



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

**DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR  
EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS  
CUADRADOS, EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO**

**Pablo Andres Chávez Orellana**

Asesorado por el Ing. Guillermo Antonio Puente Romero

Guatemala, abril de 2013

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR  
EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS  
CUADRADOS, EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**PABLO ANDRES CHÁVEZ ORELLANA**

ASESORADO POR EL ING. GUILLERMO ANTONIO PUENTE ROMERO

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO ELECTRÓNICO**

GUATEMALA, ABRIL DE 2013

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
VOCAL V	Br. Sergio Alejandro Donis Soto
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Carlos Eduardo Guzmán Salazar
EXAMINADOR	Ing. Romeo Nefalí López Orozco
EXAMINADOR	Ing. José Aníbal Silva de los Ángeles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS CUADRADOS, EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, con fecha 11 de noviembre de 2010.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Pablo Andres Chávez Orellana', with a stylized flourish at the end.

**Pablo Andres Chávez Orellana**

Guatemala, 16 de noviembre de 2012.

Ing. Carlos Eduardo Guzmán Salazar  
Coordinador de Área de Electrónica  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería, USAC.

Ingeniero Guzmán:

Por este medio me permito dar aprobación al Trabajo de Graduación titulado: "DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS CUADRADOS, EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO", desarrollado por el estudiante Pablo Andres Chávez Orellana con carné No. 2006-11350, ya que considero que cumple con los requisitos establecidos, por lo que el autor y mi persona somos responsables del contenido y conclusiones del mismo.

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarlo.

Atentamente,



Ing. Guillermo Antonio Puente Romero  
ASESOR  
Colegiado 5898

*Guillermo A. Puente R.*  
INGENIERO ELECTRONICO  
COL. # 5898

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERIA

Ref. EIME 63. 2013.

Guatemala, 28 de NOVIEMBRE 2012.

Señor Director  
Ing. Guillermo Antonio Puente Romero  
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Facultad de Ingeniería, USAC.

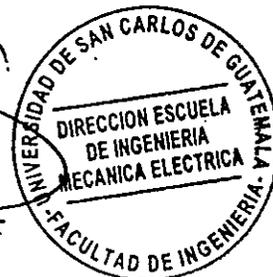
Señor Director:

**Me permito dar aprobación al trabajo de Graduación titulado:  
“DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA  
DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL  
MUESTREO MEDIANTE PULSOS CUADRADOS, EN UNA SEÑAL  
ANALÓGICA DE AUDIO”, del estudiante Pablo Andrés Chávez  
Orellana, que cumple con los requisitos establecidos para tal fin.**

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarle.

Atentamente,  
**ID Y ENSEÑAD A TODOS**

Ing. Carlos Eddardo Guzmán Salazar  
Coordinador Área Electrónica



CEGS/sro

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA**



**FACULTAD DE INGENIERIA**

REF. EIME 02. 2013.

**El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Área, al trabajo de Graduación del estudiante; PABLO ANDRÉS CHÁVEZ ORELLANA titulado: "DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS CUADRADOS, EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO", procede a la autorización del mismo.**

**Ing. Guillermo Antonio Puente Romo**



**GUATEMALA, 6 DE FEBRERO 2,013.**



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica al trabajo de graduación titulado: **DISEÑO DE UN SISTEMA EN MATLAB® PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA DEBIDO AL MUESTREO MEDIANTE PULSOS CUADRADOS EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO**, presentado por el estudiante universitario **Pablo Andrés Chávez Orellana**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphly Olympo Paiz Recinos  
Decano

Guatemala, abril de 2013



## **ACTO QUE DEDICO A:**

<b>Dios</b>	Por acompañarme siempre y sin Él nada me abría sido posible.
<b>Mi familia</b>	Por su apoyo incondicional.
<b>Mi asesor</b>	Por su consejo y ayuda en la realización de este trabajo.
<b>Universidad de San Carlos de Guatemala</b>	Por darme la oportunidad de asistir a tan grande casa de estudios.

## **AGRADECIMIENTOS A:**

<b>Dios</b>	Por acompañarme siempre y sin Él nada me habría sido posible.
<b>Mi familia</b>	Por su apoyo incondicional.
<b>Mi asesor</b>	Por su consejo y ayuda en la realización de este trabajo.
<b>Universidad de San Carlos de Guatemala</b>	Por darme la oportunidad de asistir a tan grande casa de estudios.

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	V
LISTA DE SÍMBOLOS.....	VII
GLOSARIO.....	IX
RESUMEN.....	XIII
OBJETIVOS.....	XV
INTRODUCCIÓN.....	XVII
1. MUESTREO DE SEÑALES ANALÓGICAS DE AUDIO.....	1
1.1. Características de las señales analógicas.....	1
1.1.1. Señales analógicas de audio.....	2
1.2. Análisis de Fourier.....	2
1.2.1. Series de Fourier.....	2
1.2.2. Transformada de Fourier.....	4
1.3. Convolución.....	7
1.4. Muestreo.....	8
1.4.1. Teorema del Muestreo.....	8
1.4.2. Muestreo natural.....	14
1.4.3. Muestreo mediante pulsos cuadrados.....	17
1.4.3.1. Ecuación.....	24
2. TRATAMIENTO DE LA SEÑAL EN TIEMPO DISCRETO.....	27
2.1. Señales en tiempo discreto.....	27
2.2. Sistemas en tiempo discreto.....	30
2.2.1. Linealidad.....	31
2.2.2. Invariabilidad en el tiempo.....	32
2.2.3. Causalidad.....	32
2.2.4. Estabilidad.....	32

2.3.	Sistemas lineales e invariantes en el tiempo .....	33
2.3.1.	Sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo .....	33
2.4.	Análisis de Fourier de señales en tiempo discreto.....	35
2.4.1.	Transformada de Fourier en tiempo discreto .....	35
3.	ALGUNAS FUNCIONES DE MATLAB® PARA EL TRATAMIENTO DE SEÑALES .....	37
3.1.	Funciones para adquisición y exportación de archivos de audio .....	37
3.1.1.	wavread.....	38
3.1.2.	wavwrite .....	38
3.2.	Funciones para el cómputo de la transformada de Fourier en tiempo discreto y su representación .....	39
3.2.1.	fft e ifft .....	39
3.2.2.	fftshift.....	40
3.2.3.	unwrap .....	41
4.	DISEÑO DEL ALGORITMO DEL SISTEMA PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO.....	43
4.1.	Consideraciones para la implementación del sistema .....	43
4.1.1.	Muestreo y retención .....	44
4.1.2.	Avance temporal.....	45
4.2.	Ecuación para el efecto de apertura en tiempo discreto.....	47
4.3.	Diagrama de bloques del sistema .....	49
4.4.	Diagrama de flujo .....	50
4.5.	Algoritmo.....	52
5.	CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA .....	57
5.1.	Propiedades del sistema.....	57
5.2.	Respuesta a señales relevantes .....	61

5.2.1.	Respuesta a un impulso.....	62
5.2.2.	Respuesta a un escalón.....	65
5.2.3.	Respuesta a una señal de ruido rosa.....	67
5.3.	Análisis de la exactitud de la función de transferencia .....	69
5.4.	Percepción del oído y efecto del sistema.....	70
5.4.1.	Curvas de nivel de igual percepción.....	71
5.4.2.	Armónicos.....	72
5.4.3.	Aporte según la percepción del oído humano .....	73
CONCLUSIONES.....		77
RECOMENDACIONES.....		79
BIBLIOGRAFÍA.....		81



# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Señal arbitraria de energía finita .....	9
2.	Secuencia de pulsos con duración $dt$ .....	10
3.	Representación de una señal continua mediante muestras instantáneas.....	11
4.	Aplicación de un filtro pasa bajo ideal, con frecuencia de corte $f_m$ .....	12
5.	Espectro de la señal $m(t)$ .....	13
6.	Espectro de la señal muestreada $m(t)s(t)$ para $T_s = 1/2f_m$ .....	13
7.	Señal de pulsos cuadrados con duración $\tau$ .....	15
8.	Muestreo natural .....	16
9.	Señal muestreada mediante pulsos cuadrados .....	19
10.	a) Magnitud de $H(f)$ . b) Fase de $H(f)$ .....	23
11.	a) Magnitud de $H_i(f)$ . b) Fase de $H_i(f)$ .....	26
12.	Representación de una señal continua mediante muestras instantáneas.....	28
13.	Representación gráfica de la función impulso en tiempo discreto .....	29
14.	Representación de un sistema en tiempo discreto .....	30
15.	Muestreo y retención.....	45
16.	Procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo .....	49
17.	Diagrama de bloques del sistema .....	50
18.	Diagrama de flujo del sistema .....	51
19.	Señal senoidal con frecuencia igual a 4 kHz .....	59
20.	Señal senoidal con frecuencia igual a 8 kHz .....	59
21.	Salida para la señal senoidal de 4 kHz.....	60

22.	Salida para la señal senoidal de 8 kHz .....	60
23.	Salida para la señal senoidal resultante de la suma .....	61
24.	Entrada de un impulso unitario al sistema .....	63
25.	Salida del sistema a un impulso unitario .....	64
26.	Entrada de un escalón unitario al sistema .....	65
27.	Salida del sistema a una entrada escalón unitario .....	66
28.	Entrada de una señal de ruido rosa al sistema .....	67
29.	Salida del sistema a una señal de ruido rosa.....	68
30.	Curvas de nivel de igual percepción .....	72

## **TABLAS**

I.	Exactitud de la respuesta en frecuencia .....	70
II.	Comparación de la respuesta en frecuencia .....	74

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\arg\{\}$	Ángulo de fase de la cantidad compleja que está contenida dentro de él.
$\arctan$	Arcotangente
*	Convolución
$\delta$	Delta
$\Delta$	Diferencial
$senc$	Función seno cardinal
$\infty$	Infinito
$\int$	Integral
$\pm$	Más menos
$\geq$	Mayor o igual que
$\leq$	Menor o igual que
$<$	Menor que
$\Omega$	Omega mayúscula (frecuencia angular en tiempo continuo)
$\omega$	Omega minúscula (frecuencia angular en tiempo discreto)
$\pi$	Pi
$j$	Raíz cuadrada de -1
$\Sigma$	Sumatoria
$\tau$	Tau
$\theta$	Theta
$\rightarrow$	Tiende a

$T$	Transformación
$F\{\}$	Transformada de Fourier
$F^{-1}\{\}$	Trasformada inversa de Fourier
$  $	Valor absoluto

## **GLOSARIO**

<b>Acotar</b>	Delimitar el ámbito o espacio de algo.
<b>Acústico</b>	Perteneciente o relativo al órgano del oído.
<b>Aleatorio</b>	Proceso cuyo resultado no es previsible más que en razón de la intervención del azar.
<b>Algoritmo</b>	Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.
<b>Analógico</b>	Dicho de un aparato o de un instrumento de medida: que la representa mediante variables continuas, análogas a las magnitudes correspondientes.
<b>Cantidad Continua</b>	La que consta de unidades o partes que no están separadas unas de otras, como la longitud de una línea, el área de una superficie, el volumen de un sólido, la cabida de un vaso, etc.
<b>Cantidad Discreta</b>	La que consta de unidades o partes separadas unas de otras, como los árboles de un monte, los soldados de un ejército, los granos de una espiga, etc.

<b>Cuantización</b>	Es un proceso que interviene en la digitalización de señales mediante el cual se agrupan los posibles valores infinitos de una señal analógica en un conjunto finito de posibles valores.
<b>Escalamiento</b>	La multiplicación por un escalar.
<b>Escalar</b>	Número real o complejo que consta de una magnitud, sin la característica vectorial de dirección.
<b>Espectro</b>	Distribución de la intensidad de un fenómeno físico en función de la frecuencia.
<b>Fase</b>	Es el ángulo que acompaña a la magnitud en una cantidad vectorial
<b>Frecuencia</b>	Número de veces que se repite un proceso periódico por unidad de tiempo.
<b>Función</b>	Relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno.
<b>Función Trigonométrica</b>	Función que se define para extender la definición de las razones trigonométricas.

<b>Hertz</b>	Unidad de frecuencia del Sistema Internacional, que equivale a la frecuencia de un fenómeno cuyo período es un segundo.
<b>Homogeneidad</b>	Cualidad de homogéneo.
<b>Magnitud</b>	Propiedad física que puede ser medida.
<b>Matriz</b>	Conjunto de números o símbolos algebraicos colocados en líneas horizontales y verticales y dispuestos en forma de rectángulo.
<b>Multiplexación</b>	Transmisión de varias señales diferentes por un mismo canal.
<b>Número Complejo</b>	El que se compone de la suma de un número real y otro imaginario.
<b>Número Imaginario</b>	El que se produce al extraer la raíz cuadrada de un número negativo.
<b>Octava</b>	Es el rango de frecuencias entre dos notas musicales que están separadas por una relación de dos a uno.
<b>Periodo</b>	Tiempo que le toma a una función o señal repetitiva recorrer una de sus fases.
<b>Sonoro</b>	Que suena o puede sonar.

**Tono puro**

Es el sonido producido por un senoidal simple.

**Vector**

Toda magnitud en la que, además de la cuantía, hay que considerar el punto de aplicación, la dirección y el sentido.

## RESUMEN

Actualmente el estudio del procesamiento de señales de audio y su campo de aplicación es muy amplio. En este trabajo se incluyen los principios del muestreo de señales, se estudia el efecto de apertura en una señal analógica de audio, sus causas y características, para esto se analiza el muestreo mediante pulsos cuadrados, que es el proceso en específico durante el cual se ingresa dicha distorsión, a partir de esto se encuentra la respuesta en frecuencia del sistema para minimizar el efecto de apertura.

También se incluyen los principios de las señales y los sistemas discretos y se muestran las herramientas del software que son útiles para el tratamiento de señales.

Para obtener el sistema en tiempo discreto que cumpla con la respuesta en frecuencia necesaria para minimizar la distorsión por efecto de apertura, se diseña una que pueda implementarse en un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo; con base a esta se diseña un algoritmo, de tal manera que cumpla con los objetivos del sistema, que pueda ser llevado a cabo y además sea eficiente.

También se comprueban las características propias del sistema que se implemento y sus propiedades, algunas se obtienen introduciendo señales particulares que ayudan a comprobarlas. Se incluyen características de la percepción del oído humano y con base en estas se evalúa el aporte del sistema para mejorar la calidad de audio que se procesa.



# OBJETIVOS

## General

Diseñar un sistema digital en Matlab®, que minimice la distorsión que se introduce en una señal analógica de audio al muestrearla mediante pulsos cuadrados.

## Específicos

1. Presentar los fundamentos del muestreo de señales analógicas de audio.
2. Presentar los fundamentos de tratamiento de señales en tiempo discreto y diseñar una función de transferencia para el SIMDEA (Sistema para Minimizar la Distorsión por Efecto de Apertura).
3. Presentar algunas funciones de Matlab® que serán de utilidad en este trabajo para el tratamiento de señales en tiempo discreto.
4. Obtener un algoritmo que permita minimizar la distorsión por efecto de apertura en el tipo de señal analizada, basado en el diseño matemático obtenido.
5. Caracterizar el sistema diseñado, comparando el espectro de la señal antes y después de aplicar el sistema.



## INTRODUCCIÓN

El procesamiento digital de señales es un campo muy desarrollado, tuvo un crecimiento acelerado a partir de la invención del algoritmo para la transformada rápida de Fourier y con los procesadores digitales de señales en los 80's, y el papel que juega hoy en día en las tecnologías de la información y comunicación es muy grande. La digitalización de las señales de audio es el primer paso para ser utilizadas o transmitidas a través de sistemas digitales y en este proceso, es donde interviene el muestreo mediante pulsos cuadrados, que es la técnica que se utiliza para digitalizar señales de audio.

Se busca en todo sistema que sea tan fiel como sea posible, y los sistemas de audio, almacenamiento y transmisión de este no son la excepción. Durante la digitalización de señales de audio utilizando muestreo mediante pulsos cuadrados se introduce el efecto de apertura, esta es la distorsión que se desea minimizar en este trabajo y para ello se utiliza el software Matlab®, que tiene una gran cantidad de herramientas para trabajar en el procesamiento de señales.

Se utiliza el término minimizar ya que los sistemas, analógicos o digitales tienen limitaciones, se estudiará como se puede minimizar o eliminar si es posible el efecto de apertura y se tomarán en cuenta la complejidad, las ventajas y desventajas, para que la implementación del sistema sea factible, considerando especialmente que una de las necesidades de una gran cantidad de los sistemas de procesamiento digital de señales de audio, es que debe ser en tiempo real.



# **1. MUESTREO DE SEÑALES ANALÓGICAS DE AUDIO**

El muestreo es un proceso que permite la multiplexación de señales, como también su digitalización, es de especial interés el muestreo de señales analógicas de audio, es decir aquellas que el oído humano puede percibir.

## **1.1. Características de las señales analógicas**

Una señal generalmente se refiere a algo que proporciona información, puede proporcionar la información acerca de un fenómeno o pueden sintetizarse para transmitir cierta información. Como por ejemplo las variaciones en la bolsa de valores, un electrocardiograma, la velocidad del viento a lo largo de un día, una señal de voz. Una señal se puede representar matemáticamente como una función de una o más variables.

Las variables mediante la que se representa una señal pueden ser continuas o discretas, al ser estas continuas se les llama señales continuas, o señales analógicas, estas se caracterizan por ser análogas o parecidas al fenómeno físico que representan, son representadas de forma continua, tomando cualquier valor, es decir, que no están limitados a un conjunto finito de valores.

Por otro lado cuando las variables con las que se representa una señal son discretas, los valores que toman las variables son discretos, es decir que son discontinuos en el tiempo, y están limitados a un conjunto finito de valores.

### **1.1.1. Señales analógicas de audio**

Es a través del sentido del oído o audición que el ser humano percibe el sonido, este tiene ciertas limitaciones dentro de las que puede percibirlo, una de estas limitaciones es el rango de frecuencias que es capaz de distinguir, este va de 16 hz a 20 000 hz.

## **1.2. Análisis de Fourier**

Este es un análisis matemático, mediante el cual una función, puede ser representada por funciones trigonométricas, este en un aporte de Joseph Fourier, un matemático francés, se utilizó inicialmente para estudiar la propagación del calor; actualmente tiene aplicaciones en una diversidad de áreas, una de ellas es el análisis de señales.

En el análisis de señales, mediante el análisis de Fourier se puede determinar el contenido espectral de dichas señales, es decir, el comportamiento de la señal en el dominio de la frecuencia, lo cual resulta muy útil en este campo.

### **1.2.1. Series de Fourier**

Una serie de Fourier descompone una función periódica, en una combinación lineal de senos y cosenos, o en otros casos suelen expresarse mediante exponenciales, en general complejos, por ser conveniente para representar algunas propiedades de interés en las señales.

Se puede expresar también mediante una serie de Fourier una función definida únicamente para un intervalo finito, acotando la serie obtenida para que concuerde con el intervalo en el que está definida la función.

Una función periódica  $v(t)$ , con periodo  $T_0$  puede ser representada de la forma:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_0} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n t}{T_0} \right) \quad (1.1)$$

En donde  $n$  es un número real entero y

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) dt \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \cos \frac{2\pi n t}{T_0} dt \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi n t}{T_0} dt \quad (1.4)$$

También puede ser representada como:

$$v(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left( \frac{2\pi n t}{T_0} + \theta_n \right) \quad (1.5)$$

Donde  $C_0$ ,  $C_n$  y  $\theta_n$  están relacionados con  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la forma

$$C_0 = a_0 \quad (1.6)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1.7)$$

$$\theta_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (1.8)$$

Mediante la identidad de Euler se puede expresar la ecuación 1.1 como:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{-j2\pi nt/T_0} \quad (1.9)$$

En donde:

$$V_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (1.10)$$

En la ecuación 1.9, los valores de  $V_n$  representan la amplitud espectral de  $v(t)$  en una representación para frecuencias positivas y negativas, mientras que la ecuación 1.5, los valores de  $C_n$  representan las amplitudes espectrales en una representación para frecuencias positivas únicamente.

### 1.2.2. Transformada de Fourier

Mediante la Transformada de Fourier se puede analizar una función no periódica. Los componentes espectrales que se encuentran en la representación mediante una serie de Fourier están separados por intervalos fijos, definidos para múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $f_0 = 1/T_0$ , como se puede apreciar en la ecuación 1.9. Si se considera que  $T \rightarrow \infty$ , entonces  $\Delta \rightarrow 0$ , esto es, los intervalos de tiempo para los que están definidos los componentes de la Serie de Fourier tienden a cero conforme el período de

la función tiende a infinito. Para una transformada de Fourier la representación espectral de la función que ha sido descompuesta es continua. La transformada de Fourier se denota mediante  $V(f) = F\{v(t)\}$ .

La transformada de Fourier de una función no periódica  $v(t)$ , es:

$$V(f) = F\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi t/T} dt \quad (1.11)$$

Esta es en general compleja, y se puede expresar de forma rectangular

$$V(f) = V_R(f) + jV_I(f) \quad (1.12)$$

En donde  $V_R(f)$  es la parte real de  $V(f)$  y  $V_I(f)$  es la parte imaginaria  $V(f)$ . También se puede expresar en forma polar

$$V(f) = |V(f)|e^{-j\theta 2\pi f} \quad (1.13)$$

En donde  $|V(f)|$  es la magnitud de  $V(f)$  y  $\theta$  es la fase de  $V(f)$ .

La transformada inversa de Fourier, con la que se puede determinar  $v(t)$ , a partir de  $V(f)$ , se denota como  $V(f) = F^{-1}\{v(t)\}$ .

$$v(t) = F^{-1}\{V(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)e^{j2\pi t/T} dt \quad (1.14)$$

La transformada de Fourier tiene varias propiedades, una de ellas es la propiedad de corrimiento en el tiempo, es de especial interés en este trabajo por lo que se explica a continuación:

Si

$$F\{v(t)\} = V(f) \quad (1.15)$$

Entonces:

$$F\{v(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} V(f) \quad (1.16)$$

Que se puede escribir también como:

$$F\{v(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} F\{v(t)\} \quad (1.17)$$

En la que la variable  $t$  representa el tiempo y  $t_0$  una constante. Esta propiedad expresa que un corrimiento en la función  $v(t)$ , de  $t_0$ , esto es  $v(t - t_0)$ , resultará en la trasformada de Fourier de  $v(t)$  multiplicada por el factor  $e^{-j2\pi f t_0}$ . El efecto que este corrimiento tiene en la trasformada de Fourier se puede apreciar mejor si se expresa esta en forma polar, combinando la ecuación 1.13 y la 1.16 se obtiene:

$$F\{v(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} |V(f)| e^{-j\theta 2\pi f} \quad (1.18)$$

Que se puede escribir como:

$$F\{v(t - t_0)\} = |V(f)| e^{-j2\pi(\theta + t_0)f} \quad (1.19)$$

Donde se puede observar que el efecto del corrimiento en el tiempo de una señal produce un corrimiento en la fase de su trasformada de Fourier.

### 1.3. Convolución

La convolución es una operación, que se denota con el símbolo  $*$ , si se tienen dos funciones  $v_1$  y  $v_2$ , la convolución de ellas es:

$$v_1(t) * v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)v_2(t - \tau)d\tau \quad (1.20)$$

O análogamente:

$$v_1(t) * v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_2(\tau)v_1(t - \tau)d\tau \quad (1.21)$$

Sean  $V_1(f)$  y  $V_2(f)$  las Transformadas de Fourier de  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  respectivamente, el teorema de convolución expresa que:

$$F\{v_1(t) * v_2(t)\} = F\{v_1(t)\}F\{v_2(t)\} \quad (1.22)$$

Que puede escribir como:

$$F\{v_1(t) * v_2(t)\} = V_1(f)V_2(f) \quad (1.23)$$

El teorema de convolución expresa que el resultado de realizar la operación de convolución entre dos funciones en el dominio del tiempo, es la multiplicación de sus transformadas de Fourier; desde el punto de vista del análisis de señales, la convolución de dos señales en el dominio del tiempo, es el equivalente a la multiplicación de los espectros de frecuencia de dichas señales, de forma análoga la multiplicación de dos señales en el dominio del

tiempo es el equivalente a la convolución de los espectros de frecuencia de dichas señales.

## **1.4. Muestreo**

El muestreo es una de los pasos que intervienen en la digitalización de señales, consiste en tomar muestras periódicas de la amplitud de una señal analógica, con un intervalo entre las muestras que puede ser o no constante, el primero es conocido como muestreo uniforme.

El muestreo está basado en el Teorema de Muestreo, también conocido como el Teorema de Nyquist-Shannon, este es considerado la base de las comunicaciones digitales.

### **1.4.1. Teorema del Muestreo**

El Teorema de Muestreo expresa que, dada una señal limitada en banda, con una frecuencia máxima  $f_m$ , de la que se toman muestras a una frecuencia uniforme  $f_s = 1/T_s$ , donde  $f_s \geq 2f_m$ , esta señal puede ser determinada exactamente, a partir de las muestras.

La característica que hace tan importante al Teorema de Muestreo para las comunicaciones digitales es que permite representar la señal de interés mediante una cantidad finita de muestras, en un intervalo finito, esto es la primera etapa de la conversión analógica a digital.

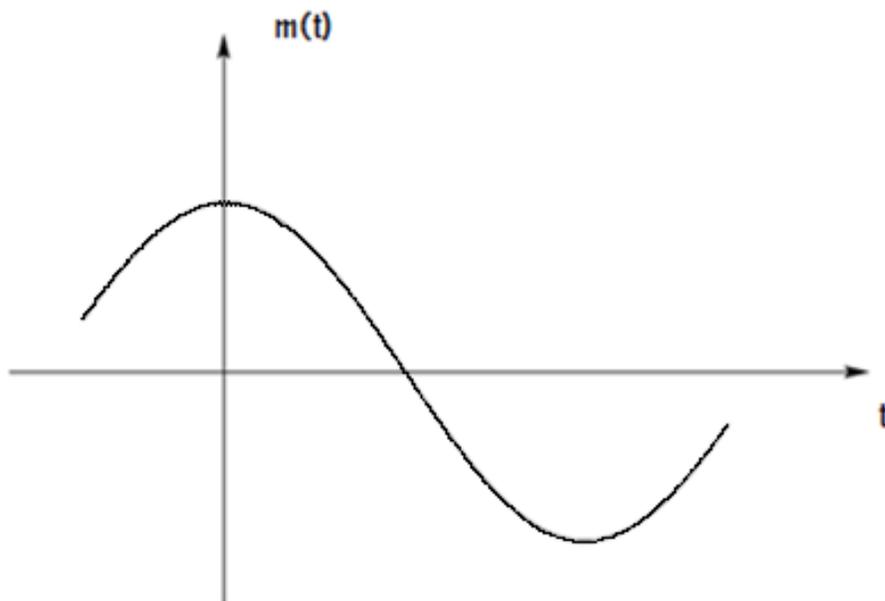
Como una forma de visualizar lo que expresa el Teorema de Muestreo, se presenta en la figura 1 una señal arbitraria de energía finita  $m(t)$ , limitada en banda a una frecuencia máxima  $f_m$ , esta puede ser muestreada con un tren de

pulsos, del que se supone que los pulsos tienen una duración infinitesimal  $dt$ , este se muestra en la figura 2.

La secuencia de pulsos puede ser representada como una serie de Fourier como sigue

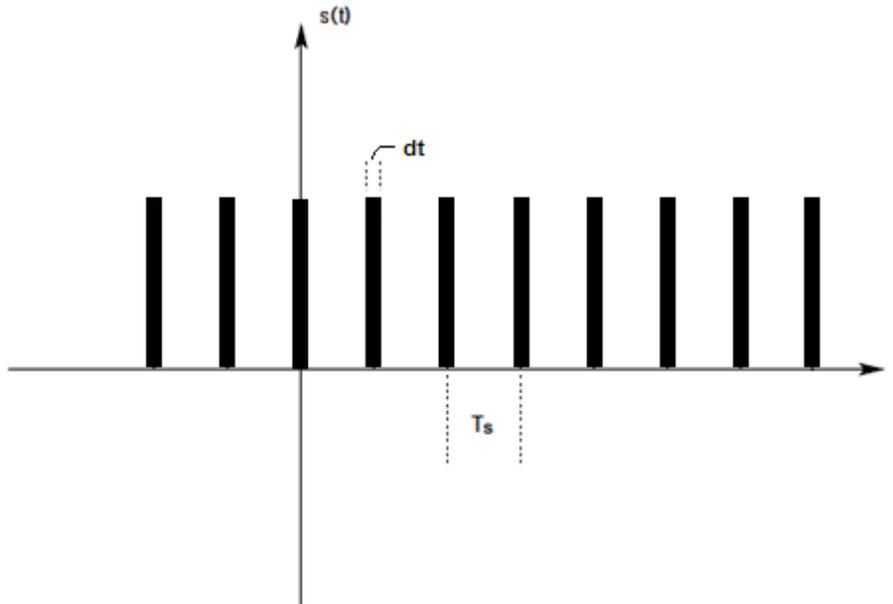
$$s(t) = \frac{dt}{T_s} + \frac{2dt}{T_s} \sum_1^{\infty} C_n \cos \frac{2\pi nt}{T_s} \quad (1.24)$$

Figura 1. **Señal arbitraria de energía finita**



Fuente: elaboración propia.

Figura 2. **Secuencia de pulsos con duración dt**



Fuente: elaboración propia.

Se muestran a continuación los primeros términos de la secuencia de pulsos:

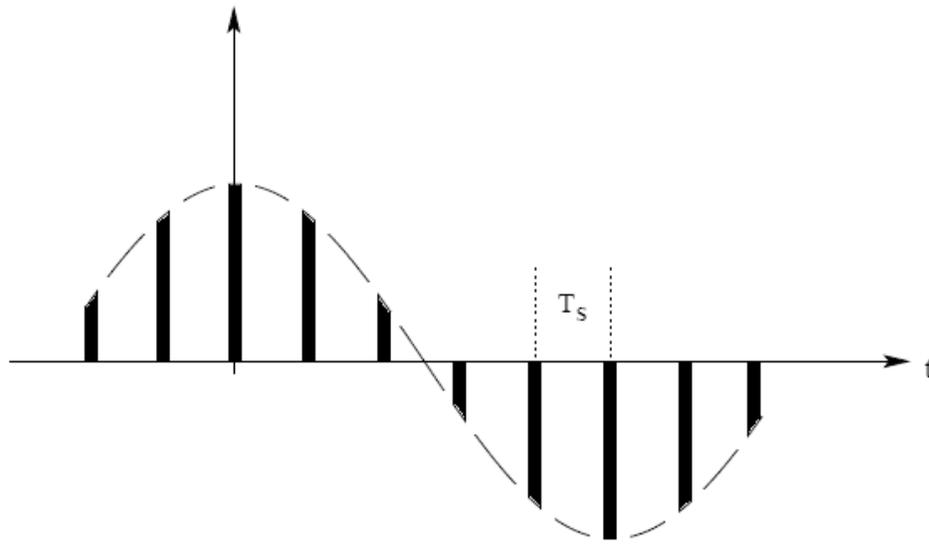
$$s(t) = \frac{dt}{T_s} + \frac{2dt}{T_s} \left( C_1 \cos 2\pi \frac{t}{T_s} + C_2 \cos 2 \left( 2\pi \frac{t}{T_s} \right) + \dots \right) \quad (1.25)$$

Para obtener una expresión que describa la señal de pulsos resultante al muestrear la señal  $m(t)$ , se hace:

$$g(t) = m(t)s(t) = m(t) \frac{dt}{T_s} + m(t) \frac{2dt}{T_s} \left( C_1 \cos 2\pi \frac{t}{T_s} + C_2 \cos 2 \left( 2\pi \frac{t}{T_s} \right) + \dots \right) \quad (1.26)$$

En la figura 3 se pueden observar las muestras, la línea punteada representa la señal  $m(t)$ .

Figura 3. **Representación de una señal continua mediante muestras instantáneas**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

Al tomar muestras de  $m(t)$ , para el caso especial en el que  $T_s = 1/2f_m$ , o sea que la frecuencia de muestreo, que es el inverso de período de muestreo, es exactamente el doble que la componente de frecuencia máxima de  $m(t)$ , esto es  $f_s = 2f_m$ .

Con  $T_s = 1/2f_m$ , sustituyendo se obtiene

$$g(t) = m(t) \frac{dt}{T_s} + m(t) 4f_m dt (C_1 \cos 2\pi t (2f_m) + C_2 \cos 2\pi t (4f_m) + \dots) \quad (1.27)$$

Si se toma la señal resultante  $g(t)$  y se pasa a través de un filtro pasa bajos ideal, que se muestra en la figura 4, con ganancia unitaria en la banda de paso, con una frecuencia de corte igual a la frecuencia máxima  $f_m$ , que es a la que está limitada  $m(t)$ , se observa en la ecuación 1.27 que el primer término de esta será el único presente luego de filtrar la señal, ya que los otros términos son múltiplos enteros de la frecuencia  $f_m$ , por lo que estos y los términos siguientes son eliminados por el filtro; entonces el resultado del proceso, a la salida del filtro, es la señal arbitraria original multiplicada por un factor de escala.

Figura 4. **Aplicación de un filtro pasa bajo ideal, con frecuencia de corte  $f_m$**



Fuente: elaboración propia.

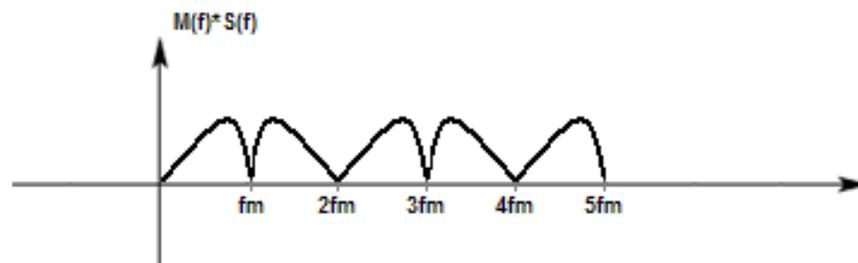
Dado que la señal muestreada es la multiplicación de dos señales dependientes del tiempo, según se vio en la sección 1.3, el resultado de esta multiplicación es la convolución de sus espectros de frecuencia. Si se considera el espectro de la señal arbitraria  $m(t)$ , es decir la transformada de Fourier de  $m(t)$ ,  $M(f)$ , como se muestra en la figura 5 y si se toman los coeficientes de la ecuación 1.24, que representan las amplitudes de los componentes espectrales de la secuencia de pulsos de duración  $dt$ , como se mencionó en la Sección 1.2.1. El resultado de la convolución entre ambas, para un período de muestreo  $T_s = \frac{1}{2f_m}$  se muestra en la figura 6.

Figura 5. **Espectro de la señal  $m(t)$**



Fuente: elaboración propia.

Figura 6. **Espectro de la señal muestreada  $m(t)s(t)$  para  $T_s = \frac{1}{2f_m}$**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 6 se puede observar lo que sucede al convolucionar el espectro de la señal  $m(t)$ , con el espectro de la secuencia de pulsos con duración  $dt$ ; el espectro de  $m(t)$  se reproduce alrededor de los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo  $f_s$ , que en este caso particular cumple con ser igual a dos veces la componente máxima del espectro de  $m(t)$ .

Es de especial interés la relación entre  $f_s$  y  $f_m$ , pues el Teorema de Muestreo expresa que para poder recuperar la señal a partir de sus muestras se debe cumplir que  $f_s \geq 2f_m$ , en el caso mostrado se toma el valor mínimo de  $f_s$  para cumplir con dicho teorema, en la práctica se suelen utilizar valores de  $f_s > 2f_m$ .

#### 1.4.2. Muestreo natural

En la práctica resulta difícil implementar un sistema en el que se utilice un señal de pulsos, como señal de muestreo, con una duración muy pequeña, ya que esto dificulta la realización de la circuitería con que se implementan los sistemas físicos, además, los medios que se utilizan para transmitir las señales son canales con un ancho de banda limitado, en los que por el alto contenido de energía en los armónicos del espectro de la señal de pulsos, esta se distorsiona. Una forma más práctica se conoce como muestreo natural, este consiste en una señal de muestreo en la que los pulsos tienen una duración finita,  $\tau$ , y un período  $T_s$ , como se muestra en la figura 7.

Lo que caracteriza la señal muestreada es que las crestas de los pulsos, que tienen una duración finita,  $\tau$ , siguen en todo instante la magnitud de  $m(t)$ , en la figura 8 se puede observar la señal luego de ser muestreada.

La secuencia de pulsos,  $s(t)$ , puede ser representada como una sumatoria, para esto, primero se define un solo pulso  $h(t)$ , de duración  $\tau$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.28)$$

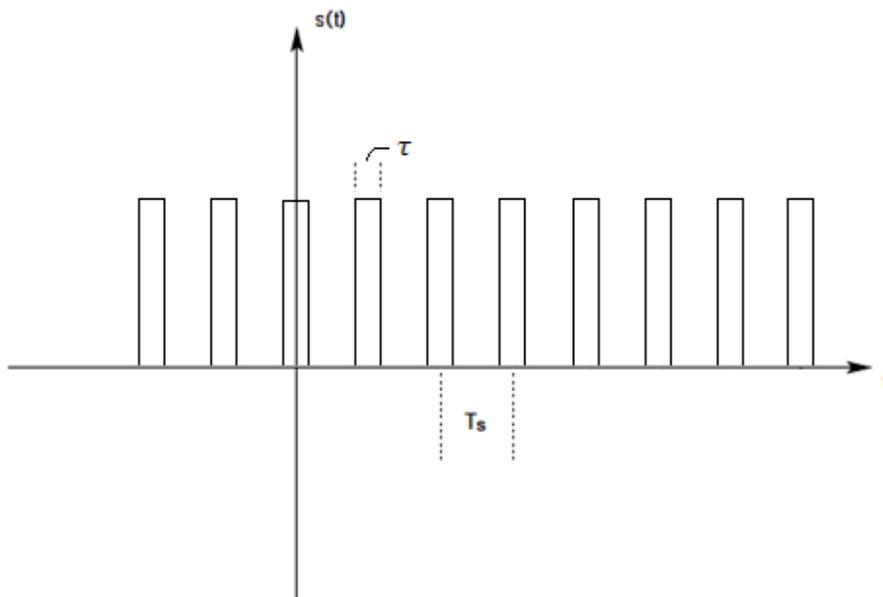
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT_s) \quad (1.29)$$

En donde  $n$  es un número natural entero y  $T_s$  es el período de muestreo.

También se puede representar mediante una serie de Fourier:

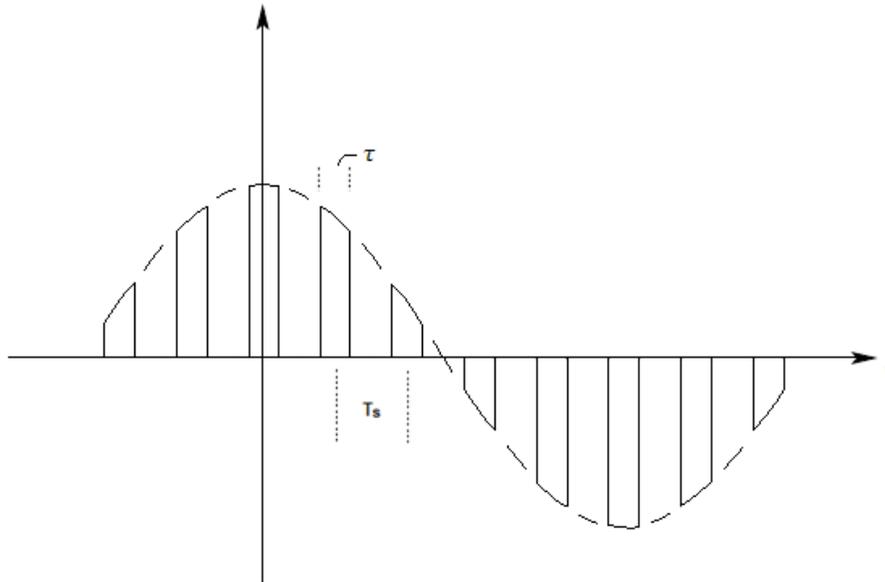
$$s(t) = \frac{\tau}{T_s} + \frac{2\tau}{T_s} \sum_1^{\infty} C_n \cos \frac{2\pi n t}{T_s} \quad (1.30)$$

Figura 7. **Señal de pulsos cuadrados con duración  $\tau$**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

Figura 8. **Muestreo natural**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

Donde los coeficientes  $C_n$  están dados por:

$$C_n = \frac{\text{sen}(n\pi\tau/T_s)}{n\pi\tau/T_s} \quad (1.31)$$

Para obtener una expresión que describa la señal de pulsos resultante al muestrear la señal  $m(t)$ , se hace:

$$g(t) = m(t)s(t) = m(t)\frac{\tau}{T_s} + m(t)\frac{2\tau}{T_s}\left(C_1\cos 2\pi\frac{t}{T_s} + C_2\cos 2\left(2\pi\frac{t}{T_s}\right) + \dots\right) \quad (1.32)$$

Con  $T_s = 1/2f_m$ , sustituyendo se obtiene:

$$g(t) = m(t) \frac{\tau}{T_s} + m(t) 4f_m dt (C_1 \cos 2\pi t (2f_m) + C_2 \cos 2\pi t (4f_m) + \dots) \quad (1.33)$$

Al igual que en la sección 1.4.1., si se toma la señal resultante  $g(t)$  y se pasa a través de un filtro pasa bajos ideal, de ganancia unitaria en la banda de paso, con una frecuencia de corte igual a la frecuencia máxima  $f_m$ , se obtiene la señal  $m(t)$ , solamente que esta multiplicada por el factor de escala  $\tau/T_s$ .

Se ha observado que mediante muestreo instantáneo y natural puede recuperarse la señal original que ha sido muestreada, sin ninguna distorsión, ya que el factor de escala en el muestreo natural puede modificarse mediante amplificación para obtener exactamente la señal muestreada, tal y como lo expresa el Teorema de Muestreo.

### 1.4.3. Muestreo mediante pulsos cuadrados

Este tipo de muestreo es más fácil de implementar en la práctica. Al igual que en el muestreo natural, se utiliza una señal de muestreo con pulsos de duración finita,  $\tau$ , y período  $T_s$ , con la diferencia que se toma una muestra instantánea de la amplitud de la señal que se está muestreando y esta amplitud se mantiene durante toda la duración del pulso, es decir que la cresta del pulso es plana, como se muestra en la figura 9.

Una muestra de la amplitud de  $m(t)$  puede representarse como  $m(nT_s)$ , en donde  $n$  es un número real entero y  $T_s$  es el periodo de muestreo, por lo que  $m(nT_s)$  es la muestra de  $m(t)$ , en el instante  $t = nT_s$ .

La señal de muestras mediante pulsos cuadrados puede expresarse como la multiplicación de las muestras instantáneas de  $m(t)$ ,  $m(nT_s)$  y el tren de

pulsos de la ecuación 1.29, que se muestra en la figura 7. Esta queda de la siguiente forma:

$$s_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)h(t - nT_s) \quad (1.34)$$

Con el objetivo de obtener una idea del efecto que tiene el muestreo mediante pulsos cuadrados en el espectro de la señal muestreada, se realiza el siguiente análisis.

Para representar el muestreo instantáneo o ideal de una señal, se utiliza un tren de impulsos, espaciados un intervalo  $T_s$ , de la forma:

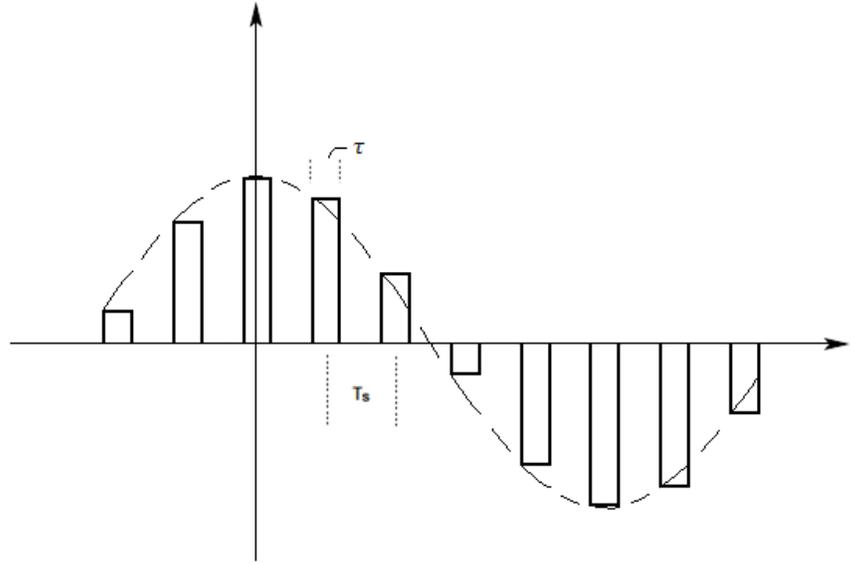
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1.35)$$

En donde  $\delta(t)$  es la función impulso y  $n$  es un número real entero. La señal muestreada instantáneamente,  $s_\delta(t)$ , sería la multiplicación de la señal del mensaje y el tren de impulsos.

$$s_\delta(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1.36)$$

Al utilizar la propiedad de desplazamiento de la función delta, la ecuación 1.36, queda de la forma:

Figura 9. **Señal muestreada mediante pulsos cuadrados**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

$$s_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (1.37)$$

Si se convoluciona  $s_{\delta}(t)$  y  $h(t)$ , de la Ecuación 1.21 se obtiene:

$$s_{\delta}(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\delta}(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s)h(t - \tau) d\tau \quad (1.38)$$

Invirtiendo el orden se obtiene:

$$s_{\delta}(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)h(t - \tau) d\tau \quad (1.39)$$

Utilizando la propiedad de filtrado de la función delta se obtiene que:

$$s_{\delta}(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) h(t - \tau) \quad (1.40)$$

Se puede observar que la parte derecha de la ecuación 1.40 es igual a la parte derecha de la ecuación 1.34, por lo que:

$$s_m(t) = s_{\delta}(t) * h(t) \quad (1.41)$$

Según la sección 1.3, la convolución de dos señales en el tiempo es igual a la multiplicación de sus transformadas de Fourier, por lo que:

$$S_m(f) = S_{\delta}(f)H(f) \quad (1.42)$$

La transformada de Fourier de  $s(t)$  es:

$$S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) \quad (1.43)$$

En donde  $k$  es un número real entero y  $f_s = 1/T_s$  es la frecuencia de muestreo.

La representación de  $s_{\delta}(t)$  como una serie de Fourier es:

$$S_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s) \quad (1.44)$$

En donde  $M(f) = F\{m(t)\}$

Y la transformada de Fourier de  $h(t)$  es:

$$H(f) = \frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f} e^{-j\pi f \tau} \quad (1.45)$$

Que se puede reescribir como:

$$H(f) = \tau \frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau} \quad (1.46)$$

Sustituyendo  $f = \omega/2\pi$ :

$$H(f) = \frac{\tau}{2} \text{senc}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2} \quad (1.47)$$

$$|H(f)| = \tau \frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad (1.48)$$

$$\text{arg}\{H(f)\} = -\frac{\tau}{2} \quad (1.49)$$

La magnitud de  $H(f)$  causa una distorsión en la magnitud del espectro de la señal muestreada, y el argumento de  $H(f)$  causa un retraso en el tiempo de  $\tau/2$ . En la figura 10 se muestra la magnitud y fase de  $H(f)$ .

Sustituyendo la ecuación 1.44 y 1.46 en la ecuación 1.42 se obtiene que:

$$S_m(f) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s) \frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau} \quad (1.50)$$

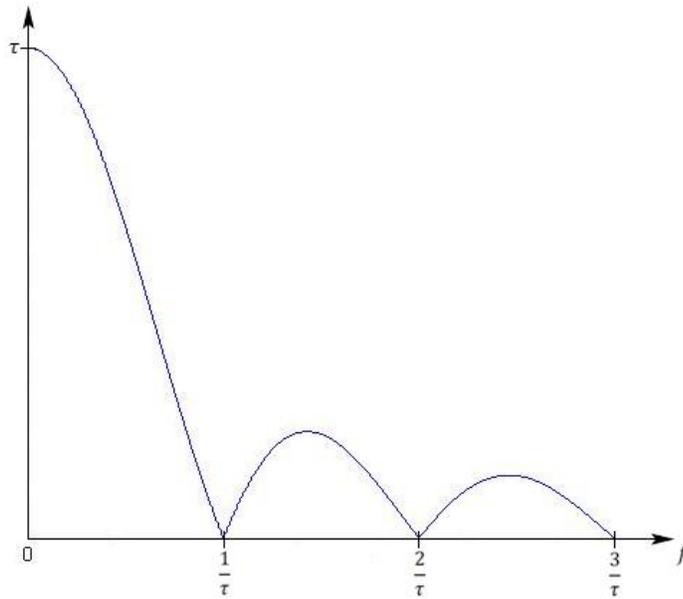
Asumiendo que  $f_s \geq 2f_m$ . Se observa que el espectro de  $m(t)$  queda modificado, no solamente por un factor de escala, sino que por el factor de la ecuación 1.48, lo cual modifica todo el espectro de  $m(t)$ , por lo que si se desea recuperar  $m(t)$  mediante un filtro pasa bajo, como hasta ahora en el muestreo instantáneo y natural, no se podrá recuperar exactamente la señal, puesto que se le ha introducido una distorsión de amplitud y de fase.

Debido a que, para recuperar la señal, se aplica un filtro pasa bajo con frecuencia de corte  $f_m$ , interesa la distorsión que se causa para valores iguales o menores que  $f_m$ .

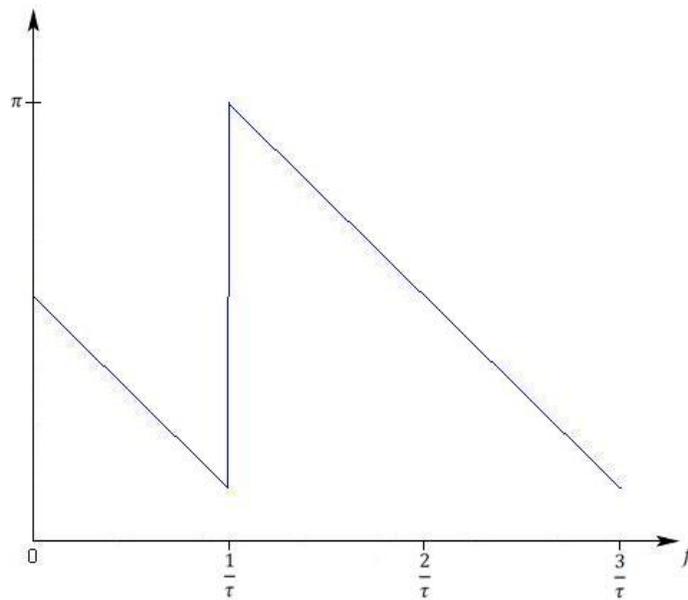
La distorsión que produce el muestreo mediante pulsos cuadrados es similar al efecto que se produce en la televisión, al utilizar una apertura de tamaño finito, por tal razón se conoce también como efecto de apertura y al factor de la ecuación 1.51 se le conoce como factor de apertura.

$$\frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad (1.51)$$

Figura 10. **a) Magnitud de  $H(f)$ . b) Fase de  $H(f)$**



(a)



(b)

Fuente: elaboración propia, con programa Matlab.

### 1.4.3.1. Ecuación

La distorsión que causa el efecto de apertura en la magnitud y fase de una señal se observan en la ecuación 1.48 y 1.49 respectivamente, este factor puede ser visto como la aplicación de un sistema cuya respuesta en frecuencia es  $H(f)$ , esta se muestra en la figura 10, si se aplica un sistema inverso con una respuesta en frecuencia  $H_i(f)$ , la distorsión puede ser eliminada totalmente, este sistema funciona como un ecualizador, modificando de nuevo la distorsión tanto en amplitud, como en fase, causada por el efecto de apertura.

La respuesta en frecuencia del sistema inverso es:

$$H_i(f) = \frac{H_{FPB}(f)}{H(f)} \quad (1.52)$$

En donde  $H_{FPB}(f)$  es la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajo de la figura 4, dada por:

$$H_{FPB}(f) = \begin{cases} T_s, & f < 1/T_s \\ 0, & f \geq 1/T_s \end{cases} \quad (1.53)$$

Cabe resaltar que dada las características de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajo, los valores para  $f \geq 1/T_s$  no serán de interés ya que son eliminados por este. Sustituyendo  $H(f)$  y  $H_{FPB}(f)$ :

$$H_i(f) = \frac{T_s}{\tau} \frac{\pi f \tau}{\text{sen}(\pi f \tau)} e^{j\pi f \tau} \quad (1.54)$$

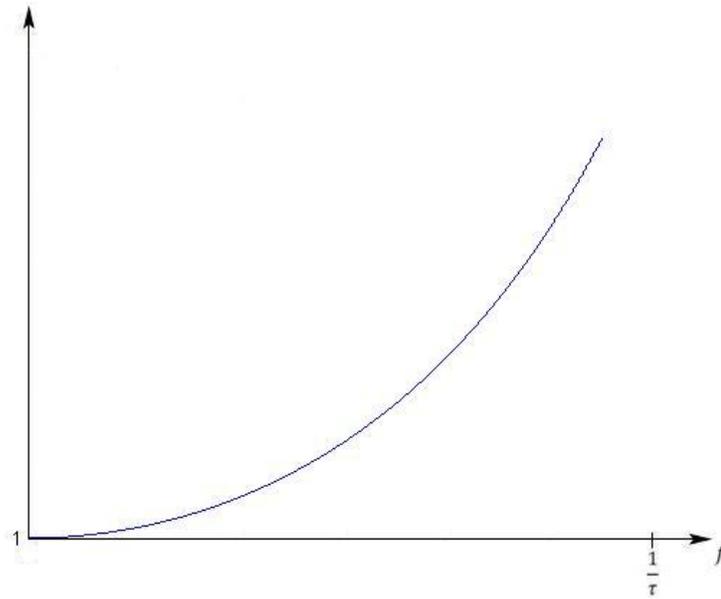
De la cual se muestra de forma separada la magnitud y fase, en las ecuaciones 1.55 y 1.56 respectivamente, aunque sin tener en cuenta el factor de escala  $\frac{T_s}{\tau}$ .

$$|H_i(f)| = \frac{\pi f \tau}{\text{sen}(\pi f \tau)} \quad (1.55)$$

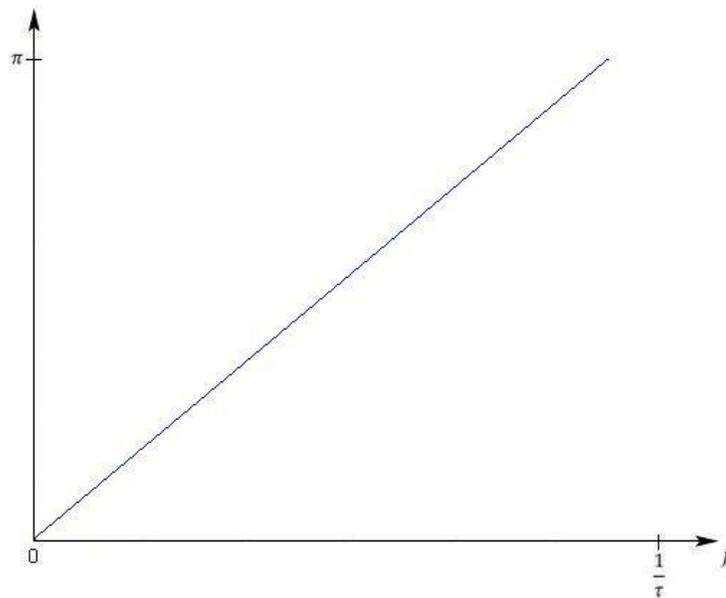
$$\text{arg}\{H_i(f)\} = \frac{\tau}{2} \quad (1.56)$$

En la ecuación 1.55 se advierte que si  $f = 0$ ,  $|H_i(f)|$  es igual a  $1/\tau$  y para  $f = n/\tau$ , donde  $n$  es un número natural entero, el divisor  $\text{sen}(\pi f \tau)$  es igual a 0, por lo que la respuesta en frecuencia del sistema inverso presenta discontinuidades para estos valores, generalmente el valor de  $1/\tau$  es bastante grande en comparación con  $f_m$ , por lo cual la primera discontinuidad se presentaría para un valor mayor que  $f_m$ , dado que para recuperar la señal se utiliza un filtro con frecuencia de corte  $f_m$ , el valor de  $H_i(f)$  solo sería relevante para valores menores a  $f_m$ . En la figura 11 se muestra la magnitud y fase de  $H_i(f)$ .

Figura 11. **a) Magnitud de  $H_i(f)$ . b) Fase de  $H_i(f)$**



(a)



(b)

Fuente: elaboración propia, con programa Matlab.

## 2. TRATAMIENTO DE LA SEÑAL EN TIEMPO DISCRETO

El tratamiento de señales en tiempo discreto se realiza mediante sistemas en tiempo discreto, para su análisis se utilizan muchas herramientas, y también en el análisis de señales y sistemas en tiempo continuo, con muchas similitudes, pero algunas diferencias importantes. Por esto se introduce a los principios de las señales y sistemas en tiempo discreto, en especial aquellos que se relacionan con el muestreo de señales y los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

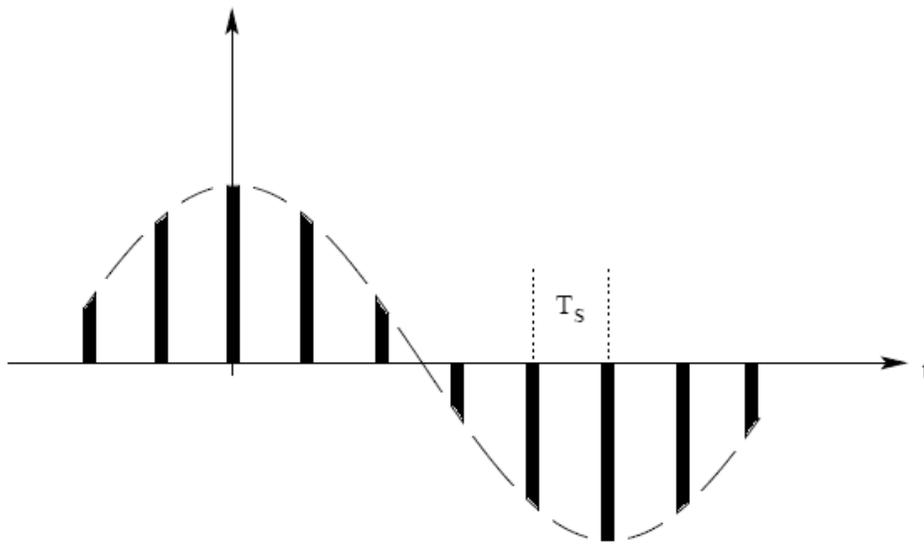
### 2.1. Señales en tiempo discreto

Las señales en tiempo discreto están definidas solamente para valores discretos del tiempo, o sea que su variable independiente toma valores discretos, por esta razón se representan por medio de secuencias, es decir, funciones cuyo dominio son los números enteros. Una señal en tiempo discreto se representa de la forma  $x[n]$ , en donde  $n$  es una variable discreta y se encierra dentro de corchetes; a diferencia de la forma en que se representa una señal en tiempo continuo  $x(t)$ , donde  $t$  es una variable continua y se encierra dentro de paréntesis.

Las señales en tiempo discreto son señales que se obtienen de distintas maneras, algunas pueden provenir de fenómenos en donde la variable independiente tome valores discretos de manera natural o pueden provenir del muestreo de señales en tiempo continuo. Para obtener una señal discreta mediante el muestreo de una señal en tiempo continuo,  $x(t)$ , se toma muestras de los valores de esta, en ciertos instantes a intervalos regulares, estos

intervalos son múltiplos enteros del periodo de muestreo  $T$ , es decir para  $nT$ . Por conveniencia se presenta de nuevo la figura 3, en la que se puede observar el muestreo de una señal en tiempo continuo con un periodo de muestreo  $T_s$ .

Figura 12. **Representación de una señal continua mediante muestras instantáneas**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

El valor instantáneo de la serie de muestras instantáneas tomadas de la señal continua  $x(t)$  puede ser representado mediante una secuencia de la forma:

$$x[n] = x(nT). \quad -\infty < n < \infty \quad (2.3)$$

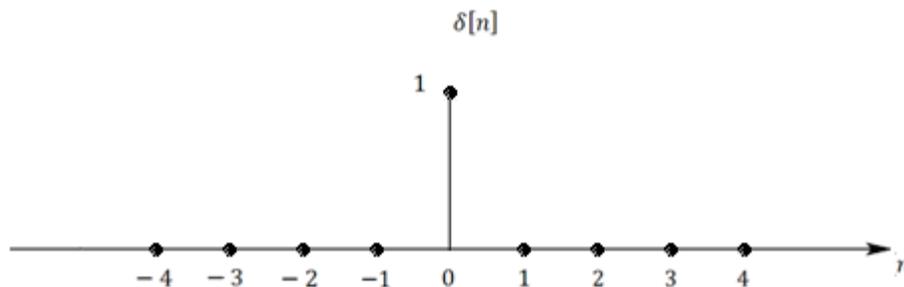
La secuencia  $x[n]$  contiene la información sobre la señal analógica arbitraria para valores instantáneos, es decir instantes discretos.

Como un ejemplo se presenta una secuencia básica en el tratamiento de señales en tiempo discreto, la función impulso, está definida como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La función impulso en tiempo discreto es igual a 1 cuando  $n = 0$  y es cero para todos los demás valores de  $n$ . Su representación se muestra en la figura 13.

Figura 13. **Representación gráfica de la función impulso en tiempo discreto**



Fuente: elaboración propia.

Una de las razones por la que esta función es muy utilizada es porque en general una secuencia cualquiera se puede representar mediante una suma de impulsos desplazados y escalados, de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (2.5)$$

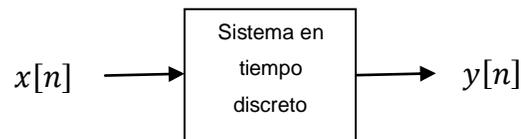
## 2.2. Sistemas en tiempo discreto

Un sistema en tiempo discreto transforma una secuencia de entrada en una secuencia de salida. Esta transformación se suele denotar como:

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \quad (2.6)$$

Se puede representar en forma de diagrama de bloques como en la figura 14.

Figura 14. **Representación de un sistema en tiempo discreto**



Fuente: elaboración propia.

Los sistemas se pueden clasificar según sus propiedades, dentro de las cuales se mencionan algunas de especial interés en el tratamiento de señales.

### 2.2.1. Linealidad

Los sistemas lineales son aquellos que cumplen tanto con el principio de aditividad, como con el principio de escalamiento u homogeneidad. Sean  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  las entradas a un sistema y  $y_1[n]$  y  $y_2[n]$  las respuestas de este sistema a  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente. Esto se expresa de forma:

$$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] \quad (2.7)$$

$$x_2[n] \xrightarrow{T} y_2[n] \quad (2.8)$$

Sea  $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ , es decir la suma de dos entradas escaladas por una constante cualquiera, y  $y_3[n]$  la respuesta del sistema a  $x_3[n]$ . De la forma:

$$x_3[n] \xrightarrow{T} y_3[n] \quad (2.9)$$

Para un sistema lineal se cumple que:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{T} ay_1[n] + by_2[n] \quad (2.10)$$

La combinación de las propiedades de aditividad y escalamiento se expresa en la ecuación 2.10, e indica que al aplicar una combinación lineal de varias entradas escaladas a un sistema lineal, la salida de este será la combinación lineal de la salida de este sistema a cada una de dichas entradas. Esto es conocido como el principio de superposición.

### **2.2.2. Invariabilidad en el tiempo**

Un sistema es invariante en el tiempo, si al correr en el tiempo una entrada, se obtiene el mismo corrimiento a su salida, es decir, para un sistema que cumple con la ecuación 2.6, si se aplica una entrada con un corrimiento  $n_0$  a un sistema invariable en el tiempo, la salida debe tener también un corrimiento de  $n_0$ , o sea que la salida debe ser  $y[n - n_0]$  para una entrada  $x[n - n_0]$ .

Esta propiedad permite estar seguro que el sistema mantendrá una respuesta para una entrada determinada, independientemente del tiempo en el que se aplique.

### **2.2.3. Causalidad**

Un sistema es causal si su salida depende únicamente de valores presentes o anteriores de la entrada. Si se tienen dos entradas a un sistema causal que cumplen con que  $x_1[n] = x_2[n]$  para  $n \leq n_0$ , la salida para  $n \leq n_0$  deberá cumplir con que  $y_1[n] = y_2[n]$ , es decir que para cualquiera de dos entradas iguales, para valores de  $n$  presentes o anteriores, la salida de un sistema causal deberá ser la misma, no importando el que dichas entradas no cumplan con la condición de ser iguales para valores futuros.

### **2.2.4. Estabilidad**

Un sistema es estable si para toda entrada acotada su salida también es acotada. Se dice que la entrada  $x[n]$  está acotada si existe un valor finito positivo fijo,  $B_x$ , tal que:

$$|x[n]| \leq B_x \leq \infty, \quad \text{para todo } n. \quad (2.11)$$

La estabilidad requiere que, para cualquier entrada acotada, exista un valor finito positivo fijo,  $B_y$ , tal que

$$|y[n]| \leq B_y \leq \infty, \quad \text{para todo } n.^1 \quad (2.12)$$

### **2.3. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo**

La combinación de las propiedades de linealidad e invariabilidad en el tiempo dan origen a un grupo muy especial de sistemas, debido a que tienen muchas aplicaciones en el procesamiento discreto de señales, estos son los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Una de las propiedades más sobresaliente de estos sistemas, es que se puede predecir su comportamiento ante cualquier entrada por su respuesta al impulso, es decir que los sistemas lineales e invariantes en el tiempo están caracterizados por su respuesta al impulso, esto se cumple tanto para los sistemas en tiempo continuo como para los sistemas en tiempo discreto.

#### **2.3.1. Sistemas en tiempo discreto lineales e invariables con el tiempo**

Se puede demostrar que combinando la representación de una secuencia mediante impulsos desplazados de la ecuación 2.5, junto con las propiedades de linealidad de la sección 2.2.1., descrita en la ecuación 2.10, e invariabilidad en el tiempo de la sección 2.2.2., se puede conocer la salida,  $y[n]$ , de un

---

<sup>1</sup> OPPENHEIM V. Alan, SHAFER R., BUCK J., Tratamiento de señales en tiempo discreto. p. 22.

sistema lineal e invariante en el tiempo, ante una entrada arbitraria  $x[n]$ , mediante:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.13)$$

La operación de la ecuación 2.13 es conocida como la suma de convolución, el equivalente en tiempo discreto de la convolución en tiempo continuo. Esta operación se denota, al igual que en tiempo continuo, con el símbolo  $*$ , por lo que al reescribir la ecuación 2.13 queda

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (2.14)$$

Por su importancia se muestran las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la suma de convolución, en las ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.17 respectivamente.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (2.15)$$

$$x[n] * (h[n] * g[n]) = (x[n] * h[n]) * g[n] \quad (2.16)$$

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (2.17)$$

Dado que la suma de convolución, o simplemente convolución, representa un sistema lineal e invariante en el tiempo, de la propiedad conmutativa se

---

<sup>2</sup> OPPENHEIM V. Alan, SHAFER R, BUCK J., Tratamiento de señales en tiempo discreto. p. 24.

<sup>3</sup> Ibid.

deriva que los sistemas lineales e invariantes en el tiempo están completamente caracterizados por su respuesta al impulso.

## 2.4. Análisis de Fourier de señales en tiempo discreto

La representación de señales en tiempo discreto mediante funciones trigonométricas o exponenciales complejos resulta, al igual que con las señales en tiempo continuo, muy útil en la teoría de sistemas lineales, ya que una buena parte del análisis de señales en tiempo discreto se realiza en el dominio de la frecuencia. Como se ha visto, las señales en tiempo discreto se representan por medio de secuencias y a la vez, las secuencias se pueden representar en términos de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

### 2.4.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto

Ciertas secuencias se pueden representar mediante una combinación lineal de sinusoidales o de exponenciales complejos mediante la transformada de Fourier en tiempo discreto. La transformada de Fourier de una secuencia  $x[n]$  se denota mediante:

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} \quad (2.15)$$

La secuencia  $x[n]$  se representa en términos de  $X(e^{j\omega})$  de la forma:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{-j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \quad (2.16)$$

En donde:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.17)$$

Las ecuaciones 2.16 y 2.17 son la inversa una de la otra.

Una de las características de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es que su respuesta a una entrada sinusoidal es también de forma sinusoidal, por lo que el sistema modifica únicamente la amplitud y la fase de la señal; el hecho que solamente estas dos últimas están determinadas por el sistema es una de las mayores ventajas de representar señales mediante funciones sinusoidales o exponenciales complejas.

### **3. ALGUNAS FUNCIONES DE MATLAB® PARA EL TRATAMIENTO DE SEÑALES**

Matlab® es un software de programación con una gran cantidad de herramientas técnicas para aplicaciones de ingeniería. Cuenta con un lenguaje de programación orientado a matrices, este lenguaje incluye funciones que están agrupadas según su aplicación, estas agrupaciones son llamadas cajas de herramientas; una de estas es la de procesamiento de señales, que incluye funciones para el análisis y manipulación de estas. Originalmente se desarrolló como un software de análisis matemático para trabajar con matrices, esto se ve reflejado en el lenguaje de programación en el que los datos se trabajan y se almacenan en forma de matrices.

A continuación se presentan varias funciones que son de utilidad en el procesamiento de señales y en particular en el sistema que se desea diseñar en este trabajo.

#### **3.1. Funciones para adquisición y exportación de archivos de audio**

Matlab® permite importar y exportar archivos de audio en el formato de Microsoft® con extensión wav con las siguientes funciones

- wavread
- wavwrite

### 3.1.1. wavread

La función `wavread` permite almacenar un archivo de audio en formato `.wav` dentro de una variable, de esta forma, permite importar un archivo de audio que luego se pueda manipular.

#### Sintaxis

`x = wavread (nombre del archivo)`

`[x, Fs, nbits] = wavread (nombre del archivo)`

`x = wavread (nombre del archivo)` almacena el archivo de audio, cuyo nombre debe escribirse dentro del paréntesis, en la variable `x`. La variable `x` contiene los valores con que fue codificada la señal.

`[x, fs, nbits] = wavread (nombre del archivo)` guarda además la frecuencia con que fue muestreada la señal en la variable `fs`, y la cantidad de bits con que fue codificada la señal en la variable `nbits`.

### 3.1.2. wavwrite

La función `wavwrite` permite almacenar el contenido de una variable como archivo de audio en formato `.wav`.

#### Sintaxis

`wavwrite(x, nombre del archivo)`

`wavwrite(x, fs, nbits, nombre del archivo)`

`wavwrite(x, fs, nbits, nombre del archivo)` guarda los valores contenidos en la variable `x` como las amplitudes de las muestras, codificadas mediante una

cantidad de bits de *nbits*, una frecuencia de muestreo de *fs* y el nombre que se le asigne, como un archivo de audio con formato *.wav*.

Al utilizar solamente `wavwrite(x, nombre del archivo)` se asume una frecuencia de muestreo de 8 kHz y codificación mediante 16 bits para almacenar la variable en un archivo de audio en formato *.wav*, con el nombre asignado.

### **3.2. Funciones para el cómputo de la transformada de Fourier en tiempo discreto y su representación**

Matlab® tiene varias herramientas para el análisis de Fourier, por lo que es muy útil para trabajar en este campo. Para obtener la transformada discreta de Fourier y representarla de forma gráfica se pueden utilizar las siguientes funciones

- `fft`
- `ifft`
- `fftshift`
- `unwrap`

#### **3.2.1. `fft` e `ifft`**

La función `fft` se utiliza para obtener la transformada discreta de Fourier y la función `ifft` se utiliza para obtener la transformada inversa discreta de Fourier, ambas mediante un algoritmo de transformada rápida de Fourier, conocida por sus siglas en inglés como FFT; el algoritmo permite calcular la transformada discreta de Fourier de forma muy eficiente.

Sintaxis

$$X = \text{fft}(x)$$

$$X = \text{fft}(x, n)$$

Mediante  $X = \text{fft}(x)$ , se obtiene la transformada discreta de Fourier, el tamaño del vector o matriz  $X$  es el mismo que el de  $x$ .

Mediante  $X = \text{fft}(x, n)$  se obtiene la transformada discreta de Fourier, en donde  $n$  especifica el tamaño del vector o matriz  $X$  resultante, ya sea mayor o menor, para el primer caso  $X$  es rellenado con ceros, hasta alcanzar el tamaño deseado de  $n$ , y en el segundo caso  $X$  se recorta para obtener un vector o matriz de longitud  $n$ .

### 3.2.2. **fftshift**

Esta función es útil en la manipulación de señales, especialmente para la visualización de su espectro.

Sintaxis

$$Y = \text{fftshift}(X)$$

$Y = \text{fftshift}(X)$  corre el componente espectral de la frecuencia cero al centro del vector o matriz, en el caso de ser un vector, se intercambia la parte derecha y la izquierda del vector, con lo cual los valores almacenados en la variable que representan los componentes espectrales para frecuencias cercanas a cero se colocan de forma continua, para que al graficarlo, se pueda apreciar tal y como es. Es muy útil tanto para graficar el espectro de una señal o realizar operaciones matemáticas con esta.

### 3.2.3. **unwrap**

La función `unwrap` permite visualizar la fase de una señal, ya que a veces resulta muy difícil, esto se logra quitando las discontinuidades en la fase.

Sintaxis

$P = \text{unwrap}(A)$

$P = \text{unwrap}(A)$  agrega múltiplos de  $\pm 2\pi$  en caso la diferencia entre dos valores consecutivos sea mayor a la tolerancia de salto, en este caso esta no se especifica, por lo que se aplica el valor por defecto  $\pi$ . La forma en que ayuda a visualizar la fase de una señal es quitando los cambios o saltos muy grandes; debido a la gran cantidad de estos, al graficar la fase, es difícil apreciar cómo cambia con respecto de la frecuencia.



## **4. DISEÑO DEL ALGORITMO DEL SISTEMA PARA MINIMIZAR LA DISTORSIÓN POR EFECTO DE APERTURA EN UNA SEÑAL ANALÓGICA DE AUDIO**

Para el diseño del sistema existen herramientas que facilitan la implementación de un algoritmo o sirven de ayuda para hacerlo más eficiente. Para que un sistema digital pueda ser implementado, hace falta que su función de transferencia se convierta en un algoritmo. Para el desarrollo de un algoritmo eficiente y ordenado, es de gran ayuda el uso de un diagrama de bloques y un diagrama de flujo, por lo que se incluyen ambos en este capítulo.

Para implementar un sistema basado en un modelo teórico, hace falta considerar las características difíciles de implementar, que aumentan su costo o hasta imposibles de llevar a la práctica; en estos casos es necesario realizar simplificaciones y/o aproximaciones para que el sistema ideal pueda ser implementado, además, hace falta analizar si los cambios son tolerables y si después de considerar estos, el resultado aún cumple con lo que se busca.

### **4.1. Consideraciones para la implementación del sistema**

Para la implementación del sistema que minimice la distorsión debido al efecto de apertura, se toman en cuenta varios aspectos relacionados con los objetivos del presente trabajo, las características, herramientas y limitaciones de los dispositivos y software con los que se lleva a cabo.

#### 4.1.1. Muestreo y retención

Dentro del proceso de conversión de señales analógicas a digitales, de los sistemas que se implementan en la práctica, se suele incluir el muestreo y retención, este consiste en tomar una muestra de la señal analógica como se ha visto hasta ahora, excepto que la amplitud de la muestra se mantiene hasta que vuelve a tomarse otra muestra, es decir, que se mantiene durante todo el periodo de muestreo. Se muestra en la figura 15 una señal que se obtiene mediante este proceso.

En la figura 15 se observa que la duración del pulso,  $\tau$ , que se consideró para el muestreo mediante pulsos cuadrados, al incluir también la retención, se hace igual a  $T_s$ .

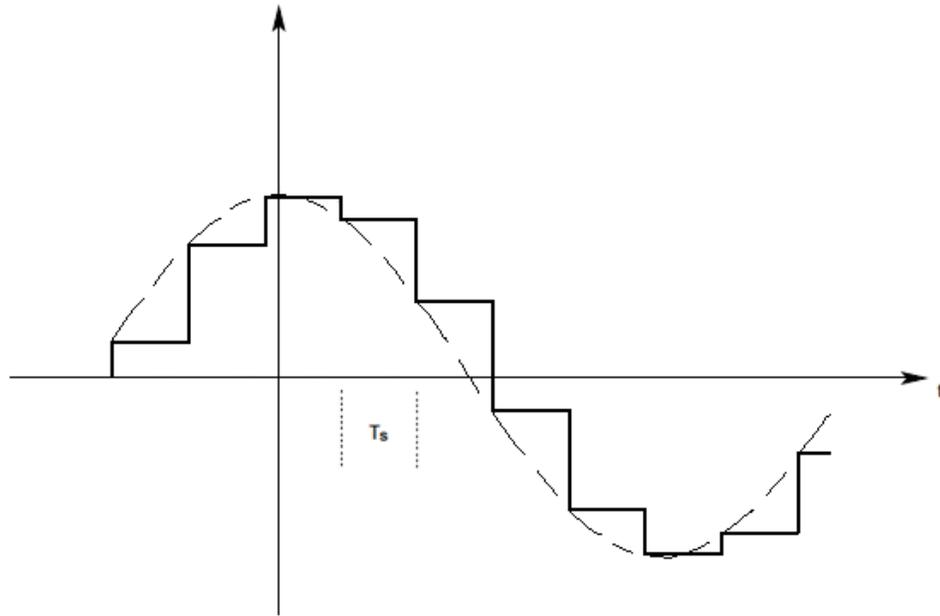
En la sección 1.4.3.1., durante el análisis del muestreo en tiempo continuo, se obtuvo la respuesta en frecuencia apropiada para eliminar la distorsión por efecto de apertura, que se introduce al muestrear una señal mediante pulsos cuadrados; por conveniencia se coloca de nuevo en la ecuación 4.1.

$$H_i(f) = \frac{T_s}{\tau} \frac{\pi f \tau}{\text{sen}(\pi f \tau)} e^{j\pi f \tau} \quad (4.1)$$

Sustituyendo  $\tau = T_s$  en la ecuación 4.1 se obtiene:

$$H_i(f) = \frac{\pi f T_s}{\text{sen}(\pi f T_s)} e^{j\pi f T_s} \quad (4.2)$$

Figura 15. **Muestreo y retención**



Fuente: elaboración propia, con programa Paint.

Esta es la respuesta en frecuencia  $H_i(f)$  para eliminar el efecto de apertura al utilizar muestreo y retención.

#### 4.1.2. **Avance temporal**

Un avance temporal es un corrimiento en el tiempo de una función, esta se menciona como una propiedad de la transformada de Fourier en la sección 1.2.2., por conveniencia se coloca de nuevo:

$$F\{v(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} V(f) \quad (4.3)$$

Si se reescribe la ecuación 4.2 como:

$$H_i(f) = \frac{2\pi f T_s/2}{\text{sen}(2\pi f T_s/2)} e^{-j2\pi f (-T_s/2)} \quad (4.4)$$

Y se comparan las ecuaciones 4.3 y 4.4, se pueden igualar haciendo:

$$t_0 = (-T_s/2) \quad (4.5)$$

Y:

$$V(f) = \frac{2\pi f T_s/2}{\text{sen}(2\pi f T_s/2)} \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.5 y 4.6 en la ecuación 4.3 se obtiene

$$F\{v(t - (-T_s/2))\} = e^{-j2\pi f (-T_s/2)} \frac{2\pi f T_s/2}{\text{sen}(2\pi f T_s/2)} \quad (4.7)$$

$$F\{v(t + T_s/2)\} = e^{j2\pi f (T_s/2)} \frac{2\pi f T_s/2}{\text{sen}(2\pi f T_s/2)} \quad (4.8)$$

En la ecuación 4.8 se observa que existe un corrimiento en el tiempo de  $t_0 = -T_s/2$  en la transformada inversa de Fourier  $v(t)$ , este valor negativo del corrimiento significa un adelanto en el tiempo.

Un sistema que incluye un adelanto en el tiempo es un sistema anticausal, es decir, que su salida depende de valores futuros a su entrada. En los sistemas en tiempo real los retrasos son críticos y al incluir un adelanto en el tiempo en su algoritmo, seguramente el retraso causado no sería tolerable, en

cambio, en un sistema que no debe presentar esta característica, retrasos mayores pueden ser tolerables y la implementación de un sistema anticausal puede ser una opción.

Debido a que se desea obtener un sistema causal y al retraso que significaría incluir un adelanto en el tiempo en el algoritmo, el adelanto en el tiempo no se tomara en cuenta para implementar el sistema para minimizar el efecto de apertura en este trabajo.

Eliminando el factor que causa el corrimiento en el tiempo de la ecuación 4.4, la respuesta en frecuencia de un sistema para minimizar el efecto de apertura queda como:

$$H_i(f) = \frac{2\pi f T_s / 2}{\text{sen}(2\pi f T_s / 2)} \quad (4.9)$$

Por lo que solo se realizarán cambios en la magnitud de la señal y no en la fase.

#### **4.2. Ecuación para el efecto de apertura en tiempo discreto**

Hasta ahora se ha visto la respuesta en frecuencia de un sistema para eliminar el efecto de apertura en tiempo continuo, en esta sección se obtendrá la respuesta en frecuencia en tiempo discreto.

Por notación, para representar la frecuencia angular en tiempo continuo se utilizara la variable  $\Omega$  y en tiempo discreto la variable  $\omega$ ; se puede comprobar que la relación entre estas dos últimas es  $\omega = \Omega T_s$ . Para representar la

transformada de Fourier en tiempo continuo de  $h(t)$  se utiliza  $H(j\Omega)$ , y para la transformada de Fourier en tiempo discreto de  $h[n]$  se utiliza  $H(e^{j\omega})$ .

Sustituyendo  $\Omega = 2\pi f$  en la ecuación 4.9, se tiene que

$$H_i(\Omega) = \frac{\Omega T_s/2}{\text{sen}(\Omega T_s/2)} \quad (4.10)$$

A continuación, se obtendrá la función de transferencia de un sistema en tiempo discreto a partir de la función de transferencia en tiempo continuo, de tal forma que el sistema en tiempo discreto sea equivalente al sistema en tiempo continuo.

La forma en que se implementa un sistema que procesa señales continuas mediante sistemas en tiempo discreto se muestra en la figura 16, aquí el conversor de continuo a discreto, C/D, convierte la señal en tiempo continuo  $x_c(t)$  en una secuencia  $x[n]$ , mientras que el conversor de discreto a continuo, D/C, convierte la secuencia  $y[n]$  a una señal en tiempo continuo  $y_c(t)$ . El sistema completo es equivalente a un sistema en tiempo continuo, ya que tanto a su salida como también en su entrada se tiene una señal en tiempo continuo. Por simplicidad se consideran los conversores ideales C/D y D/C.

Si el sistema completo que se muestra en la figura 16 es lineal e invariante en el tiempo, la entrada  $x_c(t)$  está limitada en banda a una frecuencia  $f_m$ , y es muestreada a una frecuencia igual o mayor que la frecuencia de Nyquist, es decir que  $f_s \geq f_m$ , y la respuesta en frecuencia en tiempo continuo  $H_c(j\Omega)$  que se desea aproximar en tiempo discreto está limitada en banda, se puede demostrar que la forma de seleccionar  $H(e^{j\omega})$  para que un sistema como el de la figura 16 sea equivalente al deseado en tiempo continuo es:

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T}) \quad (4.11)$$

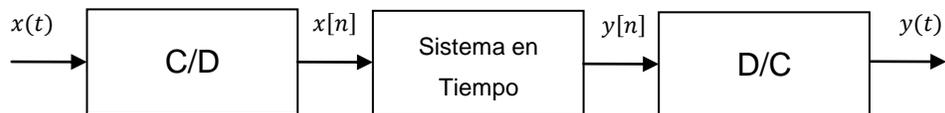
Por lo tanto, si se hace la sustitución  $\omega = \Omega T_s$  en la ecuación 4.10, se obtendrá la función de transferencia del sistema equivalente en tiempo discreto.

Sustituyendo  $\omega$  por  $\Omega T_s$ :

$$H_i(e^{j\omega}) = H_i(j\frac{\omega}{T}) = \frac{\omega/2}{\text{sen}(\omega/2)} \quad (4.12)$$

La ecuación 4.12 es la que se implementara en el sistema en tiempo discreto.

Figura 16. **Procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo**

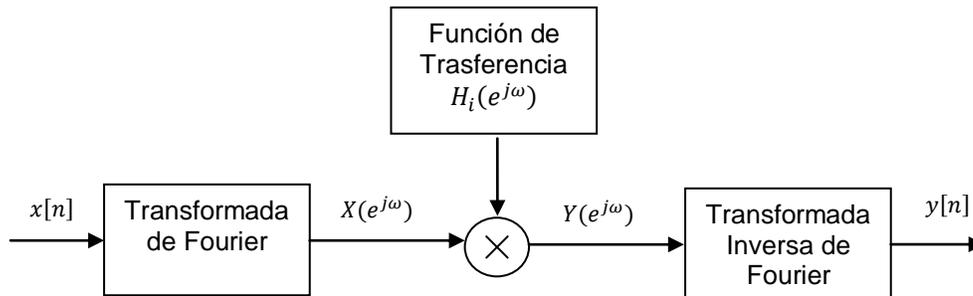


Fuente: (Oppenheim, Schafer & Buck, Procesamiento de señales en tiempo continuo. p. 154.

### 4.3. Diagrama de bloques del sistema

La parte del diagrama de bloques de la figura 16 que se va a llevar a cabo es el bloque sistema en tiempo discreto. A continuación se muestra el diagrama de bloques del sistema.

Figura 17. Diagrama de bloques del sistema

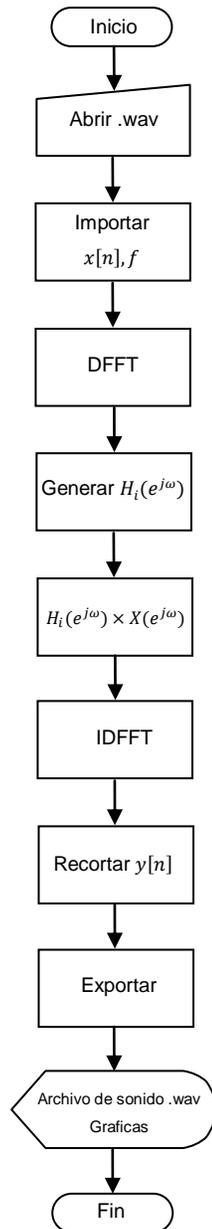


Fuente: elaboración propia.

#### 4.4. Diagrama de flujo

A partir del diagrama de bloques, se obtiene el diagrama de flujo, este contiene los procesos que se llevarán a cabo durante la ejecución del algoritmo. A continuación se muestra el diagrama de flujo del sistema.

Figura 18. Diagrama de flujo del sistema



I

Fuente: elaboración propia.

## 4.5. Algoritmo

```
%Se lee el archivo de audio de entrada al sistema, x
[x,fx,nbits]=wavread('sonido3.wav');
lx=length(x);
nx=0:length(x)-1;

%Grafica de la señal de entrada x
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(nx,x)
title('Señal de Entrada')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Amplitud')

%Se transforma x, obteniendo X
NFFT=2^nextpow2(lx); % Next power of 2 from length of x
X=fft(x,NFFT); %Ver la opción de optimizar fft usando fftw
angleX = angle(X); % absX = abs(X);
f0 = fx/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
f1 = (-NFFT/2:NFFT/2-1)*(fx/NFFT);
phase = unwrap(angle(X));

%Grafica del espectro de X
subplot(3,1,2);
plot(f0,2*abs(X(1:NFFT/2+1)));
title('Magnitud de la transformada de la señal de entrada')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
ylabel('|X(f)|')
```

```

grid on
subplot(3,1,3);
plot(f1,phase*180/pi)
title('Fase de la transformada de la señal de entrada')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
grid on

```

```

%Función de Transferencia,  $H(e^{j\omega})$ 

```

```

Fs = fx;

```

```

Ts = 1/Fs;

```

```

L = NFFT;

```

```

f = Fs/2*linspace(-1,1,NFFT);

```

```

T = 1/fx;

```

```

H = (2*pi*f*T/2)./(sin(2*pi*f*T/2));

```

```

%H1 = (2*pi*f*T/2);

```

```

%H2 = (sin(2*pi*f*T/2));

```

```

%H = H1./H2;

```

```

%H(16385) = 1;

```

```

%Grafica de la función de transferencia

```

```

figure(2)

```

```

plot(f0,H(NFFT/2:NFFT))

```

```

title('Función de transferencia')

```

```

xlabel('Frecuencia (Hz)')

```

```

grid on

```

```

%Multiplicación de X por  $H(e^{j\omega})$ 

```

```

X = fftshift(X);

```

```

Y = (H)'.*(X);

```

```

angleY = angle(Y);
phaseY = unwrap(angle(Y));
Y = fftshift(Y);

%Grafica del resultado de la aplicar el sistema, Y
figure(3)
subplot(3,1,1);
%plot(f,abs(Y))
plot(f0,2*abs(Y(1:NFFT/2+1)))
title('Salida del Sistema en el Dominio de la Frecuencia')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
grid on
subplot(3,1,2);
plot(f1(1:L),phaseY*180/pi)
title('Fase de la Salida en el Dominio de la Frecuencia')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
grid on

%Se obtiene la transformada inversa de Y, y
Xr = Y; %Xr es la señal después de haberse aplicado el cambio
%xr = ifft(Xr,NFFT);
xr = ifft(Xr,NFFT,'symmetric');
lxr=length(xr);
nxr=0:length(xr)-1;

%Grafica de y
subplot(3,1,3)
plot(nx,real(xr(1:lx)))
title('Señal de salida')

```

```
xlabel('Tiempo')
```

```
ylabel('Amplitud')
```

```
%Recorto la señal de salida y, para igualar la longitud con x
```

```
xrcut = xr(1:lx);
```

```
%Se guarda la señal de salida
```

```
wavwrite(xr,fx,nbits,'salida_sistema.wav');
```



## **5. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA**

La caracterización de un sistema consiste en conocer su comportamiento, el tipo de señales que maneja a su entrada y a su salida, la forma en que su salida depende de valores a la entrada, sus propiedades, y en general todas aquellas características específicas del sistema. La caracterización resulta útil ya que permite conocer la forma en que el sistema responderá al ser excitado y facilita tanto su análisis, como el de los resultados obtenidos con él.

### **5.1. Propiedades del sistema**

Se toman en cuenta varias propiedades del sistema, la mayoría se infieren directamente a partir de su diseño y algunas otras es necesario comprobarlas. A continuación se describen y/o se comprueban algunas propiedades que se consideran importantes acerca del sistema desarrollado.

Se puede afirmar que el sistema es completamente digital, debido a que se implemento en software, es decir en una computadora digital, y debido a que este tiene a su entrada archivos de audio digitales en formato wav y se obtienen como resultado un archivos de audio digital, también en formato wav; es decir que se tiene a su entrada y salida señales digitales.

También se puede afirmar que el sistema es causal, debido a que el valor de la salida solo depende de valores presentes o pasados, según se considero en la sección 4.1.2., en donde se elimina el factor que significa un adelanto en el tiempo en la función de transferencia del sistema.

En la sección 2.3., se menciona que un sistema LTI está totalmente caracterizado por su respuesta al impulso, esto se toma como base para diseñar el sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura; tomando como base la respuesta en frecuencia, suponiendo que se diseñaría un sistema LTI o que se podría aproximar como uno. A continuación se comprueba que el sistema diseñado es lineal e invariante en el tiempo.

Dado que se diseñó un sistema digital y una de las ventajas de estos es que sus propiedades no cambian a lo largo del tiempo conforme el sistema envejece, ni son afectados por variables como la temperatura del medio ambiente, se puede afirmar que el sistema es invariante en el tiempo. Para comprobar si el sistema es lineal, se verifica que cumpla con el principio de superposición que se resume en la ecuación 2.10, que por conveniencia se coloca de nuevo a continuación:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{T} ay_1[n] + by_2[n] \quad (5.1)$$

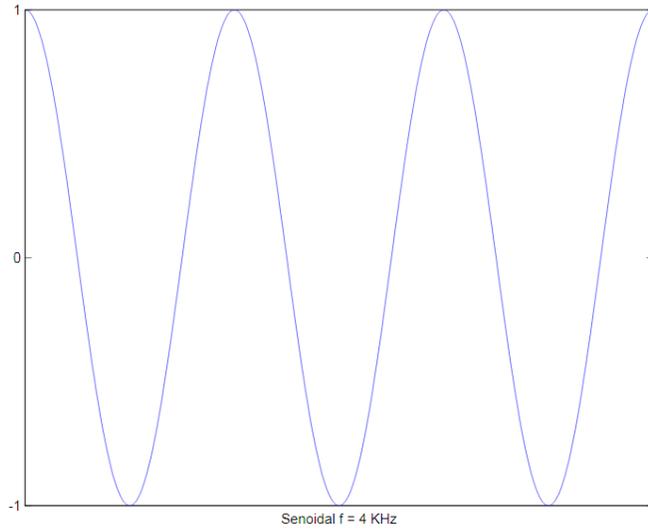
Para comprobar que el sistema cumple con la ecuación 5.1 se ingresaron dos señales senoidales de forma individual al sistema, ambas con una amplitud unitaria, la primera con una frecuencia de 4 kHz, y la segunda con una frecuencia de 8 kHz, se muestran en las ecuaciones 5.2 y 5.3 respectivamente.

$$x_1(t) = \text{sen}(2\pi(4000)t) \quad (5.2)$$

$$x_2(t) = \text{sen}(2\pi(8000)t) \quad (5.3)$$

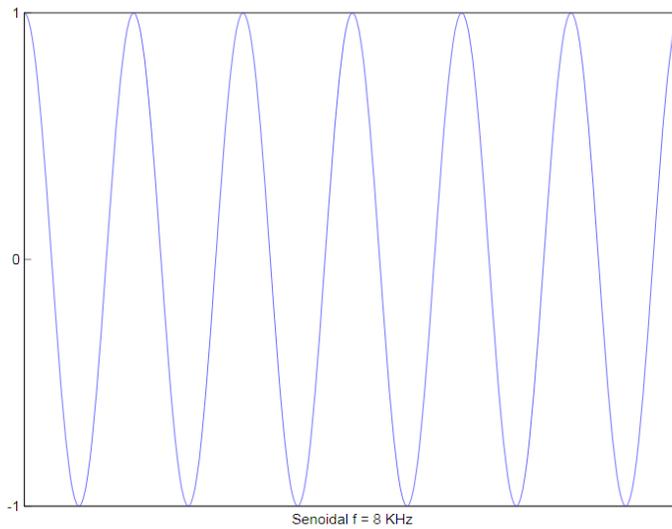
Y se muestran en la figura 19 y 20 respectivamente.

Figura 19. **Señal senoidal con frecuencia igual a 4 kHz**



Fuente: elaboración propia, con programa Matlab.

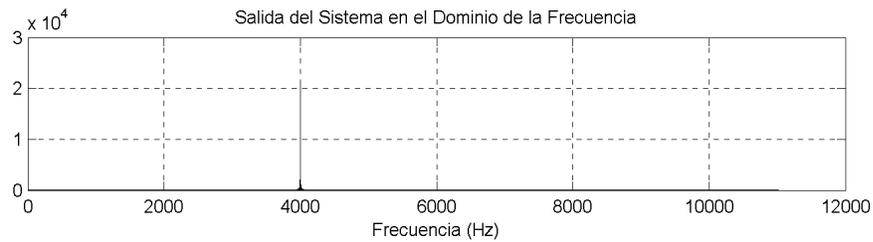
Figura 20. **Señal senoidal con frecuencia igual a 8 kHz**



Fuente: elaboración propia, con programa Matlab.

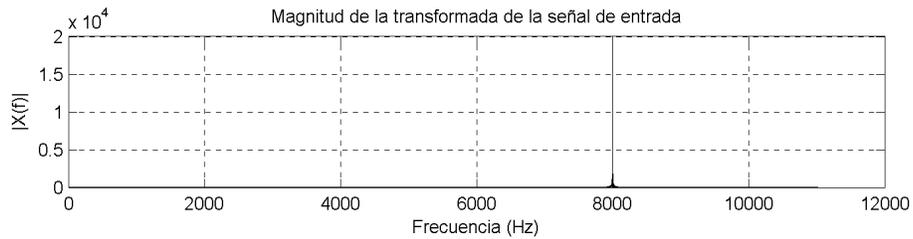
Las salidas del sistema se muestran en el dominio de la frecuencia para poder observar el efecto. La salida del sistema para la señal de 4 kHz y la señal de 8 kHz se muestra en la figura 21 y 22 respectivamente.

Figura 21. **Salida para la señal senoidal de 4 kHz**



Fuente: elaboración propia.

Figura 22. **Salida para la señal senoidal de 8 kHz**



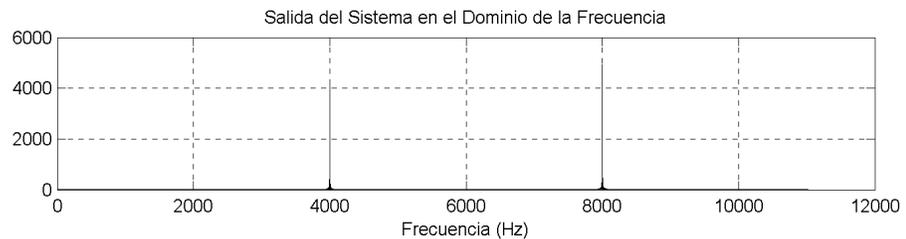
Fuente: elaboración propia.

Luego se ingreso al sistema la suma de ambas señales senoidales, esto es:

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = \text{sen}(2\pi(4000)t) + \text{sen}(2\pi(8000)t) \quad (5.4)$$

La salida que se obtuvo del sistema a la suma de las dos señales senoidales se muestra en la figura 23.

Figura 23. **Salida para la señal senoidal resultante de la suma**



Fuente: elaboración propia.

Este último resultado indica que el sistema cumple con la ecuación 5.1 y por lo tanto se puede afirmar que el sistema es lineal. Dado que el sistema además de ser invariante en el tiempo, resulta ser también lineal, se puede concluir que después de su diseño e implementación se obtuvo un sistema LTI.

## 5.2. Respuesta a señales relevantes

Existen algunas condiciones críticas en los sistemas que es de importancia conocer luego que se diseñan, en general se suelen considerar algunas, como la forma en que responde ante cambios bruscos a su entrada. Algunas otras condiciones críticas pueden ser más específicas, como en el caso de los sistemas que manejan señales de audio. En esta sección se muestran los resultados que se obtienen al aplicar señales que son de especial interés, ya que presentan condiciones críticas para el sistema.

### 5.2.1. Respuesta a un impulso

La función impulso se definió en la sección 2.1, en la ecuación 2.4. Por conveniencia se coloca de nuevo:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

La función impulso unitario, también conocida como función delta de Dirac, tiene varias características que hacen que sea adecuada para caracterizar sistemas, una de ellas es que su contenido espectral abarca todo el rango de frecuencias, por lo que se utiliza para obtener la respuesta en frecuencia de un sistema, o lo que es lo mismo en el caso de un sistema LTI, la función de transferencia. Esto se explica debido a que la transformada de Fourier de la función impulso es igual a uno, como se indica en la ecuación 5.6.

$$F\{\delta[n]\} = 1 \quad (5.6)$$

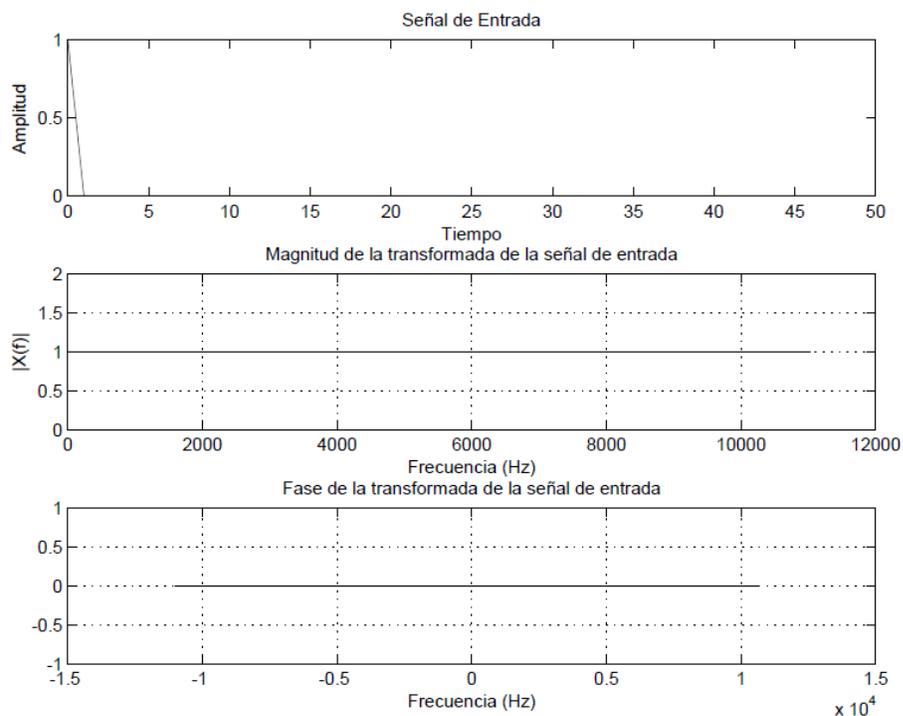
Se muestran las gráficas de los resultados de ingresar una señal impulso unitario al sistema, la entrada en la figura 24 y la salida en la figura 25.

Se pueden observar la señal tanto en el tiempo, como su contenido espectral, y la magnitud y fase por separado.

Es importante tener en cuenta que las señales que se observan son digitales, es decir que son discretas tanto en el tiempo como en su amplitud, ya que han sido cuantizadas. En las graficas de la amplitud y fase del espectro de las señales, se observa un corte abrupto a 11,025 kHz, esto se debe a que en el algoritmo se toma en cuenta la frecuencia con que fue muestreada la señal para determinar el rango en el cual trabajar y graficar la señal junto con su

contenido espectral. También es importante considerar que los cambios instantáneos que se consideran en las funciones, en la realidad toman algún tiempo y durante el proceso de conversión de analógico a digital o digital a analógico existe una distorsión de estas señales; por lo que un impulso o escalón solamente se pueden aproximar.

Figura 24. **Entrada de un impulso unitario al sistema**



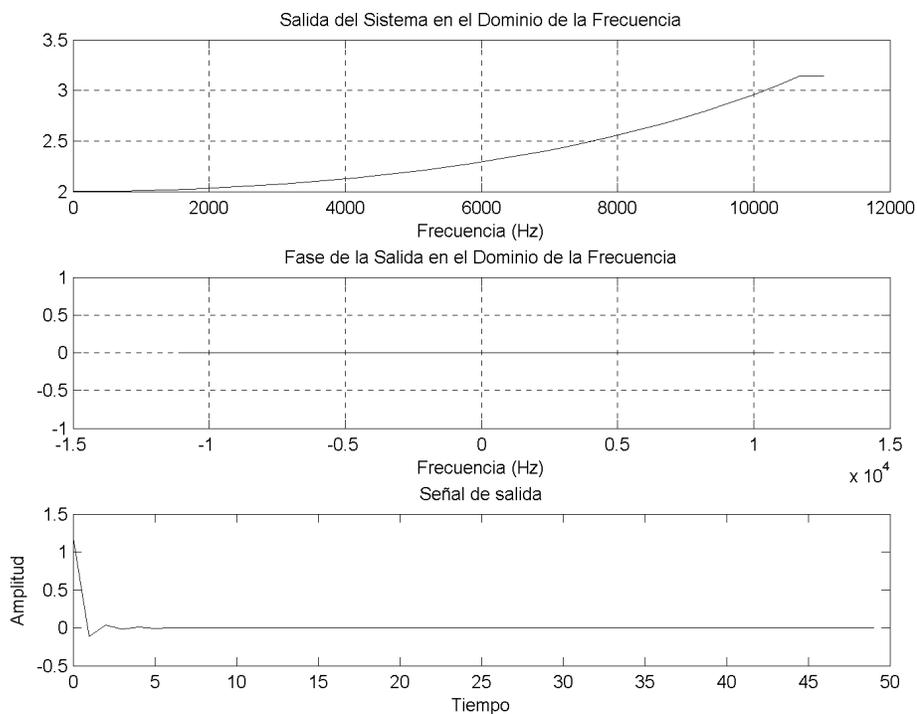
Fuente: elaboración propia.

En la figura 24 se puede observar la entrada al sistema de una señal de tipo impulso y se puede apreciar que su contenido espectral es constante en todo el rango mostrado, de 0 a 11,025 kHz.

El análisis de los resultados se centrará en la frecuencia, puesto que es donde se observa mejor el comportamiento del sistema y como este modifica las señales.

En la figura 25 se puede observar que la salida del sistema en el dominio de la frecuencia muestra una respuesta bastante similar a la respuesta que se deseaba obtener. En la magnitud se observa que se obtuvo el comportamiento esperado, como se muestra en la figura 11(a) de la sección 1.4.3.1, a excepción de la parte más alta de frecuencias en donde la respuesta es plana. El sistema se diseñó de tal forma que no modificará la fase de la señal, y se puede observar que el comportamiento es el esperado.

Figura 25. **Salida del sistema a un impulso unitario**



Fuente: elaboración propia.

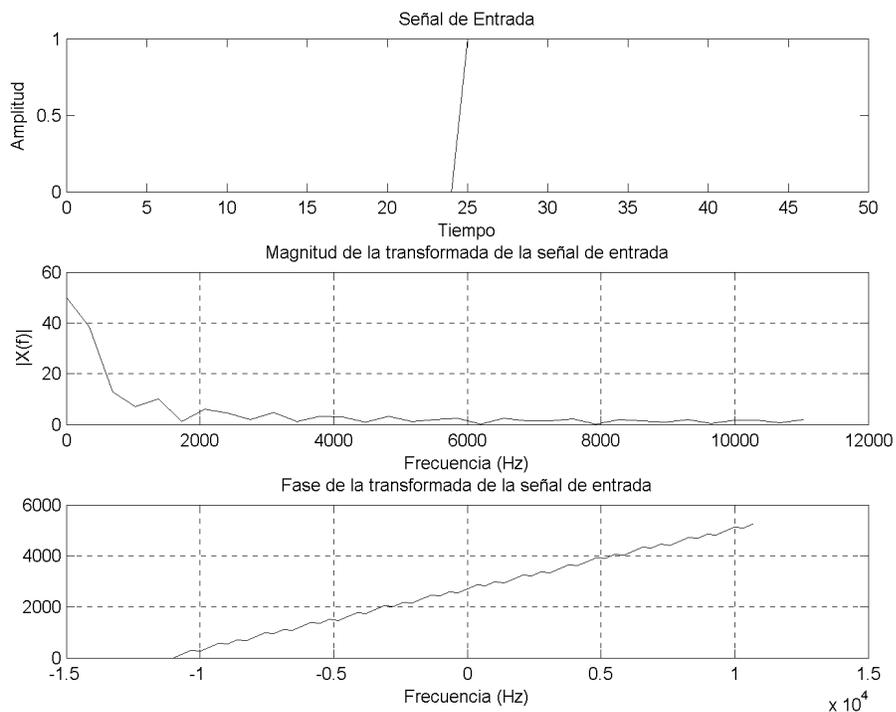
## 5.2.2. Respuesta a un escalón

La función escalón se define como:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

La ecuación 5.7 indica que la función escalón es 0 para valores de  $n$  menores a cero y es uno para valores de  $n$  iguales o mayores que cero, este cambio repentino en una señal escalón la hace útil para comprobar la respuesta del sistema ante cambios bruscos a su entrada. Esta se muestra en la figura 26.

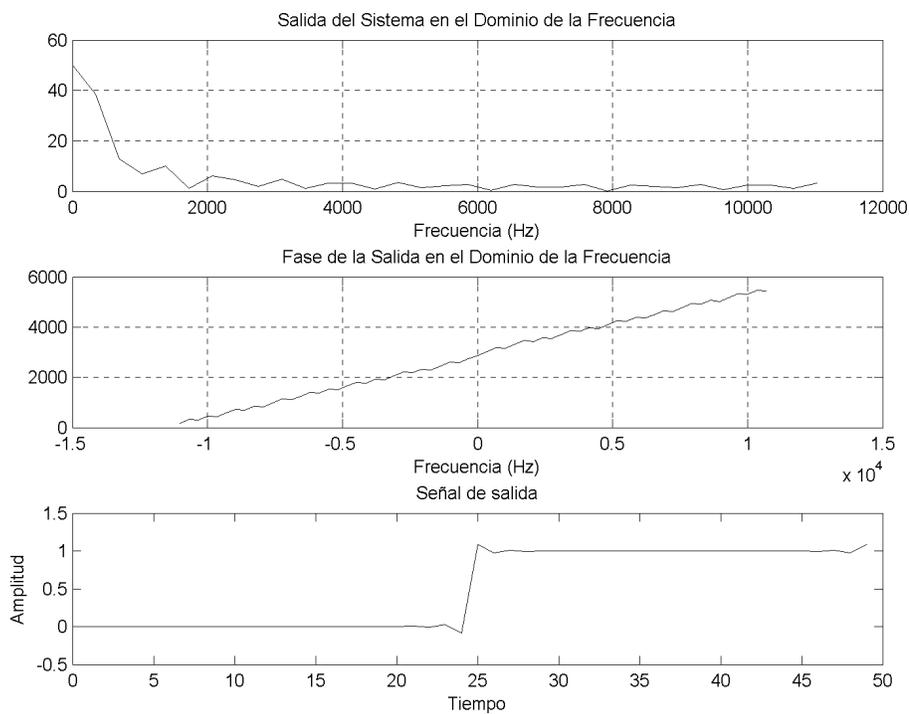
Figura 26. **Entrada de un escalón unitario al sistema**



Fuente: elaboración propia.

A la señal escalón que se ingreso al sistema se le dio un corrimiento para que se visualizara de mejor forma. En este caso nos interesa hacer un análisis de la respuesta temporal, en la figura 27 se puede observar que el sistema responde bien a cambios abruptos a su entrada, ya que no se produce ningún efecto negativo, uno de estos efectos podría ser que el sistema se vuelva inestable o produzca una salida que no esté relacionada con la entrada como normalmente lo está.

Figura 27. **Salida del sistema a una entrada escalón unitario**

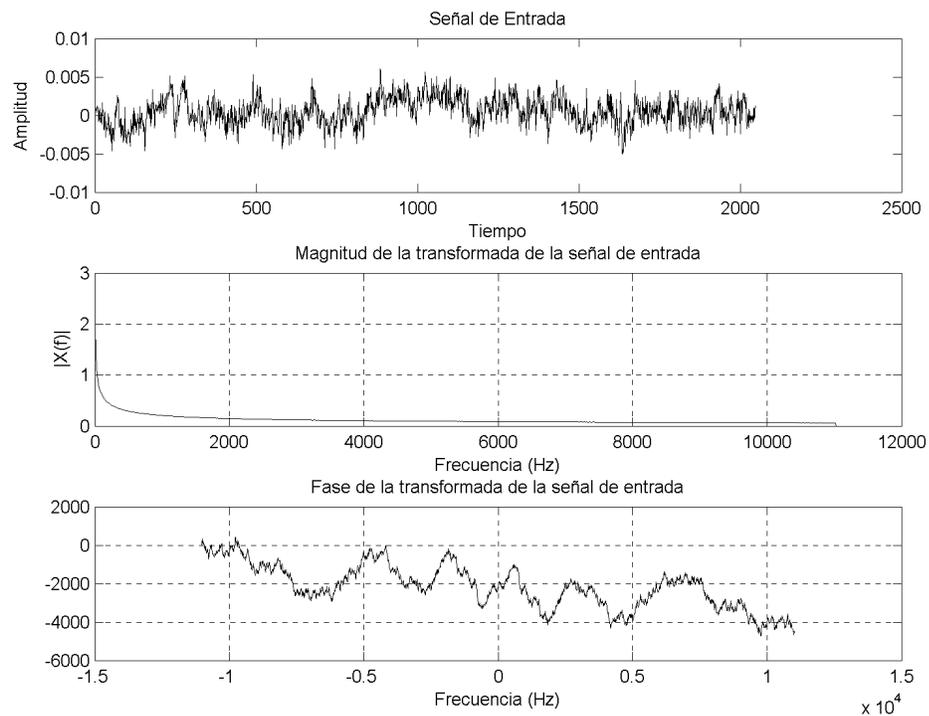


Fuente: elaboración propia.

### 5.2.3. Respuesta a una señal de ruido rosa

El ruido rosa es una señal aleatoria cuya densidad espectral de potencia es inversamente proporcional a la frecuencia, o sea que su amplitud varía de la forma  $1/f$ , a diferencia del ruido blanco, cuya densidad espectral de potencia es plana. Al ruido rosa se le suele llamar sonido plano, ya que si se analiza el contenido de su densidad espectral de potencia por octava, esta resulta plana. Por la forma en cómo el oído percibe el sonido, el ruido rosa resulta útil para analizar las propiedades de un sistema acústico.

Figura 28. **Entrada de una señal de ruido rosa al sistema**

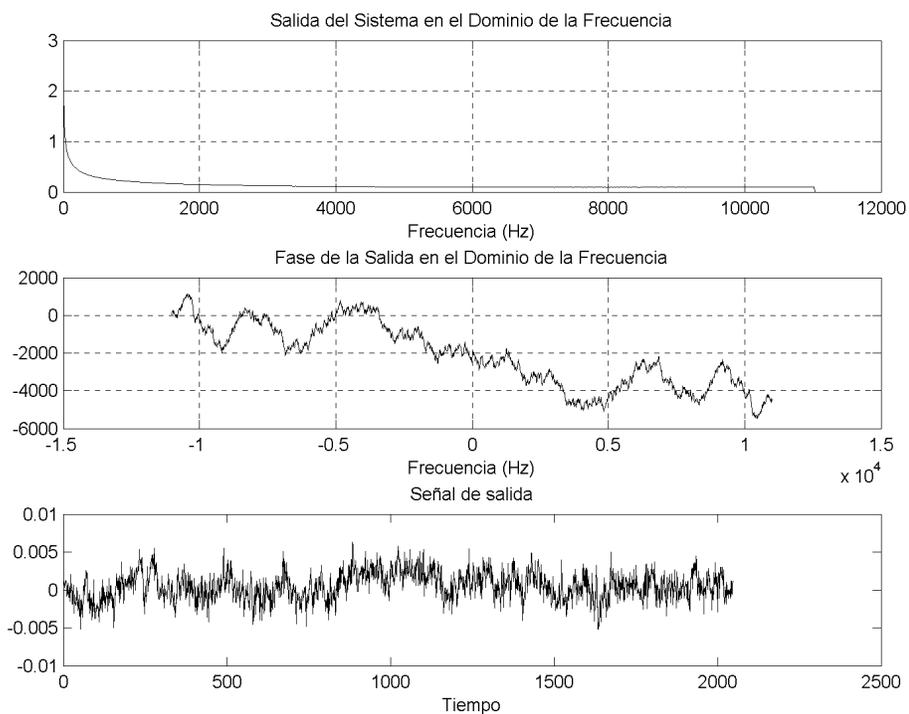


Fuente: elaboración propia.

Se muestran las gráficas de la señal de ruido rosa que se aplicó a la entrada del sistema y de la señal que se obtuvo a su salida en la figura 28 y 29 respectivamente.

Al observar la figura 28, se puede observar la señal de ruido rosa, tal y como se describió su contenido espectral. El resultado de la figura 29 se analizara en la sección 5.4, en donde se considera la percepción del oído.

**Figura 29. Salida del sistema a una señal de ruido rosa**



Fuente: elaboración propia.

### **5.3. Análisis de la exactitud de la función de transferencia**

Se analizara la exactitud de la función de transferencia que se obtuvo del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura al ingresar un impulso, para esto se comparan los valores que se obtienen de la ecuación 4.12 y la respuesta del sistema al impulso unitario.

En la tabla I, para la primera columna se tomaron varios valores de frecuencia menores al componente máximo de frecuencia de la señal impulso unitario que se ingreso al sistema, que es de 11 025 Hz; para obtener la segunda columna se evaluó la función de transferencia de la ecuación 4.12 que se utilizo como base para implementar el algoritmo y es la respuesta esperada del sistema; la tercera columna consta de los valores de la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura a la señal impulso unitario; y en la cuarta columna se muestra la diferencia entre la segunda y tercera columna, es decir la diferencia entre el valor esperado de la respuesta en frecuencia y el valor obtenido en la respuesta al impulso, esta fila muestra la exactitud del sistema.

En la tabla I se puede observar que la diferencia entre el valor esperado y el valor obtenido, para todos los casos evaluados es cero, utilizando 14 cifras decimales, por lo que la exactitud de la función de transferencia que se logro del sistema es hasta la decimocuarta cifra decimal, que es la cantidad de decimales que se utilizaron para los cálculos del algoritmo del sistema.

Tabla I. **Exactitud de la respuesta en frecuencia**

No.	$f$	Respuesta Esperada	Respuesta Obtenida	$\Delta$
1	174.99999999999900	1.00010361888249	1.00010361888249	0.00000000000000
2	525.00000000000100	1.00093311135716	1.00093311135716	0.00000000000000
3	874.99999999999900	1.00259498859135	1.00259498859135	0.00000000000000
4	1225.00000000000000	1.00509505797521	1.00509505797521	0.00000000000000
5	1575.00000000000000	1.00844208797213	1.00844208797213	0.00000000000000
6	1925.00000000000000	1.01264787789608	1.01264787789608	0.00000000000000
7	2275.00000000000000	1.01772735250984	1.01772735250984	0.00000000000000
8	2625.00000000000000	1.02369868282922	1.02369868282922	0.00000000000000
9	2975.00000000000000	1.03058343492412	1.03058343492412	0.00000000000000
10	3325.00000000000000	1.03840674895631	1.03840674895631	0.00000000000000
11	3675.00000000000000	1.04719755119660	1.04719755119660	0.00000000000000
12	4025.00000000000000	1.05698880233589	1.05698880233589	0.00000000000000
13	4375.00000000000000	1.06781778605995	1.06781778605995	0.00000000000000
14	4725.00000000000000	1.07972644261753	1.07972644261753	0.00000000000000
15	5075.00000000000000	1.09276175299789	1.09276175299789	0.00000000000000
16	5425.00000000000000	1.10697618037656	1.10697618037656	0.00000000000000
17	5775.00000000000000	1.12242817672143	1.12242817672143	0.00000000000000
18	6125.00000000000000	1.13918276391913	1.13918276391913	0.00000000000000
19	6475.00000000000000	1.15731220053751	1.15731220053751	0.00000000000000
20	6825.00000000000000	1.17689674745189	1.17689674745189	0.00000000000000
21	7175.00000000000000	1.19802554811408	1.19802554811408	0.00000000000000
22	7525.00000000000000	1.22079764234295	1.22079764234295	0.00000000000000
23	7875.00000000000000	1.24532313629686	1.24532313629686	0.00000000000000
24	8225.00000000000000	1.27172455592794	1.27172455592794	0.00000000000000
25	8575.00000000000000	1.30013841693706	1.30013841693706	0.00000000000000
26	8925.00000000000000	1.33071705133643	1.33071705133643	0.00000000000000
27	9275.00000000000000	1.36363073955859	1.36363073955859	0.00000000000000
28	9625.00000000000000	1.39907020811920	1.39907020811920	0.00000000000000
29	9975.00000000000000	1.43724956679333	1.43724956679333	0.00000000000000
30	10325.00000000000000	1.47840977696466	1.47840977696466	0.00000000000000
31	10675.00000000000000	1.52282276540493	1.52282276540493	0.00000000000000
32	11025.00000000000000	1.57079632679490	1.57079632679490	0.00000000000000

Fuente: elaboración propia.

#### 5.4. **Percepción del oído y efecto del sistema**

La forma como el oído humano percibe el sonido ha sido estudiada ampliamente, por lo que a pesar de ser compleja, se tiene bastante conocimiento de su percepción. Los modelos que se tienen sobre percepción del oído se han obtenido mediante el estudio del aparato auditivo, pero

principalmente, mediante métodos experimentales utilizando tonos puros y señales de ruido.

Es importante tener en cuenta la sensibilidad del oído a las propiedades acústicas, como la intensidad y la frecuencia, para analizar el efecto que tiene un sistema de tratamiento acústico, ya que la forma en cómo se evaluara este será por cómo se escucha un sonido luego de atravesar dicho sistema.

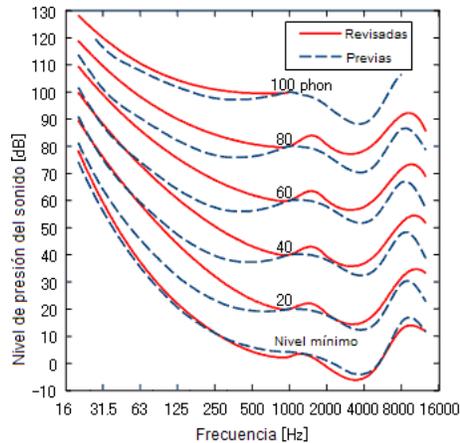
#### **5.4.1. Curvas de nivel de igual percepción**

La percepción del oído según los niveles de intensidad de los sonidos y la frecuencia a la cual se producen se representa mediante curvas de nivel de igual percepción, estas curvas representan los distintos niveles de presión de una señal sonora a las cuales el oído humano percibe las distintas frecuencias con la misma intensidad, estas curvas se han determinado de forma experimental. Las primeras curvas de igual nivel de percepción fueron las de Fletcher y Munson, en 1933, luego las de Robinson y Dadson en 1956, estas últimas se utilizaron como estándar durante varios años. Las curvas que se utilizan hoy están definidas en el estándar ISO 226:2003, que se basaron en trabajos de un grupo de investigación internacional y se muestran en la figura 30.

El estándar ISO 226:2003 se muestra con una línea continua y la revisión anterior ISO 226 de 1961 se muestra con una línea punteada.

Se puede observar que el nivel de presión necesario para percibir la misma intensidad del sonido es menor en el rango de 2 a 6 kHz, esto indica que el oído es más sensible en este rango de frecuencias.

Figura 30. **Curvas de nivel de igual percepción**



Fuente: elaboración propia.

#### 5.4.2. **Armónicos**

Los armónicos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de un sonido. El contenido armónico de los sonidos es el que permite diferenciar el timbre de una voz o de un instrumento musical, es decir lo que permite diferenciar una voz de otra con el mismo tono o frecuencia fundamental, al igual que permite diferenciar dos instrumentos musicales a pesar de tener el mismo tono. El contenido armónico contribuye a la percepción auditiva de la calidad del sonido.

En su mayoría, los armónicos por encima del quinto son imperceptibles debido a su baja intensidad, y por lo tanto no son significativos. Como se ha mencionado, el rango de frecuencias perceptibles para el oído puede llegar hasta los 22 000 hz. El contenido de armónicos de la voz no tiene componentes significativos por encima de los 10 000 hz, sin embargo, muchos instrumentos musicales si los tienen, es por esto que en la música los

armónicos dentro del rango de frecuencias de 10 000 a 20 000 hz son importantes. Esta es la razón por la que en las señales de audio digitales se suele utilizar frecuencias de muestreo de 44 100 hz o superiores, esta característica junto con una alta resolución son factores clave en la fidelidad de las señales de audio digitales.

#### **5.4.3. Aporte según la percepción del oído humano**

Para poder observar el efecto sobre la intensidad en el contenido espectral que el sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura implementado tiene, en la tabla II se muestran los valores en dB de la magnitud de la respuesta en frecuencia, para los mismos valores de frecuencia de la tabla I. Se utiliza la magnitud debido a que es el efecto que tiene el sistema en comparación con un sistema con una respuesta en frecuencia plana, es decir que no incluye ninguna ecualización y por lo tanto tiene una magnitud de 0 dB.

En la tabla II se puede observar que en las frecuencias bajas el efecto sobre la intensidad del contenido espectral es bastante pequeño, con un mínimo de 0,00044998777565 dB y aumenta hasta llegar a un máximo de 1,96119877030154 dB para  $\omega = \pi$ , en este punto es donde se tiene el valor que corresponde a  $f_s/2$ , que para este caso particular es 11 025 hz. Entonces, si se tomará un tono puro, a la máxima frecuencia que maneja el sistema,  $f_s/2$ , que es la frecuencia en donde se tiene un efecto mayor, el resultado del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura aumentaría su amplitud en un factor de 1,96119877030154 dB, que es un efecto perceptible considerando que el oído humano percibe que la intensidad de un sonido se ha duplicado al tener un aumento de 1 dB.

Tabla II. **Comparación de la respuesta en frecuencia**

No.	$f$	Respuesta Obtenida (magnitud)	$ H_i(e^{j\omega}) $ (dB)
1	174.99999999999900	1.00010361888249	0.00044998777565
2	525.00000000000100	1.00093311135716	0.00405056161540
3	874.99999999999900	1.00259498859135	0.01125529488523
4	1225.00000000000000	1.00509505797521	0.02207137579227
5	1575.00000000000000	1.00844208797213	0.03650962939168
6	1925.00000000000000	1.01264787789608	0.05458456938356
7	2275.00000000000000	1.01772735250984	0.07631446802416
8	2625.00000000000000	1.02369868282922	0.10172144489895
9	2975.00000000000000	1.03058343492412	0.13083157551736
10	3325.00000000000000	1.03840674895631	0.16367502092041
11	3675.00000000000000	1.04719755119660	0.20028617974472
12	4025.00000000000000	1.05698880233589	0.24070386446979
13	4375.00000000000000	1.06781778605995	0.28497150389056
14	4725.00000000000000	1.07972644261753	0.33313737421716
15	5075.00000000000000	1.09276175299789	0.38525486161169
16	5425.00000000000000	1.10697618037656	0.44138275944380
17	5775.00000000000000	1.12242817672143	0.50158560408970
18	6125.00000000000000	1.13918276391913	0.56593405373329
19	6475.00000000000000	1.15731220053751	0.63450531536744
20	6825.00000000000000	1.17689674745189	0.70738362606486
21	7175.00000000000000	1.19802554811408	0.78466079561357
22	7525.00000000000000	1.22079764234295	0.86643681883384
23	7875.00000000000000	1.24532313629686	0.95282056734429
24	8225.00000000000000	1.27172455592794	1.04393057228782
25	8575.00000000000000	1.30013841693706	1.13989591162147
26	8925.00000000000000	1.33071705133643	1.24085721810846
27	9275.00000000000000	1.36363073955859	1.34696782722738
28	9625.00000000000000	1.39907020811920	1.45839508797540
29	9975.00000000000000	1.43724956679333	1.57532186415738
30	10325.00000000000000	1.47840977696466	1.69794825945675
31	10675.00000000000000	1.52282276540493	1.82649360666520
32	11025.00000000000000	1.57079632679490	1.96119877030154

Fuente: elaboración propia.

Si se considera un sonido plano, como el ruido rosa de la sección 5.2.2., con una densidad espectral de potencia que varía inversamente proporcional a la frecuencia, como se observa en la figura 28. El sonido se considera plano debido a que el rango de frecuencias que ocupan las octavas aumenta conforme aumenta la frecuencia; basado en esta característica de la percepción del oído, y tomando en cuenta que el efecto del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura es directamente proporcional a la frecuencia,

se considera que el efecto del sistema es mayor que el que se observa en la magnitud con que modifica la intensidad del contenido espectral de la señal que se introduce al mismo.

Si se considera la sensibilidad del oído a distintas frecuencias, basada en las curvas de nivel de igual percepción de la figura 30, se puede concluir que el efecto del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura es considerable en el rango de frecuencias de 2 a 6 kHz a pesar que el efecto del sistema en estas frecuencias es de entre 0,08 y 0,50 dB, según la tabla II.

Si se considera que los armónicos son importantes en la distinción del timbre de instrumentos y voces, y en general, en la calidad del sonido percibido, y que el efecto sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura es mayor en el rango más alto de frecuencias, entonces, con dicho sistema se tiene un mayor efecto en señales que contienen armónicos significativos en las frecuencias más altas, como la música.



## CONCLUSIONES

1. La implementación de un sistema de procesamiento digital de señales permite realizar funciones de transferencia difícilmente realizables en un sistema analógico.
2. La ecualización que compensa la distorsión debida al efecto de apertura, que se introduce durante el muestreo mediante pulsos cuadrados, en una señal analógica de audio, se puede llevar a cabo mediante un sistema de procesamiento digital de señales.
3. El sistema para minimizar el efecto de apertura que se obtuvo es digital, causal, lineal e invariante en el tiempo.
4. La respuesta en frecuencia del sistema implementado cumple con las características de la respuesta en frecuencia que se diseñó para minimizar la distorsión por efecto de apertura.
5. El sistema para minimizar el efecto de apertura que se obtuvo se comporta de manera estable ante cambios bruscos a su entrada.
6. La respuesta en frecuencia que se obtuvo del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura es exacta hasta la decimocuarta cifra decimal.

7. El aporte del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura, basado en la percepción del oído, es considerable entre los 2 y 6 kHz.
  
8. El efecto del sistema para minimizar la distorsión por efecto de apertura, basado en la percepción del oído, es mayor en señales que contienen armónicos significativos en las frecuencias más altas.

## RECOMENDACIONES

1. Se podría incluir en la ecualización la fase de la señal, a pesar provocar un retraso mayor en el cálculo del algoritmo, puede llegar a ser factible según los requerimientos del sistema.
2. Para acelerar la ejecución del algoritmo se debería aplicar un método más eficiente para calcular la transformada rápida de Fourier.
3. Se podría tomar como base el diseño del algoritmo para minimizar la distorsión por efecto de apertura e implementarlo mediante hardware con un DSP, esto permitiría incluirlo dentro de dispositivos especializados en el campo del procesamiento digital de señales.
4. Estudiar el uso de la correlación para realizar un análisis cuantitativos de sistemas de procesamiento de señales como el que se realizó en este trabajo de graduación.



## BIBLIOGRAFÍA

1. ESCOBAR SALGUERO, Larry. *Diseño de filtros digitales*. México: UNAM, 2006. 100 p.
2. FEUER, Arie; GOODWIN, Graham C. *Sampling in digital signal processing and control*. Boston: Birkhauser Boston, 1996. 541 p.
3. KUO, Benjamín C. *Sistemas automáticos de control*. 7a ed. España: Prentice-Hall, 1997. 897 p.
4. OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER R. W.; BUCK, J. R. *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. 2a ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1989. 873 p.
5. RABINER, L. R.; SCHAFER, R. W. "Introduction to Digital Speech Processing," *Foundations and Trends in Signal Proccesing*. vol. 1, núm. 1-2, 2007. 150 p.
6. SACCO, Marco. *Audio course*. [en línea].  
<<http://www.audiosonica.com/en/course/post/2/Index>>. [Consulta 12 de agosto de 2012].
7. SEDRA, Adel S.; SMITH, Kenneth C. *Circuitos microelectrónicos*. 5a ed. México: McGraw-Hill, 2006. 816 p.

8. TAUB, H.; SCHILLING, D.J. *Principles of communication systems*. 2a ed. Singapore: McGraw-Hill, 1986. 759 p.