



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Mecánica

**ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y  
RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES  
PLANETARIOS**

**Marvin René Espina Morales.**

Asesorado por el Ing. Carlos Aníbal Chicojay Coloma

Guatemala, julio de 2008



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y  
RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES  
PLANETARIOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN  
PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR:

**MARVIN RENÉ ESPINA MORALES**

ASESORADO POR EL ING. CARLOS ANÍBAL CHICOJAY COLOMA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**INGENIERO MECÁNICO**

GUATEMALA, JULIO DE 2008



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE LA JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Inga. Glenda Patricia García Soria
VOCAL II	Inga. Alba Maritza Guerrero de López
VOCAL III	Ing. Miguel Ángel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Carlos Enrique Sanabria Solchaga
EXAMINADOR	Ing. Julio César Campos Paiz
EXAMINADOR	Ing. Roberto Guzmán Ortiz
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas



**HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO  
PARA TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS,**

tema que me fue asignado por la Dirección de Escuela de Ingeniería Mecánica, con fecha de febrero de 2008.

  
Marvin René Espina Morales





Guatemala 09 de mayo de 2008.

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. Fredy Mauricio Monroy Peralta  
Director  
Escuela Ingeniería Mecánica  
Presente.

Ingeniero Monroy:

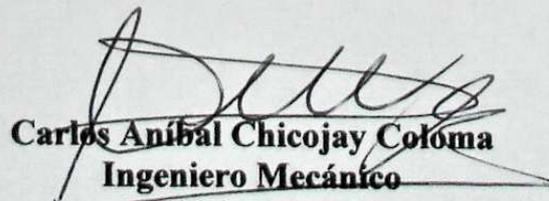
De manera atenta me dirijo a usted, para hacer de su conocimiento que he concluído con la asesoría del informe final del **Trabajo de Graduación** denominado: **ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS**, elaborado por el estudiante de la carrera de Ingeniería Mecánica, Marvin René Espina Morales.

El presente trabajo de investigación, cumple con los objetivos que dieron origen al mismo, por lo tanto me permito recomendar su aprobación.

Agradeciendo la atención a la presente, me suscribo de usted,

Atentamente,

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”

  
**Carlos Aníbal Chicojay Colóma**  
**Ingeniero Mecánico**  
Colegiado 2,309  
Asesor del trabajo de graduación





El Coordinador del Área de Diseño de la Escuela de Ingeniería Mecánica, luego de conocer el dictamen del Asesor y habiendo revisado en su totalidad el trabajo de graduación titulado ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS, del estudiante Marvin René Espina Morales, recomienda su aprobación.

**ID Y ENSEÑAD A TODOS**

Ing. Alvaro Antonio Ávila Pinzón  
**Coordinador de Área**

Guatemala, mayo de 2008.

/behdei



**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA**



**FACULTAD DE INGENIERÍA**

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con la aprobación del Coordinador del Área de Diseño al Trabajo de Graduación titulado ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS, del estudiante Marvin René Espina Morales, procede a la autorización del mismo.

ID Y ENSEÑAD A TODOS

Ing. Fredy Mauricio Monroy Peralta  
**DIRECTOR**



Guatemala, junio de 2008

/behdei





Ref. DTG.213.08

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica, al trabajo de graduación titulado: **ANÁLISIS ENTRE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO PARA TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS**, presentado por el estudiante universitario **Marvin René Espina Morales**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
Decano



Guatemala, julio de 2008



# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	III
LISTA DE SÍMBOLOS.....	IX
GLOSARIO.....	XI
RESUMEN.....	XIII
OBJETIVOS.....	XV
INTRODUCCIÓN.....	XVII

<b>1. ESTRUCTURA DE LOS TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS...1</b>	
1.1. Representación en forma de grafos de las cadenas de engranajes planetarios.....	4
1.2. Propiedades de las cadenas de engranajes planetarios.....	6
1.2.1. Restricciones funcionales.....	7
1.2.2. Restricciones constructivas.....	8
1.2.3. Árbol que puede dar lugar a una cadena de engranajes planetarios...10	
1.2.4. Detección de los grafos isomorfos.....	13
1.2.5. Circuitos y configuración de los grafos.....	14
1.3. Obtención de los trenes de engranajes planetarios.....	15
1.3.1. Detección de los grafos con subestructuras degeneradas.....	16
1.3.2. Determinación de todas las posibles inversiones.....	26
1.3.3. Detección de miembros redundantes.....	29
1.4. Resultados obtenidos.....	31
<b>2. RANGO DE RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTOS.....33</b>	
2.1. Restricciones para la relación de dentado.....	34
2.1.1. Relación de dentado de planetas simples.....	35
2.1.2. Relación de dentada de planetas dobles.....	39
2.1.3. Resumen de restricciones.....	41
2.2. Cálculo de velocidades.....	42
2.3. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de cuatro miembros...42	
2.3.1. Identificación de la solución constructiva.....	45
2.3.2. Rango de relaciones de transmisión de los trenes de cuatro miembros.....	45
2.4. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de cinco miembros....47	

2.4.1. Identificación de la solución constructiva.....	48
2.4.2. Rango de relaciones de transmisión de los trenes de cuatro miembros.....	50
2.5. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de seis miembros.....	51
2.5.1. Identificación de la solución constructiva.....	52
2.5.2. Rango de relaciones de transmisión con planetas simples.....	52
2.5.3. Rango de relaciones de transmisión con un planeta doble.....	52
2.5.4. Rango de relaciones de transmisión con los dos planetas dobles.....	53
2.6. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios.....	57
2.6.1. Calculo de potencia de engrane.....	58
2.6.2. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de cuatro miembros.....	60
2.6.3. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de cinco miembros.....	66
2.6.4. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de seis miembros.....	69
2.6.5. Resultados de los trenes de engranajes planetarios de más de seis miembros.....	73
<b>3. MAPAS DE POTENCIA.....</b>	<b>75</b>
3.1. Relación de transmisión y potencia de engrane.....	77
3.2. Relación de transmisión en función de la potencia de engrane.....	83
3.3. Propiedades de las curvas.....	88
3.4. Tren de mínima potencia de engrane.....	91
3.5. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de seis miembros.....	98
3.6. Validez de los mapas de potencia.....	100
3.7. Diseños alternativos al tren de engranajes planetarios de cuatro miembros.....	101
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>107</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>	<b>109</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>111</b>
<b>APÉNDICE.....</b>	<b>113</b>

# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1	Esquema constructivo y grafos de un tren de seis miembros	2
2	Distintas soluciones constructivas para un mismo tren de seis miembros	3
3	Árboles potenciales para las CEP de cinco miembros	6
4	Árboles de las CEP de cinco y seis miembros	12
5	Árboles de las CEP de seis miembros incluyendo pares de engranes	13
6	TEP de ocho miembros y dos representaciones de sus grafos	14
7	Ejemplo de enumeración de los nodos de un grafo	16
8	Estructura degenerada con mínimo número de circuitos	21
9	(a) grafo de ocho miembros ejemplo 1, (b) grafo de nueve miembros ejemplo	23
10	Situación de tangencia sol-planetas y planetas corona	37
11	Planeta construido por varios engranajes	40
12	Grafo de los trenes de cuatro miembros	43
13	Soluciones constructivas con planetas simples	44
14	Soluciones constructivas con planetas dobles	44
15	Grafo de los trenes de cinco miembros	48
16	Identificación de las soluciones constructivas del tren de cinco miembros	49
17	Rendimiento vrs relación de transmisión de los TEP de cuatro miembros	64
18	Rendimiento máximo-relación de transmisión de los TEP de cinco miembros	68
19	Rendimiento máximo-relación de transmisión de los TEP de seis miembros	71
20	Rendimiento máximo-relación de transmisión de cinco y de seis miembros	72
21	Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo rectas	90
22	Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo rectas paralelas	90
23	Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo familia de hipérbolas	91
24	Grafos de los TEP de 4, 5, 6 y 7 miembros	93
25	Curvas resultantes de los TEP de 5 miembros (a) y TEP de 6 miembros (b)	93
26	Análisis de los mapas de potencia	97

27	Valores de $\lambda^+$ y $\lambda^-$	104
28	Mapas de potencia I.	110
29	Mapas de potencia II.	111
30	Mapas de potencia III.	112
31	Mapas de potencia IV.	113
32	Mapas de potencia V.	114
33	Mapas de potencia VI.	115
34	Mapas de potencia VII.	116

## TABLAS

I	Número de miembros brazos, planetas y soles en función de $N$	10
II	Subconjuntos y número de circuitos que pueden dar lugar a la degeneración	22
III	Operaciones para tener las inversiones posibles de un CEP	28
IV	Número de grafos y TEP en función de número de miembros	31
V	Tep resultantes de eliminar los miembros redundantes	32
VI	Restricciones para relaciones de dentado con planetas simples	41
VII	Restricciones para relaciones de dentado con planetas dobles	41
VIII	Código de identificación de las soluciones constructivas de cuatro miembros	46
IX	Relación de transmisión alcanzada por los trenes de cuatro miembros	47
X	Código identificativo de las soluciones constructivas del tren de cinco miembros	49
XI	Relación de transmisión alcanzada por los trenes de cinco miembros	50
XII	Circuitos de las cadenas cinemáticas de seis miembros	51
XIII	Relaciones de transmisión alcanzadas por seis miembros con planetas simples	54
XIV	Relaciones de transmisión alcanzadas por seis miembros con un planetas doble	55
XV	Relaciones de transmisión alcanzadas por seis miembros con dos planetas doble	56
XVI	Datos del tren de engranajes planetarios con entrada por el sol	65
XVII	Relaciones de transmisión y rendimientos máximos alcanzados	74

XVIII	sensibilidad independiente en función del número de miembros y planetas	81
XIX	Tipos de curvas de los mapas de potencia de los TEP de seis miembros	89
XX	Valores extremos de la relación de dentado condensada	99

## ECUACIONES

1	$F = N - J - 1$	7
2	$F + 2 \leq N_s + N_b$	7
3	$N - N_p \geq N_b + F + 1$	8
4	$N - N_p \geq N_p + F + 1$	9
5	$J \geq 2(N - N_p - N_b) - 1 - (F + 1)$	9
6	$J > 2N_p$	10
7	$J \geq 2N_s - 3$	10
8	$2N_p \geq N - 2N_b - 1$	10
9	$2N_p \leq N - 2$	11
10	$J > 2N_s - F - 2$	12
11	$N_e - J_e = 1$	16
12	$N_m - r_m = 2$	18
13	$(N_m + n) - (r_m + 1) \geq 2$	18
14	$Z_k = Z_{ikjk} = Z_{ik} / Z_{jk}$	35
15	$1/5 \leq Z_{ij} \leq 5$	35
16	$(R_1 + R_2)\text{sen}60 = R_2$	36
17	$(R_1 + R_2)\text{cos}60 = x$	36
18	$(R_1 + R_2)^2 = R_2^2 + x^2$	36
19	$(R_1/R_2)^2 + 2(R_1/R_2) = 1/4 (R_1/R_2)^2 + 1/4 + 1/2 (R_1/R_2)$	36
20	$(Z_{12})^2 + 2(Z_{12}) = 1/4 (Z_{12})^2 + 1/4 + 1/2(Z_{12})$	36
21	$-7 \leq Z_{ij} \leq -2,2$	37
22	$R_3 = 2R_2 + R_1$	38
23	$(m_3Z_3 / m_2Z_2) = 2 + (m_1Z_1 / m_2Z_2)$	38
24	$Z_{32} = -2 - Z_{12}$	38

25	$(R_1 + R_2)\cos 30 = R_2$	38
26	$R_3/R_2 = 2,1547$	39
27	$R_3/R_2 = mZ_3 / mZ_2 = Z_3 / Z_2 = Z_{32} = 2,1547$	39
28	$R_1 + R_2 = R_3 + R_4$	40
29	$(Z_1 + Z_2)/(Z_3 + Z_4) = m_{34} / m_{12} = (R_3Z_2 / R_2Z_3)$	40
30	$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / (Z_{43} + 1)$	40
31	$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / ( Z_{53}  - 1) = (Z_{12} + 1) / (-Z_{53} - 1)$	41
32	$w_j - w_r + (w_i - w_r)Z_k = 0$	42
33	$Z_{ikjk} = Z_k = \text{signo} - (Z_{ik} / Z_{jk})$	42
34	$\eta = - (T_{\text{out}} W_{\text{out}}) / (T_{\text{in}} W_{\text{in}})$	57
35	$S_{ikjk} = - T_{ikk}(W_{ik} / W_{rk})$	59
36	$S_k = S_{ikjk} = (Z_{ikjk} / W_{\text{out}}) (\partial W_{\text{out}} / \partial Z_{ikjk}) = (Z_k / W_{\text{out}}) (\partial W_{\text{out}} / \partial Z_k)$	59
37	$W_{\text{out}} = Z_{14} / (Z_{14} - Z_{24})$	60
38	$S_{14} = -Z_{24} / (Z_{14} - Z_{24})$	60
39	$S_{24} = Z_{14} / (Z_{14} - Z_{24})$	60
40	$W_{\text{out}} > 1 \Rightarrow 0 < Z_{24}/Z_{14} < 1$	60
41	$\eta(W_{\text{out}} > 1) = W_{\text{out}} - (W_{\text{out}}/\eta_{14}\eta_{24}) + (1/\eta_{14}\eta_{24})$	61
42	$W_{\text{out}} < -1 \Rightarrow 1 < Z_{24}/Z_{14} < 2$	62
43	$\eta(W_{\text{out}} < -1) = W_{\text{out}} - (W_{\text{out}} - 1)\eta_1\eta_2 = W_{\text{out}} - W_{\text{out}}\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_2$	62
44	$0 < W_{\text{out}} < 1 \Rightarrow Z_{24}/Z_{14} < 0$	62
45	$-1 < W_{\text{out}} < 0 \Rightarrow Z_{24}/Z_{14} < 2$	62
46	$\eta(W_{\text{out}} > 1) = W_{\text{out}} + (1 - W_{\text{out}}) / (\eta_{14}\eta_{24})$	62
47	$\eta(W_{\text{out}} > 1) = W_{\text{out}} + (1 - W_{\text{out}})(\eta_{14}\eta_{24})$	62
48	$W_{\text{out}} - W_{\text{out}}\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_2 > \eta_1\eta_2$	63
49	$\eta \approx 1 - \sum_{k=1}^f (1 - \eta_k)  S_k $	76
50	$F(S_k; W_{\text{out}}) = 0$	76
51	$\hat{C} \cdot \Omega = b$	78
52	$W_{\text{out}} =  \hat{C}_{\text{out}}  /  \hat{C}  = \Delta_{\text{out}} / \Delta$	78
53	$Z_{nlm} = Z_{nl} / Z_{ml}$	79
54	$S_{ikjk} = - T_{ikk}(W_{ik} - W_{rk})$	79
55	$S_k = S_{ikjk} = (Z_{ikjk} / W_{\text{out}}) (\partial W_{\text{out}} / \partial Z_{ikjk}) = (Z_k / W_{\text{out}}) (\partial W_{\text{out}} / \partial Z_k)$	80

56	$S_k = (\Delta_k / \Delta) - (\Delta_{out,k} / \Delta_{out})$	80
57	$S_{nl} = (Z_{nl} / Z_{ml} W_{out}) \cdot (Z_{ml}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nl}) = (Z_{nlm} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nlm})$	80
58	$S_{nlm} = (Z_{nlm} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nlm})$	80
59	$W_{out} = W_2 = (Z_{15}Z_{36}) / (Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{26} + Z_{25}Z_{36})$	82
60	$W_{out} = 1 / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251})$	82
61	$S_{251} = (Z_{251} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{251}) = Z_{251}(Z_{263} - 1) / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251}) = S_{25}$	81
62	$S_{263} = (Z_{263} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{263}) = Z_{263}(Z_{263} - 1) / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251}) = S_{26}$	81
63	$W_{out} = (\Lambda_{out} / \Lambda)$	84
64	$S_k = (\Lambda_k / \Lambda) - (\Lambda_{out,k} / \Lambda_{out})$	84
65	$S_k = 1 - (\Lambda_{out,k} / W_{out})$	85
66	$S_k = W_{out} \Lambda_k - 1$	85
67	$W_{out} = W_4 = (Z_{25}Z_{26} - Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{36}) / (Z_{25}Z_{26} - Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{36} + Z_{25}Z_{36})$	86
68	$W_{out} = (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251}) / (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251} + 1)$	86
69	$\theta = 1 - W_{out} = 1 / (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251} + 1)$	86
70	$S'_{nlm} = (Z_{nlm} / \theta) (\partial \theta / \partial Z_{nlm}) = [W_{out} / (W_{out} - 1)] S_{nlm}$	87
71	$S =  S_{15}  +  S_{25}  +  S_{35}  =  S_{15}  +  S_{35}  +  S_{15} + S_{35} $	92
72	$S =  S_{15}  +  S_{r5}  +  S_{26}  +  S_{s6}  = 2( S_{15}  +  S_{26} )$	92
73	$S =  S_{16}  +  S_{26}  +  S_{p6}  +  S_{37}  +  S_{q7}  =  S_{16}  +  S_{26}  +  S_{16} + S_{26}  + 2 S_{37} $	94
74	Sujeto a $F(S_k; W_{out}) = 0$	94
75	$\lambda^+ = \frac{( S_{15}  +  S_{26} )_{6221(1,2-4)}}{( S_{15}  +  S_{26} )_{6221(1,4-2)}} = \frac{ S_{15} _{6221(1,2-4)}}{ S_{15} _{6221(1,4-2)}}$	102
76	$ S_{15}  = 1 - W_{out} + \sqrt{W_{out} (W_{out} - 1)}$	103
77	$ S_{15}  = 1 - \sqrt{W_{out}}$	103
78	$ S_{15}  = 1 - \sqrt{\frac{1}{W_{out}}}$	103
79	$\lambda^- = \frac{( S_{15}  +  S_{26} )_{6221(1,2-4)}}{( S_{15}  +  S_{26} )_{6221(1,4-2)}} = \frac{1 - W_{out} + \sqrt{W_{out} (W_{out} - 1)}}{1 - \sqrt{\frac{1}{W_{out}}}}$	105



## LISTA DE SÍMBOLOS

TEP	Tren de engranajes planetarios
CEP	Cadena de engranajes planetarios
$N$	Número de miembros de un tren de engranajes planetarios
$N_s$	Número de soles de un tren de engranajes planetarios
$N_b$	Número de brazos de un tren de engranajes planetarios
$N_p$	Número de planetas de un tren de engranajes planetarios
$\eta_k$	Rendimiento ordinario o estacionario de un par de engrane
$J$	Número de circuitos de un tren de engranajes planetarios
$W_{in}$	Velocidad del miembro de entrada
$W_{out}$	Relación de transmisión (considerando $W_{in} = 1$ )
$\eta$	Rendimiento de un tren de engranajes planetarios
$Z_k$	Relación de dentado del par de engrane
$F$	Grados de libertad de un TEP
$ik$	Miembro sol del circuito
$jk$	Miembro planeta del circuito
$rk$	Miembro brazo del circuito
$Sk$	Potencia transmitida por el par de engrane
$Z_{nlm}$	Relación de dentado condensada
$S_{nlm}$	Potencia de engrane en función de las relaciones de dentado condensadas
$R_1$	Radio del círculo primario del engranaje sol
$R_2$	Radio del círculo primario del engranaje planeta
$R_3$	Radio del círculo primario del engranaje corona
$C$	Matriz de los circuitos de una CEP
$C_m$	Matrices de los circuitos de una CEP con el mismo brazo y planeta
$C_m^+$	Conjunto de todos los miembros distintos de la matriz $C_m$
$S_1$	Matriz formada por soles y brazos de una CEP
$S_2$	Matriz formada por soles con un solo par de engrane
$S_3$	Matriz igual a $S_1$ sin los soles con un solo par de engrane



## GLOSARIO

<b>Brazo</b>	Elemento del tren de engranajes planetarios que cuenta al menos con un par de rotación con algún planeta.
<b>Grafo</b>	Representación gráfica de la solución constructiva de un tren de engranajes planetarios.
<b>Planeta</b>	Elemento del tren de engranajes planetarios que rotan en torno a ejes no centrales y no fijos.
<b>Rango</b>	Límite de valores que pueden obtenerse en diversos estudios o cálculos.
<b>Rendimiento</b>	Resultado total del desempeño de un trabajo realizado.
<b>Restricción</b>	Limitación o condición que permite el correcto funcionamiento de cualquier mecanismo.
<b>Sol</b>	Elemento del tren de engranajes planetarios que solo tienen pares de engrane con planetas.
<b>Tren de engranajes</b>	Mecanismo formado por varios pares de engranajes acoplados de tal forma que el elemento conducido de uno de ellos es el conductor del siguiente.
<b>Tren de engranajes planetarios</b>	Trenes de engranajes en los cuales alguna rueda gira en torno a un eje que no es fijo, sino que gira en el espacio; de la misma manera que un planeta gira alrededor del sol.



## RESUMEN

Dentro de las restricciones de la estructura funcionales, se toma en cuenta que la rotabilidad del tren de engranajes planetarios sea factible, para que esto se cumpla es necesario que los planetas vinculados por un par de engrane, estén vinculados a su vez mediante pares de rotación al mismo brazo. Una de las restricciones constructivas para los trenes de engranajes planetarios es la que impide la existencia de planetas y soles redundantes. La condición necesaria para que un planeta no sea redundante, es que tenga al menos dos pares de engrane.

La expresión del rendimiento de un tren de engranajes planetarios depende no sólo de las relaciones de dentado sino que además, para un mismo tren, depende de cuáles sean los miembros conductores del tren, teniendo en cuenta que la suma de las potencias de engrane en un mismo planeta es nula. Para obtener la expresión del rendimiento es necesario resolver las ecuaciones de la velocidad y de los pares de engrane. No obstante, puede obtenerse una buena aproximación del rendimiento conociendo únicamente las potencias de engrane de los distintos circuitos.

Los mapas de potencia permiten determinar fácilmente las transmisiones que presentan mayor rendimiento para una relación de transmisión concreta. Además, estos mapas permiten comprobar de forma rápida y sencilla si se produce recirculación de potencia, condición en general indeseable ya que reduce considerablemente el rendimiento de la transmisión. Otra ventaja sobresaliente de estos mapas es que no dependen de la solución constructiva adoptada por el tren.



## **OBJETIVOS**

- **GENERAL**

Analizar el rango de relaciones de transmisión que puede obtenerse con cada uno de los trenes de engranajes planetarios.

- **ESPECÍFICOS**

1. Analizar las restricciones de las estructuras de los trenes de engranajes planetarios.
2. Determinar los parámetros del rendimiento de un tren de engranajes planetario.
3. Analizar los mapas de potencia para los trenes de engranajes planetarios.



## INTRODUCCIÓN

Los trenes de engranajes planetarios (en adelante TEP) ofrecen ventajas relativas a su reducido peso y tamaño en relación con los trenes de engranajes convencionales, especialmente para elevadas relaciones de transmisión. El TEP más simple tiene cuatro miembros. Este es el más estudiado y el más empleado comercialmente. No obstante, existen un gran número de potenciales diseños alternativos de TEP de más de cuatro miembros. Este elevado número de alternativas hace pensar que probablemente existan TEP de más de cuatro miembros capaces de conseguir elevados rendimientos y relaciones de transmisión. Por ello el propósito de este trabajo sería la selección de alternativas de TEP para una relación de transmisión concreta basada en su rendimiento.

Desde el punto de vista del diseño, sería interesante disponer de una relación analítica entre la relación de transmisión y el rendimiento para todos los posibles TEP. De este modo, si uno quisiera construir un TEP con una relación de transmisión determinada, se podría determinar cuál de ellos lo haría con mayor rendimiento.

Este trabajo describe un procedimiento para determinar dicha relación analítica para los TEP de cinco y seis miembros. El procedimiento se basa en analizar la transmisión en el espacio de coordenadas definido por la potencia de engrane. El éxito de este método radica en aprovechar la forma funcional característica que posee la relación de transmisión de cualquier TEP, y la relación existente entre las potencias de engrane y la relación de transmisión. Para los TEP de cinco y seis miembros, dicha expresión parametrizada por la relación de transmisión, genera una familia de curvas en el espacio de las potencias de engrane. Por último, el interés del procedimiento propuesto es que únicamente es necesario conocer la expresión de la relación de transmisión del TEP para obtener sus curvas de potencia.

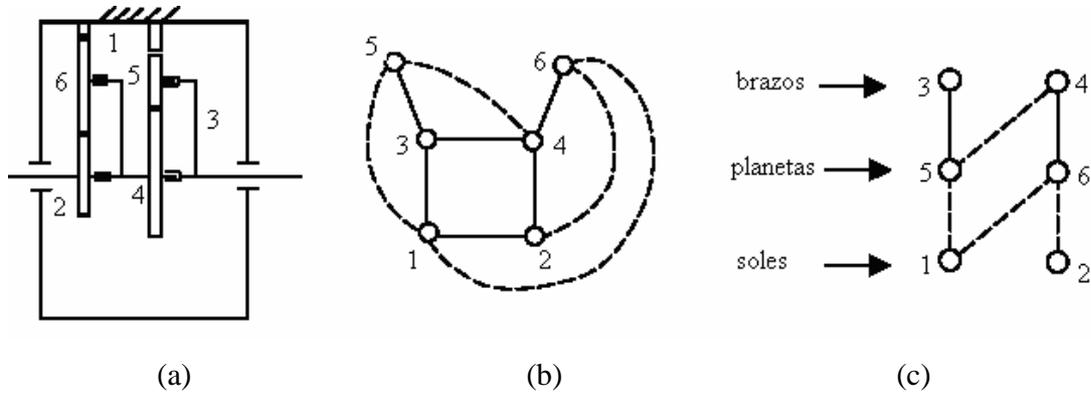


## **1. ESTRUCTURA DE LOS TRENES DE ENGRANAJES PLANETARIOS**

Los trenes de engranajes planetarios o epicicloidales reciben este nombre al permitir que uno o más miembros de una cadena de engranajes giren alrededor de un eje móvil, de la misma manera que un planeta gira alrededor del sol.

Los miembros de un TEP pueden ser de dos tipos atendiendo a su movimiento. Aquellos que rotan en torno al eje central, y que se denominan genéricamente “miembros centrales”, y los que rotan en torno a ejes no centrales y no fijos se denominan “planetas”. Los miembros centrales pueden ser a su vez de dos tipos, atendiendo al tipo de pares cinemáticas que los vinculan con los planetas. Aquellos que sólo tienen pares de engrane con planetas se denominarán “soles”, mientras que los que tienen al menos un par de rotación con algún planeta se denominarán “brazos”. Estos últimos pueden igualmente tener pares de engrane con planetas. Por otra parte, los pares de engrane además de vincular soles y planetas y eventualmente brazos y planetas, pueden igualmente vincular dos planetas entre sí. En resumen, los soles son los miembros que sólo tienen pares de engrane con otros miembros y que además tienen un movimiento de rotación alrededor del eje principal del TEP. Los brazos también tienen dicho movimiento de rotación pero se caracterizan por tener al menos un par de rotación con un planeta y además pueden tener pares de engrane con otros miembros. Finalmente, los planetas son los miembros que sufren un movimiento planetario. Cada planeta está vinculado mediante un par de rotación con su respectivo brazo y mediante pares de engrane a otros miembros.

Figura 1. Esquema constructivo y grafos de un tren de seis miembros.

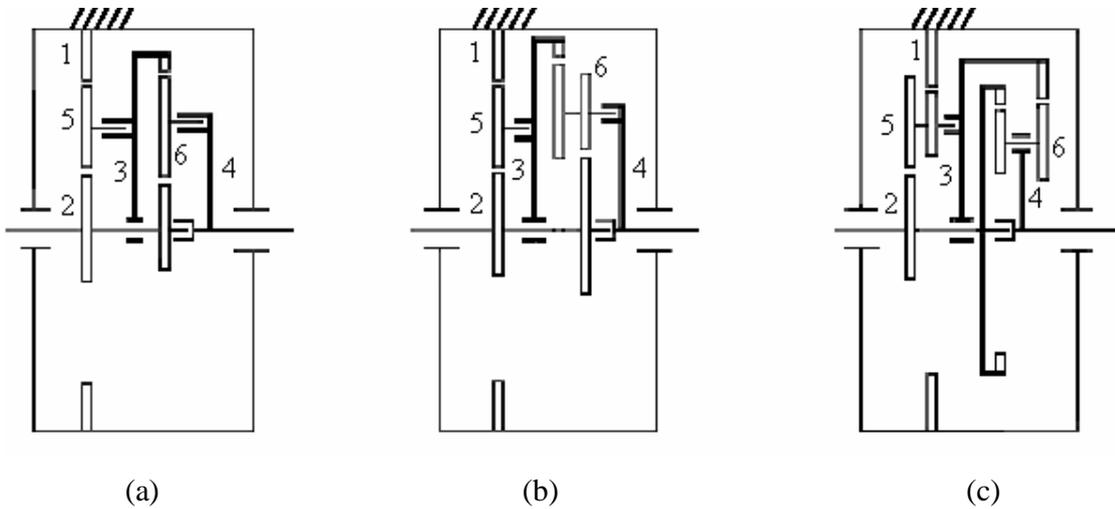


Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

En la figura 1(a) se representa un TEP de 6 miembros. Los miembros etiquetados con 1, 2, 3, y 4 son miembros centrales. Los miembros 5 y 6 son los planetas de la transmisión. Los miembros 1 y 2 son soles, ya que no tienen pares de rotación con planetas, siendo 1 el miembro fijo. Los miembros brazos son 3 y 4. Este último tiene además un par de engrane con el planeta 5. El par de miembros 2-3 constituyen los miembros de entrada y salida.

Las soluciones constructivas de un TEP pueden ser muy diversas dependiendo de cómo se construyan los miembros que lo constituyen. Los tres TEP mostrados en la figura 2 poseen la misma estructura, en concreto 6 miembros, siendo los soles los miembros 1 y 2, los brazos miembros 3 y 4 y los planetas los miembros 5 y 6. El miembro fijo es 1 y la pareja de miembros 2-4 son los miembros de entrada y salida de la transmisión. Además el brazo 3 está vinculado mediante un par de engrane al planeta 6. La diferencia entre cada uno de los trenes no es estructural sino constructiva. Es decir, los tres son el mismo TEP pero con soluciones constructivas diferentes. En concreto, en el tren de la figura 2(a) los planetas están contruidos con un solo engranaje. En el de la figura 2(b) el planeta 6 está contruido con dos engranajes. En el tren de la figura 2(c) ambos planetas están contruidos con dos engranajes, y el sol 2 engrana internamente con el planeta 6.

Figura 2. Distintas soluciones constructivas para un mismo tren de seis miembros.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

En este trabajo se entenderá como solución constructiva de un TEP, al conjunto de tipos de pares de engrane empleados (externos o internos) y a la forma concreta con la que se construyen cada uno de los miembros. En particular, se usará la expresión “planeta simple” para aquel planeta construido con un solo engranaje y “planeta doble” para los construidos con dos o más engranajes. Así, el tren de la figura 2(a) es un TEP con planetas simples.

Por tanto, puede concluirse que la estructura de un TEP está definida por el conjunto de miembros del tren y por la relación de los pares que vinculan a cada uno de ellos con el resto de miembros. Sin embargo, para que un TEP quede completamente definido, además de su estructura, hay que definir su solución constructiva. Finalmente, es de gran importancia conocer que las ecuaciones que determinan la velocidad y los pares a los que está sometido cada miembro, así como el rendimiento del TEP, dependen exclusivamente de la estructura del tren (Del Castillo, 2002) y no de la solución constructiva que adopta.

### **1.1. Representación en forma de grafos de las cadenas de engranajes planetarios**

El grafo de una cadena cinemática constituye una representación simbólica de la misma. La estructura de un TEP puede ser representada en formas de grafos de diversas maneras. La figura 1 representa un tren de seis miembros, y dos representaciones distintas de su grafo. La figura 1(a) representa un tren de seis miembros, en la figura 1(b) se representa el grafo propuesto por Hsu (Hsu y Lam, 1992) para la cadena cinemática de dicho tren, y en la figura 1(c) se representa el grafo de la misma cadena de engranajes planetarios (en adelante CEP) de otra forma esquemática, propuesta en (Del Castillo, 2002). En ambas representaciones cada nodo del grafo representa un miembro de la cadena y los arcos del grafo representan los pares cinemáticos.

Las líneas de trazo representan los pares de engrane y las líneas continuas los pares de rotación. Las diferencias entre ambas radica en el polígono compuesto por los miembros centrales. En la forma adoptada en este trabajo (figura 1(c)), propuesta en (Del Castillo, 2002), no se representan los pares de rotación entre los miembros centrales, ya que no introducen información adicional para la estructura cinemática que representa el grafo. Por el contrario, aunque la propuesta de Hsu (Hsu y Lam, 1992), simplifica la representación frente a otras representaciones empleadas por autores en trabajos precursores, esta propuesta todavía mantiene la distinción entre pares de rotación simples y múltiples. Los pares de rotación simples son los que existen entre el planeta y el brazo, mientras que los múltiples son los pares de rotación entre los miembros centrales (soles y brazos). Estos últimos son los que constituyen los lados del polígono en la representación del grafo propuesta por Hsu.

En la representación adoptada en este trabajo (Del Castillo, 2002), los nodos del grafo se disponen en tres filas: en la fila superior se representan aquellos nodos que constituyen a los brazos, en la fila media los nodos que representan a los planetas y la fila inferior los nodos correspondientes a los soles.

La estructura de una CEP queda perfectamente definida por sus circuitos. Un circuito es un conjunto de tres miembros, dos de los cuales están vinculados por un par de engrane y el otro es un miembro vinculado con los anteriores por un par de rotación. El número total de circuitos de una CEP coincide con el número de pares de engrane de la transmisión. En el caso de la figura 1, los circuitos son 1,6,4; 2,6,4; 1,5,3; 4,5,3 y en el de los TEP de la figura 2 los circuitos son 1,5,3; 2,5,3; 2,6,4 y 3,6,4.

Los TEP presentan una estructura singular que determina que sólo un reducido subconjunto de las CEP pueden dar lugar a TEP. Resulta por tanto de gran interés, conocer los distintos tipos de estructuras de CEP en función de números de miembros. Para ello se presenta el siguiente apartado un procedimiento para la enumeración sistemática de TEP basado en examinar las condiciones que deben satisfacer sus grafos.

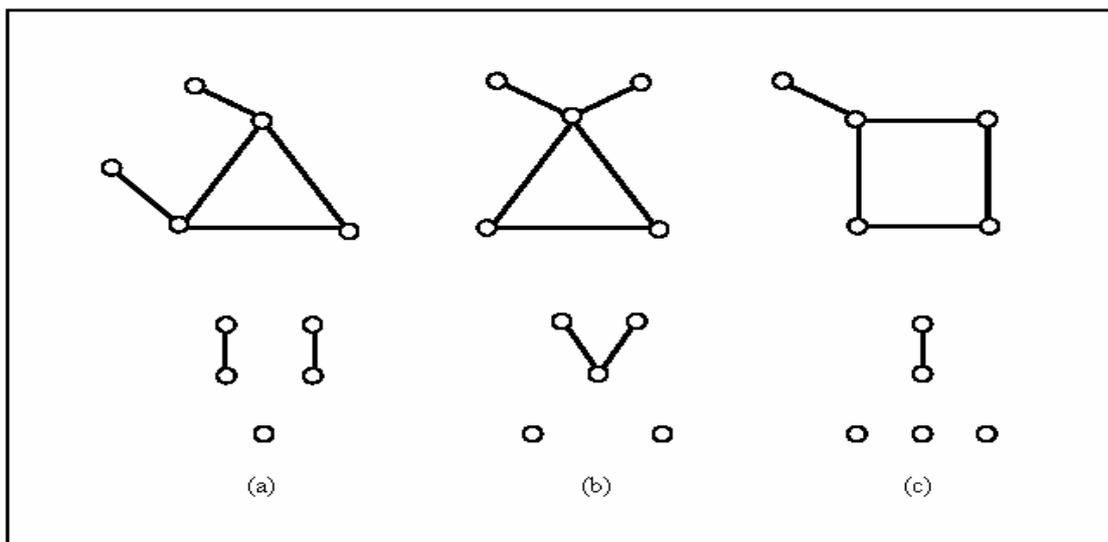
La enumeración se realiza mediante la representación de forma de grafos de las CEP, teniendo en cuenta cómo afecta al grafo las restricciones que deben cumplir para que constituya un TEP. Debe señalarse, que los trenes que contienen engranajes redundantes son trenes en los que por alguno de sus pares de engrane no circula potencia en régimen estacionario. Por tanto, los dos engranajes de dicho par de engrane pueden eliminarse sin que por ello se modifique la transmisión.

## 1.2. Propiedades de las cadenas de engranajes planetarios

Los árboles son el resultado de eliminar los pares de engrane de un grafo. De este modo, para obtener por ejemplo los árboles de la CEP de cinco miembros, basta con encontrar todas las posibilidades de árboles con 5 nodos, teniendo en cuenta que el número de miembros centrales, esto es, miembros soles y brazos deben ser siempre mayor o igual a 3, como se denominará más adelante. Esto es equivalente a decir, que empleando la representación para el grafo propuesto por Hsu, los miembros éntrales siempre deben formar un polígono.

Es interesante destacar que el árbol determina el número de soles ( $N_s$ ), el número de planetas ( $N_p$ ) y el número de brazos ( $N_b$ ) de cualquier grafo derivado del mismo. Por tanto, empleando ambas representaciones para los árboles de los grafos de cinco miembros, puede concluirse que los árboles serían los que se muestran en la figura 3 (arriba la representación propuesta por Hsu y abajo la aceptada por este trabajo). A todos los árboles que pueden encontrarse de esta forma se les denomina árboles potenciales.

Figura 3. Árboles potenciales para las CEP de cinco miembros.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

El primer paso debe completarse con la eliminación de aquellos árboles que no pueden dar lugar a un TEP. Para ello, se estudian las propiedades de los TEP y las restricciones que dichas propiedades imponen a los grafos de las CEP que pueden dar lugar a TEP. Así, se comprueba en el siguiente apartado que el grafo de la figura 3(a) no puede constituir una CEP.

### 1.2.1. Restricciones funcionales

Con la aplicación de estas restricciones a los árboles potenciales se obtienen los árboles que denominamos admisibles.

La relación entre el número de grados de libertad ( $F$ ), el número de pares de engrane ( $J$ ) y número de miembros de la cadena ( $N$ ) del tren derivado de cualquier cadena cinemática es un resultado trascendente que dedujeron Buchsbaum y Freudenstein (1970). La expresión que dedujeron es:

$$F = N - J - 1 \quad (1)$$

En los TEP con  $F$  grados de libertad se necesitan  $F + 1$  ejes de entrada y salida, y además es necesario fijar un miembro. Los miembros de entrada y salida, así como el miembro fijo, deben de ser soles y/o brazos. De esta condición, se obtiene otra restricción que debe satisfacer el árbol del grafo de un TEP, y es la siguiente:

$$F + 2 \leq N_s + N_b \quad (2)$$

Esta restricción es la que determina si el grafo de una CEP se representa según la propuesta por Hsu, los miembros centrales siempre deben formar un polígono, como se indicó anteriormente.

En el caso de que entre dos planetas exista un par de engrane, para que este tipo de pares de engrane pueda ser construido y la rotabilidad del tren resultante sea factible, es necesario que los planetas vinculados por el par de engrane, estén vinculados a su vez mediante pares de rotación al mismo brazo. Esta restricción tiene un reflejo inmediato en el grafo. Por otra parte, un árbol admisible sólo puede tener ramas cuya longitud sea de un arco, es decir, no puede haber dos planetas unidos por un par de rotación. Si esta última posibilidad se admitiera, el movimiento del planeta cuyo único par de rotación lo vinculara con otro planeta sería como el de un satélite que orbita entorno a un planeta. Finalmente, en el grafo tampoco pueden existir circuitos que puedan recorrerse únicamente por pares de rotación. Esto haría que dentro de la cadena hubiera estructuras cuya rotabilidad estuviese impedida por colisionar algunos miembros de la misma.

### 1.2.2. Restricciones constructivas

Las restricciones anteriores no son las únicas que deben importarse sobre los árboles para los TEP que se deriven de ellos tengan utilidad practica. Otras restricciones importantes son las que impiden la existencia de planetas y soles redundantes. No obstante, estas condiciones son necesarias pero no suficientes, por lo que habrá de verificar finalmente que los TEP obtenidos no contienen miembros redundantes.

Un planeta redundante es aquel que no se encuentra sometido a ningún par de engrane y por lo tanto gira con velocidad constante. Esta situación se da cuando el planeta sólo está vinculado al resto del tren mediante un par de engrane y un par de rotación. La exigencia de la ausencia de planetas redundantes limita el número de posibilidades de planetas. La condición necesaria para que dicho planeta no sea redundante, es que tenga al menos dos pares de engrane. Esto hace que se deba satisfacer:

$$N - Np \cong Nb + F + 1 \quad (3)$$

En la restricción dada en la expresión (3) se ha supuesto que los planetas pueden tener pares de engrane entre ellos. Si se descartan los TEP con este tipo de pares de engrane, la restricción constructiva es menos exigente. En ese caso, todos los planetas tendrían que tener al menos dos pares de engrane que los vinculasen con los soles. Esto equivale a imponer la restricción siguiente:

$$N - Np \geq Np + F + 1 \quad (4)$$

Por razones similares al caso de planetas redundantes, la condición necesaria para que un engranaje sol sea redundante, es que tenga un solo par de engrane. No obstante, no todos los engranajes soles con un solo par de engrane son necesariamente redundantes. En concreto, un TEP de  $F$  grados de libertad es posible que haya como máximo  $F + 1$  soles con un solo par de engrane. Si esto ocurre, esos  $F + 1$  miembros deberán ser adoptados como conjunto de ejes de entrada y salida del tren. Las consideraciones anteriores obligan a que el número de pares de engrane satisfaga la siguiente restricción:

$$J \geq 2(N - Np - Nb) - 1 - (F + 1) \quad (5)$$

En el caso de la figura 3(a), teniendo en cuenta la restricción dada por la ecuación (1), y para un TEP con un grado de libertad, puede deducirse que el número de pares de engrane en un tren de cinco miembros debe ser  $J = 3$ . Por tanto, para que no existiesen planetas redundantes, sería necesario que uno de los pares de engrane vinculase a los dos planetas. Pero en este caso, por no tener ambos planetas el mismo brazo, esta necesidad violaría la restricción impuesta para asegurar la rotabilidad, por lo que dicho árbol no puede constituir una CEP. Para un valor mayor de los grado de libertad, y de acuerdo con la ecuación (1) el número de pares de engrane disminuye, por lo que entonces necesariamente existirían miembros redundantes. Por tanto, el árbol de la figura 3(a) no puede ser un árbol de ninguna CEP.

### 1.2.3. Árboles que pueden dar lugar a una cadena de engranajes planetarios

Analizando las restricciones que las propiedades de los TEP imponen sobre el grafo, pueden obtenerse las ternas de ( $Nb$ ,  $Np$  y  $Ns$ ) que pueden constituir a los árboles admisibles de las CEP. Estudiando las propiedades de un TEP puede determinarse que el número de circuitos del grafo  $J$  debe ser como mínimo, mayor que el doble de números de planetas, es decir:

$$J > 2Np \quad (6)$$

Además, el número de pares de engrane debe ser como mínimo igual o superior al doble de número de soles, ya que cada uno de ellos también debe estar sometido a dos pares de engrane para no ser redundantes, exceptuando los miembros de entrada y salida, que tienen un par exterior y el miembro fijo, que está sometido al par de reacción para mantenerse fijo. Por tanto, puede expresarse que (expresión (5) para un TEP con  $F = 1$ ):

$$J \geq 2Ns - 3 \quad (7)$$

Si se sustituye en la expresión anterior el valor de  $J$  para un TEP de un grado de libertad (ecuación (1)) y se sustituye  $Ns = N - Nb - Np$ , se obtiene una cota inferior para el número de miembros planetas que pueden existir en una CEP, que es:

$$2Np \geq N - 2Nb - 1 \quad (8)$$

Tabla I. Número de miembros brazos, planetas y soles en función de  $N$ .

$N$	$Nb, Np, Ns$								
4	1-1-2	8	1-3-4	10	1-4-5	11	1-4-6	12	1-5-6
5	1-1-3		2-2-4		2-3-5		2-3-6		2-4-6
6	1-2-3	8	2-3-3	10	2-4-4	11	2-4-5	12	2-5-5
	2-2-2		3-3-2		3-3-4		3-3-5		3-3-6
7	1-2-4	9	3-4-3	11	3-4-3	12	3-4-5	13	3-5-4
	2-2-3		1-3-5		4-4-2		4-4-3		4-4-4
8		9	2-2-5	12					4-5-3
			2-3-4						5-5-2
			3-3-3						

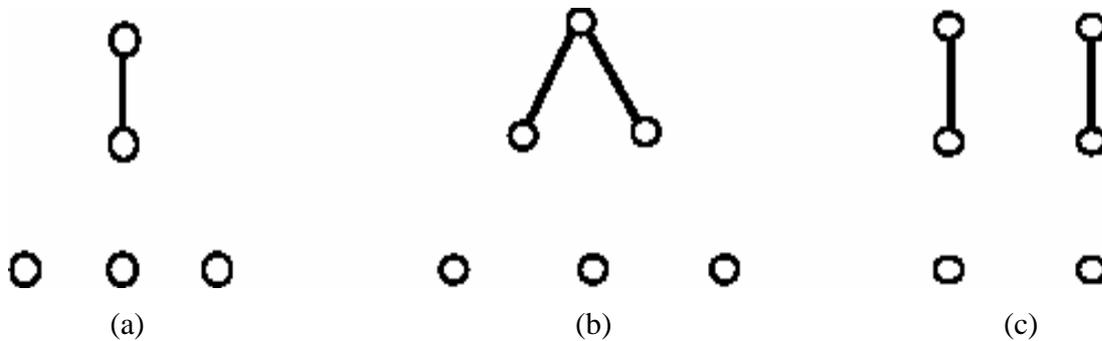
Del mismo modo, conjugando la expresión (1) y (6) se puede obtener una cota superior para el número de planetas posibles en una CEP, resultando ser que:

$$2Np \leq N - 2 \quad (9)$$

Finalmente, atendiendo a las restricciones impuestas por las expresiones (8) y (9), se obtiene la condición que permite deducir el número de miembros soles, brazos y planetas que pueden existir en una CEP de  $N$  miembros. Únicamente debe tenerse en cuenta una restricción obvia y que es el número de planetas siempre debe ser igual o superior al número de brazos de la CEP. En la tabla I se muestran las ternas ( $Nb$ ,  $Np$  y  $Ns$ ) que satisfacen las restricciones anteriores para las CEP de entre 4 y 12 miembros. Por tanto, con los valores de la tabla I y las restricciones impuestas por las propiedades de los TEP, pueden generarse todos los árboles admisibles que pueden dar lugar a CEP.

Una vez que se tienen los árboles admisibles, y se eliminan los que no cumplen las condiciones dadas por las restricciones anteriores, se determinan todos los grafos no isomorfos que pueden derivarse de cada uno de los árboles admisibles. La obtención de los grafos a partir de los árboles admisibles es inmediata, teniendo en cuenta las restricciones anteriores propuestas. Se reduce a disponer los  $J$  pares de engrane entre los nodos del árbol sin dejar miembros redundantes. Posteriormente se tendrá que comprobar si hay grafos isomorfos. La obtención de los grafos a partir de los árboles admisibles puede automatizarse. Por ejemplo, en la figura 4(a) se muestra el árbol del grafo de  $N = 5$  formado únicamente por los pares de rotación para la única combinación ( $Nb$ ,  $Np$  y  $Ns$ ) que es posible, y que es 1-1-3. En la figura 4(b) y 4(c) se muestran las subestructuras de los grafos correspondientes a  $N = 6$ , para los que existen dos combinaciones posibles y que son 1-2-3 y 2-2-2. Con la representación que se ha propuesto del grafo, en realidad el “subgrafo” formado por los tres pares de rotación no es un árbol por haber eliminado los pares de rotación entre los miembros centrales; como sí sucede con la representación propuesta por Hsu (Hus y Lam 1992), (ver figura 3).

Figura 4. Árboles de las CEP de cinco y seis miembros.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

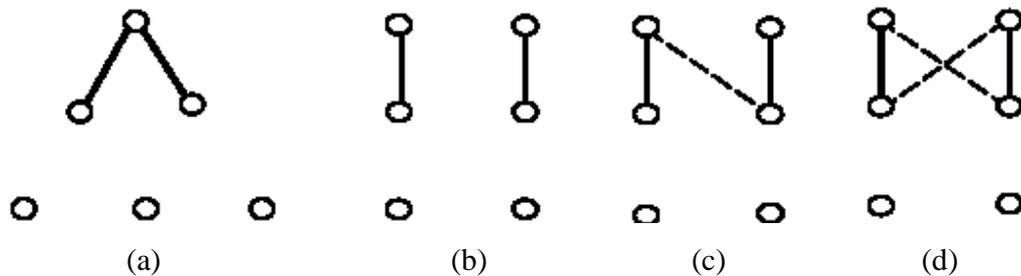
Seguidamente deben distribuirse los  $J$  pares de engrane teniendo en cuenta las restricciones anteriores comentadas. En los casos en el que el número de pares de engrane  $J$  sea mayor que el número necesario de pares de engrane para que no quede ningún miembro sol redundante, pueden disponerse entonces pares de engrane entre brazos y planetas. Para que esto pueda realizarse, debe ocurrir que:

$$J > 2N_s - F - 2 \quad (10)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, por ejemplo en el caso de que  $N = 6$ , se comprueba que los subgrafos representados en la figura 4(b) y 4(c), cumplen con la condición anterior. No obstante, en el primer caso (figura 4(b)), no pueden introducirse pares de engrane entre brazos y planetas por estar ambos planetas vinculados a un único brazo. Sin embargo, en el caso de la figura 4(c), 0, 1 ó 2 pares de engrane. De este modo, para el caso de  $N = 6$ , los grafos pueden presentar las subestructuras de brazos-planetas que se muestra en la figura 5.

Una vez determinadas todas estas subestructuras, deben obtenerse todas las posibilidades de vincular soles y planetas con los pares de engrane que resultan de restar a  $J$  el número de pares de engrane entre brazos y planetas; finalmente deben eliminarse todas aquellas estructuras isomorfas.

Figura 5. Árboles de las CEP de seis miembros incluyendo pares de engranes brazos planetas.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

#### 1.2.4. Detección de los isomorfos

Realizado el proceso descrito anteriormente, debe comprobarse que no se hayan derivado grafos isomorfos de un mismo árbol. Un procedimiento tradicional para la detección del isomorfismo estructural de cadenas cinemáticas, es la determinación del polinomio característico de la matriz de la adyacencia del grafo. En este trabajo dicho polinomio se ha evaluado dando los valores aleatorios a cada uno de los valores  $\alpha_{ij}$  de la matriz de adyacencia. Los elementos  $\alpha_{ij}$  y  $\alpha_{ji}$  de la matriz de adyacencia  $A_1$  se han definido de la forma siguiente:

$$i \neq j, \alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{si los miembros } i \text{ y } j \text{ no están vinculados} \\ 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ están vinculados por un par de rotación central} \\ g & \text{si } i \text{ y } j \text{ están vinculados por un par de engrane} \\ r & \text{si } i \text{ y } j \text{ están vinculados por un par de rotación no central} \end{cases}$$

$$\alpha_{ii} = \begin{cases} b & \text{si } i \text{ es un brazo} \\ p & \text{si } i \text{ es un planeta} \\ s & \text{si } i \text{ es un sol} \end{cases}$$

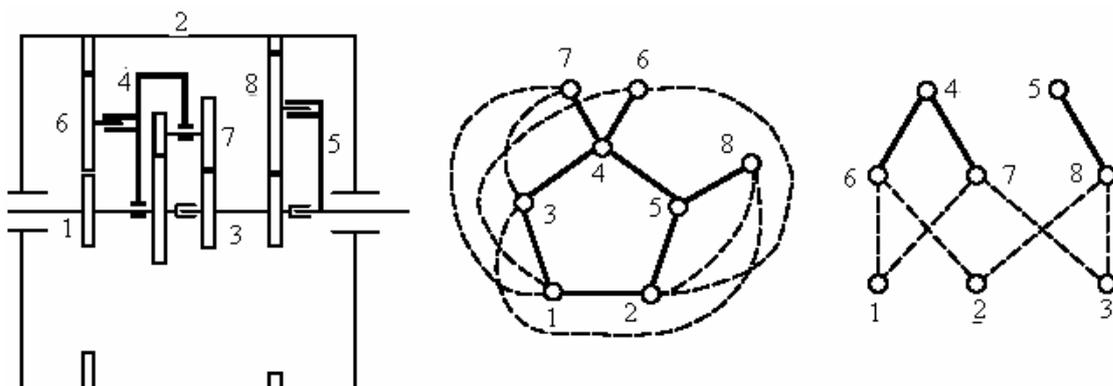
De esta forma se han eliminado los posibles grafos isomorfos. Con es procedimiento hasta ahora descrito se han identificado todas las CEP que pueden dar lugar a TEP.

### 1.2.5. Circuitos y configuración de grafos

Como ya se comentó, para que una CEP quede perfectamente definida, es suficiente con especificar los  $J$  circuitos que contiene. En general, cada circuito se representará de la forma  $(i_k, j_k, r_k)$ , siendo  $i_k$  el sol,  $j_k$  el planeta y  $r_k$  el brazo del circuito  $k$ . el número total de circuitos elementales será pues al número de pares de engrane  $J$ . se define la matriz de circuitos  $C$  de una CEP, como:

$$C = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & r_1 \\ i_2 & j_2 & r_2 \\ i_3 & j_3 & r_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ i_J & j_J & r_J \end{pmatrix}$$

Figura 6. Tren de engranajes planetarios de ocho miembros y dos representaciones de sus grafos.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

En adelante, los circuitos se enumerarán de modo que si se considera el número formado por los dígitos  $i_k j_k r_k$  de cada circuito, se tenga que  $i_k j_k r_k < i_{k+1} j_{k+1} r_{k+1}$ . De este modo, la matriz C de los circuitos de los grafos de la figura 6 es:

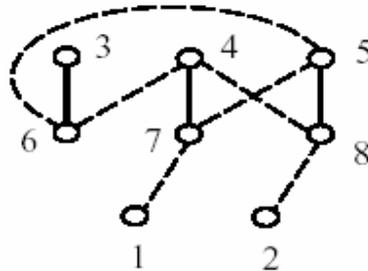
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Los grafos se han codificado mediante una serie de dígitos y dos letras, de la forma “ $NNsNpJbpXy$ ”, donde  $N$  es el número de miembros,  $Ns$  es el número de soles,  $Np$  es el número de planetas y  $Jbp$  es el número de pares de engrane entre brazos y planetas. Con la letra “X” se etiquetan todos los grafos con igual  $Nb$ ,  $Np$ ,  $Ns$  y  $Jbp$  además con los  $Jbp$  pares de engrane entre los mismos brazos y planetas. Por último, la letra “y” diferencia aquellos grafos distintos que tienen igual letra “X”. Por otra parte, en este trabajo, se adoptará la numeración para los miembros mostrada en la figura 7. La numeración sigue el orden: soles, brazos y finalmente planetas, siendo enumerados de izquierda a derecha.

### 1.3. Obtención de los trenes de engranajes planetarios

Partiendo de un determinado grafo, se pueden enumerar todas las inversiones que producen TEP que no poseen miembros redundantes. Cada uno de los TEP queda definido por su grafo (estructura cinemática) y por la inversión adoptada. La inversión, como ya se comentó, es el trío de miembros que es adoptado como miembro de entrada, miembro de salida y miembro fijo. En el presente trabajo, se identificará la inversión en la que el miembro de entrada es el “X”, el de salida es “Y” y el fijo “Z”, como  $(X, Y - Z)$ .

Figura 7. Ejemplo de enumeración de los nodos de un grafo.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

La enumeración de todas las inversiones de una CEP puede automatizarse una vez determinadas las CEP no isomorfas que pueden dar lugar a TEP. Esta enumeración se realiza siguiendo las etapas que se indican a continuación:

Detección de los grafos con subestructuras degeneradas.

Determinación de todas las posibles inversiones.

Detección de miembros redundantes.

### 1.3.1. Detección de los grafos con subestructuras degeneradas.

La síntesis estructural de los TEP juega un papel importante en su posterior diseño. Por ello, es de gran interés encontrar aquellas subestructuras que sean degeneradas para eliminarlas, evitando de este modo diseños erróneos. Cuando un conjunto de miembros de un TEP giran a la misma velocidad, dichos miembros constituyen lo que denominamos una subestructura degenerada, ya que su comportamiento es como el de una estructura dentro del sistema. En otras palabras, dicho conjunto de miembros podría sustituirse por un único miembro. Esto aplica que dicho conjunto de miembros tiene cero grados de libertad. Por tanto, de acuerdo con la expresión (1), una CEP es degenerada cuando una estructura formada por ( $J_e$ ) pares de engrane y ( $N_e$ ) miembros, que cumpla:

$$N_e - J_e = 1 \quad (11)$$

La expresión (11) de acuerdo con la expresión (1) implica que dicho conjunto de miembros de la CEP tenga cero grados de libertad. Como consecuencia, una estructura degenerada se comporta en el conjunto de la CEP como único miembro. En consecuencia para que una CEP no sea degenerada, la diferencia entre el número de miembros y el número de circuitos de cualquier conjunto de miembros de la CEP debe ser mayor que 1.

El algoritmo propuesto para la detección de estructuras degeneradas se basa en el análisis de la matriz de circuitos  $C$  y en la consideración de las restricciones que sobre el grafo de las CEP imponen en las propiedades de los TEP. El algoritmo consta de las siguientes etapas:

Se obtiene la matriz  $C$  de los circuitos.

Se agrupan los circuitos de la matriz  $C$  en otras matrices  $C_m$ . Cada una de estas nuevas matrices (de dimensiones  $r_m$  por 3) estará formada por todos los circuitos que tenga el mismo miembro planeta y el mismo brazo. Con  $m$  se identificará cada una de las matrices obtenidas, y con  $r_m$  se indicará el número de circuitos que la componen y que será igual al número de filas de dicha matriz.

Se define el conjunto de elementos  $C_m^+$ , como el conjunto de todos los elementos distintos de cada matriz  $C_m$ .

Se hallan todas las combinaciones de los conjuntos  $C_m^+$ , de modo que la suma del número de filas ( $r_m$ ) de las matrices  $C_m$  a que corresponde cada uno de los conjuntos que constituyen cada combinación, sea menor que  $J - 1$ . De este modo se tienen combinaciones de dos o más conjuntos  $C_m^+$ .

Posteriormente, se obtiene el conjunto  $S_t$  resultante de la unión de conjuntos  $C_m^+$  que constituyen cada una de las combinaciones halladas en la etapa anterior. El subíndice “ $t$ ” hará referencia a cada una de estas combinaciones.

Finalmente, se calcula el número de elementos distintos  $l_t$  de cada uno de estos conjuntos  $S_t$ . Entonces, si resulta que  $l_t$  menos el número total de circuitos de las matrices  $C_m$  que constituyen la combinación “ $t$ ”, es igual a la unidad, puede concluirse que la estructura formada por los miembros de dichos circuitos es degenerada.

Para la detección de los grafos con subestructura degeneradas hay que tomar algunas consideraciones. La definición de las matrices  $C_m$  implica que si el número de miembros distintos de la matriz es  $N_m$ , entonces:

$$N_m - r_m = 2 \quad (12)$$

De este modo puede concluirse que la estructura formada por los circuitos de una matriz  $C_m$  no puede ser degenerada y que el número mínimo de circuitos de cada una de estas matrices será también 2.

Otra consideración que puede extraerse es que una estructura degenerada siempre estará formada por los miembros de los circuitos de dos o más matrices  $C_m$ . En ningún caso se puede encontrar una estructura degenerada formada por los circuitos de una matriz  $C_m$  y algunos otros circuitos de otra u otras matrices  $C_m$ . A continuación se explica esta afirmación. Elegida una matriz  $C_m$  cualquiera con  $N_m$  miembros distintos y  $r_m$  circuitos, puede comprobarse que al elegir otra matriz  $C_m$  distinta y un circuito cualquiera de esta última matriz con “ $n$ ” elementos distintos a los de la matriz anterior, la estructura formada por los circuitos de la primera matriz y el circuito elegido de la segunda cumplirán que:

$$(N_m + n) - (r_m + 1) \geq 2 \quad (13)$$

Esto es debido a que  $1 \leq n \leq 3$ , ya que como mínimo el planeta del circuito elegido de la segunda matriz es distinto. Por tanto, para encontrar una estructura degenerada, deben elegirse como mínimo los circuitos de una matriz  $C_m$  y al menos dos circuitos de la otra. El segundo circuito elegido de la segunda matriz  $C_m$  dará lugar a una estructura degenerada con los anteriores si todos los miembros del nuevo circuito son también miembros de los circuitos anteriores. De este modo se cumple la condición dada por la expresión (11). Cuando esto suceda, el resto de circuitos de la segunda matriz  $C_m$  introducirán necesariamente un miembro distinto al cómputo y un nuevo circuito, por lo que todos los circuitos de dicha matriz también constituirán la estructura degenerada, al seguirse cumpliendo la expresión (11). Como conclusión, para que exista degeneración, uno de los circuitos de la segunda, tercera,....matriz  $C_m$  elegida, que no sea de la primera, no debe aumentar el número de miembros distintos contabilizados hasta ese momento.

Una vez que esto suceda, el siguiente circuito de la misma matriz  $C_m$  volverá necesariamente a aumentar en una unidad tanto el número de miembros como el de circuitos y por tanto dicho circuito también será constituyente de la estructura degenerada. Gracias a esto, no es necesario ir comprobando si la estructura formada por la primera matriz elegida o por más de una de estas matrices y algunos de los circuitos de otra matriz constituyen una estructura degenerada. Se puede afirmar directamente que cuando uno de los dos circuitos contabilizados no introduzca un nuevo miembro al cómputo general, la estructura degenerada, también afecta a los circuitos que todavía no se han contabilizado de la última matriz elegida.

Por tanto, la estructura degenerada estará formada por todos los miembros de los circuitos de dos o más matrices. En el caso de los TEP de cuatro y cinco miembros, como sólo existe una matriz  $C_m$ , ya que  $C = C_m$ , no puede existir degeneración.

Analizando lo expuesto hasta ahora, pueden deducirse otras consideraciones. Si se analizan las restricciones que sobre el grafo imponen las propiedades de los TEP, puede concluirse que los grafos con un determinado número de brazos ( $Nb$ ), planetas ( $Np$ ) y soles ( $Ns$ ) para un determinado número de miembros  $N$ , no dan lugar a estructuras degeneradas, sin que sea necesario encontrar todos los grafos (disponiendo de todas las formas posibles de los pares de engrane  $J$ ) a que dicha combinación ( $Nb, Np, Ns$ ) puede dar lugar. Esto supone un avance importante en la detección de los grafos degenerados, ya que reduce considerablemente la búsqueda.

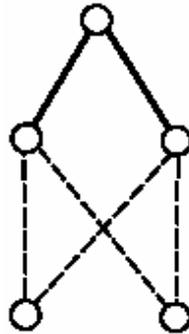
Una vez deducidas todas las posibles combinaciones ( $Nb, Np, Ns$ ) para cada número de miembros  $N$  de una CEP, si se calculan las particiones de  $J$  en  $Np$  enteros positivos, puede obtenerse el número de matrices  $C_m$  a que da lugar cada una de las distintas combinaciones ( $Nb, Np, Ns$ ) deducidas y el número de circuitos  $r_m$  de cada matriz.

El número de matrices  $C_m$  distintas será igual a  $Np$  y el número de circuitos en cada una de ellas será igual al valor de cada uno de los enteros positivos de la partición. Nótese que el valor mínimo para cada partición es dos, puesto que cada planeta debe tener al menos dos pares de engrane para no constituir un miembro redundante. Por ejemplo, para la combinación  $Nb, Np, Ns = 2, 3, 3$  de la figura 6, las particiones de los 6 pares de engrane en tres enteros positivos ( $6 = 1+2+3$ ,  $6 = 2+2+2$ ), sólo puede ser 2,2,2 ya que cada uno de los enteros positivos de la partición debe ser como mínimo 2 por coincidir con el número de pares de engrane de un planeta o lo que es lo mismo, la matriz  $C$  de dicho grafo estará formada por tres matrices  $C_m$  con dos circuitos cada una.

Todas estas posibilidades ( $Nb, Np, Ns$ ) para un número de miembros  $N$  en la CEP se recogen en la tabla II. Las distintas posibilidades se muestran en la tercera columna con nomenclatura  $\mathbf{a}(\mathbf{b})$ , donde  $\mathbf{a}$  es el número de matrices ( $C_m$ ) con  $\mathbf{b}$  circuitos.

En la última columna de esta tabla se indica como  $M$  el número de circuitos que pueden formar la estructura degenerada. Este valor se obtiene directamente por la suma de los circuitos de todas las combinaciones de las matrices  $C_m$  que pueden hacerse, de modo que la suma de los circuitos de las matrices elegidas sea siempre menor de  $J - 1$ , como ya se comentó. Observando la tabla II puede deducirse que tanto el número de matrices  $C_m$  distintas en las que se subdivide  $C$ , como el número de circuitos de cada una, puede variar para aun mismo valor de  $N$ .

Figura 8. Estructura degenerada con mínimo número de circuitos.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

Obsérvese también que el número mínimo de circuitos (mínimo valor de  $M$ ) que debe valorarse para encontrar una estructura degenerada es cuatro, ya que es la estructura más simple que se puede encontrar en una CEP en la que se cumple lo indicado en la expresión (11). Esta estructura es la que se muestra en la figura 8. Esto es debido, a que como mínimo si cada matriz  $C_m$  está formada por dos circuitos y una única matriz  $C_m$  no puede formar una estructura degenerada por su definición y además cualquier estructura degenerada esta compuesta por todos los circuitos de dos o mas matrices  $C_m$ , entonces la estructura degenerada más simple (mínimo número de miembros) será la formada por dos matrices  $C_m$  de dos circuitos cada una.

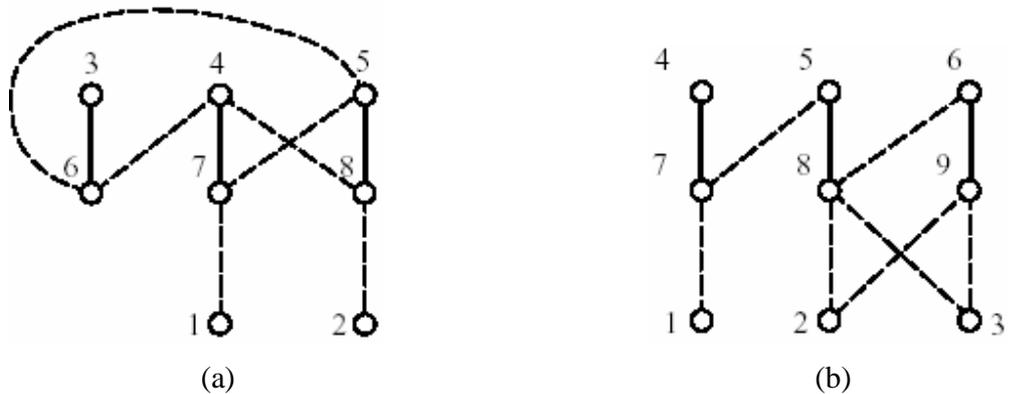
Tabla II. Subconjuntos y número de circuitos que pueden dar lugar a la degeneración.

$N$	$Np$	$\alpha(b)$ posibles	$\alpha(b)$ que pueden formar estructura de generada	$M$
4	1	1(2)		-
5	1	1(3)		-
6	2	2(2)		-
7	2	1(2) y 1(3)		-
8	3	3(2)	3(2)	4
	2	2(3)		-
	2	1(2) y 1(4)		-
9	3	2(2) y 1(3)	2(2) y 1(3)	4,5
	2	1(2) y 1(5)		-
	2	1(3) y 1(4)		-
10	4	4(2)	4(2)	4,6
	3	2(2) y 1(4)	2(2) y 1(4)	4,6
	3	1(2) y 2(3)	1(2) y 2(3)	5,6
11	4	3(2) y 1(3)	3(2) y 1(3)	4,5,6,7
	3	2(2) y 1(5)	2(2) y 1(5)	4,7
	3	1(2), 1(3) y 1(4)	1(2), 1(3) y 1(4)	5,6,7

Analizando la información de la tabla II, y el procedimiento dado para detectar una estructura degenerada en una CEP, puede concluirse que si el número de planetas de una CEP es igual a 2 ( $Np = 2$ ), ésta no puede albergar estructuras degeneradas. Esto es debido a que el número de planetas de una CEP es igual al número de matrices  $C_m$  y por tanto el número de circuitos que suma entre ambos es igual a  $J$  y ya se ha comentado anteriormente que sólo es posible encontrar una estructura degenerada cuando el número de circuitos es menor que  $J - 1$ . De este modo, puede observarse que de las cuatro combinaciones ( $Nb, Np, Ns$ ) que pueden dar lugar a una CEP de nueve miembros, únicamente aquellas que permiten 2(2) y 1(3), pueden albergar estructuras degeneradas. Por tanto, las CEP que pueden derivarse de la combinación ( $Nb, Np, Ns$ ) = (2,2,5) no puede dar lugar a TEP degenerados. A continuación se presentan unos ejemplos del método descrito anteriormente.

Ejemplo 1: considérese el grafo de ocho miembros representado en la figura 9(a). La detección de estructuras degeneradas de dicho grafo, debe partir de la comprobación de que la combinación  $(Nb, Np, Ns) = (3, 3, 2)$  puede contener estructuras degeneradas. Por ser  $Np > 2$  dicho grafo puede contener estructuras degeneradas. Además si es así, estará formada por los miembros de cuatro circuitos, como se deduce es la tabla II. Aplicando el algoritmo propuesto, se tiene que:

Figura 9. (a) grafo de ocho miembros ejemplo 1, (b) grafo de nueve miembros ejemplo 2.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

1) Matriz de circuitos:  $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

$$2) C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) C_1^+ = [1,4,5,7], \quad C_2^+ = [2,4,5,8], \quad C_3^+ = [3,4,5,6]$$

4) Las combinaciones posibles son todas las compuestas por dos de los tres subconjuntos, de modo que el número de circuitos sea menor que 5. Por tanto, deben realizarse:

Combinación 1:  $C_1^+$  y  $C_2^+$

Combinación 2:  $C_1^+$  y  $C_3^+$

Combinación 3:  $C_2^+$  y  $C_3^+$

5) El número involucrado en cada una de las combinaciones es 4, por tanto, para que exista degeneración los miembros del conjunto unión deben de ser como mucho 5.

$$S_1 = C_1^+ \cup C_2^+ = [1,2,4,5,7,8] \Rightarrow l_1 = 6 \Rightarrow 6 - 4 = 2$$

$$S_2 = C_1^+ \cup C_3^+ = [1,3,4,5,6,7] \Rightarrow l_2 = 6 \Rightarrow 6 - 4 = 2$$

$$S_3 = C_2^+ \cup C_3^+ = [1,3,4,5,6,7] \Rightarrow l_3 = 6 \Rightarrow 6 - 4 = 2$$

Todos los conjuntos  $S_i$  tienen 6 miembros distintos y el número de circuitos es para todos los casos 4, por lo tanto no existe degeneración. En concreto, el número total de combinaciones ( $NC$ ) puede obtenerse como:

$$NC = C_{(J,3)} + C_{(J,4)} + \dots + C_{(J,J-1)} = \sum_{i=3}^{J-1} C_{(J,i)}, \text{ donde } C_{(J,i)} \text{ son las combinaciones de } J \text{ elementos tomados de } i \text{ en } i.$$

Ejemplo 2: el grafo de la figura 9(b) tiene nueve miembros, y por tener  $N_p = 3$  puede contener una estructura degenerada. La consecución de las etapas del algoritmo conduce a:

$$1) \text{ Matriz de circuitos: } C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2) C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}; C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}; C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3) C_1^+ = [1,4,5,7], C_2^+ = [2,3,5,6,8], C_3^+ = [2,3,6,9]$$

4) Las combinaciones posibles son todas las compuestas por dos de los tres subconjuntos, para que el número de circuitos sea menor que 6. Además el número de circuitos que pueden dar lugar a la estructura degenerada es 4 ó 5, como se identifica en la tabla II. Por tanto, deben realizarse:

Combinación 1:  $C_1^+$  y  $C_2^+$

Combinación 2:  $C_1^+$  y  $C_3^+$

Combinación 3:  $C_2^+$  y  $C_3^+$

5) El número involucrado depende de la combinación, pudiendo ser 4 ó 5, por tanto, para que exista degeneración los miembros del conjunto unión deben de ser como mucho 5 ó 6 respectivamente.

$$S1 = C_1^+ \cup C_2^+ = [1,2,3,4,5,6,7,8] \implies l_1 = 8 \implies 8 - 5 = 3$$

$$S2 = C_1^+ \cup C_3^+ = [1,2,3,4,5,6,7,9] \implies l_2 = 8 \implies 8 - 4 = 4$$

$$S3 = C_1^+ \cup C_3^+ = [2,3,5,6,8,9] \implies l_3 = 6 \implies 6 - 5 = 1, \implies \text{DEGENERADA}$$

En el último caso  $l_3 = 6$  y el número de circuitos  $C_2^+$  y  $C_3^+$  es 5, por lo tanto cumple con la condición de estructura degenerada dada por la expresión (11) y entonces la estructura formada por los miembros 2, 3, 5, 6, 8 y 9 es degenerada.

### 1.3.2. Determinación de todas las posibles inversiones

Todas las posibles inversiones no isomorfas de una CEP pueden enumerarse analizando sus circuitos, ya que éstos determinan su estructura cinemática. Como ya se comentó, la inversión está definida por el trío de miembros que constituyen los miembros de entrada, salida y fijo respectivamente.

Debe tenerse en cuenta que tanto el miembro fijo, como los miembros de entrada y salida deben elegirse entre los mismos miembros centrales. Además, la elección de los miembros que constituyen la inversión no puede ser cualquiera, sino que deben cumplir con las propiedades de los TEP, por ello, deben cumplirse las consideraciones que se comentan a continuación.

Los miembros soles que únicamente estén vinculados con los demás miembro de los grafos por un par de engrane, deberán formar parte obligatoriamente del trío de miembros que constituyen la inversión. Este requisito es necesario para que dicho miembro sol no sea redundante.

En los TEP puede existir como máximo  $F + 2$  miembros con un sólo par de engrane. Debido a lo anterior, se puede decir que en el caso de los TEP de un grado de libertad, el número máximo de miembros soles con un único par de engranes son tres. En ese caso, las combinaciones de esos tres miembros serían las posibles inversiones.

En las CEP que solo tengan un miembro brazo, éste no podrá ser elegido como miembro fijo del TEP. En ese caso, no existiría TEP por impedir la existencia de un eje de rotación no central y móvil. Por tanto, únicamente cuando existan dos o más miembros brazos, podrá elegirse uno de ellos como miembro fijo.

Se crea el vector **S1** de dimensiones ( $N_c$  por 1) siendo  $N_c$  el número de miembros centrales del grafo (soles y brazos) distintos. En el caso de la figura 6, se tiene:

$$\mathbf{S1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se crea el vector **S2** ( $N_{s1}$  por 1) con aquellos miembros soles que únicamente estén vinculados con un par de engrane al resto de los miembros y que por tanto deben formar parte de la inversión. Por tanto, debe cumplir para los TEP de un grado de libertad que  $N_{s1} \leq 3$ . En el caso de la figura 6 el vector **S2** no existe.

Se comparan los vectores  $S1$  y  $S2$ , y se constituye un nuevo vector  $S3$  como resultado de eliminar el vector  $S1$  las filas correspondientes a los miembros que aparecen en el vector  $S2$ . En el ejemplo tratado se obtendría:

$$S3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Tabla III. Operaciones para tener las inversiones posibles de un CEP.

$N_{s1}$	Operaciones
0	$V_3(S1)$
1	$P_3(S2 \otimes C_{(N_{c1},2)}(S3))$
2	$P_3(S2 \otimes C_{(N_{c1},1)}(S3))$
3	$P_3(S2)$

Se determina el valor de  $N_{s1}$  y según este valor las inversiones posibles, tal y como se indica en la tabla III.

En esta tabla  $S_i$  son los conjuntos formados por los elementos de los vectores  $S_i$  y con  $N_{c1}$  se hace referencia al número de elementos del conjunto  $S3$ , esto es,  $N_{c1} = N_c - N_{s1}$ . el operador  $\otimes$  es el producto cartesiano. Con  $V_3$  se quiere indicar que son todas las variaciones sin repetición de 3 elementos de los miembros del conjunto resultante de realizar la operación indicada en el paréntesis. Con  $P_3$  se indican las permutaciones de 3 elementos de los miembros del conjunto resultante de realizar la operación indicada entre paréntesis y con  $C_{(a,b)}$  las combinaciones de “ $a$ ” elementos tomados en “ $b$ ” de “ $b$ ”.

En el caso en que  $N_{s1} = 1$ , ese número de combinaciones es  $N_{c1}! / (N_{c1} - 2)! - 2!$  Y en el caso en que  $N_{s1} = 2$  ese número es  $N_{c1}! / (N_{c1} - 1)!$ .

En el ejemplo propuesto  $N_{s1} = 0$ , por lo que las inversiones se obtienen calculando las variaciones de los elementos de  $(S1)$ . Esto es  $V_3(S1) = V_3(1,2,3,4,5)$ , las variaciones sin repetición de los miembros numerados del 1 al 5 tomados de 3 en 3. Por tanto, deben analizarse un total de 60 inversiones posibles.

En el caso de un grafo de siete miembros, se tiene que  $N_{s1} = 1$  y por tanto, las inversiones se calculan como  $P_3(S2 \otimes C_{(N_{c1},2)}(S3))$ . Puede comprobarse que para este grafo  $S1 = (1,2,3,4,5)$  y en consecuencia  $N_c = 5$ , siendo  $S2 = (1)$  con lo que  $N_{s1} = 1$  y  $S3=(2,3,4,5)$  y por tanto  $N_c = 4$ . Con estos datos puede verificarse finalmente que el número total de inversiones posibles es de 36.

Siguiendo los pasos anteriores puede automatizarse la enumeración de todas las inversiones de una CEP que puede dar lugar a un TEP. Únicamente debe tenerse en cuenta una restricción obvia para que la terna de miembros seleccionada pueda constituir una inversión. Esta restricción implica que en los casos en que la CEP sólo tenga un brazo, este miembro no puede ser el miembro fijo, como se indico anteriormente.

### **1.3.3. Detección de los miembros redundantes**

Las transmisiones en las que algunos de sus elementos puedan eliminarse por ser redundantes deben de ser igualmente detectadas y eliminadas. La eliminación de las CEP que pueden contener miembros redundantes se evita ya en la propia enumeración de las CEP, al verificar las condiciones necesarias pero no suficientes para que no existan miembros sometidos a un único par. No obstante, debido al carácter de dichas condiciones no se puede asegurar que no puedan existir todavía miembros redundantes, por lo que deben ser detectados en una etapa posterior.

La detección de miembros redundantes en los TEP puede realizarse estudiando el valor de la potencia de engrane de los planetas, de modo que un valor nulo implica la existencia de miembros redundantes. En concreto, el estudio se basa en el cálculo de las  $J$  potencias de engrane del TEP. De este modo, si existen miembros redundantes, la potencia entre dichos miembros es nula y por lo tanto dichos miembros pueden eliminarse sin que afecte al tren.

En principio podría parecer que la detección de miembros redundantes exige la resolución de las ecuaciones de velocidad y el cálculo de los pares a que están sometidos los distintos miembros de la transmisión. Sin embargo, para determinar la potencia que circula por un par de engrane únicamente es necesario determinar la expresión de la relación de transmisión del TEP y una vez elegida la inversión, automáticamente obtenemos los pares de engrane por los que no circula potencia. En consecuencia, los miembros que constituyen dichos pares de engrane serían redundante.

Aunque se explicará más adelante con mayor detalle, el cálculo de la potencia que circula por cada uno de los pares de engrane, se basa en derivar la expresión de la relación de transmisión del TEP respecto de las relaciones de dentado de cada uno de los pares de engrane, siendo la relación de dentado de un par de engrane el cociente entero el número de dientes de los engranajes que lo constituyen. Además puede comprobarse que las relaciones de dentado de los pares de engrane por los que no circula potencia no aparecen en la expresión de la relación de transmisión del TEP.

#### 1.4. Resultados obtenidos

En la tabla IV se muestra el número de CEP o grafos obtenidos y el número total de TEP en función de número de miembros.

Tabla IV. Número de grafos y TEP en función de número de miembros.

N	4	5	6	7	8	9
Grafos	1	1	4	5	43	115
No de TEP	2	1	26	39	419	821

El número con los que se identifican a cada uno de los miembros se han omitido en las figuras para realizarse de forma sistemática. La forma de enumerarlos es como se indicó con la figura 7 se nombran primero los soles, después los brazos y finalmente los planetas y siempre en sentido de izquierda a derecha.

Los grafos de nueve miembros se han clasificado por el número de brazos, planetas y soles, indicándose con el número que hace referencia al número de cada uno de ellos respectivamente. Los grafos en los que aparece la nomenclatura “redundante” presenta siempre alguna potencia de engrane nula para todas las inversiones posibles, lo que implica la existencia de algún miembro redundante. En la tabla V se muestran los grafos redundantes, en función de los miembros que constituyen la inversión y que se muestran en la segunda columna, se indica el grafo de la transmisión resultante de eliminar los miembros redundantes de la transmisión de cualquier inversión constituida por la terna de miembros de la segunda columna.

Por ejemplo, los Tep cuyo grafo es el 9332DF y cuya inversión esté constituida por los miembros 1, 3 y 5 constituyen, una vez eliminados los miembros redundantes, un Tep de cuatro miembros.

Por último, para ser referencia en adelante a un TEP en particular, se indicara primero el código de su grafo seguidamente entre paréntesis la inversión. De este modo, los TEP de la figura 2, que son todos el mismo a diferencia de su solución constructiva como ya se comentó, se identificarán como 6221(2,4-1).

Tabla V. Tep resultantes de eliminar los miembros redundantes.

Grafo Redundante	Miembros Inversión	Grafo de la transmisión resultante de eliminar los miembros redundantes
9520b	1,2,3	5310
9431Bi	1,2,4	7420
9332DF	1,3,2	5310
9332DF	1,3,4	7321a
9332DF	1,3,5	4210
9332DF	1,3,6	7321a
9334Bb	1,2,3	7322

## 2. RANGO DE RELACIÓN DE TRANSMISIÓN Y RENDIMIENTO

Una vez determinadas todas las CEP y los TEP que de ellas se derivan, se puede asegurar que el análisis de estas transmisiones será completo. No obstante, habrá que estudiar para cada una de las inversiones las distintas soluciones constructivas, concluyendo así con el estudio de todas las posibles transmisiones planetarias que pudieran construirse.

El rango depende de los valores de la relación de dentado  $Z_k$  (cociente entre el número de dientes de los engranajes vinculados con un par de engrane). El criterio de signos que se ha empleado para la relación de dentado es que  $Z_k > 0$  si el engrane es externo y  $Z_k < 0$  si el engrane es interno. Teóricamente la relación de dentado podrían adoptar cualquier valor, pero en la realidad, su valor es limitado por los siguientes factores.

Razón de tipo económico, por lo que las relaciones de dentado interior deben de estar entre -4 y -8, estos valores son los que cita Müller (1982). La norma AGMA 6123-A88 (1998), señala que es más rentable aumentar el número de etapas cuando la relación de dentado, en este caso exterior exceda de 1:6. Se vera más adelante que la relación 1:6 equivale a limitar la relación de dentado interior a 1:8. Respetando estos valores, se consiguen diseños de transmisiones más pequeñas, ligeras y baratas.

Dependiendo del número de engranajes que constituyan el planeta, las condiciones anteriores pueden no ser válidas. En cualquier caso, habría que comprobar que esto no produce la colisión entre los engranajes.

Normalmente el planeta está constituido por 2, 3 ó 4 engranajes, lo que limita físicamente el espacio disponible y por lo tanto el diámetro del engranaje y con ello el número de dientes. En este trabajo, el miembro planeta se considera compuesto por 3 sólidos dispuestos a  $120^\circ$  y equidistantes con el miembro sol que engrana con ellos.

En el caso de que un mismo planeta esté constituido por dos engranajes, como los planetas 5, 6 de la figura 2(c), la relación de los diámetros de los engranajes que lo constituyen tampoco pueden superar ciertos valores, en este caso condicionado por criterios de tipo resistente. A los planetas así construidos se les denominara en adelante planetas dobles. Este conjunto de restricciones se deben tener en cuenta al analizar un TEP para determinar cualquiera de sus parámetros de funcionamiento, ya que todos dependen de los valores de las relaciones de dentado.

En algunos casos específicos, pueden existir restricciones particulares en el diseño, como podría ser el peso, el volumen o los esfuerzos en cojinetes y rodamientos debidos a las fuerzas centrífugas. Con respecto a esto, cabe citar nuevamente a la norma AGMA 6123-A88, en la que se comenta lo poco común que es encontrar transmisiones planetarias en la industria, (sector automovilístico, maquinas herramientas, etc.) en las que el brazo gire a más de 1800 r.p.m; ya que a velocidades superiores comienzan a ser importantes efectos dinámicos.

## **2.1. Restricciones para las relaciones de dentado**

En este apartado se estudian las relaciones de dentado que pueden utilizarse en el caso de estar constituido el planeta por tres engranes. Obviamente el número de circuitos es igual al número de pares de engrane e igual al número de relaciones de dentado.

Para denotar a los miembros del circuito  $k$  se usarán los subíndices  $i_k$  y  $j_k$  para los miembros vinculados con el par de engrane y  $r_k$  para el brazo. Se define  $Z_k = Z_{i_k j_k}$  como:

$$Z_k = Z_{i_k j_k} = Z_{i_k} / Z_{j_k} \quad (14)$$

Donde  $Z_k = Z_{i_k j_k}$  es la relación de dentado del par de engrane del circuito  $k$ , que vincula al miembro  $i_k$  con el  $j_k$ . Con el fin de simplificar su expresión se escribirá  $Z_{ij}$  para hacer referencia a  $Z_{i_k j_k}$ . Para que dicha definición sea coherente con la ecuación de Willis,  $Z_k$  debe ser positivo si el engrane es exterior y negativo si el engrane es interior. Por ejemplo, para el tren de la figura 6(a) se tendría que adoptar  $Z_{26} < 0$  y  $Z_{16} > 0$ .

### 2.1.1. Relación de dentado en planetas simples

Se denomina planeta simple a aquel miembro planeta que está constituido por un único engranaje, como es el caso de los planetas 5, 6 de la figura 2(a). Las restricciones se estudian en función de si el engrane es exterior o interior.

En el caso en que el engrane se produzca por contacto externo ( $Z_k > 0$ ) y estando constituido el miembro planeta por tres engranajes, la restricción impuesta en este estudio es:

$$1/5 \leq Z_{ij} \leq 5 \quad (15)$$

Hace falta comprobar que es posible la relación de dentado interior. En la figura 10 se representan los círculos primitivos del sol (círculo central) y los tres engranajes planetas (círculos exteriores). El radio del sol es  $R_1$  y el radio de cada uno de los engranajes planetas es  $R_2$ . En esta figura se representa la situación límite, es decir, cuando la relación de dentado hace que los engranajes sean tangentes y por tanto se impida su rotación.

Bajo estas condiciones y conocido el ángulo de 120° entre los segmentos que unen los centros de los engranajes planetas con el engranaje sol, se pueden plantear las siguientes expresiones:

$$(R_1 + R_2)\text{sen}60 = R_2 \quad (16)$$

$$(R_1 + R_2)\text{cos}60 = x \quad (17)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, resulta:

$$(R_1 + R_2)^2 = R_2^2 + x^2 \quad (18)$$

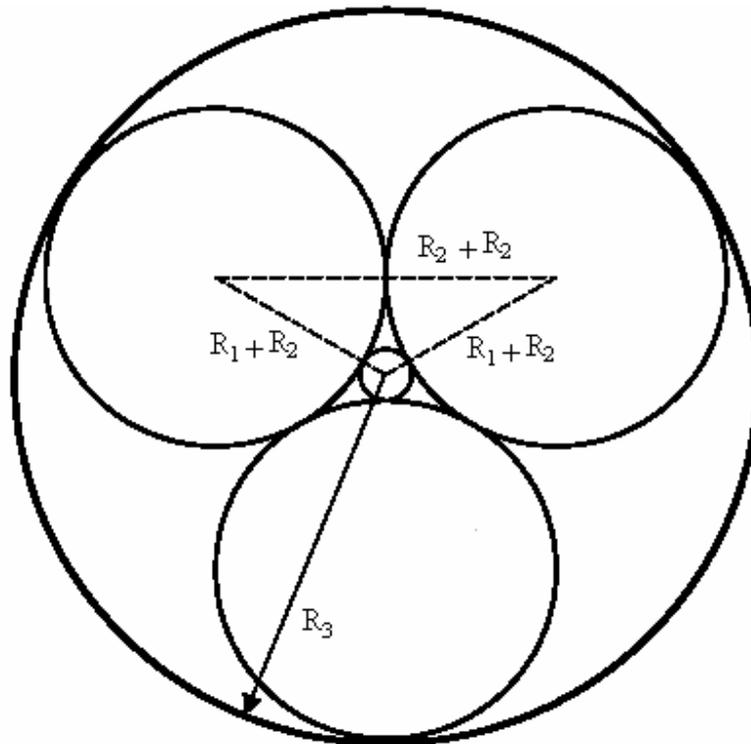
Sustituyendo “x” por su valor (expresión (17)) y dividido por  $R_2^2$  se tiene:

$$(R_1/R_2)^2 + 2(R_1/R_2) = 1/4 (R_1/R_2)^2 + 1/4 + 1/2 (R_1/R_2) \quad (19)$$

Como todos los engranajes deben tener el mismo módulo, se pueden relacionar los cocientes de los diámetros y las relaciones de dentado, de forma que la expresión (19) es equivalente a:

$$(Z_{12})^2 + 2(Z_{12}) = 1/4 (Z_{12})^2 + 1/4 + 1/2(Z_{12}) \quad (20)$$

Figura 10. Situación de tangencia sol-planetas y planetas corona.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Análisis de las expresiones de la eficiencia de los Tep.**

El resultado válido de la ecuación (20) es  $Z_{12} = 0,1543$ , con lo que situar el límite en  $Z_{12} = 1/5$  está justificado, no existiendo impedimento de la rotación por colisión entre los engranajes. Si los círculos primarios se separan una distancia igual al módulo, este valor es ligeramente superior, en concreto se tiene  $Z_{12} = 0,16025$ . Aun en dichos casos, el límite impuesto de  $Z_{12}$  sigue siendo suficiente para no aproximarse a la situación de colisión. En este trabajo, se utilizará como restricción de diseño de la expresión (15), esta situación no está próxima a la situación de tangencia como se ha comprobado.

Para engranes interiores ( $Z_k < 0$ ) la restricción de diseño será:

$$-7 \leq Z_{ij} \leq -2,2 \quad (21)$$

En esta figura se representa la situación límite, cuando los engranajes engranan interiormente. El radio del sol que engrana con los planetas es  $R_1$ , el radio de los planetas es  $R_2$  y el de la corona que engrana interiormente con los planetas es  $R_3$ . En este caso se cumple que:

$$R_3 = 2R_2 + R_1 \quad (22)$$

Expresando la ecuación (22) en función del módulo y el número de dientes de cada miembro, se tiene:

$$(m_3Z_3 / m_2Z_2) = 2 + (m_1Z_1 / m_2Z_2) \quad (23)$$

Donde  $m_i$  es el módulo del engranaje  $i$ . Y como los engranajes 1, 2 y 3 deben tener el mismo módulo, la expresión anterior se puede simplificar, siendo (la expresión se ha escrito de acuerdo al signo adoptado para las relaciones de dentado anteriores):

$$Z_{32} = -2 - Z_{12} \quad (24)$$

Esta expresión no es exacta si los engranajes se fabrican con desplazamiento pero puede considerarse válida para los cálculos.

La relación de dentado para engranajes exteriores se ha fijado en el rango de 0,2 a 5, por lo tanto y haciendo uso de la expresión (24) se puede justificar un rango para la relación de dentado interior entre -7 a -2,2.

Falta comprobar que la relación de dentado en la situación representada en la figura 10 (situación límite) no se encuentra en el rango aceptado. Haciendo nuevamente uso de la figura 10 puede comprobarse la relación dada por la siguiente expresión:

$$(R_1 + R_2)\cos 30 = R_2 \quad (25)$$

Sustituyendo en (22) se tiene:

$$R_3 = 2R_2 + R_1 = R_2 + (R_2 / \cos 30) = ((2 + \sqrt{3})/2) R_2$$

$$R_3 / R_2 = 2,1547 \quad (26)$$

Como el módulo es el mismo tenemos que:

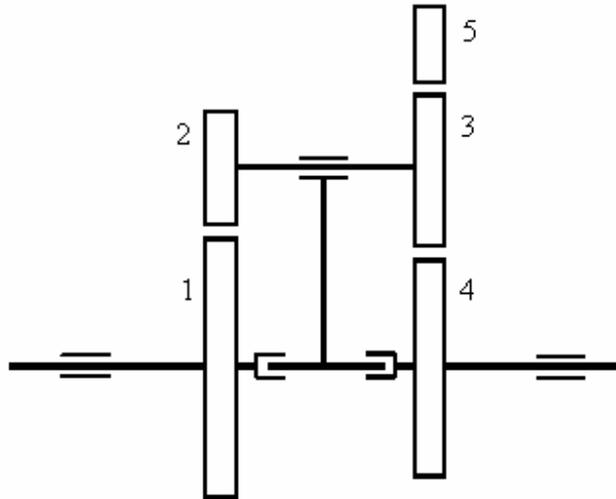
$$R_3 / R_2 = mZ_3 / mZ_2 = Z_3 / Z_2 = Z_{32} = 2,1547 \quad (27)$$

El valor mínimo de la relación de dentado  $Z_{32}$  será en valor absoluto 2,1547, que coincide con la relación mínima de entre los diámetros de los engranajes sol exterior y planeta. Del mismo modo que en el apartado anterior, si se tiene en cuenta una separación entre los círculos primarios igual al módulo, el valor mínimo sería 2,16025. Por tanto, aunque próximos a la situación de tangencia, el valor 2,2 para la relación de dentado exterior es válido. El límite establecido para la determinación de las relaciones de transmisión máxima es para la relación de dentado exterior (-2,16025 a -8,24).

### **2.1.2. Relaciones de dentado en planetas dobles**

Cuando se requiere aumentar la relación de transmisión, una solución es utilizar planetas dobles, como se muestra en la figura 11, en la que el miembro planeta está constituido por los engranajes 2 y 3. De este modo, las relaciones de dentado interior y exterior dejan de ser valores dependientes, la relación de diámetro de los engranajes que constituyen el planeta no puede ser cualquiera, sino que está condicionada por criterios de tipo resistente.

Figura 11. Planeta construido por varios engranajes.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Análisis de las expresiones de la eficiencia de los Tep.**

En este caso las relaciones de dentado  $Z_{12}$  y  $Z_{43}$  y las relaciones  $Z_{12}$  y  $Z_{53}$ , están relacionadas con los radios de los engranajes que constituyen el planeta. De la figura 11 se puede extraerse la siguiente relación geométrica:

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4 \quad (28)$$

Expresando la ecuación anterior en función del módulo de los engranajes, se tiene:

$$(Z_1 + Z_2) / (Z_3 + Z_4) = m_{34} / m_{12} = (R_3 Z_2 / R_2 Z_3) \quad (29)$$

Donde  $m_{12}$  es el módulo de los engranajes 1 y 2 y  $m_{34}$  es el módulo de los engranajes 3 y 4. De esta forma, la relación entre los diámetros de los engranajes 2 y 3 condiciona el valor de  $Z_{12}$  y  $Z_{43}$ . Operando la expresión anterior se tiene:

$$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / (Z_{43} + 1) \quad (30)$$

Del mismo modo puede obtenerse teniendo en cuenta el signo negativo de la relación de dentado  $Z_{53}$  la expresión:

$$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / (|Z_{53}| - 1) = (Z_{12} + 1) / (-Z_{53} - 1) \quad (31)$$

La relación de diámetros entre los engranajes que constituyen el planeta doble se fijará en el rango 1/3 a 3, por razones de tipo resistente y para lograr un diseño proporcionado.

### 2.1.3. Resumen de restricciones

En las tablas VI y VII se muestran un resumen de las restricciones que se impondrán en las relaciones de dentado, en función de que si su planeta es simple o doble. En concreto, la tabla VI corresponde a las restricciones impuestas cuando el planeta es simple y la tabla VII. con las restricciones con planetas dobles.

Tabla VI. Restricciones para relaciones de dentado con planetas simples.

Signo $Z_k$	Restricción
$Z_k > 0$	$1/5 \leq Z_k \leq 5$
$Z_k < 0$	$-7 \leq Z_k \leq -2$

Tabla VII. Restricciones para relaciones de dentado con planetas dobles.

Signo $Z_k$	Restricción
$Z_{12} > 0, Z_{43} > 0$	$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / (Z_{43} + 1)$
$Z_{12} > 0, Z_{53} < 0$	$R_3 / R_2 = (Z_{12} + 1) / ( Z_{53}  - 1)$
Díametros Extremos	Restricción
$R_3 / R_2$	$1/3 \leq R_3 / R_2 \leq 3$

## 2.2. Cálculo de velocidades

Para el cálculo de velocidades de los miembros de un Tep, se aplica la ecuación de Willis a cada circuito, de tal modo que se tienen  $J$  ecuaciones y  $N$  incógnitas. De las  $N$  incógnitas, son conocidas una por ser la velocidad del miembro fijo, y por lo tanto nula y  $F$  por fijar una velocidad como referencia para el cálculo de las otras, (normalmente se toma como base de cálculo la velocidad de entrada igual a la unidad), con lo que el sistema tiene  $N - F - 1$  incógnitas. De este modo, se tiene un sistema compatible determinado. La ecuación de Willis, siendo  $i$  el sol del circuito,  $j$  el planeta y  $r$  el brazo, es la siguiente:

$$w_j - w_r + (w_i - w_r)Z_k = 0 \quad (32)$$

Donde  $Z_k$  es el valor de la relación existente entre los dientes del sol y los planetas y cuyo signo depende de si engrana interior o exteriormente como ya se ha comentado. Puede por tanto escribirse que:

$$Z_{ikjk} = Z_k = \text{signo} - (Z_{ik} / Z_{jk}) \quad (33)$$

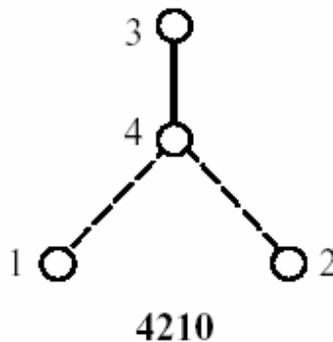
## 2.3. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de cuatro miembros

Este tren está constituido por dos miembros soles, un miembro bazo y un miembro planeta. El grafo de la cadena cinemática de cuatro miembros se representa en la figura 12. Los miembros se han etiquetado como se explicó en el capítulo 1, de este modo los circuitos son 1,4,3 y 2,4,3 y por tanto las relaciones de dentado serán  $Z_{14}$  y  $Z_{24}$ .

Existen dos inversiones no isomorfas, que son 1,3-2 y 3,1-2. Para hacer referencia a una inversión se hará en función del miembro que es el miembro de entrada. De este modo para la primera inversión se dirá que es la transmisión con entrada por el sol, mientras que la segunda será la transmisión con entrada por el brazo.

Para el estudio de todas las transmisiones planetarias basadas en la cadena cinemática del tren de cuatro miembros, es necesario encontrar todas las soluciones constructivas que puedan obtenerse. Una solución constructiva la constituye cada una de las posibilidades de adoptar cada relación de dentado interior o exterior de los engranajes. Por tanto, como cada una de las relaciones de dentado pueden ser interior o exterior, en este caso, se tienen cuatro posibilidades.

Figura 12. Grafo de los trenes de cuatro miembros.

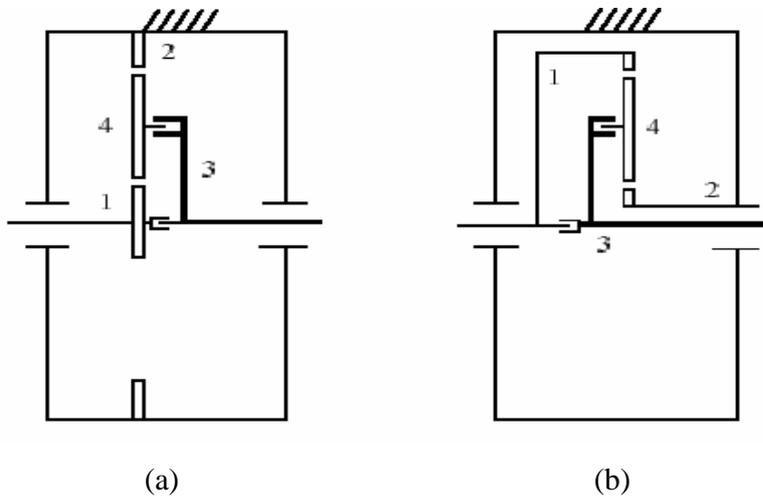


Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

Existen dos posibilidades en las que el planeta en las que puede estar constituido por uno simple y son  $Z_{14} > 0$  y  $Z_{24} < 0$  ó  $Z_{14} < 0$  y  $Z_{24} > 0$ , como se representa en la figura 13. Se estudiarán también las dos soluciones constructivas que necesariamente deben tener el planeta doble y los casos de la figura 13 constituidos por un planeta doble. En la figura 14 se representan dichas soluciones constructivas.

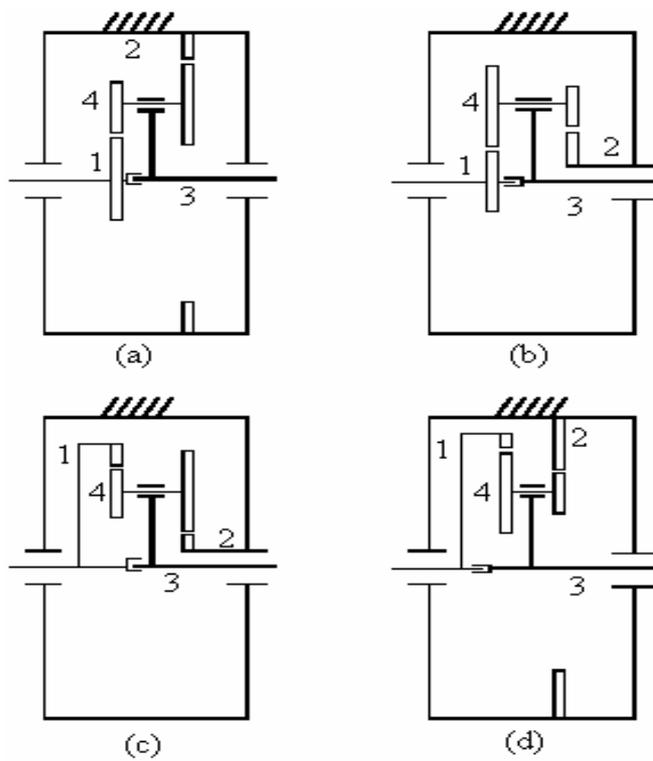
Cada una de las seis transmisiones representadas esquemáticamente en las figuras 13 y 14 se analizará detalladamente, tanto si se elige como miembro de entrada el miembro sol o el miembro brazo de la transmisión, con la finalidad de que el estudio sea completo.

Figura 13. Soluciones constructivas con planetas simples.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

Figura 14. Soluciones constructivas con planetas dobles.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

### **2.3.1. Identificación de la solución constructiva**

En lo sucesivo, se identificarán las distintas soluciones constructivas de los trenes de cuatro miembros por un par de números, se indicarán si los pares de engrane cuya relación de dentado son  $Z_{14}$  y  $Z_{24}$  son positivos o negativos. Así, para indicar que un par de engrane es exterior y por lo tanto su relación de dentado es positiva, se indicarán con un 1, mientras que el dentado interior (relación de dentado negativa), se hará con un 0. En el caso de que las soluciones constructivas tengan doble planeta se indicará con un asterisco al lado de los dos números. Con esta numeración, las soluciones constructivas de las figuras 13 y 14 se identificarán como se indica en la tabla VIII:

En el caso de que los dos pares de engrane de un planeta, sean positivos (11) o negativos (00), no se indicará con un asterisco que se trata de un planeta doble, pues no deja de ser información redundante.

### **2.3.2. Rango de relaciones de transmisión de los trenes de cuatro miembros**

El estudio cinemático de las transmisiones de cuatro miembros se ha realizado para el tren con entrada por el sol. Lógicamente los resultados de la inversión con entrada por el brazo son inversos.

Con la transmisión  $10^*$  puede conseguirse una reducción máxima de  $1/23,5$  y con la transmisión inversa una multiplicación de  $23,5$ . Las transmisiones con planetas simples solamente alcanzan una reducción de  $1/12$ , con un rendimiento cercano a la unidad.

Tabla VIII. Código de identificación de las soluciones constructivas del tren de cuatro miembros.

Solución Constructiva	Código de Identificación
figura 13(a)	1 0
figura 13(b)	0 1
figura 14(a)	1 0*
figura 14(b)	1 1
figura 14(c)	0 1*
figura 14(d)	0 0

Otro hecho significativo, es que si se requiere que la transmisión el sentido de la velocidad de giro, es necesario utilizar las transmisiones de planetas dobles en las que las relaciones de dentado son ambas interiores o exteriores. Con estas transmisiones se puede reducir la velocidad hasta  $-1/19$  (entrada por el brazo) y multiplicar hasta  $-19$ .

La tabla IX resume los resultados obtenidos en función del rango permitido de las relaciones de dentado. En concreto, las relaciones de transmisión alcanzadas por los TEP de cuatro miembros se han determinado en los casos en que las relaciones de dentado exterior se mantienen en un intervalo  $1/3 < Z_k < 3$  y que se representan en la parte superior de la tabla y para  $1/5 < Z_k < 5$  mostradas en la parte inferior. Puede comprobarse cómo al limitar el valor de las relaciones de dentado se reduce el rango de las relaciones de transmisión obtenidos.

Tabla IX. Relación de transmisión alcanzada por los trenes de cuatro miembros.

Solución Constructiva	Max (Z <sub>ij</sub> )	Inversión	Rango de Relación de transmisión	
1 0	3	1,3-2		de 0.008333 a 0.41667
0 1		1,3-2		de 0.583330 a 0.91670
1 0*		1,3-2		de 0.032258 a 0.66670
1 1*		1,3-2	de -19 a 0.041667	de 1.041670 a 19.0000
0 1*		1,3-2		de 0.333000 a 0.96670
0 0*		1,3-2	de -19 a -0.714	de 1.714000 a 20.0000
1 0	5	1,3-2		de 0.115300 a 0.37500
0 1		1,3-2		de 0.625000 a .088470
1 0*		1,3-2		de 0.074074 a 0.54540
1 1*		1,3-2	de -14 a 0.15385	de 1.153850 a 15.0000
0 1*		1,3-2		de 0.454500 a 0.92600
0 0*		1,3-2	de -19 a -1	de 2.000000 a 20.0000

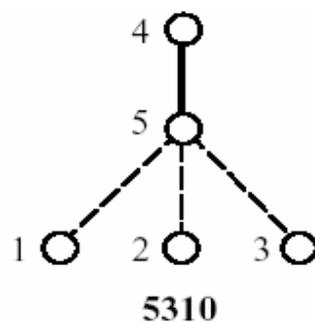
#### 2.4. Resultados para los trenes de engranajes planetarios de cinco miembros

Las transmisiones planetarias de cinco miembros presentan la cadena cinemática de la figura 15. Esta transmisión tiene tres miembros soles, un planeta y un brazo. Los circuitos que definen el grafo son 1,5,4; 2,5,4 y 3,5,4 por lo tanto las relaciones de dentado son Z<sub>15</sub>, Z<sub>25</sub> y Z<sub>35</sub>.

La cadena cinemática de estos trenes tiene una única inversión y es la resultante de elegir una combinación de los soles. En este estudio se tomara como inversión la que tiene como miembro fijo el 2, y como miembro de entrada y salida el 1 y el 3 respectivamente.

Las soluciones constructivas que se obtienen de tres pares de engrane son doce, ya que cada par de engrane puede tomar valor positivo o negativo. En este caso, debido a que 1 miembro planeta tiene tres pares de engrane, todas las soluciones constructivas tendrán un planeta doble.

Figura 15. Grafo de los trenes de cinco miembros.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

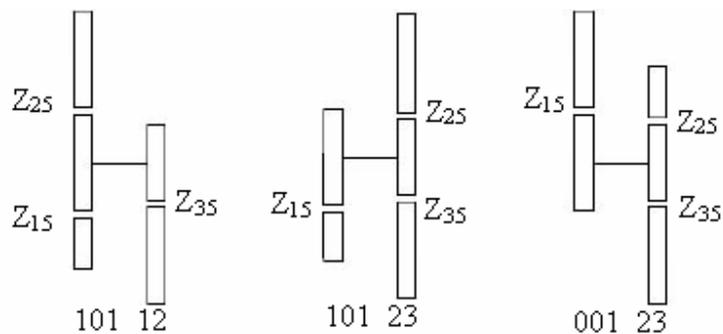
#### 2.4.1. Identificación de la solución constructiva

La identificación de las soluciones constructivas de las transmisiones planetarias de cinco miembros se hará siguiendo las mismas reglas que se ha descrito para la identificación de las de cuatro miembros. No obstante, como el planeta tiene tres pares de engrane, dos de ellos engranarán en el mismo engranaje del planeta y esto se indicará con otro par de dígitos separados de los identificadores del signo de cada una de las relaciones de dentado. En la figura 16 se aclara lo anterior.

Las relaciones de dentado se enumeran en el orden elegido para los circuitos, esto es,  $Z_{15}$ ,  $Z_{25}$  y  $Z_{35}$ . En la tabla X se relacionan las doce soluciones constructivas. En esta tabla, para indicar la solución constructiva se determina en la primera columna si el engrane es exterior ( $Z_k > 0$ ) o interior ( $Z_k < 0$ ). En la segunda columna de la tabla se indican los soles que engranan sobre el mismo engranaje planeta.

El código correspondiente a cada una de las combinaciones se muestra en la tercera columna, indicando en primer lugar el signo de cada una de las relaciones de dentado 1 ó 0 al igual que para los trenes de cuatro miembros y seguidamente los miembros soles que engranan con el mismo engranaje planeta.

Figura 16. Ejemplos de identificación de las soluciones constructivas del tren de cinco miembros.



Fuente: Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los TEP.**

Tabla X. Código identificativo de las soluciones constructivas del tren de cinco miembros.

Relaciones de dentado	Soles que engranan con un mismo planeta	Código de identificación
$Z_{15}>0, Z_{25}<0, Z_{35}>0$	12	101 12
$Z_{15}>0, Z_{25}<0, Z_{35}>0$	23	101 23
$Z_{15}>0, Z_{25}<0, Z_{35}<0$	12	100 12
$Z_{15}>0, Z_{25}<0, Z_{35}<0$	13	100 13
$Z_{15}<0, Z_{25}>0, Z_{35}>0$	12	011 12
$Z_{15}<0, Z_{25}>0, Z_{35}>0$	13	011 13
$Z_{15}<0, Z_{25}>0, Z_{35}<0$	12	010 12
$Z_{15}<0, Z_{25}>0, Z_{35}<0$	23	010 23
$Z_{15}>0, Z_{25}>0, Z_{35}<0$	23	110 23
$Z_{15}>0, Z_{25}>0, Z_{35}<0$	13	110 13
$Z_{15}>0, Z_{25}<0, Z_{35}>0$	23	001 23
$Z_{15}<0, Z_{25}<0, Z_{35}>0$	13	001 13

Tabla XI. Relación de transmisión alcanzada por los trenes de cinco miembros.

Solución Constructiva	Max ( $Z_{ij}$ )	Inversión	Rango de Relación de transmisión		
001 13	5	1,3-2	de -200 a -5.9	de 2.8 a 120	
001 23		1,3-2	de -120 a -2.4	de 6.9 a 200	
010 12		1,3-2		de 0.8552 a 1.52	
010 23		1,3-2		de 0.64 a 1.17	
011 12		1,3-2	de -8.75 a -0.0243	de 0.0234 a 0.846	
011 13		1,3-2	de -5.42 a -0.0240	de 0.0237 a 0.88	
100 12		1,3-2	de -0.377 a -0.0030365	de 0.00185 a 0.144	
100 13		1,3-2	de -0.1692 a -0.00185	de 0.00305 a 0.357	
101 12		1,3-2		de 0.153 a 9.75	
101 23		1,3-2		de 0.115 a 6.92	
110 13		1,3-2	de -28.3 a -0.181	de 1.13 a 28.92	
110 23		1,3-2	de -27.92 a -0.130	de 1.168 a 29.3	
001 13		3	1,3-2	de -96.7 a -9	de 3.667 a 56
001 23			1,3-2	de -50.67 a -2.667	de 10 a 67.5
010 12	1,3-2			de 0.9 a 1.52	
010 23	1,3-2			de 0.85 a 1.108	
011 12	1,3-2		de -8.75 a -0.0446	de 0.039 a 0.7885	
011 13	1,3-2		de -2.88 a -0.0439	de 0.0427 a 0.80	
100 12	1,3-2		de -0.377 a -0.00306	de 0.00323 a 0.1	
100 13	1,3-2		de -0.169 a -0.00185	de 0.00305 a 0.294	
101 12	1,3-2			de 0.211 a 7	
101 23	1,3-2			de 0.197 a 4.2	
110 13	1,3-2		de -24.6 a -0.27	de 1.246 a 23.4	
110 23	1,3-2		de -22.4 a -0.246	de 1.346 a 25.6	

#### 2.4.2. Rango de relaciones de transmisión de los trenes de cinco miembros

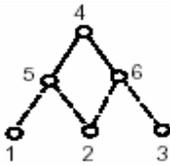
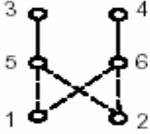
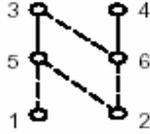
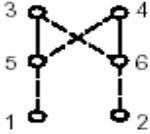
En la tabla XI se muestran las relaciones de transmisión que pueden obtenerse con los trenes de cinco miembros. Los rangos son mayores que en lo de cuatro miembros, la desmultiplicación puede conseguirse hasta 1/540 con la inversión 1,3-2 y la solución constructiva 100 12.

Sin embargo, la multiplicación de la velocidad no puede ser 540 con el mismo tren (inversión 3,1-2) ya que este tren es irreversible. Esto limita alcanzar altas multiplicaciones, llegándose hasta una multiplicación de 200. Por tanto, puede concluirse que los TEP de cinco miembros sólo deben emplearse como reductores.

## 2.5. Resultados para los trenes planetarios de seis miembros

En las transmisiones de seis miembros se distinguen cuatro grafos (ver tabla XII). La numerada por 6320, tiene tres miembros soles, dos planetas y un único brazo, sin embargo, los otros tres grafos presentan dos soles, dos planetas y dos brazos. Todos los planetas tienen dos pares de engrane, por lo que pueden construirse con un engranaje. También se analiza el rango de relación de transmisión que puede conseguirse cuando uno o los dos planetas están constituidos por planetas dobles.

Tabla XII. Circuitos de las cadenas cinemáticas de seis miembros.

Código del Grafo	Grafo	Circuitos
6320		1,5,4; 2,5,4; 3,6,4; 2,6,4
6220		1,5,3; 2,5,3; 2,6,4; 1,6,4
6221		1,5,3; 2,5,3; 2,6,4; 3,6,4
6222		1,5,3; 4,5,3; 2,6,4; 3,6,4

### **2.5.1. Identificación de la solución constructiva**

La identificación de la solución constructiva en los TEP de seis miembros se hará siguiendo las mismas pautas que en los casos anteriores. En estas transmisiones los pares de engrane correspondientes a cada uno de los circuitos serán los que se muestran en la tabla XII. Las dos primeras relaciones de dentado corresponde con los dos pares de engrane de un mismo planeta y las otras dos con las del otro planeta.

El código identificativo de la solución constructiva consta de cuatro dígitos, de los que los dos primeros indicarán los signos de los pares de engrane de las dos primeras relaciones de dentado respectivamente y los dos segundos los signos de las dos ultimas, siguiendo el orden de los circuitos de la tabla XII. En el caso de que algún planeta fuese doble, se indicará con un asterisco junto al par de dígitos del planeta correspondiente. Por ejemplo, en el caso del grafo 6220 la solución constructiva 10 01\* sería aquella en la que  $Z_{15} > 0$  y por lo tanto  $Z_{25} < 0$  ya que se trata de planeta simple,  $Z_{26} > 0$  y  $Z_{26} > 0$ , siendo este planeta doble.

### **2.5.2. Rango de relaciones de transmisión con planetas simples**

En la tabla XIII se muestran los rangos de las relaciones de transmisión capaz de conseguirse con cada una de las transmisiones (inversión y solución constructiva) en las que el miembro fijo es un sol.

### **2.5.3. Rango de relaciones de transmisión con un planetas doble**

En el caso de que uno de los planetas pueda ser doble, las relaciones de dentado de ese planeta ya no siguen la relación que expresaba la ecuación (24), sino que son independientes. Únicamente se exigirá que cumplan con las condiciones dadas en la ecuación (30) y la (31).

El número de soluciones constructivas por cada inversión es de 16, por lo que en la tabla XIV sólo se representan los valores de aquellas transmisiones cuyo rango de relación de transmisión las hace interesante (en la tabla se han incluido también las inversiones con brazo fijo). Con estas transmisiones se pueden alcanzar mayores reducciones y multiplicaciones de velocidad.

#### **2.5.4. Rango de relaciones de transmisión con los dos planetas doble**

Con dos planetas dobles, los resultados son los de la tabla XV y como puede verse, el rango de la relación de transmisión es algo superior al de las mismas transmisiones con un solo planeta doble. En la tabla XV se han representado únicamente las transmisiones con rangos de la relación de transmisión interesantes.

Tabla XIII. Relaciones de transmisión alcanzadas por los trenes de seis miembros con planetas simples.

Grafos	Solución Constructiva	Inversión	Rango de Relación de transmisión	
6320	10 10	1,2-3	de -14 a -0.25	de 1.25 a 14
	10 01	1,2-3	de -2.5 a -0.1	
	01 10	1,2-3		de 1.1 a 1.5
	01 01	1,2-3	de -23 a -1.75	de 2.75 a 27
	10 10	1,4-3	de -9 a -0.1458	de 1.145 a 10
	10 01	1,4-3	de -1.041 a -0.0083	
	01 10	1,4-3		de 1.008 a 2.041
	01 01	1,4-3	de -9 a -0.1458	de 1.145 a 10
	10 10	1,3-2		de 0.2 a 5
	10 01	1,3-2		de 0.091 a 0.714
	01 10	1,3-2		de 1.4 a 11
	01 01	1,3-2		de 0.636 a 1.57
6220	10 10	3,4-2		de 0.0833 a 0.41667
	10 01	3,4-2		de 1.4 a 11
	01 10	3,4-2		de 0.091 a 0.714
	01 01	3,4-2		de 0.636 a 1.57
6221	10 10	2,4-1		de 0.16 a 0.66
	10 01	2,4-1		de 0.618 a 0.951
	01 10	2,4-1		de 0.618 a 0.951
	01 01	2,4-1		de 0.826 a 0.993
	10 10	4,3-1		de 0.18 a 0.895
	10 01	4,3-1		de 0.77 a 0.992
	01 10	4,3-1		de 0.09 a 0.55
	01 01	4,3-1		de 0.604 a 0.95
	10 10	1,4-2		de 0.34 a 0.84
	10 01	1,4-2		de 0.048 a 0.382
	01 10	1,4-2		de 0.048 a 0.382
	01 01	1,4-2		de 0.00069 a 0.173
6222	10 10	1,3-2		de 0.18 a 0.895
	10 01	1,3-2		de 0.09 a 0.55
	01 10	1,3-2		de 0.77 a 0.992
	01 01	1,3-2		de 0.604 a 0.95
	10 10	1,4-2		de 0.104 a 0.82
	10 01	1,4-2		de 0.00075 a 0.23
	01 10	1,4-2		de 0.45 a 0.91
01 01	1,4-2		de 0.05 a 0.395	

Tabla XIV. Relaciones de transmisión alcanzadas por los trenes de seis miembros con un planetas doble.

Grafos	Solución Constructiva	Inversión	Rango de Relación de transmisión	
6320	10 11*	1,2-3	de -0.667 a -0.0067	de 0.0072 a 0.909
	10 11*	1,4-3		de 0.007 a 0.904
	10 01*	1,4-3	de -9 a -0.00396	de 2.27 a 9.85
	11* 01	1,4-3		de 0.00694 a 0.914
	10* 01	1,4-3	de -9 a -0.00396	de 2.27 a 9.85
	11* 10	1,3-2	de -188 a -0.2	de 2.6 a 200
6220	10 11*	3,4-2	de -188 a -0.2	de 2.6 a 200
	10 00*	3,4-2	de -228 a -1.68	de 4.36 a 200
	10 10*	1,4-3	de -0.224 a -0.0033	de 0.00169 a 0.897
	01 11*	1,4-3	de -149 a -1.63	de 1.2 a 139
	01 00*	1,4-3	de -179 a -3.4	de 3.08 a 169
6221	10 01*	2,4-1		de 0.62 a 0.994
	01 11*	4,3-1	de -5.33 a -0.00696	de 0.00542 a 7.5
	10 11*	1,4-2	de -6.5 a -0.00694	de 0.09 a 6.5
	10 10*	1,4-2		de 0.024 a 0.39
	10 01*	1,4-2		de 0.00347 a 0.29
	10* 10	1,4-2		de 0.0402 a 0.645
	11* 01	1,4-2	de -6.52 a -0.00694	de 0.09 a 6.94
	10* 01	1,4-2		de 0.00347 a 0.29
	10 10*	4,3-1	de -143 a -1.96	
	11* 10	4,3-1		de 0.184 a 156
	10 10*	1,3-4		de 0.00377 a 0.337
	11* 10	1,3-4	de -10.2 a -0.00645	de 1.226 a 11.4
	10 01*	1,2-4	de -0.423 a -0.00348	
	11* 01	1,2-4	de -6.86 a -0.099	de 0.00591 a 5.21
6222	10 11*	1,4-2	de -10.2 a -0.00645	de 1.2 a 11.25
	10 01*	1,4-2		de 0.00361 a 0.5
	11* 01	1,4-2	de -4.8 a -0.0065	de 0.088 a 5
	10* 01	1,4-2		de 0.00377 a 0.337
	11* 10	2,1-3		de 0.00641 a 5.41
	01* 10	2,1-3	de -1.041 a -0.00362	

Tabla XV. Relaciones de transmisión alcanzadas por los trenes de seis miembros con los dos planetas doble.

Grafos	Solución Constructiva	Inversión	Rango de Relación de transmisión	
6320	10* 11*	1,2-3	de -1.76 a -0.0044	de 0.0051 a 0.87
	10* 00*	1,3-2	de -0.84 a -0.0045	de 0.0054 a 0.38
	11* 11*	1,4-3	de -8.8 a -0.00551	de 1.01 a 9.8
	11* 01*	1,4-3		de 0.0033 a 0.965
	10* 01*	1,4-3	de -8.85 a -0.00189	de 1.22 a 9.5
6220	11* 11*	3,4-2	de -94 a -0.0085	de 0.0095 a 105
	00* 01*	3,4-2	de -0.841 a -0.00673	de 0.00617 a 0.356
	11* 11*	1,4-3	de -104 a -0.00531	de 0.00529 a 118.5
	01* 01*	1,4-3	de -11.5 a -0.00213	de 0.00212 a 0.622
6221	11* 01*	1,4-2	de -5.89 a -0.0034	de 0.0675 a 6.59
	10* 11*	1,4-2	de -5.89 a -0.0034	de 0.0675 a 6.59
	10* 01*	1,4-2		de 0.00173 a 0.492
	11* 10*	2,4-1	de -7.87 a -0.00213	de 0.00245 a 9.12
	00* 10*	2,4-1	de -10.6 a -0.00185	de 0.0036 a 11.64
	11* 11*	4,1-3	de -168 a -0.01	de 0.0078 a 12.5
	11* 10*	4,1-3		de 0.089 a 312
	11* 00*	4,1-3	de -20 a -0.0067	de 0.0061 a 7.87
	11* 11*	1,3-4		de 0.005 a 15
	11* 10*	1,3-4	de -10 a -0.0032	de 1.1 a 12
	10* 11*	1,3-4	de -5 a -0.0034	de 0.0795 a 5.3
	10* 10*	1,3-4		de 0.00180 a 0.622
	11* 01*	1,2-4	de -10.2 a -0.086	de 0.005 a 8.2
	10* 01*	1,2-4	de -0.968 a -0.00173	
6222	01* 10*	2,1-3	de -1.64 a -0.00181	
	10* 01*	2,1-3		de 0.00182 a 0.622
	11* 00*	2,1-3	de -121 a -0.056	de 0.135 a 148

## 2.6. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios

Los TEP ofrecen ventajas relativas a su menor peso y dimensiones en comparación a los trenes de engranajes ordinarios, sobre todo cuando las relaciones de transmisión son elevadas. No obstante, las pérdidas de potencia en estas transmisiones pueden ser considerablemente mayores que en un tren de engranajes ordinario. Esto hace que una de las etapas principales en el diseño de un TEP sea la estimación del rendimiento. Existen diferentes métodos para la obtención del rendimiento pero el más factible en cuanto a su aplicación debido a la posibilidad de implementarlo en un ordenador son los propuestos por (Mathis, 1999; Pennestri, 1993). Estos métodos se basan en la resolución de las ecuaciones de las velocidades y pares de engrane. La expresión del rendimiento de un TEP vendrá dada por:

$$\eta = - (T_{out} W_{out}) / (T_{in} W_{in}) \quad (34)$$

El signo negativo se incluye en la expresión anterior para obtener el rendimiento con signo positivo, debido a que la entrada de potencia al sistema y la potencia de salida tienen distinto signo.

Como es sabido, la expresión del rendimiento de un TEP depende no sólo de la relación de dentado  $Z_{ij}$  sino que además, para un mismo TEP, depende de cuales sean los miembros conductores del tren. En otras palabras, los valores de la relación de dentado  $Z_{ij}$  de un TEP determinan el sentido de la transmisión de la potencia, a diferencia de los trenes de engranajes convencionales y estos hacen que en los TEP no sea posible obtener una única expresión de su rendimiento. En concreto, el número de expresiones distintas del rendimiento de un TEP será igual al número de combinaciones posibles de los signos de las potencias de engrane, teniendo en cuenta que la suma de las potencias de engrane en un mismo planeta es nula.

De este modo, para un tren de cuatro miembros existen 2 posibles expresiones del rendimiento, en un tren de cinco miembros existen 6 posibles expresiones del rendimiento y para un tren de seis miembros son 4 las posibilidades.

El procedimiento para obtener la expresión analítica del rendimiento de un TEP consta de las siguientes fases:

- Cálculo de las velocidades de todos los miembros del tren.
  
- Cálculo de todos los pares mediante las ecuaciones de equilibrio (ecuación sin considerar pérdidas).
  
- Determinación en cada circuito del miembro conductor y conducido.
  
- Reemplazar las ecuaciones que relacionan los pares (ecuación sin considerar pérdidas), por las ecuaciones reales, en las que se considera el rendimiento ordinario.
  
- Calcular de nuevo los pares sobre los miembros del tren.
  
- Finalmente sustituir los resultados en la expresión del rendimiento.

### **2.6.1. Cálculo de la potencia de engrane**

En el apartado anterior, se ha comentado brevemente las fases para obtener la expresión del rendimiento de una transmisión planetaria. En este caso, se comprueba que es necesario resolver las ecuaciones de la velocidad y de los pares. No obstante, puede obtenerse una buena aproximación del rendimiento conociendo únicamente las potencias de engrane de los distintos circuitos.

Ahora bien, puede pensarse que la determinación de las potencias de engrane requiere del cálculo de los pares y las velocidades, pero no es así. Para conocer las potencias de engrane sólo es necesario conocer las relaciones de transmisión del tren y en consecuencia para obtener una aproximación del rendimiento basta con obtener la expresión de la relación de transmisión. La potencia transmitida a través del par de engrane correspondiente al circuito  $k$  es:

$$S_{ikjk} = -T_{ikk}(W_{ik} / W_{rk}) \quad (35)$$

En (Del Castillo, 2002) se demostró que la potencia de engrane del circuito  $k$  es igual a la elasticidad de la relación de transmisión respecto de la relación de dentado de dicho circuito. De este modo, si la relación de dentado del circuito  $k$  es  $Z_{ikjk}$  la relación entre ellas es:

$$S_k = S_{ikjk} = (Z_{ikjk} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{ikjk}) = (Z_k / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_k) \quad (36)$$

Al valor  $S_k$  se le denominará en adelante sensibilidad del circuito  $k$ . Como se ha comentado, en este tipo de transmisiones es particularmente interesante que una de las primeras etapas del diseño de un TEP sea la estimación de su rendimiento. No obstante, esto no es sencillo en una etapa inicial, ya que el cálculo del rendimiento exige una definición total del TEP. En otras palabras, debe fijarse el número de miembros, su estructura cinemática (CEP), la inversión e incluso los valores de las relaciones de dentado.

### 2.6.2. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de cuatro miembros

El rango de relación de transmisión capaz de conseguirse son las transmisiones planetarias de cuatro miembros, es lógicamente función de la solución constructiva, aunque bien es cierto, que si mas de una solución constructiva puede adoptar una misma relación de transmisión lo harán con el mismo rendimiento (si las dos tienen entrada por el sol o por el brazo), como se demuestra a continuación.

Las transmisiones planetarias de cuatro miembros con entrada por el sol, tienen la relación de transmisión siguiente:

$$W_{out} = Z_{14} / (Z_{14} - Z_{24}) \quad (37)$$

Las sensibilidades o potencias de engrane de cada circuito tienen el valor siguiente:

$$S_{14} = -Z_{24} / (Z_{14} - Z_{24}) \quad (38)$$

$$S_{24} = Z_{24} / (Z_{14} - Z_{24}) \quad (39)$$

Resulta sencillo establecer relaciones entre potencias de engrane y relaciones de transmisión y así conocer qué miembro es conductor en función de los valores de las relaciones de dentado. Por ejemplo, en el caso de utilizar la transmisión planetaria de cuatro miembros con entrada por el sol como multiplicadora de la velocidad y con el mismo sentido de giro que la velocidad de entrada, se tiene:

$$W_{out} > 1 \implies 0 < Z_{24}/Z_{14} < 1 \quad (40)$$

Con lo que la potencia de entrada  $S_{14}$  es negativa y por lo tanto el miembro conductor del circuito es el sol. Teniendo en cuenta lo anterior puede comprobarse que la expresión del rendimiento resulta:

$$\eta(W_{out} > 1) = W_{out} - (W_{out}/\eta_{14}\eta_{24}) + (1/\eta_{14}\eta_{24}) \quad (41)$$

Donde  $\eta_{14}$  y  $\eta_{24}$  son los rendimientos ordinarios de los circuitos 1, 4, 3 y 2, 4, 3 respectivamente. El rendimiento ordinario es el rendimiento que tiene el par de engrane si el brazo vinculado al planeta estuviera fijo. Mediante este rendimiento introducimos el cálculo del rendimiento global de la transmisión las pérdidas por fricción que se producen en dicho par. Es común asumir que un rendimiento ordinario es constante o igual para los distintos pares de engrane. Sin embargo, esto es sólo una aproximación aceptable, ya que en realidad el rendimiento ordinario depende del número de dientes de los engranajes que constituyen el par de engrane y de las longitudes de acercamiento y alejamiento. Este estudio también concluye un error aproximadamente un 5% al suponer estos valores aproximados. No obstante, este error es del mismo orden de magnitud que el que se puede cometer al medir el rendimiento ordinario o cuando las condiciones de operación varían (variaciones de temperatura, viscosidad del aceite, lubricación o par de carga) por lo que está justificado asumir un valor constante.

En definitiva, si  $\eta_{14} = 0,98$  quiere decir que el 2% de la potencia que pasa por dicho par de engrane se pierde por fricción entre los miembros 1 y 4.

Lo realmente interesante de la expresión (41) es que no depende de la solución constructiva, sino que es válida para cualquier TEP de cuatro miembros con entrada por el sol y para una relación de multiplicación con el mismo sentido que la velocidad de entrada.

En el caso de que se multiplique la velocidad pero con sentido de giro contrario al de la velocidad de entrada, entonces:

$$W_{out} < -1 \Rightarrow 1 < Z_{24}/Z_{14} < 2 \quad (42)$$

Con lo que  $S_{14}$  toma valores positivos para ese rango del cociente  $Z_{24}/Z_{14}$  y por lo tanto puede comprobarse que la expresión del rendimiento es en este caso:

$$\eta(W_{out} < -1) = W_{out} - (W_{out} - 1) \eta_1 \eta_2 = W_{out} - W_{out} \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_2 \quad (43)$$

Si se utiliza la transmisión como reductora, el cálculo es similar. En el caso de reducción en el mismo sentido que la velocidad de entrada, el valor del cociente  $Z_{24}/Z_{14}$  es:

$$0 < W_{out} < 1 \Rightarrow Z_{24}/Z_{14} < 0 \quad (44)$$

De este modo el valor de  $S_{14}$  es positivo y en consecuencia la expresión que relaciona el rendimiento y la relación de transmisión es la misma cuando se utiliza como multiplicadora con sentido contrario al de la velocidad de entrada, expresión (43). En el caso de reductora con cambio de signo respecto de la velocidad de entrada se tiene:

$$-1 < W_{out} < 0 \Rightarrow Z_{24}/Z_{14} < 2 \quad (45)$$

En resumen, para las transmisiones de cuatro miembros con entrada por el sol, las expresiones que relacionan el rendimiento y la relación de transmisión son:

$$\eta(W_{out} > 1) = W_{out} + (1 - W_{out}) / (\eta_{14} \eta_{24}) \quad (46)$$

$$\eta(W_{out} > 1) = W_{out} + (1 - W_{out})(\eta_{14} \eta_{24}) \quad (47)$$

De la expresión (47) puede deducirse fácilmente que el rendimiento de una reductora planetaria de cuatro miembros es superior al tren de engranajes convencional, con iguales rendimientos ordinarios. En términos matemáticos:

$$W_{out} - W_{out} \eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_2 > \eta_1 \eta_2 \quad (48)$$

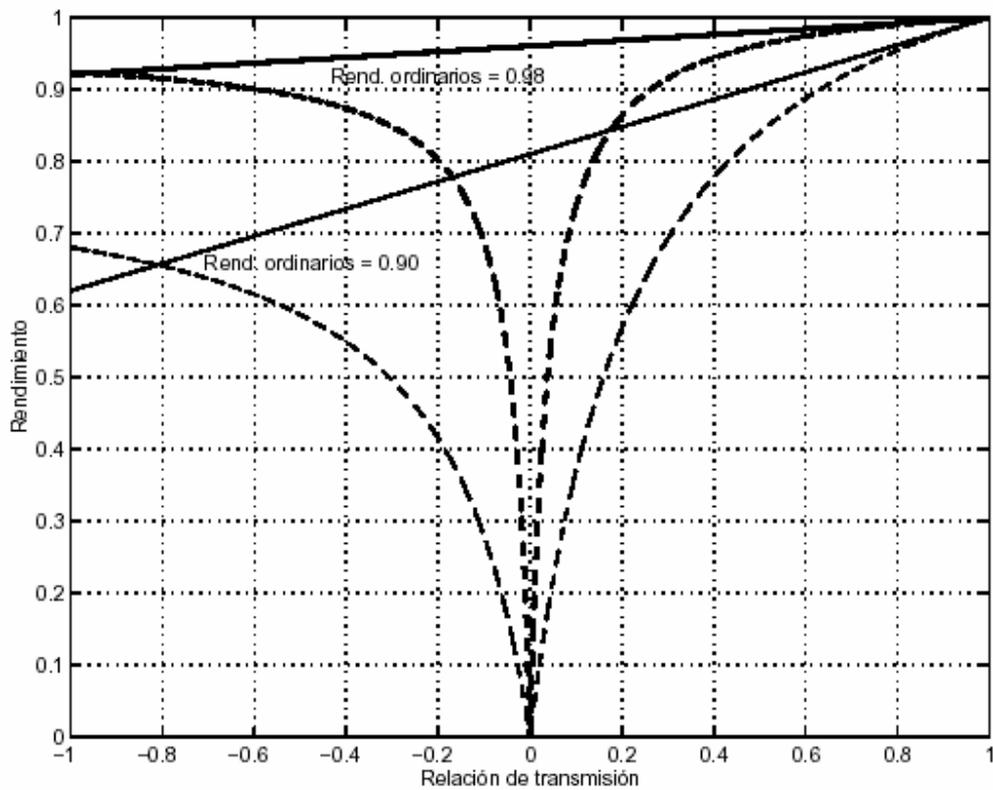
Para hallar la expresión que relaciona el rendimiento y la relación de transmisión, se ha estudiado el signo del cociente  $Z_{24}/Z_{14}$ , lo que determina las soluciones constructivas que se pueden emplear para cada uno de los rangos en los que se ha dividido la relación de transmisión.

Si la transmisión se utiliza para multiplicar la velocidad de entrada o como reductora con cambio de sentido de la velocidad de salida respecto a la de entrada, ese cociente es positivo. Por tanto, las configuraciones que pueden utilizarse son las representadas en las figuras 14(b) y 14(d).

En el caso de la reductora de velocidad con el mismo sentido de giro, el cociente de las relaciones de dentado es negativo, por lo que las configuraciones utilizadas son las de la figura 13 o en el caso de utilizar planetas dobles, las de las figuras 14(a) y 14(c).

En la figura 17 se muestra que para los valores del rendimiento ordinario iguales a 0,90, puede comprobarse como la recta rendimiento-relación de transmisión correspondientes a la transmisión con entrada por el sol presenta mayor rendimiento que la transmisión con entrada por el brazo excepto por un pequeño rango de la relación de transmisión. En la práctica, puede considerarse a efectos de evaluación de alternativas, un valor del rendimiento ordinario próximo a 0,98, por lo que debe utilizarse la transmisión con entrada por el sol para cualquier reducción.

Figura 17. Rendimiento vrs relación de transmisión de los trenes de engranajes planetarios de cuatro miembros. Transmisión con entrada por el sol en línea continua, transmisión con entrada por el brazo línea discontinua.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

En la tabla XVI se muestran todos los datos necesarios para el análisis de las transmisiones planetarias de cuatro miembros haciendo referencia a la transmisión con entrada por el sol.

Tabla XVI. Datos del tren de engranajes planetarios con entrada por el sol.

4210(1,3-2)	$W_{out} = \frac{Z_{14}}{Z_{14} - Z_{24}}, S_{14} = \frac{-Z_{24}}{Z_{14} - Z_{24}}, S_{24} = \frac{Z_{24}}{Z_{14} - Z_{24}}$		
Rango $W_{out}$	Rango $Z_{ij}$	Rendimiento $\eta = g(Z_{ij}, \eta_{ij})$	Rendimiento $\eta = g(W_{out}, \eta_{ij})$
$0 < W_{out} < 1$	$\frac{Z_{24}}{Z_{14}} < 0$	$\frac{Z_{14} - Z_{24}\eta_{14}\eta_{24}}{Z_{14} - Z_{24}}$	$W_{out}(1 - \eta_{14}\eta_{24}) + \eta_{14}\eta_{24}$
$-1 < W_{out} < 0$	$\frac{Z_{24}}{Z_{14}} > 2$		
$W_{out} < -1$	$1 < \frac{Z_{24}}{Z_{14}} < 2$		
$W_{out} > 1$	$0 < \frac{Z_{24}}{Z_{14}} < 1$	$\frac{Z_{14}\eta_{14}\eta_{24} - Z_{24}}{(Z_{14} - Z_{24})\eta_{14}\eta_{24}}$	$W_{out} + \frac{(1 - W_{out})}{\eta_{14}\eta_{24}}$

### 2.6.3. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de cinco miembros

En la figura 18 se muestra el rendimiento mas elevado que los TEP de cinco miembros pueden alcanzar en el rango de la relación de transmisión. Esta curva se ha determinado de forma analítica mediante un programa informático (matemático) que se ha utilizado para el análisis de los TEP y que evalúa todos los TEP de cinco miembros, con todas las soluciones constructivas y en todo el rango de la relación de transmisión. Para cada una de las relaciones de transmisión se ha seleccionado el rendimiento mas elevado entre los rendimientos obtenidos para dicha relación de transmisión y de este modo se ha generado la curva de la figura 18. Es interesante tener en cuenta que cada uno de los puntos de la figura 18 puede corresponderse con una solución constructiva distinta del tren de cinco miembros.

Para las transmisiones planetarias de cinco miembros se tiene la relación de transmisión:

$$W_{out} = Z_{15}(Z_{25} - Z_{35}) / Z_{35}(Z_{25} - Z_{15})$$

Otra forma más simple de poder expresar la relación de transmisión es dejar la expresión en función de  $Z_{nlm}$  ( $W_{out} = f(Z_{nlm})$ ) con lo cual se obtiene la ecuación siguiente:

$$W_{out} = (Z_{153} - Z_{152}) / 1 - Z_{152}$$

Para las sensibilidades o potencias de engrane del circuito S15 tenemos que:

$$S_{15} = 1 / (1 - Z_{152})$$

Para las sensibilidades o potencias de engrane del circuito S35 se tiene que:

$$S_{35} = 1 / (Z_{352} - 1)$$

Cuando expresamos la relación de transmisión en función de las sensibilidades o potencias de engrane da como resultado la siguiente ecuación:

$$W_{out} = (1 - S_{15}) / (1 + S_{35})$$

Dicha expresión en los TEP de cinco miembros generan una serie de curvas en el espacio que se estudiarán en el capítulo siguiente.

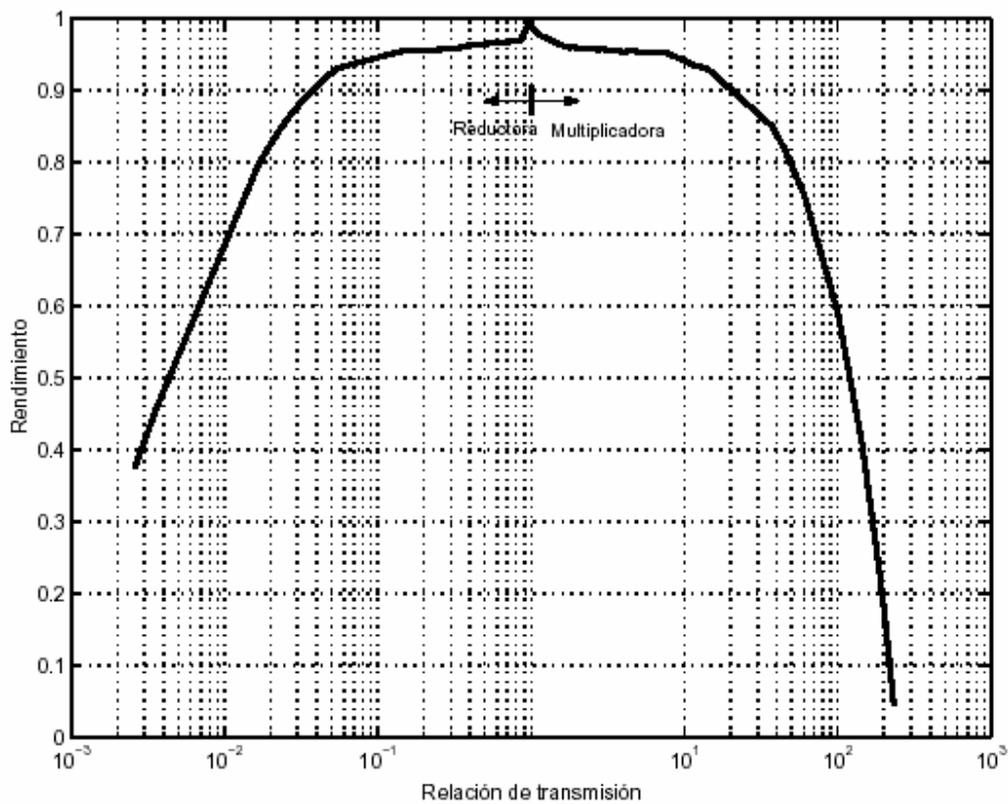
El valor del rendimiento ordinario empleado en dichos cálculos es de 0,98. Es fácil deducir que los TEP no obtienen elevados rendimientos para relaciones de transmisión multiplicadoras. En concreto, cuando  $|W_{out}| > 24$  el rendimiento es inferior a 0,90 y siendo por lo tanto peor que los TEP de cuatro miembros con entrada por el brazo.

La misma conclusión se obtiene cuando se analiza la transmisión como reductora de velocidad. La reducción máxima para la que desde el punto de vista práctico, podría emplearse para un TEP de cinco miembros sería aproximadamente de  $W_{out} = 1/45$  que consigue un rendimiento máximo de 0,84. Mayores reducciones implican un rendimiento bastante reducido, por lo que sería más conveniente el empleo de la transmisión multietapas (varias etapas del tren de cuatro miembros).

Con base a lo anteriormente expuesto, cabe concluir que el tren de cinco miembros tiene un reducido rango de relación de transmisión en el cual su aplicación podría resultar interesante.

Este rango es el que no puede alcanzarse con una transmisión de cuatro miembros, aun empleando planeta doble y hasta aquellas relaciones de transmisión que reducen drásticamente su rendimiento. Por tanto, este rango de la relación de transmisión puede establecerse en  $24 < W_{out} < 45$ . No obstante, que existen otros criterios diseño, esta alternativa debería compararse con la de la transmisión multietapa compuesta por dos transmisiones de cuatro miembros con planetas simples.

Figura 18. Rendimiento máximo-relación de transmisión de los trenes de engranajes planetarios de cinco miembros.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

#### **2.6.4. Rendimiento de los trenes de engranajes planetarios de seis miembros**

Como se demostró en el capítulo anterior, existen veintiséis TEP distintos de seis miembros, con cuatro soluciones constructivas cada uno si se construyen con planetas simples o dieciséis en el caso de que ambos planetas se construyesen con planetas dobles. También habría que analizar las soluciones constructivas en la que uno de los planetas es simple y el otro doble. En este último caso, puede comprobarse que las soluciones constructivas también son dieciséis. Por tanto, un análisis similar al hecho con los TEP de cinco miembros se ha realizado con los TEP de seis miembros. Se ha empleado el mismo procedimiento numérico para evaluar de forma analítica todos los TEP de seis miembros (todo el rango de las relaciones de transmisión).

Para tener un buen análisis de los TEP de seis miembros se estudian las distintas ecuaciones que poseen cada una de las configuraciones puedan tener dicho TEP. Por ejemplo en el caso de la configuración del TEP 6220, el cual tiene dos configuraciones que son 6220 (3,4-2) y 6220 (1,4-3).

Para las transmisiones planetarias de seis miembros 6220 (3,4-2) se tiene que la relación de transmisión en función de  $Z_{nlm}$  es:

$$W_{out} = Z_{152} - 1 / (Z_{152})(1 - Z_{261})$$

Las sensibilidades o potencias de engrane de cada circuito  $S_{15}$  y  $S_{26}$  tienen el valor siguiente:

$$S_{15} = 1 / (Z_{152} - 1)$$

$$S_{26} = Z_{261} / (1 - Z_{261})$$

La expresión de la relación de transmisión en función de las sensibilidades o potencias de engrane que da como resultado la familia de curvas en el espacio es:

$$W_{out} = (1 + S_{26}) / (1 + S_{15})$$

Para las transmisiones planetarias de seis miembros 6220 pero con una configuración de (1,4-3) se tiene la que relación de transmisión en función de  $Z_{nlm}$  es:

$$W_{out} = (1 - Z_{152} Z_{261}) / (1 - Z_{261})$$

Por lo tanto, las sensibilidades o potencias de engrane de cada circuito  $S_{15}$  y  $S_{26}$  tienen el valor siguiente:

$$S_{15} = (Z_{152} Z_{261}) / (Z_{152} Z_{261} - 1)$$

$$S_{26} = (Z_{261}(1 - Z_{152})) / ((1 - Z_{261})(1 - Z_{152} Z_{261}))$$

Y la expresión de la relación de transmisión en función de las sensibilidades o potencias de engrane que da como resultado la familia de curvas en el espacio es:

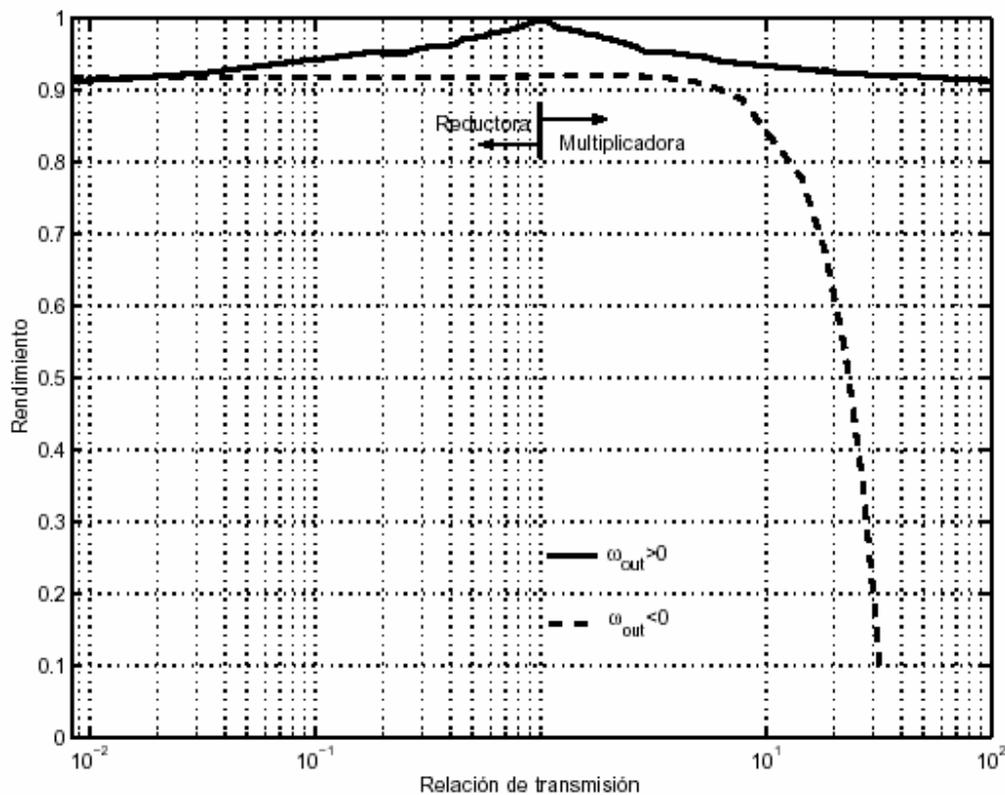
$$W_{out} = (1 - S_{15} + S_{26}) / (1 - S_{15})$$

Como resultado se muestra la curva de la figura 19 en la que se representa el rendimiento máximo alcanzado por los TEP de seis miembros para el rango de las relaciones de transmisión alcanzadas. En este análisis se ha empleado un rendimiento ordinario de 0,98. Es interesante destacar que los TEP que cambian el sentido de giro de la velocidad de salida respecto a la velocidad de entrada tienen un rendimiento inferior, sobre todo cuando estos multiplican la velocidad de entrada.

Esto es consecuencia de que los trenes que cambian el sentido de giro de la velocidad son también los TEP que consiguen rendimientos más reducidos.

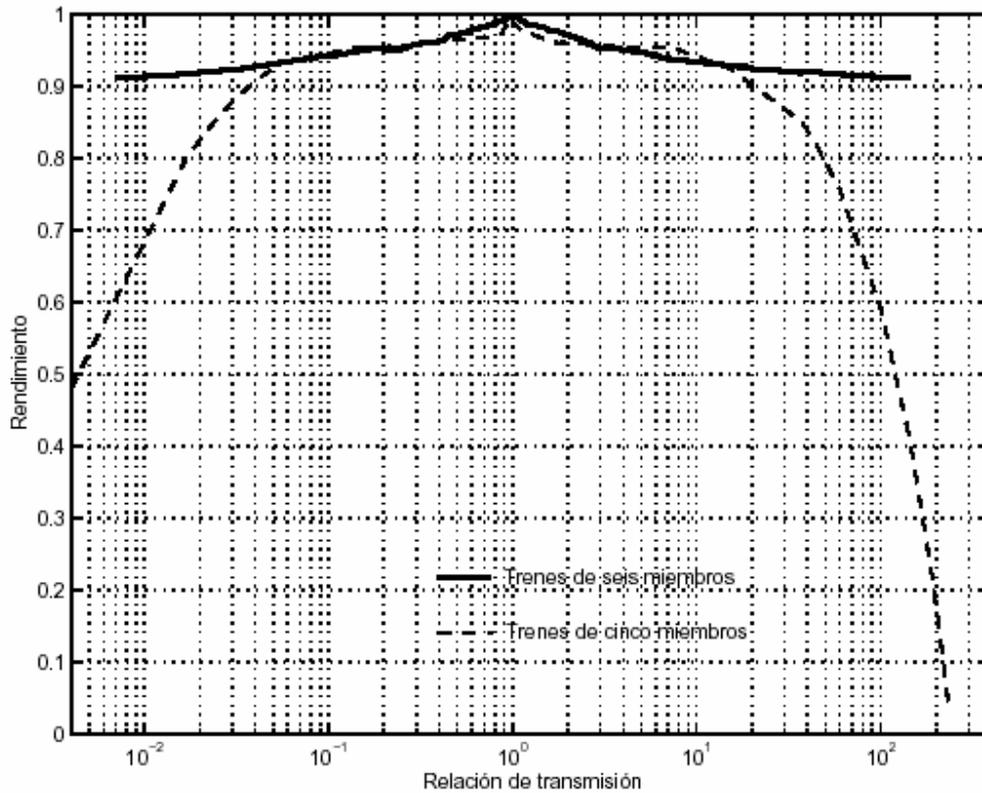
Por ultimo se muestra la figura 20 en la que se han representado los rendimientos máximos alcanzados por los trenes de cinco y seis miembros en función de la relación de transmisión. Para los trenes de seis miembros se ha representado el rendimiento de los TEP que no cambian el sentido de la velocidad de salida respecto a la de entrada. De la figura 20 se deduce tanto elevadas reducciones como multiplicaciones de la velocidad de entrada, existe algún TEP de seis miembros que alcanza un rendimiento mayor.

Figura 19. Rendimiento máximo-relación de transmisión de los trenes de engranajes planetarios de seis miembros.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

Figura 20. Rendimiento máximo – relación de transmisión de los trenes de engranajes planetarios de cinco y de seis miembros.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

### **2.6.5. Resultados de los trenes de engranajes planetarios de mas de seis miembros**

Con los TEP de más de seis miembros también se ha hecho un análisis similar al desarrollado para los trenes de cinco y seis miembros, para conocer el rango de las relaciones de transmisión y rendimiento que se pueden conseguir.

Cabe destacar, que son muy pocos los TEP cuyas relaciones de transmisión y rendimiento sean comparables con los de la transmisión resultante de la conexión en serie de varias etapas de la transmisión básica de cuatro miembros (en adelante transmisión multietapa), de modo que el número de pares de engrane en ambas sea el mismo. De este modo, los trenes de seis miembros deben compararse con dos etapas del tren básico y los de ocho con tres etapas. En concreto, únicamente los TEP 8331Aa (1,5-2), 83331Aa(1,5-4), 8233b(2,3-4) y 8234a(2,3-1) son reductoras de la velocidad que cumplen con lo anterior.

El empleo práctico de algunos de esto TEP en lugar de la transmisión multietapa debería responder a otros criterios y no sólo a la semejanza de sus rendimientos. Estos otros criterios además del rendimiento, podrían ser la sencillez de la solución constructiva, el volumen reducido de la transmisión, etc. En la tabla XVII se muestra las relaciones máximas de los TEP que mayores rendimientos alcanzan. También se encuentran los datos relativos al tren multietapa. Los valores de los rendimientos se han calculando considerando un rendimiento ordinario de 0,98. Por último que los datos con asterisco hacen referencia al empleo de plantas dobles en la solución constructiva de la transmisión. En los resultados de los trenes de ocho miembros, no se muestran los datos de la solución constructiva con planetas dobles por no superar a los del tren multietapa, ya que desde un punto de vista práctico se complica su construcción.

Tabla XIV. Relaciones de transmisión y rendimientos máximos alcanzados.

TEP	$W_{out}$	Rendimiento	$W_{out}^*$	Rendimiento*
4210 (3,1-2)	1/12	0.963	1/24	0.962
4210 (3,1-2)	12	0.963	24	0.962
Dos etapas tren básico	1/144	0.927	1/576	0.925
6221 (1,2-4)	1/143	0.926	1/575	0.917
6221 (1,3-4)	1/134	0.917	1/575	0.910
6222 (1,4-2)	1/134	0.917	1/575	0.910
Tres etapas tren básico	1/1728	0.893	1/13824	0.890
8331 Aa(1,5-2)	1/1451	0.862	----	----
8331 Aa(1,5-4)	1/1452	0.862	----	----
8333 b(2,3-4)	1/1596	0.867	----	----
8234 a(2,3-1)	1/1464	0.863	----	----

### 3. MAPAS DE POTENCIA

El procedimiento descrito en el capítulo anterior para la comparación de los TEP de seis miembros con las transmisiones multietapa resulta muy laborioso y lento. En este capítulo se aborda este problema y se presenta una metodología para la comparación de los TEP. Dicha metodología para el análisis y comparación de los TEP, se basa principalmente en la relación que existe entre las potencias de engrane y las relación de transmisión de un TEP. Con esta metodología se desarrollan unos mapas, denominados mapas de potencia, que permiten el análisis y la comparación directa de distintas alternativas de TEP. Este mapa de potencia permite determinar fácilmente las transmisiones que presentan mayor rendimiento para una relación de transmisión concreta. Además, estos mapas permiten comprobar de forma rápida y sencilla si se produce recirculación de potencia, condición en general indeseable ya que reduce considerablemente el rendimiento de la transmisión. Otra ventaja sobresaliente de estos mapas es que no dependen de la solución constructiva adoptada por el tren, por lo que dicha metodología resulta ser mas sistemática que el de resolver las ecuaciones de las velocidades y pares de engrane para todos los TEP.

Como se demuestra en este capítulo, los TEP 6221 (1,2-4), 6221 (1,3-4) y 6222 (1,4-2) pueden alcanzar elevadas relaciones de reducción y multiplicación de la velocidad con rendimientos elevados, por lo tanto, los TEP que deben compararse con el tren multietapa.

El procedimiento aquí propuesto se basa en analizar la transmisión en el espacio de coordenadas definidas por las potencias de engrane (potencia transmitida a través de un par de engrane determinado por el tren).

Como la potencia perdida por fricción y el deslizamiento entre los dientes de los engranajes es proporcional a las sumas de las potencias de engrane transmitidas por todos los pares de engrane, el rendimiento del tren será inversamente proporcional a dicha suma. En (Del Castillo, 2002) se muestra una expresión aproximada del rendimiento de un TEP es precisamente:

$$\eta \approx 1 - \sum_{k=1}^J (1 - \eta_k) |S_k| \quad (49)$$

Donde  $\eta_k$  es el rendimiento ordinario o estacionario del par de engrane  $k$ . este rendimiento es el que mediría un observador que se desplazara junto con el brazo que mantiene constante la distancia entre los centros de los engranajes de dicho par. La potencia transmitida por el par de engrane  $k$  se denota por  $S_k$ . En (49) se supone que la potencia de entrada es uno, por lo que en realidad  $S_k$  es la relación entre la potencia transmitida por cada par de engrane y la potencia de entrada.

El éxito de este método radica en aprovechar la forma funcional característica que posee la relación de transmisión de cualquier TEP y la relación que existe entre las potencias de engrane y la relación de transmisión. El resultado final es una expresión del tipo:

$$F(S_k; W_{out}) = 0 \quad (50)$$

Para los trenes de cinco y seis miembros, dicha expresión parametrizada por la relación de transmisión, genera una familia de curvas en el espacio de las potencias de engrane o mapas de potencia.

### 3.1. Relación de transmisión y potencia de engrane

Es sabido que para un TEP de un grado de libertad constituido por  $N$  miembros y con  $J = N - 2$  pares de engrane, el sistema de ecuaciones que proporciona las velocidades de los miembros del tren en relación a la velocidad del miembro de entrada se puede escribir como:

$$\hat{C} \cdot \Omega = b \quad (51)$$

En donde  $\hat{C}$  es una matriz cuadrada de dimensiones  $N$  cuyas  $J$  primera fila son las ecuaciones de Willis que se pueden escribir para los pares de engrane. Cada una de estas ecuaciones involucra a tres miembros del tren. Este conjunto de tres miembros es el que se ha denominado circuito. Cada circuito consta de dos miembros que están vinculados por un par de engrane y un tercer miembro vinculado a los dos primeros por un par de rotación. Este miembro es el brazo del circuito. Obviamente el número de circuitos es igual al número de pares de engrane. Para de notar a los miembros del circuito  $k$  se usarán los subíndices  $ik$  y  $jk$  para los miembros vinculados por el par de engrane y  $rk$  para el brazo. Finalmente, las dos últimas filas de  $\hat{C}$  establecen que la velocidad del miembro fijo sea cero y que la velocidad del miembro de entrada sea uno. Por consiguiente:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C \\ \mathbf{e}_{REAC}^T \\ \mathbf{e}_{IN}^T \end{pmatrix}$$

Donde  $\mathbf{e}_{REAC}$  es un vector columna cuyos elementos son todos cero excepto el correspondiente al miembro fijo. De igual modo los elementos de  $\mathbf{e}_{IN}$  son todos iguales a cero excepto al correspondiente al miembro de entrada.

Los elementos de C vienen dados por:

$$C_{nk} = \begin{cases} Z_k & \text{if } n = ik \\ 1 & \text{if } n = jk \\ -1 - Z_k & \text{if } n = rk \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Donde  $Z_k = Z_{ikjk}$  es la relación de dentado del par de engrane del circuito  $k$ , que vincula al miembro  $ik$  con el  $jk$ . Para que la definición de los miembros de la matriz C sea correcta,  $Z_k$  debe de ser positivo si el engrane es externo y negativo si el engrane es interno. Por ejemplo, para el tren de la figura 2(a) se tendrá que adoptar  $Z_{25} > 0$  y  $Z_{15} < 0$ .

Finalmente, el vector b tiene todos sus elementos iguales a cero excepto el último que es igual a uno. La expresión de la relación de transmisión se obtiene aplicando la regla de Cramer, de este modo:

$$W_{out} = \frac{|\hat{C}_{out}|}{|\hat{C}|} = \Delta_{out} / \Delta \quad (52)$$

Donde  $\hat{C}_{out}$  es la matriz resultante de sustituir en  $\hat{C}$  la columna correspondiente al miembro de salida del vector b. como se ha hecho que la velocidad del miembro de entrada sea uno,  $W_{out}$  es realmente la relación de las velocidades de salida y de entrada.

Por otra parte, tanto el numerador como el denominador de la expresión (52) son polinomios multivariados de grado uno en las relaciones de dentado  $Z_k$ . Entonces si  $Z_p$  es el conjunto de las relaciones de dentado que involucran al planeta p, siempre resulta posible elegir arbitrariamente una relación de dentado de  $Z_j(p)$ .

De este modo, se adoptará una relación de dentado arbitraria, que se denomina relación de dentado a condensar. En lo que sigue, denominaremos relación de dentado condensada a la resultante de dividir la relación de dentado por su correspondiente relación de dentado a condensar.

Si se divide en la expresión de relación de transmisión 1 numerador y el denominador por el producto de la relación de dentado a condensar elegidas para cada planeta, se podrá expresar la relación de transmisión en función de las relaciones de dentado condensadas. En particular si  $j(p) = l$  las relaciones condensadas tendrán la siguiente expresión:

$$Z_{nlm} = Z_{nl} / Z_{ml} \quad (53)$$

Las  $J_p$  relaciones de dentado en las que interviene el planeta  $p$  darán lugar a  $J_p - 1$  relaciones de dentado condensadas. Por ello, siempre resulta posible expresar la relación de transmisión en función de  $\sum_{p=1}^{M_P} (J_p - 1)$  relaciones de dentado condensadas donde  $N_p$  es el número de planetas del TEP. Este cambio de variables reduce el número de variables de la expresión de la relación de transmisión en una cantidad igual al número de planetas. En aquellos casos en los que un planeta se construya con un solo engranaje, como el planeta 5 de la figura 2(a), la relación de dentado condensada será el cociente del número de dientes de los engranajes que engranan con el planeta. En concreto, para dicho tren:

$$Z_{152} = Z_{15} / Z_{25} = \text{número de dientes del engranaje 1} / \text{número de dientes del engranaje 2}$$

La potencia transmitida a través del par de engranes correspondientes al circuito  $k$  es:

$$S_{ikjk} = -T_{ikk} (W_{ik} - W_{rk}) \quad (54)$$

De modo que si la relación de dentado del circuito k es  $Z_{ikjk}$  la relación de transmisión y la relación de dentado de dicho circuito es:

$$S_k = S_{ikjk} = (Z_{ikjk} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{ikjk}) = (Z_k / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_k) \quad (55)$$

Al valor  $S_k$  se denominará en adelante sensibilidad del circuito k. Como el numerador y el denominador de la expresión (52) son polinomio multivariados de grado uno en las relaciones de dentado  $Z_k = Z_{ikjk}$ , la sensibilidad puede expresarse algebraicamente de la siguiente forma:

$$S_k = (\Delta_k / \Delta) - (\Delta_{out,k} / \Delta_{out}) \quad (56)$$

Donde  $\Delta_k$  es  $\Delta$  para  $Z_k = 0$ , del mismo modo  $\Delta_{out,k}$  es  $\Delta_{out}$  para  $Z_k = 0$ . Como la relación de transmisión se puede expresar en función de las relaciones de dentado condensadas, se comprueba que la sensibilidad puede expresarse también en función de las relaciones de dentado condensadas, en efecto:

$$S_{nl} = (Z_{nl} / Z_{nml} W_{out}) \cdot (Z_{nml}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nl}) = (Z_{nlm} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nlm}) \quad (57)$$

La expresión anterior demuestra además que la derivada respecto de la relación de dentado condensada es igual a la sensibilidad original para aquellas sensibilidades correspondientes a la relación de dentado que han quedado tras la condensación. Por ello, puede definirse la sensibilidad  $S_{nlm} = S_{nl}$  como:

$$S_{nlm} = (Z_{nlm} / W_{out}) (\partial W_{out} / \partial Z_{nlm}) \quad (58)$$

Por otra parte, puede comprobarse que la suma de las sensibilidades de un mismo planeta es cero. Esto es consecuencia del balance de potencia transmitida a través de los pares de engrane del planeta.

Por tanto, por cada planeta existe  $Jp - 1$  sensibilidades independientes y sensibilidades dependientes. En cada planeta, una vez seleccionada la relación de dentado que se condensa, las  $Jp - 1$  relaciones de dentado condensadas dan lugar a sus correspondientes sensibilidades o potencias de engrane que se pueden obtener mediante (58). La potencia de engrane correspondiente al par de engrane cuya relación de dentado ha sido eliminada, se puede obtener como la suma cambiada de signo de las  $Jp - 1$  potencias de engrane independientes. En la tabla XVIII se muestra el número de sensibilidades independientes de cada TEP en función del número de miembros y planetas.

Tabla XVIII. Sensibilidad independiente en función del número de miembros y planetas.

$N$	$Np$	S. Independientes
4	1	1
5	1	2
6	2	2
7	2	3
8	2	4
	3	3
9	2	5
	3	4

El siguiente ejemplo muestra cómo puede expresarse la relación de transmisión y la sensibilidad en función de las relaciones de dentado condensadas. Para este ejemplo se han elegido las transmisiones 6221 (1,2-4). Los circuitos son 1-5-3, 2-5-3, 2-6-4 y 3-6-4, donde el subíndice intermedio es el planeta del circuito. Estos circuitos dan lugar a cuatro ecuaciones de Willis. Las otras dos ecuaciones son las resultantes de hacer la velocidad del miembro fijo igual a cero y la velocidad del miembro de entrada igual a uno.

El sistema de ecuaciones resultantes es:

$$\begin{pmatrix} Z_{15} & 0 & -1 & -Z_{15} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z_{25} & -1 & -Z_{25} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Z_{26} & 0 & -1-Z_{26} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{36} & -1-Z_{36} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene la relación de transmisión W2:

$$W_{out} = W_2 = (Z_{15}Z_{36}) / (Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{26} + Z_{25}Z_{36}) \quad (59)$$

El tren tiene dos planetas, que son los miembros 5 y 6. Tanto el planeta 5 como el 6 aparecen en dos relaciones de dentado. Arbitrariamente podemos adoptar para cada planeta una cualquiera de estas dos para realizar la condensación. Por ejemplo, condensamos la relación Z15 para el planeta 5 y la relación Z36 para el planeta 6 y nos darán dos relaciones de dentado condensadas que de acuerdo con (53) son:

$$Z_{251} = Z_{25} / Z_{15} \quad Z_{263} = Z_{26} / Z_{36}$$

La relación de transmisión en función de las relaciones de dentado condensadas se obtienen entonces dividiendo el numerador y el denominador por el producto de las relaciones de dentado originales que han sido consideradas: Z15Z36. El resultado es:

$$W_{out} = 1 / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251}) \quad (60)$$

Por otra parte, las sensibilidades se pueden calcular sin necesidad de derivar haciendo uso de la expresión (56). El resultado es:

$$S_{25} = Z_{25}(Z_{26} - Z_{36}) / (Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{26} + Z_{25}Z_{36}) = -S_{15}$$

$$S_{26} = Z_{26}(Z_{25} - Z_{15}) / (Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{26} + Z_{25}Z_{36}) = -S_{36}$$

Se comprueba que la suma de las potencias de engrane de cada planeta es cero. Las sensibilidades expresadas en función de las relaciones de dentado condensadas se pueden obtener simplemente en las expresiones anteriores el numerador y el denominador por  $Z_{15}Z_{36}$  y se obtiene:

$$S_{25} = Z_{251}(Z_{263} - 1) / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251})$$

$$S_{26} = Z_{263}(Z_{263} - 1) / (Z_{251} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251})$$

De acuerdo a lo mostrado anteriormente en (58), estas expresiones se pueden obtener directamente derivando la expresión de la relación de transmisión en función de las relaciones de dentado condensadas (60). En concreto, se obtiene:

$$S_{251} = (Z_{251} / W_{out})(\partial W_{out} / \partial Z_{251}) = Z_{251}(Z_{263} - 1) / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251}) = S_{25} \quad (61)$$

$$S_{263} = (Z_{263} / W_{out})(\partial W_{out} / \partial Z_{263}) = Z_{263}(Z_{263} - 1) / (Z_{263} - Z_{251}Z_{263} + Z_{251}) = S_{26} \quad (62)$$

### 3.2. Relación de transmisión en función de la potencia de engrane

En la sección anterior se ha demostrado que la potencia de engrane expresada en función de las relaciones de dentado condensadas cumplen que  $S_{nlm} = S_{nl}$ , cuando la relación que ha sido eliminada por la condensación es  $Z_{ml}$ .

Además, se ha demostrado en (57) que esta forma de la potencia de engrane también está relacionada con la derivada de la relación de transmisión. En conclusión, expresar la relación de transmisión y las potencias de engrane en función de las relaciones de dentado originales o condensadas es equivalente, sólo que en el segundo caso el número de variables es menor.

Por otra parte y como consecuencia de lo anterior, es fácil comprobar que la relación de transmisión en función de las relaciones de dentado condensadas sigue siendo el cociente de dos polinomios multivariantes de un grado. Por ello, para hallar la expresión de potencia de engrane en función de las relaciones de dentado condensadas no es necesario derivar respecto de éstas sino que puede aplicar el resultado dado por (56). De modo similar a la expresión (52), la relación de transmisión en función de las relaciones de dentado condensadas se podrá expresar siempre como:

$$W_{out} = (\Lambda_{out} / \Lambda) \quad (63)$$

La diferencia radical en que la expresión (63) tanto  $\Lambda_{out}$  como  $\Lambda$  no son determinantes del sistema de ecuaciones de las velocidades sino simplemente polinomios de grado uno en las  $Z_{nlm}$ . Finalmente, si denotamos por  $S_k$  a la potencia de engrane del circuito  $k$  y aplicamos el resultado dado por (56) se tendrá:

$$S_k = (\Lambda_k / \Lambda) - (\Lambda_{out,k} / \Lambda_{out}) \quad (64)$$

Al igual que en (56)  $\Lambda_k$  es  $\Lambda$  para  $Z_k=0$ , del mismo modo  $\Lambda_{out,k}$  es  $\Lambda_{out}$  para  $Z_k = 0$ . Este resultado es la base del procedimiento para poder expresar la relación de transmisión en función de las potencias de engrane independientes de forma sencilla.

La sustitución de variables en la expresión de la relación de transmisión, en concreto de las relaciones de dentado condensadas por las potencias de engrane independientes, no es una tarea trivial. En cualquier caso, la elección de las relaciones de dentado a condensar debe ser hecha a modo que  $\Lambda$  ó  $\Lambda_{out}$  sean iguales a uno. En el caso de que  $\Lambda = 1$ , se tendrá también  $\Lambda_k = 1$  y (64) se transforma en:

$$S_k = 1 - (\Lambda_{out,k} / W_{out}) \quad (65)$$

Análogicamente si se considera  $\Lambda_{out} = 1$ , entonces (64) se convierte en:

$$S_k = W_{out} \Lambda_k - 1 \quad (66)$$

Las expresiones (65) y (66) serán las expresiones empleadas para hallar la expresión de la relación de transmisión en función de las potencias de engrane independientes del TEP. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento anterior. En la sección previa se obtuvo la relación de transmisión del tren 6221 (1,2-4). En concreto se adoptaron como relaciones de dentado condensadas Z251 y Z263 y la relación de transmisión en función de éstas venía dada por (60). Con esta selección se consigue hacer  $\Lambda_{out} = 1$  y las potencias de engrane independientes de acuerdo con (56) viene dada por:

$$S_{251} = S_{25} = W_{out} \Lambda_{251} - 1 = W_{out} Z_{263} - 1$$

$$S_{263} = S_{26} = W_{out} \Lambda_{263} - 1 = W_{out} Z_{251} - 1$$

Despejando los valores de Z251 y Z263 de las expresiones anteriores y sustituyéndolos en (60), se obtiene finalmente la expresión de la relación de transmisión en función de las potencias de engrane independientes:

$$W_{out} = [(1 + S_{251})(1 + S_{263})] / (1 + S_{251} + S_{263})$$

En el caso de la transmisión 6222 (2,4-1) la expresión de la relación de transmisión en función de las potencias de engrane independientes no es trivial. Los circuitos son los mismos que en el caso anterior, si bien cambian los miembros que definen la inversión. Planteando la expresión matricial dada por (51) y resolviendo para la velocidad del miembro 4 se tiene:

$$W_{out} = W_4 = (Z_{25}Z_{26} - Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{36}) / (Z_{25}Z_{26} - Z_{15}Z_{26} - Z_{25}Z_{36} + Z_{25}Z_{36}) \quad (67)$$

Condensando las relaciones de dentado  $Z_{15}$  y  $Z_{36}$  se obtiene de acuerdo con (53) la relación de la transmisión en función de las nuevas variables:

$$W_{out} = (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251}) / (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251} + 1) \quad (68)$$

Cuando suceda que  $\Lambda_{out} = \Lambda - 1$ , la aplicación del cambio de variables siguiente permite encontrar la solución buscada:

$$\theta = 1 - W_{out} = 1 / (Z_{251}Z_{263} - Z_{263} - Z_{251} + 1) \quad (69)$$

Es importante observar que al hacer el cambio de variables, la nueva variable  $\theta$  sigue siendo el cociente de dos polinomios multivariados de grado uno en las relaciones de dentado condensadas, por lo que  $\theta$  también tiene una expresión como la dada por (63). Por ello, las expresiones (65) y (66) resultan aplicables si con el cambio de variables se consigue que o bien  $\Lambda = 1$  o bien  $\Lambda_{out} = 1$ . En el ejemplo que nos ocupa, se ha logrado hacer  $\Lambda_{out} = 1$  con el cambio de variables y por lo tanto se tendrá a partir de (66):

$$S'_{251} = \theta \Lambda_{251} - 1 = \theta (1 - Z_{263}) - 1 = (1 - W_{out}) (1 - Z_{263}) - 1$$

$$S'_{263} = \theta \Lambda_{251} - 1 = \theta (1 - Z_{251}) - 1 = (1 - W_{out}) (1 - Z_{251}) - 1$$

Finalmente es fácil encontrar la relación existente entre las variables  $S'_{251}$  y  $S'_{263}$  y las sensibilidades del tren original  $S_{251}$  y  $S_{263}$ . En concreto, se tiene:

$$S'_{nlm} = (Z_{nlm} / \theta) (\partial \theta / \partial Z_{nlm}) = [W_{out} / (W_{out} - 1)] S_{nlm} \quad (70)$$

Deshaciendo los cambios de variables se tiene finalmente que:

$$S'_{251} = [W_{out} / (W_{out} - 1)] S_{251} = (1 - W_{out}) (1 - Z_{263}) - 1$$

$$S'_{263} = [W_{out} / (W_{out} - 1)] S_{263} = (1 - W_{out}) (1 - Z_{251}) - 1$$

Despejando ahora los valores  $Z_{251}$  y  $Z_{263}$  de arriba y sustituyendo en la expresión (68), se tiene que:

$$W_{out}^2 + W_{out} (S_{251} + S_{263} + S_{251}S_{263} - 2) - S_{251} - S_{263} + 1 = 0$$

Es fácil comprobar que el cambio de variable dado por (69), equivale a tratar otra inversión del grafo. En concreto, si el tren original cuya relación de transmisión se desea encontrar es el correspondiente a la inversión (X,Y-Z), con el cambio de variable (69) la inversión cuya relación de transmisión es  $\theta$  es la (Z,Y-X). Por lo tanto en el ejemplo anterior  $\theta$  es la relación de transmisión del tren 6221 (1,4-2).

Como se ha comprobado, una expresión relativamente compleja como lo es la anterior se puede obtener de forma sencilla con el procedimiento expuesto anteriormente. Con este procedimiento se han obtenido las expresiones de la relación de transmisión en función de las sensibilidades independientes para todos los TEP de 4, 5 y 6 miembros. Para el tren de 5 miembros se han considerado como potencias de engranes independientes  $S_{15}$  y  $S_{35}$ . Para los trenes de 6 miembros se han elegido como potencias de engranes independientes  $S_{15}$  y  $S_{26}$ .

Esta elección se basa en la forma elegida para la numeración de los miembros de los TEP. En concreto, puede comprobarse que estos pares de engrane (15 y 26) están siempre presentes en todos los TEP de 6 miembros. La expresión resultante tiene la forma:  $F(S_k; W_{out}) = 0$ , donde  $S_k$  representa las sensibilidades independientes de cualquier TEP.

### 3.3. Propiedades de las curvas

En la tabla XIX se indican el tipo de curva a que dan lugar las expresiones de las relaciones de transmisión en función de las potencias de engrane independientes para cada TEP. La familia de curvas que resulta de parametrizar la expresión resultante por la relación de transmisión se denominará “mapa de potencia”.

Para los trenes de 6 miembros las curvas  $F(S_{15}, S_{26}; W_{out}) = 0$ , son rectas para la mayoría de ellos siendo en algunos casos paralelas a los ejes coordenados. Este último caso es el que se da en aquellos trenes en que la relación de transmisión puede expresarse como función de un número de sensibilidad menor al de sensibilidades independientes de la transmisión. En concreto, esto ocurre en los trenes 6221 (1,3-4), 6221 (3,4-1), 6222 (1,3-2) y 6222 (1,4-2). En el tren 6320 (1,4-3), las potencias de engrane  $S_{15}$  y  $S_{26}$  siempre son iguales por lo que cada relación de transmisión da lugar a un único valor para las potencias de engrane. Por el contrario, otros trenes como el 6221 (1,4-2), 6221 (1,2-4) y 6221 (2,4-1) conducen a una familia de hipérbolas.

Es importante destacar, que bajo estas expresiones están recogidas todas las soluciones constructivas de los trenes, es decir, las curvas obtenidas son independientes de la solución constructiva. Esto hace que este análisis de los TEP sea más general que otros métodos en los que debe partirse del TEP totalmente definido.

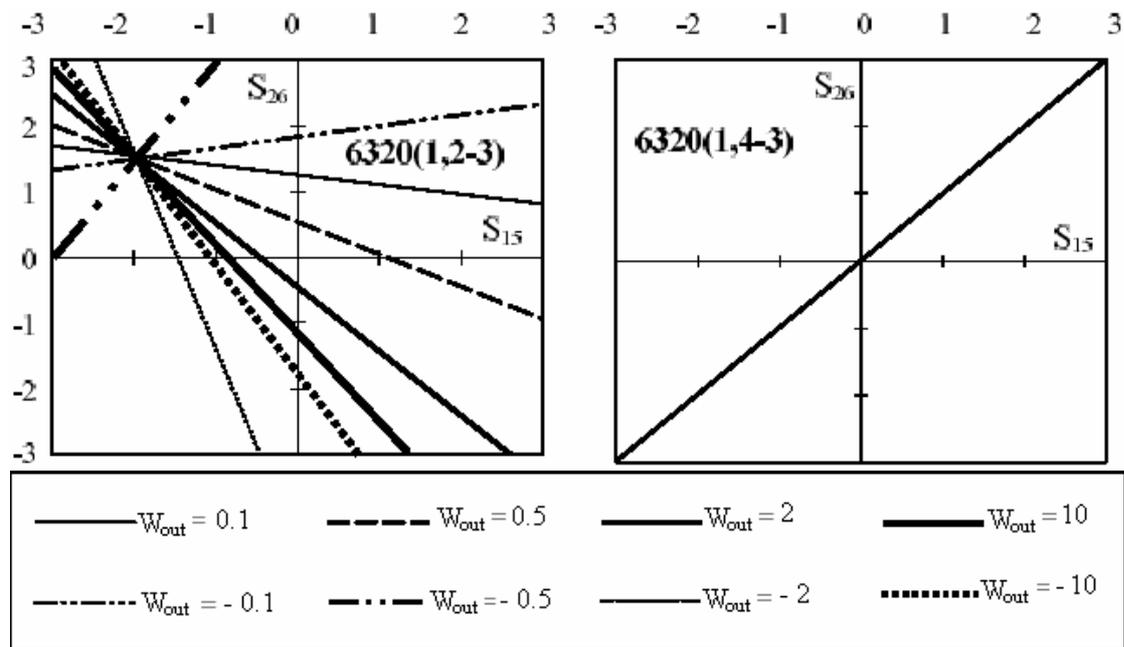
Tabla XIX. Tipos de curvas de los mapas de potencia de los TEP de seis miembros.

Grafo	Inversión	Tipo de curva
5310	1,3-2	Haz de rectas concurrentes
6320	1,4-2	Recta
	1,2-3	Haz de rectas concurrentes
	1,3-2	Haz de rectas concurrentes
6220	3,4-2	Haz de rectas concurrentes
	1,4-3	Haz de rectas concurrentes
6221	1,4-2	Familia de hipérbolas
	2,4-1	Familia de hipérbolas
	3,4-1	Haz de rectas paralelas
	1,2-4	Familia de hipérbolas
	1,3-4	Haz de rectas paralelas
	1,4-3	Haz de rectas paralelas
6222	1,4-2	Haz de rectas paralelas
	1,3-2	Haz de rectas paralelas
	1,2-3	Haz de rectas paralelas

Un resultado destacable es el hecho de que para todos los trenes de 6 miembros, la expresión de la relación de transmisión en función de las potencias de engrane independientes conducen a curvas cónicas en el plano de coordenadas  $S_{15} - S_{26}$ . En concreto las curvas  $F(S_{15}, S_{26}; W_{out}) = 0$ , parametrizadas por la relación de transmisión  $W_{out}$  son curvas cónicas.

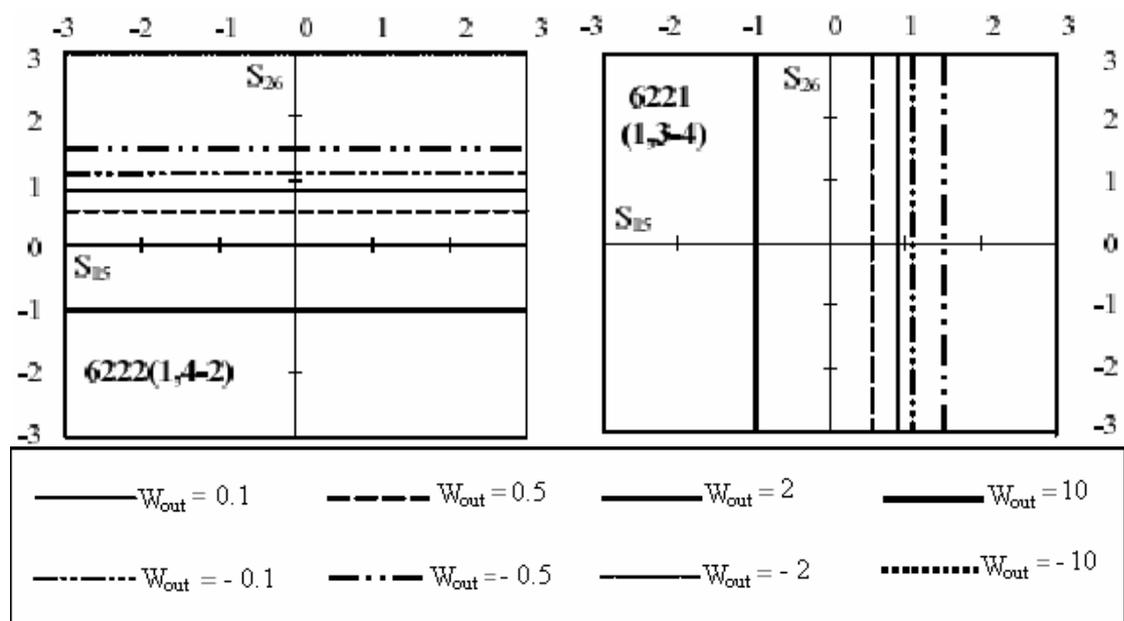
Aplicando el procedimiento expuesto en la sección anterior se han obtenido las relaciones de transmisión en función de las potencias de engrane para los trenes de 7 miembros. Para estos trenes el número de potencias de engrane independientes es 3. Para los trenes de 7 miembros, resulta relevante el hecho de que las curvas  $F(S_{15}, S_{26}; W_{out}) = 0$ , parametrizadas por la relación de transmisión  $W_{out}$  son curvas cuadráticas en el espacio de coordenadas definido por las tres potencias de engrane independientes.

Figura 21. Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo rectas.



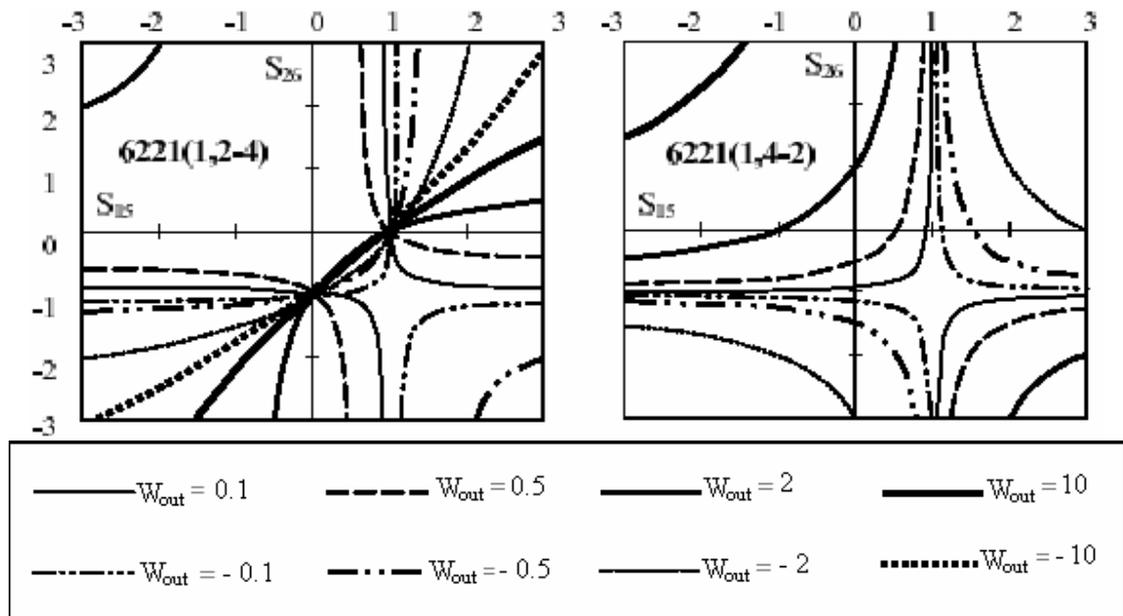
Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

Figura 22. Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo rectas paralelas.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

Figura 23. Mapas de potencia de los TEP de seis miembros tipo familia de hipérbolas.



Fuente. Elaboración propia, **software matemático**.

### 3.4. Trenes de mínima potencia de engrane

En una fase inicial en la que la realidad la configuración del tren está relativamente indeterminada, el objetivo de encontrar el tren de mayor rendimiento de entre todos los posibles, es demasiado ambicioso y a la vez poco práctico.

Partiendo del hecho de que las pérdidas por fricción en los pares de engrane son proporcionales a la potencia transmitida por cada uno de ellos, resulta razonable adoptar como criterio de selección de alternativas de diseño, el de minimizar la suma de las potencias de engrane (en valor absoluto). De acuerdo con este criterio, conocida la relación de transmisión, la mejor solución para lograr dicha relación sería aquel tren para el que la suma de las potencias de engrane fuera mínima.

Una vez seleccionado el tren, se determinarían las dimensiones y el número de dientes de sus engranajes y finalmente se podría estimar su rendimiento. Es de esperar que el hecho de minimizar la suma de la potencia de engrane conduzca a un rendimiento elevado. De hecho, de acuerdo con (49), si el rendimiento ordinario de los pares de engrane  $\eta_k = \eta_0$  fuera igual para todos los pares, el rendimiento global para todo el tren sería aproximadamente:

$$\eta \approx 1 - (1 - \eta_0) \sum_{k=1}^J |S_k| = 1 - (1 - \eta_0)S$$

Aunque los rendimientos ordinarios dependen del número de dientes de los engranajes de cada par de engrane y por lo tanto no son iguales para todos ellos, el criterio de minimizar  $S = \sum_{k=1}^J |S_k| = 1$  es en principio acertado y desde luego razonable. Al minimizar esta suma, es relativamente probable que los engranajes del tren resultante estén menos solicitados y por ello el diseño será mas compacto.

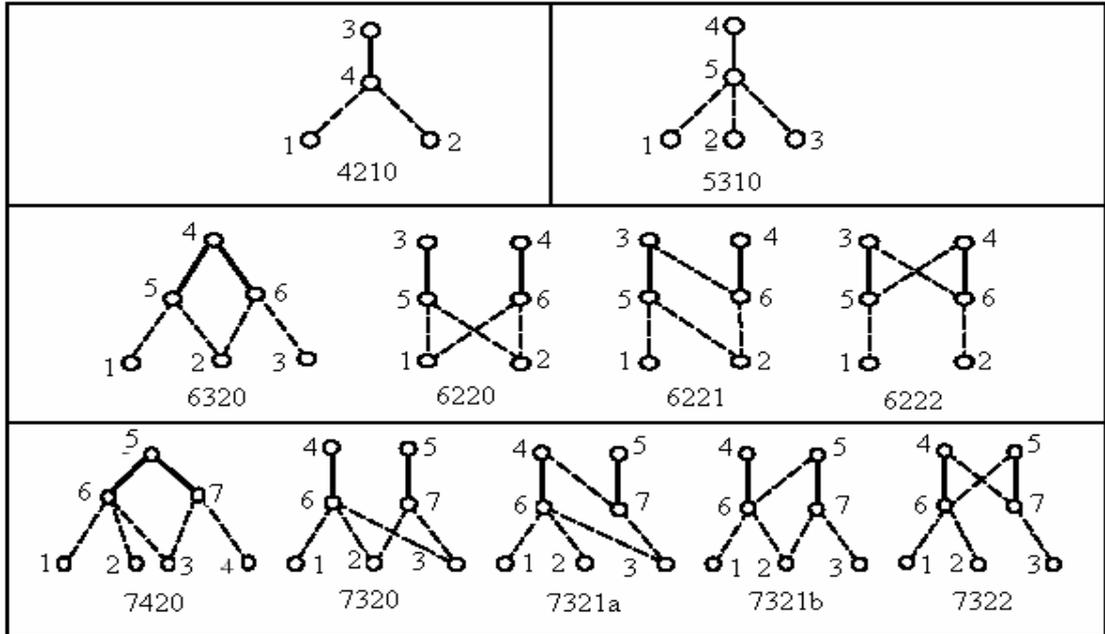
La suma de los valores absolutos de las potencias de engrane toma diversas expresiones particulares dependiendo del tipo de tren en cuestión. En particular para el tren de 5 miembros, esta suma es:

$$S = |S_{15}| + |S_{25}| + |S_{35}| = |S_{15}| + |S_{35}| + |S_{15} + S_{35}| \quad (71)$$

En los trenes de seis miembros y de acuerdo con la enumeración adoptada para los miembros de los TEP en este trabajo, y que se muestran en la figura 24, siempre se tiene que  $S_{15} + S_{r5} = 0$  y  $S_{26} + S_{s6} = 0$ . Los subíndices  $r$  y  $s$  dependen del tren concreto. Por ejemplo, para los trenes derivados de los grafos 6320,  $r = 2$  y  $s = 3$ . Por consiguiente se tiene:

$$S = |S_{15}| + |S_{r5}| + |S_{26}| + |S_{s6}| = 2 (|S_{15}| + |S_{26}|) \quad (72)$$

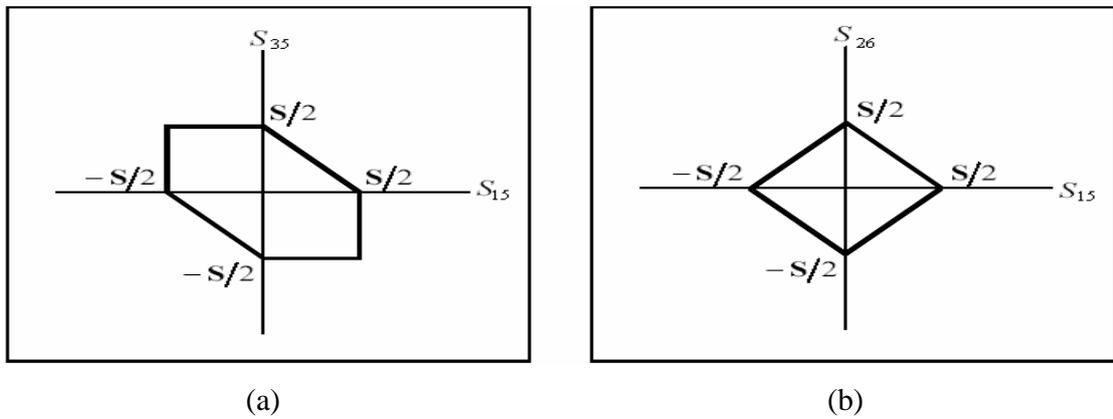
Figura 24. Grafos de los TEP de 4, 5, 6 y 7 miembros.



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

La figura 25 muestra las formas de las curvas resultantes de hacer constante la suma de los valores absolutos de las potencias de engrane para los Tep de 5 y 6 miembros.

Figura 25. Curvas resultantes de los TEP de 5 miembros (a) y TEP de 6 miembros (b).



Fuente: Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.**

En el caso de las transmisiones de 7 miembros, un planeta tiene tres pares de engrane, por lo tanto dos sensibilidades independientes. El otro planeta tiene dos pares de engrane y una sensibilidad independiente. En estas transmisiones existen tres potencias de engrane independientes. Por consiguiente, la relación entre la suma total de potencias de engrane y de sensibilidades independientes, teniendo en cuenta que en estas transmisiones siempre se tiene que  $S_{16} + S_{26} + S_{p6} = 0$  y  $S_{37} + S_{q7} = 0$ , es:

$$S = |S_{16}| + |S_{26}| + |S_{p6}| + |S_{37}| + |S_{q7}| = |S_{16}| + |S_{26}| + |S_{16}+S_{26}| + 2|S_{37}| \quad (73)$$

Teniendo en cuenta los signos que pueden adoptar las potencias de engrane, se puede determinar la superficie generada por las condiciones dadas de la expresión (73).

El procedimiento de selección del TEP de mínima potencia de engrane requiere conocer la dependencia funcional entre la relación de transmisión y las potencias de engrane. Esta dependencia se ha obtenido anteriormente y viene dada por la expresión (50). Para el tren de 5 miembros, dicha expresión toma la forma  $F(S_{15}, S_{35}; W_{out}) = 0$ , para los de seis miembros la forma  $F(S_{15}, S_{26}; W_{out}) = 0$  y para los de 7 miembros  $F(S_{16}, S_{26}, S_{37}; W_{out}) = 0$ . Las potencias de engrane anteriores son las potencias de engrane independientes. El problema de encontrar el TEP de mínima potencia total de engrane con la relación de transmisión deseada es:

$$\begin{aligned} \text{Min. } S &= \sum_{k=1}^J |S_k| = 1 \\ \text{Sujeto a } &F(S_k; W_{out}) = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Deducida la forma de las curvas de la figura 25 y conociendo las curvas resultantes de las expresiones  $F(S_k; W_{out}) = 0$ , la solución gráfica para la expresión (74) para un tren concreto, se reduce a determinar los valores de las sensibilidades independientes de la intersección de la curva  $F(S_k; W_{out}) = 0$  para la relación de transmisión deseada y la curva de menor valor de S. Por ejemplo, en la figura 26(a), se ha representado la curva  $F(S_{15}, S_{26}; W_{out}) = 0$  del tren 6221 (1,2-4) para una relación de transmisión de 5. Por ser un TEP de 6 miembros la curva resultante de hacer constante la suma de los valores absolutos de las potencias de engrane es la de la figura 25(b). Como puede observarse, existe un punto cuyas potencias de engrane hace mínimo el valor de S (representado por un círculo). Estos valores de las potencias de engrane determinan en este caso el mejor diseño del tren 6221 (1,2-4) para dicha relación de transmisión. En este caso, si se optase por el tren de terminado por los valores de las potencias de engrane de los otros dos puntos marcado (cuadrado y triángulo) los rendimientos de dichos TEP serían potencialmente inferiores por circular mas potencia de engrane. En concreto, la solución más desfavorable sería la del punto representado por el triángulo. Para la misma relación de transmisión se ha representado en la figura 26(b) las curvas correspondientes al tren 6221 (2,-41). Como puede comprobarse en este caso, el mejor diseño corresponde al tren con potencias de engrane muy superiores al tren anterior, por lo que su rendimiento sería con toda probabilidad considerablemente menor. En definitiva, este último caso, no debería contemplarse como alternativa de diseño para la relación de transmisión anterior.

Los mapas de potencias obtenidos ofrecen la posibilidad de distinguir de manera inmediata aquellos trenes en los que existen recirculación de la potencia de entrada. La recirculación de potencia se produce cuando la potencia que se transmite por un par de engrane es superior a la potencia de entrada. Para los trenes de 6 miembros la región que delimita la no recirculación de potencia es la dada por  $|S_{15}| \leq 1$  y  $|S_{26}| \leq 1$ , que es el interior del cuadrado mostrado en línea de trazo en la figura 26(a).

En el caso de los TEP de 5 miembros, la región en la que debe encontrarse los valores de las potencias de engrane independientes para que no se recircule potencia es la que se muestra en la figura 26(c), cuya forma geométrica coincide con la de las curvas para  $S = 2$ . Esta región queda definida al hacer:

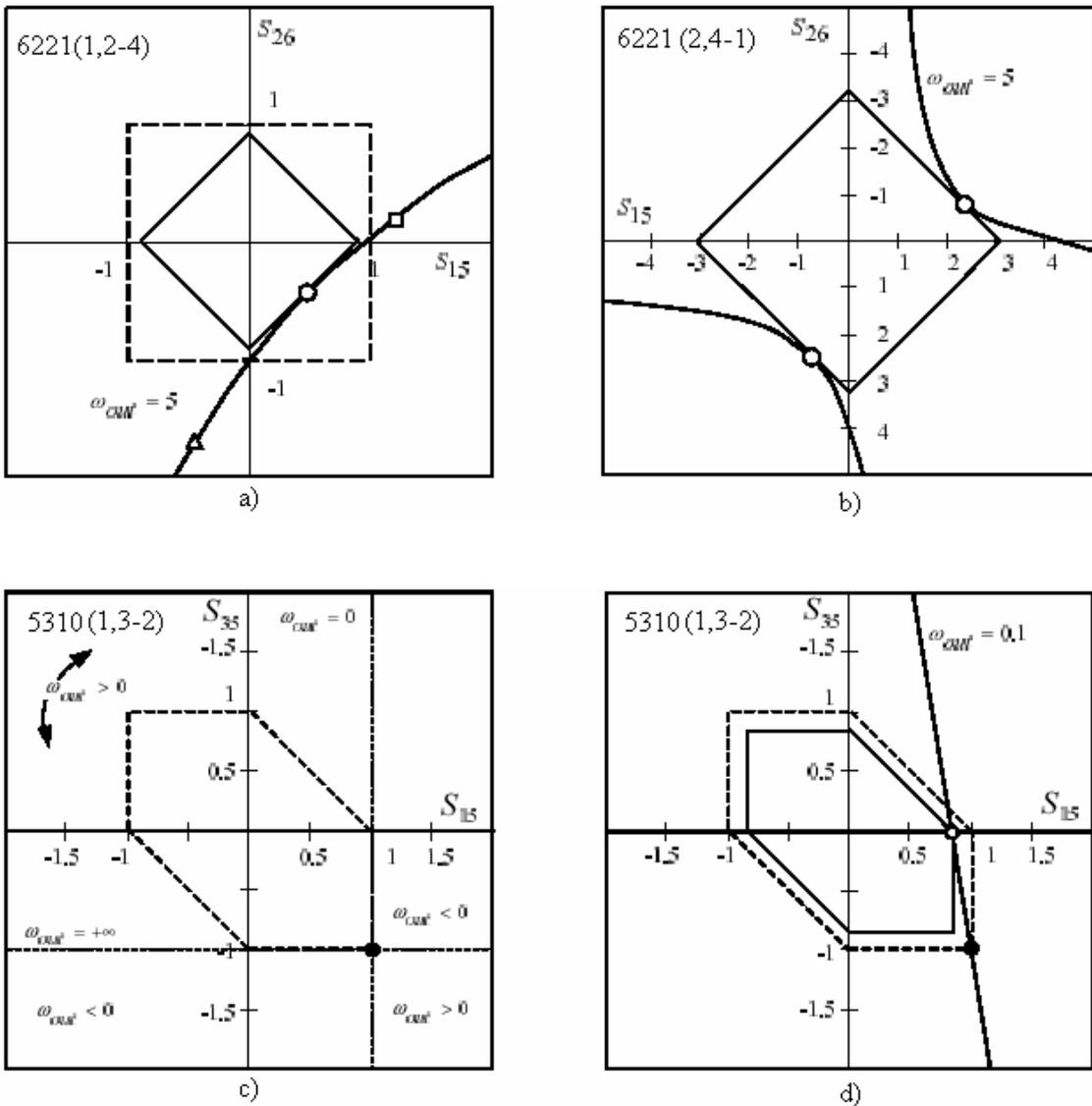
$$|S_{15}| \leq 1 \quad |S_{35}| \leq 1 \quad |S_{15} + S_{35}| \leq 1$$

Por otra parte, para el tren de cinco miembros 5310 (1,3-2) la expresión  $F(S_{15}, S_{35}; W_{out}) = 0$  es  $W_{out}(1 + S_{35}) + S_{15} - 1 = 0$ . Dicha expresión parametriza una familia de rectas que pasan siempre por el punto  $S_{15} = 1, S_{35} = -1$ . Teniendo en cuenta esto y conocida la región de no recirculación de potencia, puede determinarse que sólo para las relaciones de transmisión positivas las curvas  $F(S_{15}, S_{35}; W_{out}) = 0$  tienen puntos en el interior de dicha región, como se muestra en la figura 26(c). No obstante, esta condición es necesaria pero no suficiente. Por tanto, dicho TEP debería emplearse únicamente para estas relaciones de transmisión positivas.

Es fácil ver que para cualquier  $W_{out} > 0$ , el tren de menor suma de potencias de engrane siempre se encuentra en algún de los puntos de corte de la recta  $W_{out}(1+S_{35})+S_{15} - 1 = 0$  con los ejes de plano  $S_{15}, S_{35}$ . En concreto, de los dos puntos de corte de coordenadas  $(S_{15}, 0)$  y  $(0, S_{35})$ , el tren de menor potencia total de engrane sería el correspondiente a  $\min(|S_{15}|, |S_{35}|)$ . En la figura 26(d) se ha representado la curva correspondiente a  $W_{out} = 0,1$ . El punto de corte con el eje  $S_{15}$  determina el tren de menor  $S$ . se ha representado también en la línea continua la curva de los puntos de igual potencia total de engrane. No obstante, los trenes en los en los que se anula alguna de las potencias de engrane no son factibles ya que exigirían relaciones de dentado imposibles de alcanzar. Por ello en la practica, los diseños que deben elegirse son aquellos cuyas potencias de engrane independientes estén lo mas próximas al punto teóricamente óptimo. La cercanía al punto óptimo dependerá de los valores límite que se puedan alcanzar para las relaciones de dentado.

Por último, es importante observar que la relación de la expresión (74) es independiente de la solución constructiva concreta que se adopte para el tren.

Figura 26. Análisis de los mapas de potencia.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

### 3.5. Resultado para los trenes de engranes planetarios de seis miembros

En la sección anterior se ha explicado cómo pueden aplicarse los mapas de potencia a la selección de un modelo de TEP. Se ha visto que los mapas de potencia son independientes de la solución constructiva adoptada para el tren. En esta sección se analizan los mapas de potencias de los TEP de seis miembros cuando se consideran tan solo soluciones constructivas del tipo planeta simple. En estas soluciones constructivas, los dos planetas del tren se construyen con un solo engranaje lo que obliga a que un par de engrane sea interno y el otro sea externo. Obviamente, la adopción de esta solución reduce el número de engranajes y la complejidad del diseño. Se comprueba que para cada tren existen cuatro soluciones constructivas diferentes con los dos planetas simples.

Todos los parámetros cinemáticos y dinámicos de la transmisión dependen de los valores de las relaciones de dentado ( $Z_k$ ). Teóricamente las relaciones de dentado podrían adoptar cualquier valor, pero en la realidad y como ya se analizó en el capítulo anterior su valor está limitado principalmente por razones de tipo técnico que dificulta el montaje de engranajes más allá de determinados valores límite de las relaciones de dentado. La norma AGMA 6123- A88 señala que es más rentable aumentar el número de etapas cuando la relación de dentado exterior exceda de 1:6. Respetando estos valores, se consiguen diseños de transmisiones más pequeñas, ligeras y baratas. Bajo estas condiciones la relación de dentado es  $Z_{12} = 0,1547$  y por lo tanto  $Z_{21} = 6,464$ . Por consiguiente y con el fin de tomar un criterio en este trabajo se establecerán como límites de la relación de dentado exterior 0,2 y 5, o sea  $0,2 \leq Z_k \leq 5$ , para no estar tan próximos a la situación de tangencia. Considerando para las relaciones de dentado externas el intervalo dado anteriormente se deduce de  $Z_{32} = -2 - Z_{12}$  que los valores límites para las relaciones de dentado interior serán -2,2 y -7, es decir:  $-7 \leq Z_k \leq -2,2$ . Determinados los rangos de relación de dentado, pueden establecerse los valores que toman las relaciones de dentado condensadas, haciendo uso de la expresión (53).

Para determinar el rango de valores posibles para  $Z_{nlm}$  hay que tener en cuenta que el planeta  $l$  es común para los pares de engrane  $nl$  y  $ml$  y por lo tanto la ecuación del tipo  $Z_{32} = -2 - Z_{12}$  puede tomar dos formas dependiendo de que par de engrane sea el externo. En concreto, se tendrá o bien  $Z_{nl} = -2 - Z_{ml}$  o bien  $Z_{ml} = -2 - Z_{nl}$ . La tabla XX muestra los valores límites que pueden tomar las relaciones de dentado originales y los valores resultantes para la relación condensada. Se obtiene que el rango posible de valores para  $Z_{nlm}$  es la unión de los intervalos  $(-11, -14)$  y  $(-0.714285, -0.090909)$ . el producto cartesiano de estos productos determina las regiones validas para las relaciones de dentado condensadas para los trenes de seis miembros con planetas simples.

Realizando un cambio de plano de las regiones definidas por las relaciones de dentado condensadas validas para el diseño de un TEP, al plano de las sensibilidades independientes, se obtienen regiones en las que las curvas  $F(S_{15}, S_{35}; W_{out}) = 0$  tiene validez. Por ejemplo par el TEP 6221 (1,2-4), en el cambio de variables de las relaciones de dentado condensadas a las potencias de engrane independientes, expresiones (61) y (62) hay que tomar en cuenta que es independiente del tipo de tren.

Cada una de las regiones definidas en el plano  $Z_{nlm}$  coincide con una de las cuatro soluciones constructivas que tienen un tren de seis miembros con planeta simple.

Tabla XX. Valores extremos de la relación de dentado condensada.

$Z_{nl}$	$Z_{ml}$	$Z_{nlm}$
0.2	-2.2	-0.090909
5	-7	-0.714285
-2.2	0.2	-11
-7	5	-14

Es sabido que la expresión analítica del rendimiento depende del signo de las potencias de engrane, por lo que si éstas no cambian de signo, la expresión del rendimiento no variará. Al respecto cabe destacar el análisis de los mapas de potencia para los trenes de seis miembros con planetas simples que nos permite llegar a la conclusión de que para la mayoría de estos trenes, la potencia de engrane no cambia de signo cuando las relaciones de dentado se mantienen en los rangos establecidos de validez.

### **3.6. Validez de los mapas de potencia**

La aplicabilidad de los mapas de potencia a la selección de los TEP con rendimientos adecuados parte de la suposición de que el rendimiento es inversamente proporcional a la suma de las potencias de engrane en valor absoluto. La expresión aproximada del rendimiento en función de la suma de las potencias de engrane es (49). Como dicha expresión es aproximada, cabe preguntarse hasta que punto influye tal aproximación en la validez de los mapas de potencia como procedimiento para seleccionar TEP de rendimiento adecuado. Para responder a esta pregunta, se ha estudiado un error cometido en el cálculo del rendimiento con la expresión aproximada (49) respecto al valor dado por la expresión analítica propia de cada tren. Este estudio se ha realizado para todas las transmisiones de seis miembros y para todas sus soluciones contractivas, considerando valores usuales del rendimiento ordinario. El resultado indica que independientemente del tren analizado, el valor del rendimiento es prácticamente igual para los trenes con igual valor de la suma de sus sensibilidades. Además puede comprobarse que en cualquier caso, el error máximo cometido es inferior al 2.5% y que tales errores se alcanzan tan solo para valores elevados de las potencias de engrane. Es por ello que los mapas de potencias son perfectamente aplicables para seleccionar un modelo de TEP de entre diversas alternativas.

Los mapas de potencias permiten aplicar también otros criterios para determinar las relaciones de dentado del tren en base a la optimización de algún otro parámetro distinto al rendimiento. Por ejemplo, la distribución de las potencias en los distintos pares de engrane. En este caso, la localización del punto en el plano determina directamente el valor de las sensibilidades independientes y por lo tanto las potencias de engrane de todos los pares de la transmisión.

### **3.7. Diseños alternativos al tren de engranajes planetarios de cuatro miembros.**

El método expuesto nos permite por lo tanto analizar un TEP y obtener una primera aproximación bastante exacta de su rendimiento para una relación de transmisión concreta. El principal objetivo que persigue dicho método es responder a la pregunta de si existe algún tren de más de cuatro miembros que puede conseguir grandes reducciones o multiplicaciones de la velocidad con un elevado rendimiento. Podemos preguntarnos si existe un tren de seis miembros capaz de superar al tren compuesto por dos etapas en serie del tren de cuatro miembros, tanto en una mayor reducción o multiplicación de la velocidad como en el rendimiento global de la transmisión.

La transmisión compuesta por dos etapas del tren de cuatro miembros, a la que se hará referencia a partir de ahora como la transmisión multietapa, tiene cuatro pares de engrane. Es por ello, que la comparación deba realizarse con los TEP de seis miembros. Concretamente el tren 6221 (1,4-2) es el resultante de conectar en serie dos trenes de cuatro miembros del tipo 4210 (1,3-2). La solución constructiva basada en la conexión en serie de varios trenes 4210 (1,3-2) es la que posee la mayoría de los reductores planetarios industriales. Por ello, el tren 6221 (1,4-2), que equivale a dos etapas del 4210 (1,3-2), servirá como patrón para establecer comparaciones con el resto de trenes de seis miembros.

Para determinar los trenes de seis miembros capaces de alcanzar elevadas relaciones de transmisión deben analizarse sus mapas de potencias, además debe representarse en ellos las regiones en las que dichas curvas tienen validez. De este modo los TEP cuyos mapas de potencias sean válidos en las proximidades del origen para elevadas reducciones y multiplicaciones de la velocidad constituyen el grupo de TEP que deben ser analizados. Entonces de este análisis que únicamente los trenes 6221 (1,4-2), 6221 (1,2-4), 6221 (1,3-4) y 6222 (1,4-2) cumplen con dichos requisitos. Además debemos eliminar el tren 6221 (1,4-2) ya que es el tren objeto de comparación.

En la figura 23 correspondiente al tren 6221 (1,2-4) puede observarse que para los valores de  $W_{out} > 1$  y  $W_{out} < 0$ , los tramos de las curvas resultantes comprendidos entre los puntos de intersección con los ejes  $S_{15}$  y  $S_{26}$  se encuentran en el cuadrante  $0 < S_{15} < 1$  y  $-1 < S_{26} < 0$ . Por consiguiente, para el rango de relaciones de transmisión  $W_{out} > 1$  y  $W_{out} < 0$ , este tren no recircula potencia y en principio cabe esperar un elevado rendimiento.

Para el caso de  $W_{out} > 1$  existe un punto que determina la transmisión de mínima potencia total de engrane, como se mostró en la figura 26(a). Dicho punto verifica que  $S_{15} = -S_{26}$ . Por tanto, el diseño de mínima potencia de engrane del TEP 6221 (1,2-4) para  $W_{out} > 1$  requiere que todas las potencias de engrane sean iguales en valor absoluto. Dicho tren puede compararse fácilmente con el tren multietapa, pues en éste siempre todas las potencias de engrane son también iguales en valor absoluto, por tratarse de una conexión en serie de trenes de cuatro miembros. Por ello, puede establecerse una comparación definiendo el ratio  $\lambda_+$  como el cociente entre la potencia total de engrane de ambos trenes, es decir:

$$\lambda_+ = \frac{(|S_{15}| + |S_{26}|)_{6221(1,2-4)}}{(|S_{15}| + |S_{26}|)_{6221(1,4-2)}} = \frac{|S_{15}|_{6221(1,2-4)}}{|S_{15}|_{6221(1,4-2)}} \quad (75)$$

De este modo,  $\lambda^+$  es menor que la unidad, implicará que la suma de las potencias de engrane en el TEP 6221 (1,2-4) será menor que la del tren multietapa y probablemente su rendimiento será mayor para las relaciones de transmisión que lo cumplan.

El ratio  $\lambda^+$  tendrá sentido a igualdad de las relaciones de transmisión, por lo que debemos encontrar su expresión en función de ésta. Para el tren 6221 (1,2-4) en el punto de mínima potencia total de engrane se tiene:

$$W_{out} = \frac{(1 - S_{15})(1 + S_{26})}{1 - S_{15} + S_{26}} = \frac{(1 - S_{15})^2}{1 - 2S_{15}} = W_{out}|_{S_{min}}$$

Entonces tenemos que:

$$|S_{15}| = 1 - W_{out} + \sqrt{W_{out}(W_{out} - 1)} \quad (76)$$

Del mismo modo, para el tren multietapa se tiene:

$$W_{out} = (1 - S_{15})(1 + S_{26}) = (1 - S_{15})^2 = W_{out}|_{S_{min}}$$

Por lo que:

$$|S_{15}| = 1 - \sqrt{W_{out}} \quad (77)$$

Para este tren, debemos tener en cuenta que la inversión presenta mayor rendimiento como reductora que como multiplicadora, por lo tanto para establecer la comparación debe elegirse el tren inverso, esto es el 6221(4,1-2), cuya potencia de engrane será:

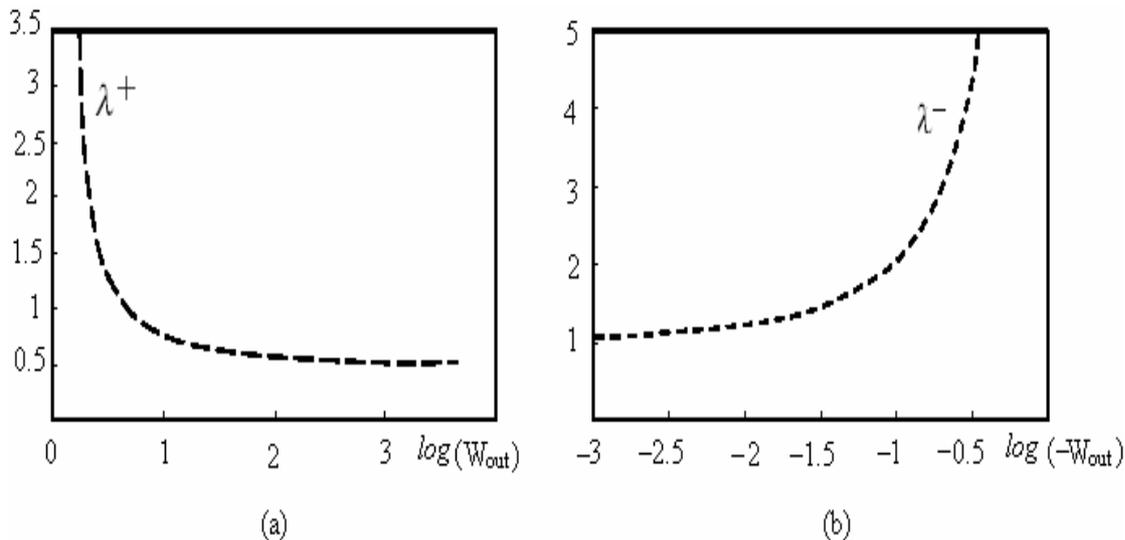
$$|S_{15}| = 1 - \sqrt{\frac{1}{W_{out}}} \quad (78)$$

Sustituyendo (76) y (78) en (75), se tiene:

$$\lambda^+ = \frac{1 - W_{out} + \sqrt{W_{out} (W_{out} - 1)}}{1 - \sqrt{\frac{1}{W_{out}}}}$$

En la figura 27(a) se ha representado el valor de  $\lambda^+$  frente a  $\log(W_{out})$ . De la curva se deduce que para  $W_{out} > 3,3829$ ,  $\lambda^+ < 1$  y por lo tanto el rendimiento de la transmisión 6221 (1,2-4) debería ser mayor. Puede comprobarse que cuando mayor es  $W_{out}$  menor es  $\lambda^+$ , que representa un valor asintótico en  $\lambda^+ = 0,5$ . En otras palabras, que podría obtenerse una transmisión con aproximadamente la mitad de la potencia total de engrane para multiplicaciones de la velocidad de entrada elevadas, lo que implicaría sin duda un mayor rendimiento. No obstante, con una solo etapa del tren de cuatro miembros se puede llegar hasta  $W_{out} = 12$ , por lo que la comparación solo tiene sentido para  $W_{out} > 12$ .

Figura 27. Valores de  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$ .



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

Empleando planetas dobles no puede llegarse mas allá  $W_{out} = 10$ , de modo que para el resultado tan favorable que muestra en un primer análisis la figura 27(a) no existe solución constructiva válida.

Para valores de  $W_{out} < -1$ , aunque el rendimiento sería algo inferior por estar las curvas del mapa de potencias para estas relaciones de transmisión mas alejadas del origen, también podrían obtenerse rendimientos elevados. Sin embargo, vuelve a suceder lo mismo que anteriormente y tan solo puede llegarse a un valor de  $W_{out} = -5$  empleando planetas simples. Incluso permitiendo planetas dobles no pueden obtenerse relaciones de transmisión mucho mayores. Por lo que dicha transmisión no es válida para este intervalo de relaciones de transmisión.

En el intervalo  $-1 < W_{out} < 0$  aunque el punto de mínima potencia de engrane total sería el definido por el corte con los ejes, puede considerarse como punto aceptable de diseño el definido por el punto en que  $S_{15} = -S_{26}$ . De este modo y haciendo nuevamente uso de las expresiones  $F(S_k; W_{out}) = 0$ , la relación entre las potencias de engrane vendría dada por:

$$\lambda^- = \frac{(|S_{15}| + |S_{26}|)_{6221(1,2-4)}}{(|S_{15}| + |S_{26}|)_{6221(1,4-2)}} = \frac{1 - W_{out} + \sqrt{W_{out}(W_{out} - 1)}}{1 - \sqrt{\frac{1}{W_{out}}}} \quad (79)$$

En la figura 27(b) se ha representado el valor  $\lambda^-$  frente a  $\log(-W_{out})$ . Se deduce que para elevadas relaciones  $\lambda^-$  es prácticamente la unidad. El rendimiento será aproximadamente igual al del tren multietapa. Se puede llegar a una reducción de la velocidad muy aproximada con igual rendimiento. Por ejemplo, la transmisión multietapa con planetas simples puede alcanzar una reducción máxima de  $W_{out} = -1/144$  con un rendimiento de la transmisión de 0.911, mientras que con esta transmisión se llega a  $W_{out} = -1/143$  con el mismo rendimiento.

Si se construyen ambas transmisiones con planetas dobles los valores son en estos casos  $W_{out} = -1/576$  y  $W_{out} = -1/575$  respectivamente, con un rendimiento en ambas transmisiones de 0,907. Estos valores se han calculado con la expresión analítica del rendimiento, para un rendimiento ordinario  $\eta_0 = 0,975$  en el TEP 6221 (1,2-4) esta reducción máxima se consigue con  $Z_{15} > 0$  y  $Z_{26} < 0$ .

Los TEP 6221 (1,3-4) y 6222 (1,4-2) también permiten obtener una reducción aproximada a la del tren de dos etapas, aunque un poco inferior al caso anterior, puede obtenerse  $W_{out} = -1/134$  con planetas simples con un rendimiento de la transmisión de 0,907. Del mismo modo, si los engranajes se construyen con planetas compuestos en estos dos TEP, los resultados tampoco llegan a superar a los del tren multietapa, que dando ligeramente por debajo.

En definitiva, se ha demostrado que ningún tren de seis miembros permite obtener mayores reducciones o multiplicaciones de la velocidad de entrada respecto del TEP compuesto por el de dos etapas del tren de cuatro miembros, ni tampoco mejorar el rendimiento. Cabe destacar que de todos los TEP analizados el 6221 (1,2-4) ofrece los mejores resultados. Además, los trenes 6221 (1,2-4) y 6221 (1,3-4) presentan la particularidad de tener un brazo fijo, algo que constructivamente hablando puede ser interesantes para ciertas aplicaciones.

Lógicamente, si lo que se desea es multiplicar la velocidad de entrada, los TEP que deben emplearse son los inversos de los anteriores, esto es: 6221 (2,1-4), 6221 (3,1-4) y 6222 (4,1-2). Con el TEP de cinco miembros, no se consiguen relaciones de transmisión elevadas y además el rendimiento es bajo, por lo que se ha omitido un análisis mas detallado.

## CONCLUSIONES

1. Con la transmisión de cuatro miembros se puede conseguirse una reducción máxima de  $1/23,5$  y con los trenes de cinco miembros la desmultiplicación puede conseguirse hasta  $1/540$ .
2. Las principales restricciones de las estructuras para que un tren de engranajes planetarios pueda ser útil son las funcionales y las constructivas.
3. La expresión del rendimiento de un tren de engranajes planetarios depende de las relaciones de dentado y también de cuáles sean los miembros conductores del tren.
4. Los mapas de potencia permiten determinar fácilmente las transmisiones que presentan mayor rendimiento para una relación de transmisión concreta.



## **RECOMENDACIONES**

1. Hay que tener en cuenta que no todos los rangos de multiplicación de velocidad son el inverso de la reducción de velocidad.
2. En algunos casos específicos, pueden existir restricciones particulares en el diseño, como el peso y el volumen.
3. Tener sumo cuidado de que las aproximaciones del rendimiento basándose únicamente en las potencias de engrane de los distintos circuito no exceda el 5% de error.
4. Los mapas de potencia de los trenes 6221 (1,2-4), 6221 (1,3-4) y 6222 (1,4-2) constituyen una alternativa bastante aceptable.



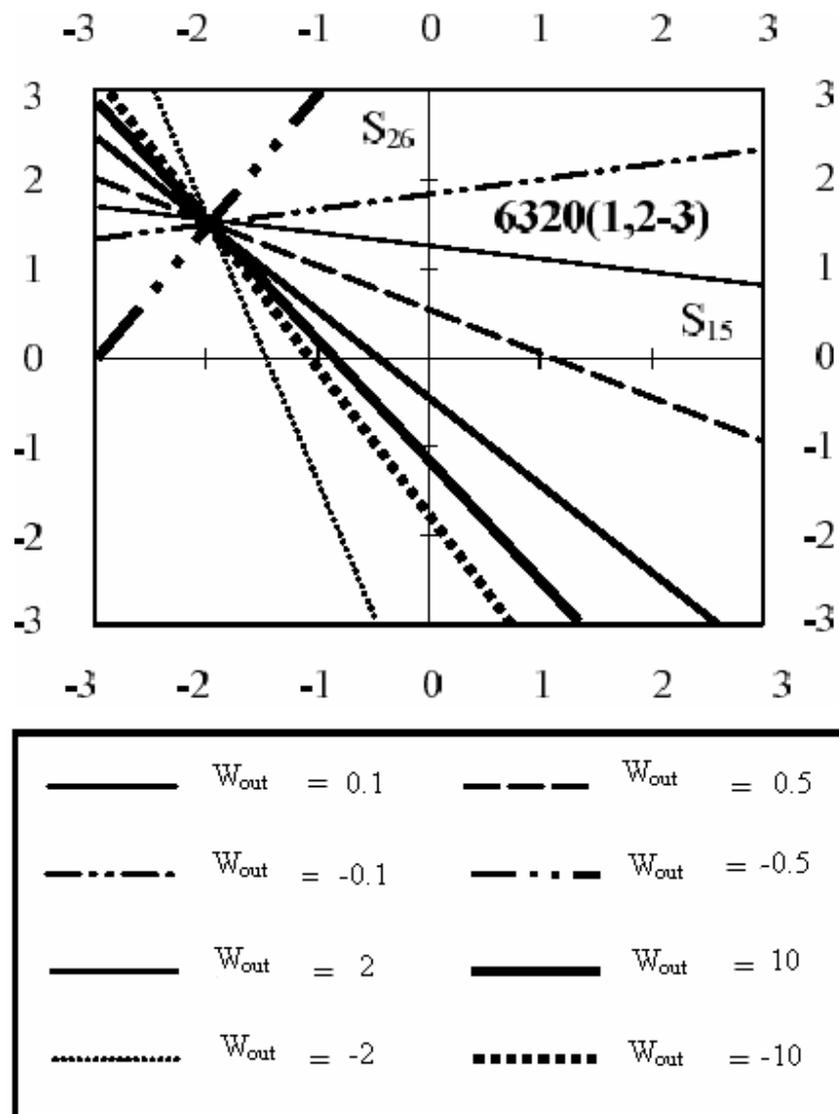
## BIBLIOGRAFÍA

1. Buchabaum, F., Freudenstein, F. **Cadenas cinemáticas y otros mecanismos.** (s.l.): (s.e.), 1970. 357 – 392pp.
2. Del Castillo, J.M. **Restricciones en trenes de engranajes planetarios.** (s.l.): (s.e.) 2000. 3 – 15pp.
3. Del Castillo, J.M. **Análisis de las expresiones de la eficiencia de los trenes de engranajes planetario.** (s.l.): (s.e.), 2002. 197 – 214pp.
4. Hus, C.H., Lam, K.Y. **Análisis y representación gráfica de los trenes de engranajes planetarios.** (s.l.): (s.e.), 1992. 196 – 200.
5. Hus, C.H. **Análisis de engranajes redundantes en trenes de engranajes planetarios.** (s.l.): (s.e.), 1994. 402 – 415pp.
6. Mabie, Hamilton. Ocvirk, Fred. **Mecanismos y dinámica de maquinaria.** México: Limusa, 1998.
7. Shigley, Joseph Edgar. Uiker, John Joseph. **Diseño en ingeniería mecánica.** México: Editorial Mc Graw Hill, 1990.
8. Shigley, Joseph Edgar. Uiker, John Joseph. **Teoría de maquinas y mecanismos.** Mexico: Editorial Mc Graw Hill, 1988.



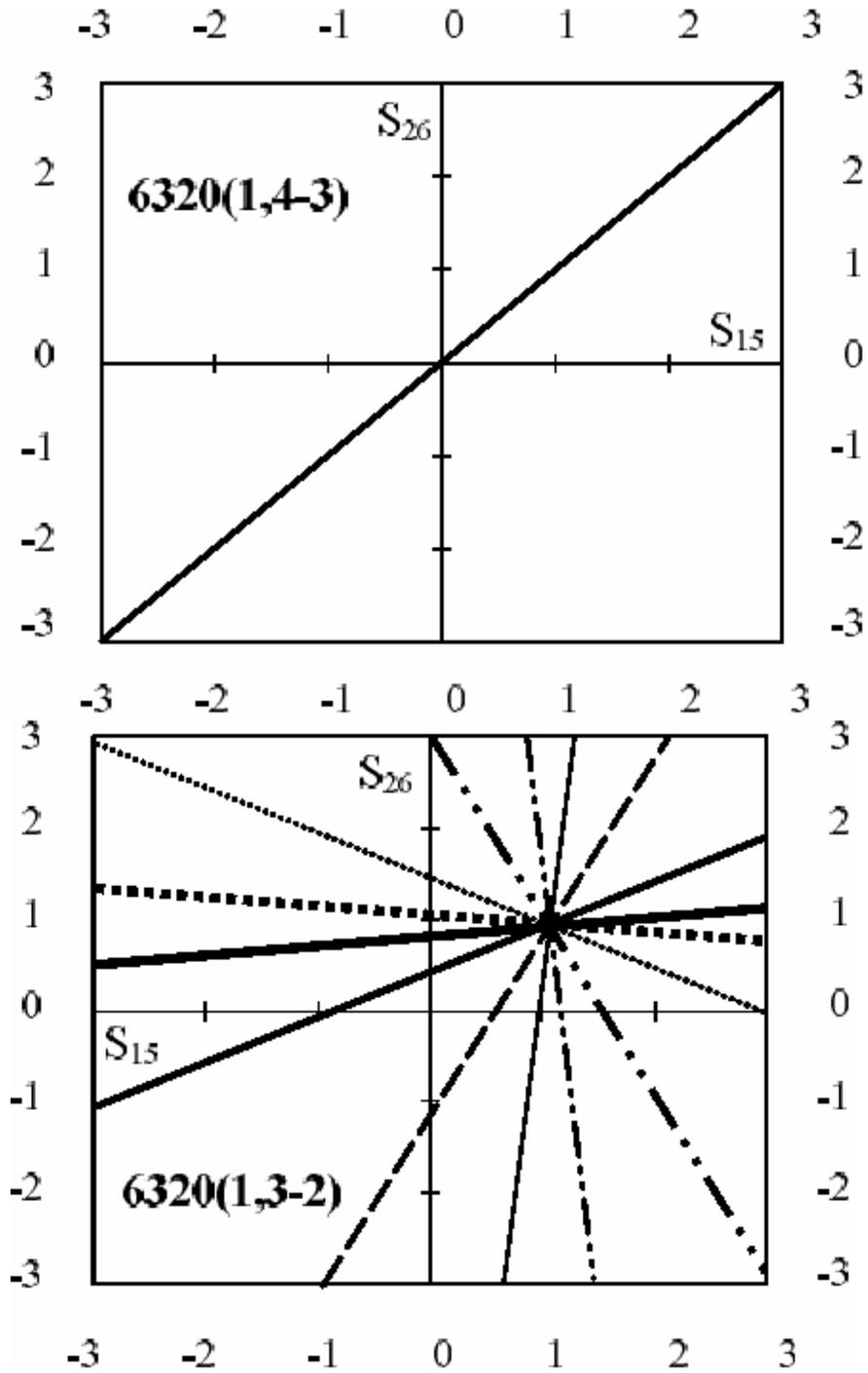
## APÉNDICE

Figura 28. Mapas de potencia I.



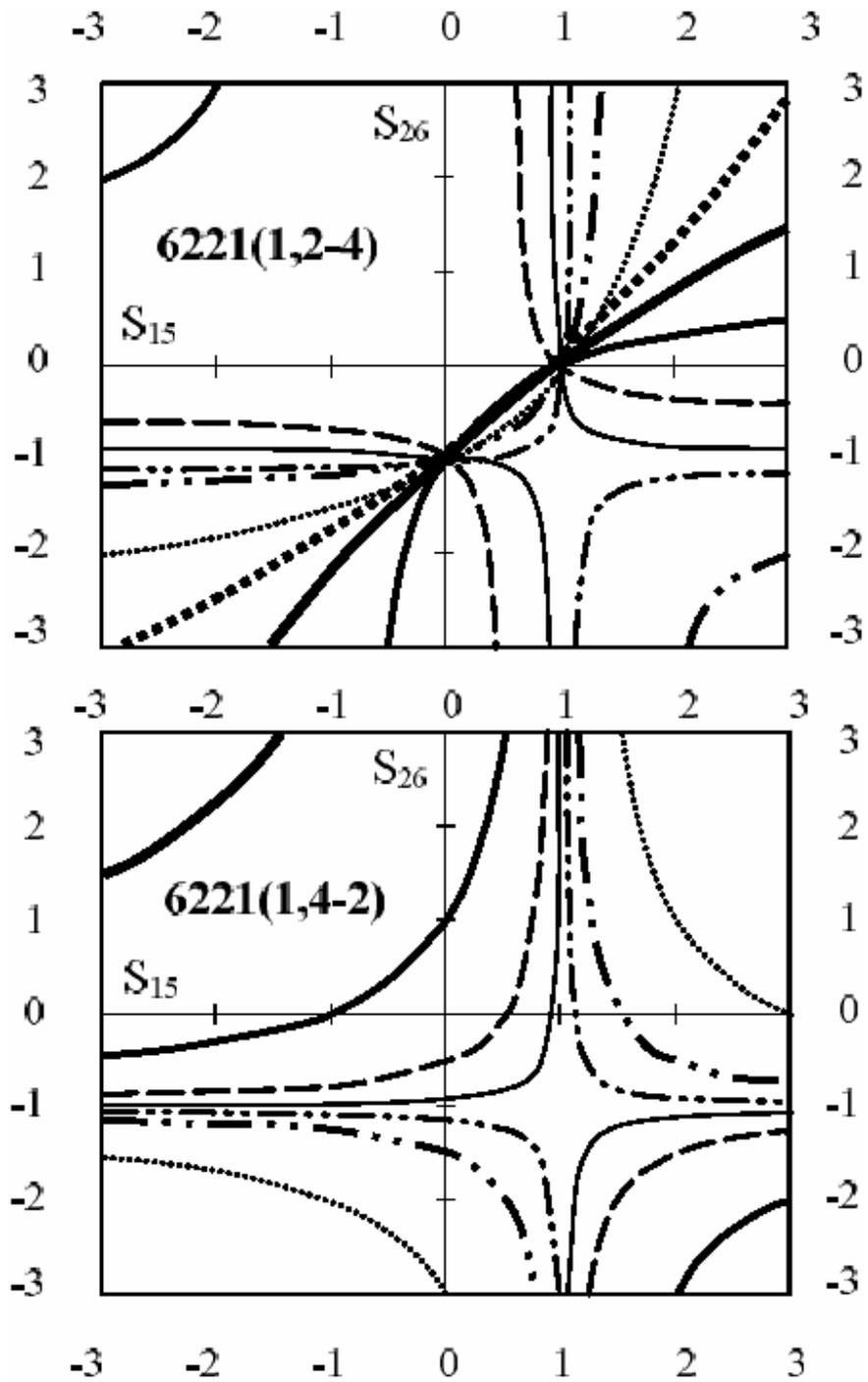
Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.

Figura 29. Mapas de potencia II.



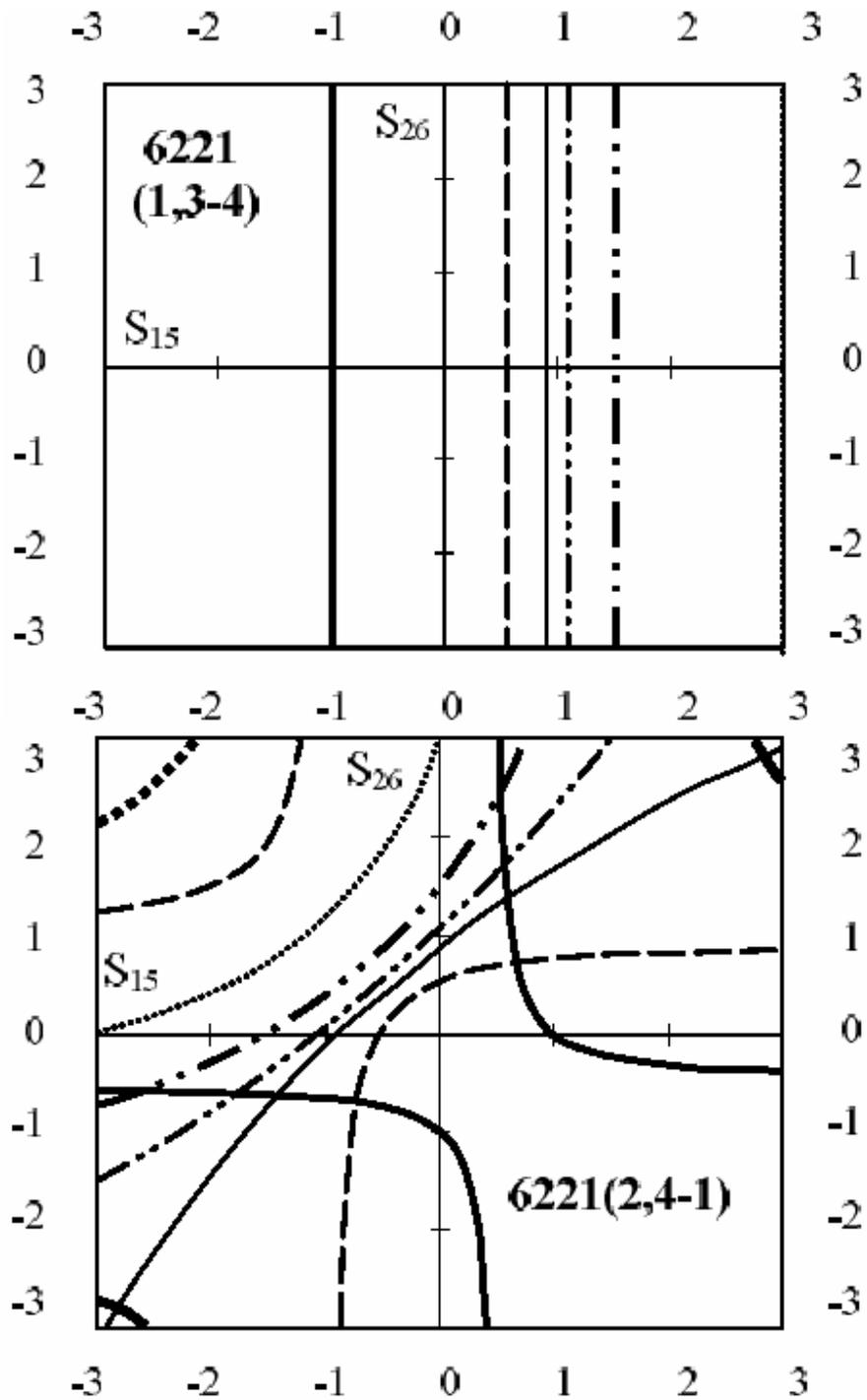
Fuente: Elaboración propia, software matemático.

Figura 30. Mapas de potencia III.



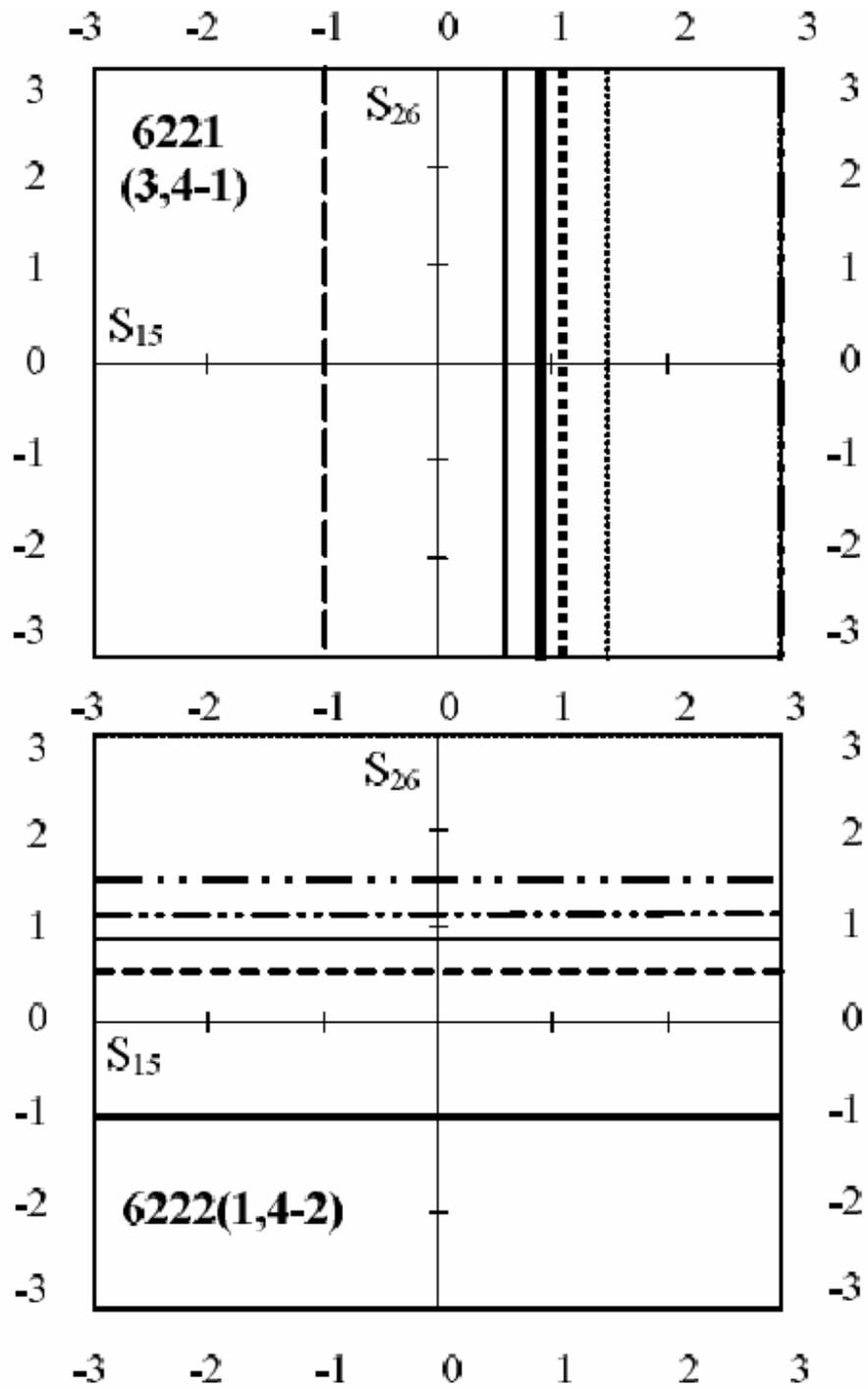
Fuente: Elaboración propia, software matemático.

Figura 31. Mapas de potencia IV.



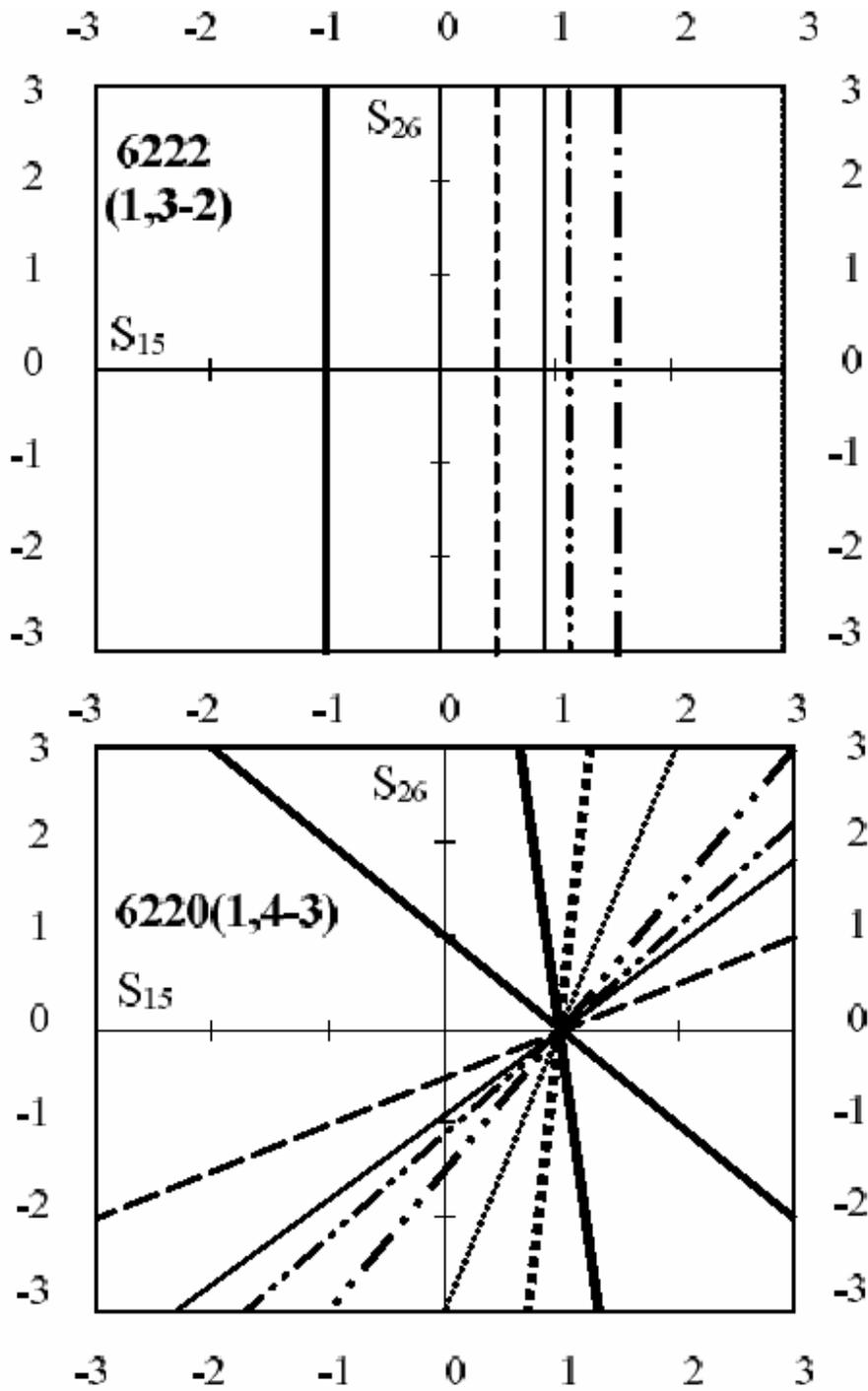
Fuente: Elaboración propia, software matemático.

Figura 32. Mapas de potencia V.



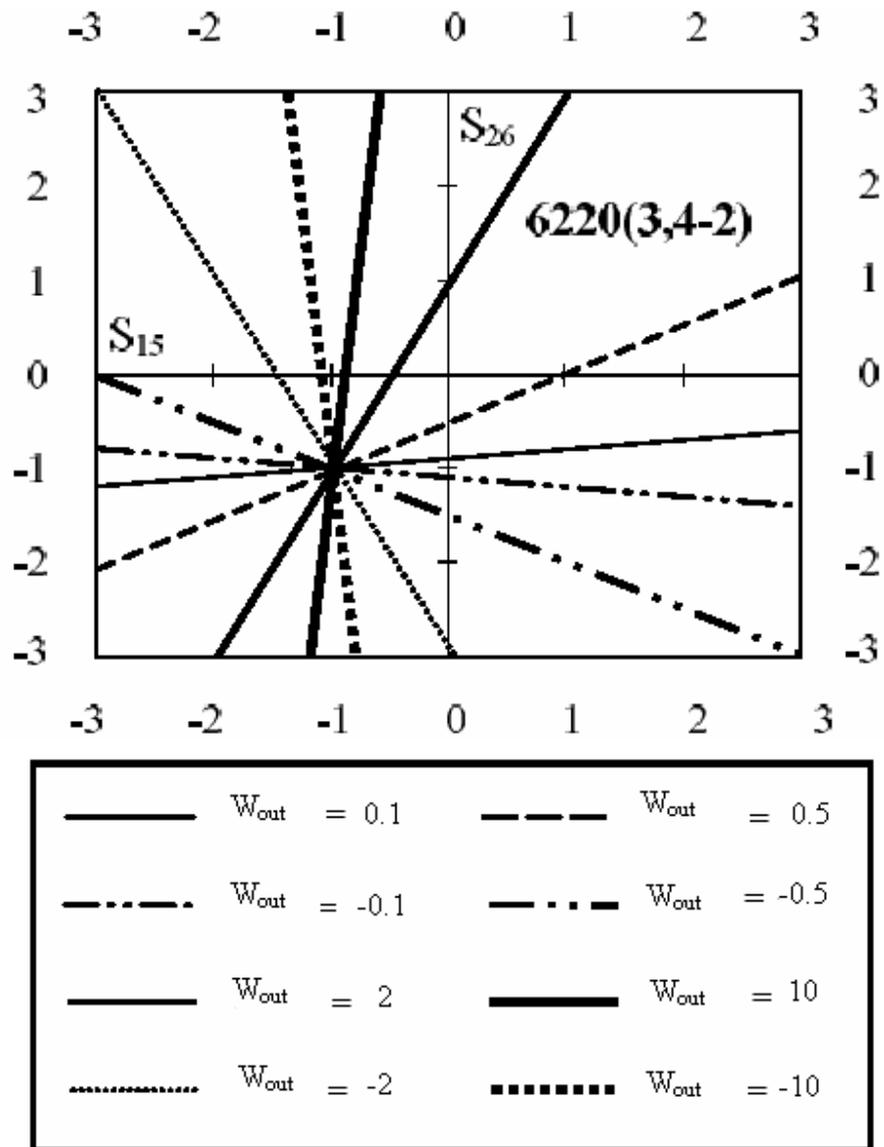
Fuente: Elaboración propia, software matemático.

Figura 33. Mapas de potencia VI.



Fuente: Elaboración propia, software matemático.

Figura 34. Mapas de potencia VII.



Fuente: Elaboración propia, **software matemático**.