

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERIA



DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION  
PARA VIGAS DE CONCRETO.

TESIS

PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA

POR

MANRIQUE BERNARDO FUENTES FUENTES  
AL CONFERIRSELE EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL.

GUATEMALA, JULIO DE 1996.

08  
7(8773)  
C.A

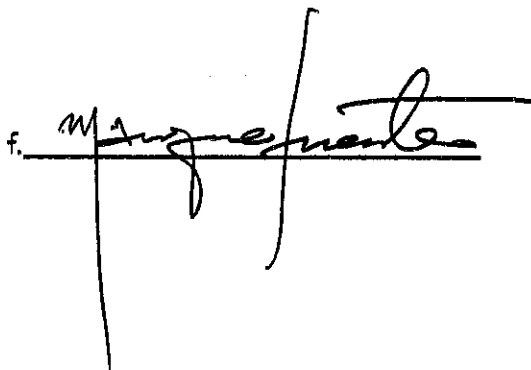
HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR.

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

**DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION  
PARA VIGAS DE CONCRETO**

tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de  
**INGENIERIA CIVIL.**

con fecha 25 de noviembre de 1,994.

f.  M. Angueño

Guatemala, 7 de Febrero de 1,996

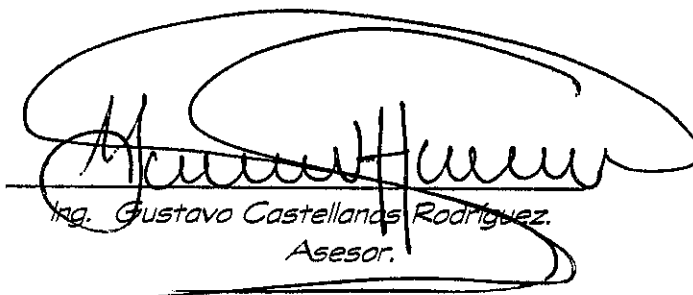
Sr.  
Jefe del Departamento de Estructuras.  
Ing. Ricardo Ibarra.  
Facultad de Ingeniería.

Estimado Ing. Ibarra:

Por medio de la presente me permito informarle que he revisado el trabajo de tesis del estudiante universitario, Manrique Bernardo Fuentes Fuentes, titulada: **DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION PARA VIGAS DE CONCRETO**; previo a optar el título de Ingeniero Civil; y habiéndolo encontrado satisfactorio, me hago co-responsable de dicho trabajo.

Sin otro particular me suscribo como su atento y seguro servidor.

Deferentemente:



Ing. Gustavo Castellanos Rodriguez.  
Asesor.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



**FACULTAD DE INGENIERIA**

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, febrero 20 de 1995

Ingeniero  
Jack Douglas Ibarra,  
Director de la Escuela  
de Ingeniería Civil,  
Facultad de Ingeniería,  
U S A C.

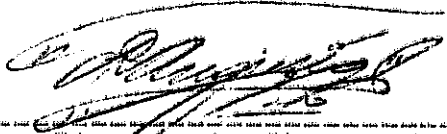
Señor Director

Por medio de la presente informo a usted, que he revisado el trabajo de tesis titulado **DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION PARA VIGAS DE CONCRETO**, elaborado por el estudiante universitario Manrique Bernardo Fuentes Fuentes, y asesorado por el Ing. Gustavo Castellanos Rodriguez.

Habiendo determinado que dicho trabajo cumple con lo establecido, y que será de mucha utilidad para estudiantes y profesionales de la ingeniería civil, el suscrito le da su aprobación.

Sin otro particular, me suscribo de usted,

Atentamente,

  
Ing. Ricardo A. Ibarra M.  
Jefe del Departamento de Estructuras

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central



**FACULTAD DE INGENIERIA**

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Gustavo Castellanos Rodríguez y del Jefe del Departamento de Estructuras Ing. Ricardo A. Ibarra M., sobre el trabajo de tesis del estudiante Manrique Bernardo Fuentes Fuentes, titulado **DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION PARA VIGAS DE CONCRETO**, da por este medio su aprobación a dicha tesis.

  
Ing. Jack Douglas Ibarra Bolórzano



Guatemala, junio de 1, 1996.

JDIS/bbdeb.

## AGRADECIMIENTO

A DIOS.

Deseo expresar mi agradecimiento a las personas que me brindaron su colaboración en el desarrollo de este trabajo de tesis, en especial a: Ing. Gustavo Castellanos, por su orientación en la asesoría.

## DEDICO ESTE ACTO

A:

la memoria de mi Padre:

Felix Bernardo Fuentes.

mi Madre:

Lidia Estela de Fuentes.

mi Esposa:

Magda Esmeralda de Fuentes.

mis Hijos:

Anna Gabriela y Juan Pablo.

mis Hermanos:

Artemio, Blanca y Marvin.

toda mi Familia:

todos mis amigos y compañeros..

## CONTENIDO

0.	INDICE DE TABLAS, GRAFICAS Y FIGURAS.	
1.	INTRODUCCION.	
2.	OBJETIVOS.	
3.	GLOSARIO.	
4.	CAPITULO I.	
	El concreto.....	01
	Materiales que conforman el concreto.....	01
	Curva Esfuerzo-Deformación.....	02
	Resistencia del concreto.....	02
	Módulo de elasticidad del concreto.....	03
	Acero de Refuerzo.....	05
	Especificaciones y calidad del acero.....	06
	Diámetros de acero para construcción.....	07
5.	CAPITULO II	
	La Flexión.....	08
	Determinar resistencia a flexión.....	09
6.	CAPITULO III.	
	Secciones especiales en flexión.....	13
	Sección asimétrica.....	14
	Método de análisis de sección transformada.....	14
	Análisis de sección triangular.....	15
	Análisis de sección "U".....	22
	Análisis de sección "L".....	28
	Análisis de sección Pentagonal.....	34
7.	CAPITULO IV.	
	Diseño de sección triangular.....	40
	Diseño de sección "U".....	46
	Diseño de sección "L".....	51
	Diseño de sección Pentagonal.....	57



8. CONCLUSIONES.

9. RECOMENDACIONES.

10. BIBLIOGRAFIA.

# INDICE DE GRAFICAS Y TABLAS

## CAPITULO I

- **GRAFICA No 1:** Diagrama esfuerzo-deformación para el concreto..... 03
- **GRAFICA No. 2:** Diagramas en base a teoría elástica y plástica..... 04
- **GRAFICA No. 3:** Diagrama esfuerzo-deformación para el acero..... 06
- **GRAFICA No. 1:** Características del acero a tensión..... 06
- **TABLA No. 1:** Diámetros de varillas de acero para construcción..... 07

## CAPITULO II

- **FIGURA No. 4:** Deformación de una viga con carga pequeña y carga máxima..... 09
- **DIAGRAMA 5a:** Diagrama del bloque rectangular equivalente y diagrama esfuerzos reales..... 10
- **DIAGRAMA No. 5b:** Sección de viga rectangular, Esfuerzos reales y bloque equivalente..... 11

## CAPITULO III

- **FIGURA No. 6:** Ubicación de eje neutro en una sección transformada..... 14
- **FIGURA No. 7.:** Sección triangular para vigas sujetas a flexión..... 15
- **FIGURA No. 8.** Ubicación de eje neutro en sección triangular..... 17
- **FIGURA No. 9.** Determinación centralde "X", a través

de relación de triángulos.....	19
- FIGURA No. 10.: Dimensiones para calcular el momento de inercia en torno a eje neutro.....	21
- FIGURA No. 11. Sección "U" invertida para vigas sujetas a flexión.....	23
- FIGURA No. 12. Ubicación de eje neutro en sección "U", invertida.....	24
- FIGURA No. 13. Determinación de centroide , a una distancia "X".....	25
- FIGURA No. 14: Areas para calcular el momento de inercia de la sección."U".....	26
- FIGURA No. 15. Sección "L" invertida para vigas sujetas a flexión.....	29
- FIGURA No. 16. Ubicación de eje neutro en sección "L", invertida.....	30
- FIGURA No. 17. Determinación del centroide, a una distancia "X".....	31
- FIGURA No. 18. Areas para calcular el momento de inercia de la sección "L".....	32
- FIGURA No. 19. Sección Pentagonal para vigas sujetas a flexión.....	34
- FIGURA No. 20. Ubicación de eje neutro en sección Pentagonal.....	35
- FIGURA No. 21. Determinación del centroide, a una distancia "X".....	36
- FIGURA No. 22. Area para calcular el momento de inercia Pentagonal.....	37

#### CAPITULO IV

- FIGURA No. 23. Ejemplo de diseño de viga de sección triangular a flexión.....	40
- FIGURA No. 24. Ubicación de eje neutro en sección triangular transformada.....	42
- FIGURA No. 25. Ejemplo de diseño de viga de sección "U" Invertida a flexión.....	45
- FIGURA No. 26. Ubicación de eje neutro en sección "U" Invertida transformada.....	46
- FIGURA No. 27. Ejemplo de diseño de viga de sección "L" Invertida a flexión.....	51
- FIGURA No. 28. Ubicación de eje neutro de sección "L" Invertida transformada.....	52
- FIGURA No. 29. Ejemplo de diseño de viga de sección Pentagonal.....	56
- FIGURA No. 30. Ubicación de eje neutro de sección Pentagonal transformada.....	57

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARCO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL  
CATEDRA DE MECÁNICA DE MATERIALES  
ALUMNO: [Nombre del alumno]  
CATEDRATA: [Nombre del profesor]

## INTRODUCCION

El trabajo que a continuación se presenta es un resumen de todas las combinaciones que puedan darse en el diseño de vigas de secciones varias expuestas a flexión, esperando lograr por su contenido, beneficios tanto a estudiantes que constantemente buscan enriquecer sus conocimientos, como a profesionales quienes enfrentan problemas de diseño que deben ser resueltos de la mejor forma posible. La idea de presentar un tema relacionado con el "DISEÑO DE SECCIONES ESPECIALES PARA VIGAS DE CONCRETO", es proporcionar una herramienta de trabajo fácil, sencilla y rápida para el diseñador, utilizando el método de la sección transformada para secciones especiales.

En este trabajo se incluye un recordatorio de la teoría de flexión para secciones cuadradas hasta llegar a secciones especiales como lo son la sección "L", "U", "TRIANGULAR" y "HEXAGONAL", que son las que se incluyen en el presente estudio, sin olvidarse que las secciones especiales pueden ser de diversas formas, dependiendo del diseño y función, lo más importante es que a través del método de la sección transformada, puede calcularse cualquier sección, siempre y cuando para efectos del presente estudio se considerará la condición de asimetría de la sección con cualquiera de sus ejes "X" ó "Y".

El diseño de vigas de formas que trasciendan más allá de la cuadrada y rectangular es inevitable, ya que desde el punto de vista arquitectónico y de estética, como funcional y de aplicación, las vigas de secciones especiales pueden resolverse fácilmente en lugares donde el diseño así lo requiera. Además se ofrece un panorama general para que el diseñador conozca el método y lo aplique a cualquier sección especial.

Finalmente se hace énfasis en que el método utilizado en el diseño de vigas de secciones especiales es de gran facilidad, ofreciendo rapidéz y sencilléz en su deducción como aplicación, no siendo así el método práctico para secciones rectangulares; pues el cálculo de las mismas se torna más complicado que utilizando el método del par elástico, por tal razón puede considerarse como una herramienta práctica y útil para optimizar el tiempo y los recursos del diseñador cuando se encuentre con secciones asimétricas.

## OBJETIVOS

El presente trabajo de investigación persigue:

1. Que tanto el profesional como el estudiante encuentren en el método de *SECCION TRANSFORMADA* para secciones asimétricas, una herramienta útil de trabajo, utilizando un método fácil de comprender y sobre todo de aplicar.
2. Que el diseñador o calculista, pueda manipular cualquier sección para una viga sometida a flexión, sin temor a usar métodos engorrosos y poco prácticos.
3. Demostrar que el método de sección transformada, se constituye en la forma idónea para calcular cualquier viga de sección especial.
4. Aplicar el método de sección transformada a cualquier sección simétrica con respecto a un eje, para los distintos problemas estructurales que a diario deben resolverse.
5. Enseñar el método, su uso y aplicación, es decir, no aplicar el método de sección transformada a vigas de sección rectangular, como tampoco utilizar el método del par elástico en secciones asimétricas, pues aunque ambos son aplicables no son adecuados, entorpeciendo y retardando el trabajo de diseño y cálculo.

## GLOSARIO

- **CENTRO DE CORTANTE:** Es el punto en cada sección a través del cual pasa el eje de flexión.
- **DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACION:** Es característico del material y proporciona información importante acerca de las propiedades mecánicas y el comportamiento típico del material.
- **EJE DE FLEXION:** En una viga es la línea longitudinal por la cual deben pasar las cargas transversales para impedir que la viga se tuerza cuando se flexiona.
- **FLEXION ASIMETRICA:** Cuando una viga está sometida a cargas que no se encuentran en un plano que contenga un eje principal de cada sección transversal, o cuando las secciones no tienen ningún eje de simetría, ocurre la flexión asimétrica.
- **LIMITE DE PROPORCIONALIDAD:** Es el límite de la relación lineal entre el esfuerzo y la deformación de un material.
- **LIMITE PLASTICO:** Es un esfuerzo bajo el cual un material sufre una deformación definida de la ley de proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones.
- **MOMENTO RESISTENTE DE UNA SECCION:** Se llama así al momento mayor que es capaz de desarrollar esa sección sin que ninguno de los materiales se exceda de su fatiga máxima de trabajo. Siempre se debe tomar el menor de los momentos llamándolo Momento resistente. En nuestro caso se calcula el momento resistente del concreto "  $M_c$  " y el momento resistente del acero los cuales están expresados por las expresiones:

$$M_c = (F_c' i) / C \quad \text{y} \quad M_s = (F_s' i) / C$$

donde:

$M$  = momento de flexión en la sección.

$f_c$  ó  $f_s$  = esfuerzo unitario normal a una distancia desde el eje neutro.

$I$  = momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro.

- **RELACION MODULAR:** No es más que la relación entre el módulo de elasticidad del acero y del concreto, se representa así:

$$I = \frac{I_c}{n}$$

- **TEOREMA DE EJES PARALELOS PARA MOMENTOS DE INERCIA:**  
El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje alojado en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje centroidal paralelo, más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los ejes, se representa de la siguiente manera:

$$I = I_c + A d^2$$



## CAPITULO I

### EL CONCRETO:

***"Es un material artificial que resulta de la union de otros llamados agregados".***  
**Los agregados conforman dos grupos: ACTIVOS E INERTES.**

**ACTIVOS:** Materiales activos son aquellos que como su nombre lo indica reaccionan químicamente al unirse hasta alcanzar gran solidez. Son activos el agua y el cemento.

**INERTES:** Los materiales inertes, conforman el máximo volumen del concreto y son la arena de río y el pedrín. Estos materiales conforman el esqueleto del concreto que lo hace más económico y voluminoso.

### MATERIALES QUE CONFORMAN EL CONCRETO

**CEMENTO:** Por su capacidad aglutinante es el elemento de mayor importancia en la fabricación del concreto. Los componentes fundamentales del cemento son: alúmina, cal, sílice y yeso pulverizado.

**AGUA:** La importancia del agua es no solo para que el cemento reaccione, sino para aumentar el grado de resistencia del concreto.

**ARENA DE RIO:** Es de los agregados inertes mas finos. El tamaño máximo que debe tener es de 5 a 6 milímetros de diámetro y si además, se hace un análisis granulométrico del 40 al 50% debe ser retenido en la malla número 28.

**PIEDRIN:** En su clasificación de agregados inertes, el pedrín es el agregado grueso. El tamaño máximo que debe tener es de 35 milímetros y el pequeño de 5 milímetros de diámetro. Deberá estar constituido por fragmentos de roca sana de forma redondeada o cuadrada y resistente al impacto y abrasion.

**CALIDAD DEL CONCRETO:** Si se toma en cuenta la calidad de los materiales inertes y activos, de igual forma la cantidad y proporcion adecuada, se pueden obtener concretos de la mejor calidad y resistencia, para lograr un concreto de calidad es importante tomar en cuenta los siguientes factores:

- a. Calidad del cemento
- b. Proporción agua-cemento
- c. Calidad de los agregados (materiales inertes)
- d. Agregados de buena adhesión a pasta de cemento.
- d. Curado a temperatura menor de 50° F, hasta alcanzar el concreto su máxima resistencia.
- e. Conocimiento del factor humano de la proporción adecuada.

### **RESISTENCIA DEL CONCRETO A COMPRESION**

Generalmente todas las resistencias a compresión del concreto se obtienen en obra sacando muestras cilíndricas, las cuales posteriormente son probadas en laboratorio para determinar la resistencia en particular del concreto. Para esfuerzos de compresión, se han obtenido concretos hasta de 700 a 800 kg/cm. 2. Naturalmente son muestras obtenidas en laboratorio, siendo esos datos una excepción de resistencia ya que generalmente se diseña con datos más bajos comprendidos entre 210 y 400 kg/cm. 2. Las pruebas de resistencia a compresión se basan en cilindros de 15 centímetros de diámetro y 30 centímetros de alto, curados en el laboratorio y probados a los 28 días. Cuando se efectúa la ruptura del cilindro, la fatiga correspondiente a esa ruptura se representa por  $F_c$ .

### **RESISTENCIA DEL CONCRETO A TENSION**

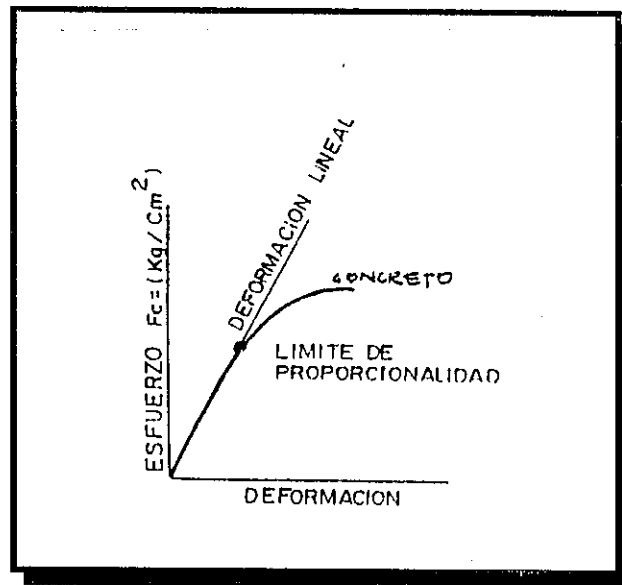
La resistencia a tensión del concreto es baja, comprendida aproximadamente entre el 15 y 20% de su resistencia a compresión. Por tal razón para efectos de diseño no se toma en cuenta la resistencia a tensión del concreto.

### **RESISTENCIA DEL CONCRETO AL CORTE**

A este esfuerzo la resistencia del concreto es bastante buena y se estima entre el 40 y el 80% de su resistencia a compresión. La variación tan marcada que existe entre la resistencia mínima y máxima al esfuerzo de corte, se debe a que en las pruebas es muy difícil separar el esfuerzo cortante de otros esfuerzos.

### **CURVA ESFUERZO-DEFORMACION:**

Quando un cilindro es probado en el laboratorio para conocer su resistencia a compresión, éste experimenta cierta deformación. La aplicación de cargas, puede representarse por medio de una curva o diagrama de esfuerzos y deformaciones obteniendo en el eje de las abscisas la deformación y en la ordenada el esfuerzo denominado  $F_c$ .



GRAFICA No. 1: DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACION OBTENIDA DE PRUEBAS A COMPRESION EN EL CONCRETO.

La anterior figura muestra una curva típica de esfuerzo-deformación obtenida de pruebas a compresión en el concreto. Se observa un comportamiento casi rectilíneo hasta llegar al límite de proporcionalidad, donde el concreto logra su máxima resistencia y empieza a deformarse hasta perder sus propiedades físicas.

Siendo  $F_c$ , la máxima resistencia a compresión del concreto, interesa para efectos de diseño, el punto en el cual el concreto es capaz de mantener sin modificar ni agrietar la estructura, las cuales se conservan con un 70% de la resistencia máxima. Es importante entonces; no pasarse del  $0.7F_c$ , pues más allá de este límite el material empieza a perder su rigidez, causando deformación y fisura en la estructura.

### MODULO DE ELASTICIDAD DEL CONCRETO:

En el concreto no puede obtenerse un módulo de elasticidad constante, ya que éste depende de muchos factores tales como: Intensidad de las cargas, intensidad de la fatiga de ruptura del concreto, e Intensidad de la permanencia de las cargas.

El módulo de elasticidad, no es más que **"la variación lineal de esfuerzos en la cara de compresión del diagrama esfuerzo deformación"**. Puede decirse entonces que en el concreto el módulo de elasticidad se ajusta a la ley de variación lineal para valores de esfuerzos iguales a  $0.45F_c$ .

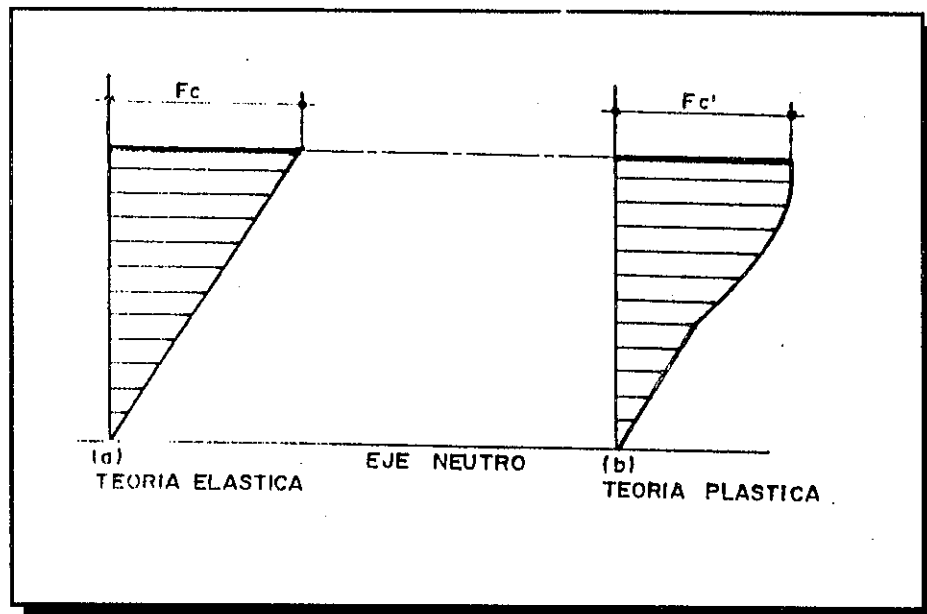


FIGURA No. 2: LA TEORIA ELASTICA QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA A), ES VALIDA SI LOS ESFUERZOS DE COMPRESION EN EL CONCRETO, NO EXCEDAN DEL 45% DE  $f_c$ . CONFORME LOS VALORES DE ESFUERZOS VAN AUMENTANDO LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS ADOPTA UNA LINEA PARABOLICA O TEORIA PLASTICA.

El módulo de elasticidad de Young, se aplica a la tangente de la curva en el origen. Es decir, si se traza una tangente a la curva del diagrama esfuerzo-deformación, el valor llamado módulo de elasticidad en el cálculo del diseño, satisface la suposición práctica de que las deformaciones que ocurren durante la carga pueden considerarse elásticas hasta alrededor del  $0.40F_c$ , que es completamente recuperable en la descarga, o sea capaz de regresar a su forma original sin perder sus propiedades. Cuando el valor de la carga causa cualquier deformación mayor al límite elástico, se considera como flujo plástico y no es más que un incremento de deformación adicional.

El módulo de elasticidad del concreto, se representa por  $E_c$  y su valor según el reglamento ACI, se representa así:

$$E_c = W_c^{1.5} \times 15,100 \times \sqrt{F_c}$$

Donde:

$E_c$ : Módulo de elasticidad.

$W_c$ : Densidad del concreto en (kg/m.cúbico)

$F_c$ : Resistencia a compresión del cilindro en (kg/m.cúbico)

El valor de W es :  $W = 2.4^{1.5} = 3.60$

Aún así se debe considerar que el valor del módulo de elasticidad varía de acuerdo a condiciones y características del concreto como: Curado, relación agua-cemento, edad del concreto, etc.

Generalizando se puede establecer un rango en el cual está comprendido el módulo de elasticidad del concreto; siendo éste entre:

$$3,000 \times \sqrt{F_c} \quad \text{y} \quad 10,000 \times \sqrt{F_c}$$

### ACERO DE REFUERZO

Si en la aplicación de cargas a compresión, el concreto es el material ideal, del mismo modo se necesita de un material capaz de resistir esfuerzos de tensión, es aquí donde funciona el acero.

El acero es un material tan variado que para su producción debe fabricarse de acuerdo con las normas ASTM. Se fabrica con diversidad de características químicas y físicas y en gran variedad de calidades. La resistencia a tensión en el acero al igual que en el concreto se puede analizar según el diagrama esfuerzo-deformación, de la figura siguiente (VER FIGURA 3)

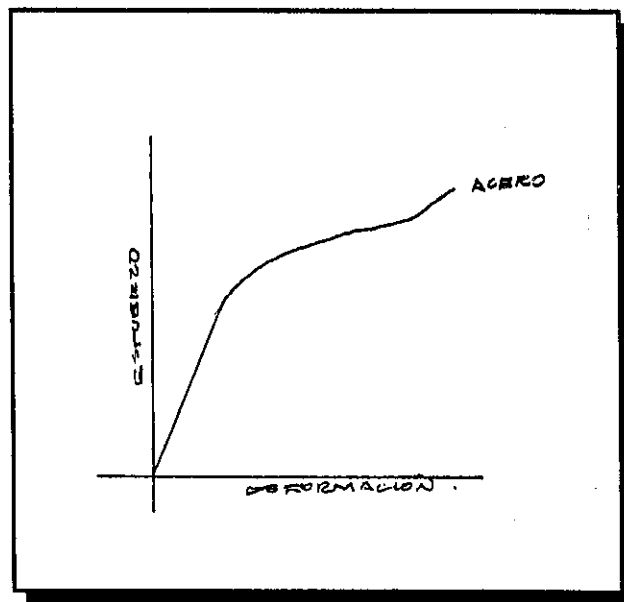


FIGURA No. 3: DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACION PARA EL ACERO.

El comportamiento de la curva esfuerzo-deformación para el acero va a depender del grado, del tipo y calidad del mismo. Aunque en forma general tienen bien definidos dos puntos de fluencia. Para los aceros que no presentan un punto de fluencia definido, se puede tomar el valor de su resistencia a fluencia, como la resistencia correspondiente a una deformación de 0.005 para aceros de grados 33, 40 y 60 psi. El módulo de elasticidad del acero se tomará para este estudio de 2,000,000 kg/cm.2.

### ESPECIFICACIONES Y CALIDADES DEL ACERO

Atendiendo a su resistencia a la tensión y por consiguiente a su fatiga de trabajo, los aceros se clasifican en tres clases o grados de dureza: Grado Estructural, Grado Intermedio y Grado Duro. Caracterizándose cada uno de ellos por el valor del límite elástico aparente con respecto al cual se toman los coeficientes de seguridad para fijar las fatigas de trabajo.

Las propiedades más importantes que se deben tomar en cuenta en el acero de refuerzo son:

- a. Módulo de Young, Es.
- b. Resistencia de fluencia, fy.
- c. Resistencia última, fu.
- d. Grado del acero a usar.
- e. Tamaño o diámetro de la varilla a usar.

En la siguiente tabla, que indica las "Características del acero a tensión" se observa la clasificación del acero, sometido a carga máxima de ruptura, tensión promedio, así como su límite elástico aparente, para cada uno de los aceros clasificados con diferente grado de dureza: Grado Estructural, Grado Intermedio y Grado Duro.

TABLA No. 1

CARACTERISTICAS DEL ACERO A TENSION.	ESTRUCTURAL	INTERMEDIO	DURO
CARGA MAXIMA DE RUPTURA ( kg/Cm .2)	3,900	4,900	5,600
	5,300	6,300	mínimo
TENSION EN EL ACERO $F_s \leq 0.5F_y$	1,265	1,400	1,700
LIMITE ELASTICO APARENTE $F_y$ (Kg/cm.2)	2,300	2,800	3,500
	mínimo	mínimo	mínimo

**DIAMETROS DE VARILLA DE ACERO PARA CONSTRUCCION.**

TABLA No. 2.

VARILLA No.	DIAMETRO (mm)	AREA (cm. 2)
2	6.4 (1/4")	0.32
3	9.5 (3/8")	0.71
4	12.7 (1/2")	1.27
5	15.9 (5/8")	1.98
6	19.1 (3/4")	2.85
7	22.2 (7/8")	3.88
8	25.4 (1")	5.07
9	28.6 (1 1/8")	6.42
10	31.8 (1 1/4")	7.94

En la tabla anterior (Tabla No. 2) aparecen todos los datos relacionados con los barras de refuerzo que para efecto del presente estudio se utilizarán en el cálculo de estructuras de concreto armado. Aunque las varillas se clasifican hasta la número 12, el presente trabajo se limita a escribir las que se usan con más frecuencia. Además todas las varillas son corrugadas, a excepción de la No. 2 (1/4"), que se considerará siempre lisa.

## CAPITULO II

### FLEXION EN VIGAS DE CONCRETO

#### ANALISIS CONVENCIONAL PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Existen diversos procedimientos que consisten en establecer un estado de deformaciones de tal manera que la sección se encuentre en equilibrio, o sea que la suma de las fuerzas a compresión que actúan en una sección transversal, sea igual a la suma de las fuerzas a tensión. La teoría convencional del concreto armado se deriva del hecho de que en condiciones normales de trabajo, los esfuerzos de los materiales no pasan de sus límites elásticos, es decir, que existe proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones.

Es por ello que para analizar el fenómeno de la flexión en las vigas de concreto armado se aceptan las siguientes hipótesis:

1. Toda sección plana antes de la deformación permanece plana después de ella. (HIPOTESIS DE NAVER)
2. El módulo de elasticidad del acero y del concreto se suponen constantes.
3. La tensión del par elástico interno es resistida totalmente por el acero de refuerzo.
4. Entre el acero y el concreto se supone una adherencia perfecta dentro de los límites elásticos de los materiales.

Partiendo de las suposiciones anteriores, y considerando la deformación causada por la aplicación de carga en una viga (ver figura No 4), si se hace un corte en la viga, suponiendo una sección rectangular, al analizarla se puede determinar si soporta en condiciones normales las cargas externas requeridas, a través de la fórmula de flexión, la cual puede calcularse fácilmente por medio de la fórmula  $F=Mc/I$ , donde "M" es el momento máximo en la sección de la viga, "c" es la distancia máxima del centro del corte de la viga a la fibra extrema, "I" es el momento de inercia de la sección de viga analizada..



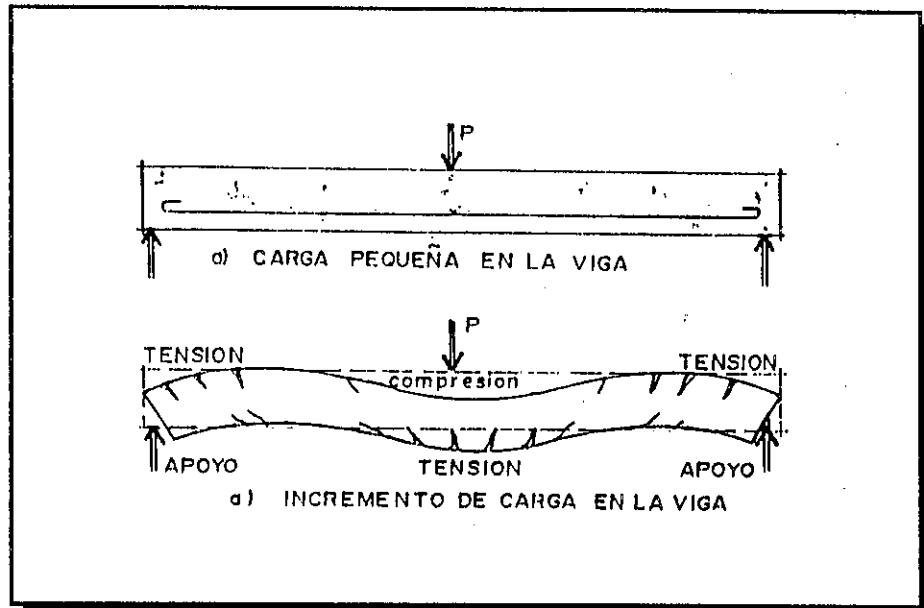


FIGURA No. 4: DEFORMACION DE UNA VIGA A) CON CARGA PEQUEÑA, B) DEFORMACION CAUSADA POR INCREMENTO DE CARGA HASTA SU AGRIETAMIENTO.

El anterior supuesto es posible si y solo si el material que conforma la viga, en este caso el concreto y acero es linealmente elástico homogéneo e isótropo.

Sin embargo en la carga última la viga de concreto reforzado no es ni homogénea ni elástica, haciendo con esto que la expresión anterior no sea aplicable para la evaluación de esfuerzos. Aún así los principios básicos de la teoría de la flexión pueden utilizarse para analizar las secciones transversales de las vigas de concreto reforzado, suponiendo que todos los materiales que la constituyen, alcancen sus capacidades antes de la falla, es decir tanto el acero como el concreto fallarán al mismo tiempo en el centro de la luz de la viga cuando se alcance su resistencia última.

En tal sentido debe tomarse en cuenta el criterio tanto de homogeneidad como de elasticidad en el concreto y acero, así como los cuatro postulados de la hipótesis anterior para poder analizar la resistencia a flexión.

Es necesario también, en una viga tener presente, que el efecto que en ella producen las cargas no depende sólo de la intensidad de las mismas, sino también del lugar donde se encuentran aplicadas.

## PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA A FLEXION

Teniendo en cuenta las anteriores suposiciones, se analiza el comportamiento de una sección transversal de una viga sujeta a flexión. Para satisfacer el equilibrio de

las fuerzas horizontales se asume que la fuerza de compresión y la de tensión están en equilibrio:

$$C = T$$

COMPRESION = TENSION

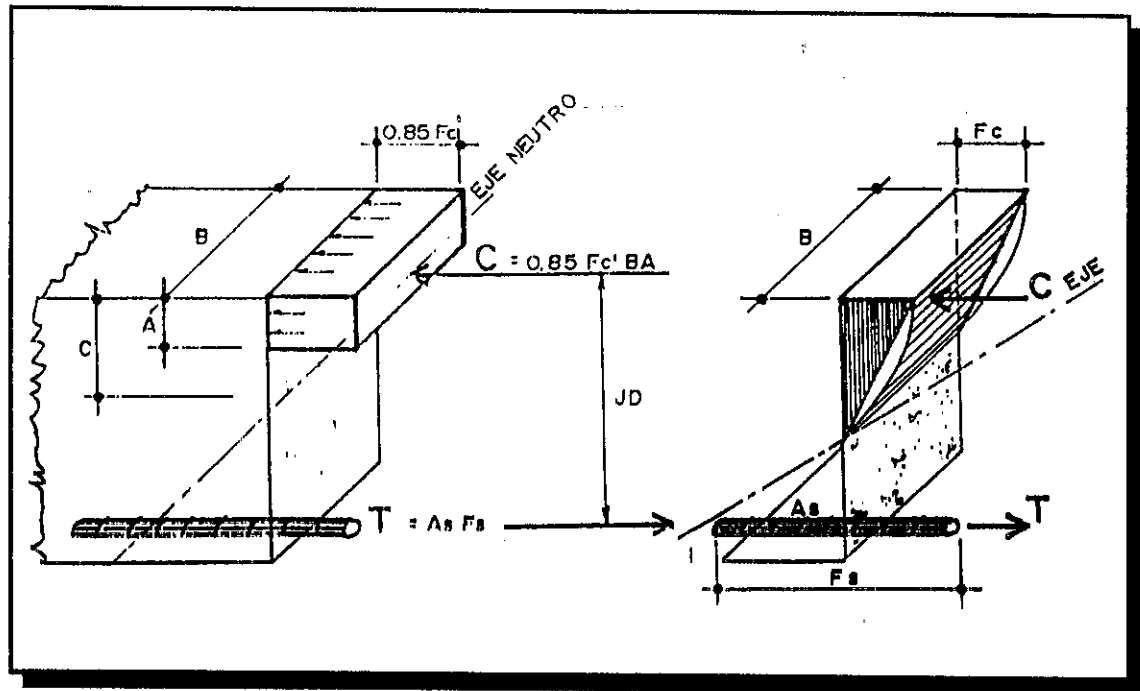


FIGURA No. 5a.: LA FIGURA MUESTRA DOS DIAGRAMAS; EL DE LA IZQUIERDA ES EL DIAGRAMA RECTANGULAR EQUIVALENTE Y EL DE LA DERECHA QUE REPRESENTA EL DIAGRAMA REAL DE DEFORMACIONES PARA UN VIGA SOMETIDA A ESFUERZOS DE FLEXION.

### NOMENCLATURA:

- $Jd$  = brazo de palanca.
- $b$  = ancho de la viga en la cara de compresión.
- $d$  = peralte de la viga medida a partir de la fibra extrema de compresión al centroide del área de acero.
- $h$  = Peralte total de la viga.
- $A_s$  = Área del acero de tensión.
- $\epsilon_c$  = deformación en la fibra extrema de compresión.
- $\epsilon_s$  = deformación en el nivel del acero de tensión.
- $F'_c$  = resistencia a la compresión del concreto.
- $F_s$  = esfuerzo en el acero de tensión.
- $E_s$  = módulo de elasticidad del acero.
- $E_c$  = módulo de elasticidad del concreto.

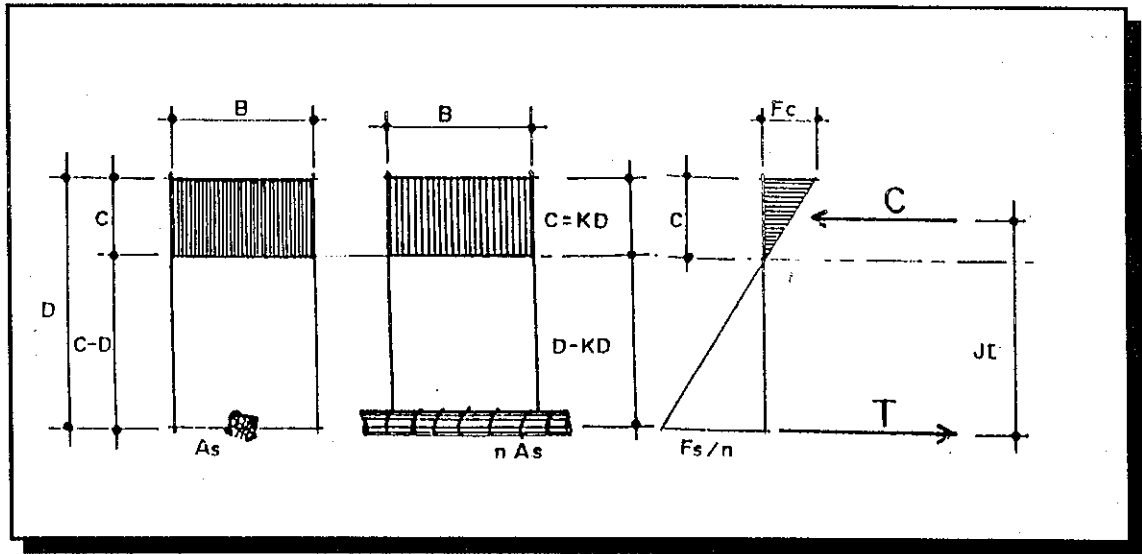


FIGURA No. 5b: SE OBSERVAN TRES GRAFICAS, LA PRIMERA DE ELLAS MUESTRA LA SECCION DE UNA VIGA DE FORMA CUADRADA, LA DEL CENTRO EL ESTADO DE DEFORMACIONES DE COMPRESION Y TENSION CON RESPECTO AL EJE O PLANO NEUTRO, Y LA ULTIMA EL AREA DEL BLOQUE DE ESFUERZOS EQUIVALENTE A COMPRESION COMO EL ACERO A TENSION.

De la gráfica anterior 5-b, y utilizando la ecuación de equilibrio se puede decir que:

$$C = T$$

$$0.85(F_c) \times (b) \times (a) = (A_s) \times (f_y) \quad \text{Ecuación 1}$$

$$a = \frac{(A_s) \times (f_y)}{0.85(F_c) \times (b)} \quad \text{Ecuación 2}$$

Del bloque rectangular equivalente se deduce que:

$$M_n = (A_s) \times (f_y) \times (j_d) \quad \text{ó} \quad M_n = (0.85 F_c) \times (b) \times (a) \times (j_d) \quad \text{Ecuación 3.}$$

DONDE  $j_d = d - a/2$

Sustituyendo en ecuación 3 :

$$M_n = (A_s) \times (F_y) \times (j_d)$$

$$M_n = (A_s) \times (F_y) \times (d - a/2).$$

o también

$$M_n = (0.85 F_c)(b)(a)(d-a/2)$$

$$\text{Si } R_o = \frac{(A_s)(F_y)}{(b)(d)}$$

ECUACION 4.

Sustituyendo la ecuación número 4, en la ecuación 1:

$$a = \frac{(A_s)(F_y)}{(0.85F_c)(b)} \quad \text{sustituyendo ecuacion 4}$$

$$\text{donde } A_s = (R_o)(b)(d)$$

$$a = \frac{(R_o)(b)(d)(F_y)}{(0.85F_c)(b)}$$

$$a = \frac{(R_o)(d)(F_y)}{(0.85F_c)}$$

ECUACION 5

Si  $C = T$ , la ecuación de momentos puede escribirse como:

$$M_n = (0.85F_c)(b)(a)(d-a/2)$$

ECUACION 6

En el cálculo de vigas sometidas a esfuerzos de flexión es importante tomar en consideración algunos factores importantes para el diseño tales como:

- La deformación permisible a compresión del concreto es de 0.003 pul/pul (sección Balanceada)
- El porcentaje del refuerzo balanceado debe ser:  
 $R_o \leq 0.5 R_o b$

## CAPITULO III

### SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION

En el capítulo anterior, se analizó la flexión para vigas simplemente apoyadas, consistiendo en establecer un estado de deformaciones tal que la sección se encuentre en equilibrio, o sea que la suma de las fuerzas de compresión que actúan en una sección transversal, sea igual a la suma de las fuerzas de tensión. Después de haber establecido dicho estado de equilibrio se calcula el momento de todas las fuerzas internas respecto a un eje cualquiera. El estado de equilibrio interno puede determinarse algebraicamente como se dedujo en el capítulo anterior o por tanteos.

También es frecuente encontrarse con vigas rectangulares doblemente armadas, cuando por razones de proyecto o estructurales se fija de antemano la escurdria de la viga y el momento flexionante que se debe de absorber es mayor que el momento resistente, se recurre a colocar acero de refuerzo en la zona de compresión, dando origen a la viga doblemente armada.

En cualquiera de los dos casos mencionados anteriormente se establece un parámetro común y consiste en el hecho de que las vigas tienen una sección rectangular y por lo tanto su análisis y resolución se limita a procedimientos muchas veces sencillos pero laboriosos.

No sucede lo mismo con vigas cuya sección por motivos tanto estructurales como arquitectónicos van más allá de una simple forma rectangular o cuadrada, hasta formas asimétricas que son el motivo del presente estudio.

Se llaman **SECCIONES ESPECIALES EN FLEXION** a aquellas secciones transversales de las vigas que no son rectangulares o T, o L.

En todos los casos anteriores, las secciones transversales son simétricas respecto a un eje vertical y el momento flexionante actúa en un plano vertical que pasa por dicho eje, cuando no se cumplen estas condiciones, la flexión es asimétrica.

## SECCION ASIMETRICA

El estudio de secciones especiales se limita a las más usuales que son la triangular, la exagonal, y la en forma de U. Generalmente estas secciones son asimétricas con respecto al eje horizontal y su centro de gravedad no coincide con el eje neutro de la figura, por tal razón no se puede utilizar el método del par elástico y llegar a un análisis como el de las vigas de sección rectangular.

El método que se utilizará es el de la "SECCION TRANSFORMADA" o "FORMULA DE LA ESCUADRILLA", pues resulta bastante sencillo el cálculo de los momentos de inercia de las secciones transversales especiales.

## METODO DE ANALISIS DE SECCION TRANSFORMADA

Cuando un diseñador se encuentre con una sección asimétrica con respecto a un eje, el primer problema a resolver sería el momento de inercia de la sección y luego el centro de masa de la misma, naturalmente si se analiza por el método del par elástico el problema se convierte en aburrido y engorroso y por ello el método de sección transformada es práctico.

Este método consiste en determinar un eje supuesto a una distancia  $X$  de la cara superior de la figura a analizar. El área superior al eje neutro supuesto va a formar lo que se llama sección transformada, como se ve en la gráfica.

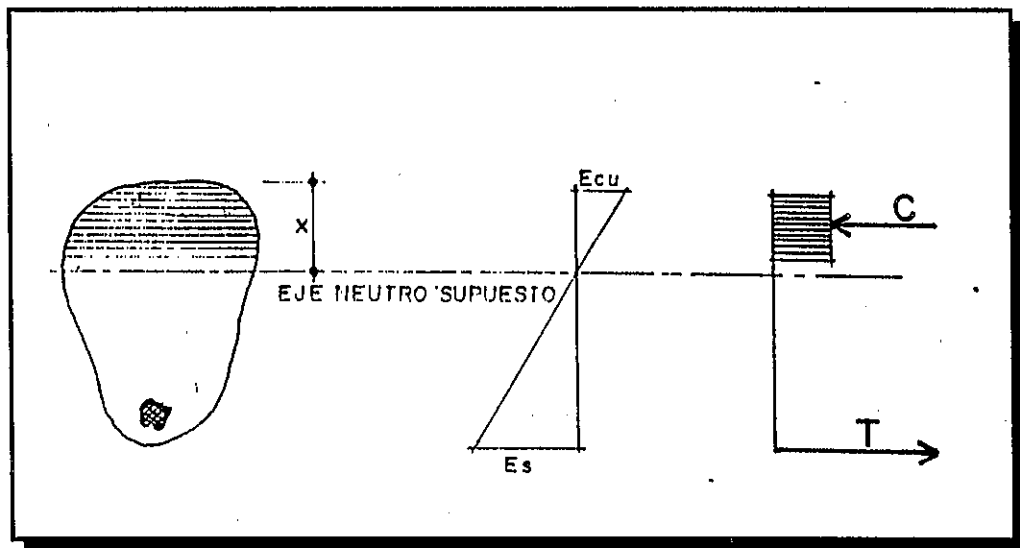


FIGURA No. 6: LA SECCION TRANSFORMADA CONSISTE EN DETERMINAR EL EJE NEUTRO DE UNA SECCION IRREGULAR COMO PUEDE OBSERVARSE EN LA SECCION DE LA IZQUIERDA, LA DISTANCIA  $X$  QUE HAY DE LA FIBRA SUPERIOR DE LA CARA A COMPRESION HACIA EL EJE NEUTRO ES LA INCOGNITA A RESOLVER PARA PODER ASI ENCONTRAR EL ESTADO DE DEFORMACIONES DE LA FIGURA IRREGULAR.

Posteriormente se toman momentos con respecto al eje neutro de la sección transformada, así como el cálculo del momento de inercia. Del cálculo del momento con respecto al eje neutro se obtiene una ecuación en función de la variable  $X$ , de esa forma se obtiene el valor de  $X$ , que no es más que la distancia o punto de aplicación del eje a partir de la cara superior de la figura.

Obtenido el valor de  $X$ , se puede calcular el momento de inercia de la sección transformada, pues el momento de inercia se encuentra en función de  $X$ , que es un dato conocido.

Y finalmente en base a los datos anteriormente obtenidos se encuentra el momento resistente del acero, recordando que la fatiga máxima a la tensión en la sección transformada es igual a  $f/n$ .

## SECCION TRIANGULAR

Para efecto de este análisis se propone una viga de sección triangular, doblemente reforzada de longitud  $L$ , y con las medidas y dimensiones como muestra la figura No. 7.

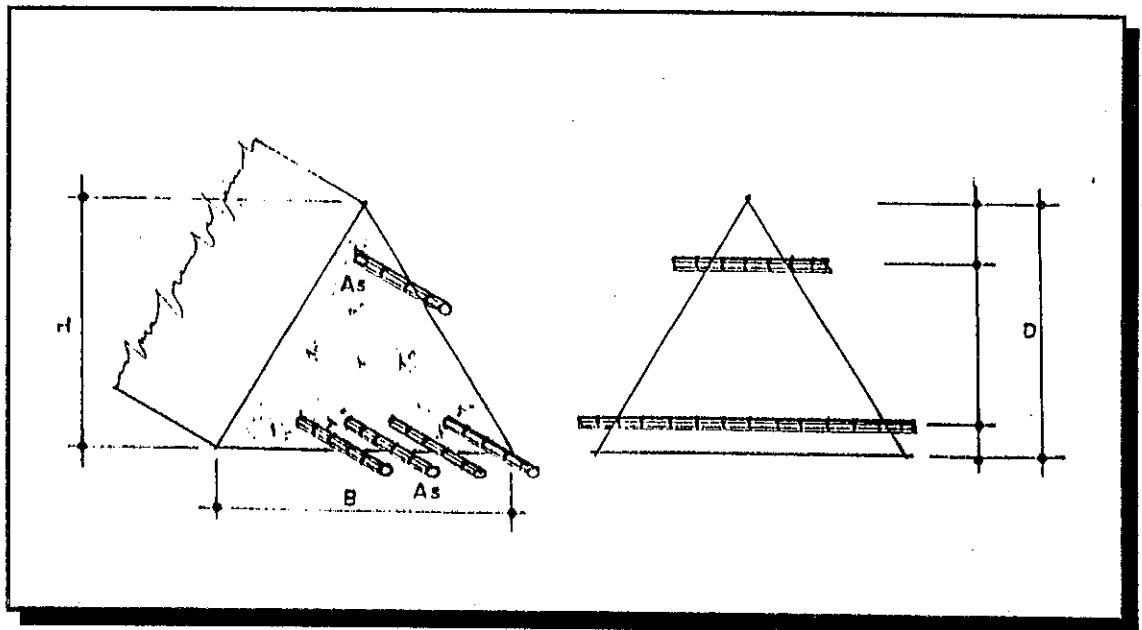


FIGURA No. 7: LA GRAFICA MUESTRA UNA SECCION TRIANGULAR PARA UNA VIGA SUJETA A ESFUERZOS DE FLEXION.

Es necesario para poder desarrollar la sección triangular tomar como conocidos los datos que a continuación se indican.

**NOMENCLATURA CONOCIDA:**

- $h$  = altura de la sección triangular (cms.)  
 $b$  = base de la sección triangular (cms.)  
 $d'$  = distancia de varilla de acero en cara de compresión a extremo superior de sección triangular (cms.)  
 $r$  = distancia de varilla de acero en cara de tensión, a extremo inferior de sección triangular (cms.)  
 $A_s$  = área de acero por tensión. (cms.2)  
 $A'_s$  = área de acero por compresión (cms. 2)  
 $a_s$  = área por varilla de acero (cms.2)  
 $F'_c$  = resistencia del concreto (kg/cm<sup>2</sup>)  
 $F_s$  = resistencia del acero (kg/cm<sup>2</sup>)  
 $f_s$  = esfuerzo unitario en área de compresión normal a una distancia  $X$ , desde el eje neutro de la sección transformada.  
 $f_c$  = esfuerzo unitario en área de tensión, normal desde el eje neutro de la sección transformada hasta ubicación varilla extrema de acero en tensión.  
 $*n$  = relación modular. (adimensional)

**NOMENCLATURA DESCONOCIDA:**

- $S$  = Base del triángulo superior de la sección transformada donde pasa el eje neutro (cms.)  
 $x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)  
 $I$  = Momento de inercia de sección transformada. (cm<sup>4</sup>)  
 $M$  = Momento de flexión en la sección (kg-cms).

Con los datos definidos de la nomenclatura anterior, se procede a trazar un eje imaginario que pasa a una distancia  $x$  del extremo superior del triángulo. En el caso de la sección triangular definida por el eje neutro se llamará sección transformada, quedando definida por un eje neutro hipotético, deduciendo a partir de dicho eje el análisis.

Se comprende que en éste como en los demás casos de secciones asimétricas, es necesario aceptar a usar la cantidad de acero que se requiera, descartando toda posibilidad económica, pues el procedimiento es antieconómico basándose en aspectos puramente arquitectónicos y de diseño.

Por tanto lo que a continuación se desarrollará no tiene nada que ver con la economía en un proyecto, más bien con su diseño y aplicación.



### 1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO

A.) Se encuentran momentos con respecto a la sección transformada: Para ello se establece una relación de triángulos, sin olvidarse que todos los datos son conocidos, a excepción de  $x$  que es la distancia donde se localiza el eje neutro como se observa en la figura número 8.

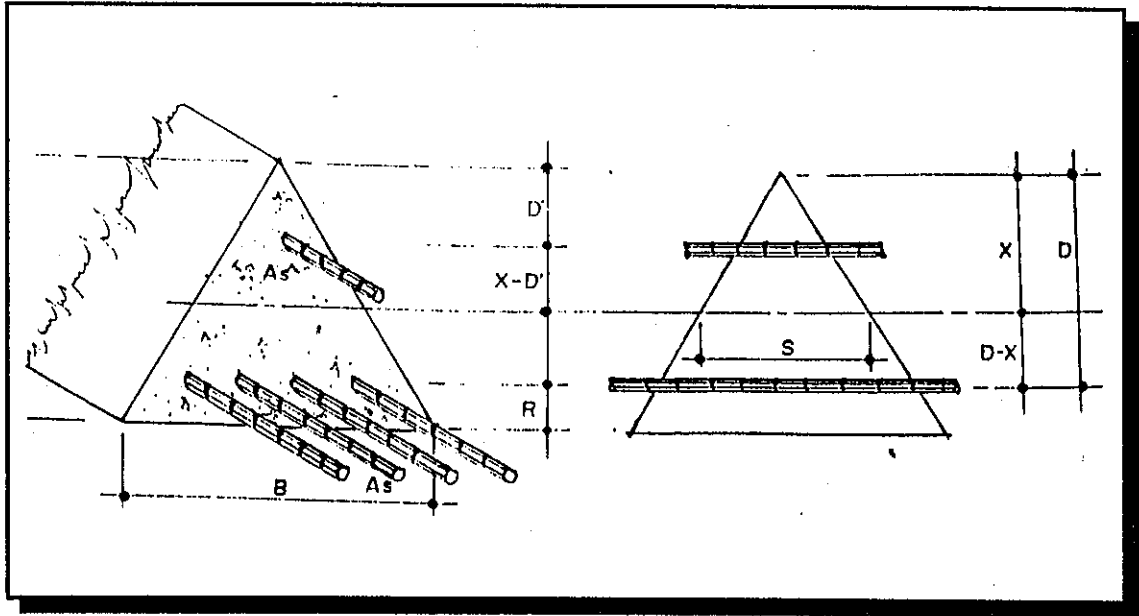


FIGURA No. 8: LA FIGURA MUESTRA EL PLANTEAMIENTO PARA ENCONTRAR EL EJE NEUTRO DE LA SECCION TRANSFORMADA, SUPONIENDO QUE 'X' SE ENCUENTRA DE LA FIBRA SUPERIOR AL EJE NEUTRO SUPUESTO.

Haciendo relación de triángulos :

$$\frac{s}{x} = \frac{b}{h}$$

$$s = \frac{b}{h} X$$

7  
EQUACION

B.) Calculando momento con respecto al eje neutro de la sección transformada:

Es importante recordar antes de calcular el momento que se están trabajando vigas doblemente armadas, y por tal razón se habla de un método

antieconómico. aparte de eso al ser vigas doblemente reforzadas se debe tomar en consideración, lo que el código ACI 318/63 dice:

**"Tomando en cuenta las deformaciones plásticas, el esfuerzo en el hierro de compresión en piezas sometidas a flexión, se tomará igual al doble de la calculada con la hipótesis elástica, pero sin exceder nunca el valor de la fatiga de tensión  $F_s$ ".**

Según lo anterior se puede definir como sigue:

$$* F_{sc} = (2n) F_{cs} ** \quad \text{en vigas y losas doblemente armadas.}$$

El código ACI, dice claramente que para calcular el esfuerzo en el hierro a compresión, se puede tomar como el doble del hierro a tensión pero sin exceder el valor de la fatiga, por tal razón se puede plantear el acero a compresión de la siguiente manera:

$$A_{sc} = (2n-1)A_s$$

ECUACION 8

La ecuación 8 es planteada como una alternativa dada por el código ACI 318/63, exclusivamente para vigas y losas doblemente reforzadas.

Al escribir la forma  $2n$ , se está tomando el doble del refuerzo, mientras que si se plantea  $(2n-1)$ , se garantiza no exceder del doble del esfuerzo para vigas doblemente armadas sometidas a flexión.

El área transformada será entonces igual a  $(2n-1)A_s$ , de tal manera que cuando el acero está en compresión, se multiplica su área por  $(2n-1)$ , para transformar la sección. El uso de esta área transformada se apega más a la teoría plástica que a la elástica.

Con la teoría del área transformada, se procede a calcular momentos con respecto al eje neutro de la sección transformada.

$$\sum_{\text{eje neutro}} \text{SUM. MOMENTO.} = 0 + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

\*  $F_{sc}$  = fatiga del acero en la zona de compresión.

\*\*  $F_{cs}$  = fatiga del concreto al nivel donde se encuentra el concreto. (Se hace la aclaración que al nivel del acero en compresión).

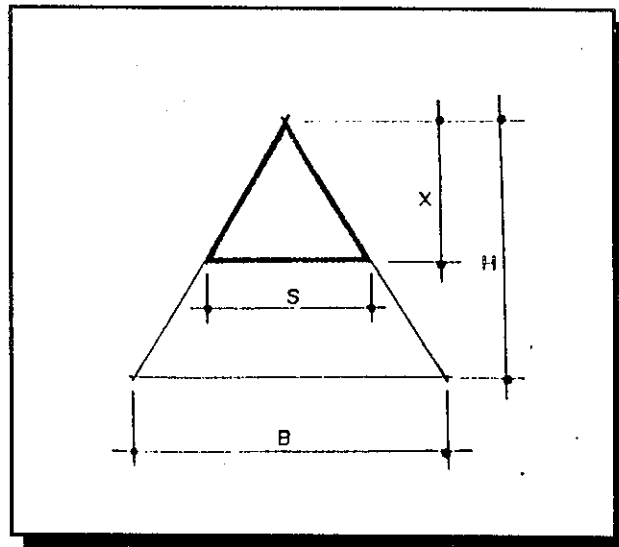


FIGURA No. 9: DETERMINACION DEL CENTROIDE X, A TRAVES DE IGUALDAD DE TRIANGULOS.

$$\frac{S \cdot X}{2} - \frac{X}{3} + (2n-1)A_s(X-d) - nA_s(d-X) = 0$$

donde :  $s = b/h \cdot X$

Sustituyendo el valor de S:

$$\frac{b \cdot X}{h} \cdot \frac{X}{2} - \frac{X}{3} + (2n-1)A_s(X-d) - nA_s(d-X) = 0$$

Resumiendo la expresión anterior:

$$\frac{b \cdot X^2}{6h} + A_s(2n-1)(X-d) - nA_s(d-X) = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se encuentra la siguiente expresión:

$$\frac{b \cdot X^3}{6 \cdot h} + 2n \cdot X \cdot A_s - X \cdot A_s - 2n \cdot d \cdot A_s + d \cdot A_s - n \cdot A_s \cdot d + n \cdot A_s \cdot X = 0$$

⑨  
ECUACION

Sustituyendo valores en ecuación ⑨, se obtiene una ecuación en función de X, que en este caso es la incógnita, quedando de este modo una ecuación o polinomio de tercer grado de la forma:

$$a X^3 + b X^2 + c X + d = 0$$

Donde la incógnita a despejar es X.

## 2. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA.

Si se toma el dato encontrado en la ecuación polinómica de tercer grado donde se obtuvo el valor de X y se sustituye en la ecuación 10, se puede encontrar de ese modo el valor de S, dado por la expresión:

$$S = \frac{b}{h} X \quad (\text{ver ecuación 7})$$

Donde b, h y X son conocidos, pudiéndose determinar de éste modo, la base "S" del triángulo pequeño que es donde pasa el eje neutro de la sección transformada, dicho eje se encuentra a una distancia conocida llamada X, tomada a partir del extremo superior del triángulo al eje neutro.

Una vez conocido X y S, se procede a encontrar el momento de inercia con respecto al eje neutro de la sección transformada, como se muestra en la siguiente figura. 10.

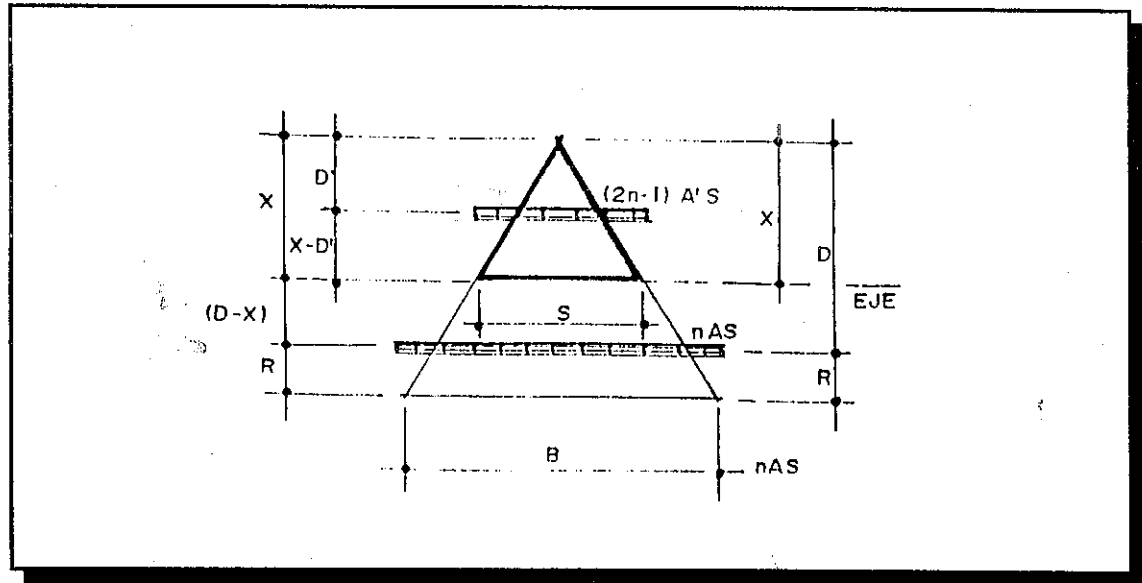


FIGURA No. 10: EN LA FIGURA EL VALOR DE 'X' Y 'S', SON CONOCIDOS, ENTONCES YA SE SABE LA UBICACION DEL EJE NEUTRO Y POR TANTO SE PUEDE CALCULAR EL VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA.

Se plantea la inercia de la sección triangular quedando así.

$$I = \frac{S \cdot X^3}{12} + A's(2n-1) (X-d)^2 + n'As(d-X)^2 \quad \text{ECUACION 10}$$

Como todos los datos planteados en la ecuación 10 son conocidos, se asume que se conoce la inercia de la sección transformada.

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

En toda sección transversal, se obtienen dos áreas, las cuales están definidas por el eje neutro, a través de dicho eje quedan determinadas dos caras. La primera que trabaja a compresión o sea la cara superior a partir del eje neutro, y la segunda que trabaja a tensión, o sea la cara inferior.

A.) Momento resistente del concreto:

Calculando el momento resistente del concreto aplicando la formula de momento se tiene:

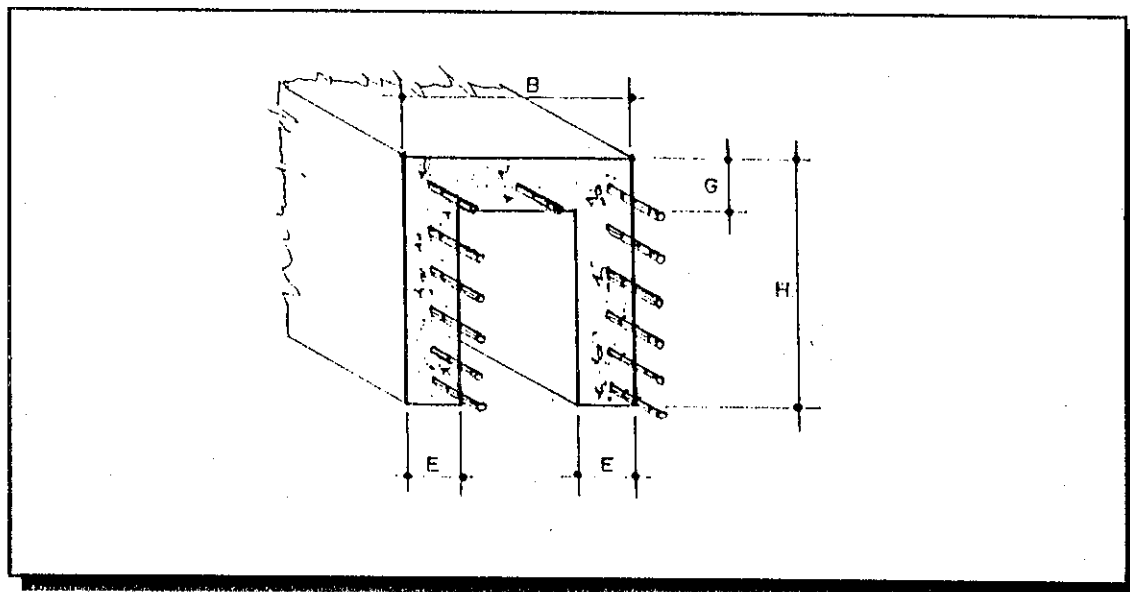


FIGURA No. 11: SECCIÓN DE UNA VIGA EN FORMA DE "U" INVERTIDA, NOTESE QUE EL ARMADO PUEDE VARIAR DEPENDIENDO DE LA CARGA Y OTROS FACTORES DE DISEÑO.

Se debe considerar que las medidas, tamaño y proporción de la sección, obedecen a un predimensionamiento hecho por parte del diseñador o proyectista, omitiendo para propósitos de este estudio los criterios de predimensionamiento, asumiendo una sección ya definida y en base a ella centrar el análisis. Conociendo la sección de la figura No.11, se describen los datos o nomenclatura conocida de dicha sección:

#### NOMENCLATURA CONOCIDA:

- $h$  = altura de la sección "U" (cms.)
- $b$  = base o ancho de la sección "U" (cms.)
- $d'$  = distancia de varilla de acero en cara de compresión a extremo superior de sección "U" (cms.)
- $d''$  = distancia de varilla de acero en cara de compresión, a extremo inferior de sección "U" (cms.)
- $y$  = separación entre varillas. (cms)
- $A_s$  = área de acero por tensión. (cms.2)
- $A'_s$  = área de acero por compresión (cms. 2)
- $a_s$  = área por varilla de acero
- $F'_c$  = resistencia del concreto ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )
- $F_s$  = resistencia del acero ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )
- $f_s$  = esfuerzo unitario en área de compresión normal a una distancia  $X$ , desde el eje neutro de la sección transformada ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )
- $f_c$  = esfuerzo unitario en área de tensión, normal desde el eje neutro de la sección transformada hasta ubicación varilla extrema de acero en tensión ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

- n = relación modular. (adimensional)
- e = espesor de una ala de la sección "U" (cms.)
- g = espesor de la base de la sección "U" (cms.)

**NOMENCLATURA DESCONOCIDA:**

- x = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)
- I = Momento de inercia de sección transformada. (cm<sup>4</sup>)
- M = Momento de flexión en la sección (kg-cms)

**1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO**

Se necesita saber la profundidad del eje neutro, para lo cual se define una profundidad X del eje neutro a partir del extremo superior de la sección (ver figura No 12), de esa manera se podrán conocer tanto la altura del eje neutro de la sección transformada, como las fuerzas que en ella actúan.

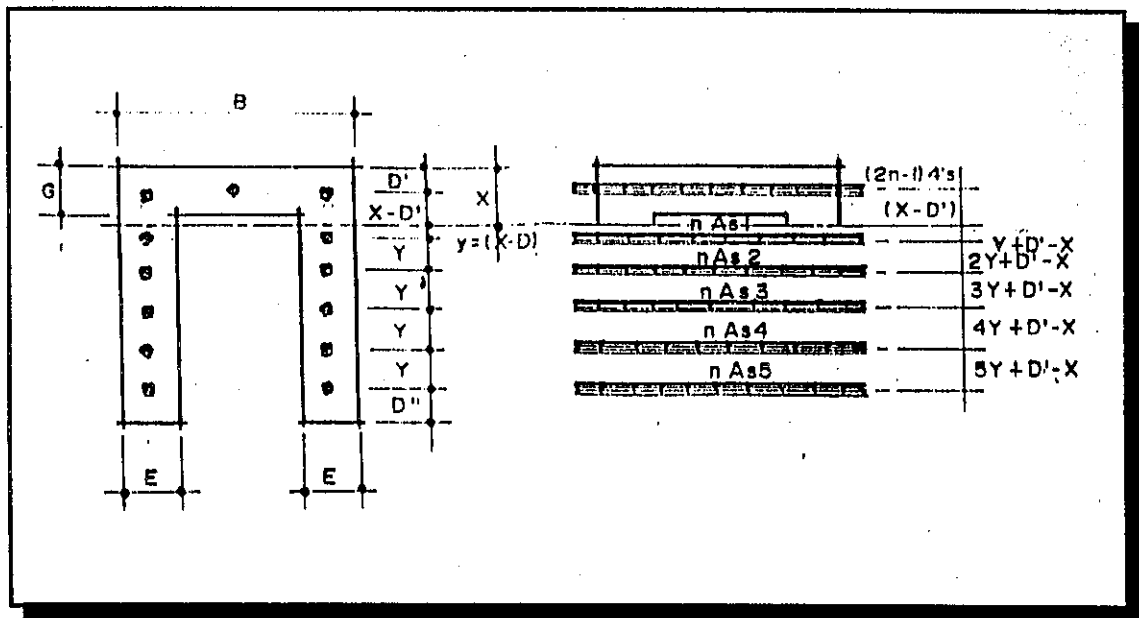


FIGURA No. 12: PUEDE OBSERVARSE LA DISTRIBUCION DE CADA UNA DE LAS VARILLAS DE HIERRO, ASI COMO LA UBICACION DEL EJE NEUTRO SUPUESTO A UNA DISTANCIA 'X', CON RESPECTO A LA FIBRA SUPERIOR DE LA CARA A COMPRESION

A.) Se encuentran momentos con respecto a la sección transformada:

El momento con respecto al eje neutro de la sección para encontrar el valor de X, puede calcularse separando el área que se muestra en la figura No 13, en tres

áreas.

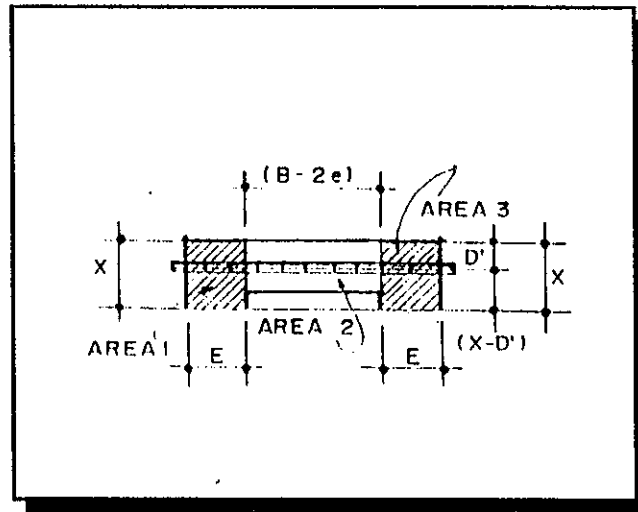


FIGURA No. 13: PARA ENCONTRAR EL VALOR DE X, SE CALCULA EL CENTROIDE DE LAS TRES ÁREAS QUE SE VEN EN LA FIGURA. (VER PLANTEAMIENTO ECUACION 11).

Haciendo girar las áreas en torno al eje neutro (eje horizontal), queda la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & e^2 X^2 + (b-2e)(g)(X-d) + A_s(2n-1)(X-d) \\
 & n'A_s1'(y+d-X) - n'A_s2'(2y+d-X) - n'A_s3'(3y+d-X) \\
 & - n'A_s4'(4y+d-X) - n'A_s5'(5y+d-X) = 0
 \end{aligned}$$

ECUACION 11

Despejando la ecuación No. 11, se obtiene una ecuación de segundo grado de la forma:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

la cual se resuelve a través de la ecuación cuadrática para encontrar el valor de X:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$



No se debe olvidar que al calcular la ecuación No.11 el valor de  $A's$ , equivale al número de varillas en la cara de compresión como puede observarse en la figura No. 12, se trata de tres varillas del área de acero a que corresponda cada una según su diseño, lo mismo ocurre con  $As1, As2, As3, As4, As5$ , donde el área de cada una de ellas corresponde a la suma del área de dos varillas de acero usadas en el diseño. (el número y área de varilla de acero lo determina el diseño)

B.) Calculando momento con respecto al eje neutro de la sección transformada:

Al calcular el momento de inercia de la sección transformada se hace más rápido si se asume que toda el área está llena, de ese modo se obtiene la inercia del rectángulo completo como lo muestra la figura del centro, luego se le resta la inercia del rectángulo pequeño figura de la derecha, para así obtener la inercia neta de la figura de la izquierda, (VER FIGURA 14)

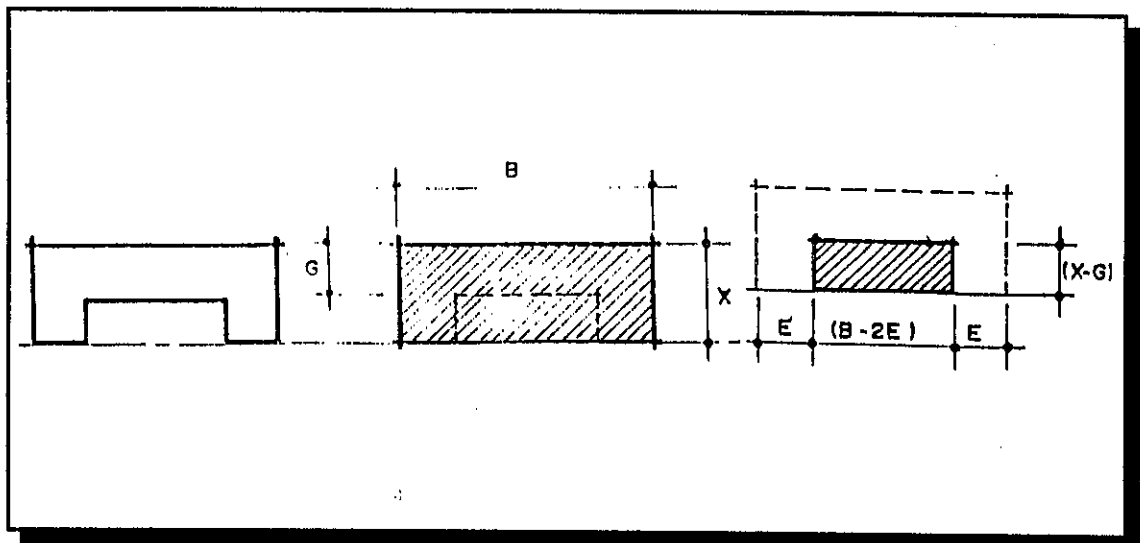


FIGURA No. 14: LA INERCIA DE LA FIGURA DE LA IZQUIERDA SE CALCULA RESTÁNDOLE LA INERCIA DEL BLOQUE TOTAL DEL CENTRO ASHURADO MENOS LA INERCIA DEL BLOQUE PEQUEÑO DE LA IZQUIERDA ASHURADO (VER ECUACION 13)

Conviene recordar que para encontrar la inercia de la figura 14, se hace necesario utilizar el "Teorema de los ejes paralelos", para el cálculo de inercia de una sección rectangular, pues el eje no pasa por el centro de la sección.

$$I_{\text{eje neutro}} = I_{xc} + A^* (d)^2$$

La cual puede resumirse como sigue:

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{(b)X^3}{12} + (b) \cdot (X) \frac{X}{2}$$

Operando se logra la expresión:

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{bX^3}{3} \quad \text{ECUACION 12}$$

Encontrando el momento de inercia de la sección transformada (VER FIGURA No .14)

$$I = \frac{bX^3}{3} - \frac{(b-2e)(X-g)^3}{3} + (2n-1) \cdot A_s(X-d)^2 + n \cdot A_s1(y+d-X)^2$$

$$+ n \cdot A_s2(2y+d-X)^2 + n \cdot A_s3(3y+d-X)^2 + n \cdot A_s4(4y+d-X)^2$$

$$+ n \cdot A_s5(5y+d-X)^2 = 0 \quad \text{ECUACION 13}$$

Si se sustituyen todos los datos conocidos en la ecuación 13, se llega al valor de la inercia de la sección transformada.

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_i}{X}$$

#### A.) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{F_c \cdot I}{X}$$

Donde  $F_c$ ,  $X$  e  $I$  son conocidos.

#### B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como se obtiene el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s \cdot I}{n(5y+d'-X)}$$

Comparando los momentos anteriores, se escoge el que numéricamente sea menor, por ello el menor se designará como momento resistente.

$$M_r = M_s \text{ ó } M_c. \text{ (el de menor valor) (kg-cms)}$$

## SECCION L

El cálculo de vigas de sección "L" es parecido a la sección "U", puede decirse que es una sección "U" incompleta por lo tanto su resolución tratará de hacerse acorde a la sección anterior. Se ha mencionado que el propósito de este análisis no es en sí el diseño de la sección, sino la ejecución del método de sección transformada, sin embargo en ésta sección se darán algunas especificaciones para su buen diseño, por considerar que la sección "L", es mas frecuente encontrar en problemas de la vida diaria.

## ESPECIFICACIONES PARA DISEÑO

- El ancho del patín no excederá a cada lado del alma la cuarta parte del claro
- El ancho del patín no excederá a cada lado del alma de la mitad de la distancia entre paños de nervaduras.
- El ancho del patín tampoco excederá a cada lado del alma de ocho veces el espesor del patín.

A continuación se define una sección "L" invertida, como se observa en la figura No 15, basada en especificaciones de diseño.

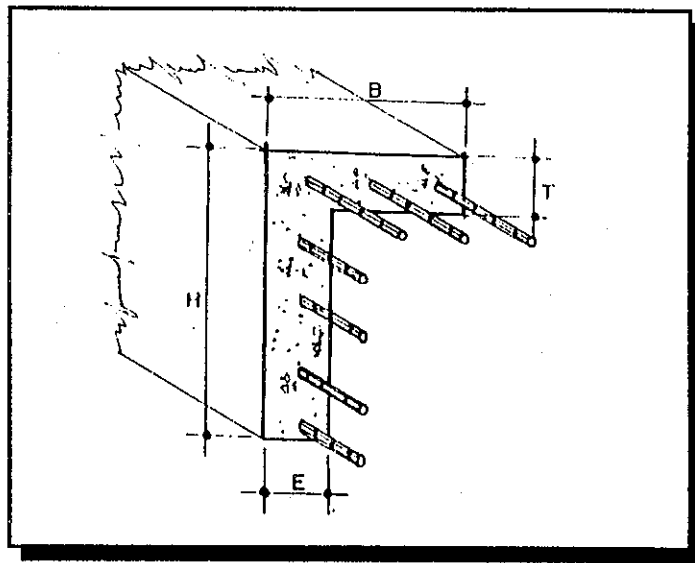


FIGURA No. 15: SECCIÓN "L" INVERTIDA DE UNA VIGA DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDA A ESFUERZOS DE FLEXION

## NOMENCLATURA CONOCIDA:

$h$  = altura de la sección "L" (cms.)

$b$  = base o ancho de la sección "L" (cms.)

$d'$  = distancia de varilla de acero en cara de compresión a extremo superior de sección "L" (cms.)

$y$  = separación entre varillas según armado. (cms)

$A_s$  = área de acero por tensión. (cms. 2)

$A'_s$  = área de acero por compresión (cms. 2)

$a_s$  = área por varilla de acero (cms. 2)

$F'_c$  = resistencia del concreto (kg/cm<sup>2</sup>)

$F_s$  = resistencia del acero (kg/cm<sup>2</sup>)

$f_s$  = esfuerzo unitario en área de compresión normal a una distancia  $X$ , desde el eje neutro de la sección transformada (kg/cm<sup>2</sup>)

$f_c$  = esfuerzo unitario en área de tensión, normal desde el eje neutro de la sección transformada hasta ubicación varilla extrema de acero en tensión ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )  
 $n$  = relación modular. (adimensional)  
 $e$  = espesor de una ala de la sección "L" (cms.)  
 $t$  = espesor de la base de la sección "L" (cms.)

#### NOMENCLATURA DESCONOCIDA:

$x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)  
 $I$  = Momento de inercia de sección transformada. ( $\text{cm}^4$ )  
 $M$  = Momento de flexión en la sección ( $\text{kg-cms}$ )

### 1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO

El eje neutro como en todos los casos se plantea a una distancia  $X$  (desconocida), medida hacia la parte superior de la sección, como se observa en la figura No 16.

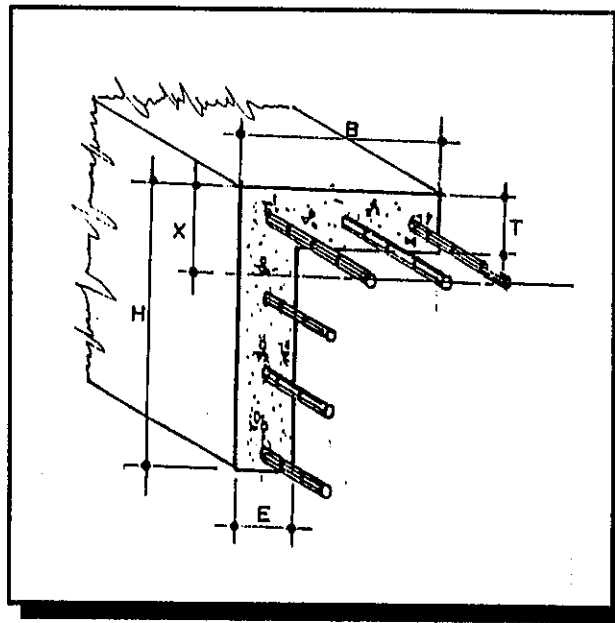


FIGURA No. 16: UBICACION DEL EJE NEUTRO SUPUESTO A UNA DISTANCIA  $X$ , DESCONOCIDA QUE VA DEL EJE NEUTRO A EXTREMO SUPERIOR DE CARA A COMPRESION.

A.) Se encuentran momentos con respecto a la sección transformada:

Para calcular momentos con respecto a la sección transformada basta con calcular

las áreas como se muestra en la figura No 17.

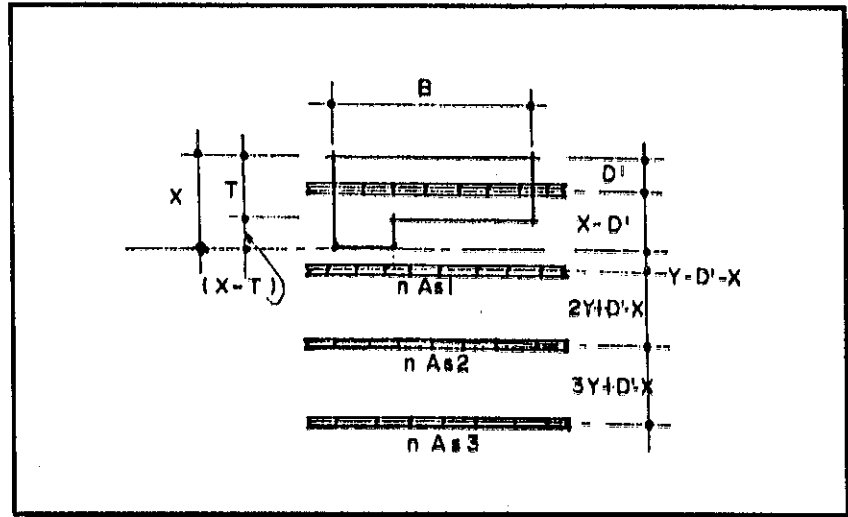


FIGURA No. 17: UBICACION DEL EJE NEUTRO DE LA FIGURA PARA ELLO SE TOMAN EN CUENTA LAS DISTANCIAS DE LAS VARILLAS DE ACERO CON RESPECTO AL EJE SUPUESTO.

Planteando la ecuación queda la siguiente expresión:

$$(X)(X/2) + (b-e)(t)(X-d) + A's(2n-1)(X-d)-n \cdot A's1(y+d-X) -$$

$$n \cdot A's2(2y+d-X)=0$$

ECUACION 14

Despejando la ecuación No. 14, queda una ecuación de segundo grado de la forma:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

la cual se resuelve a través de la ecuación cuadrática para encontrar el valor de X:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2 * (a)}$$

No se debe olvidar que al calcular la ecuación No.14 el valor de  $A_s$ , equivale al número de varillas en la cara de compresión como puede observarse en la figura No. 17 se trata de TRES varillas de acero en la cara a compresion cada una según su diseño, lo mismo ocurre con  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ , donde el área corresponde a la suma del área de las varillas de acero usadas en cada eje. (el número y. área de varilla de acero lo determina su diseño)

B.) Calculando momento con respecto al eje neutro de la sección transformada:

Observando la figura 18, y utilizando el teorema de los ejes paralelos se procede a calcular el momento de inercia de la sección como sigue a continuación.

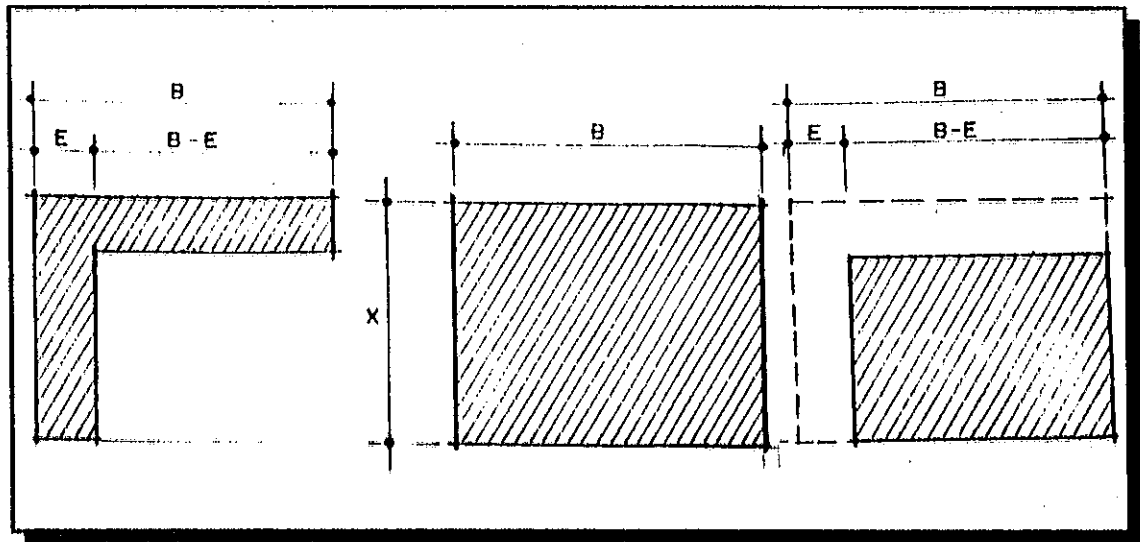


FIGURA No. 18: MOMENTO DE INERCIA DE LA FIGURA DE LA IZQUIERDA ES IGUAL AL MOMENTO DE LA FIGURA DEL CENTRO MENOS EL MOMENTO DE INERCIA DE LA FIGURA PUNTEADA DE LA DERECHA

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{bX^3}{3}$$

Calculando el momento de inercia:

$$I = \frac{bX^3}{3} - \frac{(b-e)(X-t)^3}{3} + (2n-1)A_s(X-d)^2 + nA_s1'(y+d-X)^2 + nA_s2'(2y+d-X)^2$$

Si se sustituyen todos los datos conocidos en la ecuación 16, se llega al valor de la inercia de la sección transformada.

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_l}{X}$$

#### A.) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{F_c I}{X}$$

Donde  $F_c$ ,  $X$  e  $I$  son conocidos.

#### B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como calculamos el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s I}{n(2y+d-X)}$$

Comparando los momentos anteriores, se escoge el que numéricamente sea menor,  $M_s$  ó  $M_d$ . Al menor de ellos se le designa el valor del momento resistente  $M_r$ .



$$M_r = M_s \text{ ó } M_c. \text{ (el de menor valor) (kg-cms)}$$

## SECCION PENTAGONAL:

Por definición Pentágono es una figura que tiene cinco lados iguales, para éste análisis se usará una sección pentagonal como se muestra en la figura 19. La cual es asimétrica con respecto a un eje horizontal, lo cual quiere decir que tanto su Inercia como su centro de masa no coinciden de tal manera que al trazar un eje neutro imaginario a la altura  $X$  del extremo superior, se definirá el punto o eje en torno al cual gira la sección.

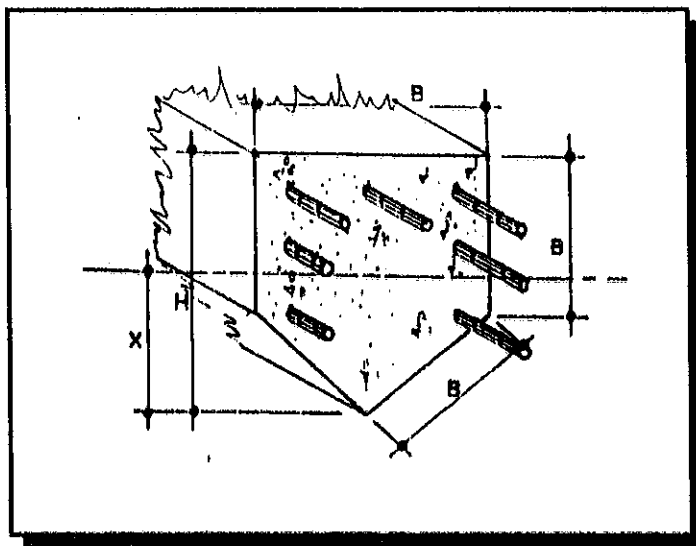


FIGURA No. 19: SECCION DE UNA VIGA DE 5 LADOS.

### NOMENCLATURA CONOCIDA:

- $h$  = altura de la sección Pentagonal (cms.)
- $b$  = base o ancho de cada lado de sección Pentagonal (cms.)
- $d$  = distancia de varilla de acero en cara de compresión a extremo superior de sección Pentagonal (cms.)
- $d'$  = distancia de varilla de acero en cara de tensión al extremo inferior de sección Pentagonal (cms.)
- $y$  = separación entre varillas según armado. (cms)
- $A_s$  = área de acero por tensión. (cms.2)
- $A'_s$  = área de acero por compresión (cms. 2)
- $a_s$  = área por varilla de acero (cms. 2)
- $F'_c$  = resistencia del concreto (kg/cm<sup>2</sup>)
- $F_s$  = resistencia del acero (kg/cm<sup>2</sup>)

$f_c$  = esfuerzo unitario en área de tensión, normal desde el eje neutro de la sección transformada hasta ubicación de varilla extrema de acero en tensión ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

$n$  = relación modular. (adimensional)

#### NOMENCLATURA DESCONOCIDA:

$x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)

$I$  = Momento de inercia de sección transformada. ( $\text{cm}^4$ )

$M$  = Momento de flexión en la sección ( $\text{kg-cms}$ )

### 1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO

Es importante enfatizar en que el armado y la sección a usar son como se ha mencionado anteriormente características de diseño arquitectónico y no necesariamente se tiene que plantear una sección como la definida, pues aunque sea pentagonal puede ir de cabeza o en cualquier posición, sin embargo el análisis a través del método de la sección transformada da una solución a cualquier sección asimétrica. Por tanto el armado del hierro de la presente sección como en las anteriores, puede variar dependiendo de la posición en que se encuentre la sección y del diseño del proyectista.

Por tanto se supondrá una sección pentagonal hacia abajo como se muestra en la figura No. 20.

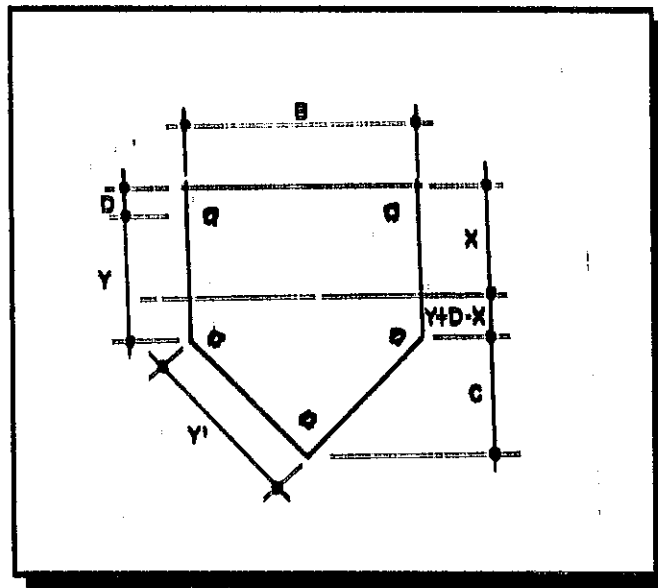


FIGURA No. 20: DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO, UN CASO A UNA DISTANCIA  $x$  DE LA FIBRA SUPERIOR AL EJE SUPUESTO.

A.) Se encuentran momentos con respecto a la sección transformada:

Al calcular momentos con respecto al eje neutro de la sección trapezoidal transformada; se obtiene el diagrama de la figura 21.

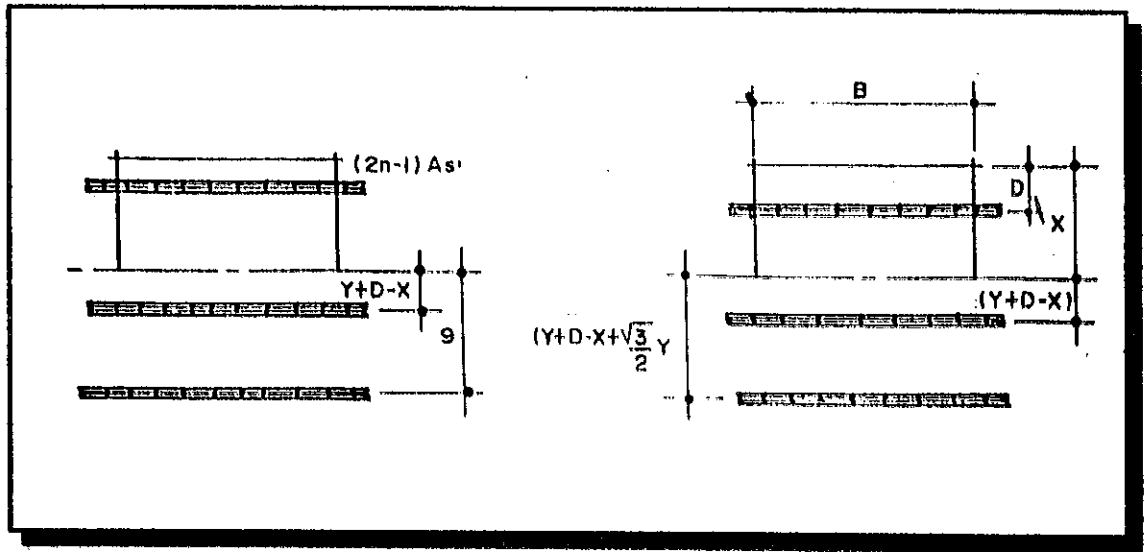


FIGURA No. 21: MOMENTO DE INERCIA EN TORNO AL EJE NEUTRO DE LA SECCION TRANSFORMADA, TOMANDO EN CUENTA LAS DISTANCIAS DE CADA UNA DE LAS VARILLAS DE ACERO CON RESPECTO AL EJE NEUTRO.

Planteando la ecuación en torno al eje neutro; se obtiene:

$$(b)(X/2) + A's(X-d) - n(y+d-x) - n'As_2'(y+d'-X) - n(1.866y+d-X) = 0$$

ECUACION 16

Despejando la ecuación No. 16, queda una ecuación de segundo grado de la forma:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

la cual se resuelve a través de la ecuación cuadrática para encontrar el valor de X:

$$X_2 = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

C: El valor de  $c$  se calcula sumando la altura del triángulo definido por las varillas de la parte inferior del triángulo quedando la altura del triángulo  $(\sqrt{3})/2$ .

B.) Calculando momento con respecto al eje neutro de la sección transformada:

La inercia de la sección transformada según figura No 22, es sencilla basta con calcular la inercia de un cuadrado.

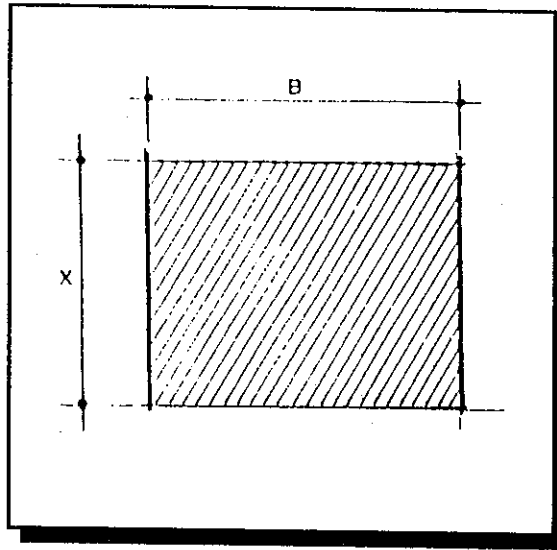


FIGURA 22 : LA INERCIA DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA CORRESPONDE AL CUADRADO QUE SE OBSERVA EN LA FIGURA.

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{b \cdot X^3}{3}$$

Calculando el momento de inercia:

$$I = \frac{bX^3}{3} + A_s(2n-1)(X-d)^3 + nA_sI(y+d-X)^3 + nA_sI(1.866y+d-X)^3 = 0$$

ECUACION 17

Si se sustituyen todos los datos conocidos en ecuación 17, se llega al valor

de la inercia de la sección transformada.

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_l}{X}$$

#### A.) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{f_c' I}{X}$$

Donde  $F_c$ ,  $X$  e  $I$  son conocidos.

#### B.) Momento resistente del acero:

Se encuentra el momento resistente del acero del mismo modo como se calcula el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{f_s' I}{n(1.866y+d'-X)}$$

Comparando los momentos anteriores, se escoge el que numéricamente sea menor,  $M_s$  ó  $M_c$ . Al menor de ellos se le designa el valor del momento resistente  $M_r$ .

$$M_r = M_s \text{ ó } M_c. \text{ (el de menor valor) (kg-cms)}$$

## CAPITULO IV

### DISEÑO DE SECCIONES VARIABLES

Se presentan a continuación las secciones analizadas en el capítulo anterior, con la diferencia que se obtendrán datos numéricos. Si se supone que para cada una de las secciones triangular, U, L y trapezoidal, ya existe un diseño de tal manera que la sección está predimensionada, el objetivo será calcular cada una de las secciones anteriormente desarrolladas..

En la mayoría de los casos, cuando se hace el diseño de la sección de una viga, es importante y común imponer la condición de que los materiales (acero y concreto) alcancen sus fatigas máximas de trabajo.

Naturalmente diseñar la viga dentro de la sección balanceada es hacerlo en las mejores condiciones de trabajo, sin embargo, son muchas las ocasiones en que por razones arquitectónicas, o bien por imposiciones de economía, quedan fijas de antemano las dimensiones de la viga. Esta es la razón por la cual surge la necesidad de diseñar no solo las secciones especiales descritas sino que muchas más. Lo importante es que el lector conozca a través de las cuatro secciones analizadas y desarrolladas, la metodología y la facilidad con que puede calcularse cualquier sección, donde su centro de masa no coincide con su inercia.

Hay que recordar que el método que se presenta, se constituye en la herramienta para poder desarrollar cualquier sección, por ejemplo la sección triangular puede verse como un triángulo normal o con la base hacia arriba, de tal manera que el triángulo pueda manipularse a conveniencia del requerimiento arquitectónico. Lo mismo puede suceder con la sección "U" que se puede calcular como "U" y como "U invertida", donde lo interesante es conocer el concepto para poder desarrollarla.

### DISEÑO DE SECCION TRIANGULAR

A continuación se calculará la sección triangular tal y como fué analizada en el capítulo anterior suponiendo que la viga ya fue diseñada en su longitud, peralte, altura, ancho, armado y recubrimientos, que en este caso se escapan del objetivo de este

estudio, limitándose a determinar el momento resistente de la sección triangular. De esta forma para no hacer muy extenso el estudio, se plantea una sección ya dimensionada y establecida con ciertos datos de diseño que harán el cálculo más práctico y rápido.

Además no interesa la longitud de la viga, ni la aplicación de sus cargas, por suponer que ya han sido analizadas y en base a ellas planteada la sección de la viga.

EJEMPLO: Determinar el momento resistente de la sección triangular ilustrada en la figura No. 23.

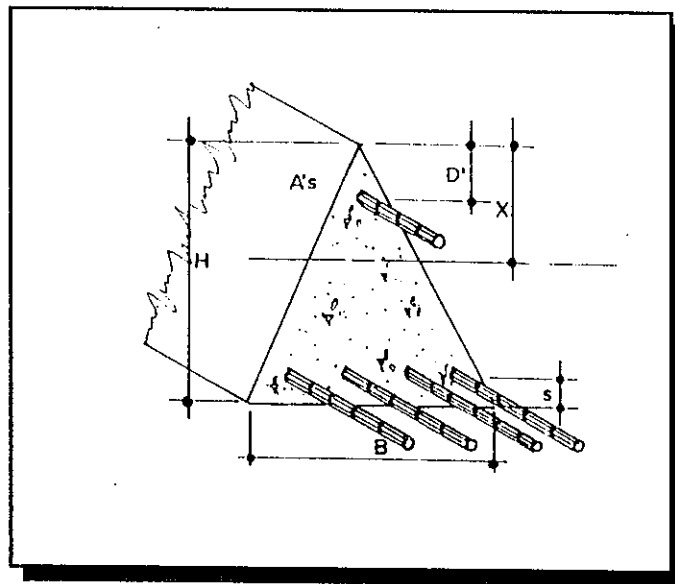


FIGURA No. 23: EJEMPLO DE VIGA DE SECCION TRIANGULAR SOMETIDA A ESFUERZOS DE FLEXION.

**DATOS:**

$$h = 120 \text{ cms}$$

$$b = 80 \text{ cms.}$$

$$d' = 10 \text{ cms.}$$

$$r = 5 \text{ cms.}$$

$$A_s = 15.48 \text{ cms}^2. \text{ (4 varillas No.7)}$$

$$A_s' = 3.87 \text{ cms}^2. \text{ (1 varilla No.7)}$$

$$a_s = 3.87 \text{ cms}^2. \text{ Por varilla.}$$

$$F_c' = 140 \text{ kg/cm}^2.$$

$$F_s = 1265 \text{ kg/cm}^2.$$

$$f_c = 63 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = 12.$$

## NOMENCLATURA DESCONOCIDA:

- $s$  = base del triángulo superior de la sección transformada donde pasa el eje neutro (cms.)  
 $X$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)  
 $I$  = Momento de inercia de sección transformada. (cm<sup>4</sup>)  
 $M$  = Momento de flexión en la sección (kg-cms)

## SOLUCION:

## 1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO

Haciendo relación de triángulos:

$$\frac{s}{80} = \frac{X}{120}$$

$$s = \frac{X \cdot 80}{120}$$

$$s = \frac{2}{3} X$$

Tomando momento con respecto al eje neutro de la sección transformada:  
(figura 24)

$$\frac{sx}{2} + \frac{x}{3} + (2n-1)A_s(X-d) - nA_s(d-X) = 0$$

donde:  $s = (b/h) \cdot X$

Sustituyendo el valor de  $s$ :



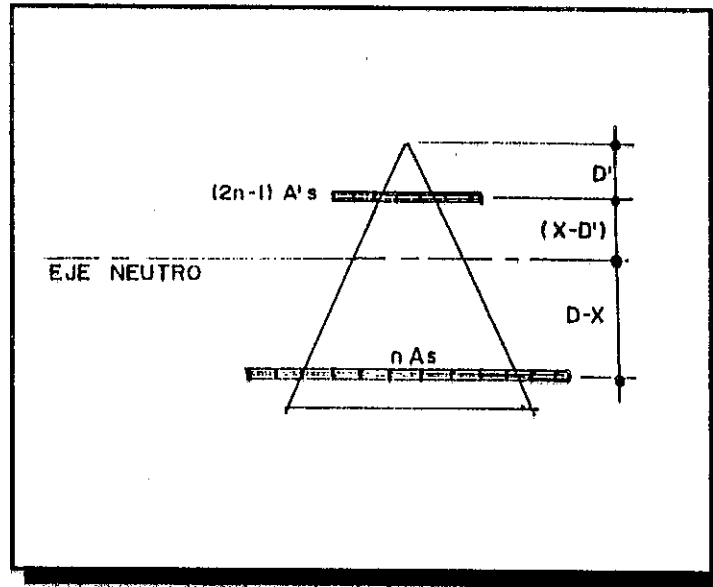


FIGURA No. 24: EN LA FIGURA PUEDE VERSE QUE EL MOMENTO QUE ACTUA EN EL TRIANGULO ESTA DETERMINADO POR EL AREA DEL TRIANGULO PEQUEÑO SOBRE EL EJE NEUTRO Y LAS VARRILLAS DE ACERO.

$$\frac{bX}{h} \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{X}{3} + (2n-1)A's(X-d) - nA_s(d-X) = 0$$

Resumiendo la expresión anterior:

$$I = \frac{bX^3}{6h} + A's(2n-1)(X-d) - n'A_s(d-X) = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se encuentra la siguiente expresión:

$$\frac{bX^3}{6h} + 2n'X'A's = XA's - 2n'd'A's + dXA's - n'd'A's + n'A_s'X = 0$$

sustituyendo datos se tiene:

$$\frac{80X^3}{6 \cdot 120} + 2(12)X(3.97) - X^2(3.97) - 2(12)(10)(3.97) + (10)(3.87) - (12)(15.48)$$

$$(10) - (12)(115) + (12)X = 0$$

resolviendo:

$$\frac{X^3}{9} + 92.88X - 3.87X^2 - 928.8 + 38.7 - 21362.4 + 185.76X = 0$$

$$\frac{X^3}{9} + 274.77X - 22252.5 = 0$$

multiplicando por 9 toda la expresión:

$$X^3 + 2472.93X - 200272.5 = 0$$

Resolviendo el polinomio de tercer grado:

$$X = 44.75 \text{ cms.}$$

## 2. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA.

$$I = \frac{(sX)^3}{12} + A's(2n-1)(X-d)^2 + n'A's(d-X)^2$$

$$\text{donde } s = \frac{80}{120} \cdot (44.75)$$

$$s = 29.83 \text{ cms.}$$

$$I = \frac{(29.83)(44.75)^3}{12} + 3.87(212-1)(X-10)^2 + 1215.48(115-X)^2$$

$$I = 222767.14 + 89.01(34.75)^2 + 185.76(70.25)^2$$

$$I = 222767.14 + 107485.14 + 916737.21$$

$$I = 1246989.49 \text{ cm}^4$$

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

#### A.) Momento resistente del concreto:

Si se calcula el momento resistente del concreto aplicando la formula de momento se tiene:

$$M_c = \frac{F_c' I}{X}$$

$$M_c = \frac{63 \cdot 1246989.49}{44.75}$$

$$M_c = 1755538.28 \text{ kg-cm.}$$

#### B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como se calcula el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s}{n(d-X)}$$

$$M_s = \frac{12651246989.49}{12(115-44.75)}$$

$$M_s = 1871223.85 \text{ kg-cm.}$$

El momento resistente de la sección es el menor valor de los calculados, en consecuencia se deduce:

$$M_r = M_c$$

$$M_r = 1735538.28 \text{ kg-cm.}$$

## DISEÑO DE SECCION U

EJEMPLO: Calcular el momento resistente de la sección "U", que se muestra en la figura No 25.

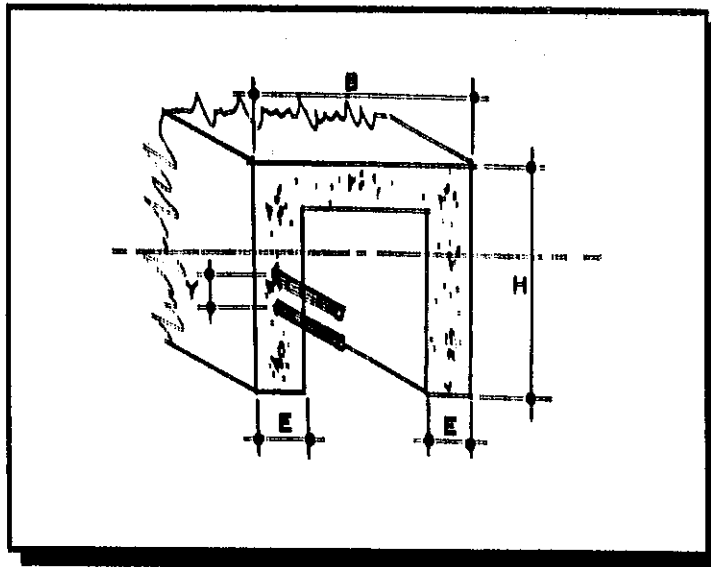


FIGURA No. 25: VIGA CON SECCION EN FORMA DE U INVERTIDA.

**DATOS:**

$$h = 135 \text{ cms.}$$

$$b = 90 \text{ cms.}$$

$$d' = 5 \text{ cms.}$$

$$e = 20 \text{ cms.}$$

$$g = 10 \text{ cms.}$$

$$y = 25 \text{ cms.}$$

$$A_s = 25.74 \text{ cms}^2. \text{ (13 varillas No.5)}$$

$$A'_s = 5.94 \text{ cms}^2. \text{ (3 varilla No.5)}$$

$$a_s = 1.98 \text{ cms}^2. \text{ Por varilla.}$$

$$F'_c = 140 \text{ kg/cm}^2.$$

$$F_s = 1265 \text{ kg/cm}^2.$$

$$f_c = 60 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = 14.$$

**NOMENCLATURA DESCONOCIDA:**

$x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada

$I$  = Momento de inercia de sección transformada. ( $\text{cm}^4$ )

$M$  = Momento de flexión en la sección ( $\text{kg-cms}$ )

**SOLUCION:****1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO**

Según ecuación 11 la profundidad del eje neutro puede calcularse tomando en cuenta los datos de la figura No. 26.

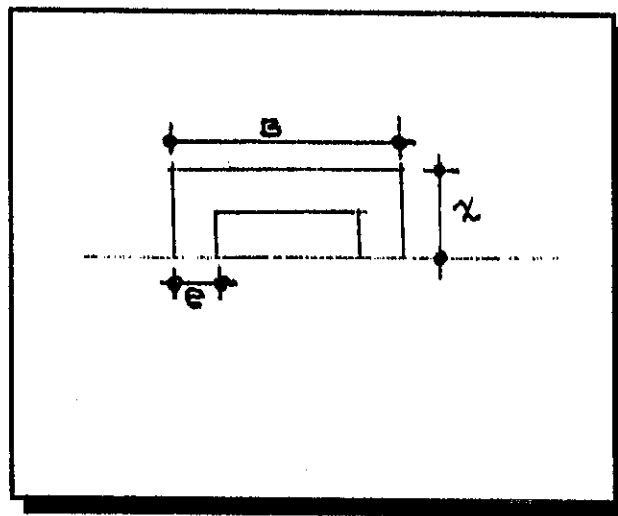


FIGURA No. 26: LA FIGURA MUESTRA UN SEGMENTO DE LA SECCION 'I' INVERTIDA QUE TIENE UN ANCHO 'y', ESPESOR 'e', Y UNA ALTURA 'x', DEL EXTREMO SUPERIOR AL EJE SUPUESTO.

Haciendo girar las áreas en torno al eje neutro (eje horizontal), queda la ecuación:

$$e^2 X^2 + (b-2e)(g)(X-d) + A's(2n-1)(X-d) - n^2 A's1(y+d-X) - n^2 A's2(2y+d-X) - n^2 A's3(3y+d-X) - n^2 A's4(4y+d-X) - n^2 A's5(5y+d-X) = 0$$

Sustituyendo valores en ecuación anterior se tiene:

$$(20)(X^2) + (90-2*20)(10)(X-5) + (214-1)(5.94)(X-5) - 14^2 * 3.96(25+5-X) - 14^2 * 3.96(2*25+5-X) - 14^2 * 3.96(3*25+5-X) - 14^2 * 3.96(4*25+5-X) - 14^2 * 3.96(5*25+5-X) = 0$$

Resolviendo:

$$20X^2 + 500X - 2500 + 160.38X - 801.9 - 1663.2 + 55.44X - 3049.2 + 55.44X - 4435.2 + 55.44X - 5821.2 + 55.44X - 7207.2 + 55.44X = 0$$

$$20X^2 + 937.58 + 25477.9 = 0$$

para encontrar el valor de X:

$$X = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ae}}{2a}$$

$$X = \frac{-937.58 + \sqrt{(-937.58)^2 - 4 * 20 * 25477.9}}{2 * 20}$$

$$X = \frac{-937.58 + \sqrt{(879056.26 + 2038232)}}{40}$$

$$X = \frac{-937.58 + \sqrt{(2917288.26)}}{40}$$

$$X = \frac{-937.58 + 1708}{40}$$

$$X = 19.26 \text{ cms.}$$

## 2. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA

Conviene recordar que para encontrar la inercia se hace necesario utilizar el "Teorema de los ejes paralelos", para el cálculo de inercia de una sección rectangular, pues el eje no pasa por el centro de la sección.

$$I_{\text{ eje neutro}} = I_{xc} + A(d)^2$$

El cual puede resumirse como sigue:

$$I_{\text{ eje neutro}} = \frac{(b) X^3}{12} + (b) * (X) \frac{X^2}{2}$$

Operando se logra la expresion:

$$I_{\text{ eje neutro}} = \frac{b * X^3}{3}$$

Encontrando el momento de inercia de la sección transformada:

$$I = \frac{bX^3}{3} - \frac{(b-2'e)(X-g)^3}{3} + (2n-1)A's(X-d)^2$$

$$+ n'As1(y+d-X)^2 + n'As2(2y+d-X)^2 + n'As3(3y+d-X)^2 + 2 + n'As4(4y+d-X)^2 + n'As5(5y+d-X)^2 = 0$$

$$I = \frac{(90)(19.26)^3}{3} - \frac{(90-2'20)' (19.26-10)^3}{3} + (214 -1)'5.94'(19.26-5)^2 + 14'3.96(30-19.26)^2 + 14'3.96(55-19.26)^2 + 14'3.96(80-19.26)^2 + 14'3.96(105-19.26)^2 + 14'3.96(130-19.26)^2$$

$$I = 214333.52 - 13293.71 + 32612.89 + 6394.87 + 70816.15 + 204537.43 + 407558.71 + 679879.99$$

$$I = 1602899.85 \text{ cm}^4.$$

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_l}{X}$$

A.) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{F_c I}{X}$$



$$M_c = \frac{601602899.85}{19.26} = \frac{96173991}{19.26}$$

$$M_c = 4993457.48 \text{ kg-cm.}$$

### B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como se hizo con el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s}{n(5y+d-X)}$$

$$M_s = \frac{12651602899.85}{14(130-19.26)} = \frac{2027688310}{1550.36}$$

$$M_s = 1307869.34 \text{ kg-cm.}$$

Comparando los momentos anteriores, se escoge el que numéricamente sea menor, por ello el menor se designará como momento resistente.

$$M_r = 1307869.34 \text{ kg-cms}$$

## DISEÑO DE SECCION L

EJEMPLO: Calcular el momento resistente de la sección "L", que se muestra en la figura No 27.

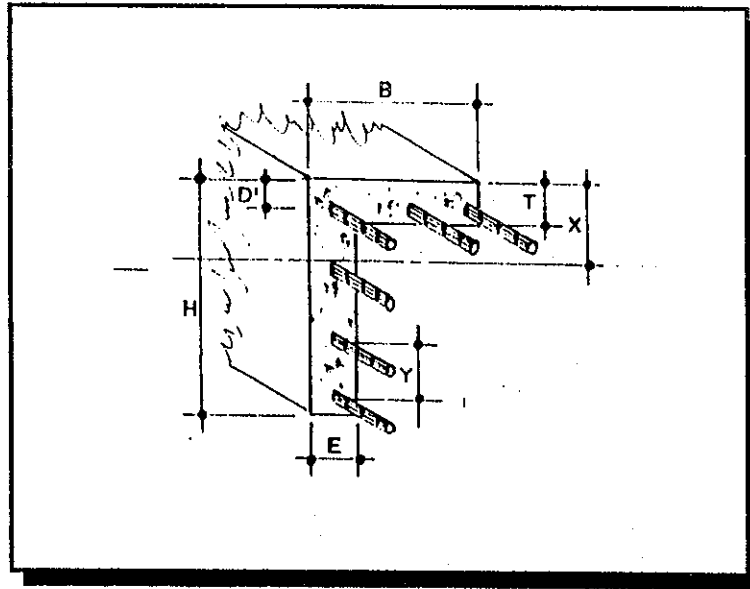


FIGURA No. 27: VIGA DE SECCION "L". SOMETIDA A ESFUERZO DE FLEXION.

**DATOS:**

$h = 70 \text{ cms.}$

$b = 90 \text{ cms.}$

$d' = 5 \text{ cms.}$

$e = 30 \text{ cms.}$

$t = 12 \text{ cms.}$

$y = 20 \text{ cms.}$

$A_s = 2.87 \text{ cms}^2. (1 \text{ varillas No.5})$

$A'_s = 14.35 \text{ cms}^2. (5 \text{ varilla No.5})$

$a_s = 2.87 \text{ cms}^2. \text{ Por varilla.}$

$F'_c = 175 \text{ kg/cm}^2.$

$F_s = 1400 \text{ kg/cm}^2.$

$f_c = 60 \text{ kg/cm}^2$

$n = 12.$

**NOMENCLATURA DESCONOCIDA:**

$x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)

$I$  = Momento de inercia de sección transformada. (cm<sup>4</sup>)

$M$  = Momento de flexión en la sección (kg-cms)

**SOLUCION:****1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO**

Se encuentra la profundidad del eje neutro como se observa en la figura 28

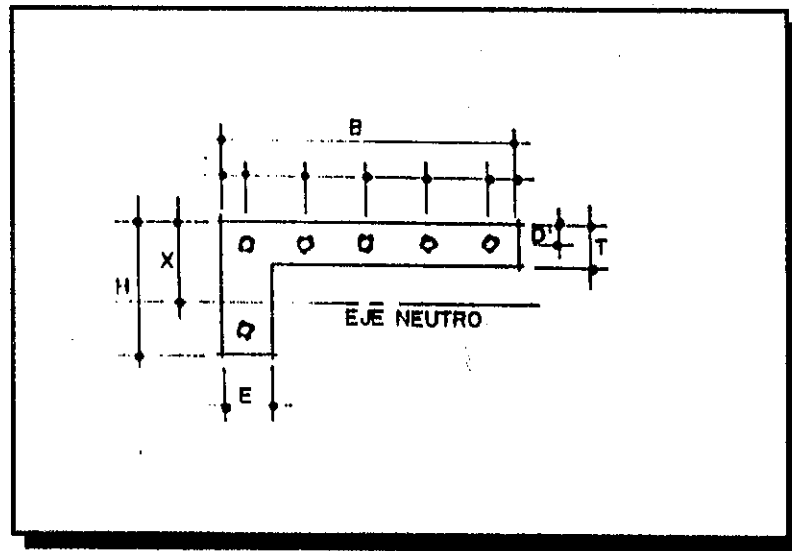


FIGURA No. 28: PARA ENCONTRAR LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO, ES NECESARIO PLANTEAR LOS DATOS QUE SE OBSERVAN EN LA FIGURA.

Planteando la ecuación, ésta queda de la siguiente manera:

$$(e'x)(X/2) + (b-e)'(X-d) + A's(2n-1)(X-d) - n'A_s1'(y+d-X) - n'A_s2'(2y+d-X) = 0$$

Al sustituir valores queda la siguiente expresión:

$$\frac{(30X)^2}{2} + (90-30)'12(X-5) + (212-1)'(14.35)(X-5) - 12'2.87(30+5-X) -$$

$$12'2.87(60+5-X) = 0$$

$$15X^2 + 720X - 3600 + 330.05X - 1650.25 - 1205.4 + 34.44X - 2236.6 + 34.44X = 0$$

$$15X^2 + 1118.93X - 8694.25 = 0$$

Despejando la ecuación de segundo grado, resolviendo a través de la ecuación cuadrática:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-1118.93 \pm \sqrt{(-1118.93)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 8694.05}}{2 \cdot 15}$$

$$X = \frac{-1118.93 \pm \sqrt{1252004.35 + 521655.00}}{30}$$

$$X = \frac{-1118.93 + \sqrt{1773659.35}}{30}$$

$$X = \frac{-1118.93 + 1331.79}{30}$$

$$X = \frac{212.85}{30}$$

$$X = 7.10 \text{ cms.}$$

## 2. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA

Utilizando teorema de ejes paralelos:

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{b * X^3}{3}$$

Encontrando el momento de inercia de la sección transformada:

$$I = \frac{bX^3}{3} - \frac{(b-c)(X-l)^3}{3} + (2n-1) * A' * s(X-d')^2 +$$

$$n * A * s^2(y+d'-X)^2 + n * A * s^2(2y+d'-X)^2 = 0$$

Si se sustituyen todos los datos conocidos en la ecuacion anterior, se obtiene:

$$I = \frac{(90)(7.10)^3}{3} - \frac{(90-2*15) * (7.10-12)^3}{3}$$

$$+ (2*12-1) * (14.35) * (7.10-5) + 2.87 * 12 * (30+5-7.10) + 12 * 2.87 * (60+5-7.10)$$

$$I = 10737.33 + 2352.98 + 693.11 + 960.88 + 1994.08$$

$$I = 16738.20 \text{ cm}^4.$$

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_i}{X}$$

#### A.) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{f_c' l}{X}$$

$$M_c = \frac{6016738.2}{7.1}$$

$$M_c = \frac{1004291.76}{7.1}$$

$$M_c = 141449.54 \text{ kg-cm.}$$

#### B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como se hizo con el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s' l}{n(2y+d-X)}$$

$$M_s = \frac{1400 \cdot 16738.2}{12(60+5-7.1)} = \frac{23433480}{694.8}$$

$$M_s = 33726.94 \text{ kg-cm}$$

Comparando los momentos anteriores, se escoge el que númericamente sea menor, designándole al menor como Momento resistente.

$$M_r = 33726.94 \text{ Kg-cm.}$$

## DISEÑO DE SECCION PENTAGONAL

EJEMPLO: Diseñar una sección pentagonal y en base a ella calcular la sección que se muestra en la figura No 29.

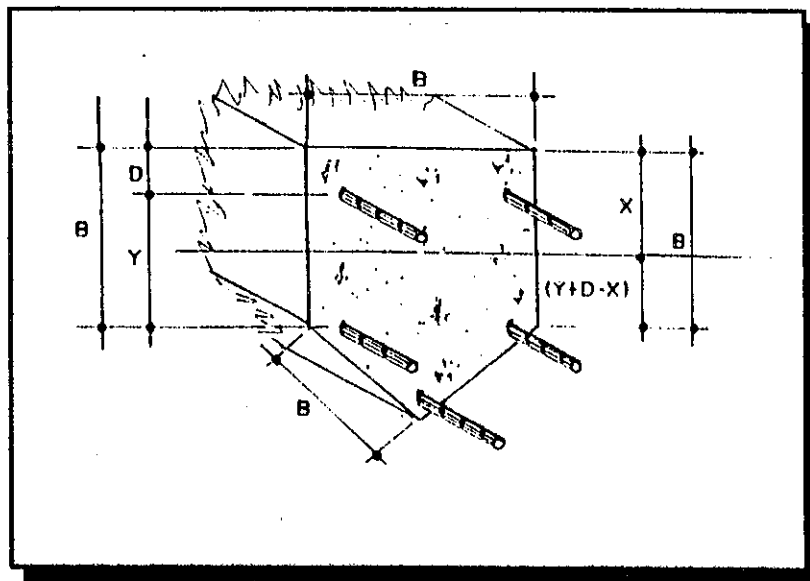


FIGURA No. 29: SECCION PENTAGONAL DE UNA VIGA SOMETIDA A FLEXION.

### DATOS:

$$b = 50 \text{ cms.}$$

$$d = 5 \text{ cms.}$$

$$y = 40 \text{ cms.}$$

$$A_s = 10.14 \text{ cms}^2. \text{ (2 varillas No.5)}$$

$$A'_s = 25.35 \text{ cms}^2. \text{ (5 varilla No.5)}$$

$$\begin{aligned}
 a_s &= 5.07 \text{ cms}^2. \text{ Por varilla.} \\
 F'_c &= 175 \text{ kg/cm}^2. \\
 F_s &= 1400 \text{ kg/cm}^2. \\
 f_c &= 60 \text{ kg/cm}^2 \\
 n &= 15.
 \end{aligned}$$

### NOMENCLATURA DESCONOCIDA:

- $x$  = distancia de cara superior del triángulo a eje neutro de sección transformada (cms.)
- $I$  = Momento de inercia de sección transformada. (cm<sup>4</sup>)
- $M$  = Momento de flexión en la sección (kg-cms)

### SOLUCION:

#### 1. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO

Se encuentra la profundidad del eje neutro como se observa en la figura 30.

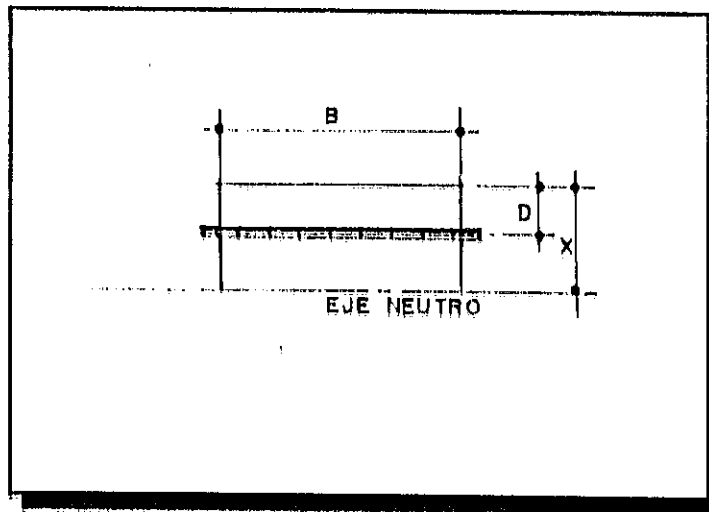


FIGURA No. 30: PARA CALCULAR EL EJE NEUTRO DEBEN CONSIDERARSE LOS DATOS QUE SE OBSERVAN EN LA FIGURA, COMO LAS VARILLAS DE HIERRO UBICADAS ARRIBA Y ABAJO DEL EJE NEUTRO.

Si se calculan momentos con respecto al eje neutro de la sección trapezoidal, ésta queda de la siguiente manera:

$$(b'x)(x/2) + A_s(2n-1)(x-d) - n'A_s1'(y+d-x) - n'A_s2'(y+d-x) - n'A_s2'(1.866y+d-x) = 0$$

Sustituyendo valores en ecuación anterior:



$$50X^2 + (10.14)(215-1)(X-5) - 1510.14(45-X) - 15 \cdot 5.07(74.64+5-x) = 0$$

$$25X^2 + 294.06X - 1470.3 - 6844.5 + 152.10X - 6056.62 + 76.05X = 0$$

$$25X^2 + 522.21X - 14371.42 = 0$$

La cual se resuelve a través de la ecuación cuadrática para encontrar el valor de X:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$X = \frac{-522.21 \pm \sqrt{(-522.21)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-14371.42)}}{2 \cdot 25}$$

$$X = \frac{-522.21 \pm \sqrt{(272703.28 + 1437142)}}{50}$$

$$X = \frac{-522.21 + \sqrt{(1709845.28)}}{50}$$

$$X = \frac{-522.21 + 1307.61}{50}$$

$$X = \frac{785.40}{50}$$

$$X = 15.71 \text{ cms.}$$

## 2. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA

Utilizando teorema de ejes paralelos:

$$I_{\text{eje neutro}} = \frac{b \cdot X^3}{3}$$

Encontrando el momento de inercia de la sección transformada:

$$I = \frac{bX^3}{3} + A_s'(2n-1)(X-d)^2 + n'A_s1(y+d-X)^2 + n'A_s2(1.888+d-X)^2 = 0$$

Sustituyendo valores:

$$I = \frac{50 \cdot (15.71)^3}{3} + (2 \cdot 15 - 1) \cdot 10.14 \cdot (15.71 - 5)^2 + 15 \cdot 10.14 \cdot (45 - 15.71)^2 + 15 \cdot 9.07 \cdot (79.64 - 15.71)^2$$

$$I = 64621.54 + 3149.38 + 4455 + 4861.88$$

$$I = 77087.79 \text{ cm}^4.$$

### 3. CALCULO DEL MOMENTO RESISTENTE DE LA SECCION

Aplicando momento de flexión en la sección a través de la fórmula:

$$M = \frac{f_l}{X}$$

A. ) Momento resistente del concreto:

El momento resistente del concreto en la sección queda definido de la siguiente manera:

$$M_c = \frac{F_c}{X}$$

$$M_c = \frac{6077087.79}{15.71}$$

$$M_c = \frac{13490365}{15.71}$$

$$M_c = 858711.97 \text{ kg-cm.}$$

B.) Momento resistente del acero:

Calculando el momento resistente del acero del mismo modo como calculó el momento resistente del concreto.

$$M_s = \frac{F_s}{n(1.866y+d-X)}$$

$$M_s = \frac{140077087.79}{15(63.93)}$$

$$M_s = \frac{107922906}{958.95}$$

$$M_s = 112542.79 \text{ kg-cm}$$

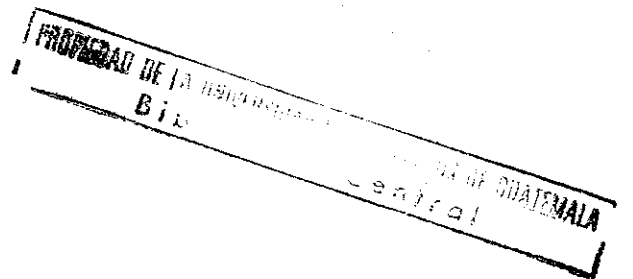
Comparando los momentos anteriores, se escoge el que numéricamente sea menor, denominándole al menor Momento Resistente.

$$M_r = 112542.79 \text{ kg-cm.}$$

## CONCLUSIONES

Del análisis de secciones especiales, se puede concluir lo siguiente:

1. Según se pudo observar en los ejemplos, el método de sección transformada es práctico para calcular y diseñar vigas de secciones varias. (secciones no cuadradas ni rectangulares)
2. El método para el diseño de vigas de sección variable utilizado en el análisis de este trabajo (*METODO DE LA SECCION TRANSFORMADA*), es sencillo de comprender y calcular; mientras que al hacerlo por el método tradicional (*PAR ELASTICO*), que es el que generalmente se utiliza para secciones especiales, este último es más laborioso, ya que al usar una sección asimétrica el centro de gravedad de la sección no coincide con el eje neutro y por tanto el cálculo se vuelve engorroso y complicado.
3. Las pocas secciones analizadas y calculadas en este trabajo son parte de la gran cantidad de formas y combinaciones que pueden presentarse y por tanto el método es de gran aplicación para cualquier sección.
4. Todo el estudio se hizo en torno a vigas de concreto armado de sección variable, sujetas a flexión, sin considerar los efectos de torsión, o cualquier otro esfuerzo que pueda alterar considerablemente el análisis, extendiéndose más allá del objetivo del presente estudio.
5. El estudio de vigas sujetas a flexión de sección variable, se hizo considerando asimetría solamente con respecto al eje "X", sin embargo puede tener asimetría con respecto al eje "Y" o ambos simultáneamente.
6. Para el estudio de vigas de concreto de sección variable, sujetas a flexión, se consideró; que el refuerzo en el hierro a compresión, es igual al doble de la calculada en la hipótesis elástica, sin exceder el valor de la fatiga, es decir  $F_{sc}=(2n)F_{cs}$ .



## BIBLIOGRAFIA

1. PEREZ ALAMA, VICENTE  
"El concreto armado en las estructuras".  
México, Editorial Trillas S.A de C.V, 1990.
2. CALDERON C., B.  
"Diseño de Estructuras Arquitectónicas Resistentes a  
Temblor"  
Revista EHA., 1976.
3. Cia. Fundidora de Hierro y Acero de Monterrey, S.A.  
"Manual para constructores"., 1972.
4. GONZALES CUEVAS, OSCAR M.  
ROBLES F.-V, FRANCISCO.  
"Aspectos Fundamentales del *CONCRETO  
REFORZADO*". , Editorial Limusa, México 1986.
5. GIANGRECO, E.  
"La Flessione"  
Editorial I.T.S, 1958.
6. FREDERICK S. MERRIT.  
"Manual del *INGENIERO CIVIL*"  
Editorial Mc. Graw Hill,, México 1992..
7. HOGNESTAD, E.  
" A Study of combined Bending and Axial Load in  
Reinforced Concrete Members".  
Boletín 399, University of Illinois, 1959.
8. POPOV, E.P.  
'Introducción a la mecánica de sólidos'.  
Editorial Limusa, 1976.
9. EDWARD G. NAWY.  
"Concreto Reforzado".  
Editorial Prentice Hall, 1989.