frontal de la aplicación 15

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingenieria

Sistemas De Control  
Aplicaciones De Ecuaciones Diferenciales  
Capitulo 2

**Aplicación**

Ahora veamos un ejemplo de un sistema que se modela por medio de una ecuación diferencial y como se plantean sus ecuaciones y variables de estado. El sistema está conformado por un motor eléctrico de corriente continua controlado por campo, como el que se muestra en la figura, con corriente de armadura constante, que mueva una carga de momento.

Este motor lo podemos representar de forma mas simple de acuerdo al siguiente diagrama, el cual toma en cuenta todas las fuerzas o fenómenos que interactúan con dicho sistema. Como podemos ver tiene su alimentación de voltaje, su corriente, y los efectos de los devanados de resistencia e inductancia, finalmente toma en cuenta la fuerza o torque generado por la carga en el rotor.

$$R_f \cdot i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} = v_a(t)$$

Presione el boton de finalizar para ver el desarrollo y terminar con la aplicacion.

Regresar Finalizar

Fuente: elaboración propia.

Como se ve en la figura 37, en la sección tres se observa la aplicación principal tanto de ecuaciones diferenciales, como modelos por ecuaciones de estado, se plantea un motor de DC y muestra el modelo. Al finalizar la aplicación se muestra el modelado por medio de ecuaciones de estado.

## 5.6. Aplicación 16 – Aplicaciones de ecuaciones diferenciales

En esta sección se plantean algunas aplicaciones básicas de las ecuaciones diferenciales en lo que se refiere a diseño. Para esto se plantea un sistema, se trata de modelar con elementos simples y sencillos de analizar, posteriormente con el sistema modelado en base a principios sencillos, se establece la relación entre ellos para formar la ecuación que modela el sistema.

En la figura 38, se observa el panel frontal de la aplicación 16, en esta se plantea el modelo de la suspensión de un automóvil, el cual actúa en base a la fuerza que se ejerce por medio del auto sobre los elementos, los cuales se modelan por medio de resortes con coeficientes apropiados, para el modelo.

Figura 38. Panel frontal de la aplicación 16

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería

Sistemas De Control  
Aplicaciones De Ecuaciones Diferenciales  
Capítulo 2

**Suspension Del Automovil**

Ahora veremos modelados de sistema de la vida real, en este caso tenemos el sistema de suspensión de un automóvil, el cual funciona de acuerdo a la cantidad de fuerza que se le aplica, esta fuerza puede ser de muchos tipos, pero en general si hacemos una sumatoria, reducimos a una única fuerza de entrada. Esta fuerza se aplica al auto o masa, posteriormente actúan los elementos de soporte del auto, contrarrestando esta fuerza, modelados con resortes y elementos viscosos, el resultado final es la cantidad de desplazamiento que sufre el auto. En la figura siguiente vemos el modelado.

Fuerza De Entrada  $f(t)$

Desplazamiento Salida de Sistema  $z(t)$

$m$

$k$

$b$

$f(t) - kz(t) - b \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2z(t)}{dt^2}$

Siguiente

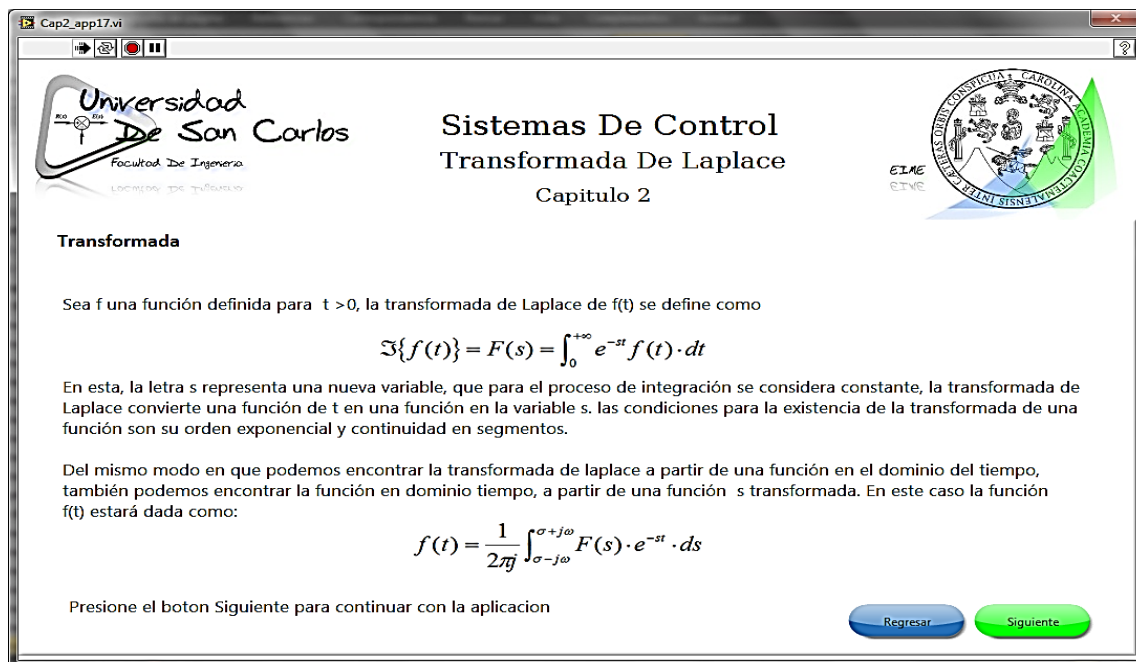
Fuente: elaboración propia.

De igual forma en esta aplicación, en las secciones dos y tres se dan aplicaciones de nivel en depósitos y circuitos RLC respectivamente. En cada uno de estos luego de modelarlos con elementos mucho más simples se procede a analizar para determinar la ecuación que modela cada sistema.

## 5.7. Aplicación 17 – Transformada de Laplace

Como ya se ha visto la transformada de Laplace es una técnica definida por medio de una integral impropia, esta cambia una función en el dominio del tiempo a una función en el dominio de la frecuencia. En esta aplicación se presentan los conceptos básicos, en la sección uno se inicia definiendo cuál es su utilidad en los sistemas de control.

Figura 39. Panel frontal de la aplicación 17

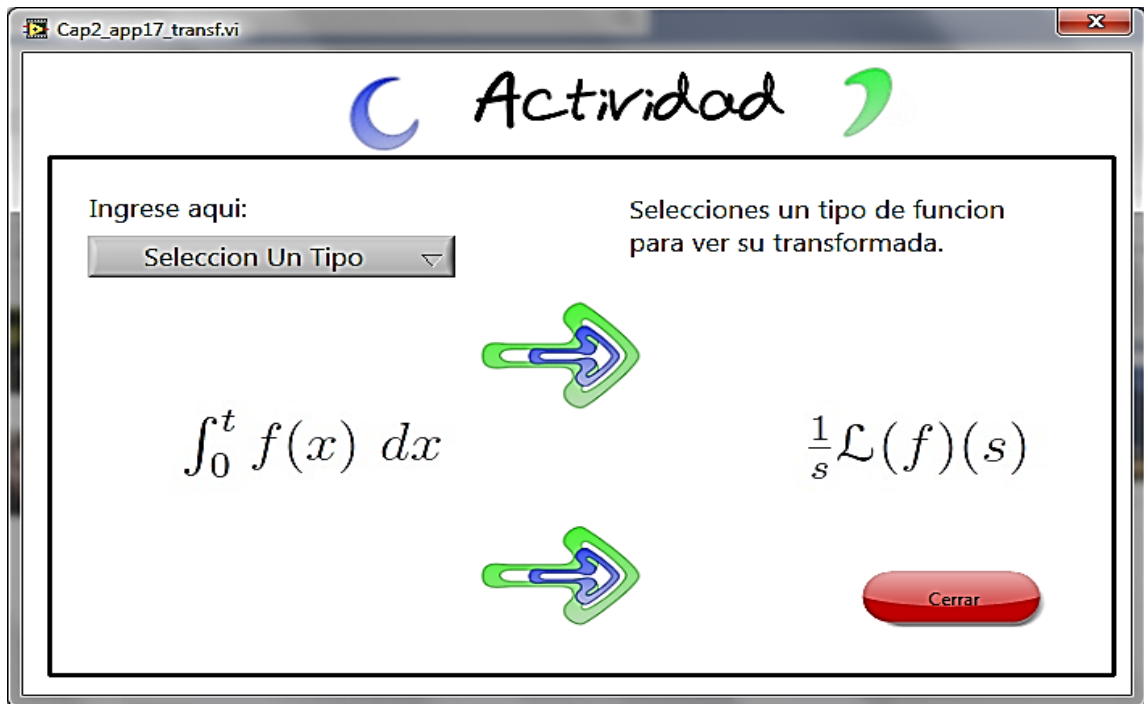


Fuente: elaboración propia.

La sección dos de la aplicación representada en la figura 39, muestra la sección de definición de la transformada, la cual indica de forma teórica como encontrar tanto la transformada, como la transformada inversa de una función. Esto tomando como fundamento a la variable  $S$ . Finalmente determina las condiciones para la existencia de la transformada de una función.

La sección tres contiene la actividad para determinar transformadas de funciones simples por medio de tablas. Esto se puede ver en la figura 40, donde esta la actividad de esta aplicación, en la cual se puede ingresar un modelo de función simple, de tipo lineal, exponencial, senoidal, derivada, entre otros, y posteriormente ver su transformada.

Figura 40. **Panel frontal de la actividad de transformada de Laplace**



Fuente: elaboración propia.



## 5.8. Aplicación 18 – Aplicaciones de transformada de Laplace

En esta aplicación se retoman los ejemplos de la aplicación 16, en cada uno de ellos se planteó un sistema, partiendo de estos se modelo una ecuación que determina la salida del sistema para una entrada específica con condiciones específicas. En esta aplicación se parte de esos modelos para determinar la transformada de Laplace de cada uno.

En la figura 41, se observa el panel frontal de la sección dos de esta aplicación, se trata del sistema que controla el nivel de líquido en un tanque, con el desarrollo respectivo para determinar su transformada. De la misma forma en la sección uno y la sección tres están los ejemplos correspondientes.

Figura 41. Panel frontal de la aplicación 18

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería

Sistemas De Control  
Aplicaciones De La Transformada De Laplace  
Capitulo 2

**Nivel En Un Tanque**

Ahora tenemos el caso del sistema del nivel en el tanque, y nuevamente después de haber mostrado el modelo matemático en ecuaciones diferenciales, para poder solucionarlo hacemos uso de la transformada de laplace, de la forma como se muestra en la figura, y finalmente obtenemos el modelo en función de entrada y salida.

$$q_i(t) - \frac{1}{R} h(t) = A \frac{dh(t)}{dt}$$

$$Qi(s) - \frac{1}{R} H(s) = AsH(s)$$

$$Qi(s) = H(s) \left( As + \frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{H(s)}{Qi(s)} = \frac{1}{As + \frac{1}{R}} = \frac{R}{ARs + 1}$$

Regresar Siguiente

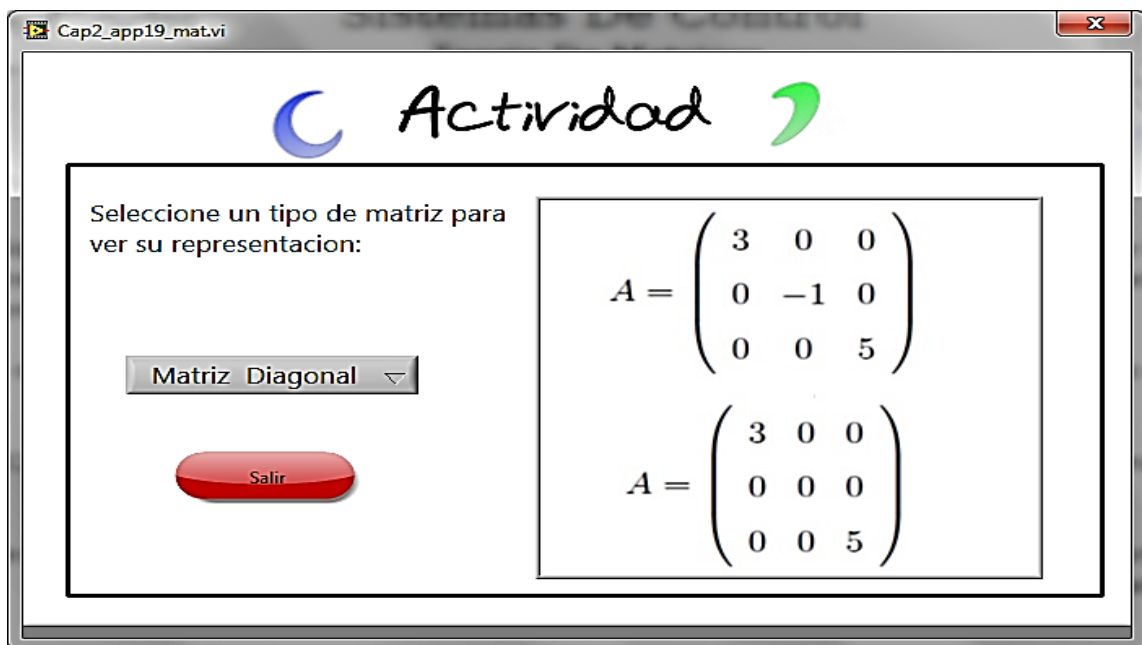
Fuente: elaboración propia.

## 5.9. Aplicación 19 – Teoría de matrices

Las matrices son una herramienta que facilita el ordenamiento de datos, así como su manejo. Por lo tanto en cuanto a diseño y análisis de sistemas, las matrices se utilizan en situaciones donde se trabaja con datos regularmente ordenados. Esta es la base de la sección uno de la aplicación 19 en la cual se definen sus principales elementos y tipos.

Posteriormente en la sección dos se puede ver la clasificación básica de las matrices, en esta se definen los principales tipos usados en ingeniería. Para esta sección se diseñó la actividad mostrada en la figura 42, en esta se debe seleccionar un tipo de matriz y ver su representación.

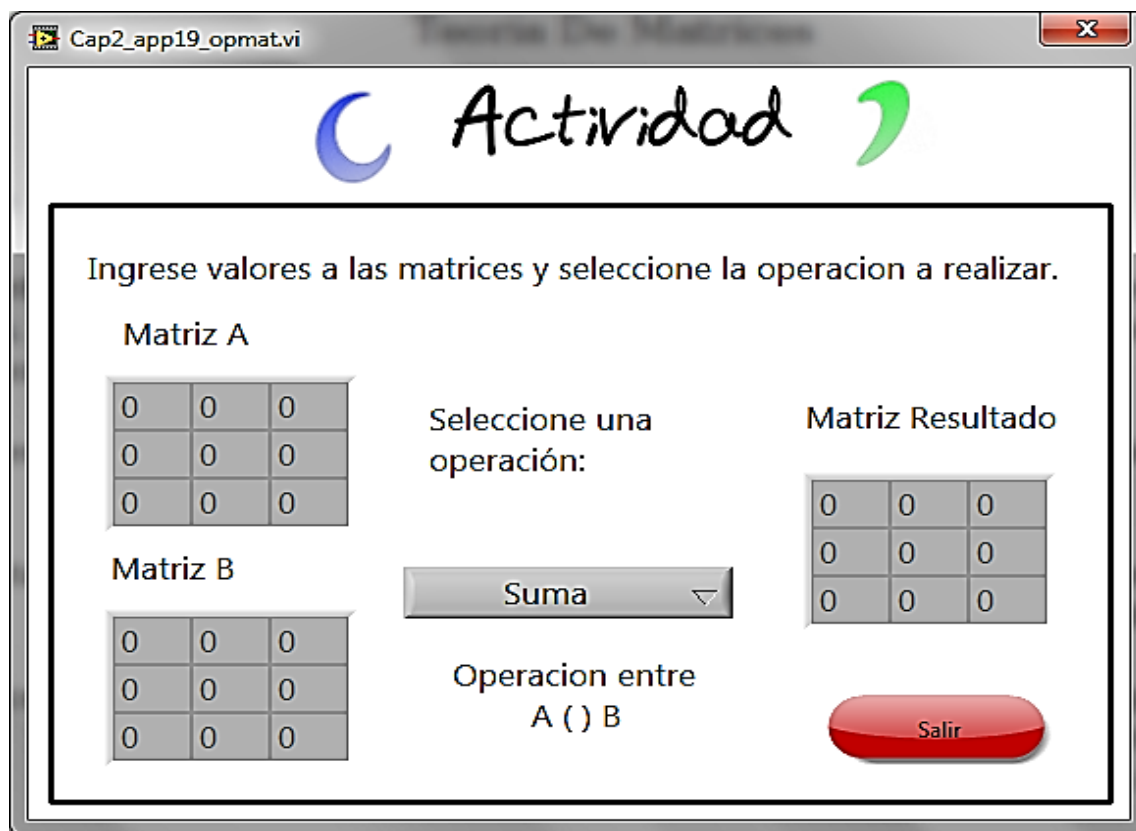
Figura 42. Panel frontal de la actividad tipos de matrices



Fuente: elaboración propia.

Por ultimo en la sección tres de esta aplicación se definen algunas de las operaciones básicas entre matrices como la suma, resta, multiplicación, entre otras. Para esto, la aplicación muestra la actividad de operaciones entre matrices. En esta se puede ingresar los valores correspondientes a dos matrices, y seleccionar una operación a realizar, esto se ve en la figura 43. Finalmente se puede ver el resultado de la operación en una matriz resultado, la cual contendrá los resultados de las operaciones posición a posición.

Figura 43. **Panel frontal de la actividad operaciones con matrices**



Fuente: elaboración propia.

## 5.10. Aplicación 20 – Aplicaciones de matrices

Como se ha mencionado anteriormente las matrices son de mucha utilidad principalmente por su capacidad de poder organizar datos de forma ordenada. Por esta razón esta aplicación se centra en dar algunas aplicaciones del uso que se da en la ingeniería a las matrices, tanto con ejemplos para la ingeniería eléctrica, como ejemplos para la ingeniería electrónica.

La sección uno de esta aplicación inicia dando un ejemplo para ingeniería eléctrica, la aplicación es en el análisis de barras de los sistemas de potencia. En estos se hace uso de las matrices de admitancias, las cuales como se ve, se plantean de forma de matrices triangulares, esto en la figura 44.

Figura 44. Panel frontal de la aplicación 20

**Ingeniería Eléctrica**

En el estudio de los sistemas de potencia cuando nos referimos al análisis de barras, las matrices y su fundamento juegan un papel muy importante, un ejemplo de esto es la matriz admitancia, esta es una herramienta de análisis de redes que es muy usada, relaciona las inyecciones de corriente a una barra a los voltajes de la barra, por medio de las cantidades nodales. Por lo tanto podemos ver a continuación un claro ejemplo del modelado de una red por medio de su respectiva matriz.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 7.9j & -2 + 4j & -1 + 4j & 0 \\ -2 + 4j & 4 - 8.8j & -2 + 5j & 0 \\ -1 + 4j & -2 + 5j & 5 - 11.7j & -2 + j3 \\ 0 & 0 & -2 + 3j & 2 - 2.6j \end{bmatrix}$$

Presione el boton Siguiente para continuar con la aplicación.

Siguiente

Fuente: elaboración propia.

En lo que corresponde a las secciones dos y tres de esta aplicación, se plantean aplicaciones para el área de ingeniería electrónica, empezando por las matrices homogéneas utilizadas para los sistemas de control en el área de robótica, que se utilizan con el fin de determinar posicionamiento de elementos. Por último se da una aplicación más de matrices en la codificación de señales, más específicamente en los códigos lineales tipo hamming, donde se utilizan matrices identidad para las codificaciones.

## **6. DISEÑO DE APLICACIONES PARA HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS**

Como ya se ha mencionado con anterioridad, las herramientas para el análisis son la base del diseño de los sistemas de control, ya que mediante estas se puede lograr predecir o determinar el comportamiento que tendrán los sistemas. Esto es importante ya que aunque los sistemas son construidos para trabajar bajo condiciones específicas, las entradas en ciertos momentos pueden ser aleatorias y producir efectos no deseados.

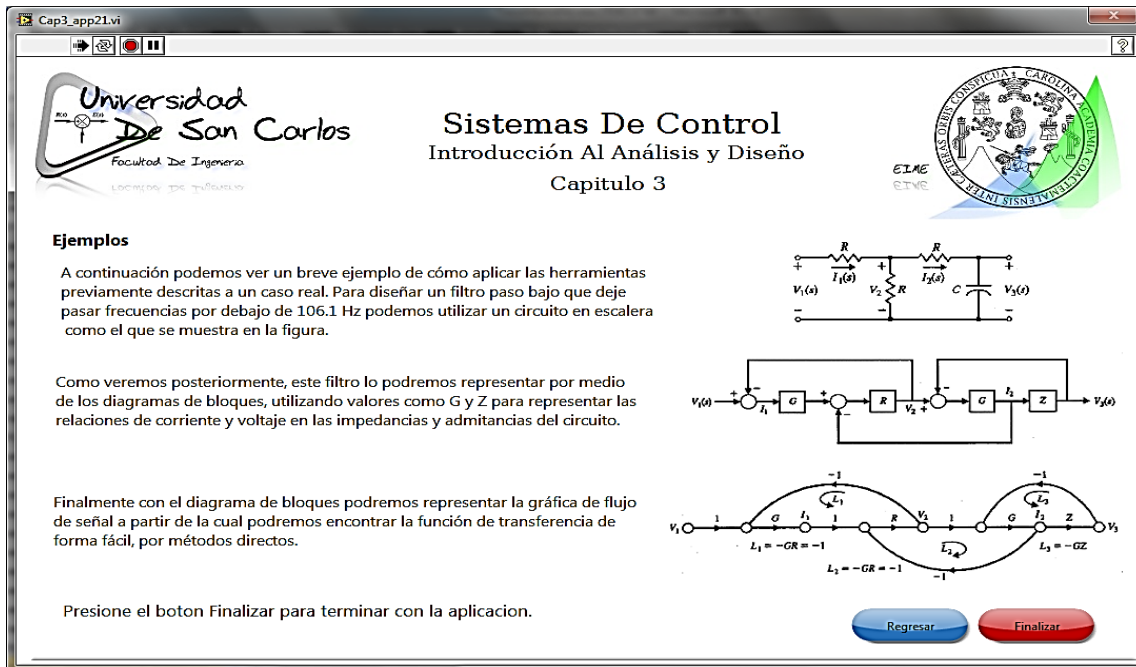
Las principales herramientas de análisis, como los diagramas de bloques, las gráficas de flujo de señal, entre otros, serán revisadas en este capítulo, a las cuales se les ha elaborado una aplicación específica. Cada aplicación muestra sus definiciones principales, algebra para reducirlos y métodos de aplicación. Esto para facilitar la comprensión de cada uno de los temas. Finalmente se da un ejemplo de cada una de las aplicaciones dirigido a sistemas físicos, y se plantea un ejercicio para determinar la comprensión del tema.

### **6.1. Aplicación 21 – Introducción al diseño y análisis**

Se inician las aplicaciones para esta sección de herramientas del análisis, dando una pequeña introducción a la importancia del análisis a la hora de diseñar un sistema. En la sección uno se explica que diseñar un sistema de control es obtener un sistema que cumpla determinadas especificaciones de funcionamiento. Esto se logra ajustando el elemento controlador dentro del sistema, y para eso se utilizan algunos parámetros ya mencionados.

Posteriormente en la sección dos de la aplicación, se determinan las herramientas que se utilizaran para poder ajustar el sistema, y así pueda realizar la tarea que se requiere. Se hace un fuerte énfasis en la importancia de la función de transferencia que será la principal herramienta, y se nombran los métodos de determinar la función de transferencia.

Figura 45. Panel frontal de la aplicación 21



Fuente: elaboración propia.

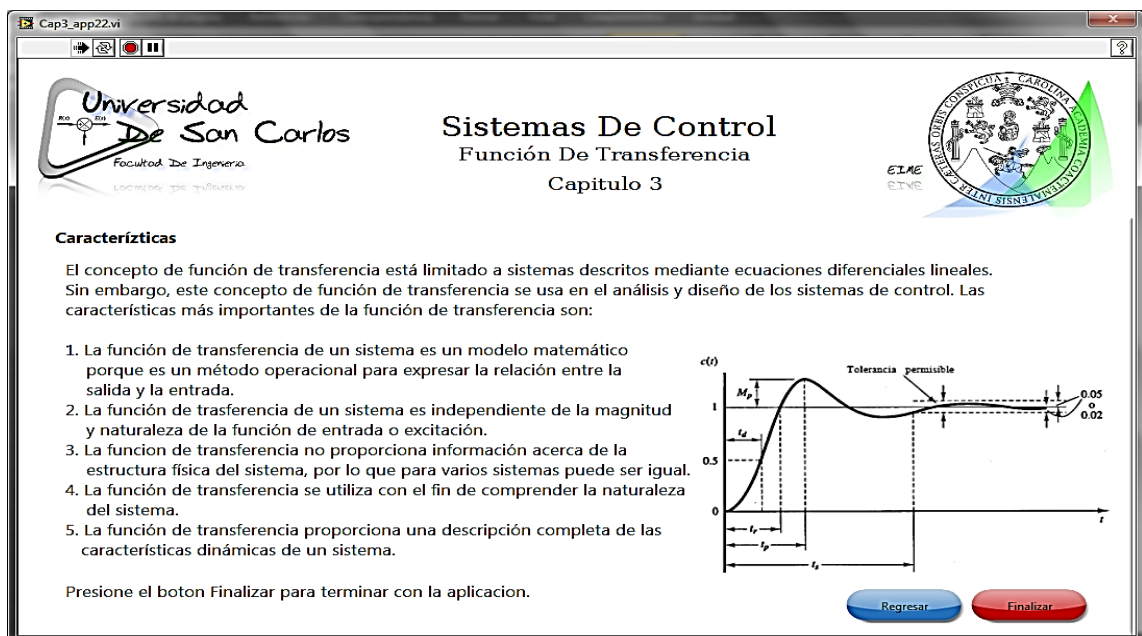
En la figura 45, se puede ver la sección tres de esta aplicación, en esta se muestra cómo se puede partir de un sistema físico, y como las herramientas, al ser aplicadas podrán servir para ir modelando dicho sistema. Posteriormente se planteara la función de transferencia que describa el comportamiento del sistema, por métodos específicos.

## 6.2. Aplicación 22 – Función de transferencia

Como se ha dicho al inicio del capítulo es casi imposible conocer la señal de entrada exacta para un sistema de control, por esta razón se usa la función de transferencia. Esta es la base de esta aplicación, en la sección uno se da un concepto concreto de la función de transferencia, como una herramienta capaz de determinar cómo se comportara el sistema ante cualquier entrada posible.

En la sección dos de esta aplicación se procede a dar una definición formal de la función de transferencia, la cual se expresa como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida, o función de respuesta y la transformada de Laplace de la entrada o función de excitación.

Figura 46. Panel frontal de la aplicación 22



Fuente: elaboración propia.



La sección tres, la cual se ver en la figura 46, presenta las características principales de la función de transferencia, principalmente describe su utilidad como un elemento que aunque se aplica únicamente a modelos descritos con ecuaciones diferenciales, su concepto se aplica a casi cualquier sistema, independientemente de cómo se modele dicho sistema.

### 6.3. Aplicación 23 – Ejemplos de funciones de transferencia

Esta aplicación muestra ejemplos básicos y los sistemas más utilizados en el control de servomecanismos. En las tres secciones se pueden ver modelos de elementos y sus funciones de transferencia, inicialmente se hace referencia a la aplicación 18, donde se plantearon ya algunos modelos. En la figura 47, se observa el panel frontal en la sección tres.

Figura 47. Panel frontal de la aplicación 23

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería

Sistemas De Control  
Ejemplos De Función De Transferencia  
Capitulo 3

Ejemplos

**Motor CC controlado por Inducido**

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{k_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + k_m k_n]}$$

**Tren De Engranajes**

$$\omega_L = \frac{N_1}{N_2} \omega_m$$

**Potenciómetro, Detector De Error**

$$V_2(s) = K_s (\Theta_1(s) - \Theta_2(s))$$

Presione el boton Finalizar para terminar con la aplicacion.

Regresar Finalizar

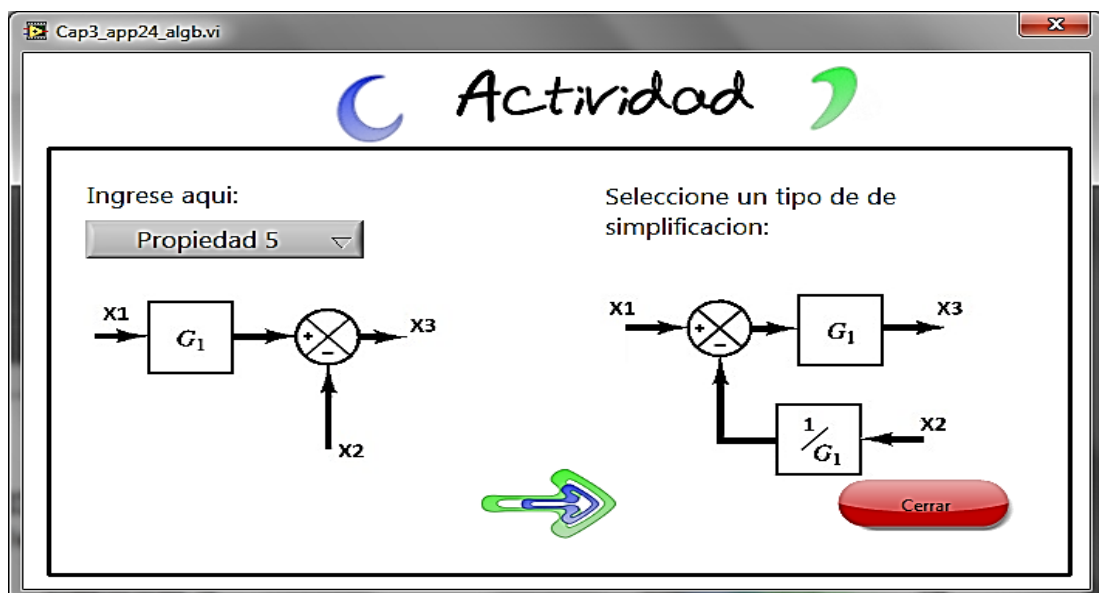
Fuente: elaboración propia.

#### 6.4. Aplicación 24 – Diagramas de bloques

Los diagramas de bloques como herramienta de análisis y diseño, son de gran importancia puesto que con estos los sistemas se modelan de forma gráfica, para comprender esto, esta aplicación en la sección uno determina la definición de un diagrama de bloques como una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente dentro de un sistema e introduce los elementos principales de un diagrama.

La sección dos de la aplicación está dirigida a la reducción de diagramas o simplificación. El fin de esta simplificación es obtener únicamente un bloque entre la entrada y la salida. Para poder simplificar se utiliza el álgebra de bloques, la cual es mostrada por medio de una actividad dirigida a escoger un esquema de bloques y su respectiva reducción, esto en la figura 48.

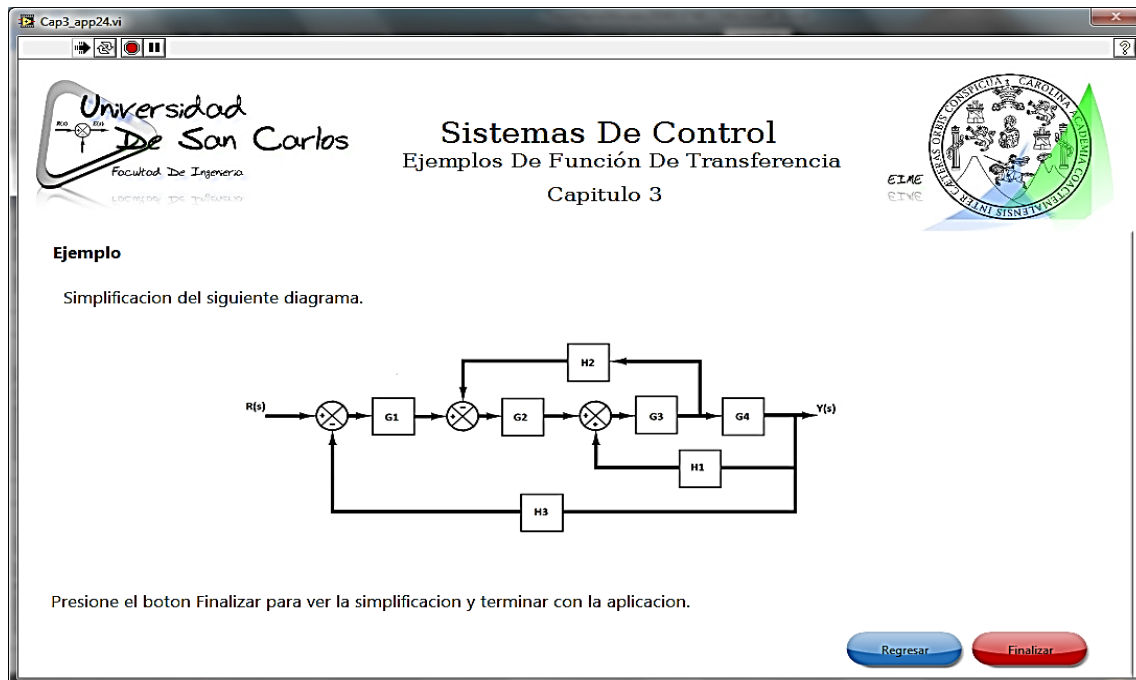
Figura 48. Panel frontal de la actividad álgebra de bloques



Fuente: elaboración propia.

Finalmente la sección tres de la aplicación muestra un ejemplo de cómo simplificar un diagrama. Muestra el diagrama completo y posteriormente en una actividad se puede visualizar los pasos para la simplificación, esto en la figura 49. Al terminar se obtiene un solo bloque que muestra la relación entre la entrada y la salida, es decir la función de transferencia.

Figura 49. Panel frontal de la aplicación 24



Fuente: elaboración propia.

## 6.5. Aplicación 25 – Ejercicios de diagramas de bloques

Esta aplicación es más sencilla y se basa en análisis complejos, inicialmente la sección uno de la aplicación muestra el ejercicio uno, en el cual se debe de simplificar un diagrama de bloques, y se muestra cada uno de los pasos que se utilizan para llegar a la representación más simple.

Luego de analizar cada paso seguido se debe determinar si la simplificación se realizó de forma correcta o no, indicándolo por medio de botones de selección. La sección dos de esta aplicación, figura 50, muestra otro ejercicio en el cual se aplica el concepto de las propiedades de los sistemas, pues se muestra un sistema con dos entradas. Después de haber analizado la estructura del sistema, se plantea la representación por superposición. Por lo tanto se debe determinar si es correcta esta aplicación de la propiedad, esto también por medio de botones de selección.

Figura 50. Panel frontal de la aplicación 25

Universidad De San Carlos  
Facultad De Ingeniería  
Luchando por el futuro

Sistemas De Control  
Ejercicios Diagramas De Bloques  
Capitulo 3

Ejercicio 2

Para el siguiente sistema la función de transferencia puede determinarse como:  
 $H(s) = Y1(s)/X(s) + Y2(s)/X(s)$

Si  No

Regresar Siguiente

Fuente: elaboración propia.

Finalmente en la sección tres de la aplicación el ejercicio es más directo, mostrando un sistema y una función de transferencia, en este ejercicio hay que determinar si la función de transferencia es correspondiente con el diagrama.

Para esto se debe de reducir el diagrama y así poder determinar si en efecto son o no correspondientes, esto nuevamente por medio de botones de selección, con esto finaliza la aplicación y se puede proceder con el siguiente tema.

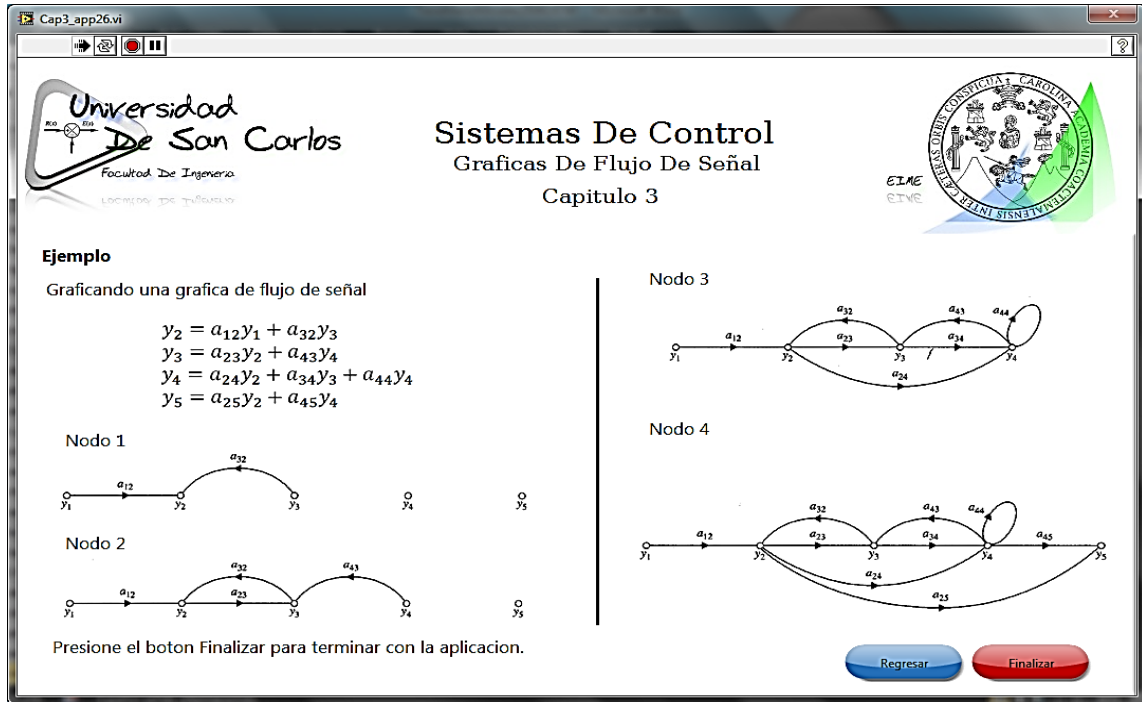
## **6.6. Aplicación 26 – Graficas de flujo de señal**

En la aplicación anterior se determinó la función de transferencia por medio de los diagramas de bloques, en esta aplicación la herramienta de análisis a utilizar para determinar la función de transferencia son las gráficas de flujo de señal. Esta se define en la sección uno, como un diagrama formado por nodos que se conectan mediante ramas, siendo una representación gráfica de un conjunto de relaciones lineales.

En la sección dos de esta aplicación posterior a la definición y elementos principales de las gráficas de flujo de señal, se muestran las propiedades de las gráficas, estas son útiles para simplificar las gráficas y así visualizar la gráfica de mejor forma. Como se muestra, a diferencia de los diagramas de bloques, la gráfica de flujo de señal no se puede reducir a un único segmento entre la entrada y la salida.

La sección tres de la aplicación, la cual se observa en la figura 51, muestra cómo se construye la gráfica de flujo de señal a partir de las ecuaciones de estado de un sistema. Como se puede ver, por cada variable del sistema de ecuaciones se ubica un nodo en la gráfica, posteriormente se hacen las uniones correspondientes de acuerdo a los signos y ganancias de cada variable del sistema.

Figura 51. Panel frontal de la aplicación 26

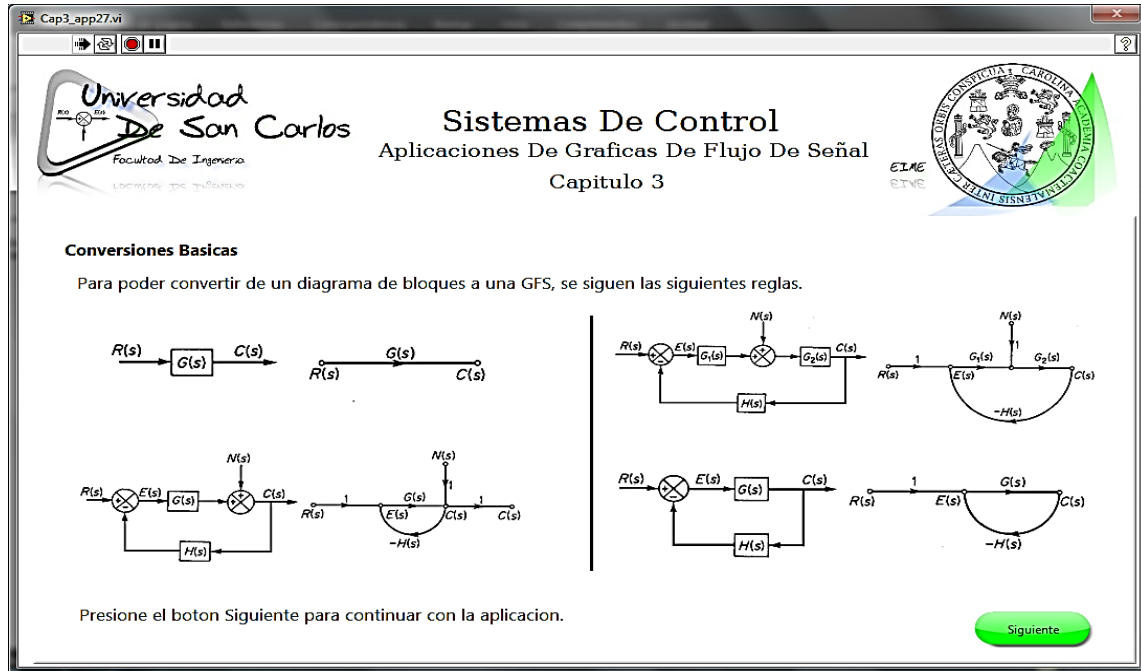


Fuente: elaboración propia.

## 6.7. Aplicación 27 – Aplicaciones de graficas de flujo de señal

Una característica muy importante de las herramientas de análisis que se han presentado, es la transformación entre ambas, es decir poder convertir un diagrama de bloques a una gráfica de flujo de señal y viceversa. En la sección uno de esta aplicación este es el concepto que se presenta, el de transformación entre gráficas y para esto se muestran los casos básicos de transformación. El panel frontal en esta sección de la aplicación se puede ver en la figura 52, en este se muestra cada caso y su equivalente, con el caso más simple y casos de estructuras con dos entradas.

Figura 52. Panel frontal de la aplicación 27



Fuente: elaboración propia.

La sección dos de esta aplicación trata de detallar el método de aplicación de las gráficas de flujo de señal, es decir la fórmula de Mason también conocida como fórmula de la ganancia, como un método para encontrar la relación entre dos variables, es decir la función de transferencia, por medio de relaciones lineales en los lazos de la gráfica.

La aplicación de la fórmula de Mason a las gráficas de flujo de señal puede requerir un análisis complejo, para esto la sección tres de la aplicación muestra un ejemplo de cómo se aplica la fórmula paso a paso, para poder visualizar de forma fácil como se obtiene cada elemento de la fórmula y como se aplica. La actividad que hace esto se muestra en la figura 53.

Figura 53. Panel frontal de actividad de graficas de flujo

The screenshot shows a software application window with the title bar 'Cap3\_app27\_FTG.vi'. The main content area is titled 'Actividad' in a stylized font. Below the title is a block diagram of a control system. The input is  $R(s)$  and the output is  $C(s)$ . The forward path consists of three blocks in series:  $G_1$ ,  $G_2$ , and  $G_3$ . There are three feedback loops:  $H_1$  (a negative feedback loop around  $G_1$  and  $G_2$ ),  $H_2$  (a negative feedback loop around  $G_2$  and  $G_3$ ), and a third loop (a negative feedback loop around  $G_1$ ,  $G_2$ , and  $G_3$ ). The gain of the third loop is indicated as  $-1$ .

Existen tres lazos, cuyas ganancias son:

$$L_1 = G_1 G_2 H_1$$
$$L_2 = -G_2 G_3 H_2$$
$$L_3 = -G_1 G_2 G_3$$

Pasos: Siguiente Cerrar

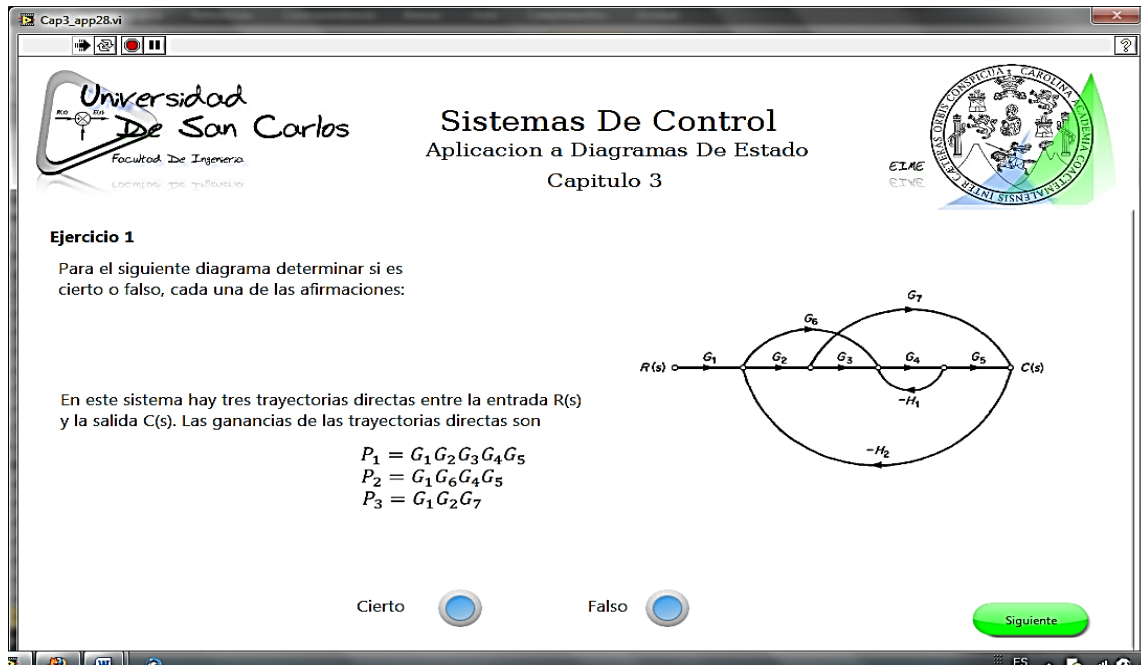
Fuente: elaboración propia.

## 6.8. Aplicación 28 – Aplicación a diagramas de estado

Como principal utilidad de las gráficas de flujo de señal se ha mencionado que esta el determinar la función de transferencia, pero esto únicamente se hace cuando la gráfica es un diagrama de estado, es decir las ganancias del sistema son las funciones de transferencia de los bloques en un sistema. Este es el fin de esta aplicación, mostrar por medio de un ejemplo en términos de ecuaciones de estado simbólicas, la construcción de la función de transferencia, verificando en cada paso, si los elementos determinados están correctamente escritos, o si poseen errores.



Figura 54. Panel frontal de la aplicación 28



Fuente: elaboración propia.

En la figura anterior se puede ver la sección uno de esta aplicación, de igual forma en las secciones dos y tres, se plantea una pregunta sobre el análisis de la gráfica de flujo de señal, en cada una se debe determinar si es correcto o no el planteamiento, esto por medio de botones de selección. Finalmente si se seleccionan las opciones correctas, se finaliza la aplicación y los temas del capítulo.

## CONCLUSIONES

1. El desarrollo de la tecnología en los sistemas de control, es un tema que avanza rápidamente, a pesar de esto, para cualquier sistema de control no importando el tipo que este sea, la señal que manipula o sus componentes, la teoría básica siempre se fundamenta en conceptos matemáticos y modelos de análisis, que sirven para determinar sus características de funcionamiento.
2. Hoy en día, gracias a las aplicaciones de *software* para modelos de sistemas de control, y en este caso, particularmente LabView, se puede modelar los sistemas de forma sencilla, logrando obtener resultados prácticamente reales.
3. Por medio de LabView se logran resultados altamente confiables, pues este, además de poder modelar el sistema físico ideal, proporciona la capacidad de agregar al modelo cualquier tipo de señal que pueda afectar el funcionamiento del sistema.
4. Al concluir el trabajo de graduación se ha logrado determinar que por medio de ejemplos y ejercicios simples, que muestran de forma gráfica los tipos de sistemas y sus elementos, referidos a los sistemas de control, se facilita la familiarización con los términos y sus definiciones. Esto permite comprender la base de análisis de sistemas de control, de una mejor forma y más rápidamente. Obteniendo como principal resultado la capacidad de comprender de igual forma, temas más complejos, ya sea de análisis o de diseño de sistemas automáticos de control.



## RECOMENDACIONES

1. Al ser este un trabajo de naturaleza didáctica, su principal objetivo está en proporcionar una ayuda a los estudiantes para comprender de mejor manera cada uno de los temas. Por lo tanto, se debe aprovechar este tipo de herramientas y expandirlo a cursos que al igual que sistemas de control, contengan temas de tipo abstracto, pero que al complementar gráficamente permiten su mejor comprensión.
2. Cada una de las aplicaciones y prácticas diseñadas, para los temas vistos en este trabajo no entra a explicar cada tema en detalle, por lo tanto para una mayor comprensión de los mismos, se deben desarrollar más aplicaciones y ejercicios, manteniendo un esquema de dificultad en ascenso, iniciando con ejemplos introductorios y ejercicios con más complejidad.
3. Este sistema de aplicaciones y ejercicios, puede proporcionar una herramienta de evaluación para el curso, tomando una estadística de la cantidad de respuestas correctas que el estudiante selecciona. Con base a esto se debe implementar un sistema de adquisición de datos para las aplicaciones, y así poder generar una base de usuarios y notas obtenidas.



## BIBLIOGRAFÍA

1. BITTER, Rick. *LabVIEW Advanced programming T techinques*. Estados Unidos: CRC Press, 2001. 1250 p.
2. DORF, Richard. *Sistemas de control moderno*. 3ª ed. España: Pearson Educación, 2005. 550 p.
3. KRING, Jim. *LabVIEW for Everyone: graphical programming made easy and fun*. 3ª ed. Estados Unidos: Prentice Hall, 2006. 700 p.
4. KUO, Benjamín. *Sistema de control automático*. 7ª ed. México: Prentice Hall, 2008. 950 p.
5. OGATA, Katsuhiko. *Ingeniería de control moderna*. 3ª ed. España: Pearson Educación, 1998. 720 p.
6. SHINSKEY, Frederick. *Sistemas de control de procesos*. México: McGraw-Hill, 1996. 400 p.

