



**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA INDUSTRIAL**

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LÍNEAS DE ESPERA EN EL  
PROCESO DE CARGA A LOS VENDEDORES  
EN EL SEGMENTO A DETALLE EN UNA EMPRESA  
COMERCIALIZADORA DE BOTANAS**

**ERICK ANTONIO GALINDO MANCHINEL**

**Asesor: Ing. Jorge Fuentes Tintí**

**Guatemala, octubre de 2003**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LÍNEAS DE ESPERA EN EL  
PROCESO DE CARGA A LOS VENEDORES  
EN EL SEGMENTO A DETALLE EN UNA EMPRESA  
COMERCIALIZADORA DE BOTANAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**ERICK ANTONIO GALINDO MANCHINEL**  
ASESORADO POR ING. JORGE FUENTES TINTÍ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**INGENIERO INDUSTRIAL**  
GUATEMALA, OCTUBRE DE 2003

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA



### **NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
VOCAL I	Ing. Murphy Olympo Paiz Rezinós
VOCAL II	Lic. Amahán Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing. Julio David Galicia Zelada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco

### **TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Herbert René Miranda Barrios
EXAMINADOR	Ing. José Cecilio Baeza Gamar
EXAMINADOR	Ing. César Augusto Akú Castillo
EXAMINADOR	Ing. Oscar Francisco Castro Moreno
SECRETARIO	Ing. Gilda Marina Castellanos Baiza de Illescas

**HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LÍNEAS DE ESPERA EN EL  
PROCESO DE CARGA A LOS VENDEDORES  
EN EL SEGMENTO A DETALLE EN UNA EMPRESA  
COMERCIALIZADORA DE BOTANAS**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Industrial, con fecha 25 de junio de 2002.

**Erick Antonio Galindo Manchinel**

# ÍNDICE GENERAL

<b>ÍNDICE DE ILUSTRACIONES</b> .....	VI
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	VII
<b>GLOSARIO</b> .....	VIII
<b>RESUMEN</b> .....	XIV
<b>OBJETIVOS</b> .....	XV
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XVII
<b>1. CONSIDERACIONES GENERALES</b> .....	1
1.1 Centros de distribución de productos de consumo masivo	1
1.1.1 Forma general de operación.....	1
1.1.2 Estructura del proceso de carga.....	2
1.1.3 Distribución a detalle y otros canales de distribución.....	3
1.2 Elementos y características de modelos de líneas de espera.....	4
1.2.1 Elementos básicos que intervienen en el modelo de líneas de espera.....	6
1.2.2 Importancia del proceso de Poisson.....	8
1.2.3 Sistema de estado estable y medidas de desempeño.....	10
1.3 Modelos de líneas de espera y modelos de decisión en líneas de espera.....	11
1.3.1 Modelos de líneas de espera que obedecen la distribución de Poisson.....	12

1.3.2	Modelos de decisión en líneas de espera.....	16
1.3.2.1	Características generales.....	16
1.3.2.2	Modelo en función al costo.....	17
1.3.2.3	Modelo del nivel de aceptación.....	17
<b>2.</b>	<b>ANÁLISIS DE LOS ASPECTOS A CONSIDERAR PARA EL DESARROLLO TEÓRICO DE MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA.....</b>	<b>18</b>
2.1	Situación actual del proceso de carga.....	18
2.2	Consideraciones para la determinación de las distribuciones de los tiempos de llegada y de servicio....	21
2.2.1	Forma de observar el sistema.....	21
2.2.2	Recolección y tabulación de datos.....	22
2.3	Determinación de la distribución asociada.....	23
2.3.1	Histograma y polígono de frecuencias.....	27
2.3.2	Prueba de bondad del ajuste.....	29
2.4	Selección del modelo de líneas de espera.....	39
2.4.1	Sistemas finitos e infinitos.....	40
2.4.2	Número de servidores.....	40
2.5	Consideraciones para establecer modelo de decisión....	41
2.5.1	Costos que intervienen en el sistema.....	41
2.5.2	Optimización del número de servidores.....	42
2.5.3	Optimización del nivel de aceptación.....	43

<b>3. POSTULACIÓN TEÓRICA, DESARROLLO Y ANÁLISIS DEL MODELO DE DECISIÓN Y DE LAS MEDIDAS DE DESEMPEÑO DEL PROCESO DE CARGA.....</b>	<b>45</b>
3.1 Modelo Matemático representativo del sistema y medidas de desempeño.....	45
3.1.1 Análisis por estación del proceso de carga y selección del modelo de líneas de espera apropiado.....	45
3.1.2 Determinación y evaluación de las medidas de desempeño del proceso de carga.....	47
3.2 Postulación teórica del modelo de decisión.....	52
3.2.1 Modelo de decisión basado en costos.....	52
3.2.1.1 Número óptimo de servidores por estación en el proceso de carga.....	52
3.2.2 Modelo en función del nivel de aceptación.....	57
3.3 Resultados y análisis.....	59
3.3.1 Distribución asociada de los tiempos de llegada y de salida.....	59
3.3.1.1 Análisis e interpretación de resultados de la distribución asociada.....	59
3.3.1.2 Prueba de bondad de ajuste.....	60
3.3.2 Medidas de desempeño.....	60
3.3.2.1 Análisis e interpretación de resultados del modelo por estación.....	61
3.3.2.2 Análisis del comportamiento del sistema	65
3.3.3 Modelo de decisión.....	66

3.3.3.1	Análisis e interpretación de resultados del modelo.....	66
3.3.3.2	Modelo de costos.....	66
3.3.3.3	Modelo del nivel de aceptación.....	67
<b>4.</b>	<b>CONDICIONES Y ASPECTOS NECESARIOS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE CARGA PROPUESTO....</b>	<b>69</b>
4.1	Condiciones y aspectos generales.....	69.
4.1.1	Reconocimiento de beneficios por parte de la directiva.....	69
4.1.1.1	Beneficios por reestructuración.....	69
4.1.2	Recursos económicos y beneficios de inversión.....	70
4.2	Condiciones y aspectos administrativos.....	71
4.2.1	Manejo de actitud hacia los cambios.....	71
4.2.2	Alcance.....	72
4.3	Aspectos técnicos.....	72
4.3.1	Modificaciones de equipo, mobiliario y espacio físico.	73
4.3.2	Alcance.....	73
<b>5.</b>	<b>ASPECTOS A CONSIDERAR PARA EL SEGUIMIENTO Y MEJORA CONTINUA DEL SISTEMA.....</b>	<b>74</b>
5.1	Aspectos generales.....	74
5.2	Aumento en la población de carga.....	75
5.3	Avances en la tecnología.....	75
5.4	Variación en las metas de venta.....	76
5.4	Variación de espacio en las instalaciones físicas.....	77

<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>79</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>	<b>81</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>83</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>84</b>



# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Elementos de una línea de espera.....	6
2.	Sistema de estaciones en serie.....	16
3.	Histograma de frecuencias para los tiempos entre llegadas.....	33
4.	Gráfico comparativo entre las distribuciones empírica y exponencial para los tiempos entre llegadas.....	34
5.	Histograma de frecuencias para los tiempos de servicio.....	37
6.	Gráfico comparativo entre las distribuciones empírica y exponencial para los tiempos de servicio.....	38
7.	Diagrama de flujo del proceso de carga.....	84
8.	Diagrama de distribución física y de recorrido actual.....	85
9.	Diagrama de distribución física y de recorrido propuesto.....	86

## TABLAS

I	Tabulación de datos para los tiempos entre llegadas.....	25
II	Tabulación de datos para los tiempos de servicio.....	26
III	Tabla de frecuencias para los tiempos entre llegadas.....	33
IV	Prueba de ji-cuadrado para los tiempos entre llegadas.....	34
V	Tabla de frecuencias para los tiempos de servicio.....	37
VI	Prueba de ji-cuadrado para los tiempos de servicio.....	38
VII	Valor óptimo de “c” en la estación bancaria.....	55
VIII	Valor óptimo de “c” en la estación de pedidos.....	56
IX	Nivel de aceptación estaciones bancaria, pedidos y revisión final	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

	Operación o actividad
	Trasladarse de un lugar a otro
	Demora o espera
	Almacenar o guardar
$\lambda$	Tasa de llegadas
$\mu$	Tasa de servicio
$\rho$	Factor de utilización
$L_s$	Número esperado de clientes en el sistema
$L_q$	Número esperado de clientes en fila
$W_s$	Tiempo promedio de espera en el sistema
$W_q$	Tiempo promedio de espera en fila
$P_o$	Probabilidad de atención inmediata
$P_n$	Probabilidad de estado estable
$\chi^2$	Grados de libertad
$\alpha$	Nivel de significación
$\infty$	Valor infinito

## GLOSARIO

<b>Bondad del ajuste</b>	Son pruebas que se utilizan para verificar el grado de desviación que existe entre una distribución empírica y una distribución teórica dada.
<b>Botana</b>	Producto elaborado generalmente con forma divertida y que utiliza como materia prima maíz, papa, plátano o yuca y que es conocido en nuestro medio como “boquitas” o “ <i>snack</i> ”.
<b>Centros de distribución</b>	Denominados también sucursales de venta, generalmente en estos centros se encuentra la administración y la fuerza de ventas y es donde se administra el proceso de carga-venta.
<b>Cliente tradicional</b>	Son todos aquellos clientes donde generalmente se venden botanas tales como, tiendas, supermercados, abarroterías, etc.
<b>Cliente no tradicional</b>	Son todos aquellos clientes que comúnmente no venden botanas, tales como librerías, peluquerías, lavanderías, etc.
<b>Costo de demora</b>	Es el costo que se genera por el retraso en la prestación del servicio, provocando un costo de oportunidad.

<b>Costo de oportunidad</b>	Se refiere al costo que se genera por pérdida de venta, de producción, etc.
<b>Costo de servicio</b>	Es el costo en que se incurre por operar la instalación.
<b>Distribución asociada</b>	Es la distribución teórica a la que se ajusta la distribución empírica. En el caso de la teoría de colas los intervalos de tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio deben ajustarse a la distribución exponencial.
<b>Distribución continua</b>	Es una distribución en donde la variable aleatoria, cualquiera que sea su nombre, puede tomar todos los valores asociados con los puntos sobre un intervalo de línea.
<b>Distribución discreta</b>	Es una distribución en donde la variable aleatoria, cualquiera que sea su nombre, puede asumir un conjunto de valores finito o infinito numerable.
<b>Distribución empírica</b>	Proporcionan información descriptiva acerca de la población de la cual fue tomada la muestra de datos primarios. Se obtiene a partir de un histograma y polígono de frecuencias y luego debe ajustarse a una distribución teórica dada, para poder utilizarse en los modelos de investigación de operaciones.

<b>Distribución exponencial</b>	Es una distribución considerada continua y se utiliza en la teoría de líneas de espera en el sentido de que el servicio es continuo.
<b>Distribución de Poisson</b>	Es una distribución discreta que se utiliza en la teoría de líneas de espera para representar el número de eventos (llegadas o salidas) por unidad de tiempo.
<b>Distribución de probabilidad</b>	Para cualquier distribución el conjunto de valores que la variable aleatoria, cualquiera que sea su nombre, puede asumir y los valores de probabilidad asociados con cada valor dan como resultado una distribución de probabilidad.
<b>Espacio muestral</b>	Comprende el universo del cual se toman determinadas muestras.
<b>Factor de utilización</b>	Es la razón entre la tasa de llegadas y la tasa de servicio y representa el porcentaje de tiempo en que los servidores estarán en actividad. Si este valor es menor que 1, el sistema se encuentra en estado estable.
<b>Frecuencia</b>	Número de veces que se repite un evento.

<b>Función de densidad</b>	Está representada por una fórmula que es una función de los valores de la variable continua, cualquiera que sea su nombre y que puede utilizarse en la prueba de bondad del ajuste para determinar el grado de desviación que existe entre ella y la distribución empírica.
<b>Hipótesis</b>	Es una proposición no demostrada que se admite provisionalmente para orientar las investigaciones.
<b>Histograma de frecuencias</b>	Sirven para representar gráficamente tablas de frecuencias, agrupando los datos en intervalos.
<b>Liquidación</b>	Proceso que el vendedor lleva a cabo para entregar el dinero de la venta del día a efecto de volver a cargar mercadería para la venta del día siguiente.
<b>Logística</b>	Comprende toda la cadena de funciones para llevar a cabo un determinado proceso.
<b>Medidas de desempeño</b>	Son fórmulas de los modelos de Poisson cuyos resultados sirven para efectuar recomendaciones sobre el diseño del sistema.

<b>Modelo de decisión</b>	Son modelos que se utilizan en la optimización del diseño de los sistemas de líneas de espera, minimizando costos totales asociados con la operación de los mismos.
<b>Modelo probabilístico</b>	Es la representación de un proceso o modelo matemático en donde se desconoce la naturaleza de por lo menos una de las variables principales.
<b>Nivel de significación</b>	Con relación a la comprobación de hipótesis este representa el margen de error involucrado.
<b>Prueba de ji-cuadrado</b>	Es una prueba de bondad del ajuste, sirve para medir el grado de desviación entre una distribución empírica y una distribución teórica. Se aplica a variables aleatorias, tanto discretas como continuas.
<b>Polígono de frecuencias</b>	Se utilizan para representar gráficamente el comportamiento de una distribución de datos y resulta de la unión de los puntos medios de la base superior de los rectángulos de un histograma.
<b>Tasa de llegadas</b>	Representa el número de clientes por unidad de tiempo que llegan a una instalación solicitando servicio.

<b>Tasa de servicio</b>	Representa el número de clientes por unidad de tiempo que salen de la instalación porque han finalizado de recibir el servicio solicitado.
<b>Variable aleatoria</b>	Toma valores del espacio muestral de acuerdo con algún modelo probabilístico. Estos valores son resultados de pruebas o ensayos.
<b>Venta a detalle</b>	Se refiere a la venta efectuada a las tiendas, abarroterías, colegios y clientes no tradicionales.

## RESUMEN

El presente trabajo de graduación constituye una aplicación de la teoría de líneas de espera en el proceso de carga a los vendedores en el segmento a detalle en una empresa comercializadora de botanas. El esquema general del proceso de carga analizado está compuesto por cuatro estaciones dispuestas en serie, éstas son: la bancaria, la de pedidos, la de preparación del pedido y la de revisión final.

Previo a aplicar modelos específicos para determinar los parámetros en cada estación se efectuó una prueba conocida como bondad del ajuste, el objetivo de esta es garantizar que no exista desviación significativa entre los datos reales y los teóricos. Luego para poder llegar a determinar los parámetros (conocidos en la teoría de líneas de espera como medidas de desempeño) que nos ayudan a comprender el comportamiento del sistema y poder efectuar recomendaciones, se efectuó el análisis por separado para cada estación aplicando algún modelo específico, según las condiciones lo requerían.

Por último para establecer parámetros óptimos en función a tiempos y costos se crearon modelos basados en costos y en un nivel de aceptación entre el tiempo de espera en el sistema y el porcentaje de tiempo inactivo de los servidores (conocidos en la teoría de líneas de espera como modelos de decisión). Con ello se pudo establecer las condiciones que optimizan los costos del sistema y mejoran el tiempo total de carga en un 38%.

## **OBJETIVOS**

### General

Determinar, por medio de análisis cuantitativo y con base a la aplicación de la teoría de líneas de espera, los parámetros que permitan optimizar, en función de tiempo y costos, el proceso de carga de los representantes de venta en el segmento de distribución a detalle en una empresa comercializadora de botanas.

### Específicos

1. Determinar mediante estudio estadístico los parámetros necesarios para el desarrollo de un modelo de líneas de espera en el proceso de carga.
2. Establecer un modelo matemático de líneas de espera que se adecue al sistema real evaluando sus medidas de desempeño.
3. Implementar un modelo de decisión basado en costos y/o nivel de aceptación.
4. Diseñar el sistema de carga desarrollando el modelo matemático y el modelo de decisión.
5. Comparar el sistema propuesto contra el sistema actual, a efecto de definir los alcances con relación a costos y beneficios para la empresa.

6. Definir las condiciones, requerimientos, normas y/ o procedimientos necesarias para la implementación del sistema de carga diseñado.
7. Establecer los aspectos y consideraciones generales para la revisión y mejora continua del sistema.

## INTRODUCCIÓN

La espera forma parte de nuestra vida. Hoy al querer obtener un bien o servicio es inevitable que formemos parte de una cola o línea de espera; si usted acude a un banco o debe visitar al médico, si transita en cualquier medio de transporte terrestre por la ciudad o debe efectuar pagos de servicios recibidos, es un hecho que debe formar una línea de espera.

Si usted suma los tiempos de espera que tuvo que soportar en un período determinado se asombrará con el resultado; y no es para menos porque inmediatamente nos viene a la mente la pregunta ¿Cuántas actividades más podría realizar si estas situaciones no existieran o fueran mínimas?

También dentro del ramo industrial el fenómeno de la espera se hace evidente en plantas de producción, en logística de materiales, en centros de distribución, etc. Sin embargo, en algunas situaciones como éstas los efectos van más allá de la simple molestia de la espera, los costos pueden incrementarse para las empresas. Por ejemplo, en una planta de producción puede haber máquinas descompuestas en espera de ser reparadas por un técnico, cada minuto que transcurre sin que la máquina produzca genera un costo de oportunidad.

Otra situación que genera costos de oportunidad se observa en los centros de distribución cuando un vendedor retrasa su salida a mercado debido a la espera de obtener la mercadería respectiva y por consiguiente existe pérdida de venta. Además si el proceso de carga del vendedor no se agiliza, existe la posibilidad que su productividad disminuya como consecuencia de las extensas jornadas de trabajo. Es en este contexto, donde se detectó la

necesidad de realizar una aplicación de la teoría de línea de espera y que en general, es el motivo de la realización del presente trabajo de graduación.

Básicamente el desarrollo del estudio tiene como objetivo determinar los parámetros que optimizan el proceso de carga de los vendedores a detalle en una empresa comercializadora de botanas, sin embargo para dicho efecto se deben considerar la mayoría de los aspectos de la teoría de línea de espera, por lo que como su nombre lo indica, este trabajo pretende ser en general una aplicación de la teoría de líneas de espera, específicamente al proceso de carga de vendedores detallistas en un centro de distribución.

Inicialmente se incluyen conceptos relacionados a estos centros, tales como: forma de operación, estructura general del proceso de carga y el concepto de distribución a detalle. También se exponen los conceptos necesarios para el desarrollo de modelos líneas de espera, tales como: elementos y características de una línea de espera, distribución exponencial y de Poisson y modelos de líneas de espera y de decisión, los cuales son claves para la obtención de los parámetros del sistema.

Para que sea posible el desarrollo de líneas de espera es necesario que los datos a analizar se ajusten a distribuciones estadísticas específicas (exponencial y de Poisson), por lo que el capítulo 2 se dedica completo a este análisis incluyendo la situación actual del proceso de carga.

Posteriormente, se determina un modelo de líneas de espera para cada estación del sistema de carga, efectuando los cálculos para determinar las medidas de desempeño (como se verá estas proporcionan información del comportamiento del sistema).

Siempre dentro de este mismo contexto, se desarrolla un modelo de decisión basados en el análisis de costos con el cual se obtiene la optimización del sistema.

Para dar valor agregado a la aplicación también se desarrolla un modelo de decisión con relación al nivel de aceptación, es decir, equilibrar dos medidas en conflicto, tales como el tiempo de espera en el sistema y el % de tiempo de ocio de los servidores.

Por último se exponen cuáles son las condiciones necesarias para la implementación del sistema y que aspectos deben considerarse para el seguimiento y mejora continua del mismo.

Como se observará, el contenido está estructurado y detallado de tal forma que sirva también como una guía a estudiantes y/o profesionales que deseen efectuar aplicaciones similares en este campo.

# **1. CONSIDERACIONES GENERALES**

## **1.1 Centros de distribución de productos de consumo masivo**

Como es conocido, las empresas dedicadas a la comercialización de productos de consumo masivo poseen o deben poseer uno o varios “centros de distribución” los cuales estarían bajo la administración del departamento de ventas; y es en estos centros donde se deben ejecutar todas las tareas para administrar la distribución de los productos que la empresa comercializa y donde los vendedores efectúan entre otros, el proceso de carga de mercadería para la venta diaria.

### **1.1.1 Forma general de operación**

Un centro de distribución suele dividirse en dos áreas: la fuerza de ventas y la administración de ventas. La fuerza de ventas está integrada por el director de ventas, el gerente de ventas, los supervisores de ventas y los vendedores; ellos son los responsables por alcanzar las metas de ventas utilizando estrategias propias de ruteo y estudio del mercado. La administración de ventas está dedicada exclusivamente a la logística del área de ventas, esta área comprende entre otras actividades, pedidos e inventarios semanales de producto, rotación de producto en bodega, control de saldo de vendedores y despacho diario de carga a vendedores. En forma general la administración de ventas es la encargada de dar servicio a la fuerza de ventas para facilitar los medios que le permitan alcanzar sus cuotas diarias de venta.

Se vuelve sumamente importante entonces, que la administración de ventas mantenga siempre variedad de producto en bodega y que el proceso de carga diario sea ágil a efecto de lograr que todos los vendedores tengan sus vehículos de ruteo listos para salir al mercado a primera hora por la mañana.

### **1.1.2 Estructura del proceso de carga en una empresa comercializadora de botanas**

El proceso de carga de vendedores en la empresa en estudio, puede dividirse en cuatro estaciones: la estación bancaria, la estación de pedidos, la estación de preparación física de mercadería y la estación de revisión final.

En el caso de una empresa como la señalada anteriormente, el primer paso que el vendedor efectúa al llegar a la sucursal es el conteo de dinero de la venta del día; luego procede a llenar su boleta de liquidación, una vez terminada se traslada al área de cajas de liquidación del banco, en donde entrega el dinero de la venta.

Después que le es recibido y revisado el dinero y la boleta se traslada al área de pedidos en donde procede a realizar en borrador su pedido tomando en consideración los precios, presentaciones y existencias de los distintos productos porque debe cargar como máximo el equivalente a la venta obtenida.

Cuando ha concluido la elaboración de su pedido acude al área de bodega en donde el mismo le es ingresado al sistema de cómputo y luego procede a preparar físicamente la mercadería, es decir en forma de autoservicio recolecta los productos en las presentaciones que necesita para su venta al día siguiente.

Habiendo terminado la preparación de su pedido, el mismo le es revisado contra la copia generada al ingresarlo al sistema de cómputo y si todo está en orden, retira la mercadería de bodega quedando desde ese momento bajo su responsabilidad el manejo de la misma. Generalmente en cada una de las estaciones el vendedor debe formarse en una línea de espera, previo a obtener su servicio. El anexo 1 resume este esquema.

### **1.1.3 Distribución a detalle y otros canales de distribución**

Generalmente los centros de distribución comercializan sus productos a través de tres canales de distribución: El canal de mayoreo, el de supermercados y tiendas de conveniencia y el detallista.

En el canal de mayoreo se comercializa a través de los denominados “depósitos” los cuales obtienen descuentos especiales debido a los altos volúmenes que manejan y estos surten a minoristas en cualquier momento, un vendedor tiene a cargo determinado número de depósitos, en algunos de ellos se utiliza el servicio de impulsadoras de producto.

En el área de supermercados y tiendas de conveniencia además de la venta tradicional se programan ofertas a lo largo del año especialmente en días festivos.

El canal detallista es el que comprende la distribución a clientes minoristas tradicionales y no tradicionales. Dentro de los tradicionales se encuentran las tiendas, abarroterías, mini supermercados, puesteros, escuelas, colegios. Dentro de los no tradicionales podemos mencionar librerías, peluquerías, rentas de vídeo, cafeterías, centros deportivos, iglesias, entre otros.

De los tres canales expuestos con anterioridad, el que genera normalmente más del 60% de la venta total es el detallista y por lo tanto es el que posee el mayor número de vendedores para cubrir la mayor parte de los clientes de un área determinada, y es en el proceso de carga de los vendedores de este segmento en donde se centra el desarrollo del presente estudio.

## **1.2 Elementos y características de modelos de líneas de espera**

Antes de definir como surge una línea de espera, se definen los conceptos principales involucrados en la formación de las mismas, ellos son:

**Cliente:** Es el elemento que llega a la instalación solicitando un servicio. Pueden ser personas como en un banco, en un supermercado, máquinas esperando servicio en un taller, etc.

**Servidor:** Elemento que presta servicio al cliente que lo solicita. Puede ser humano, por ejemplo un receptor bancario o no humano como lo es el caso de un cajero automático.

**Fila o cola:** La integran el número de clientes que esperan para ser atendidos.

**Instalación:** Comprende tanto el área de servicio como la fila.

Con base en los conceptos anteriores se puede expresar, el siguiente enunciado:

“Una situación de línea de espera se genera cuando el cliente llega a la instalación y se forma en una línea de espera (fila o cola). El servidor elige a un cliente de la línea de espera para comenzar a prestar el servicio, al culminarse un servicio, se repite el proceso de elegir a un nuevo cliente (en espera).”<sup>1</sup>

Desde el punto de vista matemático existe una teoría que se encarga del estudio de este tipo de situaciones, se le denomina teoría de líneas de espera (o de colas).

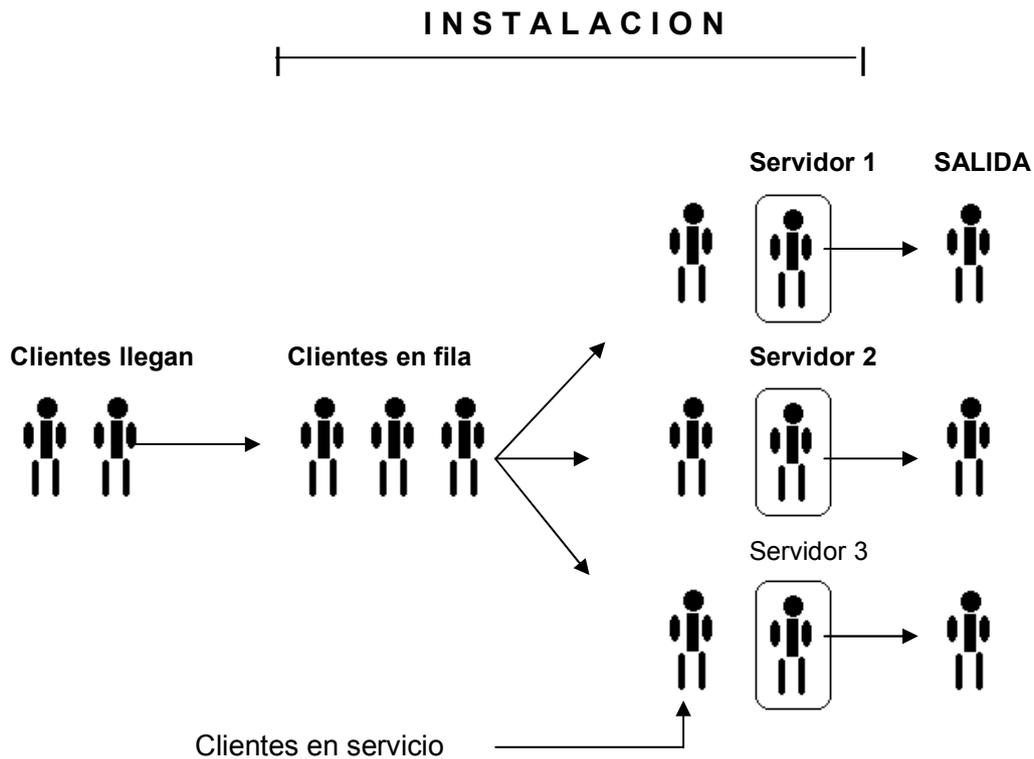
La teoría de líneas de espera nos indica que para analizar situaciones de líneas de espera es necesario conocer en el caso de las llegadas de los clientes, los tiempos que separan llegadas sucesivas, mientras que en el caso del servicio es de interés el tiempo de servicio por cliente, siendo estos dos los factores principales.

---

<sup>1</sup> Taha, Hamdy A. **Investigación de Operaciones**. (México: Editorial Alfaomega, 1992) p. 637

La **figura 1** muestra una situación de líneas de espera y sus elementos.

**Figura 1. Elementos de una línea de espera**



### 1.2.1 Elementos básicos que intervienen en el modelo de espera

Existen otros factores que son importantes para analizar situaciones de espera, tales como:

**Distribución de llegadas:** Se refiere a si las mismas son individuales (por ejemplo, en bancos o supermercados) o en grupo (por ejemplo, en restaurantes).

**Distribución del tiempo de servicio:** Si se presta servicio individual o masivo.

**Diseño de la instalación:** Si varios servidores ofrecen el mismo servicio se le llama servidores paralelos (por ejemplo, cajeros bancarios). Si el cliente debe pasar por varias estaciones dispuestas en serie antes de completar su servicio, esta situación se conoce como líneas de espera en serie (por ejemplo, el proceso de carga de vendedores). Y cuando la instalación comprende a los dos anteriores, la situación es conocida con el nombre de líneas de espera en red.

**Disciplina de servicio:** Se define por la forma en que se elige a los clientes de la línea de espera. Si el primero en llegar es el primero en ser atendido se le conoce como la regla FCFS. Cuando el último en llegar es el primero en ser atendido la regla se llama LCFS. Y si el servicio es en orden aleatorio se le denomina regla SIRO. Todos por sus siglas en inglés.

**Tamaño de la línea de espera:** Si no existe limitante (generalmente espacio físico) para los clientes que llegan a solicitar servicio el tamaño es infinito de lo contrario es finito.

**Fuente de llamadas:** Puede ser finita o infinita. Es finita cuando una llegada afecta la tasa de llegada de nuevos clientes. Si esto no sucede se considera infinita.”<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Taha, Hamdy A. **Investigación de operaciones**. (México: Editorial Alfaomega, México 1992) pp. 638-639.

## 1.2.2 Importancia del proceso de Poisson

Para describir el proceso de Poisson y su relación con la teoría de colas, es necesario conocer los siguientes conceptos:

**Modelo probabilístico:** Es una representación matemática de un proceso u operación, en la que, cuando menos, una de las principales variables es de naturaleza incierta.

**Variable aleatoria:** es una función numérica valorada, definida sobre el espacio muestral. La variable aleatoria cualquiera que sea su nombre toma valores asociados con puntos muestrales que son resultados de experimentos. Una variable aleatoria está asociada con cada punto del espacio muestral. Es aleatoria puesto que toma valores de acuerdo con algún modelo probabilístico.

**Distribución de probabilidad:** El conjunto de valores que una variable aleatoria  $X$  puede asumir y la probabilidad  $P(x)$ , asociada con cada valor de  $X$  define una distribución de probabilidad para la variable aleatoria  $X$ .

**Distribución discreta:** Se da cuando el conjunto de valores que la variable aleatoria  $X$  puede asumir es un número finito o infinito numerable.

**Distribución continua:** cuando la variable aleatoria  $X$  puede tomar todos los valores asociados con los puntos sobre un intervalo de línea.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Mendenhall, William. **Introducción a la probabilidad y estadística.** (México: Editorial Herrero Hermanos, 1972) pp.72-81

**Distribución de Poisson:** se utiliza en los modelos de líneas de espera para describir el número de eventos (llegadas o salidas) en un período dado, en cuyo caso  $\lambda$  representa el número de eventos por unidad de tiempo. Cuenta valores en toda la gama de X. Es una distribución que contiene una probabilidad por definición de P(x) de que la variable x sea igual a cero. Por lo tanto, las llegadas a una instalación durante un intervalo determinado pueden variar de cero a infinito.

**Distribución exponencial:** Es una de las distribuciones que se le considera continua. En la teoría de colas el servicio es continuo y caracterizado por la distribución exponencial  $f(x) = e^{-x}$ . Esto, al igual que en la distribución de Poisson, da valores para la probabilidad de que X adopte valores de cero.”

La distribución de Poisson está relacionada con la exponencial en el sentido que si X representa el número de eventos de Poisson en un periodo dado, entonces el intervalo de tiempo entre eventos sucesivos es exponencial.

El proceso de Poisson está representando por tres condiciones: la primera es que la probabilidad de que un evento (llegada o salida) ocurra entre los tiempos t y t + h depende únicamente de la longitud de h, la segunda indica que la probabilidad de que ocurra un evento durante un intervalo de tiempo muy pequeño h es positiva, pero menor que “1”<sup>4</sup> y cuando mucho puede ocurrir un evento durante un intervalo de tiempo muy pequeño h”<sup>5</sup>

El proceso de Poisson es un proceso completamente aleatorio porque tiene la propiedad de que el intervalo de tiempo que permanece hasta la

---

<sup>4</sup> Según las leyes de la probabilidad toda probabilidad se cuantifica entre 0 y 1.

<sup>5</sup> Taha, Hamdy A. **Investigación de Operaciones**. (México: Editorial Alfaomega, 1992) p. 640

ocurrencia del próximo evento, es totalmente independiente del intervalo de tiempo que ha transcurrido desde la ocurrencia del último evento.

### **1.2.3 Sistema de estado estable y medidas de desempeño**

El concepto de estado estable está relacionado con la capacidad que tiene el sistema para despejar el tráfico. Los valores de las tasas de llegada y de servicio representan promedios, por lo que puede darse el caso en que la salida exceda a la entrada o viceversa. Aunque se de este último caso, el sistema puede despejarse después de un tiempo suficientemente grande siempre que los parámetros lo permitan. Ahora se explica como determinar esta situación:

Los matemáticos denominan  $\rho$  (ro) a la relación de la tasa de llegadas ( $\lambda$ ) a la tasa de salidas ( $\mu$ ): ( $\lambda/\mu$ ). Si esta relación es menor que 1 se dice que el sistema se encuentra en estado estable con ello se pueden aplicar los modelos especializados de Poisson. Si el valor de la relación es mayor que 1 esto significa que la tasa promedio de llegadas es mayor que la tasa promedio del servicio, esto nos indica que la fila crecerá sin límites, sin embargo esta situación puede controlarse incrementando estaciones de servicio o modificando los coeficientes de llegadas o de prestación de servicio.

Por otro lado, las medidas de desempeño nos ayudan a interpretar cual es el comportamiento del sistema. Generalmente cuando formamos parte de una fila o línea de espera nos interesa saber ¿Cuánto tiempo estaremos haciendo la fila?, ¿Cuánto tiempo me llevará hasta que salga de la instalación? o bien nos podríamos preguntar ¿Cuántas personas estarán en la fila cuando llegue?

Precisamente este tipo de respuestas se determinan a través de las medidas de desempeño. Entre las principales medidas de desempeño tenemos:

$L_s$  = número esperado de clientes en el sistema.

$L_q$  = número esperado de clientes en la fila.

$W_s$  = tiempo estimado de espera en el sistema.

$W_q$  = tiempo estimado de espera en la fila

$C_p$  = número estimado de servidores activos

Para el cálculo de las medidas de desempeño se consideran los dos elementos siguientes:

$P_n(t)$  = probabilidad de que ocurran  $n$  eventos durante el tiempo  $t$ .

$P_o(t)$  = probabilidad de servicio inmediato.

### **1.3 Modelos de líneas de espera y modelos de decisión de líneas de espera**

Para el análisis de situaciones de líneas de espera los matemáticos desarrollaron diferentes modelos a efecto de poder analizar una situación específica según los elementos contenidos en ella, por ejemplo un servidor único, sin límite en la capacidad del sistema o de la fuente de llamadas, etc.

Del desarrollo de grandes derivaciones matemáticas y tomando como base el modelo generalizado de Poisson<sup>6</sup> se determinaron fórmulas para cada modelo que nos permiten establecer los valores de la probabilidad de estado estable del sistema ( $P_n$ ), de la probabilidad de servicio inmediato ( $P_o$ ) y de las medidas de desempeño.

---

<sup>6</sup> En el modelo generalizado de Poisson se deduce una expresión para  $P_n$  (Probabilidad de estado estable de  $n$  clientes en el sistema) como una función de  $\lambda n$  y  $\mu n$ .

Estos modelos básicamente toman como datos de entrada los valores de la tasa de llegadas ( $\lambda$ ) y la tasa de servicio ( $\mu$ ) para luego determinar los valores respectivos de  $P_n$ ,  $P_0$  y de las medidas de desempeño.

Se debe tomar en cuenta que las medidas de desempeño solamente describen el comportamiento del sistema analizado, por esta razón se hace necesario idear modelos que se puedan usar en la optimización de los sistemas de líneas de espera, los cuales se conocen como modelos de decisión.

### **1.3.1 Modelos de líneas de espera que obedecen la distribución de Poisson**

A continuación se detallan algunos modelos de líneas de espera especializados de Poisson, que pueden ser aptos para el análisis del presente estudio, junto con sus medidas de desempeño. Los modelos están descritos bajo la notación estándar considerando DG como disciplina general.

**(M/M/1) : (DG/ $\infty$ /  $\infty$ )**

**Características:**

Servidor único

Sin límite en la capacidad del sistema

Sin límite en la fuente de llamadas.

Tasas de llegadas independientes del número en el sistema

Se completa el servicio a una tasa constante

**Medidas de Desempeño:**

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_s = E\{n\} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

**(M/M/c) : (DG/∞/∞)****Características:**

Clientes llegan con una tasa constante.

Un máximo de **c** clientes pueden ser atendidos simultáneamente.

La tasa de servicio por servidor activo es constante.

Sin límite en la capacidad del sistema.

Sin límite en la fuente de llamadas. -

**Medidas de desempeño:**

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0, & 0 \leq n \leq c \\ \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} P_0, & n > c \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left( \frac{\rho}{c} \right)^{-1}$$