UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

"MANUAL PARA EL LABORATORIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES 2"

TESIS

presentada a la Junta Directiva de la
Facultad de Ingeniería

POR

Carlos Stuardo Alvarado Cano

al conferirsele el título de

Ingeniero Industrial

Guatemala, octubre de 1,996

Honorable Tribunal Examinador

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

" Manual para el laboratorio de investigación de operaciones 2 "

Como requisito previo a optar el título profesional de

Ingeniero Industrial

Carlos Stuardo Alvarado Cano

Miembros de la Junta Directiva

Decano:	*Ing. Julio Ismael González Podszueck*
Vocal 1o.:	*Ing. Miguel Angel Sánchez Guerra*
Vocal 2o.:	*Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano*
Vocal 3o.:	*Ing. Juan Adolfo Echeverría Méndez*
Vocal 4o.:	*Br. Fernando Waldemar de León Contreras*
Vocal 5o.:	*Br. Pedro Ignacio Escalante Pastor*
Secretario:	*Ing. Francisco Javier González López*

Tribunal que praticó el examen general privado

Decano:	*Ing. Jorge Mario Morales González*
Examinador:	*Ing. Mario Conde Sánchez*
Examinador:	*Ing. Julio Roberto Fernández Martínez*
Examinador:	*Ing. Fernando José Alvarez Paz*
Secretario:	*Ing. Edgar Aurelio Bravatti Castro*

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA
Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

Guatemala,
julio de 1,995

Ingeniero
Jorge Peláez Castellanos
Director de la Escuela de
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad de San Carlos de Guatemala

Señor Director.

Cumpliendo con lo resuelto por la Dirección de Escuela, se procedió a la asesoria y revisión del trabajo de tesis titulado MANUAL PARA LABORATORIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES 2, desarrollado por el estudiante universitario Carlos Stuardo Alvarado Cano.

El trabajo presentado por el estudiante Alvarado Cano, ha sido desarrollado cumpliendo con los requisitos reglamentarios, consultando bibliografía adecuada y siguiendo las recomendaciones de la asesoria, y en tal sentido tanto el autor como el asesor son responsables por el contenido del mismo.

Considero que el trabajo ha cubierto el estudio planeado en virtud de lo cual permito recomendar su aprobación.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS

Ing. Fernando Alvarez Paz
ASESOR

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial
FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Coordinador del Area de Métodos Cuantitativos y Economía de la Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer el dictamen del Asesor, el contenido y la presentación del trabajo de tesis titulado MANUAL PARA EL LABORATORIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES 2, presentado por el estudiante universitario Carlos Stuardo Alvarado Cano, recomienda la aprobación del presente trabajo.

ID Y ENSEÑAD A TODOS

Ing. Jorge Peláez Castellanos
COORDINADOR

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial
FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, mayo 1996

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer el dictamen del Asesor con el Visto Bueno del Coordinador de Area y el Licenciado en Letras, al trabajo de tesis titulado **MANUAL PARA EL LABORATORIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES 2**, presentado por el estudiante universitario Carlos Stuardo Alvarado Cano, aprueba el presente trabajo y solicita la autorización del mismo.

ID Y ENSEÑAD A TODOS

Ing. Jorge Peláez Castellanos
DIRECTOR
INGENIERIA MECANICA INDUSTRIAL

Guatemala, agosto de 1,996.

emds

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA
Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica Industrial, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica y Regional de Post-grado de Ingeniería Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial, al trabajo de tesis titulado **MANUAL PARA EL LABORATORIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES 2**, presentado por el estudiante universitario Carlos Stuardo Alvarado Cano, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

Ing. Julio Ismael González Podszueck
DECANO

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DECANO
FACULTAD DE INGENIERIA
DE GUATEMALA

Guatemala, agosto de 1,996.

emds

DEDICATORIA

A DIOS

A MI MADRE

Horalia del Rosario Cano de Alvarado
Luz y guía de toda mi vida

AGRADECIMIENTO

A mi padre
Carlos Gilberto Alvarado

A mi hermana
Lisbeth Alejandrina
por nuestro cariño

A mi abuelita
Rafaela Rodas
por todos sus cuidados

A mi abuelita
Elcira Alvarado Cardona

A mis dos luceros
Vera Rossana y Carlos Emilio

A mi amor eterno
Rossana Nineth Garcia Herrera
por su amor

A mis grandes amigos
Emilio García Herrera
Magnolia Herrera de García
por su comprensión

A mis amigos
Elizabeth, Mayra, Sergio, Edmundo y Eric

A mi Familia

A la Facultad de Ingenieria

MANUAL
PARA EL LABORATORIO DE
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Los adelantos tecnológicos y la evolución acelerada de las empresas en Guatemala, conduce a la utilización de las técnicas del área de los métodos cuantitativos, especialmente de la investigación de operaciones, para la resolución de los problemas, sin embargo, se necesita tener un conocimiento intermedio de éstas, así como la experiencia necesaria para su aplicación. La primera se obtiene en su mayor parte en las aulas universitarias y complementa a la segunda en el campo profesional.

La formación profesional adecuada requiere de documentos bibliográficos asequibles en cuanto a la obtención, y, comprensibles en la redacción y el enfoque; esto es, para hacer participativo el proceso de enseñanza aprendizaje y motivar la profundización posterior en la materia.

Estas cualidades se encuentran en este documento, en el cual se plasman los conocimientos de la investigación de operaciones de manera clara y concisa , y tiene, a su vez, una amplia cobertura en la solución de varios problemas tipo, en los cuales se avanza paso a paso en la misma, para que no queden lagunas sobre la forma en que se han obtenido los resultados.

Los temas centrales son: Procesos estocásticos, Teoría de colas y Teoría de inventarios; se presenta además, un cronograma con la forma de presentar el tema en clase, de acuerdo con la amplitud y el grado de dificultad de cada uno de los temas, para que, la comprensión y concatenación de los temas sea la óptima.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Proporcionar un documento guía para llevar a cabo de manera más ordenada, comprensible y viable, el laboratorio de Investigación de Operaciones II.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Proporcionar un documento de consulta, mediante el cual se cubra por completo el programa del curso Investigación de Operaciones II

Aportar un documento en el cual, tanto estudiantes como catedráticos, puedan resolver en cualquier momento las dudas que puedan surgir de los temas desarrollados teóricamente en la clase magistral.

Proporcionar una base teórica fácilmente comprensible, para que sea más viable para los estudiantes la resolución de los problemas prácticos.

Proporcionar un documento teórico-práctico que estimule en el estudiante el conocimiento y la aplicación de la Investigación de Operaciones, y lograr a través del mismo, un aprendizaje más ameno y motivante, para que se logren de esta manera mejores resultados en la evaluación del curso.

Resolver mnemotécnicamente varios problemas tipos de los temas de Investigación de Operaciones 2, y dar una herramienta básica para enfrentar y resolver adecuadamente problemas específicos sobre estos temas.

Resolver problemas que ilustren y amplíen la teoría, y arrojar plena luz sobre aquellos puntos sutiles sin cuya explicación el estudiante se siente inseguro, y los cuales, constituyen una repetición de los principios básicos, vitales, para un aprendizaje efectivo.

Dar respuesta a varios problemas propuestos, para que se incentive al estudiante en la resolución de los mismos, y dar la certeza al final de la solución de si se han o no cometido errores en su resolución, y estimular de esta manera el interés posterior por la materia.

LISTA DE SÍMBOLOS

PROCESOS ESTOCASTICOS

$f(\mathbf{p})$ = Función de probabilidad

p_{ij} = probabilidad de transición de un paso

$f_{ij}^{(n)}$ = Probabilidad de que el tiempo de primera pasada entre i y j, sea igual a n

μ_{ij} = Tiempo esperado de recurrencia de y a j

π_j = Probabilidad de estado estable

TEORÍA DE COLAS

N(t) = número de clientes en el sistema en el tiempo t siendo

Pn(t) = probabilidad de que n clientes estén en el sistema en el tiempo t

s = número de servidores en el sistema

Φ**n** = tasa media de llegadas de nuevos clientes.

μ**n** = tasa media de servicio para todo el sistema

τ = fracción esperada de tiempo que los servidores individuales están ocupados

L = número esperado de clientes en el sistema

Lq = longitud esperada de la cola

W = tiempo de espera en el sistema

Wq = tiempo de espera en la cola

TEORÍA DE INVENTARIOS

C = Costo incremental total

Co = Costo incremental total de la solución óptima

Q = Tamaño del pedido

Qo = Tamaño óptimo del pedido EOQ

a = Requerimiento anual en unidades

K = Costo de preparación

h = Costo de mantener el inventario (artículo/tiempo) unitario

P = Punto de reorden

L = Tiempo de entrega de los artículos

B = Nivel del inventario de seguridad

t = Tiempo entre pedidos

GLOSARIO

Ciclo: período de tiempo que transcurre entre una compra y otra.

Costo de capital: costo de oportunidad asociado al capital invertido en los inventarios.

Costo de mantener stock: valor atribuible a la mercadería que se tiene en el inventario.

Costo de ordenar: costo inherente a la orden de producción o pedido, no varía con la cantidad pedida.

Costo de recuperación: valor de la mercadería obsoleta que se vende a un precio inferior del costo.

Disciplina de prioridades: política mediante la cual, de acuerdo con la importancia particular de un trabajo, así se le prestará servicio, primero a los de alta y luego a los de baja prioridad.

Distribución estadística: es la relación entre una variable aleatoria y sus resultados; ésta puede ser discreta o continua, y debe estar denotada por una función densidad de probabilidad (f.d.p.)

Distribución exponencial: es una distribución estadística continua, que es encontrada a menudo en la teoría de lineas de espera, la cual tiene una f.d.p. dada como f(x) = ue ^-ux

Estado absorbente: una vez que el sistema está en el estado i, ya no puede salir de él.

Fuente de entrada: cantidad posible máxima de la cual pueden provenir los clientes que desean ingresar al sistema de servicio.

Matriz estocástica: ordenamiento de las probabilidades (Pij) de transición de un paso que denotan la relación entre todos los posibles estados.

Modelos determinísticos: modelos en los cuales la información se supone conocida, o sea, que todas las variables, y, sus relaciones entre ellas se conocen.

Modelos de optimización: nos llevan a obtener mediante su adecuada estructuración los valores óptimos de las variables que maximizan o minimizan el resultado general.

Modelo predictivo: modelo mediante el cual se predice el comportamiento futuro de las variables , las cuales son inherentes al mismo modelo dentro del resultado final.

Modelo probabilístico: en este tipo de modelos la información de las variables y su interrelación es imperfecta y se tiene un riesgo en la toma de decisiones.

Notación Kendall-Lee: notación que describe por completo las variables más importantes en el sistema de colas descrito.

Política de servicio: es la regla general mediante la cual se selecciona por un orden específico a los clientes de la linea de espera al inicio del servicio, por ejemplo, FIFO, al azar, o con prioridades.

Punto de reorden: es el punto, hablando de cantidad, en el que al llegar a ese nivel el inventario, debe reordenar la cantidad óptima del pedido.

Probabilidad de transcición: probabilidad condicional de que el sistema este en Xn en el tiempo tn, dado que estuvo en Xn-1 en el tiempo tn-1.

Probabilidad de estado estable: son las probabilidades Pij que se tienen como de transcición luego de n pasos, con n>>1.

Procesos de markov: es un proceso estocástico para el que la ocurrencia de un estado futuro depende del estado inmediatamente anterior y únicamente de él.

Procesos estocásticos: colección indizada de variables aleatorias {Xt}, en donde el subindice t, toma valores de un conjunto T dado.

Tamaño de pedido: es el valor en cantidad, al cual se pretende llegar con el análisis de inventarios, para optimizar los costos de su compra.

Tasa de descuento: valor en el que decrece el precio unitario de cierto producto, en la compra de cantidades mayores.

Tasa de llegada: es el cociente que indica la velocidad con que los clientes llegan al sistema.

Tasa de ruptura: cociente que indica la relación que existe entre el costo de escasez y el costo de almacenamiento.

Teoría de colas: es el estudio sistemático de los sistemas de entrada-transformación-salida, para determinar los valores y el comportamiento de las variables incluidas en ellos.

Tiempo de primera pasada: tiempo que le lleva a un proceso que está en el estado i para llegar al estado j por primera vez.

Tiempo de servicio: es el tiempo que transcurre desde que el cliente ingresa al mecanismo de servicio hasta que sale de él.

CAPÍTULO 1

LA PRÁCTICA EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2

Capitulo 1 LA PRáCTICA EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Como toda ciencia que se desconoce, para poder comprenderla, se necesita penetrar en ella, para unir todos sus conceptos y poder llevarlos a encontrar las conclusiones que se buscan. Esto se logra descubriendo uno a uno los conceptos primordiales,y, llevarlos a la práctica, en situaciones de la vida real, con lo cual se conjugan y se logra globalizarlos en la solución de un problema específico.

1.1 Introducción a la investigación de operaciones

Cuando se menciona la Investigación de Operaciones, es prácticamente imposible asociarla con alguna técnica definida y delimitada, o que se pueda hablar de un campo específico de aplicación.

Para dar una definición es preciso conocer algunas particularidades de la misma, las cuales ayudarán a comprender el término Investigación de Operaciones desde el punto de vista literal, de su aplicabilidad y además del porqué se utiliza comúnmente para la toma diaria de decisiones.

1.1.1 Origen

Durante la segunda guerra mundial, se dió un fenómeno muy particular: la tecnología había avanzado enormemente; los militares habían perdido la perspectiva de este avance; por eso decidieron que, para darle una utilización adecuada a los recursos de ataque y defensa que tenían, conformarían grupos (científicos y militares), que se encargarían globalmente de la investigación de operaciones bélicas; fue ésta la primera vez que se utilizó el término, comúnmente aplicado en el estudio de operaciones de guerra. Al final del conflicto bélico, se fue generalizando su aplicación en la investigación de las operaciones de la industria, de hospitales, de servicios, etc.
Esta generalización se va dando, conforme la especialidad y la complejidad de las operaciones, se hacían mayores,por lo que era más difícil asignar los recursos óptimamente, dando un marco ideal para la aplicación de la investigación de operaciones; esta situación aunada a un fuerte y paralelo crecimiento de las computadoras, dio por resultado un acelerado

desarrollo de la investigación de operaciones en muchos y más campos de aplicación.

Desde su nacimiento, se ha caracterizado por el uso del conocimiento científico a través del trabajo de grupos interdisciplinarios, con el propósito de determinar la mejor utilización de los recursos limitados.

1.1.2 Naturaleza

Se entiende por naturaleza a la esencia y propiedad característica de un ente; puede decirse de la investigación de operaciones, que es "la aplicación de métodos matemáticos al estudio y análisis de problemas complejos"[1].

El método que utiliza se identifica con el método científico, ya que generalmente el proceso es el siguiente:

OBSERVACIÓN MINUCIOSA → FORMULAR PROBLEMA → DELIMITAR PROBLEMA (A)

(A)
- DESCRIBIR EL MEDIO
- IDENTIFICAR ALTERNATIVAS
- DETERMINAR SISTEMA
- DETERMINAR ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN

→ CONSTRUCCIÓN MODELO CIENTÍFICO (GENERALMENTE MATEMÁTICO) →

FORMULACION HIPÓTESIS (REPRESENTACIÓN SISTEMA REAL) → VERIFICACIÓN MODIFICACIÓN HIPÓTESIS (MEDIANTE PRUEBAS) →

CONCLUSIONES POSITIVAS Y CLARAS → TOMA DE DECISIONES →

→ CONTROL Y VERIFICACIÓN

Se observa entonces que basándose en el método científico se llegan a obtener conclusiones mediante las cuales se pueden tomar decisiones adecuadas vertidas de la observación y análisis de un problema. Además, el esquema de análisis propone que el campo de aplicación sea muy amplio ya que este concepto de análisis puede aplicarse a una gama extensa de actividades, tales como: negocios, industria, comercio, estatales y de servicio.

Es importante mencionar que la Investigación de Operaciones no busca una de las mejores soluciones al problema, sino encuentra la solución óptima al mismo, de acuerdo con la representación del sistema real obtenido; esto da como resultado el mejor curso de acción. Dado que de esto depende una toma de decisiones basada en los óptimos resultados, se deduce que no se interesa tanto por el cómo son las cosas, sino más bien, en el cómo deben ser las cosas.

En la búsqueda de esta solución óptima, se crean modelos, los cuales, para que sean ideales y representativos de la solución del problema, deben incluir las características o los elementos del sistema en estudio que sean verdaderamente importantes, así como las interrelaciones entre estos elementos que determinen causas y efectos, ya que de esta manera, se podrán manipular los elementos del sistema y observar las variaciones en los resultados finales, que es, lo que a la postre, realmente interesa al investigador de operaciones.

Generalmente los resultados de la Investigación de Operaciones son cuantitativos; y por eso, al tratar a la vez de ser óptimo, dan la oportunidad para elaborar estimaciones en términos de las necesidades, objetivos y metas de una organización, lo que da una base sólida para una planeación y toma de decisiones más precisa.

1.1.3 Impacto

Teniendo ya una noción de lo que es la Investigación de Operaciones, puede entenderse más fácilmente que ha sido aplicada a todo tipo de organización, y se han obtenido muy buenos resultados para los ejecutivos en la solución de los problemas y, por ende en la toma acertada de decisiones.

De ahí el gran auge e impacto que ha tenido la Investigación de Operaciones a nivel mundial, ya que su campo de aplicación comprende áreas tales como planeación (planeación de inversiones), producción (control, inventarios), mercadeo (mezcla de productos), finanzas (presupuestos), milicia (distribución de fuerzas navales), banca (simulación de depósitos), otras (descongestionamiento de tránsito, programación tráfico aéreo).

Las técnicas más utilizadas para estos estudios comprenden la programación lineal, la teoría de colas, teoría de inventarios, programación dinámica, cadenas de markov, teoría de juegos y simulación.

El impacto de la Investigación de Operaciones se basa entonces en tener una gran variedad de técnicas, las cuales tienen un vasto campo y áreas de aplicación, y en los que siempre se han obtenido resultados excelentes, ya que las soluciones han sido óptimas con menores costos de resolución

1.2 Modelos de Estudio

La división de los modelos de estudio, de los cuales se ocupa fundamentalmente la investigación de operaciones, se lleva a cabo básicamente por la suposición que se haga sobre el tipo de información que se tenga sobre el sistema real que se analiza.

La información puede suponerse perfecta o imperfecta, según sea el caso; la primera nos lleva a una toma de decisiones en condiciones de certeza, mientras que la segunda, a una toma de decisiones con riesgo en un caso, y, con incertidumbre en el otro.

1.2.1 Modelos determinísticos

En este tipo de modelos, la información se supone perfecta; esto se refiere más a las variables y las interrelaciones; entre éstas, que son propias del sistema que se analiza.

Siendo esta suposición viable, implica que las decisiones serán tomadas en condiciones de certeza, por ejemplo, en un modelo de inventarios, si la demanda es conocida en un espacio del tiempo, se tendrá la certeza plena, de acuerdo al análisis, de cuándo y de cuánto hacer un pedido. Esto es por el tipo de información que se tiene para resolver el modelo, la cual nos da la seguridad de que algo ocurrirá en el futuro, y entonces se estará frente a un modelo determinístico de la Investigación de Operaciones.

1.2.2 Modelos probabilísticos

En este tipo de modelos, la información asociada al estudio del sistema real, se supone imperfecta o parcial, se refiere a las variables y sus interrelaciones propias al sistema del estudio.

Si este fuera el caso, implica que las decisiones serán tomadas en condiciones de riesgo, porque el valor de las variables no es conocido como tal.

Para ejemplificarlo, se tomará un ejemplo de los modelos de inventarios; si existiera en ellos el riesgo asociado a los fenómenos de estudio, la demanda, en un período de tiempo, no estaría dado por un número P fijo, sino por una variable aleatoria P, la cual tiene una función de probabilidad asociada y conocida $f(P)$; si éste es el caso, se estará estudiando un modelo probabilístico de la investigación de operaciones.

Si se habla de condiciones de incertidumbre, cabe mencionar, que siendo este el caso, no se conoce o no se puede determinar la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria en estudio, por lo que la situación se considera como de total inseguridad.

1.3 Desarrollo General de los Laboratorios

En las secciones siguientes, se trata de dar una idea general de la forma en que deben encararse los laboratorios y sus motivaciones; se busca dar un concepto global de la manera en que se espera que se puedan obtener los mejores resultados de la concepción del laboratorio.

1.3.1 Por qué del laboratorio?

Responder a esta pregunta, realmente puede llegar a ser complejo, pero para simplificarlo, puede anotarse que, dependiendo del ángulo de visión que se tenga, las razones para que un laboratorio exista, pueden dividirse en dos: se le ve desde el punto de vista de la parte administrativa de la universidad, que tiene como canal a la persona encargada de impartir el laboratorio, así como desde el punto de vista del estudiante que lo cursa.

Desde el punto de vista de la parte administrativa, las razones primordiales para tener un laboratorio en el curso de Investigación de Operaciones II, son:

a. Proporcionar al estudiante una opción más para adquirir conocimiento.

b. Mejorar de alguna manera las deficiencias que se tengan en cuanto a la preparación de la clase teórica.

c. Motivar al estudiante en el estudio posterior de la materia, así como la profundización en los temas tratados.

d. Ilustrar y ampliar todos los puntos que no queden claros en la clase teórica, mediante la resolución de problemas tipo.

e. Evaluar el nivel de conocimiento al iniciar y finalizar el curso.

f. Medir el nivel de aprendizaje del conjunto de estudiantes como grupo, así como individualmente.

Con la visión del estudiante, el laboratorio también tiene sus razones de ser:

a. Para resolver adecuadamente todas las dudas que se le presenten de cualquier punto dado en la clase teórica, así como de su fundamento.

b. Para determinar los fundamentos y pasos básicos de la resolución adecuada de los problemas prácticos.

c. Tener un canal de retroalimentación abierto en cualquier momento para llenar cualquier laguna de conocimiento que surja al avanzar el curso.

d. Para poder ampliar cualquier punto que se encuentre dentro del programa del curso.

e. Para poner en práctica constantemente los conocimientos impartidos en la clase teórica.

f. Elevar el nivel de razonamiento, comprensión y velocidad en la resolución de los problemas prácticos.

De aquí radica la importancia del laboratorio de Investigación de Operaciones II, y se debe tratar de obtener la manera óptima de fusionar ambos puntos de vista, para amalgamarlos en uno solo que cumpla con los objetivos de ambas partes; ésto es la razón fundamental de la conceptualización del laboratorio.

1.3.2 Descripción de desarrollo

En cualquier laboratorio y especialmente en el de Investigación de Operaciones 2, el catedrático auxiliar será quien le dé el enfoque que considere adecuado; aquí solamente se trata de dar una guía que ilustra los aspectos más importantes para que el laboratorio ofrezca y se obtenga de él lo esperado.

a. La lectura y estudio de la parte teórica debe ir paralela a las clases magistrales, ya que especialmente en los cursos del área de los métodos cuantitativos, es importante tener bien estructurados los fundamentos teóricos para poder enfrentar adecuadamente los problemas prácticos.

b. Para el primer laboratorio de cada capítulo, el estudiante debe leer y estudiar con anterioridad los puntos del capítulo correspondiente, así como, el problema mnemotécnico de dicho capítulo.

c. En el primer laboratorio de cada capitulo, se deberá dedicar el mayor tiempo posible a la resolución del problema mnemotécnico del capítulo, ya que en la resolución del mismo, deben plantearse adecuadamente los pasos de resolución, así como los cálculos elementales, ya que mediante este problema, el estudiante comprenderá cuál será el rumbo de acción para resolver los problemas prácticos del capítulo, y el problema mnemotécnico se ha plasmado pedagógicamente para obtener el efecto deseado.

d. Se debe evaluar por lo menos una vez por semana el nivel de aprendizaje del estudiante mediante exámenes cortos que evalúen la comprensión de los conceptos, más que la parte mecánica de los cálculos.

e. Para resolver los problemas en clase, se deben utilizar todos los recursos y materiales existentes en la facultad, por ejemplo: P.C., slides, retroproyector, ya que la utilización de los mismos permite que se aproveche mejor el tiempo estipulado para el desarrollo del laboratorio.

f. Hay que motivar el estudio e investigación por parte del estudiante fuera de las aulas, mediante hojas de trabajo, las cuales pueden ser individuales; si se pretende que el estudiante además comparta ideas y conocimientos y llegue a unificar criterios, puede hacerse de manera grupal.

g. Se debe tratar de que exista la mayor participación en clase por parte del estudiante, realizando, por ejemplo, mesas redondas y/o debates en grupo, ya que mediante los mismos se motiva la participación de todo el grupo, y se presenta una gran cantidad de información debido a la variación de pensamientos en el cambio de oradores, con lo que se puede llegar a ampliar o aclarar los puntos de vista.

1.3.3 Períodos disponibles:

En los semestres, generalmente se tienen suspensiones de clases por diferentes motivos, dentro de los más comunes se tienen:

Primer Semestre: Lectura Boletines, semana de huelga de dolores, semana santa, asuetos calendario (1 de mayo).

Segundo Semestre: semana cultura y deportes, semana de EMI, asuetos calendario (15 de septiembre).

Por eso los semestres se reducen casi a una duración de 14 semanas calendario, por lo que para poder desarrollar los laboratorios, solamente se cuenta con 14 períodos, los cuales tienen una duración de 50 minutos.

1.3.4 Cronograma:

Mediante el mismo, se pretende esquematizar la utilización de los períodos disponibles de acuerdo con la dificultad del tema que se va a tratar, de tal forma que se estime y se cumpla con el contenido del mismo.

La dosificación debe ir ligada de manera secuencial a lo que se realice en las clases magistrales; con esto, se garantiza que el estudiante tenga los conceptos básicos del tema antes de realizar la práctica del laboratorio, y así podrá resolver sus dudas, así como ampliar sus conocimientos del mismo.

Esta dosificación se hará con base en los catorce períodos disponibles, estos pueden variar debido a causas extremas como asambleas, o feriado que afecte directamente el día del laboratorio, por lo que se trabajará con trece períodos de disponibilidad, para tener uno de seguridad.

CRONOGRAMA

TEMA	PERIODOS	PUNTOS
Procesos estocásticos	1	Introduccion -procesos estocasticos
Procesos estocasticos	1	Cadenas Markov - tiempos 1era pasada
Procesos estocásticos	1	Clasificación estados - estados absorbentes
Procesos estocásticos	1	Examen corto
Procesos estocásticos	1	Repaso
Teoría de colas	1	Estructura básica, distribución exp, nac y muerte
Teoría de colas	1	Distribuciones no exp, distribuciones prob.
Teoría de colas	0.5	Examen corto
Teoría de colas	1.5	Repaso
Teoría de inventarios	1	Componentes
Teoría de inventarios	1	Determinísticos
Teoría de inventarios	1	Probabilísticos
Teoría de inventarios	1	Repaso

CAPÍTULO 2

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Capítulo 2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

2.1 Introducción

Los procesos estocásticos se consideran como de los modelos predictivos sobre lo que ocurrirá en elfuturo, en los cuales se encuentra inmersa cierta incertidumbre en cuanto al conocimiento del valor que puedan tomar las variables de dichos procesos.

Es importante tener una idea general de cómo poder determinar estos valores partiendo de las condiciones reales del problema, asi como, el hecho de poder enfrentarse a la resolución de los problemas, en los cuales se enfrente a este tipo de procesos.

2.2 Procesos estocásticos

Se definirá en inicio un proceso estocástico como una colección indizada de variables aleatorias $\{X_t\}$, en donde el subindice t, toma valores de un conjunto T dado [3]. Se tomará T como el conjunto de enteros no negativos y X_t, que representa una característica de interes medible en el tiempo t.

Un ejemplo aclara lo anterior, analizando el caso de un estudiante universitario que se inscribe en una carrera de cuatro años, en cada año, podrá inscribirse en el siguiente, o abandonará los estudios; $\{X_t\}$ podrá ser X_1, X_2, X_3, X_4; donde t= 1, 2, 3, 4, denotará el inicio de cada año lectivo, y, $X_{t=1,2,3,4}$, denotará la probabilidad de que el estudiante se inscriba en el año superior o abandone en cualquiera de las etapas del tiempo.

Suponga que usted compra un auto de la marca Toyota ahora, y que lo escoge tomando en cuenta, una comparación con otro de la marca Nissan y uno de la marca Honda, una pregunta que se puede responder utilizando los procesos estocásticos, y, un tipo particular de ellos denominado Cadenas de Markov, será: Cuál es la probabilidad de que compre usted un auto de la marca Nissan la próxima vez?.

t=1,2,3,...n serán las veces que usted compre auto.

X_t es la probabilidad de que compre un Toyota, un Nissan, o un Honda cada vez.

Se puede ver entonces que se han clasificado los individuos o cosas en categorías distintas o estados. Asi se pueden analizar las transiciones de estos individuos o cosas de un estado a otro a lo largo del tiempo.

2.3 Cadenas de Markov

La cadena de Markov es un caso especial de un proceso de Markov, por lo que se considerará primero la definición de este último.

El proceso de Markov, es un sistema estocástico, para el que la ocurrencia de un estado futuro, depende del estado inmediatamente anterior y únicamente de el [5].

Mostrando lo anteriormente citado de manera notacional, se dice que si $t_0 < t_1 < \ldots t_n$ (n=1,2,...) representan puntos en el tiempo, entonces la familia de variables aleatorias $\{Xt_n\}$ es un proceso de markov si:

$$P\{Xt_n = x_n \setminus Xt_{n-1} = x_{n-1}, \; Xt_0 = x_0\} =$$

$$P = \{Xt_n = x_n \setminus Xt_{n-1} = x_{n-1}\}$$

Para todos los valores posibles $Xt_0, Xt_1, \ldots Xt_n$.

La probabilidad $\pounds x_{n-1}, x_n = P\{Xt_n = x_n \setminus Xt_{n-1} = x_{n-1}\}$ es llamada la probabilidad de transcición y representa la probabilidad condicional de que el sistema esté en x_n en t_n, dado que estuvo en x_{n-1} en t_{n-1}, dado que sólo da la transcición de uno a otro subsiguiente estado; también se le conoce como la probabilidad de transcición de un paso.

Ahora se puede definir por completo una cadena de markov, si se tiene que la:

$$p_{ij} = P\{Xt_n = j \setminus Xt_{n-1} = i\} \qquad I,$$

es la probabilidad de transcición de un paso de ir del estado i en t_{n-1}, al estado j en t_n; se debe suponer que estas probabilidades son estacionarias en el tiempo. Entonces, las probabilidades de transcición del estado Xi al estado Xj, pueden ordenarse en una matriz como sigue:

$$P = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \cdots\cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \cdots\cdots & \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \cdots\cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m0} & p_{m1} & p_{m2} & p_{mn} \end{vmatrix}$$

Conocida como matriz estocástica u homogénea de transición

donde los p_{ij} deben cumplir que:

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ para toda } i \qquad \text{II}$$

$$p_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y toda } j \qquad \text{III}$$

Dicho en otras palabras, si se tiene una suceción de pruebas X_1, X_2, ...X_n, y los resultados satisfacen, y hacen que:

i) Cada evento pertenezca a un conjunto finito de resultados y si el resultado de la n-esima prueba es a_i, entonces se dice que el sistema está en el estado a_i en el paso n-esimo; y,
ii) El resultado de una prueba depende, a lo sumo, del resultado de la prueba inmediatamente anterior, y con cada par de estados (a_i, a_j) se establece la probabilidad p_{ij} de que a_j suceda inmediatamente después de a_i.

Entonces, se tiene que la matriz de transcición P junto con las probabilidades iniciales $\{a_j^0\}$ asociada a los estados Xj, definen completamente una cadena de markov.[6]

2.4 Tiempos de primera pasada

Muchas veces en las Cadenas de Markov, se desea saber, en cuánto tiempo, partiendo de un estado inicial, se llegará a determinado estado; a esto se le denomina el tiempo de primera pasada, y no es más que determinar el tiempo que le llevará al proceso, que está en el estado i, llegar al estado j por primera vez; este tiempo se mide en valores numéricos enteros, aumentado en uno, de acuerdo con cada paso de transición.

Cuando j=i, implica que este tiempo, es idéntico al que le toma al proceso una vez estando en j, regresar al estado i, y en este caso, es denominado el tiempo de recurrencia para el estado i.

Los tiempos de primera pasada están asociados a las distribuciones de las probabilidades de transición del proceso. Si $f_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que el tiempo de primera pasada del estado i al j sea igual a n, entonces:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}$$

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} \ldots - f_{ij}^{(n-1)} p_{jj} \qquad \text{IV}$$

con i y j fijos, las $f_{ij}^{(n)}$ son números negativos, tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1 \qquad \text{V}$$

Se puede determinar, además, el tiempo esperado de primera pasada, del estado i al estado j, y sedenota esta esperanza por μ_{ij}, la cual, se define como:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij} = 1 \end{cases}$$

Siempre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 .$$

entonces,

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj} \qquad \text{VI}$$

2.5 Clasificación de estados

Al afirmar que un estado tendrá un tiempo de recurrencia n, sabremos que el Proceso de Markov estará en él con una probabilidad dada; puede darse el caso de que un estado no se presente, o que se dé periódicamente, incluso de que se presente y ya no regrese a él de nuevo.

Recordemos que para i y j fijos, los $f_{ij}^{(n)}$ son números negativos, tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$$

entonces:

a.

Si esta suma es estrictamente menor que uno, un proceso que al iniciar se encuentra en i, nunca podrá llegar al estado j, y este será un estado nulo.

b.

Si la suma es igual a uno, con i = j, entonces se denomina estado recurrente, ya que esto implica que si el proceso esta en i, regresará de nuevo al estado i.

b.a

Un estado absorbente, es un caso especial de el de recurrencia, y significa que una vez estando en i, no se podrá salir de i, pudiéndose afirmar que un estado es absorvente, si la p_{ij} (probabilidad de transcición de un paso) es igual a 1.

c.

Si, $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$, entonces se denominará un estado transitorio, ya que esto implica que si se encuentra el proceso en el estado i, existe una probabilidad positiva de que no se regresará a él.

d.

Si la $p_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna $n \geq 0$, se afirma que el estado j, es accesible desde el estado i, siempre y cuando el estado i sea el inicial del proceso de estudio; si esta relación se da también partiendo del estado j, llegando a i, se dice que i y j son estados que se comunican.

2.6 Probabilidades de estado estable

En la sección 2.3, se definió la matriz de transcición P, dada por las probabilidades de transcición p_{ij}, de un paso; si se desea obtener las probabilidades de transcición de dos pasos, hay que multiplicar la matriz P por ella misma, para poder asi obtenerlas o sea que en la matriz $P^2 = P*P$, se tendrán las probabilidades de transcición de dos pasos. Si se desean tener las probabilidades de transcición de cuatro pasos, estarán dadas en la matriz $P^4=P^2*P^2$; en general

$$P^{(n)} = P*P*P*\ldots P = P_n$$

$$P^{(n)} = P*P^{(n-1)}$$

Más adelante se verá, en los ejemplos numéricos, que cuanto mayor es el número n, las probabilidades de transición $p_{ij}^{(n)}$, se estabilizan en un número constante llamado, probabilidad de estado estable y se denota por el signo π_j; estas probabilidades cumplen con las siguientes ecuaciones:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

$$\pi_j > 0$$

VII $$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}\ ,\ \text{para } j= 0,1,2,\ldots M$$

VIII $$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Los π_j's son iguales al inverso del tiempo esperado de recurrencia o sea que:

$$\pi_j = 1/\mu_{jj} \qquad \text{para } j= 1,2,\ldots M \qquad \text{IX}$$

Esto significa que cuando n es alto, la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado j, no depende de la distribución de probabilidades inicial definida para los estados, ya que después de varias iteraciones, las probabilidades de transición se estabilizan en un número determinado; no significa esto que el estado se quede estático en determinado momento, sino por el contrario, salta de uno a otro estado, pero con probabilidades de transición estables.

2.7 Problemas

Se ha mostrado ante el lector, en forma sintetizada, la teoría de los procesos estocásticos, pero ésta sólo se aclarará llevándola a la práctica. En esta sección, se procederá a aplicar la teoría a problemas tipo, para que quede enmarcada la resolución de los mismos; no está demás mencionar, que se desarrollarán problemas de baja y alta dificultad, así como que pueden encontrarse otras maneras de llegar a obtener las mismas respuestas, lo cual depende de la perspectiva y el enfoque personal que cada uno pueda tener para desarrollar y obtener la solución a los mismos.

2.7.1

Problema Mnemotécnico

Se presentará a continuación un problema, mediante el cual se presentan los pasos de resolución detalladamente, desde la obtención de la matriz de probabilidades (paso inicial), hasta la obtención de las probabilidades de estado estable.

PROBLEMA

El departamento de mantenimiento de una empresa da servicio a tres (A,B,C) departamentos de ella, sujeto a ciertas restricciones. Nunca se da servicio en el mismo departamento en días seguidos. Si se atiende al departamento A, entonces al día siguiente se atiende al B. Sin embargo, si se atiende a uno de los departamentos B o C, entonces al día siguiente se tiene doble probabilidad de atender a A, que de atender al otro departamento.

a) A la larga, ¿con qué frecuencia se atiende a cada departamento? .
b) Después de 4 días,¿ cuál es la probabilidad , atienda a B en ese día?.
c) Después de tres días,¿ cuál es la probabilidad de que habiendo atendido a A originalmente, atienda a B en ese día?
d) Si se comienza atendiendo a A,¿ cuál es la probabilidad de regresar a atender a A en el cuarto día?
e) Si originalmente estaba en el departamento B,¿ cuÁl podrá esperarse que sea el tiempo que deberá transcurrir para que atienda de nuevo al departamento B.

SOLUCIÓN

Para resolver cualquiera de las interrogantes que se plantean en este problema, lo primero que se debe hacer, es determinar la matriz de transición de un paso; esta matriz es de la forma:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & A & B & C \\
A & & & \\
P=B & & & \\
C & & & \\
\end{array}
$$

Al nunca darse servicio en días seguidos a un mismo departamento, no se podrá ir de A a A o de B a B, entonces esto estará determinado en la matriz de transición al existir en su diagonal principal, solamente ceros, ya que esta ~~dado~~ que $p_{AA} = p_{BB} = p_{CC} = 0$

$$
P=\begin{array}{c|ccc|}
 & A & B & C \\
A & 0 & & \\
B & & 0 & \\
C & & & 0 \\
\end{array}
$$

Como luego de atender a A, es 100% seguro que se atenderá al día siguiente a B; esta probabilidad, entonces, es igual a uno, y como no podrá ir de A a C, esta probabilidad es igual a cero, por lo que en la matriz se tiene:

$$
P=\begin{array}{c|ccc|}
 & A & B & C \\
A & 0 & 1 & 0 \\
B & & 0 & \\
C & & & 0 \\
\end{array}
$$

Si estamos en B, tenemos el doble de oportunidad de ir a A que a C, por lo que se tiene que:

$2p + p = 1$ y entonces $p = 1/3$, por lo tanto $2p = 2/3$

y la matriz toma los valores dados así :

$$
P=\begin{array}{c|ccc|}
 & A & B & C \\
A & 0 & 1 & 0 \\
B & 2/3 & 0 & 1/3 \\
C & & 0 & \\
\end{array}
$$

De igual forma para C, con lo que se completa la matriz de transición de un paso P, en la cual, las probabilidades de transición, están dadas por la descripción obtenida de las restricciones. Entonces P esta dada por:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

RESPUESTAS

a) A la larga ¿con qué frecuencia se atiende a cada departamento?

Esta interrogante presenta la necesidad de hacer uso de las ecuaciones VII y VIII, ya que son las que presentan una solución inmediata a la misma. Se partirá de la matriz de transición de un paso, para poder conformar el sistema de ecuaciones que se necesita para encontrar los valores π_i, los cuales son los que muestran los valores que a la larga toman las probabilidades de atender a cada departamento.

$$\pi_{ABC} = \pi_{ABC} * P$$

$$(\pi_A, \pi_B, \pi_C) * \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{array} \right|$$

Obteniéndose el resultado como una multiplicación de vector por matriz, es el sistema de ecuaciones:

$\pi_A = 2/3\ \pi_B + 2/3\ \pi_C$ (1)

$\pi_B = \pi_A + 1/3\ \pi_C$ (2)

$\pi_C = 1/3\ \pi_B$ (3)

Ademas $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$ (4) por VIII

Esto nos da un sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas, el cual se resuelve por los medios usuales teniéndose:

substituyendo 3 en 2 $\pi_B = \pi_A + 1/9\ \pi_B$ (5)

substituyendo 3 y 5 en 4,

$8/9\ \pi_B + \pi_B + 1/3\ \pi_B = 1$ de donde se obtiene

$\pi_B = 9/20$, substituyendo en 3
$\pi_C = 3/20$, substituyendo en 1
$\pi_A = 2/5$.

Entonces después de mucho tiempo, o a la larga, la probabilidad de que el departamento de mantenimiento de la empresa atienda a los departamentos A,B,C, será de 2/5, 9/20 y 3/20, respectivamente; dicho en otras palabras, el departamento de mantenimiento, atiende a el departamento A el 40% del tiempo, al departamento B el 45% del tiempo y al departamento C el 15% del tiempo.

b) Después de 4 días ¿cuál es la probabilidad de que atienda a B en este día? Como no se indica nada acerca de el punto de origen, o sea, el departamento que atendió originalmente, se asume, que originalmente se tiene una probabilidad idéntica de atender, a cada uno de los departamentos, o sea que $p^{(0)} = (1/3,1/3,1/3)$.

Entonces, para determinar la probabilidad de que se atienda a B en el cuarto día, se necesita obtener $p^{(4)}=p^{(3)}*P$.

$$p^{(1)} = p^{(0)}*P = (1/3,1/3,1/3)*\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (4/9,4/9,1/3)$$

$$p^{(2)}=p^{(1)}*P= (4/9,4/9,1/3)*\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}=(14/27,5/9,4/27)$$

$$p^{(3)}= p^{(2)}*P = (14/27,5/9,4/27) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$p^{(3)}= (38/81,46/81,5/27)$$

$$p^{(4)}= p^{(3)}*P = (38/81,46/81,5/27) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$p^{(4)}= (122/243, 43/81, 46/243)$$

Entonces de este resultado, se obtiene que la probabilidad de que se atienda a B en el cuarto día, es de 43/81 o sea del 53%.

c) Después de tres días,¿ cuál es la probabilidad de que habiendo atendido a A originalmente, se atienda a b en ese día? Se indica que originalmente ha atendido a A, entonces $p^{(0)} = (1,0,0)$; y, para determinar la probabilidad de atender a B en el tercer día, se necesita obtener $p^{(3)}$.

$$p^{(1)}= p^{(0)} * P = (1,0,0) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

$$p^{(2)}= p^{(1)} * P= (0,1,0) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (2/3,0,1/3)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)} * P = (2/3, 0, 1/3) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$p^{(3)} = (2/9, 7/9, 0)$$

Entonces la probabilidad de que se atienda al departamento B en el tercer día, habiéndose partido de atender al departamento A, es de 7/9 o sea del 77%.

d) Si originalmente estaba en el departamento A,¿ cuál es la probabilidad de que regrese a atenderlo en cuatro días? Esta interrogante plantea, por su redacción, determinar el tiempo de recurrencia para atender al departamento A, por lo que se utilizará IV para responderla, así como P^2, P^3, P^4, las que se calculan a continuación.

$$P^2 = P*P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$P^2 = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 7/9 & 0 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{vmatrix}$$

$$P^3 = P^2 * P = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 7/9 & 0 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 7/9 & 0 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$P^3 = \begin{vmatrix} 2/9 & 7/9 & 0 \\ 14/27 & 2/9 & 7/27 \\ 14/27 & 7/27 & 2/9 \end{vmatrix}$$

$$P^4 = P^2 * P^2 = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 7/9 & 0 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 7/9 & 0 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$P^4 = \begin{vmatrix} 14/27 & 2/9 & 7/27 \\ 26/81 & 49/81 & 2/27 \\ 26/81 & 16/27 & 7/81 \end{vmatrix}$$

Recordemos que:

$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} \ldots - f_{ij}^{(n-1)} p_{jj}$

entonces, en este caso, se debe determinar:

$f_{AA}^{(4)} = ??$

$f_{AA}^{(1)} = p_{AA}^{(1)} = 0$ de P

$f_{AA}^{(2)} = p_{AA}^{(2)} - f_{AA}^{(1)} p_{AA}^{(1)}$

$f_{AA}^{(2)} = 2/3 - 0$

$f_{AA}^{(3)} = p_{AA}^{(3)} - f_{AA}^{(1)} p_{AA}^{(2)} - f_{AA}^{(2)} p_{AA}^{(1)}$

$f_{AA}^{(3)} = 2/9 - 0 - 0$

$f_{AA}^{(4)} = p_{AA}^{(4)} - f_{AA}^{(1)} p_{AA}^{(3)} - f_{AA}^{(2)} p_{AA}^{(2)} - f_{AA}^{(3)} p_{AA}^{(1)}$

$f_{AA}^{(4)} = 14/27 - 0 - (2/3 * 2/3) - (2/9 * 0)$

$f_{AA}^{(4)} = 2/27$

Entonces, si originalmente se atendió al departamento A, existe un 7.40% de probabilidad de que, en el cuarto día, se atienda al departamento a.

e) Si se comienza atendiendo a B,¿ cuántos días podrá esperarse que transcurran para atender de nuevo al departamento B? Como ya se tiene el valor de π_B, entonces de IX, se tiene que $\mu_{jj} = 1/\pi_j$ y:

$\mu_{BB} = 1/(9/20) = 20/9 = 2.2$

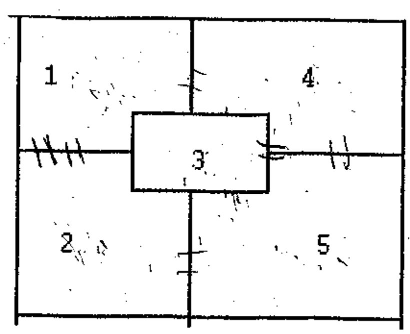
Entonces, puede esperarse que el tiempo de recurrencia si originalmente se atiende al departamento B, será de dos días.

2.7.2 Problemas resueltos

En esta sección, se ilustrará la forma de resolución práctica de ciertos problemas tipo, lo cual clarifica las posibles lagunas que se tengan sobre el estudio de los procesos markovianos.

2.7.2.1

En el diagrama, se presentan cinco compartimientos con comunicación entre ellos. Una persona tiene la misma posibilidad de atravesar cada una de las puertas, dado que siempre deberá pasar de uno a otro compartimiento, encuentre la matriz de transición.



Entonces, la cadena de markov tendrá cinco posibles estados, 1, 2, 3, 4, 5, de cada uno de los cuales podrá trasladarse con sus respectivas probabilidades a 1, 2, 3, 4 ,5, respectivamente; esto nos proporciona la matriz de transición de un paso:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Las probabilidades de atravesar cada una de las puertas es la misma, por lo que se explica cómo se obtienen los valores de una línea de esta matriz. De 1, sólo se puede mover hacia 4 o hacia 2, existen tres puertas, por lo tanto, la probabilidad de atravesar cada una de ellas, es un tercio, y habiendo dos puertas para ir de uno a dos, entonces esta probabilidad es de 2/3, y para ir de uno a cuatro, la probabilidad es de 1/3; de uno no se puede ir ni a tres ni a cinco, tampoco puede quedarse en uno, por lo que estas probabilidades son iguales a cero.

Véase cómo varía la matriz de transición, si además la persona pudiera quedarse en el compartimiento, con la misma probabilidad que tiene de atravesar una puerta.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccccc} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \end{array} \right\| \end{array}$$

2.7.2.2 En una fábrica de elementos eléctricos, existen cuatro departamentos, A1, A2, B1, B2, los cuales están agrupados en dos secciones, troquelado (A1, A2) y ensamble (B1, B2), entre los mismos se da el trasiego de un material de fabricación inter secciones y/o inter departamentos. Entre los departamentos de troquelado, puede esperarse que se de el trasiego de material con una probabilidad de 1/2, y de troquelado a ensamble con probabilidad de 1/4. También puede darse el trasiego de ensamble a troquelado con probabilidad de 1/2, y no se da entre los dos deptos de ensamble. A la larga, con que frecuencia recibe cada uno de los departamentos el trasiego de material.

Esto es una cadena de markov con espacio de estados A1, A2, B1, B2; la matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & A1 & A2 & B1 & B2 \\ A1 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ A2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ B1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ B2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}$$

$A_{11} = A_{22} = 0$ ya que no puede trasegarse de A_1 a A_1.
$B_{11} = B_{22} = 0$ ya que no puede trasegarse de B_1 a B_1.
$B_{12} = B_{21} = 0$ ya que no puede trasegarse de B_1 a B_2.

La incógnita en este problema es π_i, con i = A1, A2, B1, B2.

Se asumen probabilidades iguales para el vector de $\pi_{i's}$

$$\pi_{A1,A2,B1,B2} = (\pi_{A1}, \pi_{A2}, \pi_{B1}, \pi_{B2}) * P$$

$$(\pi_{A1}, \pi_{A2}, \pi_{B1}, \pi_{B2}) * \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pi_{A1} = 1/2\pi_{A2} + 1/2\pi_{B1} + 1/2\pi_{B2}$$
$$\pi_{A2} = 1/2\pi_{A1} + 1/2\pi_{B1} + 1/2\pi_{B2}$$
$$\pi_{B1} = 1/4\pi_{A1} + 1/4\pi_{A2}$$
$$\pi_{B2} = 1/4\pi_{A1} + 1/4\pi_{A2}$$
$$1 = \pi_{A1} + \pi_{A2} + \pi_{B1} + \pi_{B2}$$

Resolviendo este sistema de cinco ecuaciones con cuatro incógnitas, se obtiene:

$$\pi_{A1} = 1/3$$
$$\pi_{A2} = 1/3$$
$$\pi_{B1} = 1/6$$
$$\pi_{B2} = 1/6$$

Entonces, se puede afirmar que los departamentos A1, A2, recibirán el 33% de las veces el trasiego de materiales; y los departamentos B1, B2, recibirán cada uno el 16% de las veces el trasiego de materiales. De este resultado, puede inferirse la frecuencia de viajes entre departamentos y poder así mejorar en cuanto a los recorridos en planta.

2.7.2.3 El área de ventas de un vendedor de COINSA, la componen tres ciudades, Totonicapán Quetzaltenango, y Huehuetenango (1,2,3 por nomenclatura). El vendedor sabe que al vender en una ciudad un día, tiene probabilidad 0 de vender algo al día siguiente en ella; además por la cercanía, del último lugar de venta, luego de vender en Quetzaltenango, va a vender a Huehuetenango. Sin embargo, si vende ya sea en Totonicapán o en Huehuetenango, al día siguiente vende con triple probabilidad en Quetzaltenango que en la otra ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Regrese a Quetzaltenango en cuatro días por primera vez.
b) Si estaba en Totonicapán, vaya por primera vez a Huehuetenango en tres días.
c) Esté en Quetzaltenango después de tres días.
d) Esté en Quetzaltenango después de cuarenta días.

Resolución: para mayor facilidad se han denotado por los subíndices 1,2,3 las respectivas ciudades, entonces, la matriz de transición presenta la siguiente configuración:

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 3p & p \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & p & 3p & 0 \end{array} \Rightarrow \qquad P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1/4 & 3/4 & 0 \end{array}$$

$3P+P=1$
$4P=1$
$\boxed{P=1/4}$

Calculando:

$$P^2 = P * P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.062 & 0.1875 & 0.75 \\ 2 & 0.25 & 0.75 & 0.00 \\ 3 & 0.00 & 0.1875 & 0.8125 \end{array} \Rightarrow$$

$$P^3 = P^2 * P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.1875 & 0.6093 & 0.2031 \\ 2 & 0.00 & 0.1875 & 0.8125 \\ 3 & 0.2031 & 0.6093 & 0.1875 \end{array} \Rightarrow$$

$$P^4 = P^3 * P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.507 & 0.2929 & 0.6562 \\ 2 & 0.2031 & 0.6093 & 0.1875 \\ 3 & 0.0468 & 0.2929 & 0.6601 \end{array}$$

a)

Recordemos que:

$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} \ldots - f_{ij}^{(n-1)} p_{jj}$,

entonces, en este caso se debe determinar:

$f_{22}^{(4)} = ??$

$f_{22}^{(1)} = p_{22}^{(1)} = 0$

$f_{22}^{(2)} = p_{22}^{(2)} - f_{22}^{(1)} p_{22}^{(1)}$

$f_{AA}^{(2)} = 0.75 - 0$

$f_{22}^{(3)} = p_{22}^{(3)} - f_{22}^{(1)} p_{22}^{(2)} - f_{22}^{(2)} p_{22}^{(1)}$

$f_{22}^{(3)} = 0.1875 - (0 * 0.75) - (0.75 * 0)$

$f_{22}^{(3)} = 0.1875$

$f_{22}^{(4)} = p_{22}^{(4)} - f_{22}^{(1)} p_{22}^{(3)} - f_{22}^{(2)} p_{22}^{(2)} - f_{22}^{(3)} p_{22}^{(1)}$

$f_{AA}^{(4)} = 0.6093 - 0 (0.75 * 0.75) - 0$

$f_{AA}^{(4)} = 0.0468$

Entonces, el vendedor tiene un 4.6% de probabilidades de regresar a Quetzaltenango en cuatro días por primera vez.

b)

$f_{13}^{(3)} = ??$

$f_{13}^{(1)} = p_{13}^{(1)} = 0.25$

$f_{13}^{(2)} = p_{13}^{(2)} - f_{13}^{(1)} p3^{3(1)}$

$f_{13}^{(2)} = 0.75 - 0.25 (0)$

$f_{13}^{(2)} = 0.75$

$f_{13}^{(3)} = p_{13}^{(3)} - f_{13}^{(1)} p_{33}^{(2)} - f_{13}^{(2)} p_{33}^{(1)}$

$f_{13}^{(3)} = 0.2031 - (0.25 * 0.8125) - (0.75 * 0)$

$f_{13}^{(3)} = 0.0000025$

Si el vendedor se encuentra en Totonicapán, tiene posibilidades nulas de ir por primera vez a Huehuetenango en tres días.

c)

$p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)$

$p^{(1)} = p^{(0)} * p = (0.0832, 0.4995, 0.4162)$

$p^{(2)} = p^{(1)} * p = (0.1041, 0.3746, 0.5203)$

$p^{(3)} = p^{(2)} * p = (0.130, 0.4268, 0.4006)$

La probabilidad de que se encuentre el vendedor en Quetzaltenango después de tres días es de 42.68%.

d)

$\pi * P = ??$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) * \begin{vmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \end{vmatrix}$$

$\pi_1 = 0.25\pi_3$
$\pi_2 = 0.75\pi_1 + 0.75\pi_3$
$\pi_3 = 0.25\pi_1 + \pi_2$

$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$

Resolviendo:

$\pi_1 = 0.457143$
$\pi_2 = 0.428571$
$\pi_3 = 0.114286$

La probabilidad de que el vendedor esté en Quetzaltenango después de 40 días, es de 42.85%.

2.7.2.4 Un corredor de bolsa tiene Q. 300,000.00 cuando compra, y puede perder Q 100,000.00 con probabilidad p, pero puede ganar Q. 200,000.00 con probabilidad q, que contiene p tres veces a q.
Dejará de comprar si pierde los Q. 300,000.00, o si gana por lo menos otros Q. 300,000.00. ¿ Cuál es la probabilidad de que se hagan por lo menos 4 compras?

Para efectos de la solución, se denotará:
1 = 100,000.00
2 = 200,000.00
3 = 300,000.00, etc.

La matriz de transición está dada por:

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \geq 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \geq 6 \end{array} \\
\left\| \begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & p & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\
0 & 0 & p & 0 & 0 & q & 0 \\
0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & q \\
0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

P = 3q

Como p contiene tres veces a q, y además p + q = 1, entonces 3q + q = 1 » q = 1/4 y p = 3/4 por lo que la matriz de transición, queda:

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \geq 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \geq 6 \end{array} \\
\left\| \begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

a)

El corredor puede dejar de comprar de dos maneras, o llega a tener por lo menos Q. 600,000.00, en cuatro compras ($p_6^{(4)}$); o que pierda el dinero en cuatro compras ($p_0^{(4)}$); entonces la probabilidad de que por lo menos haga cuatro compras, está dada por

$$1-p_6^{(4)}-p_0^{(4)}$$

Como el corredor comienza con Q. 300,000.00, entonces:

$p^{(0)} = (0,0,0,1,0,0,0)$

Calculando:

$p^{(1)} = p^{(0)} * P = (0,0,0.75,0,0,0.25,0)$

$p^{(2)} = p^{(1)} * P = (0,0.5625,0,0,0.375,0,0.0625)$

$p^{(3)} = p^{(2)} * P = (0.4218,0,0,0.4218,0,0,0.1562)$

$p^{(4)} = p^{(3)} * P = (0.4218,0,0.3164,0,0,0.1054,0.1562)$

Entonces:

$1-p_6{}^{(4)}-p_0{}^{(4)} = 1 - 0.4218 - 0.1562$

$1-p_6{}^{(4)}-p_0{}^{(4)} = 0.4218$

La probabilidad de que el corredor de bolsa haga por lo menos cuatro compras, es el 42.18%.

2.7.2.5 La maquinaria de reciclado, de cierta planta, tiene dos posiciones de trabajo en su transfer de tornillo pistón (abierto=A, cerrado=C), lo cual incide en el tipo de material (a,b) que puede utilizarse en determinado día. De acuerdo con los datos obtenidos estadísticamente, se puede emplear como modelo una cadena de markov para estudiar el cambio de posiciones en el transfer de tornillo pistón. La probabilidad de cambio de abierto a cerrado es de 0.30; de manera semejante, la probabilidad de transición de cerrado a abierto es de 0.1. Las transiciones ocurren de un día para otro solamente.

a) Determine la matriz de probabilidades de transición.

b) Obténgase las probabilidades de las posiciones del transfer después de 50 días.

c) Si el día de hoy está cerrado, obtenga las probabilidades de poder utilizar el material B dentro de tres días.

d) Obtenga el tiempo de primer paso.

SOLUCIÓN

a) La matriz de transición tiene dos posibles sucesos; abierto y cerrado.

$$P^4 = P^2 * P^2 = \begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5128 & 0.306 & 0.1812 \\ 1 & 0.4872 & 0.3196 & 0.1932 \\ 2 & 0.4872 & 0.318 & 0.1948 \end{array}$$

$$P^5 = P^4 * P = \begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.481 & 0.301 & 0.183 \\ 1 & 0.444 & 0.281 & 0.169 \\ 2 & 0.493 & 0.313 & 0.169 \end{array}$$

$$P^{10} = P^5 * P^5 = \begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.50 & 0.3125 & 0.1875 \\ 1 & 0.50 & 0.3125 & 0.1875 \\ 2 & 0.50 & 0.3125 & 0.1875 \end{array}$$

De P^4 se obtienen las distribuciones de la función de probabilidades de cuarto paso, mientras que de P^{10}, se obtiene la función de probabilidades de décimo paso.

b) ¿Cuántas familias de las 5000 preferirán a la larga la marca 1?

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{m} \pi_i * P_{ij}$$

$$\pi_0 = 0.7\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2$$
$$\pi_1 = 0.2\pi_0 + 0.5\pi_1 + 0.3\pi_2$$
$$\pi_2 = 0.1\pi_0 + 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$\pi_0 = 0.5$ $\qquad$ $\pi_1 = 0.3125$ $\qquad$ $\pi_2 = 0.1875$

Entonces,

$5000 * 0.3125 = 1562.5$

De las 5000 familias del mercado meta, se puede esperar que 1562 familias prefieran a la larga la marca 1 del cereal para el desayuno.

c) Esta pregunta se responde encontrando la recurrencia de la marca 0, o sea si:

$$\pi_j = 1/\mu_{jj} \Rightarrow \mu_{00} = 1/\pi_0$$
$$\mu_{00} = 1/0.5 = 2$$

Si se compra inicialmente la marca 0, se puede esperar que se volverá a comprar la marca 0, dos períodos después, o sea, después de dos compras.

2.7.2.7 Un hombre está en un punto entero sobre el eje X, entre el origen = 0 y el punto 5. Da un paso de unidad a la derecha con probabilidad p o a la izquierda con probabilidad q = 1-p, salvo cuando está en el origen donde da el paso a la derecha al punto 1, además, si está en el punto 5, da un paso a la izquierda al punto 4.

Un compañero le apuesta a usted que el hombre no estará en el origen en el paso tres, ni en el punto tres en el paso cuatro, ¿apostaría usted con el por lo contrario?.

Se designa por X_n la posición después de n pasos; es una cadena de markov con espacio de estados a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, con cada a_i indicando que el hombre esta en el punto i.
La matriz de transición presenta las probabilidades p (derecha + 1), y q (izquierda + 1) salvo en los casos del origen y del punto cinco, en los cuales es uno a la derecha e izquierda respectivamente, por lo que la matriz queda:

$$\begin{array}{c|cccccc|} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

La probabilidad de que esté en el origen después de tres y cuatro pasos, puede determinarse a partir de la distribución original $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, ya que comienza el recorrido en el punto dos; entonces, la distribución luego de tres pasos est dada por $p^{(3)}$ y luego de cuatro pasos por $p^{(4)}$.

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0,0,1,0,0,0) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$p^{(1)}=(0,q,0,p,0,0)$

$$p^{(2)}=p^{(1)}P= (0,q,0,p,0,0) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$p^{(2)}=(q^2,0,2pq,0,p^2,0)$

$$p^{(3)}=p^{(2)}P= (q^2,0,2pq,0,p^2,0) * \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$p^{(3)}= (0,q^2 + 2pq^2,0,3p^2q,0,p^3)$

$p^{(4)}=p^{(3)}P= (q^3 + 2pq^2,0,pq^2 + 5p^2q2,0,3p^3q +p^3,0)$

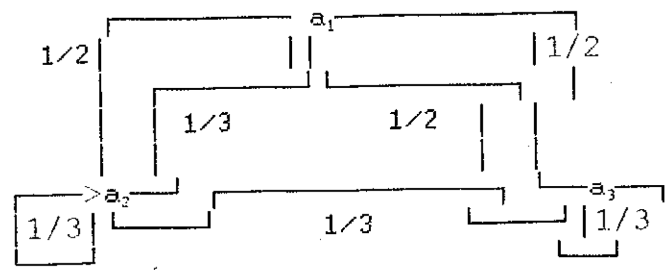
Por lo tanto, después de tres pasos, puede afirmarse que el hombre, si partió del punto dos, tiene 0 probabilidades de encontrarse en el origen, y en el pasos cuatro, también tiene 0 probabilidades de encontrarse en el punto tres, por lo que usted no debe realizar la apuesta, ya que tendría un 100% de probabilidades de perderla.

2.7.3 Problemas Propuestos

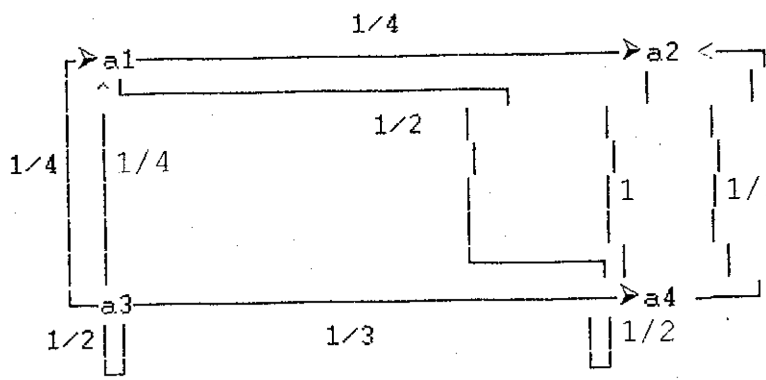
A continuación, se transcriben varios problemas para que el lector pueda aplicar los conocimientos y la práctica adquirida para la resolución de los mismos;se pretende que la habilidad se fundamente y solidifique al resolver con soltura los problemas propuestos.

2.7.3.1 Las probabilidades de transición de una cadena de markov, pueden representarse por un diagrama llamado de transición, en el cual, la probabilidad p_{ij} es indicada por el valor de la flecha que va de a_i a a_j. Determínese la matriz de transición de los tres diagramas que se presentan.

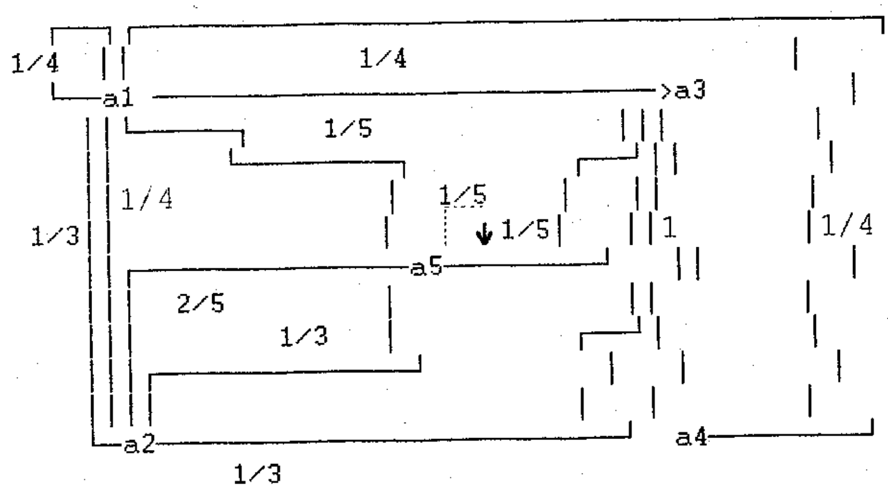
a)



b)



c)



2.7.3.2 Se supone que en un círculo se enumeran 1, 2, 3,..., m puntos en dirección contraria a las agujas del reloj. Un elemento electrónico realiza un paseo al azar sobre el círculo; se mueve un paso en dirección contraria al de las agujas del reloj con probabilidad p, o un paso en dirección de las agujas del reloj con probabilidad q = 1- p. ¿ Puede este experimento catalogarse como una cadena de markov?; si es así, defina el espacio de estados y la matriz de transición de un paso.

2.7.3.3 Hay tres bolas rojas en una urna A, y tres negras en una urna B; a cada paso del proceso, se selecciona una bola de cada urna; las dos bolas escogidas se intercambian.

a)¿ Cuál es la probabilidad de que haya dos bolas negras en la urna A, después de cuatro pasos?

b) A la larga,¿ cuál es la probabilidad de que haya dos bolas negras en la urna A.

c)¿ Cuál es el número de bolas que hay que intercambiar para que vuelvan a aparecer tres bolas rojas en la urna A?

2.7.3.4 Un jugador tiene Q. 4.00 apuesta Q. 1.00 cada vez, y gana Q.1.00 con probabilidad 1/2. Deja de jugar si pierde los Q.4.00 o si gana Q.2.00.¿ Cuál es la probabilidad de que pierda su dinero al final de, a lo sumo cinco juegos?;¿ cuál es la probabilidad de que el juego dure más de seis juegos?

2.7.3.5 Suponga que tres compañías introducen al mercado al mismo tiempo una nueva línea sport de cronógrafos. Al ser introducidos, cada compañía tenía una participación en el mercado, pero durante el primer año ocurrieron los siguientes cambios:

1. La compañía A retuvo el 90% de sus clientes, perdió el 3% con B y el 7% con C.
2. La compañía B conservó el 70% de sus clientes, perdió el 10% con A y el 20% con C.
3. La compañía C conservó el 80% de sus clientes, perdió el 10% con A y el 10% con B.

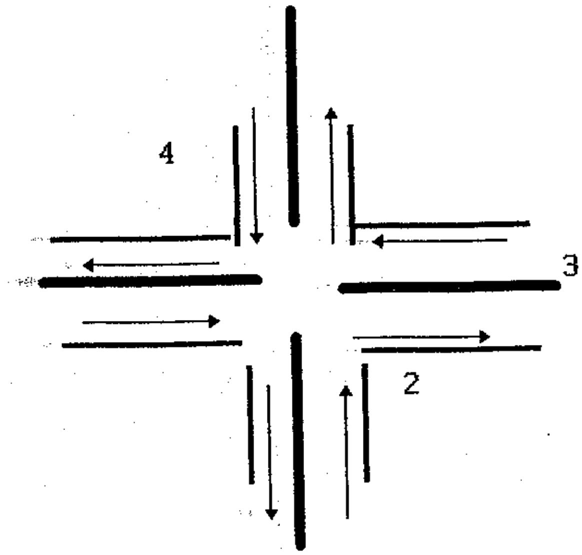
Se supone que no ocurren cambios de hábito en el patrón de compra de los consumidores; entonces:

a) Diga cuáles fueron las participaciones del mercado de las tres componías al final de cada uno de los tres primeros años de operación.

b) Diga cuánto tarda un comprador que compró la marca A, en volver a comprar dicha marca.

c)¿ Cuáles son las participaciones del mercado en el equilibrio?

2.7.3.6



El diagrama presenta una intersección que es ampliamente transitada, que se denota por 1, 2, 3, 4, las arterias de la misma. Se ha hecho un estudio, del cual se infiere que en determinado día, los automóviles que de transitaban sobre 1, el 30% va a 2, el 20% va a 4 y el 50% va a 3. Los que llegan de 2 a la intersección, 10% van a 3, 20% van a 1, y el 70% va a 4. De los que llegan por la vía 3, el 90% va a 1, el 8% va a 2, y el 2% va a 4; mientras que de los que llegan a la intersección por la vía 4, el 40% va a 1, el 50% va a 2, y el 10% va a tres; en ninguno de los casos se permite virar en U.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que un auto al venir de 2 se dirija a 1, cuatro pasos después de comenzar el fluido de tráfico?
b) ¿A qué vía deberá dársele preferencia en el tiempo del semáforo, asumiendo que el flujo en volumen es el doble en 1 y 3, que en 2 y 4?

2.7.3.7 Considérese lanzamientos repetidos de un dado corriente, sea X_n el máximo de los números que resulten en las n pruebas.

a) Halle la matriz de transición de la cadena de markov.
b) Halle la distribución de probabilidades del primer lanzamiento.
c) Indique la probabilidad de tener un 3 en el segundo lanzamiento y de tener un 4 en el tercer lanzamiento.
d) Si en el primer lanzamiento sale un tres, ¿cuántos lanzamientos deberíamos de esperar para que aparezca de nuevo un tres?

2.8 Conceptos importantes

El enfoque de las cadenas de markov está limitado a problemas de características muy especiales; en los mismos, debe ser posible clasificar en estados únicos lo que se implica en el problema; además, debe poder determinarse la probabilidad de que la persona o cosa en cada estado, estará en cualquier otro período; es esta probabilidad independiente del período específico y depende solamente del estado actual.

De estas probabilidades se infiere la matriz de transición, la cual es la base para la resolución de los problemas de este tipo; la característica principal de las mismas es que la sumatoria de todas sus filas debe ser igual a 1.

Del estudio de las cadenas de markov, pueden inferirse tres resultados muy importantes; primero, se pueden obtener pronósticos de las proporciones de cosas para períodos futuros. Segundo, se pueden determinar posiciones de equilibrio o a largo plazo, o sea, las proporciones en las cuales ya no habrá cambios, no entre estados, sino en las proporciones fijas de estos cambios. Tercero, si se conocen los costos de cada uno de los estados, se podrá obtener un análisis del mismo.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE COLAS

CAPITULO 3 TEORÍA DE COLAS

3.1 Introducción

En más de alguna ocasión, se habrá estado involucrado personalmente en un módulo de instalación de servicio, el cual tenga una estructura de entrada-transformación-salida; por ejemplo, se habrá pensado al llegar a una estación de autobanco, que existen muchos usuarios antes de poder ser atendidos, y se opta por esperar el turno, o por regresar en otro momento.

En estos modelos, las entradas están compuestas de llegadas de usuarios, los cuales se sirven del sistema, y luego salen de él. Tanto los tiempos de llegada como los tiempos de atención, siguen alguna distribución de probabilidad, y de la interrelación entre ambos se puede obtener el tiempo de las salidas del sistema; es la teoría de colas o de líneas de espera la base para estas predicciones.

3.2 Estructura básica de un modelo de colas

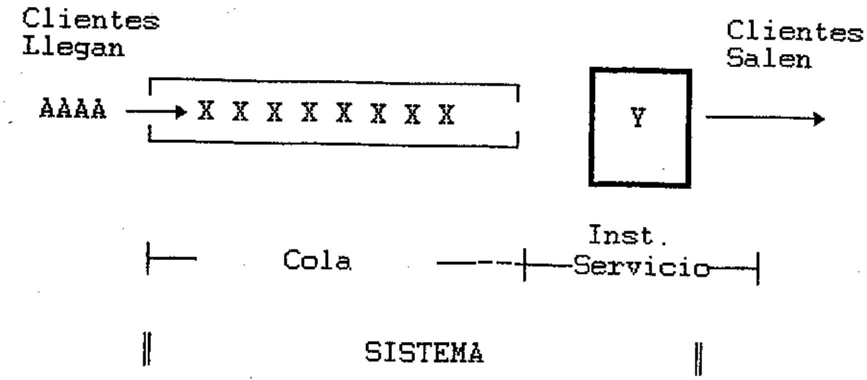
Apartándose momentáneamente del enfoque estrictamente matemático, la estructura básica, estará conformada por clientes (en espera y servidos), y una estación de servicio (Fig. 1), con uno o más servidores; esto, si se circunscribe al modelo elemental, del cual puede partirse para presentar otros modelos que son una extensión de este modelo básico (Fig. 2). Además pueden, en sistemas muy complejos, presentarse combinaciones de las cuatro estructuras básicas presentadas.

Para poder definir por completo el sistema de colas, hay que hacer referencia a que los clientes se generan a través del tiempo, en una fuente de entrada, la cual puede ser limitada o ilimitada, y que deberá tener un patrón de llegadas; la suposición más general, es que se generan de acuerdo con un proceso de Poissón, aunque pueden analizarse también otras distribuciones estadísticas de llegadas de la fuente.

La cola también puede definirse como finita o infinita, según sea su tamaño, aunque por lo general, se supone infinita; ésta deberá tener alguna política de servicio, por ejemplo, primero en llegar, primero en salir (PLLPS), o aleatoria, prioridad por prioridad.

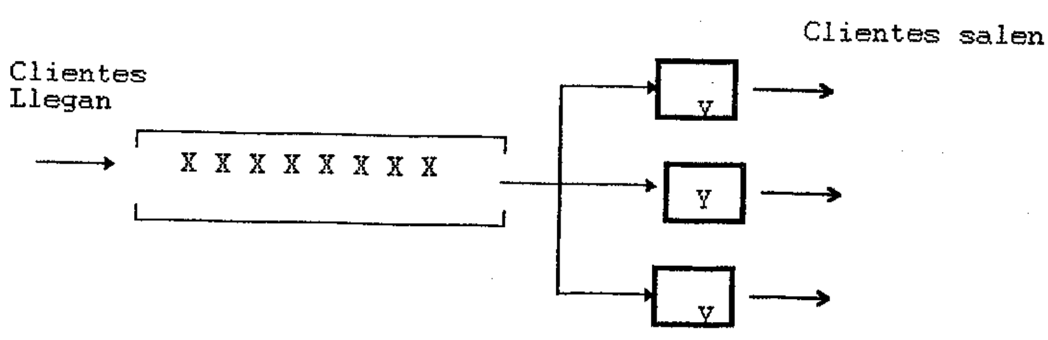
El mecanismo de servicio puede tener como ya se ha visto, uno o más canales paralelos y/o múltiples de servicio (varias fases). En este mecanismo, transcurre un tiempo en el cual el cliente es servido por completo; a éste se le llama tiempo de servicio.

FIGURA 1

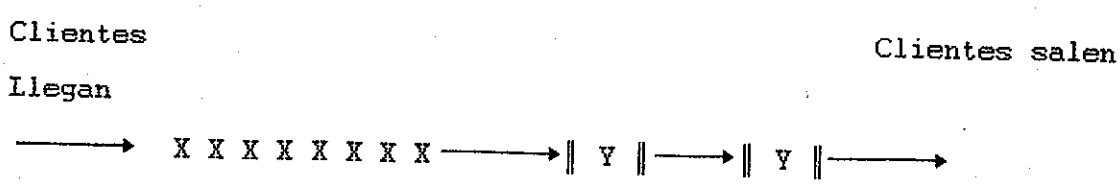


UN SOLO CANAL, UNA SOLA FASE

FIGURA 2

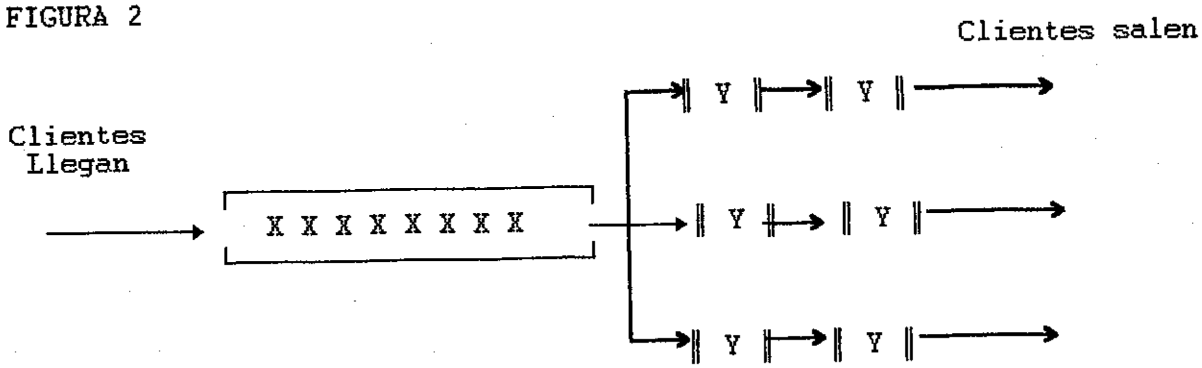


CANAL MÚLTIPLE UNA SOLA FASE



UN SOLO CANAL FASE MULTIPLE

FIGURA 2



Y = estación de servicio

CANAL MÚLTIPLE FASE MÚLTIPLE

y deberá tener además su distribución estadística; la más común de suponer es la distribución exponencial. La mayoría de los modelos tratados suponen que los tiempos de llegada y de servicio, son independientes e idénticamente distribuidos.

Se muestra a continuación la terminología que regirá el resto del capítulo, para comenzar a estructurar la base de la resolución de los problemas de este tipo.

N(t) = número de clientes en el sistema en el tiempo t siendo $t \geq 0$

Pn(t) = probabilidad de que n clientes estén en el sistema en el tiempo t, dado el número en el tiempo 0.

s = número de servidores en el sistema

Φn = tasa media de llegadas de nuevos clientes.

μn = tasa media de servicio para todo el sistema

τ = fracción esperada de tiempo que los servidores individuales están ocupados

L = número esperado de clientes en el sistema

Lq = longitud esperada de la cola

W = tiempo de espera en el sistema

Wq = tiempo de espera en la cola

3.3 Diferentes modelos

La disciplina del servicio ha sido mencionada como uno de los elementos fundamentales de los modelos de colas; de acuerdo con la distribución estadística que domine este tiempo de servicio, así será el modelo elemental que deberá usarse. Se mencionarán los elementos más importantes, y, básicamente la formulación para obtener los valores numéricos para el análisis posterior, circunstanciados a la distribución estadística y a la disciplina de la cola en cuanto al servicio.

Se le ha dado mucho más énfasis a los modelos de nacimiento y muerte, los cuales se suponen también con una distribución exponencial o de poisson, así como sus variaciones y/o combinaciones, ya que son estos modelos a los que generalmente se enfrentará el estudiante con mayor continuidad, tanto en las aulas, como en los problemas cotidianos laborales; los otros modelos se mencionan superficialmente para motivar a su posterior investigación.

Para tener una notación con la cual se pueda describir el tipo del modelo al que se esté refiriendo, se recomienda utilizar la notación Kendall-Lee, a la cual se le agrega la descripción de la fuente, quedando entonces:

$$(A/B/C):(D/E/F)$$

A: distribución de llegadas
B: distribución de salidas
C: número de canales de servicio (paralelos)
D: disciplina de servicio
E: número máximo permitido de clientes en el sistema
F: fuente o población

Entonces, si se tiene un modelo $(M/M/2):(FIFO/\infty/\infty)$ se estaría describiendo un modelo con distribuciones exponenciales de entrada y salida, con dos servidores en paralelo, disciplina de cola primero en entrar primero en salir (first in, first out) y con cola y fuente infinita.

3.3.1 Distribución exponencial

De las características operativas de los sistemas de colas, los indicativos (distribuciones estadísticas) de entrada y salida, son vitales para su adecuada descripción. Estas distribuciones deberán ser suposiciones realistas y sencillas, para asi poder , obtener resultados altamente razonables y manejar matemáticamente el modelo.

Por lo anteriormente mencionado, y debido a las características especiales de la distribución exponencial, la hacen la más utilizada para la descripción de los modelos de colas. Dentro de las principales características de esta distribución, se pueden mencionar:

a. Es una función estrictamente decreciente
b. El tiempo, en su distribución de probabilidad entre incidentes, siempre es el mismo.
c. Se relaciona adecuadamente con la distribución Poisson, que es generalmente la que más se utiliza para la descripción de las entradas del sistema.

3.3.2 Procesos de nacimiento y muerte

Por nacimiento, en los sistemas de espera, se entiende una llegada; de la misma manera, una salida del sistema, deberá entenderse como una salida del sistema de espera (cliente servido).

La manera en cómo se desenvuelve el comportamiento del estado del sistema N(t) en el tiempo t ($t \geq 0$), se describe en términos probabilísticos, de tal forma que los nacimientos y muertes individualmente ocurren aleatoriamente, de tal forma que las tasas medias de ocurrencia dependen del estado actual del sistema.

Se supone para este tipo de procesos, que la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para el próximo nacimiento y/o muerte, es exponencial con parámetro Φn y/o μn respectivamente además, se supone que sólo un nacimiento o una muerte puede ocurrir a la vez.

Esto nos lleva a inferir un tipo especial de las cadenas de markov de parámetro continuo; debe asumirse entonces que, para manejar los parámetros de estos sistemas, deben analizarse cuando ya se ha alcanzado el estado estable del sistema, para que puedan tener así un buen uso práctico.

En este tipo de sistemas, tanto las entradas como las salidas deberán alternarse, de tal manera que la diferencia entre el número de veces que se entra al sistema con el número s = número de servidores

μ = tasa media de servicio por servidor ocupado

Φi= tasa media de llegadas para la clase de prioridad i

Φ = Sumatoria de Φi

$\tau = \Phi/\mu$

Prioridades con interrupción

$Wk = (1/\mu)/B_{k-1}B_k$

$L_k = \Phi_k W_k$

3.4 Problemas

Se ha presentado la teoría y formulación básica para analizar los sistemas de colas, se le dará preferencia en cuanto a la resolución de problemas, a los modelos exponenciales y de nacimiento y muerte, por ser los que con más frecuencia se presentan, pero con la teoría se ha mostrado la manera de analizar los otros modelos. En los problemas de colas, debe analizarse, a que tipo de modelo pertenece el problema particular, y luego aplicar la formulación para dicho modelo, de los resultados de los mismos, se obtendrán las conclusiones necesarias.

3.4.1 Problema Mnemotécnico.

En una empresa de manufactura que tiene un sistema de producción continua, para mantener el estándar de calidad de sus productos, se ha implementado un sistema de control de calidad para los rollos de materia prima que ingresan a la misma.

Los rollos llegan al área de inspección a una velocidad promedio de cuatro por hora, con un patrón que puede describirse como de distribución Poissón, y, el encargado de la inspección, revisa en promedio seis rollos por hora, donde los tiempos de inspección están distribuidos exponencialmente.

Los proveedores se han quejado del tiempo de espera en el sistema de inspección y recomendaron a la gerencia de planta implementar otra instalación de inspección para reducir el tiempo de espera a un cuarto del actual,

MODELO M/M/s

En este modelo, s representa el número de servidores que se tienen en el sistema, tanto en el caso de uno como de varios servidores; tanto los tiempos de entrada como de salida son independientes e idénticamente distribuidos. En ambos casos, la tasa media de servicio máxima debe exceder a la tasa media de llegadas, para que las cola no explote, o sea, que crezca indefinidamente.

FORMULACIÓN MODELO M/M/1

$Cn = (\Phi/\mu)^n = \tau^n$

$Pn = \tau n P_0$

$P_0 = (1-\tau)$

$L = (\Phi/(\mu-\Phi))$

$Lq = (\Phi^2/\mu(\mu-\Phi))$

$W = (1/(\mu-\Phi))$

$Wq = (\Phi/\mu(\mu-\Phi))$

FORMULACIÓN MODELO M/M/s con s>1

$Cn = \dfrac{(\Phi/\mu)^n}{n!}$ para $n = 1, 2, \ldots s$

$Cn = (\Phi/\mu)^n/s!s^{n-s}$ para $n = s, s+1$

$P_0 = [(\sum_{n=0}^{s-1}(\Phi/\mu)^n/n!) + (\Phi/\mu)^s/(s!(1-(\Phi/s\mu)))]^{-1}$

En función de τ

$P_0 = [s^s\tau^{n+1}/s!(1-\tau) + \sum_{n=0}^{s} (s\tau)^n/n!]^{-1}$

$Pn = \dfrac{(\Phi/\mu)}{n!} P_0$ para $0 \le n \le s$

$Pn = \dfrac{(\Phi/\mu)}{s!s^{n-s}} P_0$ para $n \le s$

$$Lq = \frac{P_0(\Phi/\mu}{s!(1-\tau)^2}$$

$$Wq = Lq/\Phi$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

$$L = Lq + \Phi/\mu$$

con $\tau = (\Phi/\mu s)$

VARIACIÓN DE COLAS FINITA
MODELO M/M/1/K Y M/M/S/K

En determinado momento, la mayoría de veces por requerimientos físicos de los locales en donde se presta un servicio, se encuentra el problema de un espacio reducido para la espera de los clientes en el sistema, y se tiene un número especificado como máximo (K) para estar dentro del mismo; si un cliente llega cuando el sistema está lleno (no existe espacio para hacer la cola), lo abandonará para siempre, por lo que, en ese momento, la tasa de llegadas al sistema toma un valor de cero.

Para este tipo de sistemas, puede haber uno o más servidores, con la respectiva variación de la formulación para uno y más de un servidor.

M/M/1/K

$Cn = (\Phi/\mu)^n$ para $n = 1, 2, \ldots K$

$Cn = 0$ para $n>K$

$$P_0 = (1-\tau)/(1-\tau^{K+1})$$

$$Pn = P_0\tau^n$$

$$L = \frac{\tau}{1-\tau} - \frac{(K+1)\tau^{K+1}}{1-\tau^{K+1}}$$

$$Lq = L - (1-P_0)$$

$$W = L / \bar{\Phi}$$

$$Wq = Lq / \bar{\Phi}$$

con

$$\bar{\Phi} = \Phi(1-P_K)$$

MODELO M/M/s/K

$Cn = (\Phi/\mu)^n/n!$ para $n = 1,2,\ldots s$

$Cn = (\Phi/\mu)^n/s!s^{n-s}$ para $n = s, s+1,\ldots,K$

$Cn = 0$ para $n>K$

$Pn = ((\Phi/\mu)^n/n!)P_0$ para $n = 1,2,\ldots s$

$Pn = ((\Phi/\mu)^n/(s!s^{n-s}))P_0$ para $n=s, s+1,\ldots K$

$Pn = 0$ para $n>K$

$$P_0 = [\, 1 + \sum_{n=1}^{s}\frac{(\Phi/\mu)}{n!} + \frac{(\Phi/\mu)^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{K}(\Phi/s\mu)^{n-s}\,]^{-1}$$

VARIACIÓN DE FUENTE DE ENTRADA FINITA

En el modelo anterior, se tiene un espacio reducido para realizar la cola en el sistema, con una fuente de entrada infinita en su tamaño; en este modelo, el elemento que tiene limitación en cuanto al tamaño es la fuente de entrada, o sea que la población potencial que puede llegar a formar parte del sistema, tiene un número limitado de elementos (N), de tal forma que cuando se tienen n elementos en el sistema, sólo existen (N-n) elementos potenciales que pueden formar parte del mismo. En este tipo de sistemas, los elementos de los mismos se mantienen alternativamente dentro y fuera del sistema; la formulación para esta variación del modelo elemental es la siguiente:

FUENTE DE ENTRADA FINITA UN SOLO SERVIDOR

$Cn = (N!/(N-n)!)(\Phi/\mu)$

$Cn = 0$ para $n>N$

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{N} (N!/(N-n)!)(\Phi/\mu)\ ]^{-1}$$

$Pn = (N!/(N-n)!)(\Phi/\mu)^n P_0$

$Lq = N - ((\Phi+\mu)/\Phi)(1-P_0)$

$L = N - (\mu/\Phi)(1-P_0)$

$W = L / \Phi$

$Wq = Lq / \bar{\Phi}$

$\bar{\Phi} = \Phi(N-L)$

FUENTE DE ENTRADA FINITA VARIOS SERVIDORES

$$Cn = (N!/(N-n)!n!)(\Phi/\mu)^n \quad \text{para } n = 1,2,\ldots s$$

$$Cn = (N!/(N-n)!s!s^{n-s})(\Phi/\mu)^n \quad \text{para } n = s,s+1,\ldots N$$

$$Cn = 0 \quad \text{para } n>N$$

$$Pn = (N!/(N-n)!n!)(\Phi/\mu)^n P_0 \quad \text{para } 0\leq n\leq s$$

$$Pn = (N!/(N-n)!s!s^{n-s})(\Phi/\mu)^n P_0 \quad \text{para } s\leq n\leq N$$

$$Pn = 0 \quad \text{para } n>N$$

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{s-1}(N!/(N-n)!n!)(\Phi/\mu)^n + \sum_{n=s}^{N}(N!/(N-n)!s!s^{n-s})(\Phi/\mu)^n]^{-1}$$

$$Lq = \sum_{n=s}^{N}(n-s)Pn$$

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nPn + Lq + s(1-\sum_{n=0}^{s-1} Pn)$$

$$W = L / \Phi$$

$$Wq = Lq / \bar{\Phi}$$

3.3.3 Modelos de colas con distribuciones no exponenciales

En los modelos anteriores, se ha supuesto siempre una distribución aleatoria de entrada y salida, poissón y exponencial; sin embargo existen algunos sistemas con los cuales no se puede hacer esta similitud, en cuanto a las distribuciones aleatorias, por ejemplo, cuando el tiempo de servicio tiene una gran similitud de unos con otros.

MODELO M/G/1

En este tipo de sistemas, puede tenerse cualquier tipo de distribución para los tiempos de servicio; se supone que se tiene un solo servidor y que un proceso de entrada poissón.

Para tener una formulación con la que se pueda analizar este tipo de problemas, solamente es necesario conocer la media y la varianza de la distribución que posee el tiempo de servicio.

$$P_0 = 1-\tau$$

$$Lq = \frac{\Phi^2\sigma^2 + \tau^2}{2(1-\tau)}$$ Fórmula Pollaczek-Khintchine

$$L = \tau + Lq$$

$$Wq = Lq/\Phi$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

MODELO M/D/s

Este modelo se utiliza cuando el tipo y el tiempo de servicio es rutinario, o sea que existe una variación mínima entre los mismos, por lo que se puede asumir que los tiempos de servicio son iguales a una constante fija, con un proceso de entrada poissón. La formulación que se posee es para un solo servidor, en donde,en la formula Pollaczek-Khintchine, $\sigma = 0$, y entonces:

$$P_0 = 1-\tau$$

$$Lq = \frac{\tau^2}{2(1-\tau)}$$

$$L = \tau + Lq$$

$$Wq = Lq/\Phi$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

3.3.4 Modelos de colas con disciplina de prioridades

Muchas veces, en la vida real, se tienen ciertos casos en los cuales se debe asignar importancia a los trabajos que se realicen en un sistema de colas, pasando por alto disciplinas de prioridades como la de primero en entrar primero en salir, dado que se tengan prioridades por urgencia, pronto pago, etc.

En este tipo de modelos, el orden en que se seleccionan a los clientes para su servicio, está dado por la prioridad que los mismos tienen asignada con base en las características particulares del sistema; esta asignación de prioridades complica extremadamente el análisis matemático, pero se cuentan con resultados para los mismos.

Se supone que existen N clases de prioridad, de la más alta, a la más baja, y los clientes se seleccionan para su servicio; primero, el de la prioridad más alta y luego el de la prioridad más baja; si existieran en determinado momento varios clientes dentro de una misma prioridad, se deberá seleccionar el que primero haya entrado al sistema.

Lógicamente, puede entenderse, entonces, que los tiempos de espera para los clientes de las prioridades bajas, será mayor que el tiempo de espera para los clientes de las prioridades altas.

En estos sistemas, debe hacerse además otra distinción, porque puede ser que sea un caso particular de servicio de prioridades sin interrupción, en el cual no puede ser interrumpido el servicio a un cliente para mandarlo de regreso a la cola al llegar uno de prioridad más alta, o, puede tratarse de un caso de servicio de prioridad con interrupción, en el cual, el servicio al cliente es interrumpido en el momento en el que ingresa al sistema un cliente de prioridad más alta, y este es enviado de regreso a la cola iterativamente hasta terminar por completo el servicio; dentro de esta última categoría al no tener una distribución exponencial en los tiempos de servicio, deberá definirse si es un servicio interrupción-reanudación, en donde el reservicio se inicia en el punto en el que fue cortado, o si, es un servicio interrupción-repetición en donde el servicio será reanudado desde el inicio.

Prioridades sin interrupción

Tiempo esperado de espera en el sistema incluyendo servicio para la prioridad k.

$$Wk = [AB_{k-1}B_k]^{-1} + (1/\mu) \qquad \text{para } k = 1,2,\ldots N,$$

con

$$A = s!((s\mu-\Phi)/\tau^{s})\sum_{j=0}^{s-1} (\tau^{j}/j!) + s\mu$$

$$B_0 = 1$$

$$Bk = 1 - ((\sum_{i=1}^{k}\Phi i)/s\mu) \qquad \text{para } k = 1,2,\ldots N$$

$$L_k = \Phi_k W_k$$

s = número de servidores

μ = tasa media de servicio por servidor ocupado

Φi= tasa media de llegadas para la clase de prioridad i

Φ = Sumatoria de Φi

$\tau = \Phi/\mu$

Prioridades con interrupción

$Wk = (1/\mu)/B_{k-1}B_k$

$L_k = \Phi_k W_k$

3.4 Problemas

Se ha presentado la teoría y formulación básica para analizar los sistemas de colas, se le dará preferencia en cuanto a la resolución de problemas, a los modelos exponenciales y de nacimiento y muerte, por ser los que con más frecuencia se presentan, pero con la teoría se ha mostrado la manera de analizar los otros modelos. En los problemas de colas, debe analizarse, a que tipo de modelo pertenece el problema particular, y luego aplicar la formulación para dicho modelo, de los resultados de los mismos, se obtendrán las conclusiones necesarias.

3.4.1 Problema Mnemotécnico.

En una empresa de manufactura que tiene un sistema de producción continua, para mantener el estándar de calidad de sus productos, se ha implementado un sistema de control de calidad para los rollos de materia prima que ingresan a la misma.

Los rollos llegan al área de inspección a una velocidad promedio de cuatro por hora, con un patrón que puede describirse como de distribución Poissón, y, el encargado de la inspección, revisa en promedio seis rollos por hora, donde los tiempos de inspección están distribuidos exponencialmente.

Los proveedores se han quejado del tiempo de espera en el sistema de inspección y recomendaron a la gerencia de planta implementar otra instalación de inspección para reducir el tiempo de espera a un cuarto del actual, de veces que se sale del mismo, debe ser a la larga, despreciable, por lo que las tasa promedio de entrada y salida deben ser iguales. Se puede crear, entonces, una ecuación de balance que exprese lo anterior, para cada estado del sistema; al tener estas ecuaciones para todos los estados, en términos de las probabilidades Pn desconocidas, se puede resolver este sistema de ecuaciones y encontrar estas probabilidades, lo cual proporciona las ecuaciones necesarias para poder obtener los resultados de análisis de estos sistemas.

Aplicando este procedimiento, se obtienen los resultados siguientes, por ejemplo, para los estados 0 y 1 respectivamente:

Estado 0, $P_1 = (\Phi_0 / \mu_1)P_0$

Estado 1, $P_2 = (\Phi_1\Phi_0 / \mu_2\mu_1)P_0$

Generalizando, tenemos:

$Cn = \Phi_{n-1}\Phi_{n-2}\ldots\Phi_0 / \mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1$ para $n = 1, 2, \ldots$

y, entonces

$P_n = C_nP_0$,

como la sumatoria de las Pn = 1, entonces

$$P_0 = 1 / (1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} {}_nP_n$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n$$

Además se tiene

$W = L / \bar{\Phi}$ $\qquad W_q = L_q / \bar{\Phi}$

donde $\bar{\Phi}$ esta dado por

$\bar{\Phi} = \sum\Phi_nP_n$

Tomando como base esta terminología, se pueden analizar varios modelos, los cuales tienen esta formulación como su fundamento; en este tipo de modelos, se asume que se tienen entradas de poisson y tiempos de servicio exponenciales; la única diferencia, es la forma en cómo cambian las tasas de entrada y salida según el estado de n.

corriendo ellos con los gastos. ¿Cuál sería su recomendación?

SOLUCIÓN

Para poder dar una recomendación en este caso, se analizaran los parámetros para el sistema actual y para la alternativa que se propone, de los resultados provenientes de este análisis, se obtendrán las conclusiones necesarias para la misma.

Una Estación

$\Phi = 4 \quad r/h$

$\mu = 6 \quad r/h$

El coeficiente de servicio será

$\tau = \Phi/\mu = 4/6 = 2/3 = 67\%$

Número de clientes esperados en el sistema

$L = (\Phi/(\mu-\Phi)) \ (4/(6-4)) = 2$ rollos

Longitud promedio de la cola

$Lq = (\Phi^2/\mu(\mu-\Phi)) = (16/(6(6-4))) = 1.33$ rollos

Tiempo promedio en el sistema

$W = (1/(\mu-\Phi)) = 1/(6-4) = 1/2$ **hora**

Tiempo de espera haciendo cola

$Wq = (\Phi/\mu(\mu-\Phi)) = (4/6(6-4)) = 1/3$ hora $= 20$ min

Probabilidad de revisar un rollo inmediatamente

$P_0 = (1-\tau) = 1-(4/6) = 0.33$

Dos estaciones

$\Phi = 4 \ r/h$

$\mu = 6 \ r/h$

$s = 2$ estaciones

Factor de utilización del sistema

$\tau = \Phi/\mu s = 4/6*2 = 33\%$

Probabilidad de que un cliente sea servido inmediatamente.

$$P_0 = [s^s\tau^{n+1}/s!(1-\tau) + \sum_{n=0}^{s} (s\tau)^n/n!]^{-1}$$

$$P_0 = \frac{2^2(0.33)^3}{2!(1-0.33)} + \frac{(0.66)0}{0!} + \frac{(0.66)1}{1!} + \frac{(0.66)^2}{2!}$$

$$P_0 = [0.111 + 1 + 0.666 + 0.222]^{-1}$$

$P_0 = 50\%$

Promedio de clientes en el sistema

$$L = \frac{P_0(\Phi/\mu)^s\tau}{s!(1-\tau)^2} + (\Phi/\mu)$$

$$L = \frac{0.5(0.66)2(0.33)}{2!(1-0.33)^2} + (4/6)$$

$$L = 0.75$$

Longitud promedio de la cola

$$Lq = \frac{P_0(\Phi/\mu)^s\tau}{s!(1-\tau)^2}$$

$$Lq = \frac{0.5(0.66)2(0.33)}{2!(1-0.33)^2}$$

$$Lq = 0.083$$

Tiempo Promedio de permanencia en el sistema

$W = L/\Phi = 0.75/4 =$

$W = 0.1875$ hrs $= 11.25$ minutos

Tiempo de permanencia en la cola

$Wq = (Lq / \Phi) = (0.083/4) = 0.020$hrs $= 1.25$ minutos

Recomendación

Del análisis de la situación actual, se nota que reducir el tiempo de espera actual en el sistema en un cuarto, significaría que deberá ser de 7.5 min. Al analizar la situación para dos estaciones, se observa que el tiempo se ha reducido a 11.25 minutos; o sea, que se ha reducido casi a un tercio del tiempo actual.

Al no correr los costos por cuenta de la fabrica, podría aceptarse la implementación del sistema, para reducir la insatisfacción de los proveedores por el tiempo de espera.

3.4.2 Problemas resueltos

3.4.2.1 El Departamento de Seguridad e Higiene Industrial de una corporación, tiene tres equipos de investigación, cuyo trabajo consiste en analizar las condiciones de seguridad en el área en la que ocurre un accidente. Los equipos han demostrado igual eficiencia, y destinan un promedio de dos días para investigar y realizar el informe de cada accidente, con el tiempo real, aparentemente distribuido en forma exponencial.

Se ha estimado que el número de accidentes en toda la corporación (39 empresas) sigue un proceso poissoniano con una tasa promedio de 300 accidentes por año.
¿Cuántos accidentes tiene el departamento en espera de ser concluidos?
¿Cuánto tiempo transcurre entre el suceso de un accidente y el inicio de la investigación?
¿Cuál es la probabilidad de que al ocurrir un accidente, esté pueda ser analizado de inmediato?

SOLUCIÓN
Del análisis del problema, se puede afirmar que corresponde a un sistema M/M/3, los clientes son los accidentes que se van a analizar y se suponen servidos, al tener completo el informe de cada uno.

Φ = 300 acci/año

μ = 182.5 infor/año

$$\tau = (\tau/s\mu) = 300/3(182.5)$$

$$\tau = 0.55 = 55\%$$

$$P_0 = [s^s\tau^{n+1}/s!(1-\tau) + \sum_{n=0}^{s} (s\tau)^n/n!]^{-1}$$

$$P_0=[\frac{3^3(0.55)^4}{3!(1-0.55)}+\frac{(1.643)^0}{0!}+\frac{(1.643)^1}{1!}+\frac{(1.643)^2}{2!}+\frac{(1.643)^3}{3!}]^{-1}$$

$$P_0 = [5.632]-1 = 0.1775$$

Existe una probabilidad del 17%, de que un accidente luego de acontecido, pueda ser analizado de inmediato.

$$L = \frac{P_0(\Phi/\mu)^s\tau}{s!(1-\tau)^2} + (\Phi/\mu)$$

$$L = \frac{(0.1775)(1.643)^3(0.55)}{3!(1-0.55)^2} + 1.643$$

L = 1.999 accidentes

En promedio, el departamento tiene dos casos bajo su responsabilidad y en espera del informe final.

$$Wq = (Lq/\Phi)$$

$$Lq = \frac{P_0(\Phi/\mu)^s\tau}{s!(1-\tau)^2}$$

$$Lq = \frac{(0.1775)(1.643)^3(0.55)}{3!(1-0.55)^2}$$

Lq = 0.3558

Wq = (0.3558/300)
Wq = 0.001186 años

En promedio, puede afirmarse que después de acaecido un accidente, transcurre 1/2 día(0.001186*365) más o menos para que se inicie su análisis e investigación.

3.4.2.2 En una línea de producción, se tienen dos operaciones de ingreso a la misma, la cual la cual es realizada por dos máquinas, una para la operación A1 y otra para la operación A2. El tiempo de cada operación se distribuye exponencialmente con una media de un minuto. Las piezas para operar llegan a una tasa media de 40/hrs con la mitad para cada operación. El gerente de producción considera cambiar el arreglo actual para que cada máquina pueda encargarse tanto de la operación A1 como de la A2, con lo que puede esperarse que el tiempo medio de la operación aumente a 1.2 min; pero eso puede impedir el cuello de botella que se forma algunas veces frente a una de las máquinas, mientras que la otra permanece ociosa. Analice la propuesta con base en el tiempo de ocio de una de las máquinas, y al número esperado de piezas en el sistema y de sus recomendaciones.

SOLUCIÓN

Para el caso actual, debe analizarse cada máquina por separado M/M/1.

Φ = 20 op/hrs

μ = 60 op/hrs

$Ls = \Phi/\mu-\Phi = 20/(60-20) = 0.5$

$\tau = \Phi/\mu = 20/60 = 33\%$

El sistema que propone el gerente es M/M/2, y entonces se analiza con:

Φ = 40 op/hrs

μ = 50 op/hrs

$\tau = \Phi/(s\mu) = 40/2(50) = 40\%$

$$P_0 = [s^s\tau^{n+1}/s!(1-\tau) + \sum_{n=0}^{s} (s\tau)^n/n!]^{-1}$$

$$P_0 = \frac{2^2(0.40)^3}{2!(0.6)} + \frac{(0.80)^0}{0!} + \frac{(0.80)^1}{1!} + \frac{(0.80)^2}{2!}]^{-1}$$

$P_0 = 0.4285$

$$L = \frac{P_0(\Phi/\mu)^s\tau}{s!(1-\tau)^2} + (\Phi/\mu)$$

$$L = \frac{0.4285(40/50)^2(0.40)}{2!(0.6)^2} + (40/50)$$

$L = 0.9522$

Análisis: nn el caso actual, se espera que en cada cola existan 0.5 piezas, en espera de ser trabajadas, y cada una de las máquinas permanece ocupada un 33% de su tiempo. En el caso propuesto, existirían 0.95 piezas en el sistema y cada máquina permanecerá ocupada un 40% de su tiempo.

Recomendación: se recomienda a la gerencia de producción que cambie el arreglo actual y que cada máquina pueda realizar tanto la operación A1 como la A2, ya que así se puede esperar menos piezas en la totalidad del sistema y cada máquina estará ocupada un porcentaje más alto de tiempo.

3.4.2.3 En el departamento de inyectado de una fábrica, se tienen siete máquinas inyectoras; estas requieren de mantenimiento correctivo constante, por lo que se tienen dos mecánicos para hacerlo. Cada uno de ellos m puede reparar una máquina en una hora en promedio, con el tiempo actual de servicio distribuido exponencialmente alrededor de la media. Una máquina recién reparada funciona un promedio de 12 hrs antes de descomponerse nuevamente. El encargado del departamento ha hecho su programación de balance y le indica a usted que no podrá cumplir con el volumen de producción debido a que necesita para hacerlo tener por lo menos cuatro maquinas trabajando constantemente, y que bajo el arreglo actual esto no es posible. ¿Cuál sería su respuesta?

Este es un problema en el cual, se tiene una fuente limitada de clientes, en este caso las máquinas; entonces:

$\Phi = 1/12$ hrs $= 0.08$ hrs

$\mu = 0.5$ hrs

$M = 7$

$K = 2$

El número de máquinas que se encuentran en operación en cualquier momento, será el número total de máquinas menos el valor de Ls.

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nPn + Lq + s(1-\sum_{n=0}^{s-1} Pn)$$

$$P_n = P_0 C_{nA},\quad 0\leq n<k \qquad P_0 = [\sum_{n=0}^{k-1} C_{nA} + \sum_{n=k}^{M} C_{nB}]^{-1}$$

$$P_n = P_0 C_{nB},\quad k\leq n\leq M$$

$$C_{nA} = (N!/(N-n)!n!)(\Phi/\mu)^n \qquad \text{para } n = 1,2,\ldots s$$

$$CnB = (N!/(N-n)!s!s^{n-s})(\Phi/\mu)^n \quad \text{para } n = s, s+1, \ldots N$$

$$C_{nA0} = (7!/7!0!)(0.16)^0 = 1$$

$$CnA1 = (7!/6!1!)(0.16)^1 = 1.2$$

$$CnB_2 = (7!/5!2!2^0)(0.16)^2 = 0.5376$$

$$CnB_3 = (7!/4!2!2^1)(0.16)^3 = 0.2150$$

$$CnB_4 . (7!/3!2!22)(0.16)^4 = 0.0688$$

$$CnB_5 = (7!/2!2!2^3)(0.16)^5 = 0.0165$$

$$CnB_6 = (7!/1!2!2^4)(0.16)^6 = 0.0026$$

$$CnB_7 = (7!/0!2!2^5)(0.16)^7 = 2.1139 * 10^{-4}$$

$$P0 = (1/1+1.2+0.53+0.21+0.68+0.016+0.002+2.113*10^{-4)}$$

$$P0 = 0.3377$$

$$Lq = 0+1*1.2*0.3377+2*0.5376*0.3377+3*0.2154*0.3377+ 4*0.0688*0.3377+5*0.01651*0.3377$$

$$Lq = 1.07998$$

$$L = 0+1*1.2*0.3377+1.07998+2(1-(1*0.3377+1.12*0.3377)$$

L = 2.02 máquinas

7 − 2.02 = 4.98 máquinas

De acuerdo con lo anterior, se observa que en promedio, el número de máquinas que se encuentran trabajando en el departamento, es mayor que cuatro, por lo que sí se podrá cumplir con los requisitos de producción para el departamento.

3.4.2.4 En un taller de reparaciones, existen cuatro operarios, los cuales trabajan conjuntamente en cada reparación, las llegadas de reparaciones, tienen un comportamiento poissoniano con una tasa de 12/hr, y el tiempo de servicio está distribuido exponencialmente con una media de 14/hr; por razones de seguridad, no se pueden tener más de cinco reparaciones en el local esperando servicio, por lo que si se tiene una llegada en este caso, se le niega la entrada al sistema y se pierde el cliente.
¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea servido de inmediato?
¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no pueda ser atendido?

Este es una caso de variación de cola finita, con un solo servidor, dado que los cuatro operarios trabajan conjuntamente en cada reparación, por lo que se toman como uno solo.

Φ = 12 clientes/hora

μ = 14 clientes/hora

$$\tau = \frac{12 \text{ clientes/hora}}{14 \text{ clientes/hora}} = 0.857$$

$$P_0 = (1-\tau)/(1-\tau^{K+1})$$

$$P_0 = (1-0.857)/(1-0.857^{6+1}) = 0.2164$$

$$Pn = P_0\tau^n$$

$$P_6 = (0.2164)(0.857)6 = 0.0858$$

Por lo tanto, existe un 21.64 % de probabilidad de que un cliente, al llegar, sea atendido de inmediato, y un 8.5% de probabilidad de que un cliente al llegar no pueda ser atendido, y se pierda para siempre.

3.4.2.5 Considere un sistema de colas de canal simple, con longitud ilimitada, en el que el costo de servir una unidad es de C1μ, y el costo de esperanza es C2t, con t siendo el tiempo empleado en el sistema. Desarrolle una ecuación que exprese el costo esperado del funcionamiento del canal por unidad servida, suponiendo que se de servicio a todas las unidades que ingresen al sistema.

Encuentre un valor de μ que minimice el costo total esperado por unidad en el sistema.

SOLUCIÓN

COSTO TOTAL = COSTO SERVIR + COSTO TIEMPO SISTEMA

COSTO TOTAL = C2t + C1μ

pero $t = (1/\mu-\Phi)$ entonces

$$C.T. = (C2/\mu-\Phi) + C1\mu$$

Para encontrar un valor de μ que minimice el costo total esperado por unidad en el sistema, se derivará la ecuación anterior respecto de μ y se igualará a cero para encontrar este valor.

$$\frac{\delta CT}{\delta\mu} = (-C2/(\mu-\Phi)^2)$$

Minimizando

$$(-C2/(\mu-\Phi)^2) = 0$$

$$C1 = C2/(\mu-\Phi)^2$$

$$(\mu-\Phi)^2 = C2/C1$$

$$\mu-\Phi = \sqrt{C2/C1}$$

$$\mu = \sqrt{C2/C1} + \Phi$$

3.4.2.6 En una oficina de boletos de una empresa aérea, se tienen cuatro agentes que respnden las llamadas telefónicas para hacer las reservaciones. Además, puede ponerse a una de las personas que llaman en espera hasta que se desocupa uno de los agentes para atender la llamada. Si las líneas telefónicas están ocupadas, el cliente potencial recibe una señal de ocupado y se supone que llama a otra oficina. Las llamadas, ocurren aleatoriamente con una tasa media de 12 por hora. La duración de una conversación telefónica, es de 4 minutos distribuyéndose esta como una tasa de comportamiento exponencial.
¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llama, logre hablar con un de los agentes de inmediato?
¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llama quede en espera?
¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llama reciba una señal de ocupado?

Φ = 12 clientes/hora
μ = 15 clientes/hora
s = 4
K = 5

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(\Phi/\mu)^n}{n!} + \frac{(\Phi/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} (\Phi/s\mu)^{n-s} \right]^{-1}$$

$P_0 = 1/[1+(0.8)1/1! +(0.8)^2/2! +(0.8)3/3! +(0.8)4/4!]$
$+[((0.8)^4/4!)(12/15*4)][1+0.8+0.32+0.08+0.017]$
$+3.412 *10^{-3}]$

P0 = 0.4493

La probabilidad de que una persona que llama sea atendida de inmediato, es del 44.93%.

$P4 = ((\Phi/\mu)^4/4!)P_0$
$P4 = (0.8)^4/4!)(0.4493)$

P4 = 0.00756

La probabilidad de que una persona que llame quede en espera, es del 0.75%.

La probabilidad de que una persona reciba un tono de ocupado y tenga que llamar a otra agencia, es de cero por ciento

3.4.3 Problemas Propuestos

Se presentan a continuación varios problemas, con los cuales el lector podrá aplicar los conocimientos anteriores; además, tendrán algunas variantes, sin salirse de la formulación expuesta.

3.4.3.1 En un aeropuerto de una sola pista, llega un promedio de un avión cada 4 minutos, que solicita permiso para aterrizar, aparentemente con una distribución tipo poisson. Los aeroplanos reciben permiso de aterrizar de acuerdo con el orden de llegada, y quedan en espera aquellos a los cuales no se les puede dar permiso inmediato, debido al tráfico. El tiempo que se toma un controlador del tráfico para ayudar a que un aeroplano aterrice varía según la experiencia del mismo, pero se ha estimado que es exponencial con una media de 5 minutos.

Determine:

-Número promedio de aeroplanos en espera

-Número promedio de aeroplanos que han pedido permiso de aterrizar pero aun se encuentran en el aire.

-La probabilidad de que haya más de tres aeroplanos esperando servicio.

Calcule estos valores, con una tasa de servicio de 3 minutos. Y explique los resultados.

3.4.3.2 Una empresa de investigación de mercados, tiene a cuatro entrevistadores ubicados en el centro cívico. Una persona ajena, a estos, encuentra a la gente en la plaza y les pregunta si están dispuestos a ser entrevistados; se estima que los clientes que consienten en la entrevista llegan a razón de uno cada diez minutos. La duración promedio de la entrevista es de treinta minutos y si todos los entrevistadores están ocupados, la persona que acepto la entrevista, no espera sino que se marcha y se pierde la oportunidad de la entrevista.

-Dado que $\Phi > \mu$ este sistema ¿crecerá sin límite?

-Calcule la probabilidad de que este ocupado un solo entrevistador.

-¿Cuál es la probabilidad de que estén ocupados todos los entrevistadores?

-Encuentre el número medio de entrevistadores ocupados.

3.4.3.3 En el departamento de empaque de cierta fábrica se tienen dos personas, una para retoque y una para emplantillado; el tiempo de las operaciones se distribuye exponencialmente con una media de 1.5 minutos; los productos llegan con una tasa media de 36 por hora. Se considera que tanto la operación de emplantillado como la de retoque, son procesos poissonianos con una tasa de 16 la primera y 20 la segunda, y se supone que los productos o son retocados o son emplantillados pero no se les hace las dos operaciones. Actualmente cada operario hace solamente una de las operaciones, pero se está considerando modificar el sistema actual, para permitir que ambos operadores puedan hacer las dos operaciones, con lo que se esperaría que el tiempo de servicio aumentara a 1.9 minutos. Analice los elementos mas importantes desde el punto de vista de producción y de las recomendaciones pertinentes.

3.4.3.4 La reparación de cierto tipo de maquinaria, que se encuentra en una fábrica, consiste en 4 pasos que deben llevar a cabo de manera secuencial, y son independientes entre ellos ; el tiempo que se lleva para realizar dichos pasos, se encuentra distribuido exponencialmente, con media de cuatro minutos los dos primeros y de seis minutos los otros dos. Si se sabe que la maquinaria se descompone según una Poisson, con una razón media de dos por hora, costando, Q.20.00 cada hora de maquina parada, adicionalmente se le paga al mecánico Q.40.00 la hora. ¿Cuánto le representa a la fábrica el costo de la compostura de dichas máquinas? ¿Cuál es el tiempo promedio que se tarda una máquina sin trabajar, una vez que se ha descompuesto?

3.4.3.5 Una empresa de renta de vehículos tiene su propio taller para dar servicio a los automóviles de acuerdo con sus necesidades. Actualmente se tienen dos opciones en estudio; la primera es tener dos talleres de servicio en los cuales se le dé servicio a un carro a la vez en cada taller, con un costo total anual de Q. 100,000.00. El tiempo de servicio de un carro es de seis horas. La segunda opción es tener un taller en el que el servicio consiste en cinco pasos secuenciales; el tiempo que se ha observado que lleva cada uno de estos pasos se distribuye exponencialmente con media de 36 minutos y son independientes entre sí; esta opción , tiene un costo de Q. 150,000.00 anuales. Para ambas opciones, los carros llegan a una tasa de uno cada cinco horas y, el costo del tiempo de ocio de cada carro es de Q. 30.00 por hora.¿ Cuál opción se deberá seleccionar? Suponga que el taller de servicio trabaja ininterrumpidamente.

3.4.3.6 Los pacientes llegan a un consultorio médico a intervalos promedios de 22 minutos y dedican en promedio 18 minutos a la consulta. Estos tiempos están distribuidos exponencialmente. El encargado de la sala desea tener suficiente número de asientos en la sala de espera para que no más del 24% de los pacientes que llegan tengan que esperar de pie.

- ¿Cuántos asientos se deberán colocar?
- Si existe la restricción de colocar únicamente 9 asientos en la sala de espera,¿ cuál es la probabilidad de que un cliente que llega no tenga asiento?

3.5 Conceptos Importantes

En esencia, lo mas importante para poder solucionar adecuadamente un problema de colas, es determinar a qué tipo de modelo pertenece el problema particular, para que se pueda utilizar la formulación adecuada, y asi poder , obtener los datos veraces con los cuales se pueda obtener un mejor análisis del problema.

Se debe recordar que se hacen varias suposiciones para poder adaptar la formulación a la realidad, por lo que hay que tenerlas muy en cuenta a la hora del análisis de un sistema real.

Debe acotarse que los modelos de colas no sirven para optimizar los modelos de servicio existentes, sino que de ellos puede, según los resultados numéricos obtenidos para las variables respectivas, abstraerse una mejor opción en donde puedan combinarse adecuadamente la eficiencia y su interrelación con los costos atribuibles a uno u otro modelo utilizado, para poder obtener así un sistema de servicio óptimo en cuanto a los costos y las variables existentes.

CAPÍTULO 4

TEORÍA DE INVENTARIOS

4.1 Introducción

Se han estudiado, hasta este momento, dos modelos (Markov y Colas), en los cuales se pueden predecir el comportamiento de las variables que los componen, sin embargo, se depende del analista, para poder tomar las decisiones que amerite el problema específico.

En la Teoría de Inventarios, se introduce el concepto de los modelos de optimización, es decir, de los modelos que por su propia estructura nos llevan a obtener, en sus resultados, los valores óptimos de las variables que maximizan o minimizan el resultado general.

Los inventarios varían de acuerdo con el tipo de actividad en el que se encuentren involucrados; en general, pueden mencionarse los inventarios de fabricación, de productos en curso, de producto terminado y los inventarios de MRO (mantenimiento reparación y operaciones); en cada uno de estos, pueden aplicarse los conceptos que se darán en este capítulo, ya que el concepto global es el mismo, sin importar el tipo de actividad que genere el estudio de los inventarios.

4.2 Componentes de los modelos de inventarios.

Los inventarios prestan en las empresas un servicio, el cual la mayoría de las veces debe ser inmediato, además, deben fungir como amortiguadores de las variaciones de la demanda que se imponen, por niveles de producción, de venta, etc.

Este servicio debe tratar de darse al menor costo, sin que ocurran faltantes, por lo que los componentes básicos de los modelos de inventarios son cantidades de pedidos, existencias, cantidades de reorden y los costos atribuibles a éstos.

Dentro de los costos que deben tenerse en consideración, se pueden mencionar:

Costo de ordenar: este es inherente a la orden de producción o pedido, no varían con la cantidad pedida puede mencionarse el valor de las ordenes de producción, o pedidos, preparación de la maquinaria, control del flujo de la orden.

Costo de mantener el stock: es el atribuible al valor de la mercadería que se tiene en el inventario.

Costo de faltantes: en determinado momento, puede asignarse un costo cuando la demanda requerida no es cubierta debido a faltantes en los inventarios; este costo puede medirse más fácilmente en cuanto a los modelos de inventarios de materia fácilmente en cuanto a los modelos de inventarios de materia prima, ya que en los modelos en donde se pretende servir a un cliente con un producto terminado, son costos más subjetivos.

Costo de recuperación: está dado por el valor de la mercadería, que por su obsolescencia, tiene que ser vendida a un precio igual o menor del costo.

Costo de capital: es el costo de oportunidad que se encuentra asociado al capital invertido en los inventarios; para su cálculo, deberá tomarse el valor del inventario por unidad, el tiempo que se encuentre dentro del inventario y la tasa apropiada para su cálculo; esta no podrá ser menor a la que se maneje en el mercado de valores del estudio.

Costo de tasas de descuento: éste está dado por la diferencia que se refleja en el valor unitario , cuando se incrementa la cantidad del pedido, dado que la mayoría de las veces, se ofrecen mejores precios unitarios cuando aumentan las cantidades del mismo.

Dentro de las cantidades que se manejan, las más importantes se mencionan a continuación:

Tamaño del pedido: éste es el valor que se pretende optimizar; es la cantidad de producto que, según la política óptima de inventario, deberá pedirse cada vez.

Requerimiento anual: en los inventarios determinísticos, representa el valor que se tiene estimado que se utilizara en el período que se va a estudiar, el cual puede ser de un año, o menos, de acuerdo con el problema particular de estudio.

Punto de reorden: es la cantidad en la cual, al llegar a ella en el nivel del inventario, se deberá hacer el pedido óptimo.

Inventario de seguridad: es la cantidad que debe existir en el inventario, para que las existencias no se agoten antes de recibir de nuevo producto, al haberse dado un pedido

El éxito de una política de inventarios es el manejo global de estos costos, para que sean mínimos, y que nunca existan faltantes en los inventarios ni sobrealmacenamientos.

4.3 Tipos de Modelos

El conocimiento que se tiene de la demanda requerida es la base para la clasificación de los modelos de inventarios, ya que si es conocida, se estará hablando de una demanda determinística; de lo contrario, si la demanda presenta aleatoriedad con una distribución de probabilidad conocida serán modelos estocásticos o probabilísticos.

4.3.1 Determinísticos

En los modelos determinísticos, se tiene una demanda en el tiempo , la cual es conocida; con base en esto, se pretende determinar las políticas óptimas que se habrán de seguir en los pedidos, para que su costo sea el mínimo.

La notación que se utilizará es la siguiente:

C = Costo incremental total
Co = Costo incremental total de la solución óptima
Q = Tamaño del pedido
Qo = Tamaño óptimo del pedido EOQ
a = Requerimiento anual en unidades
K = Costo de preparación
h = Costo de mantener el inventario (artículo/tiempo) unitario
P = Punto de reorden
L = Tiempo de entrega de los artículos
B = Nivel del inventario de seguridad
t = Tiempo entre pedidos

El objetivo primordial es desarrollar modelos para determinar el tamaño de pedido Qo, que minimice los costos incrementales importantes.

GRÁFICA 4.1

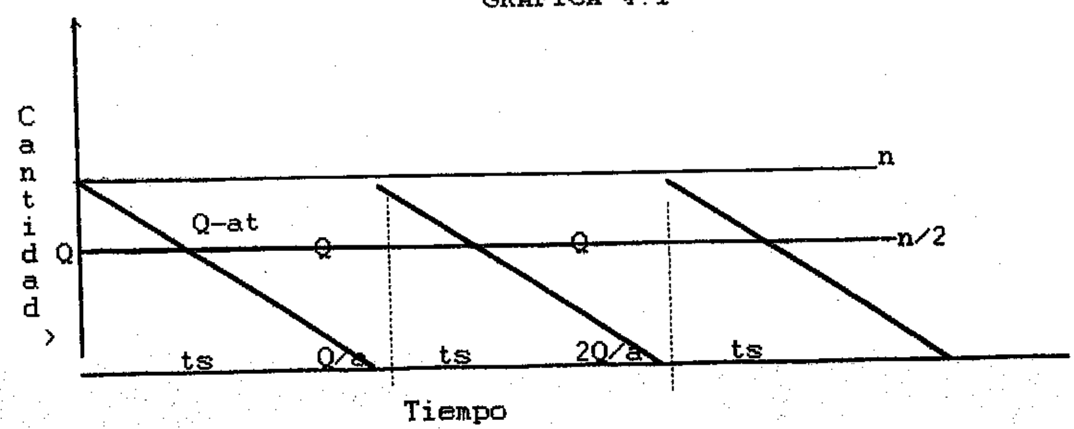


DIAGRAMA DE INVENTARIOS COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO

* En la gráfica 4.1, puede observarse el comportamiento de este tipo de inventarios, tomando en cuenta que se asume una demanda constante. En esta gráfica, se presentan las variables de estudio de los modelos de inventarios, y de ella

se partirá para hacer el análisis del tamaño económico del lote en el cual no se permite déficit.

Los costos que deben analizarse son el costo de producción y el costo de almacenamiento o también llamado de mantenimiento del inventario.

El costo de producción se tomará como:

$$0 \text{ si } Q = 0$$
$$K + CQ \text{ si } Q > 0$$

K = costo de preparación

C = costo unitario de producción

Q = nivel de inventario

El costo de almacenamiento por ciclo se analiza de igual forma:

De la gráfica, se puede abstraer que el nivel promedio del inventario es de $(Q+0)/2 = Q/2$, entonces el costo promedio de mantener el inventario será de $hQ/2$, donde h representa el costo unitario de almacenamiento. Teniéndose la longitud del ciclo Q/a, donde a representa la demanda constante, se puede concluir que el costo de almacenamiento por ciclo es $(hQ^2/2a)$

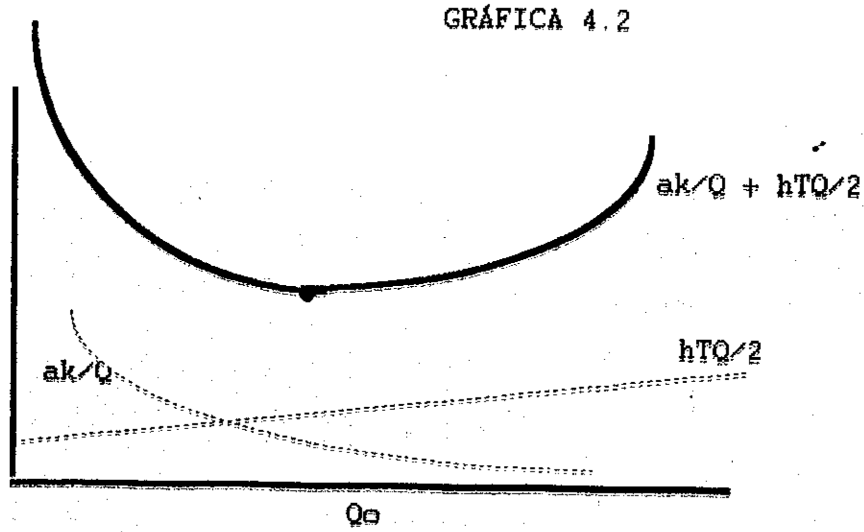
El costo total entonces, estará dado por la suma del costo de producción más el costo de almacenamiento.

$Ct = Cp + Ca$

$Ct = K + CQ + (hQ^2/2a)$

De acuerdo con las cantidades físicas en el inventario, el comportamiento de estos costos es inversamente proporcional el uno del otro, o sea que mientras uno de estos decrece el otro aumenta y viceversa; este comportamiento puede verse en la gráfica 4.2.

GRÁFICA 4.2



Lo que se busca al resolver este problema de inventarios es determinar el valor de Q, para el cual la suma de estos dos costos es mínimo; esto implica obtener el punto de inflexión de la curva de Ct. Aplicando el cálculo diferencial, se deriva la ecuación del Ct respecto de la cantidad que se va a ordenar Q e igualándola a cero, se obtendrán Qo, to y Cto.

$$\frac{dCt}{dQ} = -\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

De esta ecuación, se despejan los valores obteniéndose:

$$Qo = \sqrt{2aK/h}$$

$$to = Qo / a$$ y

$$Cto = \sqrt{2aThK}$$

donde T es igual al período.

Con estas ecuaciones, se puede encontrar los valores óptimos buscados, observándose claramente que se han obtenido en el punto donde el costo de producción se iguala al costo de mantener el inventario.

* La gráfica 4.3 ilustra el caso en el cual se permite el déficit en la demanda de los materiales, siempre con la suposición de que la misma es constante. Se puede aceptar que la existencia del déficit es factible, ya que siendo así la longitud del ciclo, se alarga, lo que implica un ahorro en el costo de preparación.

GRÁFICA 4.3

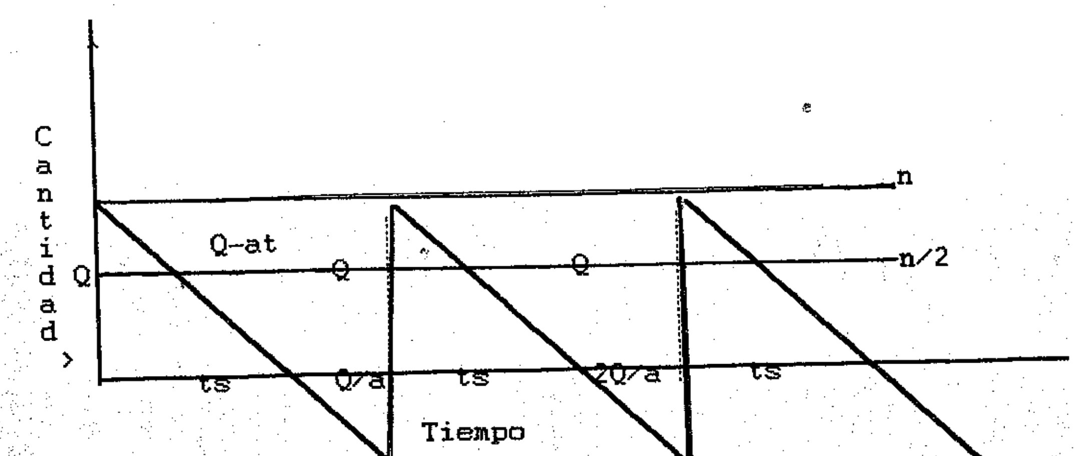


DIAGRAMA DE INVENTARIOS COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO DÉFICIT ES PERMITIDO

Analizándola de igual forma que el anterior, se tiene:

El costo de producción será 0 si $Q = 0$

$K + CQ$ si $Q > 0$

El costo de almacenamiento se presenta a continuación:

El inventario promedio es $s/2$, con lo que el costo de almacenamiento es $hs/2$ y el costo de almacenamiento es $hs^2/2a$.

En la gráfica 4.3, se puede ver que el déficit se presenta para un tiempo de$(Q-s)/a$, y el inventario promedio en déficit es $(Q-s)/2$.

El costo por déficit (P) multiplicado por el inventario promedio en déficit, nos lleva a obtener el costo total por déficit $(P(Q-s))/2$ y el costo por déficit por ciclo será $(P(Q-s)^2)/2a$.

El costo total por ciclo es de igual forma la suma de estos costos, por lo que la ecuación de costo es:

$Ct = K+CQ + hs^2/2a + (P(Q-s)^2)/2a$. en función de t

$T = (K+CQ + hs^2/2a + (P(Q-s)^2)/2a)/Q/a$

$T = aK/Q + aC + hs^2/2Q + P(Q-s)^2/2Q$

Este modelo está determinado por dos variables de decisión por lo que la ecuación de T, se tiene que derivar parcialmente respecto de las mismas (Q y s) y luego seguir el procedimiento de igualarlas a cero.

$dT/ds = hs/Q - P(Q-s)/Q = 0$

$dT/dQ = -aK/Q^2 - hs^2/2Q^2 + P(Q-s)/Q - P(Q-s)^2/2Q^2 = 0$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas se obtienen los valores buscados:

$Qo = \sqrt{2aK/h}\ \sqrt{(P+h)/P}$

$to = Qo\ /a\ =\ \sqrt{2K/ah}\ \sqrt{(P+h)/P}$

Faltante Máximo $= Qo - So = \sqrt{2aK/P}\ \sqrt{h/(P+h)}$

$Co = \sqrt{2aThK}\ \sqrt{P/(h+P)}$

El cociente $P/(h+P)$ es llamado tasa de ruptura, y siempre será un valor que está comprendido entre 0 y 1, tenderá a cero cuando el costo de escasez es muy pequeño y que solamente se aprecie el costo de almacenamiento y será lo contrario cuando esta tasa tienda a uno.

* Existe un caso en que se da casi siempre en la compra de partes, y es cuando al comprar o producir más, de acuerdo con la cantidad, se hace uno o más de un descuento; esto puede plantearse también como un modelo de inventarios con precios por intervalos, o sea que se obtienen mejores precios unitarios al subir el rango de compra o producción.

Se tienen las mismas condiciones que para el primer modelo estudiado, ya que existe una demanda fija y conocida de a unidades en el tiempo t, y no se permiten faltantes, por lo que no se permiten déficit.

Se debe mencionar que en este modelo, al ser variables las cantidades de compra, deben aplicarse los costos asociados a una mayor cantidad, en el costo de emisión de ordenes, tales como, mayor costo de recepción, inspección y traslados.

En términos generales, puede decirse que la resolución de este tipo de problemas consiste en:

-Encontrar el Qo con el precio base. Si el Qo es menor que el nivel de descuento, se procede a,

-Calcular el costo anual del inventario y el costo anual de compra,. suponiendo el precio base.

-Calcule el ahorro con el costo anual de compra con el precio de descuento.

-Suponiendo que se ordena la cantidad mínima de descuento, calcúlese el aumento en el costo anual de inventario. Compárese esto con el ahorro anterior y selecciónese la opción de menor costo.

Nótese que si el Qo en mayor que la cantidad mínima (al tomarlo con el precio base) de descuento, el problema está resuelto, ya que se calcula el Qo con el precio de descuento, y se ordena esa cantidad.

Si resulta que la cantidad de descuento es menos costosa, se debe recalcular el precio de descuento para comprobar si se debe pedir más que la cantidad mínima.

Matemáticamente se puede derivar una ecuación de costo, tomando siempre como base la figura 4.1, que presenta la situación para un valor cualquiera unitario de compra, además, se tiene que:

$a/Q = n$, el número de lotes en el tiempo T.

$ts = TQ/a$ = intervalo o periodo

$\frac{1}{2}Q$ = Inventario promedio durante ts

$\frac{1}{2}TQ^2/a$ = número mensual de artículos en el inventario para cada lote.

$\frac{1}{2}TQ/a$ = número mensual de lotes existentes en el inventario

Los costos que intervienen para cada lote son:

Cs = costo de emisión

QCn = costo de compra de Q artículos cuando el costo unitario de compra es Cn

ENTONCES

$Cs(TQ/2a)h$ = costo asociado con la emisión del inventario para el período ts

$QCn(TQ/2a)h$ = costo asociado con la compra del inventario para el período ts

Dado lo anterior, el costo total para ts es:

$Cs + QCn + Cs(TQ/2a)h + QCn(TQ/2a)h$

Entonces, el costo total para el período T completo es

$\Gamma = ½(Csa/Q + Cna + CsTh) + Cn(Th/2)Q$

Derivando Γ respecto de Q se tiene:

$d\Gamma/dQ = - Csa/Q^2 + ½CnTh$

Igualando esta ecuación a 0, y resolviendo, implica un óptimo

$Qo = \sqrt{2Csa/CnTh}$

Substituyendo este valor en el costo, se tiene:

$CTo = \underline{Csa/(\overline{2Csa/CnTh})} + Cna + ½CsTh + ½CnThQo$

$CTo = \sqrt{2CnThCsa} + Cna + ½CsTh.$

* Otro modelo que se presenta con bastante frecuencia en la administración de inventarios, es cuando se tienen varios productos con demanda constante y limitación de espacio de almacenamiento; este tipo de modelos presenta las características que se detallan a continuación:

-Existen n productos $(n>1)$

-La demanda es constante para los n productos

-Los productos compiten por un espacio de almacenamiento Q

-los productos son $q1, q2, \dots, qn$

-Cada producto tiene un costo fijo ki $(i=1,2..n)$

-Cada producto tiene un costo de almacenamiento hi

-El abastecimiento es instantáneo.

-No existen descuentos en precios

Se parte de $T = aK/q + ½hq$

para n productos, qi $(i=1,2,..n)$

$$T = \mathop{S}_{i=1}^{n} ((aiki/qi) + (hiqi/2)) \qquad S=\sum$$

Cada producto qi tiene un volumen disponible de almacenamiento Vi $(i=1,2,..n)$ y tiene una capacidad finita total Q (volumen total de la bodega), entonces matemáticamente se tiene una restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} (V_i q_i) \leq Q$$

$$q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

El problema consiste en calcular los valores de los qi de tal forma que se minimice el valor de T, sujeto a la restricción que se tiene de volumen de almacenamiento.
Si se le aplica el método de Lagrange a este modelo y se deriva la ecuación resultante respecto de qi, obtenemos una fórmula que puede ser valuable en diferentes valores.

$$L(q_1, q_2, \ldots q_n, \beta) = \sum_{i=1}^{n} ((a_i k_i / q_i)\ (h_i q_i / 2)) - \beta\left(\sum_{i=1}^{n} V_i q_i - Q\right)$$

$\beta < 0$

$$dL/dq_i = \tfrac{1}{2} h_i - K_i a_i / q_i^2 - \beta V_i = 0 \qquad \text{A}$$

$$dL/d\beta = -\sum_{i=1}^{n} V_i q_i + Q = 0 \qquad \text{B}$$

De A se obtiene:

$$q_i^* = \sqrt{(2 a_i K_i) / (h_i - 2\beta^* V_i)} \qquad \text{C}$$

Con la ecuación C, se pueden obtener valores de qi en función del valor óptimo de la variable ß.
El valor de ß*, que debe ser menor que cero, se encuentra por el método de prueba y error; se proporciona un valor negativo arbitrario de ß y utilizando C se obtienen valores provisionales de qi. Con estos valores, se prueba si satisface la igualdad B; si no se satisface, se modifica el valor de ß por otro valor negativo, y se repite el proceso hasta lograr una aproximación de la igualdad B.

4.3.2 Modelos probabilísticos

En este tipo de modelos, se tiene la característica principal de que la demanda es aleatoria, y tiene una función de probabilidad conocida.

* Se tiene un modelo en el cual como se ha dicho; existe una demanda aleatoria teniéndose pérdida sobre los excedentes y costos suplementarios de ruptura; un ejemplo de este tipo de modelos es el de los productos que se venden solamente en temporadas (árboles navideños); si se pidiera muy poco, se podría llegar a tener déficit, y si se pidiera una cantidad muy alta, al no venderse todo el inventario, se tendrían pérdidas por el excedente no colocado.

Para este modelo, se asume que el costo de almacenamiento es despreciable y que el nivel de existencias cambia de una manera continua; en este caso, la probabilidad de trasladarse del nivel a1 al nivel a2 se expresa como:

$$\int_{a1}^{a2} f(a)da$$

donde la probabilidad de que la orden sea menor o igual a S está dada por:

$$\int_{0}^{s} f(a)da = F(S)$$

En este modelo, si el inventario S es mayor que la demanda a, la diferencia se vende con una pérdida unitaria P1; si por el contrario, S es inferior a a, existe una orden de compra de carácter urgente de las unidades que faltan, y su costo suplementario implica un pérdida unitaria P2. La ecuación de costo para este modelo está dada por:

$$CT(S) = P1 \int_{0}^{s}(s-a)f(a)da + P2 \int_{s}^{\infty}(a-s)f(a)da$$

Para encontrar un mínimo, se deriva y se tiene:

$$\frac{dCT}{dS} = P1 \int_{0}^{s}f(a)da + P2 \int_{s}^{\infty}f(a)da$$

$$= P1F(S) - P2\ (1-F(S))$$

$$=(P1 + P2)F(S) - P2$$

Si se iguala esta ecuación a cero se tiene:

$$F(So) = (P2/(P1 + P2))$$

donde

$F(So) + p(a \leq S)$

* Un caso muy parecido es aquel en el cual se tiene retraso entre las órdenes y los aprovisionamientos, cuyo tiempo pasa a ser verdaderamente significante para el planteamiento de el problema de la obtención de la mejor política de pedidos.

En este tipo de problemas, se tiene un intervalo de tiempo, el cual está dividido en s períodos de igual duración llamados tsi, y se debe suponer que el tiempo que transcurre entre la orden de reaprovisionamiento y la recepción es T, que es la sumatoria de todos los tsi. Cada orden se programa al inicio de cada período esperando que su entrega se lleve a cabo k períodos adelante en el tiempo.

La distribución de la demanda a es conocida y lo que se requiere determinar es qué cantidad Qi habrá que ordenar k períodos antes del período i, de tal forma que se minimice el costo total para el período i.

Planteado de esta manera, se asume que las cantidades Qi para los k-1 períodos anteriores a k, son conocidos, o sea que, si Q1, Q2, Q3, Qk-1, son cantidades ya ordenadas; éstas deberán llegar para el 1,2,3, k-1 período.

Entonces si se tiene:

k = número de órdenes.

So = Inventario Inicial (período 1)

Si = Inventario Final (período i)

ai = Demanda para el período i

Qi = Pedido para el período i

Analizándolo de acuerdo con períodos de estudio:

$$S1 = So + (Q1-a1)$$

O sea que el inventario al final del período 1, será el inventario inicial que se tenía mas la suma de la diferencia entre el pedido para el período 1 y la demanda que se tuvo durante ese período; de esta manera, sucesivamente se tiene:

$$S2 = S1 + Q2 - a2 = So + (Q1+Q2) - (a1+a2)$$

$$Sk = So + (Q1+Q2+Q3+..Qk)-(a1+a2+a3+...ak)$$ o sea que

$$Sk = So + \sum_{i=1}^{k-1} Qi + Qk - \sum_{i=1}^{k} ai$$

Por conveniencia, se llamará S* a los tres primeros términos de Sk, y A, a la última sumatoria, entonces:

$$Sk = S* - A$$

Para obtener una ecuación de costo,

$$CT(S*) = P1 \int_{0}^{S*} (S*-A)f(A)dA + P2 \int_{S*}^{\infty} (A-S*)f(A)dA$$

Derivándose se obtiene:

$$d(CT(S*))/dS* = P1F(S*) - P2(1 - F(S*))$$

Al igualar a cero esta ecuación, se tiene:

$F(So*) = (P2/(P1 +P2))$ para $CT(Qk)$ mínimo.

y

$$Qko = So* - (So + \sum_{i=1}^{k-1} Qi)$$

* Se tiene también un modelo de costo fijo en el cual no se puede reordenar, o sea que el análisis se basa en un solo

período, con un costo unitario de c quetzales; h en este caso es el costo unitario de almacenar los artículos que sobraron menos su costo de recuperación. En este caso, se analiza el costo de la demanda insatisfecha p con p>c. Se supone que no existe inventario inicial y como siempre, se denota por q, la cantidad comprada al inicio del período, además, À es la variable aleatoria que denota la demanda durante el período. Nuevamente es necesario encontrar un balance entre el riesgo de la escasez vrs el riesgo del faltante.

La cantidad vendida estará dada por:

$$\begin{array}{l} \grave{A}, \text{ si } \grave{A}<q \\ q, \text{ si } \grave{A}^{3}q \end{array}$$

Entonces, si la demanda es À y se tiene almacenado q, el costo estará dado por:

$$C(\grave{A},q) = cq + p\max(0,\grave{A}-q) + h\max(0,q-\grave{A})$$

El costo esperado entonces estará dado por la expresión:

$$C(q) = CQ + \int_{q}^{\infty} p(a-q)f(a)da + \int_{0}^{q} h(q-a)f(a)da$$

derivando e igualando a cero, esta expresión se tiene:

$$C(qo) = (p-c)/(p+h)$$

* Una variación de este modelo es cuando se tiene en existencia un inventario inicial (x), entonces se deberá pedir (q-x) tal que la cantidad qo disponible al inicio del período sea:

$$qo = x + (q - x)$$

La ecuación del costo no varía, salvo en que C(q) = C (q-x) donde $q^{3}x$,de tal forma que

Si x<q ordene hasta qo

Si x≥qo no se ordene

con:

$$C(qo) = (p-c)/(p+h)$$

Estos resultados pueden abstraerse, tanto para cuando los costos presentan distribuciones lineales o cuando éstos presentan distribuciones que tiendan a la convexidad.

4.4 PROBLEMAS

Se ha presentado, de manera concreta, la teoría de los modelos más usuales de inventarios, sin embargo, se tiene que aplicar esta para encontrarle el sentido práctico a la formulación que se ha inducido para la resolución de los problemas particulares.

4.4.1 Problema Mnemotécnico

Se ilustrará un problema particular de los modelos de inventarios, para que se observe la metodología para su resolución. En este tipo de modelos, se debe analizar a cuál de los modelos teóricos presentados pertenece el problema particular, y utilizar las fórmulas derivadas del mismo para encontrar los valores buscados.

PROBLEMA MNEMOTÉCNICO

Una compañía fabricante de refrigeradores produce sus propios condensadores. Los refrigeradores se montan en una línea de producción de características continuas, a una tasa de 5000 unidades/mes. Por la forma de su construcción, los condensadores se producen en lotes, porque no amerita tener una línea continua de producción para los mismos.

Cada vez que se producen los condensadores se incurre en un costo de preparación de Q. 7,250.00; el costo de mantener un condensador por espacio en la bodega es de Q. 0.15 u/mes, se paga Q. 0.05 u/mes en seguros, y se ha estimado que el costo del capital invertido en ellos es de Q. 0.15 u/mes.

Actualmente se producen 20,000 condensadores en cada serie de producción, pero se estima que no se están optimizando los recursos, por lo que se pide encontrar una alternativa que optimice las variables y sus costos.

SOLUCIÓN:

Este problema presenta el modelo básico de inventarios; los datos que deben extraerse son: la demanda (a), el costo de preparación (k) y el costo de mantenimiento del inventario (h). De la redacción del problema, puede verse que:

a = 5000 unidades/mes

k = Q. 7250.00 por corrida de producción.

h = Q. 0.35 unidad/mes (0.15 + 0.05 + 0.15)

Habiéndose determinado el valor de las variables de estudio, se procede a aplicar las fórmulas de Qo y to

$Qo = \sqrt{(2ak/h)}$

$Qo = \sqrt{((2(5000)(7250))/0.35)}$

Qo = 14,392 unidades

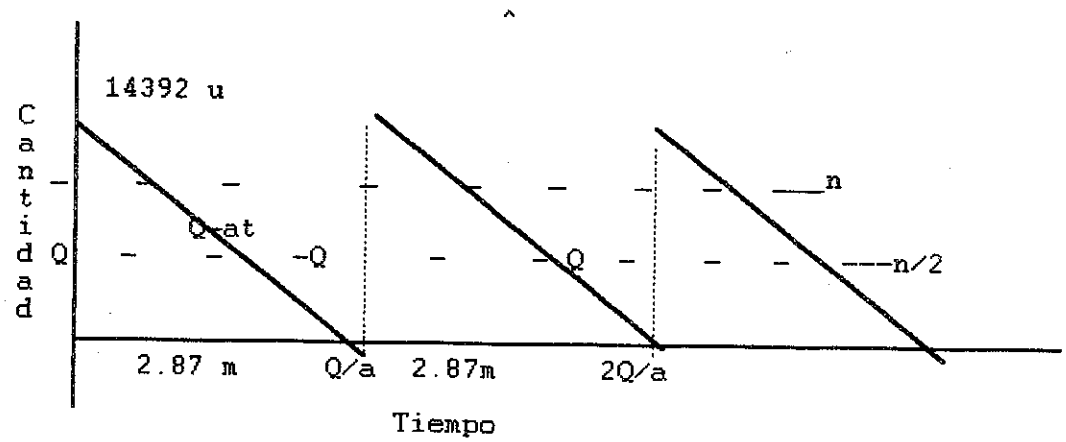
to = Qo/a

to = 14392/5000

to = 2.87 meses.

Entonces para optimizar los recursos, la compañía deberá producir lotes de 14392 condensadores, una vez cada 2.87 meses.

Gráficamente puede verse:



4.4.2 Problemas resueltos

4.4.2.1 Modelos determinísticos

4.4.2.1.1 La demanda de un producto de cierta fábrica se ha estimado mediante un análisis estadístico en 74,250 unidades anuales`, y se asume que se debe colocar el producto instantáneamente. Si no se tiene el producto en el momento de tener que entregar, se pierde el negocio, lo que puede entenderse como que no se aceptan rupturas en las entregas. Se tiene un costo de almacenamiento de Q. 0.25 u/mes, y, cada vez que se emite un lote de producción, se incurre en ciertos gastos que representan un total de Q. 350.00. Analice y determine la política óptima de inventarios que la fábrica deberá seguir para optimizar los recursos.

SOLUCIÓN

Este problema presenta de nuevo el modelo básico de inventarios, en los cuales no se permite déficit.En el, se debe trabajar en una sola unidad de tiempo para que los resultados sean congruentes.

a = 74,250 unidades

k = Q. 350.00

h = Q. 0.25 unidad/mes

Qo = √(2ak/h)

Qo = √((2(74250)(350))/(12(0.25))

Qo = 4,162 unidades

to = Qo/a

to = (4162 * 12)/74250

$to = 0.6726$ meses $= 20$ días.

La política óptima de inventarios que se debe seguir, será la de producir lotes de 4162 unidades en intervalos regulares de 20 días cada uno.

4.4.2.1.2 En la empresa Guicasa, se ha estimado una demanda anual de 50,000 guantes; se estima que existe un costo de ruptura o escasez de Q. 0.30 unidad/mes. Se debe analizar la forma de programar los lotes de producción, si se desean optimizar los recursos minimizando los costos. Se ha determinado que el costo de mantener los inventarios es de Q. 0.20 unidad/mes y que cada vez que se emite un lote, se incurre en un gasto de Q 150.00. ¿ Cuál es la cantidad óptima que debe ordenarse, en qué momento debe hacerse y bajo qué costos?

SOLUCIÓN

Este es un problema básico de inventarios; solamente que se tienen permitidos los faltantes, por lo que hay que aplicar la formulación de estos modelos.

$a = 50000$ unidades

$h = Q.\ 0.20$ unidad/mes

$k = Q.\ 150.00$

$p = Q.\ 0.30$ unidad/mes

Cantidad óptima a ordenar

$Qo = \sqrt{((2ak)/h)} * \sqrt{((p+h)/p)}$

$Qo = \sqrt{((2(50000)(150)/12(0.2))} * \sqrt{(0.50)/(0.30)}$

$Qo = 3{,}227$ unidades

En que momento debe hacerse

$So = \sqrt{((2ak)/h)} * \sqrt{((p)/(p+h))}$

$So = \sqrt{((2(50000)(150)/12(0.2))} * \sqrt{(0.30)/(0.50)}$

$So = 1{,}936$ unidades

El período entre ordenes será entonces

$to = Qo/a$

$to = 3227 * 12 / 50000$

$to = 0.77$ meses ~ 23 días

$Co = \sqrt{2aThk} * \sqrt{p/(p+h)}$

$Co = \sqrt{2*50000*0.2*150*12} * \sqrt{0.30/0.50}$

$Co = Q.\ 4647.57$

La política de inventarios, que optimiza los costos para la empresa Guicasa, está dada por lotes de producción que se deberán ordenar de 3,227 unidades, el cual deberá ordenarse al momento de tener 1936 unidades en el inventario, y debe realizarse en intervalos regulares de cada 23 días, con unos costos estimados para esta política de Q. 4647.57.

4.4.2.1.3 Un estudiante de Ingeniería decide que se dedicará a la venta de computadoras personales; estima que su demanda será de cinco PCs al mes. Las PCs las traerá de el extranjero personalmente, por lo que deberá tener Q. 9000.00 para llevar a cabo el viaje. El costo de almacenamiento para cada PC es de Q. 900.00. Las compras se llevan a cabo a un costo unitario de Q. 2000.00. Cuando el estudiante de ingeniería llega a la empresa que le proveerá el producto, se le informa que se tiene una nueva política de precios con base en la cantidad comprada; si se compra hasta catorce unidades, el precio se mantiene en Q. 2000.00, pero si se compra de quince unidades en adelante, entonces el precio unitario baja a Q. 1000.00.¿ Cuál cree usted que debe ser la cantidad comprada?

SOLUCIÓN

Este es un problema típico de inventarios con una cota de descuento, ya que:

	COSTO UNITARIO	CANTIDAD	
C1	Q.2000.00	si $0<Q<15$	Qo
C2	Q.1000.00	si $15 \leq Q$	Q1

Se debe estimar primero el Qo del precio normal con:

$a = 5$

$k = Q.\ 9000.00$

$h = Q.\ 900.00/mes$

$Qo = \sqrt{2ak/h}$

$Qo = \sqrt{(2(5(9000)))/900}$

$Qo = 10$ PCs

Valuando el costo para esta opción:

$T10 = Cna + ak/Q + hQ/2$

$T10 = 2000*5 + (5*9000)/10 + (900*10)/2$

$T10 = Q.\ 19000.00$

Se debe igualar el costo actual con el posible propuesto del descuento, para encontrar en qué cantidad son iguales:

$T10 = Tq1$

$19000 = 1000*5 + 4500/Q* + 900Q*/2$

$14000 = (4500 + 450Q*^2)/Q*$

$450Q*^2 - 14000Q* + 4500 = 0$

$Q* = 30.77$

$Q* = 0.33$

Como 30.77 está arriba de la cifra en donde comienza el descuento, se procede a valuar esta cifra en el costo, para tomar una decisión.

T15 = 900*5 + (5*9000)/15 +(900*15)/2

T15 = Q. 14250

Para minimizar sus costos, el estudiante deberá comprar 15 PCs en cada compra, y hacer uso del descuento, ya que de acuerdo con el análisis realizado es en este punto donde sus costos son menores.

4.4.2.1.4 Se necesitan 330,000 toneladas de Master Batch que se consumirán en el transcurso de un año calendario; el costo de preparación de la orden de compra es de Q. 88.00. El costo del capital invertido, seguros e impuestos, sobre el inventario promedio, es del orden del 22% de este. El costo de almacenamiento es de Q. 0.11 ton/mes y esta basado en el inventario promedio almacenado. El costo de manejo tiene una tasa fija de Q. 22.00; por orden y del proveedor, se tiene a la vista un fax con la siguiente información:

	CANTIDAD (Ton)	COSTO UNITARIO (Q)	
C1	$0<Q<11000$	1.1	Q1
C2	$11000 \leq Q < 33000$	1.08	Q2
C3	$33000 \leq Q < 55000$	1.06	Q3
C4	$Q \geq 55000$	1.00	Q4

¿Cuál deberá ser el volumen de inventarios que minimice el costo total para el departamento de inyectado?

SOLUCIÓN

Este es un problema con varios descuentos, los cuales dependen de la cantidad que se va a comprar, entonces deben analizarse los diferentes Qo y los costos para las cotas de los rangos de descuento para determinar la mejor opción:

a = 330,000 ton/año

Cn = Costo variable en función de Q

k = Q. 110.00 (Q. 88.00 + Q. 22.00)

h = Costo almacenamiento + Costo capital

h = 0.11 *12 meses + 0.22 Cn

Se tiene la ecuación de costo

T = aCn + ka/Q + hQ/2

T = 330,000Cn +(110)(330000)/Q + (1.32+0.22Cn)Q/2

con

$Qo = \sqrt{2ak/h}$ equivalente según el problema particular

$Qo = \sqrt{(2*110*330,000)/(1.32+0.22Cn)}$

Para los diferentes Cns, se calcula el valor de Qn para verificar en qué intervalo se encuentran,

$Q1 = \sqrt{(2*110*330000)/(0.22*1.1+1.32)}$

Q1 = 6817 Toneladas

$Q2 = \sqrt{72600000/(0.22*1.08+1.32)}$

Q2 = 6827 Toneladas

$Q3 = \sqrt{72600000/(0.22*1.06+1.32)}$

Q3 = 6836 Toneladas

$Q4 = \sqrt{72600000/(0.22*1+1.32)}$

Q4 = 6866 Toneladas

Ninguna de estas cantidades se encuentra en algún intervalo de descuento, por lo que se debe valuar para cada una de las cotas el costo total de la opción y luego tomar una decisión.

$$T1=1.1(330000) + \frac{((110*330000))}{6817} + \frac{(0.22*1.1+1.32)6817}{2}$$

T1 = Q. 373,648.99

$$T2 =1.08(330000)+\frac{((110*330000))}{11000}+\frac{(0.22*1.08+1.32)1100}{2}$$

T2 = Q. 368,266.80

T3 = Q. 376,527.80

T4 = Q. 373,010.00

Entonces, se deberán comprar 11,000 toneladas de Master Batch, con un costo total de 368,266.80 y la duración del ciclo de compra deberá ser de:

to = Qo/a

to = 11,000/330,000

to = 0.033 año

o sea que las compras deberán hacerse cada doce días.

4.4.2.1.5 Para guardar los inventarios de PVC en cierta fábrica, se tiene una bodega de 25,000 metros cúbicos de espacio de almacenamiento. Se tienen tres tipos de PVC, virgen natural y reciclado. Se ha tomado en cuanta en el espacio la operación de manejo del producto. En la siguiente tabla, se presentan las demandas, costos y espacios que ocupa cada producto, a saber :

PRODUCTO	DEMANDA Qi	ESPACIO	Ki	hi
i=1 VIRGEN	2 TON/MES	1000	10000	300
i=2 NATURAL	4 TON/MES	1000	5000	100
i=3 RECICLADO	3 TON/MES	1000	15000	200

¿Cuál es la política óptima que aprovecha el máximo de espacio minimizando los costos totales?

SOLUCIÓN:

Para determinar los valores óptimos se deberán valuar, con valores de beta, las fórmulas de qi sujeta a su restricción para valores de beta menores de cero con pequeñas variaciones hasta que el valor de el total del espacio cambie de signo, y, en él, se encuentra el óptimo de nuestro problema. Los resultados de las iteraciones se presentan para mayor facilidad en la tabla 4.1.

$$q_i^* = \sqrt{(2a_iK_i)/(h_i-2\beta V_i)}$$

$$\text{sujeta a} \quad -\sum_{i=1}^{n} V_i q_i + Q = 0$$

TABLA 4.1

I	ß	q1	q2	q3	$\sum_{i=1}^{3} V_i q_i - 25000$
1	0.00	11.5	20.0	21.2	27700
2	-0.05	10.0	14.1	17.3	16400
3	-0.10	9.0	11.5	14.9	10400
4	-0.15	8.2	10.0	13.4	6600
5	-0.20	7.6	8.9	12.2	3700
6	-0.25	7.1	7.6	11.3	1600
7	-0.30	6.7	7.6	10.6	-100

En el momento en que la restricción cambia de signo, puede afirmarse que se ha encontrado un óptimo; en este punto, se evalúa para determinar el costo de la opción.

$$T = \sum(a_ik_i/q_i + h_iq_i/2)$$

$$T= (2*10000/6.7 + 300*6.7/2)+(4*5000/7.6 + 100*7.6/2) + (3*15000/10.6 + 200*10.6/2)$$

T= Q. 12306.94

Se deben tener en el inventario 6.7 toneladas de material virgen, 7.6 toneladas de material natural y 10.6 toneladas de material reciclado, con las cuales se ocupará un espacio de 24,900 metros cúbicos, lo cual representará un costo de Q. 12306.94.

4.4.2.2 Modelos probabilísticos

4.4.2.2.1 En una fábrica de chiclet's, se exporta un determinado producto, se mide por peso manufacturado. Si en la producción de un batch sucede que se hace el centro un día antes de confitarlo, existe una pérdida de Q. 0.50 por kilo. El costo de mantener un kilo en almacenamiento es de Q. 0.50. Cada vez que en un mismo día se hace centro y se confita, se sufre una pérdida de Q. 2.50 el kilo con:

F(a) = si s = 0 f(a) = 0.06

so s = 120 f(a) = 0

¿Cuántos kilos deberán ser confitados diariamente?

SOLUCIÓN:

Del problema se tiene que P1 = Q. 0.50 y P2 = Q. 1.25

Entonces P2/(P1+P2) = (2.50)/(0.5+2.5) = 0.8333

$$\int_0^s f(a)da = \int_0^s (0.06 - (0.06/120)a)da$$

$$0.06a - (0.0005/2)a^2 = 0.833$$

$$0.00025A^2 - 0.06A + 0.833 = 0$$

Despejando con la formula:

$$\frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{0.06\pm\sqrt{0.002767}}{2(0.00025)}$$

Resultado 1 = 225.20 kilos

Resultado 2 = 14.80 kilos

La función de densidad de la demanda se puede tomar como una línea recta, en la cual las cotas son en el eje de las cantidades 0 y 120; entonces, el resultado uno está fuera de este rango y se toma automáticamente el resultado número dos, o sea que deben ser confitados diariamente 14.80 kilos para optimizar los recursos de la fábrica e incurrir en las menores pérdidas.

4.4.2.2.2 El gerente de planta de una fundición ordena semanalmente la cantidad de toneladas que utilizará en un mes y medio plazo (seis semanas).

Determinada semana, él se da cuenta que posee 120 libras en la bodega, y que, además, hay órdenes de entrada de 40, 10, 80, 30, y 50 toneladas para las cinco semanas anteriores. ¿Qué cantidad deberá ser ordenada para minimizar los costos, si se sabe que el costo de recuperación es de Q. 3.50/ton y que el costo de ruptura por orden suplementaria es de Q. 12.5? dada la función de densidad de la demanda:

0.04 – 0.0008a.

Del problema se tiene que P1 = Q. 3.50 y P2 = Q. 12.5

Entonces P2/(P1+P2) = (12.50)/(3.5+12.5) = 0.78125

$$\int_0^s f(a)da = \int_0^s (0.04 - 0.0008a)da$$

$$0.04a - (0.0008)a^2 = 0.78125$$

$$0.0008A^2 - 0.04A - 0.78125 = 0$$

Despejando con la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{0.04 \pm \sqrt{0.0.0025}}{0.0016}$$

Resultado 1 = 45.72

Resultado 2 = 4.275

Estos resultados se valúan con la fórmula:

$$Qko = So* - (So + \sum_{i=1}^{k-1} Qi)$$

$$= 46 - (120 + (210)$$

Puede observarse que se obtendrán valores negativos para cualquiera de los dos resultados obtenidos, por lo que no se debe ordenar nada para la sexta semana y evaluar este resultado en la séptima semana.

4.4.2.2.3 Un expendedor de periódicos los compra a Q. 0.10 y los vende a Q. 0.15 cada uno. El costo de almacenamiento es de Q 0.01 por periódico. Se sabe que la distribución de la demanda es uniforme entre 200 y 300 periódicos. Hállese el número óptimo de periódicos que el expendedor deberá comprar.

SOLUCIÓN:

La función de la demanda esta dada por:

1/(b-a) si a≤ x ≤b

0 en otro caso

a = 200 y b = 300

entonces:

$$\int_{200}^{qo}(1/100)da = (0.15 - 0.10)/(0.15+0.01)$$

$$(1/100)A\Big|_{200}^{Qo} = 0.3125$$

$$Qo/100 - 2 = 0.3125$$

$$Qo = 231.25$$

El expendedor deberá comprar 232 periódicos, con lo cual estará optimizando sus costos en la compra y distribución de los mismos.

4.4.2.2.4 Un estudiante de Ingeniería está tratando de optimizar una decisión personal. ¿Cuánto dinero tiene que invertir en cheques de viajero antes de irse de vacaciones en este año?

Ya compró doce cheques de viajero ($100.00 c/u). La distribución de probabilidad de cuanto necesitará se muestra en la tabla 4.2.

Si el estudiante lleva menos de lo que necesita, deberá regresar una semana antes por cada $100.00 que le falten. Como le ha dado un valor de $150.00 cada semana, existe una pérdida neta de $50.00. Sin embargo cada cheque adicional de viajero cuesta $1.00, y, cada uno de estos cheque que le queden, representa una pérdida del 2% de intereses perdidos, de manera que debe determinar la cantidad óptima de compra

CANTIDAD	PROBABILIDAD
1000.00	0.05
1100.00	0.10
1200.00	0.15
1300.00	0.55
1400.00	0.75
1500.00	0.85
1600.00	0.95
1700.00	1.00

TABLA 4.2

SOLUCIÓN:

Se busca la cantidad óptima de dinero Qo que satisfaga a:

P(a<Qo-1) < (p-c)/(p+h) <P(a<Qo)

sabemos que p= $50.00

c = $1.00

h = $2.00

entonces

P(a<1500) < 0.94 < Pa(<1600)

Qo = 1600 o sea 16 cheque de viajero.

Ya que inicialmente se cuenta con 12 cheques de viajero, la cantidad que debe comprar es de

16 - 12 = 4 cheques de viajero adicionales.

El estudiante para aprovechar al máximo sus vacaciones y optimizar el costo de las mismas, solamente deberá adquirir cuatro cheques de viajero adicionales a los que ya posee.

4.4.3 Problemas propuestos

Se presentan a continuación una serie de problemas con los cuales se pretende que el estudiante, mediante la resolución de los mismos, logre afianzar los conceptos más importantes vertidos en el capítulo.

4.4.3.1 Modelos determinísticos

4.4.3.1.1 Una compañía que alquila autos consume gasolina a una tasa de 8,600 galones/mes; la gasolina cuesta Q. 1.10 y tiene un costo de preparación por pedido de Q. 1,050.00. El costo de mantener el inventario es de Q. 0.01 galón/mes.

a. Si se supone que no se permiten faltantes, determínese cuándo y cuánto se debe ordenar.

b. Si se tiene un costo por faltante de Q. 0.50 galón/mes, ¿cuál será la política óptima de inventarios?

c. El proveedor estima que si se compran más de 40,000 galones cada vez, el precio de venta lo podría bajar a Q. 0.99/galón, ¿cuánto se deberá comprar?

4.4.3.1.2 En una planta de manufactura, se consume materia prima a razón de 180,000 kilos por año. El costo fijo de cada orden de producción es de Q. 60.00; el costo anual de mantenimiento de los inventarios se estima en un 20% de la inversión de los inventarios promedio; no se permiten déficit, y el precio de las materias primas es variable y está dado por:

ORDEN EN LBS.	PRECIO POR LIBRA (Q.)
$0 < Q < 6000$	1.70
$6000 \leq Q < 10000$	1.60
$10000 \leq Q$	1.50

¿Cuál es el lote óptimo y cuál su costo?

4.4.3.1.3 Para llevar a cabo un proyecto a nivel nacional, se requiere contratar los servicios de ingenieros civiles, mecánicos e industriales. Los datos más importantes se presentan a continuación:

DEMANDA CONSTANTE	COSTOS UNITARIO ENTRENO	COSTOS FIJO CONTRATACIÓN	SUELDO UNI POR UNIDAD TIEMPO
Civil 100	Q.2000.00	Q.5000.00	Q.15000.00
Mec. 200	Q.8000.00	Q.5000.00	Q.18000.00
Ind. 100	Q.5500.00	Q.5000.00	Q.20000.00

Bajo estas condiciones y con un presupuesto fijo de Q. 150,000,000, ¿cuánto personal de cada una de las ramas debe contratarse y con qué frecuencia, para minimizar los costos totales?

4.4.3.1.4 Se requiere capacitar a 500 operarios para una plantade producción, en los próximos 90 días, el costo fijo al empezar el programa de capacitación es de Q.400000.00 y el costo de mantenimiento de cada alumno durante el curso es de Q. 250.00 diarios. ¿Cuánta gente debe capacitarse y con que frecuencia para que el costo resulte óptimo? Estos operarios serán contratados para laborar en la planta de producción y la empresa de capacitación se ha comprometido a pagarle a la planta Q.1000.00 por día por operario que no este capacitado cuando se le necesite, entonces, ¿cuál es el programa de capacitación que optimiza los costos, y cuál es este costo?

4.4.3.2 Modelos deterministicos

4.4.3.2.1 El propietario de un almacén ordena diariamente el número de repuestos que se solicitarán a cinco días plazo; cierto día, el propietario se da cuenta de que posee 11 cientos de repuestos en la bodega, y que, además, hay órdenes de entrada de 4,9,7,3, para los días anteriores; el problema para el propietario consiste en encontrar la cantidad óptima que debe ser ordenada ese día y que minimice los costos. Se sabe que el costo de recuperación es de Q 0.25 y que el costo de ruptura es de Q.1.25, la distribución de la demanda para el sexto día esta dada por f(a) = 0.033 - 0.00048a.

4.4.3.2.2 Un fabricante de pan lo distribuye diariamente a diversas tiendas de abarrotes. El costo del pan es Q. 0.20 la unidad, se vende a las tiendas a Q. 0.30, siempre que sea pan del día. El pan que no se vende, se devuelve al fabricante y éste lo vende a Q 0.15/unidad; este costo de salvamento, representa el costo de almacenamiento. El costo de la demanda no satisfecha se estima en Q. 0.35/unidad. Si la demanda tiene una distribución uniforme entre 1000 y 2000 unidades, encuentre el número óptimo de unidades que debe producir el fabricante para minimizar sus costos.

4.4.3.2.3 Considérese la siguiente situación de inventarios. Las demandas son independientes con una misma función de densidad.

f(a) = 1/50 si 0 <a< 50

Las órdenes se pueden colocar al inicio de cada período sin costo de preparación. Con un precio de C = 10; existen costos de almacenaje de 7 por cada unidad que quede disponible al final de cada período y un costo de penalización de 15 por cada unidad que se surte tarde. Encuéntrese la política óptima para un período.

4.4 CONCEPTOS IMPORTANTES

Siendo los inventarios de una suprema importancia dentro de las organizaciones, tanto en el valor , como en el sentido de logística como el de servicio, se han presentado modelos simplificados para optimizar las políticas de inventarios; siendo vital la adecuación del modelo de estudio a la vida real para poder obtener los resultados deseados.
No hay que dejarse llevar por la idea de que se están obteniendo resultados óptimos a priori, ya que se debe entender que la solución que se obtiene es óptima para el modelos y sus componentes; si ha sido factible evaluar todas las variables, perfecto; de lo contrario, se deben hacer intercambios e interevaluaciones dentro de los resultados, con criterios que no sean estrictamente matemáticos.
Se han tratado modelos determinísticos y probabilísticos, respecto del comprtamiento de la demanda; en ellos, se pretende equilibrar el riesgo de un faltante contra el aumento en el costo de conservación, o sea, que de cualquier manera, hay quecumplir con los objetivos de servicio a un costo mínimo tratando de tomar en cuanta, la mayor cantidad de variables, para que el estudio y análisis sea representativo.

CONCLUSIONES

1. El fin primordial del presente trabajo es escencialmente didáctico, y da una guía para los estudiantes del curso de Investigación de Operaciones 2, así como a los profesionales interesados en la materia.

2. Este manual será el elemento que se utilizará como un enlace entre la clase magistral teórica y el laboratorio de Investigación de Operaciones 2, con lo que se dará un gran apoyo a la enseñanza integrada.

3. En este manual, se recopila información teórico-práctica, que puede ser consultada por toda persona interesada, en cualquier momento.

4. Este manual, puede utilizarse como instrumento para organizar de una manera más ordenada, comprensible y viable el Laboratorio de Investigación de Operaciones 2.

5. Con este manual, se puede llegar a evitar, en gran medida, la pérdida de atención del estudiante en la toma de apuntes, ya que al tener varios problemas resueltos, es mucho más facil seguir la explicación sin tomar demasiados apuntes.

6. Este manual, inculca los lineamientos de instrucción práctica, que, facilitará y hará más eficiente el trabajo de la persona encargada del laboratorio.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda a las autoridades de la Facultad de Ingeniería implementar las medidas para que se reduzca el tiempo no utilizado en cada semestre, ya que esta es la razón primordial para que el nivel académico del estudiante no sea el adecuado.

2. Se recomienda a las autoridades de la Facultad de Ingeniería autorizar este trabajo de tesis, como guía obligatoria del curso de Investigación de Operaciones 2.

3. Se exorta a los estudiantes del curso de Investigación de Operaciones 2, que no se queden solamente con los conocimientos vertidos en este trabajo de tesis, sino que, por el contrario, amplíen las informaciones, de tal manera que profundicen los conceptos teórico-prácticos, que fundamenten aún más su base científica, de tal forma que puedan enfrentar sólidamente los problemas de la vida real.

4. Es necesario utilizar el cronograma como una guía de planificación, para poder así cubrir totalmente en el semestre el programa del curso Investigación de Operaciones 2, siempre con la debida interacción y apoyo de la clase magistral teórica.

5. Al guiarse al 100% por este manual, se tendrá un marco, mediante el cual se podrá cumplir por completo el programa del curso de Investigación de Operaciones 2.

BIBLIOGRAFIA

BUFFA, Elwoods S. y DYER, James Ciencias de la administración e investigación de operaciones
México, Editorial Limusa, 1983

CARDENAS C., Jose Consideraciones sobre políticas de inventarios aplicadas en la industria nacional.
(Tesis Facultad de Ingeniería, USAC) 1977

EVERETT, Adam E. y RONALD, Ebert J. Administración de la producción y las operaciones
México, Editorial Prentice Hall Internacional, 1981

HERNANDEZ, Francisco Guía teórico práctica del laboratorio del curso Control de la Producción.
(Tesis Facultad de Ingeniería, USAC) Guatemala 1987

HILLIER, Frederick y LIEBERMAN, Gerald Introducción a la investigación de operaciones
México, McGraw - Hill, 1989

MENA K.,Rene Teoría de lineas de espera, muestreo simulado aplicado a la Policlínica del IGSS, en su clínica de enfermedad común
(Tesis Facultad de Ingeniería,USAC) 1977

MOSKOWITZ, Herbert y WRIGHT, Gordon Investigación de operaciones
México, Editorial Prentice Hall, 1983

ORTEGA R., Armando ¿Qué es la investigación de operaciones?
Facultad de Ingeniería de la UNAM, 1979

PELAEZ C., Jorge _Algunos problemas de inventarios en investigación de operaciones_
(Tesis Facultad de Ingeniería, USAC) Guatemala 1970

TAHA, Hamdy A. _Investigación de operaciones, una introducción_
México, Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., 1981

TAWFIK, Louis y CHAUVEL, Alain _Administración de la producción_
México, Editorial Interamericana, 1980