

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERIA

**GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO
ANALISIS ESTRUCTURAL 2**

TESIS

**PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA**

POR

VICTOR CAROL HERNANDEZ MONZON

AL CONFERIRSELE EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

GUATEMALA, JUNIO DE 1,996

**PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central**

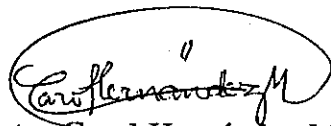
08
T(3720)
C.4

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

**GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO
ANALISIS ESTRUCTURAL 2**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil en Agosto de 1995.



Víctor Carol Hernández Monzón

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERIA

MIEMBROS DE LA JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Julio Ismael González Podszueck
VOCAL 1°	Ing. Miguel Angel Sánchez Guerra
VOCAL 2°	Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano
VOCAL 3°	Ing. Juan Adolfo Echeverría Méndez
VOCAL 4°	Br. Fernando Waldemar de León Contreras
VOCAL 5°	Br. Pedro Ignacio Escalante Pastor
SECRETARIO	Ing. Francisco Javier González López

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Julio Ismael González Podszueck
EXAMINADOR	Ing. Mario René de León García
EXAMINADOR	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
EXAMINADOR	Ing. Juan Luis Guzmán Román
SECRETARIO	Ing. Francisco Javier González López

Guatemala, 10 de mayo de 1,996

Ingeniero
Ricardo A. Ibarra M.
Jefe del Departamento de Estructuras
Escuela de Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería

Estimado Ingeniero Ibarra:

Por medio de la presente, me permito informarle que he revisado el trabajo de tesis del estudiante VICTOR CAROL HERNANDEZ MONZON, titulado "GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO ANALISIS ESTRUCTURAL 2", previo a optar al título de Ingeniero Civil, habiéndole encontrado completamente satisfactorio.

Cabe destacar el buen trabajo realizado por el estudiante Hernández y la dedicación para compilar la información. El trabajo de tesis contribuirá como material de apoyo a los estudiantes del curso y apoyará a profesionales interesados en el tema.

Sin otro particular, me suscribo de usted atentamente.

ID Y ENSEÑAD A TODOS



Ing. Mario René De León García
ASESOR

lov.



FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria.

Ciudad Universitaria. zona 12
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, mayo 24 de 1996

Ingeniero
Jack Douglas Ibarra,
Director de la Escuela
de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería,
U S A C.

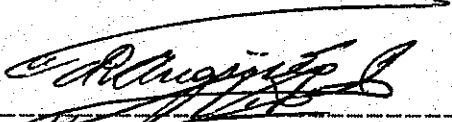
Señor Director

Por medio de la presente informo a usted, que he revisado el trabajo de tesis titulado GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO ANALISIS ESTRUCTURAL 2, elaborado por el estudiante universitario Victor Carol Hernández Monzón, y asesorado por el Ing. Mario René de León García.

Habiendo determinado que dicho trabajo cumple con lo establecido, y que será de mucha utilidad para estudiantes y profesionales de la ingeniería civil, el suscrito le da su aprobación.

Sin otro particular, me suscribo de usted,

Atentamente,


Ing. Ricardo A. Ibarra M.
Jefe del Departamento de Estructuras

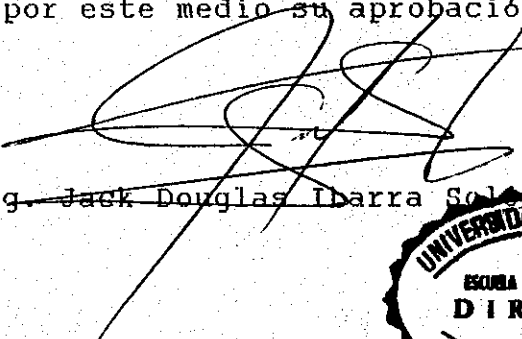


FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de
conocer el dictamen del Asesor Ing. Mario René de León García
y del Jefe del Departamento de Estructuras Ing. Ricardo A.
Ibarra M., sobre el trabajo de tesis del estudiante Víctor Carol
Hernández Monzón, titulado GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO ANALISIS
ESTRUCTURAL 2, da por este medio su aprobación a dicha tesis.


Ing. ~~Jack Douglas Ibarra Solís~~



Guatemala, junio de 1, 1996.

JDIS/bbdeb.



FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica
y Regional de Post-grado de Ingeniería
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12
Guatemala, Centroamérica

El Decano de la Facultad de Ingeniería, luego de conocer la autorización por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano, al trabajo de tesis GUIA DE ESTUDIO DEL CURSO ANALISIS ESTRUCTURAL 2, del estudiante Víctor Carol Hernández Monzón, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

Ing. Julio Ismael González Podeszueck

DECANO



Guatemala, junio de 1, 1996

/bbdeb.

ACTO QUE DEDICO A:

Dios	Por iluminarme y bendecirme siempre, gracias.
La Virgen del Rosario	
La Virgen de Guadalupe	
Mis Padres	Víctor Manuel Hernández Castillo Hercilia Marina Monzón de Hernández Quienes con su amor y ayuda de Dios, han logrado lo que ahora soy.
Mis Abuelitos	Aura Esperanza Vda. de Hernández José María Monzón
Mis Hermanos	Lisbeth Marina Aurora Gladimiro Adolfo Jorge Mynor Helen Marisol Freddy Fernando José Bernardo
Mis Tios, en especial a	Laura de Castro Irma Milagro de de León Freddy J. de León
Mi Familia en General.	
En especial	Ruth Anavela Ordóñez
Por su aprecio y amistad	Alba de Godínez
Mis Amigos	Edwin Alfonso García Renardo Chang Werny Estuardo López Daniel Ortíz
Los profesionales	Ing. Jacinto Quan Ing. Armando Quezada Ing. Raúl Cobar Ing. Franklin Matzdorf Lic. Hever Glaymiro Hernández Lic. Jorge Rolando Oliva
La Universidad de San Carlos de Guatemala	CUNOC y USAC
La Facultad de Ingeniería	

AGRADECIMIENTOS

Al Ing. Mario René de León García

Por la desinteresada ayuda y por el tiempo brindado al
asesoramiento del presente trabajo de tesis.

y

Al Ing. Armando Quezada

Por su ayuda y colaboración para mi superación profesional.

INDICE GENERAL

Pag.

OBJETIVOS GENERALES Y ESPECIFICOS	I
NOMENCLATURA	II
GLOSARIO	V
INTRODUCCION	VII
Capítulo 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES	1
1.1 La ingeniería estructural	2
1.2 Definiciones y conceptos básicos para el análisis de estructuras	2
1.2.1 Bases y limitaciones de la teoría elástica.....	2
1.2.2 Bases y limitaciones al respecto de las deformaciones.....	3
1.2.3 Bases y limitaciones al respecto de las cargas	3
1.2.4 Bases y limitaciones al respecto de los miembros	3
1.2.5 Principio de superposición.....	3
1.3 Comportamiento del concreto reforzado y del acero	4
1.3.1 Concreto reforzado	4
1.3.2 Acero	5
1.4 Estructuras reticulares	5
1.4.1 Clasificación	6
1.5 Tipología estructural	9
1.5.1 Articulación	9
1.5.2 Empotramiento	9
1.5.3 Eslabón.....	9
1.5.4 Rodillo	9
1.5.5 Resorte helicoidal.....	10
1.5.6 Resorte espiral	10
1.6 Indeterminación estática y cinemática.....	12
1.6.1 Indeterminación estática	12
1.6.2 Indeterminación cinemática.....	16
1.7 Acciones y desplazamientos.....	18
1.8 Ecuaciones de acción y desplazamiento	20
Capítulo 2. METODO BASICO DE RIGIDEZ (O DE LOS DESPLAZAMIENTOS)	25
2.1 Cálculo de los desplazamientos	26
2.1.1 Estructura fija	26
2.1.2 Análisis de la estructura fija sujeta a las cargas	26
2.1.3 Análisis de la estructura fija para los desplazamientos unitarios.....	26
2.1.4 Determinación de los desplazamientos	26
2.2 Cálculo de reacciones y acciones de extremo	27
2.3 Conversión de signos	28
2.3.1 Extremo de miembro	28
2.3.2 Cargas internas en un nudo	28
2.3.3 Cargas externas sobre un nudo	28

2.4	Ejemplos del método de rigidez	29
2.4.1	Vigas	29
2.4.2	Marcos	41
2.4.3	Armaduras	52
2.4.4	Parrillas	65
2.5	Efectos de temperatura, deformaciones previas y desplazamientos de apoyo	71
2.6	Ejemplos numéricos	72
Capítulo 3. METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES		80
3.1	Matriz de rigidez del miembro	81
3.2	Matriz de rotación	83
3.3	Matriz de rigidez global	84
3.4	Integración de las matrices a una estructura	86
3.5	El método directo de las rigideces (de los desplazamientos) enfocado a la computación	87
3.5.1	El sistema de código en el método de rigidez	88
3.5.2	Diagrama general del método de rigidez	92
3.6	Ejemplo de la matriz de rigidez directa	94
3.7	Programa del método de rigidez en el lenguaje BASIC, para una calculadora CASIO 850	100
Capítulo 4. METODO DE CALCULO DE REACCIONES EN ESTRUCTURAS FIJAS		102
4.1	Método área-momento	103
4.2	Método de la viga conjugada	105
4.3	Método general para calcular momentos fijos (momentos de sujeción = MF)	108
4.4	Ejemplos	110
4.5	Acciones de empotramiento	113
4.5.1	Acciones de empotramiento producidas por cargas	113
4.5.2	Acciones de empotramiento producidas por cambio de temperatura	119
4.5.3	Acciones de empotramiento producidas por deformaciones previas	120
4.5.4	Acciones de empotramiento producidas por desplazamientos de extremo	121
4.6	Acciones de extremo para miembros de armaduras	121
CONCLUSIONES		VIII
RECOMENDACIONES		IX
REFERENCIAS		X
BIBLIOGRAFIA		XI

INDICE DE FIGURAS

No. de Figura	Pag.
1 Estructuras reticulares	8
2 Tipos de apoyos en estructuras reticulares	11
3 Arbol estructural	12
4 Grado de indeterminación estática	13
5 Indeterminación estática de marcos y armaduras	15
6 Grados de libertad de marcos y armaduras	17
7 Viga en voladizo	19
8 Resorte linealmente elástico	20
9 Sistemas de coordenadas de miembro	82
10 Desplazamientos unitarios	82
11 Rotación de ejes	83
12 Diagrama área de momento	103
13 Comparación entre viga real y conjugada	107
14 Viga sujeta a cargas	108

OBJETIVOS

GENERALES

1. Dar un texto que pueda servir de guía de apoyo al estudiante del curso de Análisis Estructural 2, para que se profundice y analice cada uno de los conceptos y generalidades, que hoy en día se requieren.

ESPECIFICOS

1. Proporcionar al estudiante una guía de estudio y así aprovechar el tiempo para profundizar los temas que se den en el curso.
2. Proporcionar al estudiante los conocimientos necesarios, para que pueda elaborar sus algoritmos y así crear sus propios programas de computación para el Análisis Estructural.
3. Proporcionar no sólo al estudiante sino también al profesional conocimientos básicos y necesarios de consulta para la ejecución de cualquier proyecto relacionado con el Análisis Estructural.
4. Desarrollar y definir preceptos enmarcados en forma adecuada el método matricial para el Análisis Estructural.
5. Desarrollar las características generales y esenciales del método de rigideces, así como también ejemplificarlo a varios tipos de estructuras reticulares para la mejor comprensión del mismo.
6. Crear en el estudiante un sentido amplio de imaginación de las deformaciones que tendrá cualquier tipo de estructuras sometidas a distintas fuerzas.
7. Que el estudiante pueda establecer las diferencias además de las ventajas que presenta el método matricial respecto de los demás métodos convencionales.

NOMENCLATURA

A	Acción.
d	Peralte efectivo.
e	Deflexión inicial en el centro de la barra.
e	Exceso de longitud.
E	Módulo de elasticidad.
g.d.l.	Grado libertad.
G	Módulo de elasticidad cortante.
I	Inercia.
J	Constante de torsión.
K', K''	Contribución de rigideces en un nudo, miembro izquierdo y derecho respectivamente.
L	Longitud entre ejes de un elemento.
M	Momento.
MF	Momento fijo.
n_k	Indeterminación cinemática.
n_s	Indeterminación estática.
P	Carga puntual.
Q	Momento estático.
R	Matriz de transformación.
T	Torsión.
T	Aumento de temperatura.
w	Carga uniformemente repartida.
θ	Angulo de giro.
δ	Deflexión.
Δ	Desplazamiento.
ΔT	Diferencial de temperatura.
α	Coefficiente de expansión térmica.

Matrices

Matriz	Orden	Definición
D	$n_k \times 1$	Desplazamientos de nudo desconocidos (n_k = número de desplazamientos).
A_D	$n_k \times 1$	Acciones en la estructura real correspondientes a los desplazamientos desconocidos.
A_{DL}	$n_k \times 1$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debido a todas las cargas, excepto a aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
K	$n_k \times n_k$	Acciones de la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos debidos a valores unitarios de los desplazamientos (coeficientes de rigidez).
K^{-1}	$n_k \times n_k$	Matriz inversa.
A_{DT}, A_{DP}, A_{DR}	$n_k \times 1$	Acciones de la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debido a temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos.
A_M	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura real (m = número de acciones de extremo).
A_{ML}	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura fija debidas a todas las cargas, excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
A_{MD}	$m \times n_k$	Acciones de extremo en la estructura fija debida a valores unitarios de los desplazamientos.
A_{MT}, A_{MP}, A_{MR}	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura fija debida a temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos.
A_R	$r \times 1$	Reacciones en la estructura real (r = número de reacciones)
A_{RL}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura fija debidas a todas las cargas excepto a aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
A_{RD}	$r \times n_k$	Reacciones en la estructura fija debida a valores unitarios de los desplazamientos.
A_{RT}, A_{RP}, A_{RR}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura fija debidas a temperatura, deformación previa y desplazamiento de apoyos.

Matriz	Orden	Definición
A_{DS}	$n_k \times 1$	Sumatoria de las matrices A_{DL} , A_{DT} , A_{DP} y A_{DR} .
A_{MS}	$n_k \times 1$	Sumatoria de las matrices A_{ML} , A_{MT} , A_{MP} y A_{MR} .
A_{RS}	$n_k \times 1$	Sumatoria de las matrices A_{RL} , A_{RT} , A_{RP} y A_{RR} .

GLOSARIO

Acción	Define a una fuerza o un momento, o una combinación de éstos,
Apoyo	Son los elementos que proporcionan las fuerzas necesarias para mantener el equilibrio de la estructura.
Carga	Fuerza (s) aplicada (s) a un elemento de una estructura.
Coefficientes de flexibilidad	Desplazamiento causado por un valor unitario de una carga.
Coefficiente de rigidez	Fuerza necesaria para mantener una unidad de desplazamiento.
Curva elástica	El eje centroidal de una barra inicialmente recta, sujeta a cargas, cambia su longitud y toma la forma de una curva, denominada curva elástica.
Deformación	Cambios de forma que tiene como consecuencia, que puntos de un miembro se desplacen hacia nuevas posiciones.
Desplazamiento	Cambio de posición, generalmente puede ser traslación o rotación en algún punto de una estructura.
Esfuerzo	Fuerza por unidad de área.
Equilibrio	Si una fuerza y sus componentes están soportados en tal forma que, después de ocurrir una pequeña deformación, no es posible ningún movimiento adicional, se dicen que están en equilibrio.
Flexibilidad	Se define como el desplazamiento debido a la aplicación de un esfuerzo unitario.
Flexión	En cualquier sección transversal existe fuerzas internas que pueden descomponerse en fuerzas normales y tangenciales a la sección. Las componentes normales a la sección son los esfuerzos de flexión (tensión en un lado del eje neutro y compresión en el otro).
Fuerza axial	Fuerza que es aplicada al eje de la sección de un elemento.
Inercia	Es la propiedad que tienen los cuerpos para oponerse al movimiento cuando están en reposo relativo.
Matriz	Es una disposición ordenada de números colocadas en m filas y n columnas.
Miembro	Se le asigna el nombre de miembro a una viga, a una columna etc.

Módulo de elasticidad	Relación entre el esfuerzo normal y la deformación unitaria, correspondiente a los esfuerzos por tensión o por compresión, inferiores al límite proporcional del material.
Nudo o nodo	Intersección de dos miembros estructurales.
Peralte	Distancia medida desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide del refuerzo sujeto a tensión.
Rigidez	Se define como el esfuerzo debido a un desplazamiento unitario. Como el desplazamiento unitario puede ser lineal o angular y el esfuerzo se puede medir en el punto y en la dirección de este desplazamiento o en otro punto y en otra dirección, las rigideces se designan además como directas (cercanas al nudo) o indirectas (lejanas al nudo).
Rotación	Es el ángulo que subtiende la curva elástica a un punto con respecto a un punto de la posición original de cualquier elemento.
Traslación	Se refiere a la distancia recorrida por un punto de una estructura, debido a la aplicación de una acción.

INTRODUCCION

El Análisis Estructural tiene como fin primordial el obtener las magnitudes de las fuerzas internas y los desplazamiento de una estructura, la cual debe transmitir las fuerzas de un punto del espacio a otro, resistiendo su aplicación sin perder su estabilidad, siendo ésta una característica importante de una estructura reticular.

Con el advenimiento de las computadoras se ha hecho necesario plantear métodos matriciales, con este fin se creó uno de los métodos más completos, el método de las rigideces o de los desplazamientos.

El presente trabajo de tesis integra en sus cuatro capítulos el curso de Análisis Estructural 2, basado fundamentalmente en el método de rigidez, esperando de esta manera contribuir con estudiantes y profesionales de la Ingeniería Civil.

En el capítulo 1 se enfocan los conceptos fundamentales del análisis estructural, como: clasificación de estructuras, tipos de apoyos, indeterminación estática y cinemática, acciones y desplazamientos, los cuales ayudarán a darle un mejor seguimiento a este trabajo.

En el capítulo 2 se desarrolla el método de rigidez con sus principios y definiciones básicas, además se presentan problemas resueltos (vigas, marcos, armaduras y parrillas), ilustrando así el significado y la aplicación en su forma más sencilla. En la parte final de este capítulo se presentan también aspectos que por alguna u otra razón, en un momento determinado, se deben de tomar en cuenta en el análisis como lo es la deformación previa, cambio de temperatura o asentamiento que pueda sufrir algún miembro en particular de la estructura.

En el capítulo 3 se esboza de una manera práctica la matriz de rigidez, es decir que conlleva una secuencia muy organizada, desde que se define la matriz de miembro con sus coordenadas locales, hasta la formación de la matriz de rigidez de la estructura, teniendo así un procedimiento secuencial que tiene la facilidad de adaptación en programas de computación.

En la parte final de este trabajo, capítulo 4, se presentan métodos como el diagrama de área-momento y el de la viga conjugada para poder hallar las reacciones en las estructuras fijas, además se presentan tablas con distintos tipos de carga con sus respectivas reacciones.

CAPITULO 1
CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1 La Ingeniería Estructural

Una estructura puede definirse como un cuerpo capaz de resistir cargas aplicadas, sin que exista ninguna deformación excesiva de una de sus partes con respecto a otra. La última parte de este enunciado es indispensable para eliminar del campo de las estructuras a aquellos mecanismos en que los efectos cinemáticos y dinámicos son importantes. La aplicación de cargas a una estructura producen reacciones y deformaciones en ella. La determinación de estas reacciones y deformaciones se llama Análisis Estructural.

El diseño estructural incluye el arreglo y dimensionamiento de las estructuras y sus partes, de tal manera que las mismas soporten satisfactoriamente las cargas colocadas sobre ellas. En particular, el diseño estructural implica lo siguiente: la disposición general de las estructuras; estudio de los posibles tipos o formas estructurales que representan soluciones factibles; consideración de las condiciones de carga; análisis y diseño preliminar de las soluciones posibles; selección de una solución, análisis y diseño estructural final de la estructura, incluyendo la preparación de planos.

La ingeniería estructural abarca una extensa variedad de estructuras aparte de puentes y edificios. Entre ellas se pueden citar: estadios, torres de transmisión de energía eléctrica, torres de radio y televisión, cables, arcos, tanques de agua, pavimentos de concreto y otros que no necesariamente se encuentran dentro del campo de la ingeniería civil, por ejemplo barcos y aeroplanos.

Existen dos clases generales de estructuras: las que resisten cargas aplicadas debido a su configuración geométrica, que se conocen como Estructuras Reticulares; y las que resisten cargas aplicadas debido a su masa o peso, que reciben el nombre Estructuras Masivas. En este trabajo se limitará únicamente a las primeras.

1.2 Definiciones y conceptos básicos para el análisis de estructuras:

1.2.1 Bases y limitaciones de la teoría elástica

El material a usarse tiene las siguientes características: homogéneo, isotrópico y continuo.

Se cumple la hipótesis de Navier: Las secciones planas antes de deformarse siguen siendo planas después de la acción de deformación. La sección analizada está sometida a los siguientes esfuerzos, para los cuales se diseña su resistencia: tensión, compresión, corte, flexión y torsión.

Como el material es considerado elástico, sigue la ley de Hooke: Los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones. El módulo de elasticidad en tensión (E) será igual al módulo de elasticidad en compresión.

1.2.2 Bases y limitaciones al respecto de las deformaciones

Las deformaciones en una estructura son pequeñas, y no afectan la acción de las cargas externas. Las deformaciones por flexión se consideran perpendiculares a los miembros. Las deformaciones por carga axial y por corte pueden ser despreciables.

1.2.3 Bases y limitaciones al respecto de las cargas

Las cargas son perpendiculares al plano del eje neutro de la sección, y aplicadas en los ejes de simetría.

1.2.4 Bases y limitaciones al respecto de los miembros

Los miembros no tendrán cambios bruscos de sección, ya que al tener estos cambios no se cumpliría la teoría de Navier. Luego, en estos puntos se obtendrá una concentración de esfuerzos de regular cuantía.

Para que se cumpla la condición de flexión, es decir $F=Mc/I$ se necesita que el miembro esté sujeto a flexión pura y no existan esfuerzos de corte importantes. Las vigas deberán estar diseñadas de tal forma que el esfuerzo predominante sea el de flexión, y además que este esfuerzo sea cierto sólo en el plano de la carga. Por último la viga tendrá que ser recta. Para que se cumpla la condición de torsión $F=Tc/J$, la barra deberá ser circular.

1.2.5 Principio de superposición

Al avanzar en el estudio de análisis estructural, se encontrarán estructuras sujetas a un gran número y tipos de fuerzas (concentradas, uniformes, triangulares, muertas, vivas, de impacto, etc.) Para ayudar en tales situaciones existe una herramienta extraordinariamente útil, el principio de superposición.

El principio define lo siguiente: Si el comportamiento estructural es linealmente elástico, el análisis de las fuerzas que actúan sobre una estructura pueden separarse o dividirse en cualquier forma conveniente, para analizar luego la estructura, completa. Los resultados finales pueden obtenerse entonces sumando los resultados individuales. El principio se aplica no sólo a reacciones, sino también a cortantes, momentos, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos. Hay dos casos importantes en los que el principio de superposición no es válido.

1.2.5.1 Cuando la geometría de la estructura cambia considerablemente bajo la acción de las cargas.

1.2.5.2 Cuando la estructura es de un material para el cual los esfuerzos no son directamente proporcionales a las deformaciones.

Este último caso se presenta cuando el material se esfuerza más allá de su límite elástico o cuando el material no sigue la ley de Hooke, en ninguna parte de su curva esfuerzo contra deformación.

1.3 Comportamiento del Concreto Reforzado y del Acero

1.3.1 Concreto Reforzado

La mecánica estructural es una de las herramientas principales en el proceso de diseño, los conocimientos científicos adquiridos en la carrera de ingeniería permiten la predicción, con un buen grado de certeza, de la manera como una estructura de forma y dimensiones dadas se comportará cuando esté sometida a fuerzas conocidas y a otros efectos mecánicos. La mecánica del concreto reforzado se basa en las siguientes premisas fundamentales:

1.3.1.1 Las fuerzas internas, están en equilibrio con los efectos de las cargas externas en la sección. Esta premisa no es un supuesto, sino un hecho, puesto que cualquier cuerpo o parte de éste, estará en reposo, sólo si todas las fuerzas que actúan sobre él se encuentran en equilibrio.

1.3.1.2 Se supone que existe una adherencia perfecta en la interfase del concreto y el acero, de manera que no ocurre deslizamiento entre los dos materiales.

Así, en la misma medida en que uno se deforme, lo hará el otro. Con las barras corrugadas modernas se dispone de un alto grado de entrelazamiento mecánico además de la adhesión natural superficial, de modo que este supuesto está muy cerca de la realidad.

1.3.1.3 Las secciones transversales planas, antes y después de aplicada la carga siguen en la misma condición, aunque en elementos de concreto reforzado cargados cerca de la falla no es del todo exacto su condición plana, pero las desviaciones son menores cuando se tiene suficiente información de ensayos bajo estas condiciones.

1.3.1.4 La resistencia a la tensión del concreto es tan sólo una pequeña fracción de su resistencia a compresión, el concreto en aquella parte del elemento que está sometida a tensión, estará usualmente fisurado, aunque las fisuras resulten apenas visibles.

El concreto fisurado es incapaz de resistir esfuerzos de tensión, este supuesto es una simplificación de la situación real, debido a que de hecho el concreto antes del agrietamiento, sí resiste esfuerzos de tensión de pequeña magnitud.

Las teorías se basan en las relaciones reales esfuerzo-deformación unitaria y en las propiedades de resistencia de los dos materiales constitutivos.

Estos supuestos permiten predecir, mediante cálculos, el comportamiento de elementos de concreto reforzado, únicamente para algunas situaciones simples. En realidad, la acción conjunta de dos materiales tan diferentes y complicados, como el concreto y el acero, es tan compleja que no ha sido posible llevarla a un tratamiento completamente analítico.

Por esta razón los métodos de diseño y análisis, aunque utilizan estos supuestos, se fundamentan ampliamente en los resultados de intensas y continuas investigaciones experimentales. Estos métodos se modifican y mejoran en la medida que se dispone de nuevas evidencias experimentales.

1.3.2 Acero

Para comprender el comportamiento de las estructuras de acero, es absolutamente esencial que el diseñador esté familiarizado con las propiedades del mismo. Los diagramas de esfuerzo-deformación, presentan una parte valiosa de la información necesaria para entender cómo será el comportamiento del acero en una situación dada. No pueden ser desarrollados métodos de diseño satisfactorios a menos que se cuente con información disponible del material a utilizar.

La curva esfuerzo-deformación, típica de un acero dúctil de grado estructural, se supone que es la misma para miembros en tensión o en compresión, los miembros en compresión deben ser cortos, ya que si son largos la compresión tiende a pandearlos lateralmente y sus propiedades se ven afectadas grandemente por los momentos flexionantes.

Al esfuerzo que corresponde un decisivo incremento en el alargamiento o deformación, sin el correspondiente incremento en esfuerzo, se conoce por límite de fluencia. El punto de fluencia es para el proyectista la propiedad más importante del acero, ya que los procedimientos para diseñar elásticamente, están basados en dicho valor, con excepción de miembros sujetos a compresión, donde el pandeo puede ser un factor. La deformación que ocurre antes del punto de fluencia se conoce como deformación elástica; la deformación que ocurre después del punto de fluencia, se conoce como deformación plástica.

Podría suponerse que la fluencia del acero, sin incremento de esfuerzo, es una seria desventaja, pero actualmente es considerada como una característica muy útil. A menudo ha desempeñado el admirable servicio de prevenir fallas debidas a omisiones o errores de diseño.

Las suposiciones básicas en el análisis de sistemas elásticos son:

- a) La relación entre carga y deformación es lineal e independiente de la historia de la carga.
- b) Las deformaciones son pequeñas.

1.4 Estructuras Reticulares

Las estructuras reticulares están formadas por miembros que son largos en comparación con las dimensiones de su sección transversal.

1.4.1 Clasificación

- a) Vigas
- b) Marcos planos
- c) Armaduras planas
- d) Marcos en el espacio
- e) Armaduras en el espacio
- f) Parrillas

a) Vigas

Están formadas por un miembro recto que tiene uno o más puntos de apoyo, tales como los puntos A, B, C, de la Figura 1a. Las fuerzas que se aplican a una viga se supone que actúan en un plano que contiene un eje de simetría de la sección transversal de la viga, un eje de simetría es también un eje principal de la sección transversal. Los esfuerzos principales que generalmente se evalúan en una viga son de flexión y de corte, siendo los demás esfuerzos secundarios (axial y torsión).

b) Marco plano

Está compuesto de miembros en un solo plano y tienen su eje de simetría en el mismo, como en el caso de una viga. Los nudos entre los miembros, tales como los nudos B y C (véase la fig. 1b), son conexiones rígidas. Las fuerzas que actúan en un marco y los desplazamientos del marco están en el mismo plano de la estructura, todos los pares que actúan en un marco tienen su vector de momentos, normales al plano. Los momentos de flexión son de importancia que los Cortes y las Fuerzas Axiales.

c) Armaduras Planas

A medida que aumente el claro o distancia entre apoyos, deja de ser económico el uso de una viga maciza o de una sola pieza, se recurre entonces a la viga de alma abierta o una Armadura (véase la Fig. 1c). Y se idealiza como un sistema de miembros en un plano interconectado en juntas articuladas. Todas las fuerzas aplicadas se consideran actuando en el plano de la estructura, y todos los pares externos tienen sus vectores normales al plano, justo como en el caso de la viga. Las cargas pueden consistir de fuerzas concentradas aplicadas en los nudos, así como cargas que actúan en los propios miembros.

Para propósitos de análisis, las últimas pueden reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes que actúan en las articulaciones. Luego, el análisis de una armadura sujeta únicamente a cargas en los nudos, dará como resultado fuerzas axiales de tensión o de compresión en los miembros, siendo este tipo de esfuerzos los principales. Existirán además momentos flexionantes y fuerzas cortantes en aquellos miembros que tienen cargas que actúan directamente sobre ellos. La determinación de los primeros esfuerzos resultantes, constituye el análisis de las fuerzas que actúan en los miembros de una armadura.

d) Marcos en el espacio

Los marcos en el espacio (véase fig. 1d), son el tipo más general de estructura reticular, tanto que no hay restricciones de las cargas. Los miembros individuales de un marco en el espacio pueden soportar fuerzas axiales internas, pares torsionantes, y pares flexionantes en las dos direcciones principales de la sección transversal. Estos últimos esfuerzos son los que predominan en el sistema, siendo los otros secundarios.

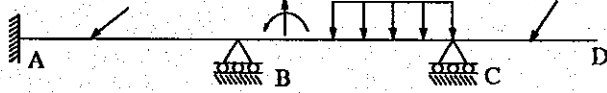
e) Armaduras en el espacio

Es similar a una armadura plana, excepto que los miembros pueden tener cualquier dirección en el espacio (véase fig. 1e). Las fuerzas que actúan en una armadura en el espacio pueden tener direcciones arbitrarias, pero cualquier par que actúa en un miembro, debe tener su vector de momento perpendicular al eje del miembro. La razón de este requerimiento es que un miembro de una armadura es incapaz de soportar un momento torsionante, por lo tanto los esfuerzos predominantes son las cargas axiales y secundarios los flexionantes y de corte.

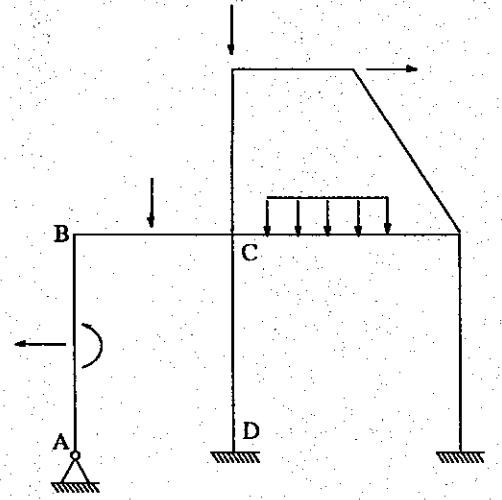
f) Parrillas

Es una estructura plana compuesta de miembros continuos que se intersectan o se cruzan. En el último caso, las conexiones entre miembros se consideran a menudo como articulaciones, en tanto que en el primer caso las conexiones se consideran rígidas.

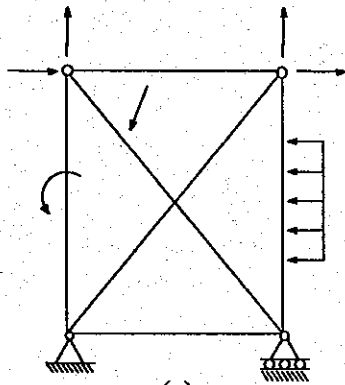
En el caso de una parrilla (véase la fig. 1f), todas las fuerzas son normales al plano de la estructura y todos los pares tienen sus vectores en el plano de la parrilla. Siendo los esfuerzos de mayor importancia los de flexión y los torsionantes.



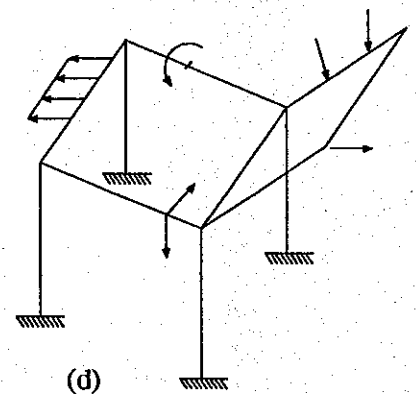
(a)



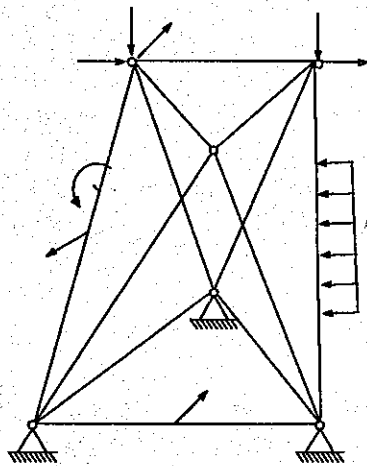
(b)



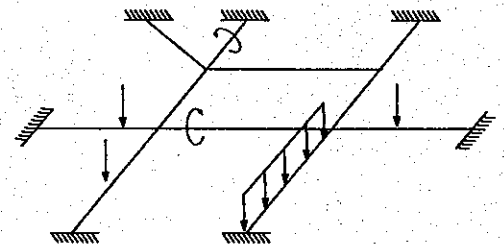
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 1 Estructuras Reticulares

1.5 Tipología Estructural

Tipos de apoyos en Estructuras Reticulares

1.5.1 Articulación (Fijo o Bisagra)

La articulación de la fig. 2.a es asumida a ofrecer una restricción a la estructura en el punto de conexión contra la traslación en cualquier dirección, mientras permite a la estructura rotar libremente. La restricción desarrollada por este tipo de soporte puede ser descrito en una de las dos formas:

- I) Como una única fuerza de reacción cuya línea de acción y magnitud son desconocidas.
- II) Como un par de fuerzas de reacción ortogonales cuyas magnitudes son desconocidas.

En este caso, este tipo de soporte introduce dos incógnitas en un análisis. Se puede definir que: $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$ $\theta = ?$

1.5.2 Empotramiento

Soporte representado en la fig. 2.b, es asumido a restringir la estructura en el punto de soporte, puede ser descrito en términos de un momento reactor y un par de fuerzas reactivas ortogonales desconocidas, la orientación de las reacciones ortogonales puede ser seleccionada arbitrariamente. Entonces se define que: $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$ $\theta = 0$

1.5.3 Eslabón

Soporte ilustrado en la fig. 2.c es similar al soporte de rodillo en su acción, porque en uno de los extremos de la barra, el soporte puede producir solamente una fuerza de reacción cuya línea de acción debe pasar entre el centro de los dos puntos.

Este tipo de miembro es a menudo referido como un miembro de dos fuerzas. Excepto por la existencia de la restricción contra el movimiento del eje de la barra, la estructura es libre de moverse. La línea de acción de una fuerza de reacción es conocida, sólo su magnitud debe ser determinada. Entonces se define que: $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$ $\theta = ?$

1.5.4 Rodillo

Ofrece resistencia al movimiento sólo en una dirección perpendicular a la superficie de apoyo bajo el rodillo (fig. 2.d). No representa resistencia a ligeras rotaciones respecto al eje del rodillo, o al movimiento paralelo a la superficie del apoyo. La única incógnita es la magnitud de la fuerza que evita el movimiento perpendicular a la superficie de apoyo. Se tiene entonces:

$$\Delta x = ? \quad \Delta y = 0 \quad \theta = ?$$

1.5.5 Resorte Helicoidal

El soporte mostrado en la fig. 2.e, actúa como una restricción particular contra la traslación de la estructura en la dirección del eje del resorte. En el punto de apoyo la estructura es libre de experimentar una rotación, así también una traslación normal al eje del resorte. La influencia del resorte helicoidal puede ser descrito en términos de una singular fuerza reactiva cuya línea de acción está a lo largo del eje del resorte, su magnitud está en función de la rigidez del resorte (K).

1.5.6 Resorte Espiral

Soporte ilustrado en la fig. 2.f, que promueve una restricción particular contra la rotación de la estructura en el punto de apoyo.

La restricción que ofrece a la estructura este tipo de soporte puede ser descrito como; un momento de reacción cuya magnitud está en función de la constante rigidez (k) y la deformación rotacional experimentada por el resorte cuya dirección es opuesta a la deformación rotacional de éste.

Nota: Estos dos últimos apoyos presentados acá, únicamente se hacen mención de los mismos ya que los mismos se estudian en análisis estructural más avanzado.

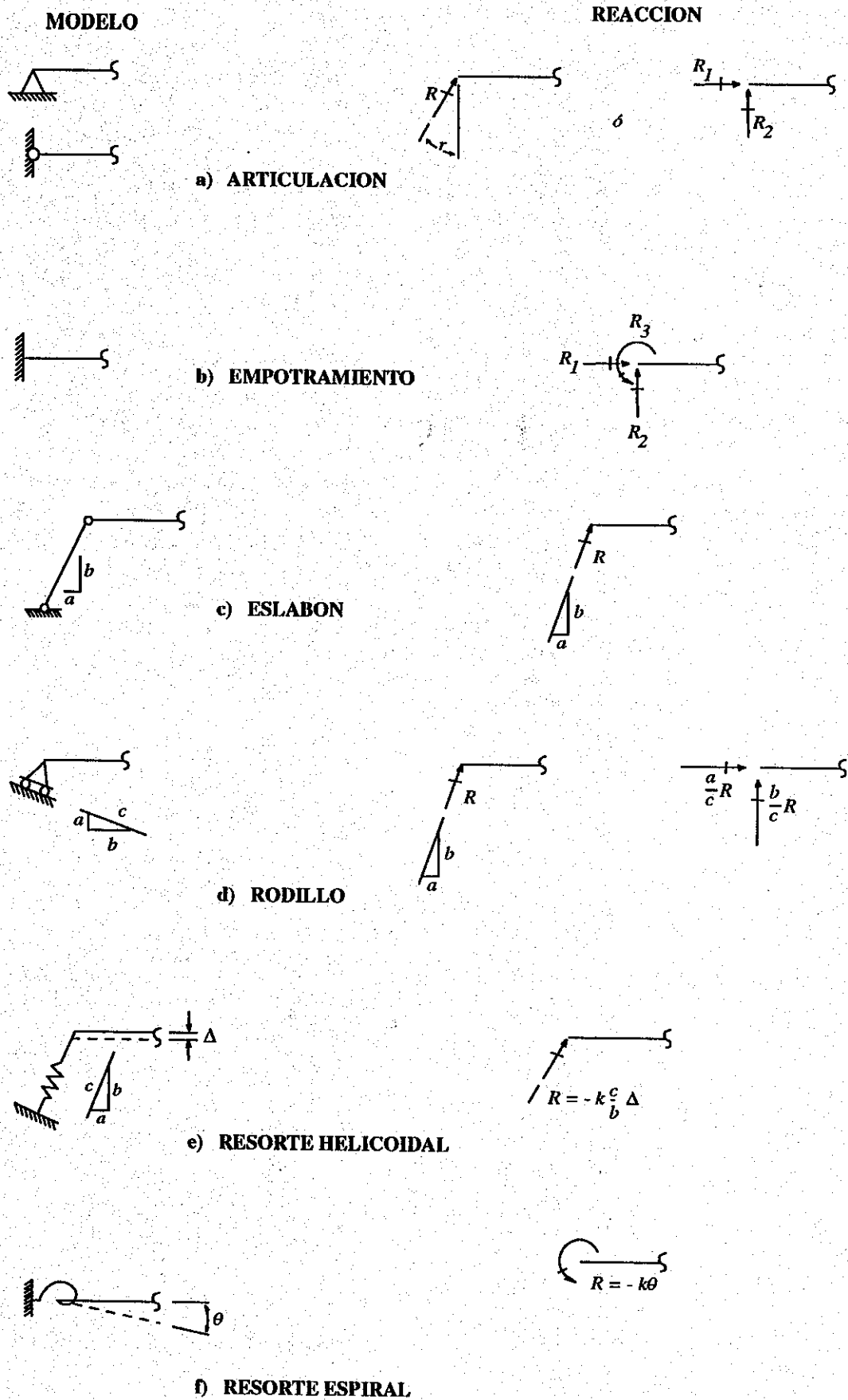


Fig. 2 Tipos de apoyos en estructuras reticulares

1.6 Indeterminación estática y cinemática

Hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de si el interés recae en las acciones o en los desplazamientos, de donde se tiene:

$$\text{Indeterminación} \begin{cases} \text{Estática } (n_s) \\ \text{Cinemática } (n_k) \end{cases}$$

1.6.1 Indeterminación estática

La indeterminación se refiere a un exceso de acciones desconocidas comparadas con el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles. El exceso de acciones desconocidas que no pueden encontrarse por medio del equilibrio estático, se conocen como redundantes estáticas y el número de tales redundantes representa el grado de indeterminación estática de la estructura.

La indeterminación externa se refiere al cálculo de las reacciones de la estructura.

La indeterminación interna se refiere al cálculo de esfuerzos resultantes dentro de la estructura, suponiendo que todas las reacciones han sido encontradas previamente.

Existen muchos métodos para determinar el grado de indeterminación estática. Se considerará uno de éstos, lo suficientemente general para todos los casos; se utiliza la definición básica de la indeterminación estática y se tratará de determinar el número total de acciones desconocidas en la estructura, es decir, el número total de cantidades de fuerzas axiales, cortantes y momentos flexionantes, necesarios para determinar completamente las fuerzas y momentos en cualquier parte de la estructura. El grado de indeterminación estática n_s , es la diferencia entre las ecuaciones de estática que se dispone y las acciones desconocidas.

Si $n_s = 0$, la estructura es estáticamente determinada. Considere la parte estructural mostrada en la figura 3, se le llamará árbol porque sus miembros no forman anillos cerrados (Los árboles en la naturaleza se venían muy raros si sus ramas crecieran hasta juntarse en sus puntas).

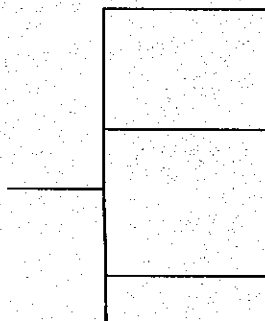


Fig. 3 Árbol estructural

El árbol que se muestra no tiene articulaciones internas y en esta forma, es fácil comprobar, que si se aplica al árbol un conjunto de fuerzas externas en equilibrio entre sí, las fuerzas internas resultantes pueden determinarse por las ecuaciones de la estática. Se nota que pueden escribirse tres ecuaciones de equilibrio para la estructura de árbol mostrada. Si el árbol fuera tridimensional, habría seis ecuaciones de éstas.

Considérese ahora el marco rígido mostrado en la figura 4. El marco tiene un "anillo" cerrado y tres puntos de apoyo. Es una cuestión relativamente sencilla cortar la estructura en un conjunto de árboles que no tengan articulaciones interiores. Dondequiera que se haga un corte, se debe introducir el número adecuado de fuerzas desconocidas, anotadas en las figuras 4b y 4c.

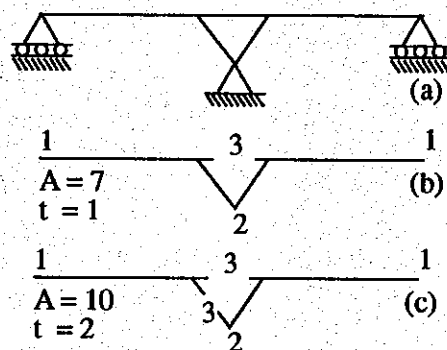


Fig. 4 Grado de indeterminación estática

Donde t = Número de árboles
 a = Acciones presentes en el corte

Normalmente, en una barra sólida en un marco en un sólo plano existen tres fuerzas desconocidas; la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flexionante; si el corte se hace en una articulación, en donde no puede haber momento, se introducen solamente dos fuerzas desconocidas. Haciendo un corte en cada apoyo se introducen las acciones correspondientes al efecto de restricción de cada reacción.

Las figuras 4b y 4c indican dos de las muchas maneras que puede cortarse la estructura en forma de árboles sin articulaciones. En cada figura se muestra el número total de siete fuerzas. Se tiene $3t = 3$ ecuaciones de equilibrio y por lo tanto, la estructura es estáticamente indeterminada en 4o. grado ($n_s = A - 3t = 7 - 3$). En la figura 4c, la estructura se cortó en forma de dos árboles. Hay diez acciones desconocidas y $3 \times 2 = 6$ ecuaciones de equilibrio, llegando a la misma conclusión que antes. Evidentemente, la respuesta será la misma, cualquiera que sea la forma en que se corte la estructura. Las partes importantes del análisis anterior son la creación de los árboles, y el recuento exacto del número de árboles así como el número de acciones desconocidas.

Cálculo de Indeterminaciones:

donde

n_s = Indeterminación estática

NM = Número de miembros

R = Fuerzas desconocidas

N = Número de nodos

N_c = Número de condiciones

Indeterminación de Marcos Planos

$$n_s = 3 NM + 3 N$$

Esta ecuación es aplicable a cualquier marco que tenga miembros continuos y juntas internas rígidas.

Existen además condiciones especiales de construcción, para reducir el número de incógnitas, lo más común de estas condiciones es un pasador o articulación interna, en consecuencia:

$$n_s = 3 NM + R - 3N + N_c$$

Indeterminación de armaduras planas

$$n_s = NM + R - 2N$$

Indeterminación de estructuras tridimensionales

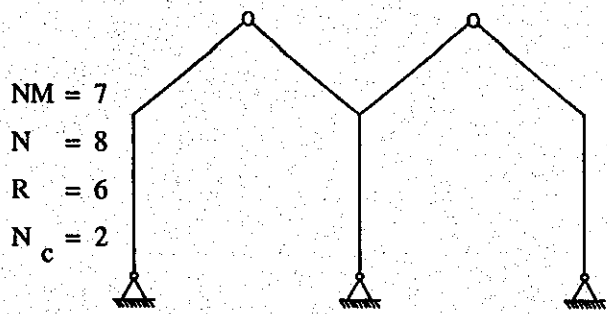
Marcos

$$n_s = 6 NM + R - 6N - N_c$$

Armaduras

$$n_s = NM + R - 3N$$

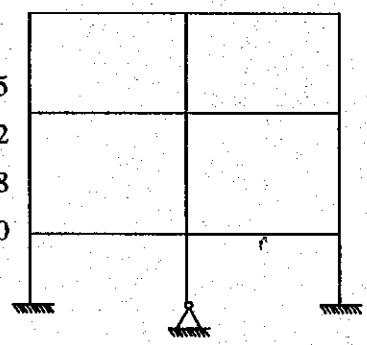
A continuación se presentan casos de indeterminación estática, observar la figura 5.



$NM = 7$
 $N = 8$
 $R = 6$
 $N_c = 2$

$$n_s = 3(7) + 6 - 3(8) - 2$$

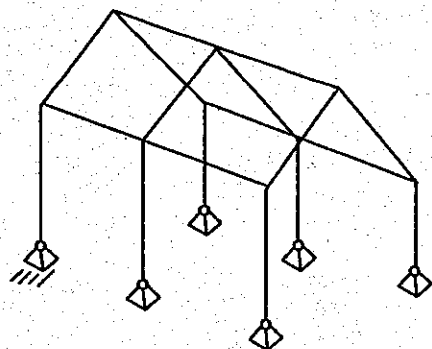
$$n_s = 1$$



$NM = 15$
 $N = 12$
 $R = 8$
 $N_c = 0$

$$n_s = 3(15) + 8 - 3(12) - 0$$

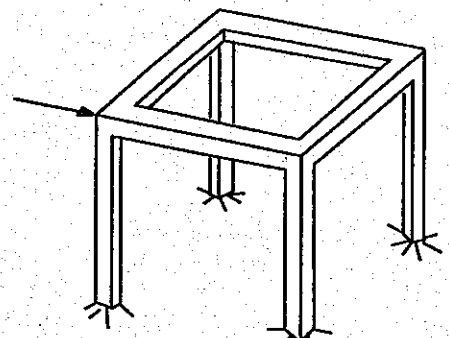
$$n_s = 17$$



$NM = 18$
 $N = 15$
 $R = 18$
 $N_c = 0$

$$n_s = 6(18) - 6(15) + 18 + 0$$

$$n_s = 36$$

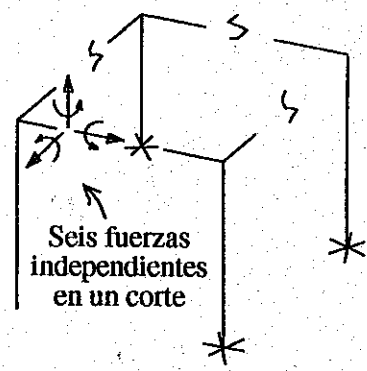
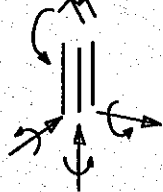


$NM = 8$
 $N = 8$
 $R = 24$
 $N_c = 0$

$$n_s = 6(8) - 6(8) + 24 + 0$$

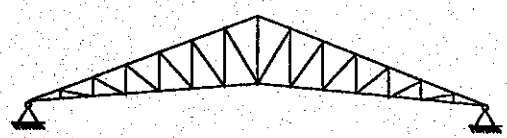
$$n_s = 24$$

Seis componentes de reacción independientes



Seis fuerzas independientes en un corte

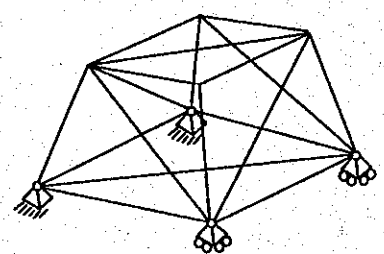
$NM = 5$
 $N = 4$
 $R = 4$
 $N_c = 0$



$$n_s = 5 + 4 - 2(4) + 0$$

$$n_s = 1$$

$NM = 18$
 $N = 8$
 $R = 8$
 $N_c = 0$



$$n_s = 18 + 8 - 3(8)$$

$$n_s = 2$$

Fig. 5 Indeterminación estática de marcos y armaduras

1.6.2 Indeterminación Cinemática

En el método de análisis de la rigidez, los desplazamientos de los nudos de la estructura son las cantidades desconocidas, y pueden darse como traslaciones y rotaciones, dependiendo de su configuración y el tipo de cargas aplicadas. Estos desplazamientos de nudo desconocido son las cantidades cinemáticamente indeterminadas, y en algunas ocasiones se conocen como redundantes cinemáticas. Su número representa el grado de indeterminación cinemática de la estructura o el número de grados de libertad para el desplazamiento de nudo.

Indeterminación de un Marco Plano

$$n_k = 3N - R$$

Indeterminación Marco Tridimensional

$$n_k = 6N - R$$

Indeterminación de Armaduras

$$n_k = 2N - R$$

Indeterminación de Armaduras

$$n_k = 2N - R$$

Es importante hacer notar que la elección de los grados de libertad es en cierto sentido arbitraria, puesto que interviene el criterio teórico. Puede depender de la carga, y depende de las suposiciones respecto al comportamiento estructural, que son propias de cada problema en particular.

El analista debe estar consciente de sus juicios y sus implicaciones. Si en un problema particular los efectos axiales son realmente despreciables, el trabajo extra que implica operar con seis desplazamientos desconocidos en lugar de tres reducirá el mismo.

La designación de los grados de libertad de la estructura es un paso importante del análisis. Fija el carácter del problema, incorporando las suposiciones acerca del comportamiento y determina el número de ecuaciones que se deben resolver. Véase en la Fig. 6, ejemplos de indeterminación cinemática.

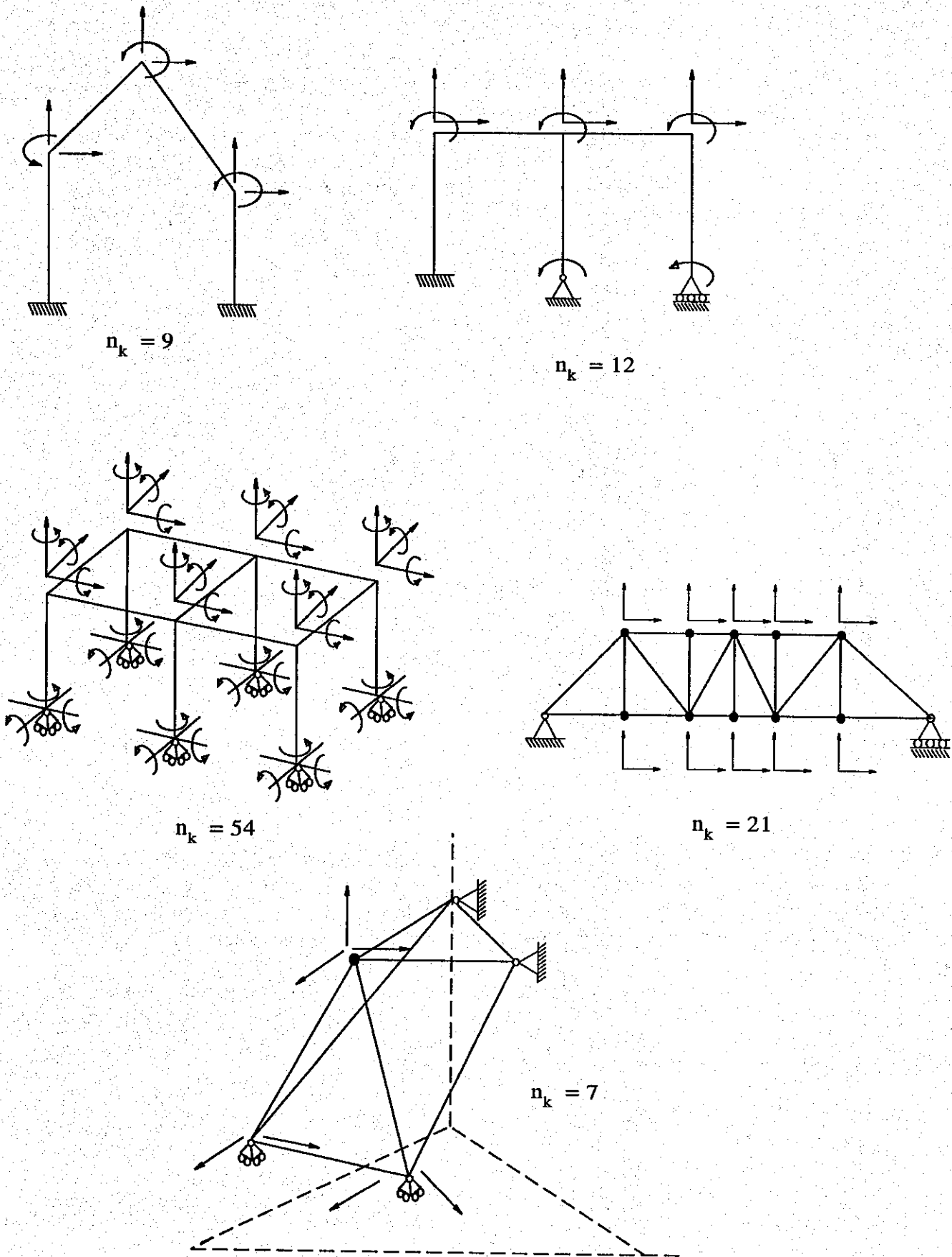


Fig. 6 Grados de libertad de marcos y armaduras

1.7 Acciones y Desplazamientos

Los términos "acción" y "desplazamiento" se utilizan para describir ciertos conceptos fundamentales en el análisis estructural. Una acción llamada algunas veces una fuerza generalizada, es llamada más comúnmente fuerza o par. Sin embargo, una acción también puede ser una combinación de fuerzas y pares, una carga distribuida o una combinación de estas acciones. En una situación muy generalizada, es posible, para un sistema de cargas muy complicado que actúe sobre una estructura, que se le trate como una sola acción, si todas las componentes de la carga están relacionadas las unas a las otras en una manera definida.

Un segundo concepto básico es el de desplazamiento, que generalmente es una traslación o rotación en algún punto de una estructura. Una traslación se refiere a la distancia recorrida por un punto de una estructura, y una rotación significa el ángulo de rotación de la tangente a la curva elástica de un punto.

Para simplificar la notación para acciones y desplazamiento, es deseable en muchos casos utilizar el símbolo A para las acciones, incluyendo tanto fuerzas concentradas como pares, y el símbolo D para los desplazamientos, incluyendo traslaciones y rotaciones. Se pueden utilizar subíndices para distinguir entre las diferentes acciones y desplazamientos que pueden ser de interés en un análisis en particular. El uso de este tipo de notación se muestra en la fig. 7.a, en la que se tiene una viga en voladizo sujeta a las acciones A_1, A_2, A_3 . El desplazamiento correspondiente a A_1 y debido a todas las cargas que actúan simultáneamente se denomina D_1 en la fig. 7.b, igualmente, los desplazamientos correspondientes a A_2 y A_3 se denominan D_2 y D_3 respectivamente.

Los desplazamientos causados por la acción A_2 , únicamente se muestran en fig. 7.c y aquellos causados por A_3 están mostrados en la fig. 7.d. En cada caso los subíndices para los símbolos de desplazamiento siguen la regla de que el primer subíndice identifica el desplazamiento y el segundo da la causa de él. En general, la causa puede ser una fuerza, un par o todo un sistema de cargas.

Para las vigas de la fig. 7 no es difícil determinar los diferentes desplazamientos. Suponiendo que la viga tiene una rigidez a la flexión EI y una longitud L , se encuentra que los desplazamientos para la viga de la fig. 7.b se pueden calcular por el método del Área del Diagrama de momentos, o de la viga conjugada. De ahí que los desplazamientos son:

$$D_{11} = \frac{A_1 L^3}{24 EI} \quad D_{21} = \frac{5A_1 L^3}{48 EI} \quad D_{31} = \frac{A_1 L^2}{8 EI}$$

De modo similar se puede encontrar los seis desplazamientos restantes de las figs. 7.c y d ($D_{12}, D_{22}, \dots, D_{33}$). Luego los desplazamientos de la viga sometida a la acción simultánea de todas las cargas se determinan por la suma de las deformaciones que se producen en el mismo punto, para diferentes condiciones de carga:

$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

$$D_2 = D_{21} + D_{22} + D_{23}$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32} + D_{33}$$

Estas sumas son expresiones del principio de superposición.

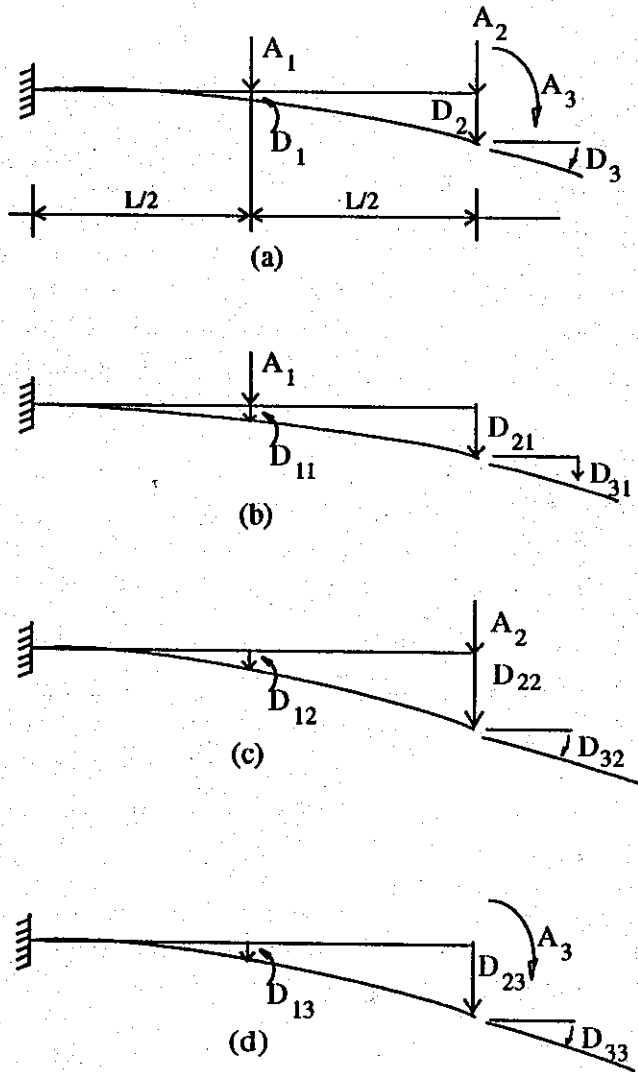


Fig. 7 Viga en voladizo

1.8 Ecuaciones de Acción y Desplazamiento

Las relaciones que existen entre las acciones y los desplazamientos juegan un papel importante en el análisis estructural y se utilizan extensivamente tanto en el método de flexibilidad, como en el de rigidez. Un modo conveniente de expresar la relación entre las acciones que actúan en una estructura y los desplazamientos de ella es mediante ecuaciones de acción y desplazamiento. Se obtiene una ilustración sencilla de tales ecuaciones considerando el resorte linealmente elástico mostrado en la fig. 8. La acción A comprime el resorte, produciendo por lo tanto, un desplazamiento D del extremo del resorte. La relación entre A y D puede expresarse por una ecuación de desplazamiento de la manera siguiente:

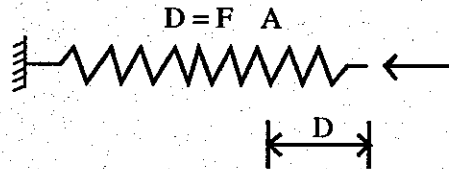


Fig. 8 Resorte linealmente elástico

En esta ecuación F es la flexibilidad del resorte, y se define como el desplazamiento producido por un valor unitario de la acción A.

La relación entre la acción A y el desplazamiento D del resorte en la Fig. 8 también puede expresarse por una ecuación de acción que expresa a A en términos de D:

$$A = k D$$

En esta ecuación k es la rigidez del resorte, la que se define como la acción necesaria para producir un desplazamiento unitario. Puede verse en las dos ecuaciones anteriores que la flexibilidad y la rigidez del resorte son recíprocas, como sigue:

$$F = 1 / K = K^{-1}$$

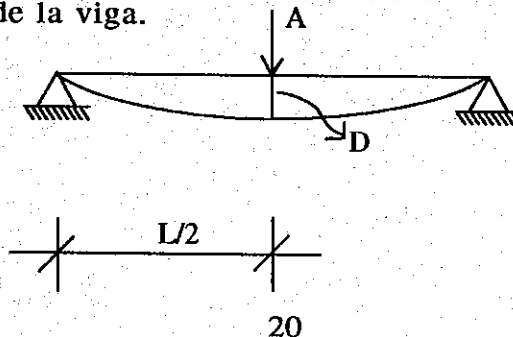
$$K = 1 / F = F^{-1}$$

La flexibilidad del resorte tiene unidades de longitud entre fuerza, en tanto que la rigidez tiene unidades de fuerza entre longitud.

Para entender mejor estos conceptos, los mismos se analizarán en los siguientes ejemplos:

Ejemplo;

Determinar el coeficiente de flexibilidad y rigidez de la siguiente viga para "D" y "A" en el centro de la viga.

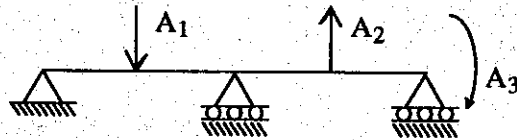


- a) Se encontrará el coeficiente de flexibilidad por medio de la ecuación $D = F A$, de donde se tiene que:

$$D = \frac{AL^3}{48EI} = F A \Rightarrow F = \frac{L^3}{48EI}$$

El coeficiente de flexibilidad queda expresado en unidades de longitud entre fuerza.

- b) Ahora corresponde calcular el coeficiente de rigidez por medio de la ecuación $A = K D$, de donde entonces se tiene:

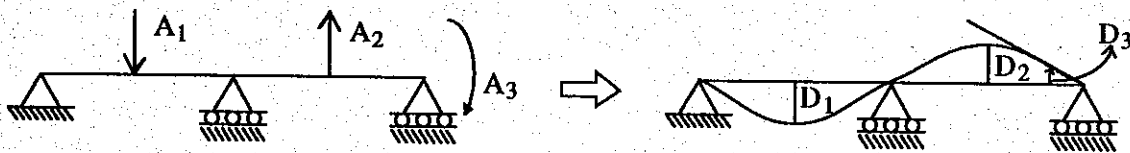


$$A = K \frac{AL^3}{48EI} \Rightarrow K = \frac{48EI}{L^3} = F^{-1}$$

El coeficiente de rigidez queda entonces expresado en unidades de fuerza entre longitud, de ahí que se puede comprobar con este ejemplo que la rigidez es igual a la inversa del coeficiente de flexibilidad.

Ejemplo:

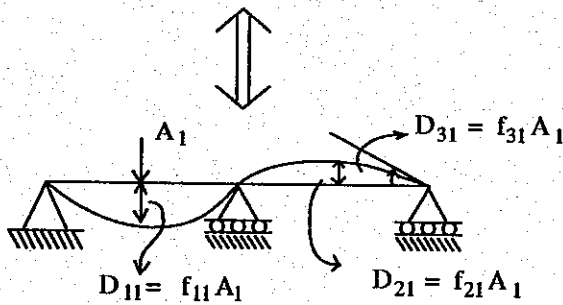
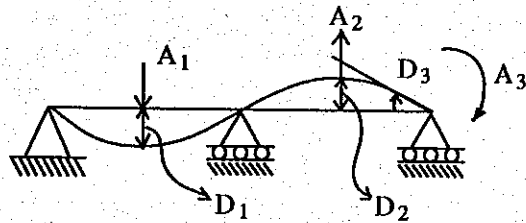
Determinar para la viga mostrada en la figura situación de acción. $A = K D$ en lugar de aplicar cargas se suponen deformaciones, vea como queda la figura al suponer las mismas.



Elástica

Se observa que en la figura de la derecha, las deformaciones 1 y 2 son verticales mientras que la tercera es de giro, se necesita de una estructura, la cual tiene que impedir las deformaciones a través de apoyos ficticios, luego aplicar una por una las deformaciones para encontrar sus valores respectivos.

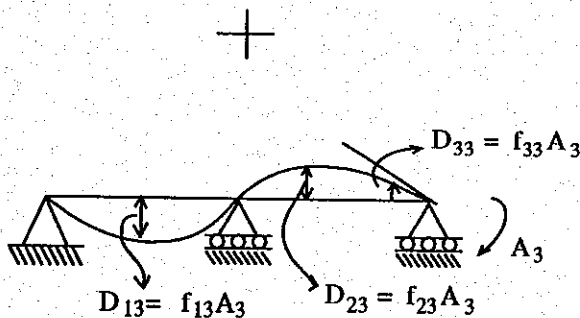
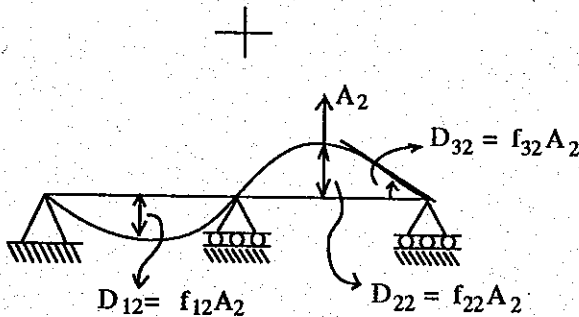
En las siguientes figuras que se muestran además de las acciones representadas, las elásticas que se deben a éstas, se presentan las deformaciones, cada una en dirección de las acciones que tiene la estructura, se puede decir que las deformaciones que se dan son tres y se denotarán como D_1, D_2, D_3 , ahora para que los desplazamientos queden en términos de las acciones se utiliza la ecuación $D = F A$. Otra situación que hay que hacer mención es que, para hacer cumplir el principio de superposición, se aplica una por una las acciones para determinar así las contribuciones que se darán de cada uno de los desplazamientos, debido a cada una de las acciones dadas, de donde entonces:



D_{11} = A la deformación uno en la dirección de la acción uno.

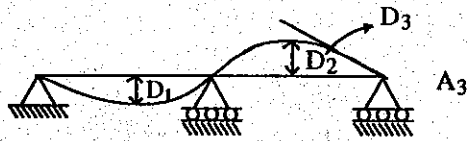
D_{21} = A la deformación dos en la dirección de la acción uno.

D_{31} = A la deformación tres en la dirección de la acción tres.

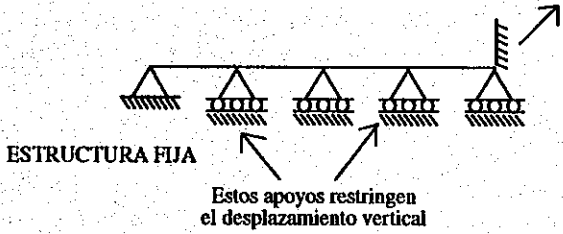


Para hallar las contribuciones de las deformaciones debida a la acción dos y a la acción tres se lleva a cabo de la misma forma que para la acción uno.

De ahí que por el principio de superposición se tiene que:



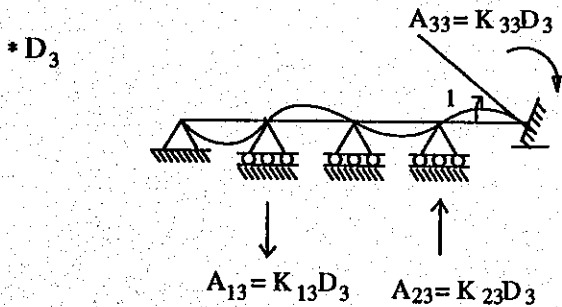
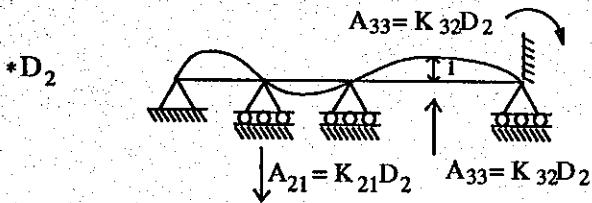
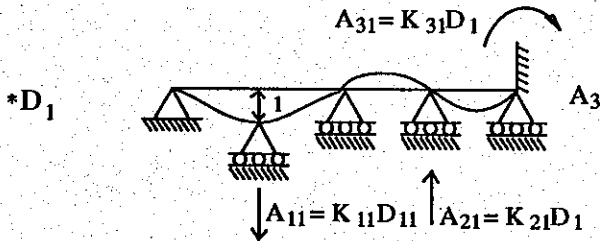
Restringe el giro y el desplazamiento vertical



Seguidamente se aplican las deformaciones, la primera será deformación unitaria uno, las demás quedarán restringidas por el apoyo ficticio, las reacciones que se dan en la estructura son las contribuciones en las direcciones de las deformaciones supuestas y así se hará con las demás, para cumplir el principio de superposición.

Las acciones de restricción desarrolladas por los apoyos artificiales son los coeficientes de rigidez y éstos se deben a desplazamientos unitarios.

Ahora se calcula $\sum F_y$ en las estructuras de superposición:



$$A_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13}$$

$$A_2 = A_{21} + A_{22} + A_{23}$$

$$A_3 = A_{31} + A_{32} + A_{33}$$

De la Ecuación $A = K D$ se tiene:

$$A_1 = K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3$$

$$A_2 = K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3$$

$$A_3 = K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3$$

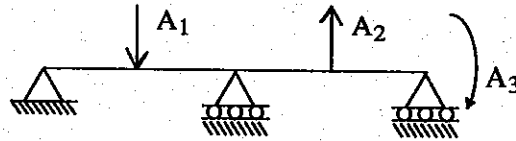
Matricialmente se representa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{A} = \vec{K} \vec{D} = F^{-1} \vec{D} \\ \text{ó} \\ \vec{D} = \vec{F} \vec{A} = K^{-1} \vec{A} \end{matrix}$$

Esta condición se refiere a las mismas cargas de iguales deformaciones.

Ejemplo:

Para la viga siguiente, determinar los desplazamientos en términos de las acciones.



$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

$$D_1 = f_{11} A_1 + f_{12} A_2 + f_{13} A_3$$

$$D_2 = D_{21} + D_{22} + D_{23} \quad \Rightarrow$$

$$D_2 = f_{21} A_1 + f_{22} A_2 + f_{23} A_3$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32} + D_{33}$$

$$D_3 = f_{31} A_1 + f_{32} A_2 + f_{33} A_3$$

Quedando matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = F A$$

Donde

D = Matriz de deformaciones

F = Matriz de flexibilidades

A = Matriz de acciones

Vertical text or markings along the right edge of the page, possibly bleed-through or scanning artifacts.

CAPITULO 2

METODO BASICO DE RIGIDEZ (O DE LOS DESPLAZAMIENTOS)

Método de rigidez

El método de rigidez, se usa en su forma básica en el análisis de estructuras lineales y elásticas; aunque se puede adaptar en el análisis de estructuras no lineales, en este trabajo se aplicará únicamente el primero, ya que el otro está fuera del alcance de los objetivos del mismo.

El método directo de la rigidez es un procedimiento organizado y conceptualmente muy sencillo, para el análisis de todos los tipos de estructuras, el cual se introduce con facilidad en computadoras, usando un planteamiento matricial.

El método de rigidez utiliza ecuaciones fundamentales que se derivan del principio de superposición, las incógnitas son los desplazamientos de los nudos de la estructura. Por lo tanto, el número de incógnitas que deben calcularse, es igual al grado de indeterminación cinemática. El método de la rigidez, involucra un uso extensivo de acciones y desplazamientos en miembros con extremos empotrados, por lo que se hará referencia constante al material presentado en el capítulo 4 sección 5.

2.1 Cálculo de los Desplazamientos:

2.1.1 Estructura Fija

Consiste en obtener una estructura cinemáticamente determinada; alterando la estructura real de modo tal, que todos los desplazamientos desconocidos (traslaciones y rotaciones de nudos) sean cero, impidiendo así que los nudos de la estructura tengan desplazamiento de cualquier clase.

2.1.2 Análisis de la Estructura Fija sujeta a las cargas

Todas las cargas que producen reacciones internas, excepto aquellas que corresponden a un desplazamiento de nudo desconocido, se consideran aplicadas a la estructura fija, las diversas acciones en la estructura son evaluadas. Las acciones más importantes que deben determinarse son las acciones que corresponden a los desplazamientos desconocidos, observar el capítulo 4 sección 5.

2.1.3 Análisis de la estructura fija para desplazamientos unitarios

Se deben determinar las acciones en la estructura fija, debido a los valores unitarios de los desplazamientos de nudo desconocidos (coeficientes de rigidez k).

2.1.4 Determinación de los desplazamientos

Utilizando el principio de superposición de efectos, se define que las acciones aplicadas a la estructura real, en dirección a las deformaciones desconocidas (las cuales se llamarán como A_D), será equivalente a la sumatoria de A_{DL} y $K D$, es decir:

$$A_D = A_{DL} + K D$$

Cada uno de los componentes de esta ecuación, representan acciones en la estructura a analizar, generalizando el análisis se tiene que:

$$A_{Dn} = A_{DLn} + K_n D_n$$

Donde, n representa el número de desplazamientos desconocidos que se van a analizar en la estructura y es igual a n_k .

En general, estos vectores tendrán tantos renglones como existan desplazamientos de nudos desconocidos. Por lo tanto, si n_k es el número de desplazamientos desconocidos, el orden del vector de rigidez K será $n_k \times n_k$, en tanto que A_D , A_{DL} y D son vectores de orden $n_k \times 1$.

Para hallar los desplazamientos se despeja la variable D_n de la ecuación anterior, recuerde que esta ecuación es vectorial (matricial) de donde:

$$D_n = K_n^{-1} (A_{Dn} - A_{DLn}) \quad 2.1.4)$$

2.2 Cálculo de Reacciones y Acciones de Extremo;

Una vez encontrados los desplazamientos de nudo, es necesario determinar las acciones de extremo y las reacciones de la estructura, para lo cual existen dos procedimientos:

- 2.2.1 Obtener las acciones de extremo, considerando consecutivamente cada miembro en particular de la estructura, efectuando cálculos separados para cada miembro, una vez encontrados los desplazamientos de nudo.
- 2.2.2 Efectuar los cálculos de modo sistemático, simultáneamente con los cálculos para encontrar los desplazamientos.

El segundo acercamiento para encontrar acciones de extremo y reacciones es apropiado, sin embargo, para cálculos manuales debido a que es sistemático puede generalizarse fácilmente.

Las matrices de acciones en los extremos de los miembros y reacciones, en la estructura real, se denominan A_M y A_R respectivamente.

En la estructura fija sujeta a las cargas, las matrices de acciones de extremo y reacciones correspondientes a A_M y A_R se denominarán A_{ML} y A_{RL} respectivamente. Debe notarse de nuevo que cuando se haga cualquier referencia a las cargas que actúan sobre la estructura fija, se supone que todas las cargas reales se toman en consideración, excepto aquellas que corresponden a un desplazamiento desconocido.

Las matrices A_M y A_{ML} , son de orden $m \times 1$, suponiendo que m , representa el número de acciones de extremo; de igual modo, las matrices A_R y A_{RL} , son de orden $r \times 1$, en donde r representa el número de reacciones.

En la estructura fija sujeta a desplazamientos unitarios, las matrices de acciones de extremo y reacciones se denominan A_{MD} y A_{RD} respectivamente.

En el caso general las matrices A_{MD} y A_{RD} son de orden $m \times n_k$ y $r \times n_k$. Las ecuaciones de superposición, para las acciones de extremo y reacciones en la estructura real pueden expresarse ahora en forma matricial como:

$$A_M = A_{ML} + A_{MD} D$$

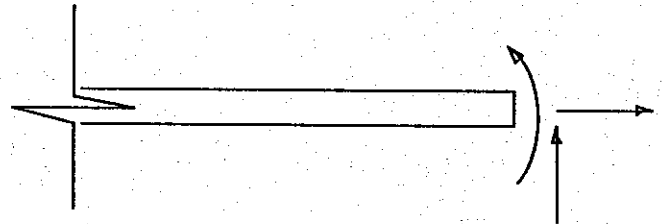
$$A_R = A_{RL} + A_{RD} D$$

Al resolver las dos ecuaciones anteriores y la ecuación 2.1.4, se obtendrán desplazamientos, acciones de extremo y reacciones de la estructura; constituyendo las tres ecuaciones de superposición del método de rigidez.

2.3 Convención de Signos

2.3.1 Extremo del miembro:

Positivo: Si la dirección es la misma de la figura



2.3.2 Cargas Internas en un Nudo:

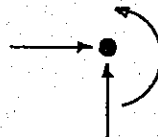
De los extremos del miembro, las acciones son transmitidas al nudo y si toman la dirección presentada en la figura serán positivos.



2.3.3 Cargas Externas sobre un Nudo:

Correspondiente a momentos concentrados y cargas puntuales

Positivos, si toma la dirección de la figura adjunta.



NOTA: Al darse sentido contrario de lo especificado anteriormente se tomará con el signo negativo.

2.4 Ejemplos del método de rigidez

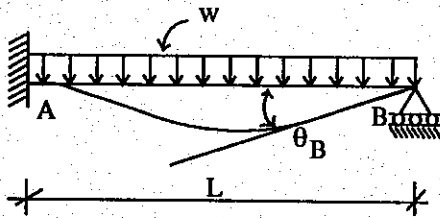
Para ilustrar los conceptos del método de rigidez en su forma más sencilla, se consideran solamente los esfuerzos principales despreciando los demás, en las aplicaciones a vigas, marcos planos, armaduras y parillas, salvo que se especifique lo contrario.

2.4.1 Vigas

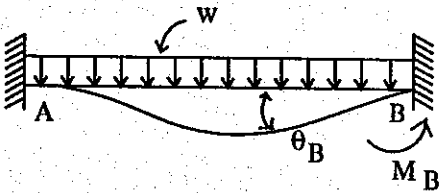
Problema No. 1

Se considera el análisis de la viga de la siguiente figura, la cual tiene un apoyo empotrado en el punto A, un apoyo guiado en el punto B y está sujeta a una carga uniformemente repartida w .

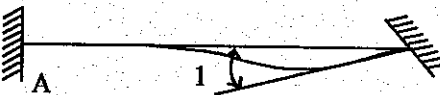
De acuerdo con los pasos del cálculo de los desplazamientos se tiene que:



- a) La viga, es cinemáticamente indeterminada $n_k = 1$ de primer grado (cuando se desprecian las deformaciones axiales), debido a que el único desplazamiento, de nudo desconocido es la rotación θ_B , en el nudo B. Para eliminar esta rotación en el nudo, se tiene que transformar la estructura real a una estructura fija. Por lo tanto la estructura fija, es la viga doblemente empotrada. Véase la figura.



- b) Se calcula la acción de extremo de la estructura fija, como el desplazamiento que se está dando en la estructura original, es una rotación, se considera en la estructura fija, la acción de empotramiento producida por la carga uniformemente repartida w . La acción es igual a $M_B = -wL^2/12$.



- c) Ahora se tiene que calcular la acción, siempre en la estructura fija, debida a un valor unitario del desplazamiento desconocido, la rigidez del miembro es $m_B = 4EI/L$.

- d) Determinación del desplazamiento. La ecuación de superposición expresa que:

$$A_D = A_{DL} + K D$$

Donde

A_D = Vector que representa la acción de la viga original, correspondiente al desplazamiento de nudo desconocido D, en este caso no existe en el nudo ningún tipo de carga que provoque un desplazamiento angular, entonces se tiene que $A_D = 0$.

- A_{DL} = Vector que representa la acción en la estructura fija, corresponde al desplazamiento desconocido, y causado por la carga repartida uniformemente w , entonces $A_{DL} = -wL^2/12$
- k = Coeficiente de rigidez, que tiene el elemento estructural debido a un desplazamiento unitario $m_B = 4 EI / L$
- D = Deformación que se tiene en la estructura, en este ejemplo se define como θ_B que es desconocido.

Sustituyendo cada uno de los valores encontrados, en la ecuación de superposición, se tiene que;

$$0 = -wL_2 + 4 (EI / L) \theta_B$$

Despejando θ_B

$$\theta_B = wL^3 / (48 EI)$$

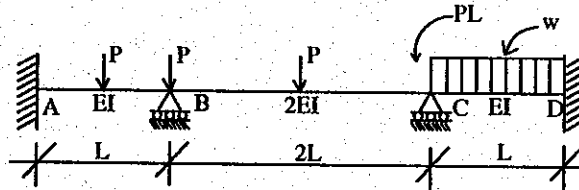
El signo positivo para el resultado anterior significa que la rotación tiene el sentido contrario a las manecillas del reloj.

La parte más esencial en la solución anterior consiste en escribir la ecuación de superposición, que expresa el hecho de que el momento en B en la viga real es cero. En esta ecuación, está incluido el momento provocado por las cargas que actúan sobre la estructura fija y el momento causado por la rotación unitaria del extremo B de la estructura fija. El último término en la ecuación, se expresó adecuadamente, como el producto del momento causado por un valor unitario y el desplazamiento desconocido (coeficiente de rigidez).

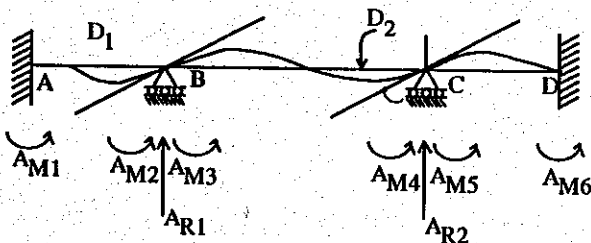
Los dos efectos se suman algebraicamente, utilizando la misma convención de signos para todos los términos de la ecuación. La cual se resuelve para el desplazamiento desconocido, el signo del resultado, es la dirección real del desplazamiento. La ecuación puede llamarse ecuación de equilibrio de nudo. El nombre se utiliza debido a que puede considerarse que la ecuación expresa el equilibrio de momentos en el nudo B.

Problema No. 2

Analizar la viga de tres claros, que se muestra en la figura, para determinar: las reacciones, los momentos de extremo para todos los miembros y los desplazamientos desconocidos. Considerando que la rigidez a la flexión de los miembros es: para AB y CD igual a EI y para BC igual a 2EI, se sugiere utilizar un sistema numerativo de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

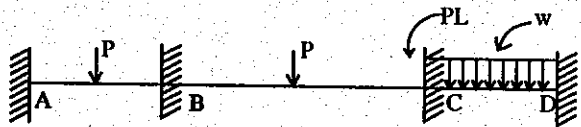


Se visualizan cuáles son las fuerzas y desplazamientos a determinar, por lo tanto:

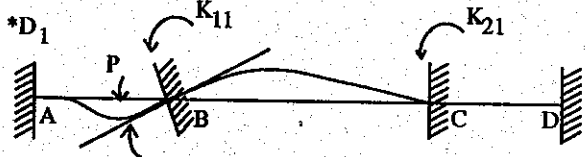


$n_k = 2$ (Despreciando los desplazamientos axiales).

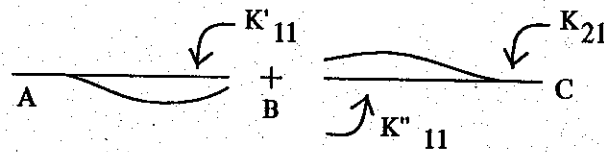
Para anular los dos desplazamientos existentes se colocan apoyos, los cuales restringen los desplazamientos, luego se observa ahora como queda la viga.



Se analiza la viga debido a cada una de las deformaciones unitarias para hallar la matriz de rigidez.

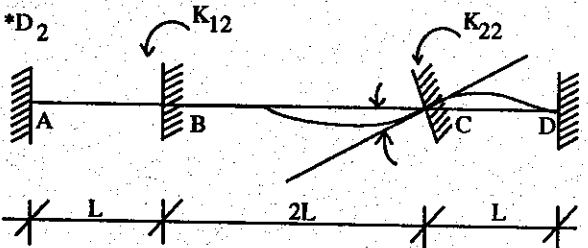


$$K_{11} = K'_{11} = K''_{11}$$

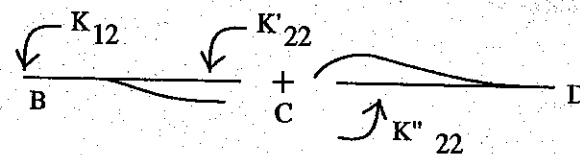


$$K_{11} = 4EI/L + 4EI/L = 8EI/L$$

$$K_{21} = 2(2EI)/2L = 2EI/L$$



$$K_{22} = K'_{22} + K''_{22}$$



$$K_{12} = 2(2EI)/2L = 2EI/L$$

$$K_{22} = 4EI/L + 4EI/L = 8EI/L$$

Reuniendo los datos hallados de las matrices A_D , A_{DL} y K , se sustituye en la ecuación

$$A_D = A_{DL} + K D$$

y despejar las deformaciones queda entonces como:

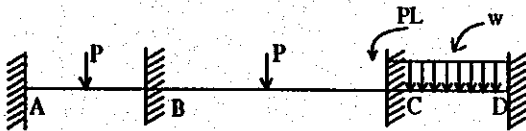
$$D = K^{-1} (A_D - A_{DL})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = L/EI \begin{bmatrix} 2/15 & -1/30 \\ -1/30 & 2/15 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ PL \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} PL/8 \\ -PL/6 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = L/EI \begin{bmatrix} 2/15 & -1/30 \\ -1/30 & 2/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PL/8 \\ 7PL/6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} D_1 = -PL^2/18EI \\ D_2 = 23PL^2/144EI \end{matrix}$$

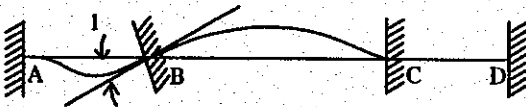
Note que el desplazamiento uno, tiene signo negativo, esto indica que el giro es contrario al supuesto. La matriz inversa (K^{-1}) se le deja como tarea para que la pueda comprobar.

Ahora se calculan los momentos de extremo de miembro para tal caso se necesita conocer la matriz A_{ML} y la matriz A_{MD} , la primera representa los momentos de extremo de miembro debido a las cargas a las que está sometida la viga en la estructura, y la segunda los momentos de extremo de miembro debido a las deformaciones unitarias, se tiene entonces:



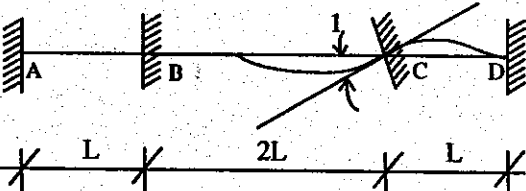
$$\begin{matrix} A_{ML1} & A_{ML2} & A_{ML3} & A_{ML4} & A_{ML5} & A_{ML6} \\ A_{ML1} = PL/8 & A_{ML2} = -PL/8 & A_{ML3} = 2PL/8 & & & \end{matrix}$$

$$A_{ML4} = -PL/4 \quad A_{ML5} = wL^2/12 = PL/12 \quad A_{ML6} = -PL/12$$



$$\begin{matrix} A_{MD11} & A_{MD21} & A_{MD31} & A_{MD41} & A_{MD51} & A_{MD61} \\ A_{MD11} = 2EI/L & A_{MD21} = 4EI/L & A_{MD31} = 4(2EI)/2L = 4EI/L & & & \end{matrix}$$

$$A_{MD41} = 2(2EI)/2L = 2EI/L \quad A_{MD51} = 0 = PL/12 \quad A_{MD61} = 0$$



$$\begin{matrix} A_{MD12} & A_{MD22} & A_{MD32} & A_{MD42} & A_{MD52} & A_{MD62} \\ A_{MD12} = 0 & A_{MD22} = 0 & A_{MD32} = 2(2EI)/2L = 2EI/L & & & \end{matrix}$$

$$A_{MD42} = 4(2EI)/2L = 4EI/L \quad A_{MD52} = 4EI/L \quad A_{MD62} = 2EI/L$$

Sustituyendo los valores en la ecuación matricial:

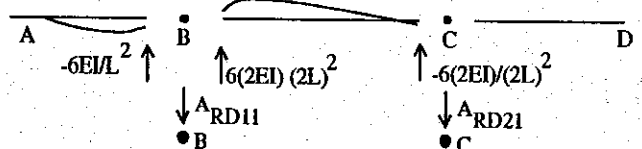
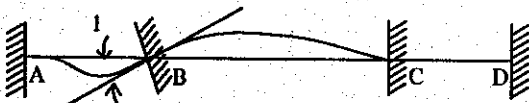
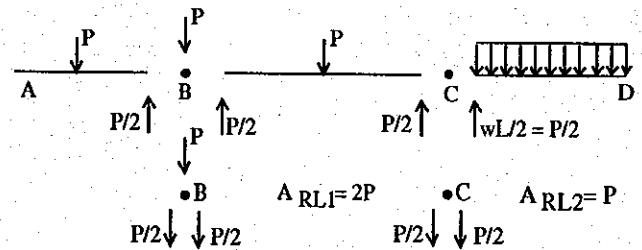
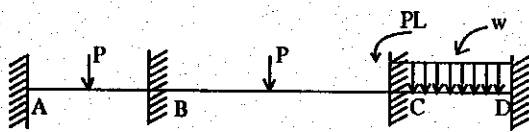
$$A_M = A_{ML} + A_{MD} \quad D$$

$$\begin{bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \\ A_{M5} \\ A_{M6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PL/8 \\ -PL/8 \\ PL/4 \\ -PL/4 \\ PL/12 \\ -PL/12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2EI/L & 0 \\ 4EI/L & 0 \\ 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \\ 0 & 4EI/L \\ 0 & 2EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PL^2/18EI \\ 23PL^2/144EI \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A_{M1} = PL/72 \quad A_{M2} = -25/72 PL \quad A_{M3} = 50/144 PL \quad A_{M4} = 5/18 PL$$

$$A_{M5} = 13/18 PL \quad A_{M6} = 17/72 PL$$

Para hallar las reacciones en los apoyos B y C, se necesita conocer A_{RL} , que es la contribución de las acciones verticales que llegan a los nodos de la estructura fija, debido a las cargas a las que está sometida la misma, además se debe conocer A_{MR} acciones verticales debido a las deformaciones unitarias, se observa entonces;

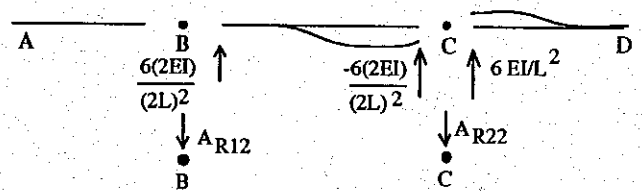
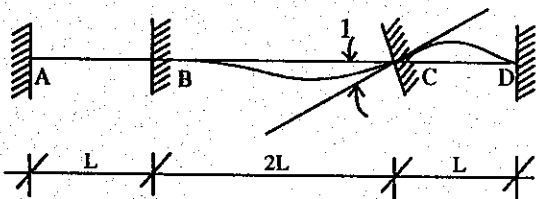


$$A_{RD11} = -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6(2EI)}{(2L)^2}$$

$$A_{RD21} = -6(2EI)/(2L)^2$$

$$A_{RD11} = -3EI/L^2$$

$$A_{RD21} = -3EI/L^2$$



$$A_{R12} = \frac{6(2EI)}{(2L)^2}$$

$$A_{RD22} = \frac{-6(2EI)}{(2L)^2} + \frac{6EI}{L^2}$$

$$A_{R12} = 3EI/L^2$$

$$A_{RD22} = 3EI/L^2$$

Sustituyendo los valores en la ecuación matricial;

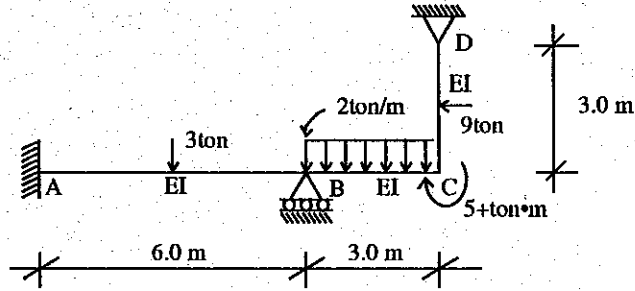
$$A_R = A_{RL} = A_{RM} D$$

$$\begin{bmatrix} A_{R1} \\ A_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI6L^2 & 3EI/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -PL^2/18EI \\ 23PL^2/144EI \end{bmatrix} \rightarrow$$

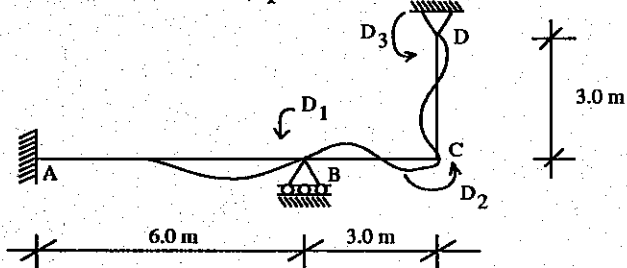
$$A_{R1} = 127/48 P \quad A_{R2} = 79/48 P$$

Problema No. 3

Hallar los desplazamientos, en los nudos B, C y D de la viga siguiente; (despreciando las deformaciones axiales en los miembros)

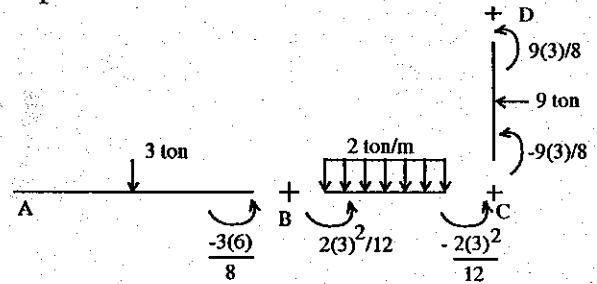
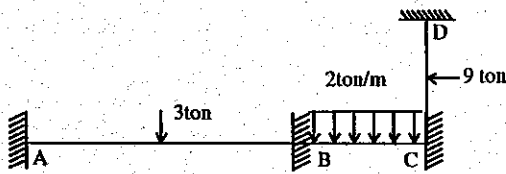


Se observan cuáles son los desplazamientos que se producen en los nudos y como se desprecian las deformaciones axiales, se tienen únicamente giros en los tres nudos, por lo tanto:



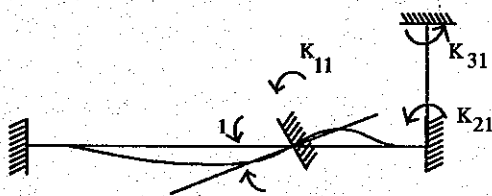
$$n_k = 3$$

La estructura Fija, se muestra en la siguiente figura, la cual impide cualquier tipo de desplazamiento que se pueda dar en los nudos, a partir de esta estructura fija se calcula la matriz A_{DL} por lo tanto:



$$A_{DL1} = \frac{-9}{4} + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \quad A_{DL2} = \frac{-27}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{39}{8}$$

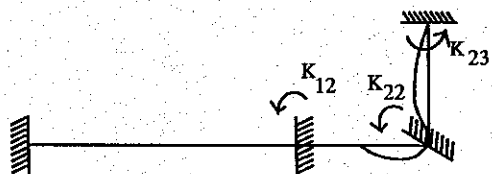
$$A_{DL3} = 27/8$$



$$K_{11} = K'_{11} + K''_{11}$$

$$K_{11} = \frac{4EI}{6} + \frac{4EI}{3} = 2EI$$

$$K_{21} = \frac{2EI}{3} \quad K_{31} = 0$$



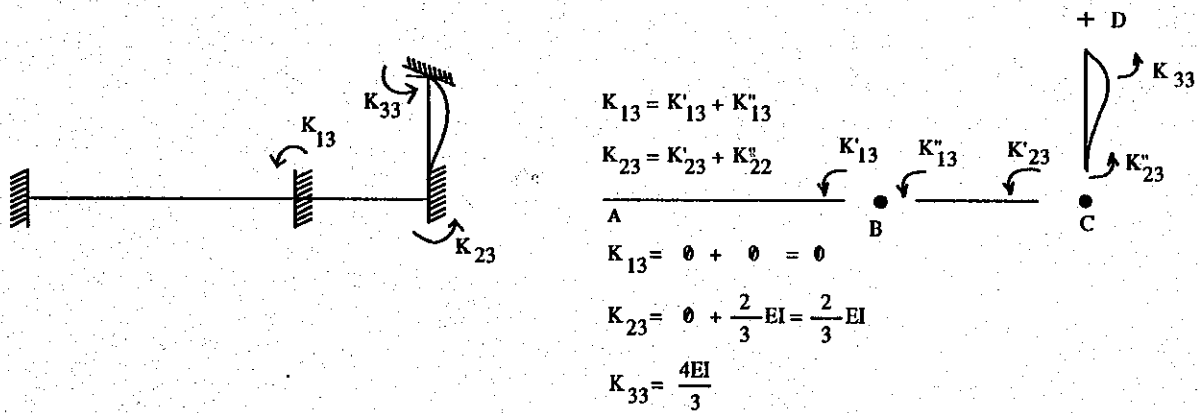
$$K_{12} = K'_{12} + K''_{12}$$

$$K_{22} = K'_{22} + K''_{22}$$

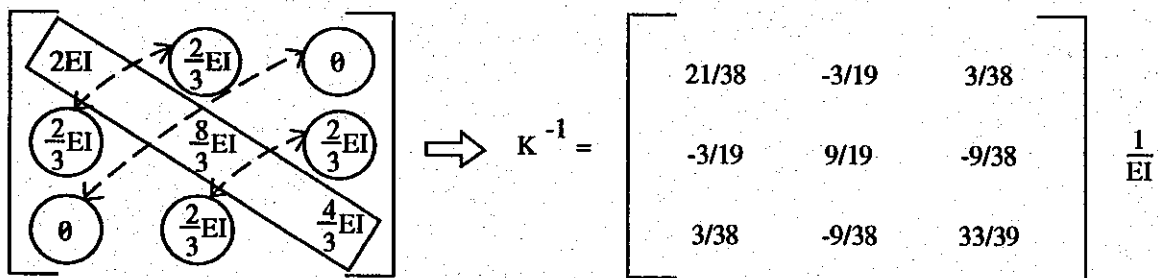
$$K_{22} = 0 + \frac{2EI}{3} = \frac{2}{3}EI$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{3} + \frac{4EI}{3} = \frac{8}{3}EI$$

$$K_{23} = \frac{2}{3}EI$$



Se ordenan todos los términos hallados, para el cálculo de la matriz de rigidez debido a las deformaciones unitarias correspondientes a los efectos de las tres deformaciones dadas en los apoyos B, C, y D correspondientes.



Una de las características que presenta la matriz de rigidez, es su simetría, compruébelo ud. mismo, podrá ser una de las formas para comprobar que su matriz está correcta.

Ahora al agrupar los datos arrojados por la estructura fija, se tendrá la matriz A_{DL} :

$$A_{DL} = - \begin{bmatrix} -3/4 \\ 39/8 \\ 27/8 \end{bmatrix}$$

La matriz AD, se puede armar solamente observando la viga original y ver qué momentos están aplicados en los nudos correspondientes a los apoyos B, C y D de ahí que:

$$AD = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Corresponde al nudo B} \\ \text{Corresponde al nudo C (sigue la convención de signos establecidos)} \\ \text{Corresponde al nudo D} \end{array}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación matricial: $A_D = A_{DL} + K D$ y despejando las deformaciones se tiene que:

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DL})$$

De donde:

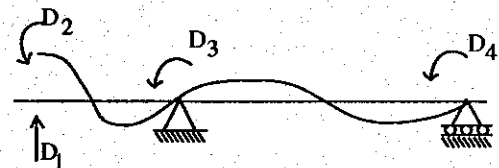
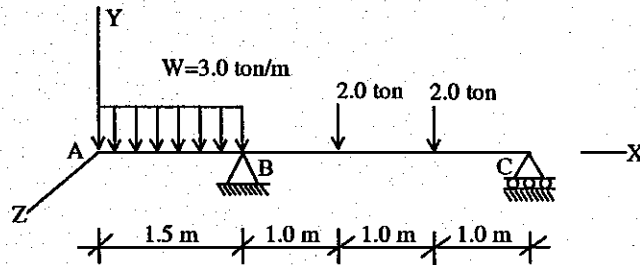
$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/38 & -3/19 & 3/38 \\ -3/19 & 9/19 & -9/38 \\ 3/38 & -9/38 & 33/38 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/4 \\ -39/8 \\ 27/8 \end{bmatrix} \right)$$

$$D_1 = \frac{51}{304 EI} \quad D_2 = - \frac{189}{304 EI} \quad D_3 = - \frac{54}{19 EI}$$

Problema No. 4

Determinar los desplazamientos para una viga con voladizo (véase la figura); los desplazamientos se deben tomar en el siguiente orden: traslación en la dirección Y y giros en el sentido Z.

Suponer que hay dos sistemas de carga (únicamente la carga uniforme W, y sólo las fuerzas concentradas P) y que EI es constante en la viga. Las deformaciones axiales se desprecian.



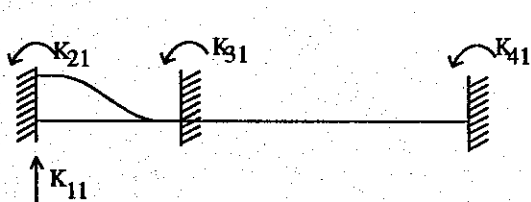
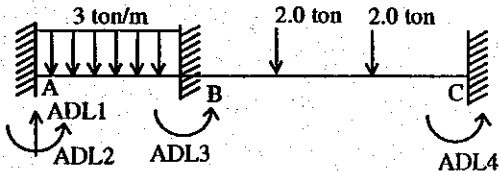
$$n_K = 4$$

$$A_{DL1} = 3(1.5)/2 = 9/4$$

$$A_{DL2} = 3(1.5)^2/12 = 9/16$$

$$A_{DL3} = -3(1.5)^2/12 + 2(1.0)(2)/3 = 37/48$$

$$A_{DL4} = -2(1.0)(2)/3 = 4/3$$

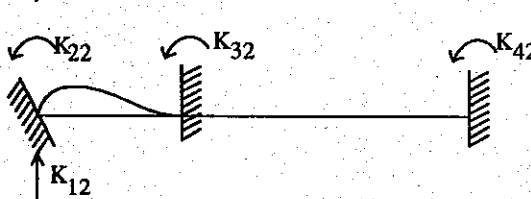


$$K_{11} = \frac{12EI}{(3/2)^3} = \frac{32}{4} EI$$

$$K_{21} = \frac{6EI}{(3/2)^2} = \frac{8}{3} EI$$

$$K_{31} = \frac{6EI}{(3/2)^2} = \frac{8}{3} EI$$

$$K_{41} = 0$$

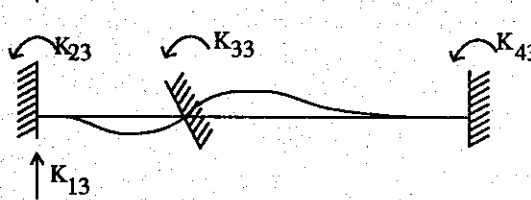


$$K_{12} = \frac{6EI}{(3/2)^2} = \frac{8}{3} EI$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{3/2} = \frac{8}{3} EI$$

$$K_{32} = \frac{2EI}{3/2^2} = \frac{4}{3} EI$$

$$K_{42} = 0$$

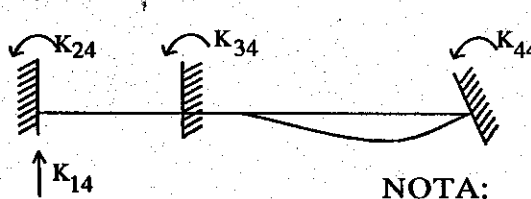


$$K_{13} = \frac{6EI}{(3/2)^2} = \frac{8}{3} EI$$

$$K_{23} = \frac{2EI}{(3/2)} = \frac{4}{3} EI$$

$$K_{33} = \frac{4EI}{3/2} + \frac{4EI}{3} = 4EI$$

$$K_{43} = \frac{2EI}{3}$$



$$K_{14} = 0 \quad K_{24} = 0$$

$$K_{34} = \frac{2EI}{3}$$

$$K_{43} = \frac{4EI}{3}$$

NOTA:

En el punto A de la viga de este problema, se pudo haber puesto un apoyo similar al apoyo B, por lo que se hubiera eliminado un

desplazamiento en ese punto y por consiguiente el problema disminuye en un grado de libertad, disminuyendo la matriz de rigidez en sus componentes. El lector debe determinar en qué momento los esfuerzos son principales y así ahorrarse tiempo en su resolución.

La matriz A_{DL} es:

$$A_{DL} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ 9/16 \\ 37/48 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{32}{9} EI & \frac{8}{3} EI & \frac{8}{3} EI & 0 \\ \frac{8}{3} EI & \frac{8}{3} EI & \frac{4}{3} EI & 0 \\ \frac{8}{3} EI & \frac{4}{3} EI & 4EI & \frac{2}{3} EI \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} EI & \frac{4}{3} EI \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz A_D , sólo se observa, si existen acciones aplicadas en los nudos, en dirección de los desplazamientos desconocidos, entonces en este caso se tiene que en el nudo A, no existe ninguna acción, de la misma forma se encuentra observando para los nudos B y C. Por lo tanto se tiene que:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo todos los valores hallados de las matrices corresponde hallar los desplazamientos, entonces se tiene que:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27/8 & -21/8 & -3/2 & 3/4 \\ -21/8 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ -3/2 & 1 & 1 & -1/2 \\ 3/4 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9/4 \\ 9/16 \\ 37/48 \\ -4/3 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$D_1 = -3 \frac{123}{128EI}$$

$$D_2 = 3 \frac{1}{16EI}$$

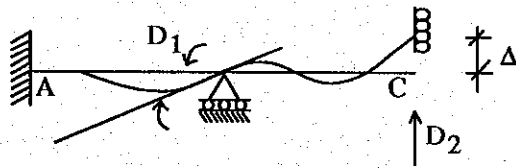
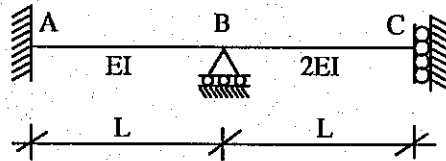
$$D_3 = 1 \frac{3}{8EI}$$

$$D_4 = \frac{5}{16EI}$$

Problema No. 5

Obtener la matriz de rigidez K para la viga mostrada en la figura, suponiendo que la rigidez a la flexión del claro de la derecha es el doble de la izquierda. Los desplazamientos deben numerarse de izquierda a derecha.

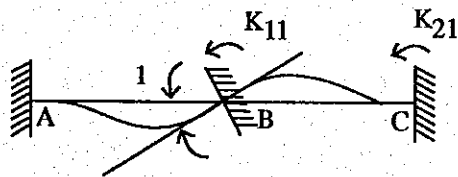
Ahora le corresponde a ud. calcular la matriz de rigidez, únicamente se le presentarán las deformaciones y la matriz para que ud. la pueda comprobar con su cálculo.



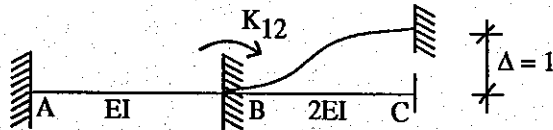
Estructura con las deformaciones



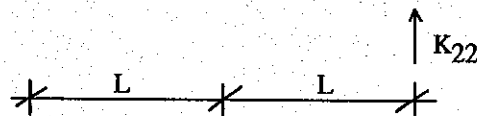
Estructura Fija



Estructura Fija con Desplazamiento unitario



Estructura Fija con Desplazamiento unitario

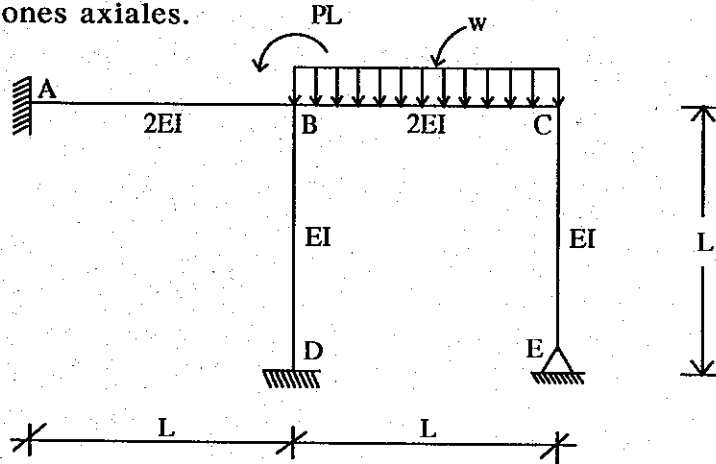


$$K = \begin{bmatrix} 12EI/L & 12EI/L^2 \\ 4EI/L & 12EI/L^3 \end{bmatrix}$$

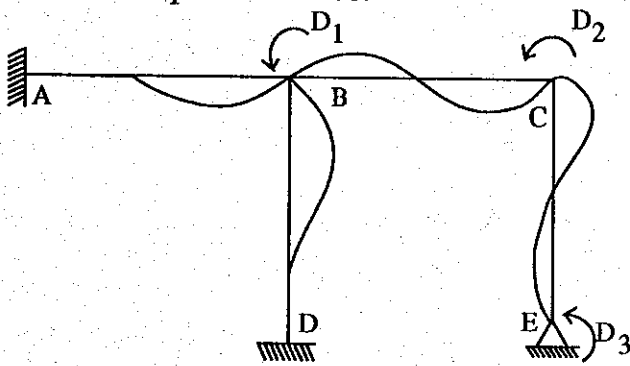
2.4.2 Marcos

Problema No. 1

Hallar los desplazamientos del marco mostrado a continuación, despreciando las deformaciones axiales.

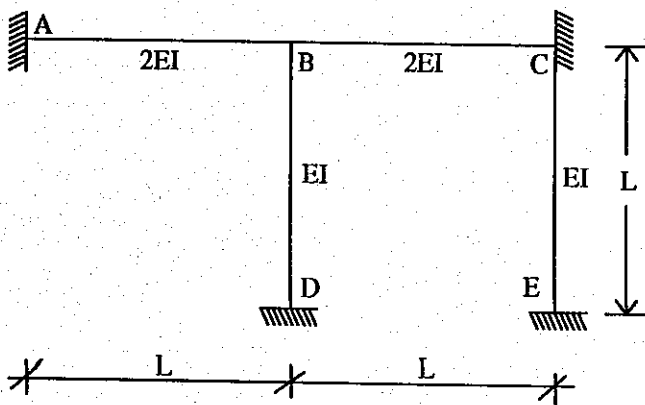


Al analizar que los nudos A y D están empotrados, los cuales restringen los desplazamientos, los nudos B y C tienen los tres desplazamientos; pero como se desprecian las deformaciones axiales, entonces sólo quedan únicamente las deformaciones angulares; ahora el nudo E que es un apoyo simple en donde existen restricciones vertical y horizontal; sólo existe desplazamiento angular, el cual se toma en el análisis. Se observa a continuación cómo se deforma el marco debido a los desplazamientos.

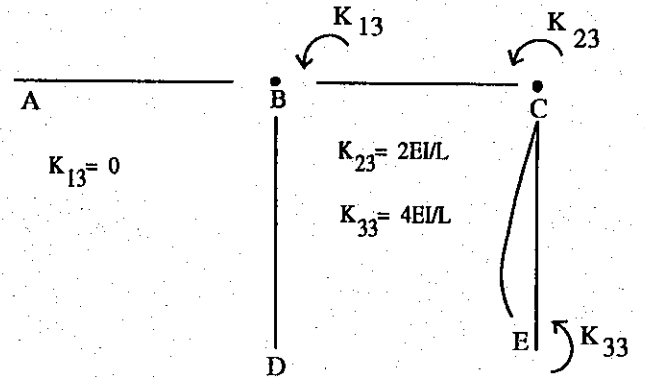
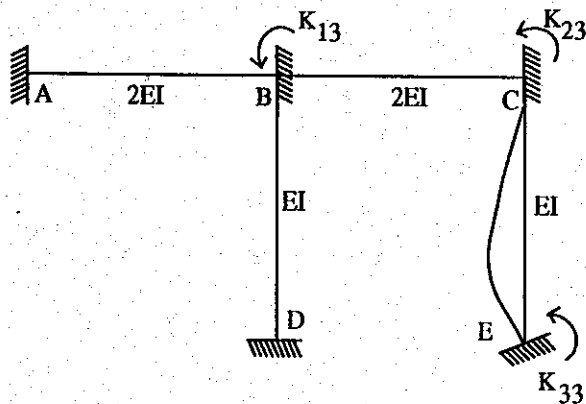
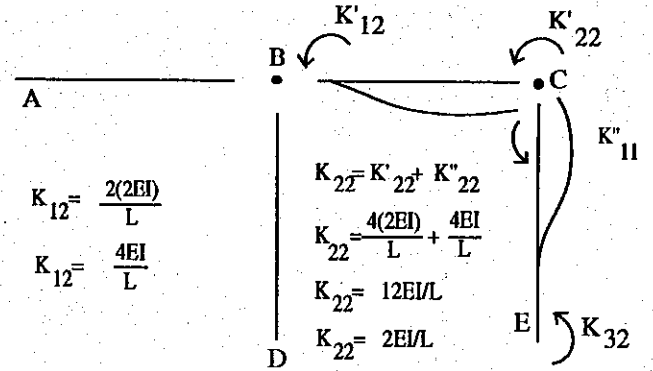
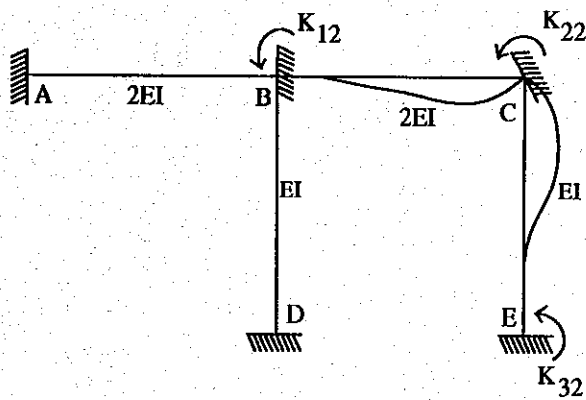
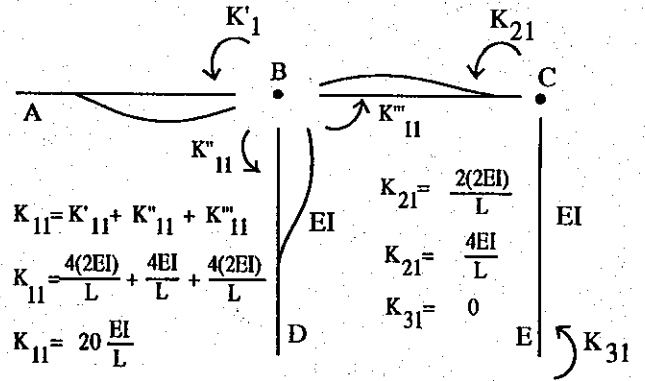
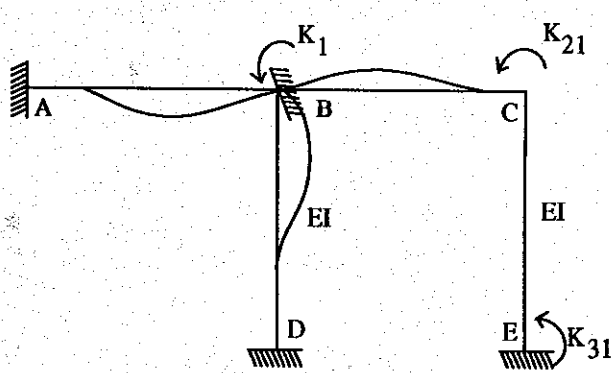


$$n_k = 3$$

Para impedir los desplazamientos que se presentan en el marco se recurre a la estructura fija, la que se presenta a continuación.



Se calcula ahora la matriz de rigidez, para esto se hace uso de la estructura fija imponiéndole los desplazamientos unitarios según el orden de los desplazamientos desconocidos, para hallar su contribución al giro.



La matriz de rigidez entonces queda de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} 20EI/L & 4EI/L & 0 \\ 4EI/L & 12EI/L & 2EI/L \\ 0 & 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix}$$

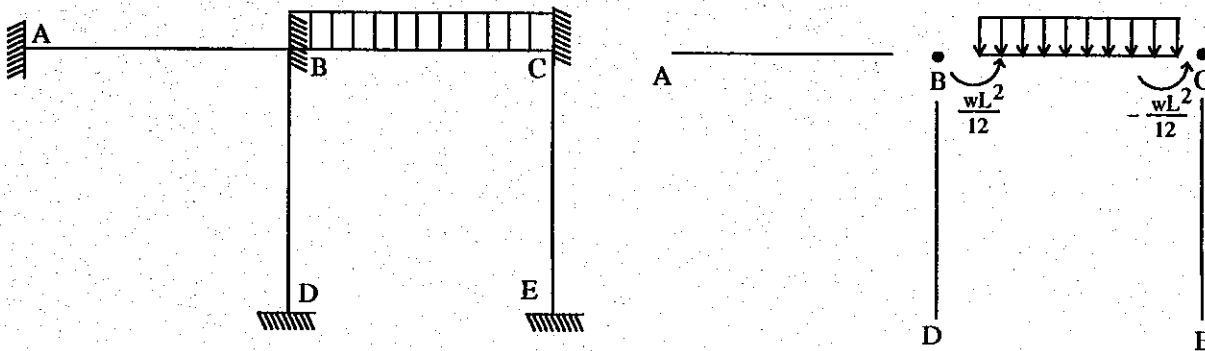
La matriz A_D corresponde a los momentos aplicados en los nudos de la estructura real.

En el nudo B existe un momento aplicado, por lo tanto el valor corresponde a un valor de cero, y en el nudo E tampoco existe momento por lo que también su valor será de cero, se observa como queda entonces:

$$A_D = \begin{bmatrix} PL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El orden debe tener la matriz A_D , tiene que coincidir con la numeración establecida de los desplazamientos desconocidos.

Para el cálculo de la matriz A_{DL} se tienen que averiguar las acciones que se dan en la estructura fija con las cargas aplicadas, y de ahí calcular los momentos que contribuirán a los desplazamientos desconocidos, ahora se preguntará porqué deben ser momentos, esto se debe a que los desplazamientos desconocidos son giros.



Entonces la matriz A_{DL} queda de la siguiente forma:

$$A_{DL} = \begin{bmatrix} wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Si } wL = P \Rightarrow A_{DL} = \begin{bmatrix} PL/12 \\ -PL/12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar los desplazamientos correspondientes al marco se sustituye en la ecuación;

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DL})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} 11/204 & -1/51 & 1/102 \\ -1/51 & 5/51 & -22/449 \\ 1/102 & -5/102 & 14/51 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} PL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} PL/12 \\ -PL/12 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

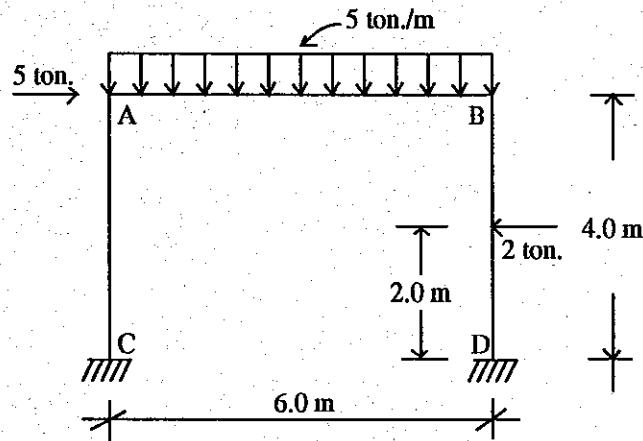
$$D_1 = \frac{13 PL^2}{272EI}$$

$$D_2 = \frac{PL^2}{102EI}$$

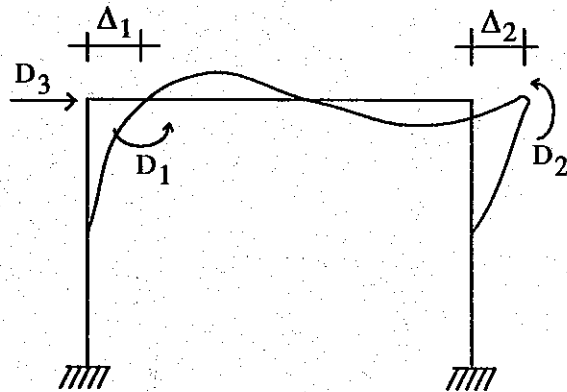
$$D_3 = \frac{PL^2}{204EI}$$

Problema No. 2

Determinar los desplazamientos del siguiente marco, considerando que los miembros tienen una rigidez a la flexión constante igual a EI .



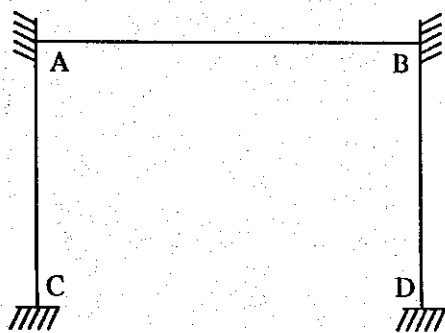
Al observar que en los nudos C y D, debido a sus apoyos, no existe desplazamiento alguno, entonces el número de incógnitas dependerán, si se considera en el análisis tanto las deformaciones por flexión, como las debidas a carga axial; los nudos A y B se pueden trasladar y girar, considerando que las traslaciones que se dan son iguales en magnitud y sentido, por lo tanto se dice que existen únicamente tres desplazamientos en el marco, se supone que las columnas no se encogen, por lo tanto no se considera el desplazamiento en dirección de éstas:



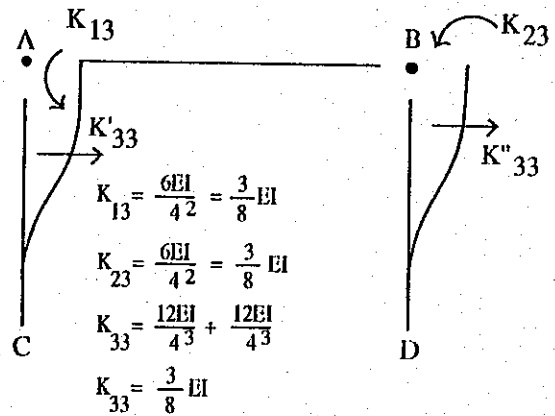
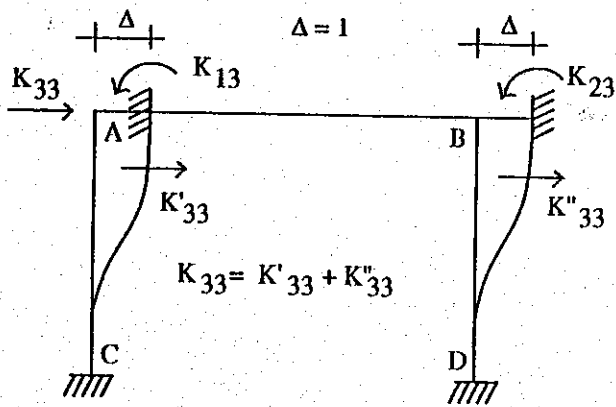
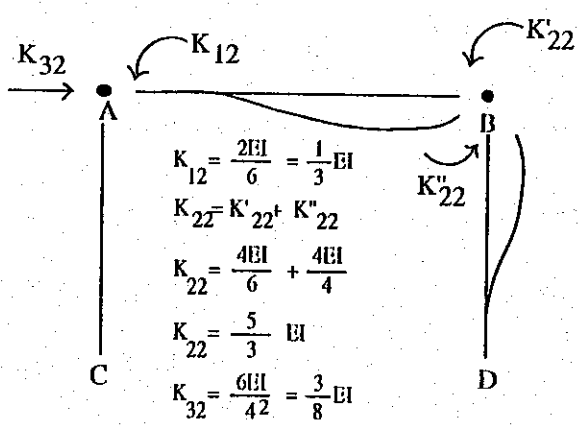
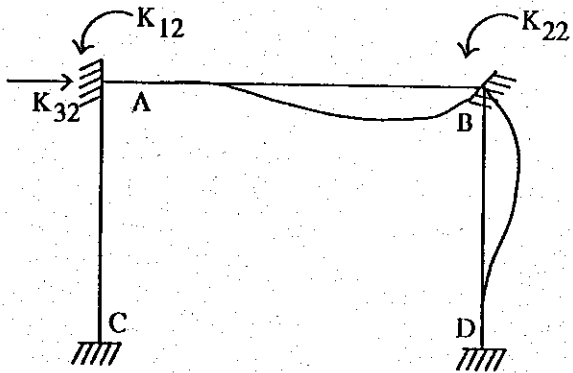
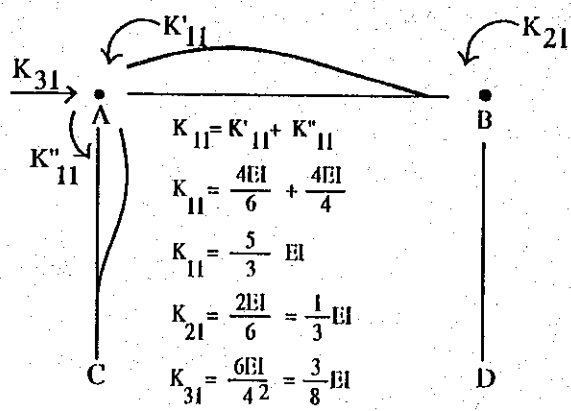
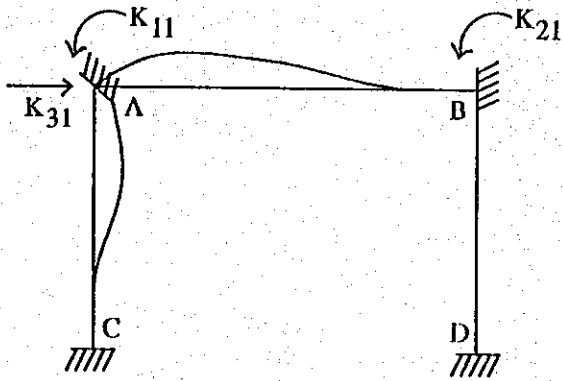
$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

$$n_k = 3$$

Para impedir los tres desplazamientos presentados en el marco, se restringen éstos, por medio de una estructura fija, lo cual se logra obtener colocando en los nudos A y B, un empotramiento.



Con esta estructura se podrá calcular la matriz de rigidez, aplicando uno por uno los desplazamientos unitarios, cuando se aplique un desplazamiento en cualquiera de los nudos, los demás miembros quedarán fijos.



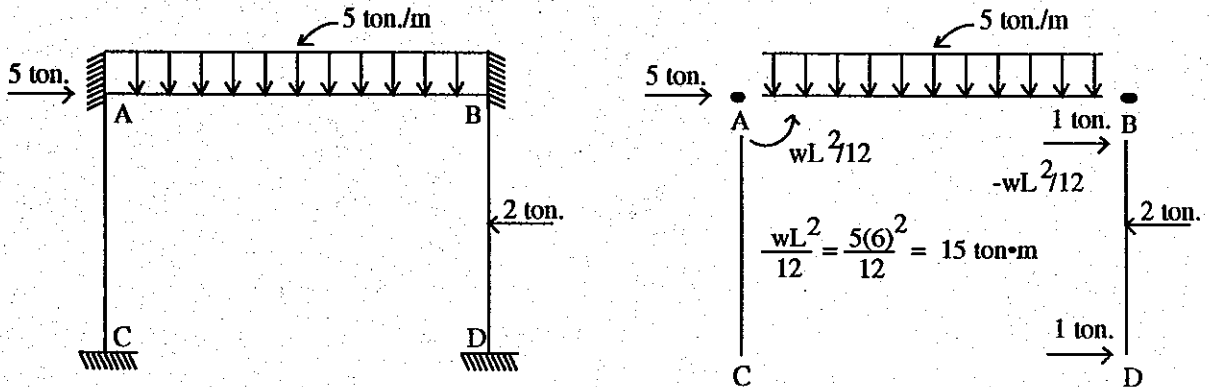
La matriz de rigidez queda entonces:

$$K = \begin{bmatrix} 5/3EI & 1/3 EI & 3/8EI \\ 1/3EI & 5/3EI & 3/8EI \\ 3/8EI & 3/8EI & 3/8EI \end{bmatrix}$$

En el nudo A y B, no existen momentos aplicados en la estructura real, esto hace que los dos primeros elementos de la matriz A_D sean cero, el tercer elemento como existe una fuerza horizontal concentrada en el nudo A implica, que este valor será igual a 5 y se observa como queda la matriz A_D .

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Al calcular la matriz A_{DL} , se hace uso de la estructura fija con las cargas aplicadas a la estructura real, para calcular giros y traslaciones que serán reacciones de las mismas.



$$A_{DL} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que el tercer elemento tiene un valor de uno, esto se debe a que en el análisis de la estructura fija, sujeta a las cargas, deben tomarse todas las cargas, excepto aquellas que corresponden a un desplazamiento de nudo desconocido, es por eso que solo se tomó la acción de una tonelada.

Seguidamente reuniendo todos los datos encontrados de las matrices A_D , A_{DL} , y K se encontrarán los desplazamientos, por lo tanto:

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DL})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 31/40 & 1/40 & -4/5 \\ 1/40 & 31/40 & -4/5 \\ -4/5 & -4/5 & 64/15 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

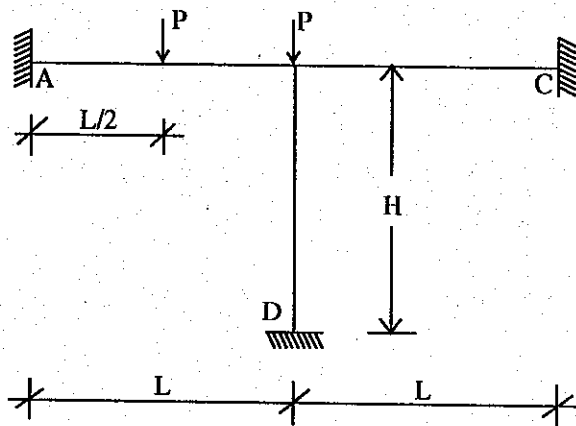
$$D_1 = \frac{289}{20EI}$$

$$D_2 = \frac{161}{20EI}$$

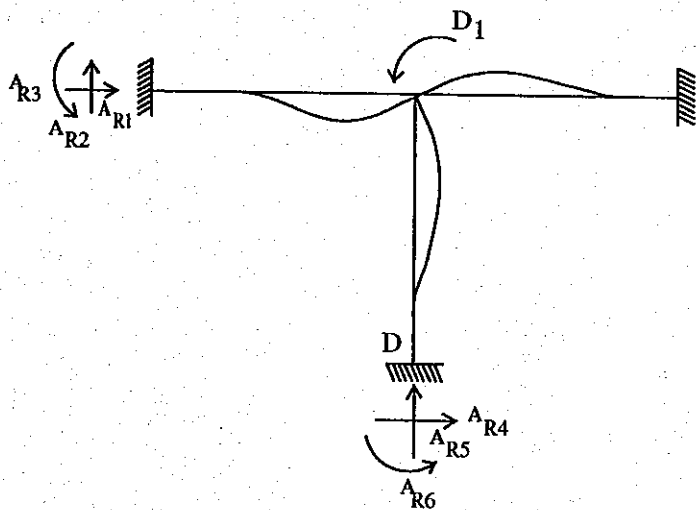
$$D_3 = \frac{256}{15EI}$$

Problema No. 3

Encontrar las reacciones en los nudos A y D, para el marco mostrado en la figura, considerando sólo deformaciones por flexión. Suponga que todos los miembros tienen rigidez a la flexión EI y que $L = 1.5 H$. Numere las reacciones en el orden siguiente: Primero para el nudo A y después para el nudo D: fuerza horizontal, fuerza vertical y par.



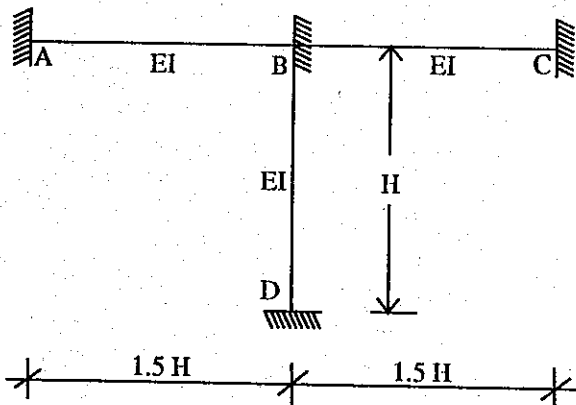
El único desplazamiento que tiene este marco, se da en el nudo B y corresponde a un giro angular, ya que las otras deformaciones se despreciaron.



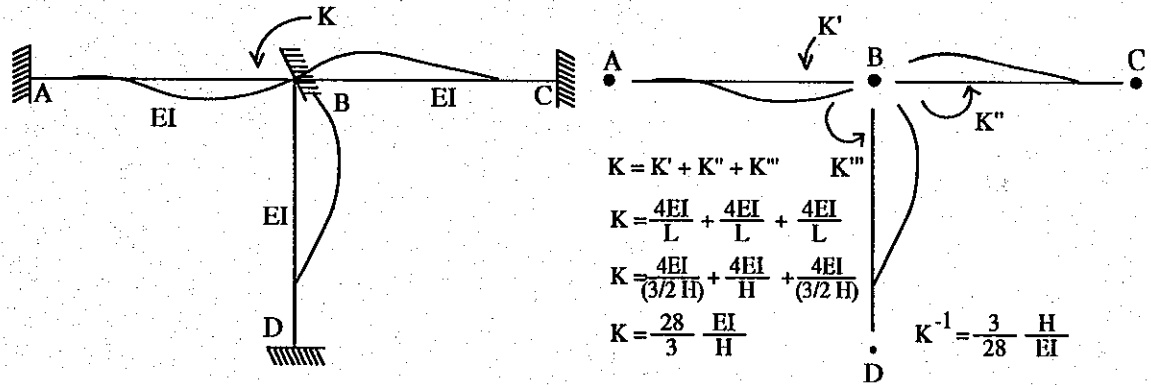
Ahora para impedir el desplazamiento se necesita de la estructura fija, se observa en la siguiente figura como queda el marco.

Nota:

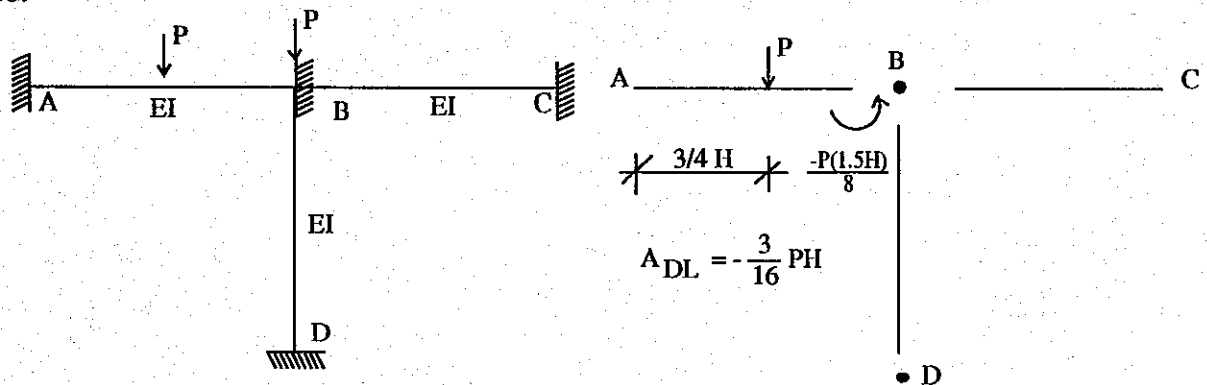
El empotramiento en el nudo B sólo restringe la rotación, no así las traslaciones horizontales y verticales, por lo que los efectos en dichos sentidos se transmiten de un elemento a otro.



Con la estructura fija se calcula la rigidez que tendrá el marco debido a las rotaciones unitarias que se le imponen a la estructura. Y estas se hallarán de la contribución de rigideces de los elementos que llegan al nudo B.



En el nudo B no existe ningún momento aplicado en la estructura real, por lo tanto $A_D = 0$, entonces el valor que tiene A_{DL} en la estructura fija con las cargas aplicadas al marco es:



Sustituyendo los valores encontrados A_D , A_{DL} y K^{-1} se encuentra la deformación que se da en el marco:

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DL})$$

$$D = \frac{3}{28} \frac{H}{EI} \left(0 - \frac{3}{16} PH \right)$$

$$D = \frac{3}{28} \frac{H}{EI} \left(-\frac{3}{16} PH \right)$$

$$D = \frac{9}{448} \frac{PH^2}{EI}$$

Si $H = 12$ Pies

$P = 10$ K

$E = 30,000$ Ksi

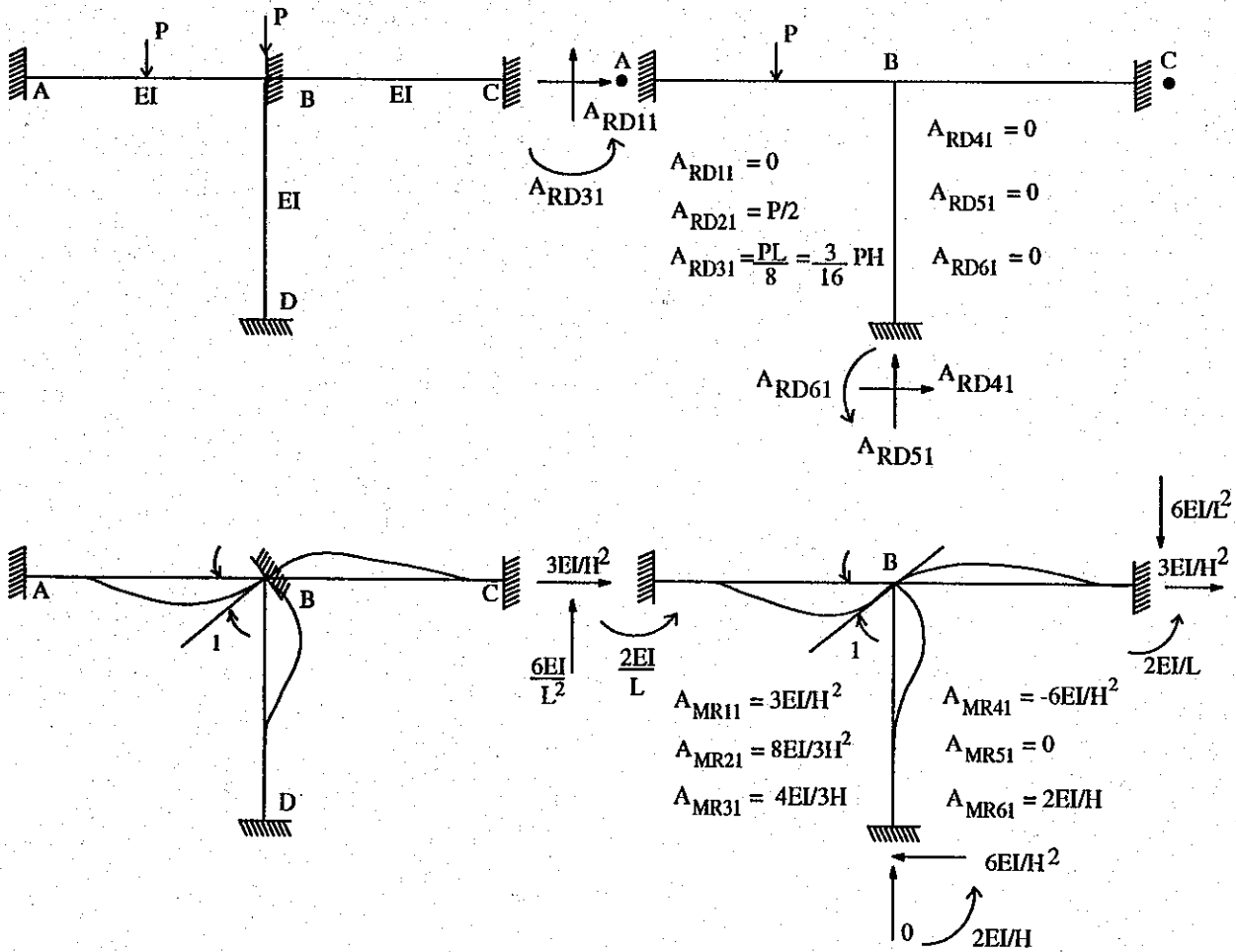
$I = 200$ plg⁴.

$A = 10$ plg².



$$D = 0.000004821 \text{ rad.}$$

Para calcular las reacciones del marco en los nudos A y D respectivamente, se usa la estructura fija, tanto para el cálculo de A_{RD} y A_{MR} , la matriz A_{RD} corresponde a la contribución de las cargas en dirección de las reacciones a encontrar, ahora A_{MR} corresponde a la contribución de las acciones que tendrá la estructura fija debido al desplazamiento unitario que se le impone a la estructura.



$$\begin{bmatrix} A_{R1} \\ A_{R2} \\ A_{R3} \\ A_{R4} \\ A_{R5} \\ A_{R6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P/2 \\ \frac{3}{16} PH \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3EI/H^2 \\ \frac{8}{3} EI/H^2 \\ \frac{4}{3} EI/H \\ -6EI/H^2 \\ 0 \\ 2EI/H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & PH^2 \\ 448 & EI \end{bmatrix}$$

$$A_{R1} = \frac{27P}{448}$$

$$A_{R2} = \frac{31}{56} P$$

$$A_{R3} = \frac{PL}{7} = \frac{3}{14} PH$$

$$A_{R4} = \frac{-27}{224}$$

$$A_{R5} = \frac{3}{2} P$$

$$A_{R6} = \frac{3}{112} PL$$

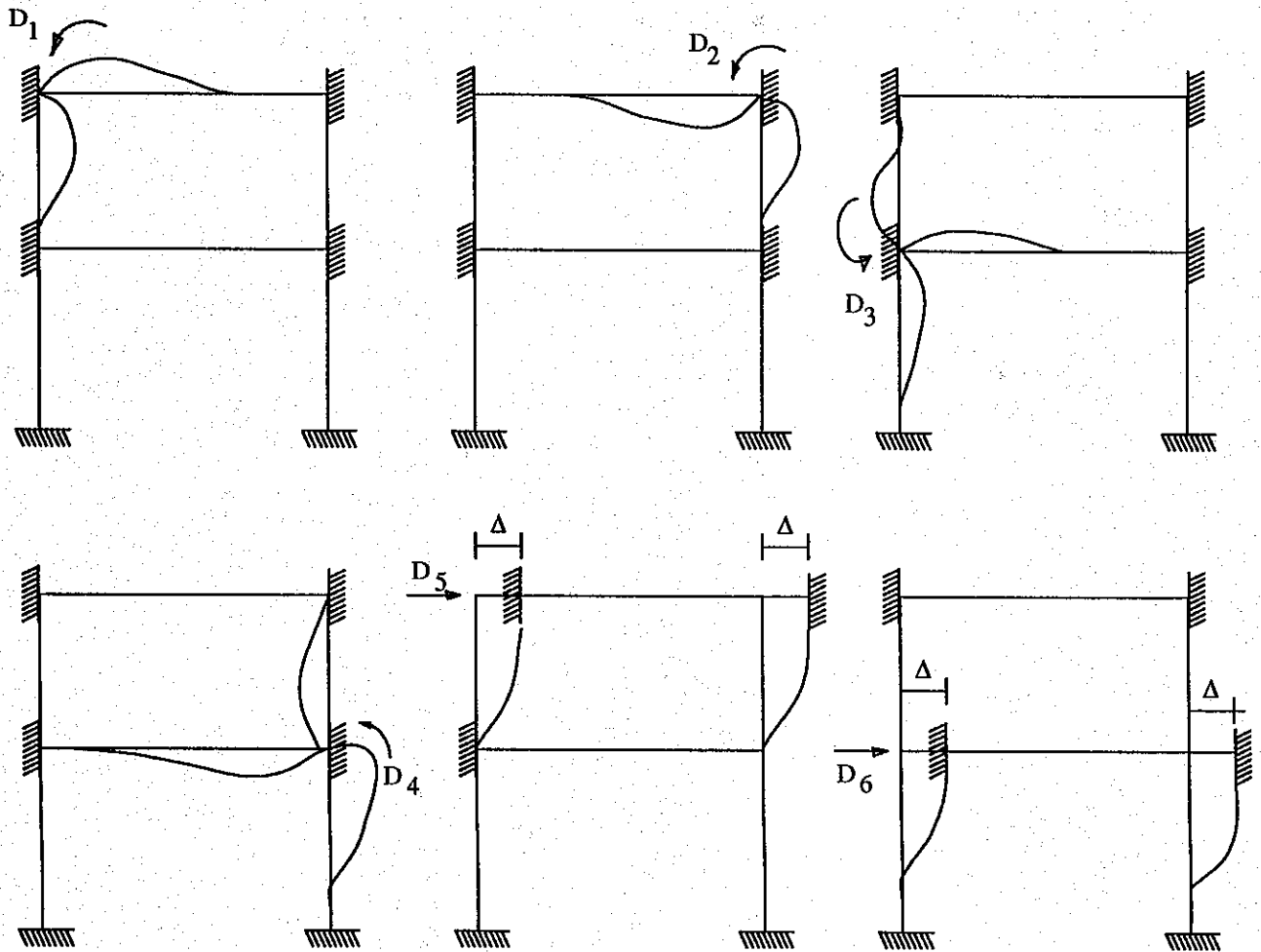
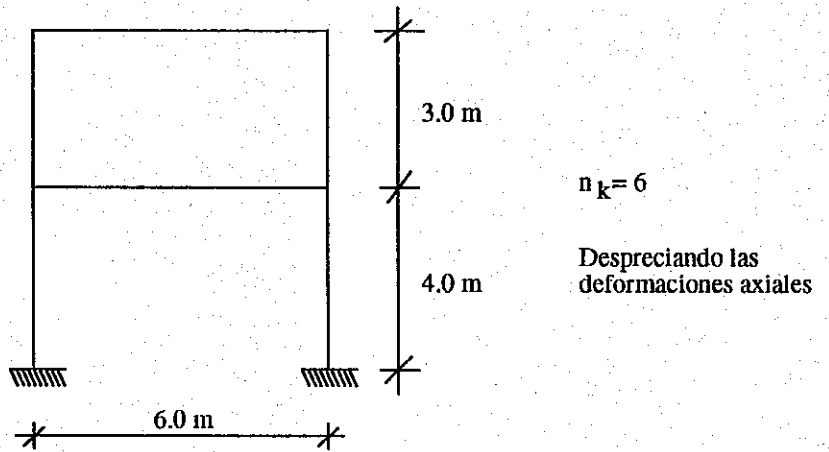
Problema No. 4

Obtener la matriz de rigidez K del marco mostrado en la figura, suponiendo que la rigidez a la flexión de todos los miembros estructurales es EI . Ahora le corresponderá a ud. calcular la matriz de rigidez, en la parte de abajo se le presentará cada una de las deformaciones unitarias que tendrán lugar en la estructura, luego se le presenta la matriz de rigidez para que ud. pueda comprobar después de haber hecho sus propios cálculos.

$E = 21092087 \text{ ton/m}^2$

$b \times h = 0.30 \times 0.30 \Rightarrow$

$I = 0.000675 \text{ m}^4$



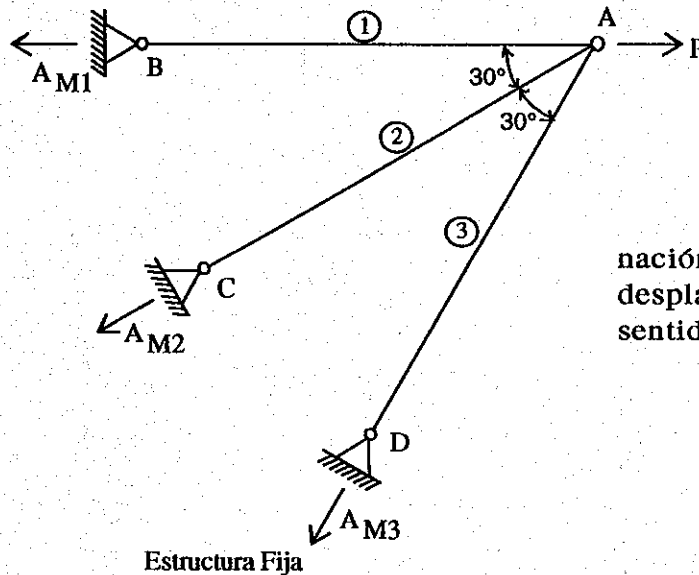
$K = EI$

28474.3174	4745.7196	9491.4391	0.0	9491.4391	-9491.4391
4745.7196	28474.3174	0.0	9491.4391	9491.4391	-9491.4391
9491.4391	0.0	42711.4762	4745.7196	9491.4391	-4152.5046
0.0	9491.4391	4745.7196	42711.4762	9491.4391	-4152.5046
9491.4391	9491.4391	9491.4391	9491.4391	12655.2522	-12655.2522
-9491.4391	-9491.4391	-4152.5046	-4152.5046	-12655.2522	17994.1867

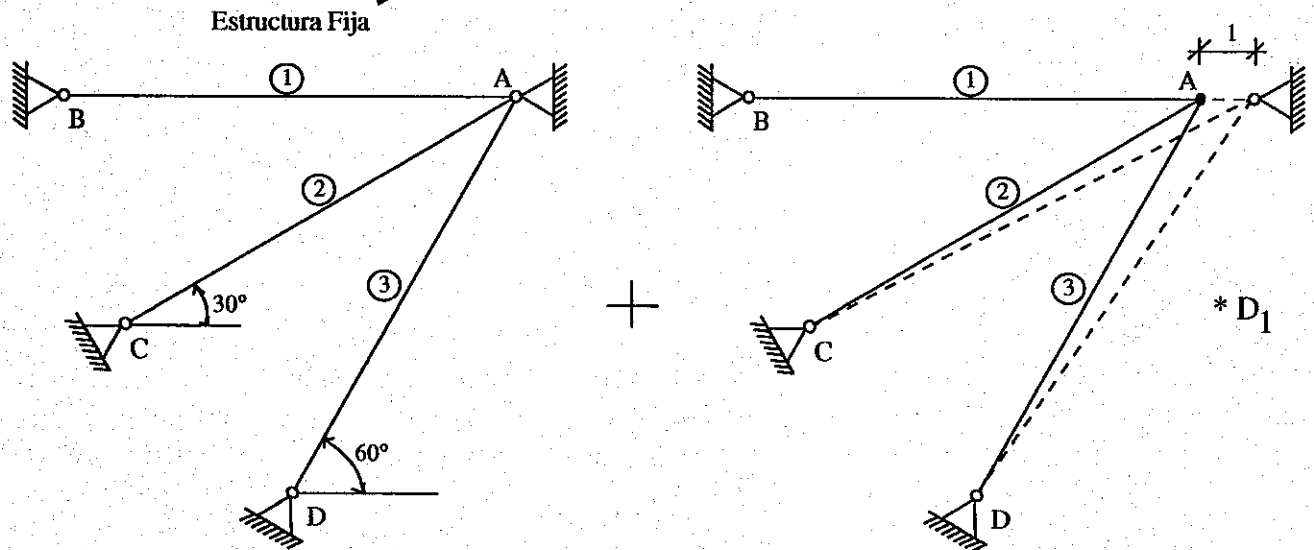
2.4.3 Armaduras

Problema No. 1

Encontrar las fuerzas axiales, en todas las barras de la armadura mostrada en la figura. La armadura está sujeta a una fuerza horizontal P , en el nudo A , omita los pesos de las barras en el análisis. Cada barra tiene una longitud L y una rigidez axial EA . Suponga que la fuerza de tensión en un miembro es positiva, y utilice el sistema de numeración mostrado en la figura.



Para este caso la indeterminación cinemática es: $n_k = 1$, el desplazamiento horizontal en el sentido de la carga en el nudo A .



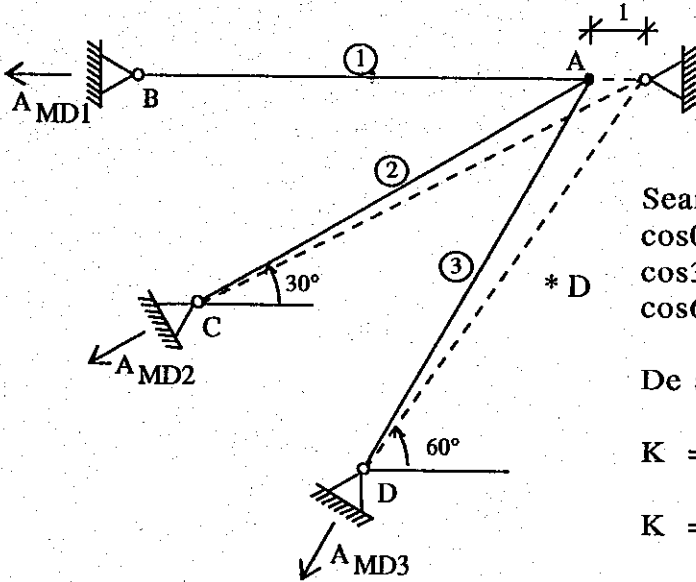
De acuerdo a lo anterior, el vector de cargas en la estructura real A_D , será;

$$A_D = \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$$

El vector de cargas en la estructura fija, A_{DL} viene dado únicamente por las componentes de los pesos de cada barra en el nudo A , en el sentido del desplazamiento desconocido, para este caso el vector A_{DL} será:

$$A_{DL} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez, se construye con la contribución de cada elemento que llega al nudo A en dirección al desplazamiento desconocido, se debe consultar las tablas del capítulo 4, correspondiente a las acciones de extremo de miembro.



Sean:

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= 1 & \sin 0^\circ &= 0 \\ \cos 30^\circ &= \sqrt{3}/2 & \sin 30^\circ &= 1/2 \\ \cos 60^\circ &= 1/2 & \sin 60^\circ &= \sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

De acuerdo a la gráfica se tiene que

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + K_3 \\ K &= \frac{EA}{L_1} + \frac{EA}{L_1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{EA}{L_1} \left(\frac{EA}{L_1}\right)^2 \\ K &= 2\frac{EA}{L} \Rightarrow K^{-1} = \frac{L}{2EA} \end{aligned}$$

Calculando la deformación se tiene que:

$$A_D = A_{DL} + K D \quad D = K^{-1}(A_D - A_{DL})$$

$$D = \frac{L}{2EA} (P - 0)$$

$$D = \frac{PL}{2EA}$$

Para el cálculo de la matriz A_{MD} , en la figura anterior se le impone un desplazamiento unitario, cada uno de los componentes de esta matriz está señalado en esa figura, para hallar los valores observar cuáles son las acciones de extremo cuando se aplica un desplazamiento unitario horizontal, de donde entonces:

$$A_{MD1} = \frac{EA}{L} \cos 0^\circ \quad A_{MD2} = \frac{EA}{L} \cos 30^\circ \quad A_{MD3} = \frac{EA}{L} \cos 60^\circ$$

$$A_{MD1} = \frac{EA}{L} \quad A_{MD2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{EA}{L} \quad A_{MD3} = \frac{EA}{2L}$$

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} EA/L \\ \frac{\sqrt{3}}{2} EA/L \\ EA/2L \end{bmatrix}$$

La matriz A_{ML} son las acciones de extremo de miembro en la estructura fija debida a las cargas reales, como no existe ninguna carga aplicada a los miembros de la armadura y además el peso de las mismas se desprecia, se dice que el valor de esta matriz es igual a cero, de ahí que se pueden calcular las acciones de extremo de miembro que para tal caso son iguales a las reacciones de esta armadura; por lo tanto se tiene que:

$$A_M = A_{ML} + A_{MD} D$$

$$\begin{bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} EA/L \\ \frac{\sqrt{3}}{2} EA/L \\ EA/2L \end{bmatrix} \frac{PL}{2EA}$$

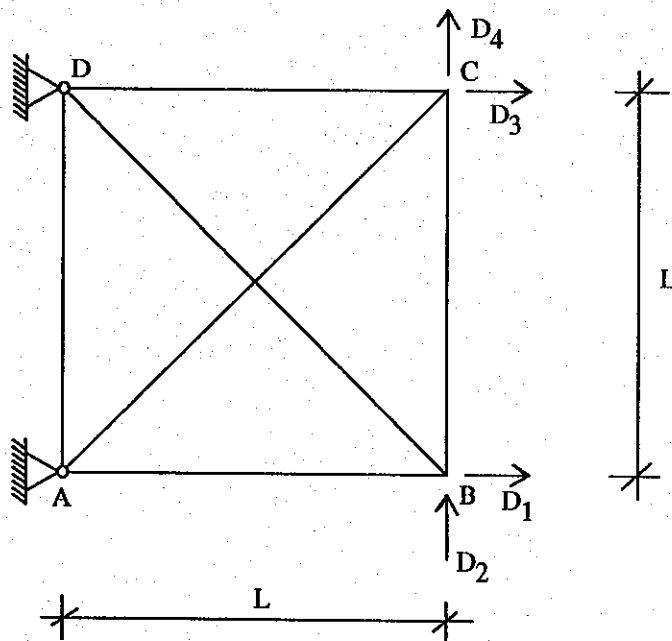
$$A_{M1} = P/2$$

$$A_{M2} = \frac{\sqrt{3}}{4} P$$

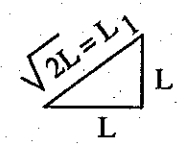
$$A_{M3} = P/4$$

Problema No. 2

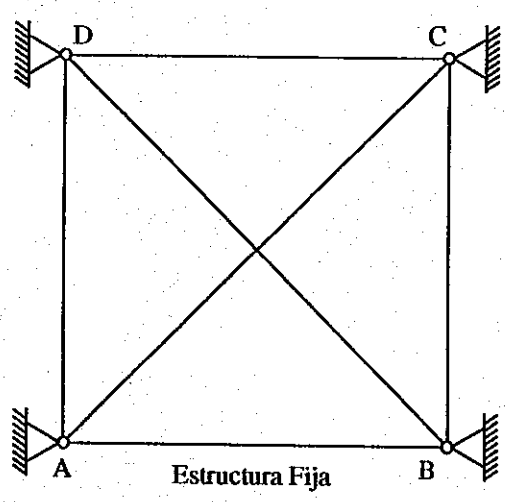
Determinar la matriz de rigidez K para la armadura mostrada en la figura. Todas las barras tienen la misma rigidez axial EA . Numere los desplazamientos de nudo desconocidos en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, comenzando en el nudo B, y tome el desplazamiento horizontal antes del desplazamiento vertical cuando existan los dos en el mismo nudo.



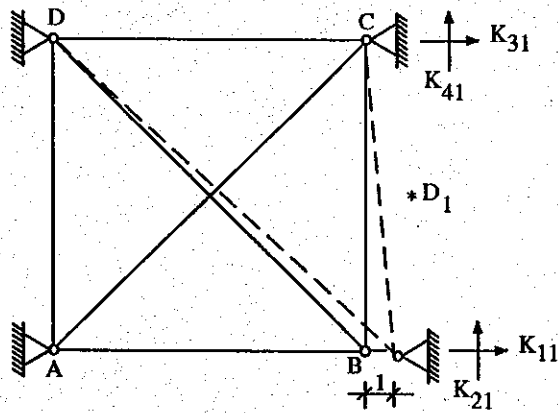
$n_k = 4$



Para impedir los cuatro desplazamientos necesitamos de la estructura fija con la cual sujetamos la estructura.



Para el cálculo de la matriz de rigidez, se coloca uno por uno los desplazamientos unitarios en dirección de los desplazamientos que tiene la estructura, cuando se le imponga un desplazamiento los otros nudos permanecerán fijos y se hace uso de las acciones de extremo de miembro.



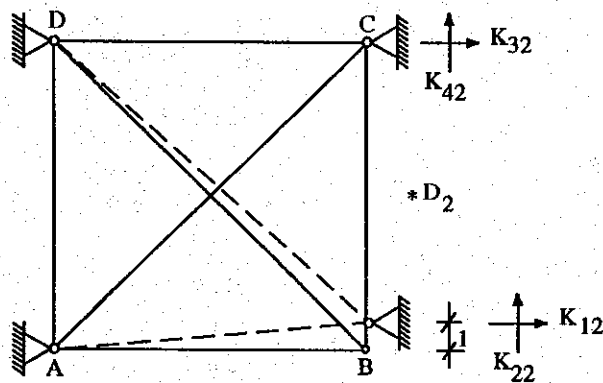
$$L_1 = \sqrt{2} L$$

$$K_{11} = \frac{EA}{L} + \frac{EA}{\sqrt{2} L} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{EA}{L} \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$K_{21} = -\frac{EA}{\sqrt{2} L} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} EA/L$$

$$K_{31} = 0$$

$$K_{41} = 0$$

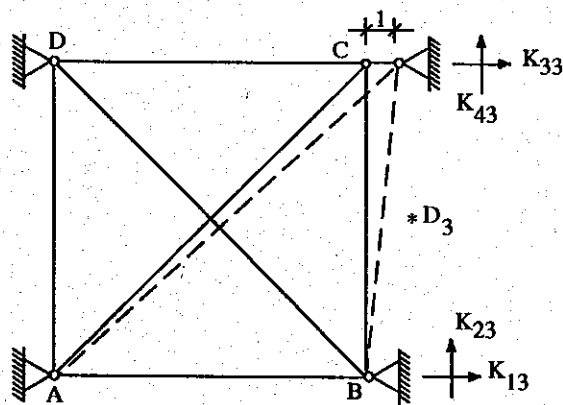


$$K_{12} = -\frac{EA}{L_1} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{L}$$

$$K_{22} = \frac{EA}{L_1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{EA}{L} = \frac{EA}{L} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 1\right)$$

$$K_{32} = 0$$

$$K_{42} = -\frac{EA}{L}$$

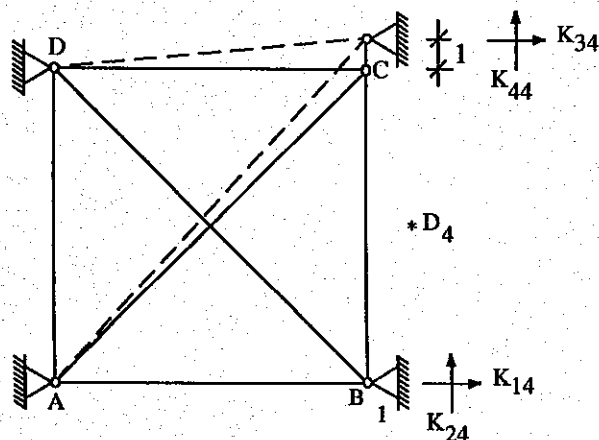


$$K_{13} = 0$$

$$K_{23} = 0$$

$$K_{33} = \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L_1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{4}\right) \frac{EA}{L}$$

$$K_{43} = \frac{EA}{L_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{L}$$



$$K_{14} = 0$$

$$K_{24} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{34} = \frac{EA}{L_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{L}$$

$$K_{44} = \frac{EA}{L_1} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{EA}{L} = \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{4}\right) \frac{EA}{L}$$

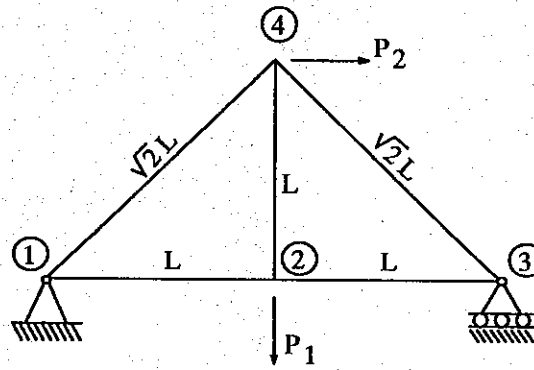
$$K = \frac{EA}{L}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4 + \sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{4}\right) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{4}\right) \end{bmatrix}$$

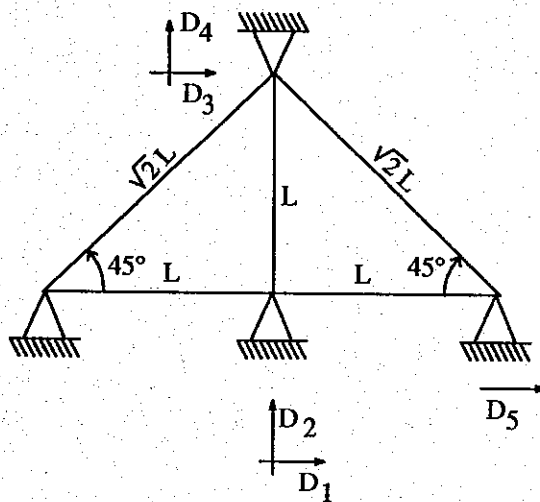
Problema No. 3

Hallar los desplazamientos de la armadura que se presenta a continuación, con los datos siguientes:

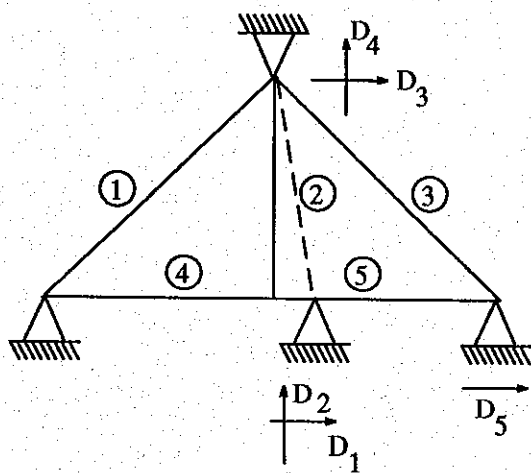
$P_1 = 10 \text{ K}$ $P_2 = 20 \text{ K}$ $L = 10 \text{ Pies}$ $E = 29,000 \text{ Ksi}$ $A = 1. \text{ In}^2$



$n_k = 5$



Estructura fija
y
← las representaciones
de las deformaciones
de la armadura



$$K_{11} = K_{11}^2 + K_{11}^4 + K_{11}^5$$

$$K_{11} = 0 + EA/L + EA/L$$

$$K_{11} = 2EA/L$$

$$K_{21} = K_{21}^2 + K_{21}^4 + K_{21}^5$$

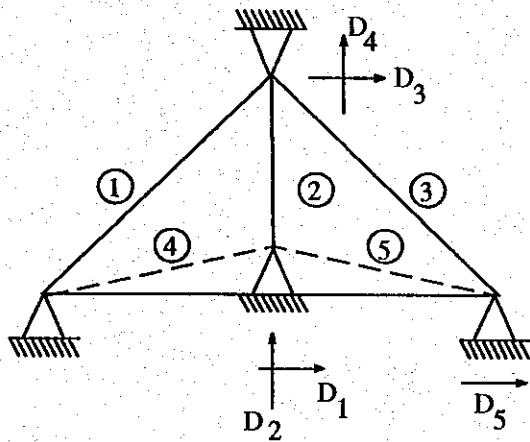
$$K_{21} = 0 + 0 + 0$$

$$K_{21} = 0$$

$$K_{31} = K_{31}^2 = 0$$

$$K_{41} = K_{41}^2 = 0$$

$$K_{51} = K_{51}^5 = -EA/L$$



$$K_{12} = K_{12}^4 + K_{12}^2 + K_{12}^5$$

$$K_{12} = 0$$

$$K_{22} = K_{22}^4 + K_{22}^2 + K_{22}^5$$

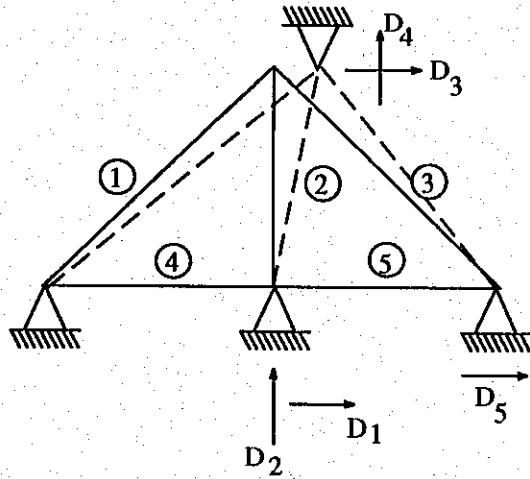
$$K_{22} = 0 + EA/L + 0$$

$$K_{22} = EA/L$$

$$K_{32} = K_{32}^2 = 0$$

$$K_{42} = K_{42}^2 = -EA/L$$

$$K_{52} = K_{52}^5 = 0$$



$$K_{13} = K_{13}^2 = 0$$

$$K_{23} = K_{23}^2 = 0$$

$$K_{33} = K_{33}^1 + K_{33}^2 + K_{33}^3$$

$$K_{33} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

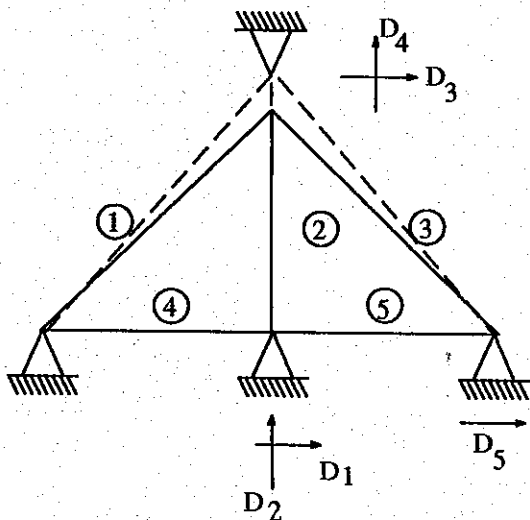
$$K_{33} = \frac{\sqrt{2}}{2} EA$$

$$K_{43} = K_{43}^1 + K_{43}^2 + K_{43}^3$$

$$K_{43} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{EA}{\sqrt{2}L} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K_{43} = \frac{\sqrt{2}}{2} EA$$

$$K_{42} = K_{53}^3 = -0.35355 EA$$



$$K_{14} = K_{14}^2 = 0$$

$$K_{24} = K_{24}^2 = -EA/L$$

$$K_{34} = K_{34}^1 + K_{34}^2 + K_{34}^3$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0$$

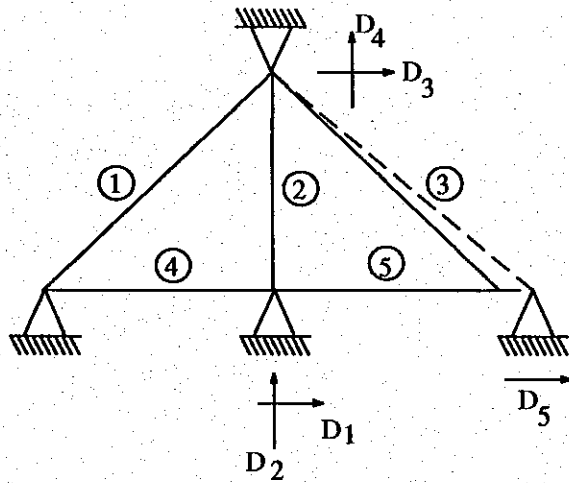
$$K_{34} = 0$$

$$K_{44} = K_{44}^1 + K_{44}^2 + K_{44}^3$$

$$K_{44} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{EA}{L} + \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$K_{44} = 1.70710 EA$$

$$K_{54} = K_{54}^3 = -0.35355 EA$$



$$K_{15} = K_{15}^5 = -EA/L$$

$$K_{25} = K_{25}^5 + 0$$

$$K_{35} = K_{35}^3 = -0.35355 EA$$

$$K_{45} = K_{45}^3 = 0.35355 EA$$

$$K_{55} = K_{55}^5 + K_{55}^3$$

$$K_{55} = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + EA/L$$

$$K_{55} = 1.35355 EA$$

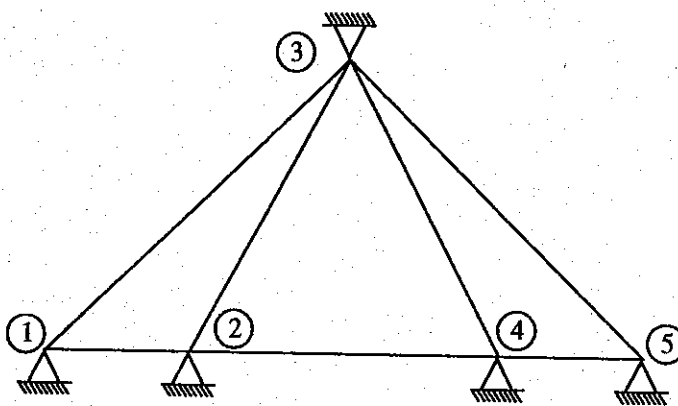
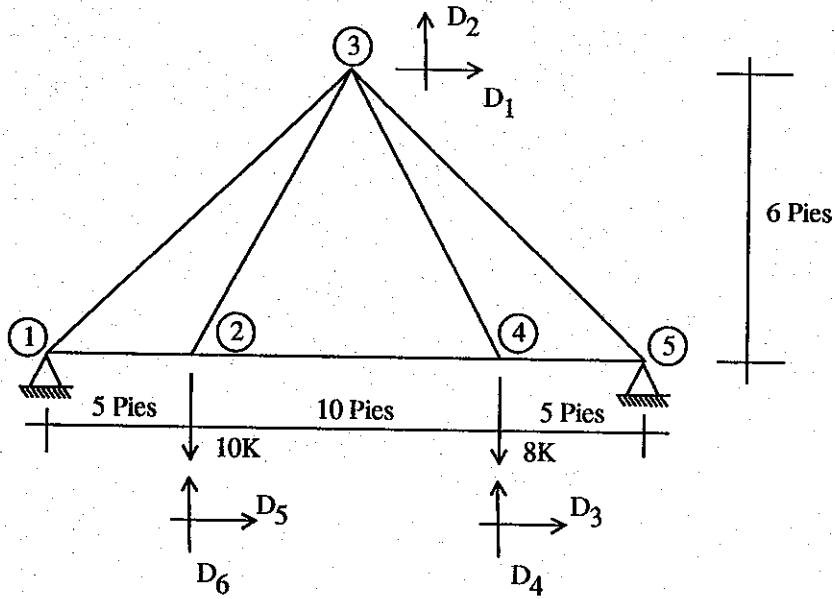
$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & -0.35355 \\ 0 & -1 & 0 & 1.70710 & 0.35355 \\ -1 & 0 & -0.35355 & 0.35355 & 1.35355 \end{bmatrix} EA/L$$

$$A_{DL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} D_1 &= 0.0621 \text{ in.} \\ D_2 &= -0.1621 \text{ in.} \\ D_3 &= 0.1791 \text{ in.} \\ D_4 &= -0.1206 \text{ in.} \\ D_5 &= 0.1241 \text{ in.} \end{aligned}$$

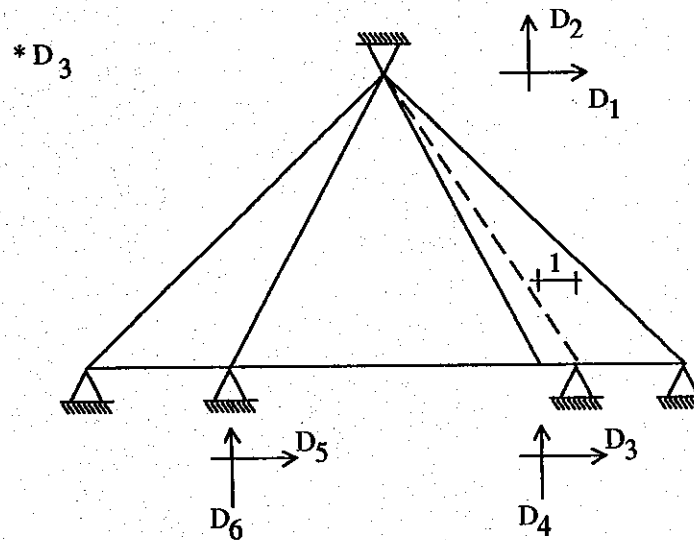
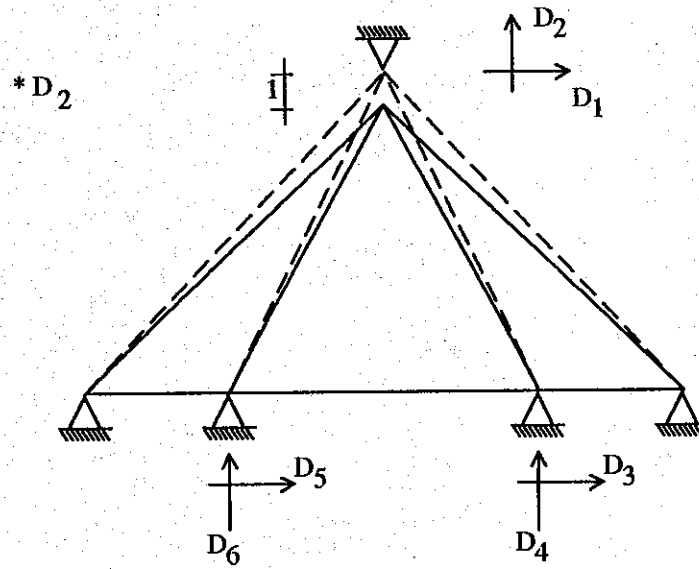
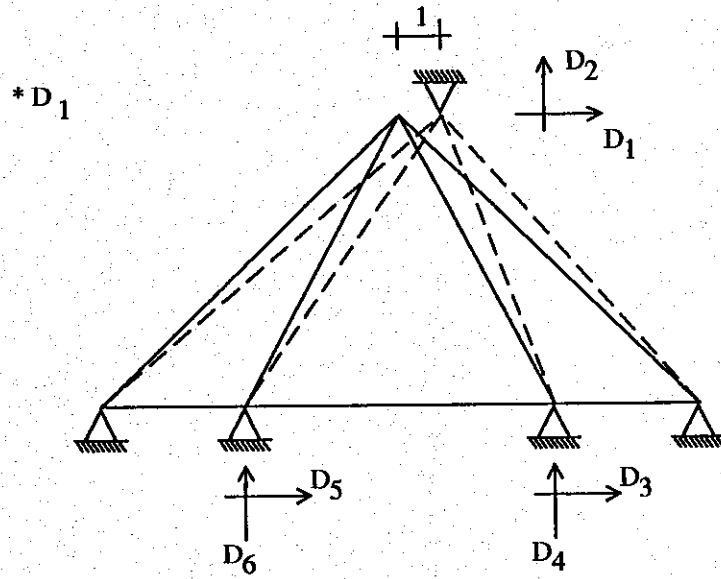
Problema No. 4

Hallar la matriz de rigidez de la armadura que se presenta a continuación, únicamente se presentan las deformaciones unitarias que se producen en la armadura, luego se dará la matriz de rigidez para que ud. la pueda comprobar con los cálculos que crea conveniente hacer. Todos los miembros tienen un área = 20 in^2 , $E = 1760 \text{ Ksi}$

$n_k = 6$



Estructura Fija

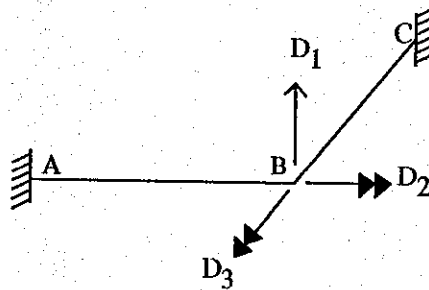
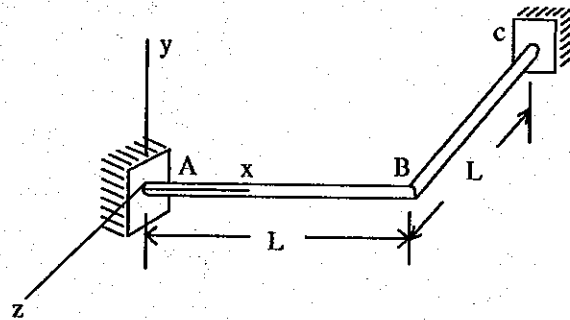


2.4.4 Parrillas

Problema No. 1

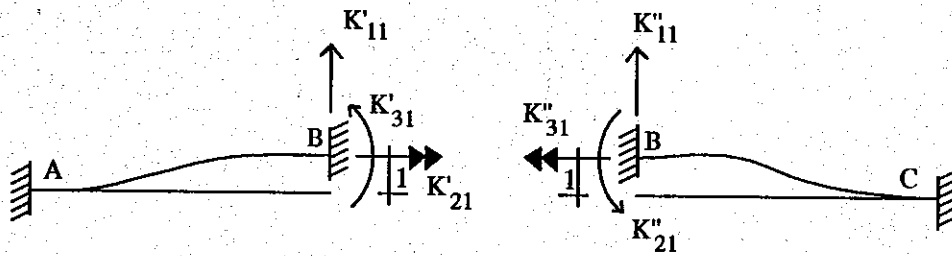
La parrilla mostrada en la figura está formada por dos miembros (AB y BC) que están unidos rígidamente en el nudo B. La carga sobre la parrilla es una fuerza concentrada P , que actúa en el centro del claro del punto AB. Se supone que cada miembro tiene una rigidez a la flexión igual a EI y una rigidez a la torsión GJ .

Debido a que los apoyos en A y C son empotramientos, los únicos desplazamientos desconocidos en la estructura son los del nudo B. Estos son una traslación D_1 en el eje y , una rotación D_2 respecto al eje x , y una rotación D_3 respecto al eje z . La dirección positiva de cada vector desplazamiento se supone que es la misma que la dirección positiva de uno de los ejes coordenados. Se utiliza una flecha con cabeza doble para distinguir una rotación de una traslación.



La matriz de rigidez para la parrilla se encuentra analizando la estructura fija para los efectos de desplazamientos desconocidos de valores unitarios. En el caso de un valor unitario de D_1 , el nudo B se desplaza hacia arriba a una distancia unitaria sin girar. Luego, las acciones desarrolladas en la fijación correspondiente D_1 , D_2 y D_3 son las rigideces de nudo K_{11} , K_{21} y K_{31} respectivamente.

Los efectos de traslación unitaria en los miembros AB y BC se muestran por separado, las contribuciones del miembro AB a las rigideces de nudo se indican con una sola prima, en tanto que las contribuciones del miembro BC se indican con doble prima.



$$K'_{11} = 12EI/L^3$$

$$K'_{21} = 0$$

$$K'_{31} = -6EI/L^2$$

$$K''_{11} = 12EI/L^3$$

$$K''_{21} = 6EI/L^2$$

$$K''_{31} = 0$$

Para encontrar la rigidez de nudo, se suman los efectos de ambos miembros, de donde:

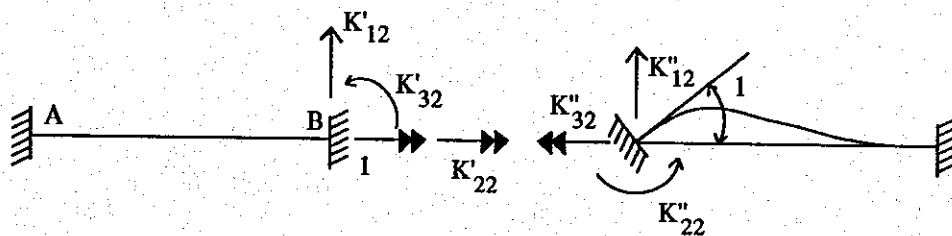
$$K_{11} = 24EI/L^3$$

$$K_{21} = 6EI/L^2$$

$$K_{31} = -6EI/L^2$$

De manera similar se pueden encontrar las rigideces resultantes de giros unitarios correspondientes a D_2 y D_3 .

Se analiza ahora el caso del valor unitario de D_2 .



$$K'_{12} = 0$$

$$K'_{32} = 0$$

$$K'_{22} = GJ/L$$

$$K''_{12} = 6EI/L^2$$

$$K''_{22} = 4EI/L^2$$

$$K''_{32} = 0$$

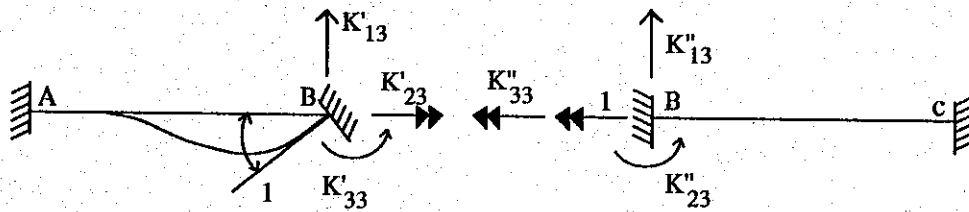
Por lo tanto

$$K_{12} = 6EI/L^2$$

$$K_{22} = 4EI/L + GJ/L$$

$$K_{32} = 0$$

Para un valor unitario D_3 se tiene que:



$$K'_{13} = -6EI/L^2$$

$$K'_{23} = 0$$

$$K'_{33} = 4EI/L^2$$

$$K''_{13} = 0$$

$$K''_{23} = 0$$

$$K''_{33} = GJ/L$$

Por lo tanto

$$K_{13} = -6EI/L^2$$

$$K_{23} = 0$$

$$K_{32} = 4EI/L + GJ/L$$

La matriz de rigidez se puede expresar de la forma siguiente:

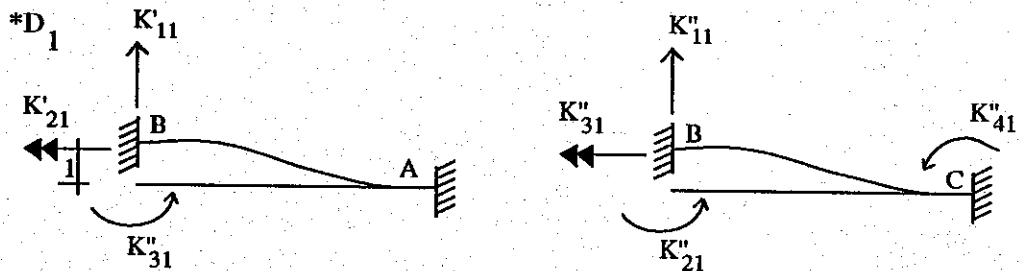
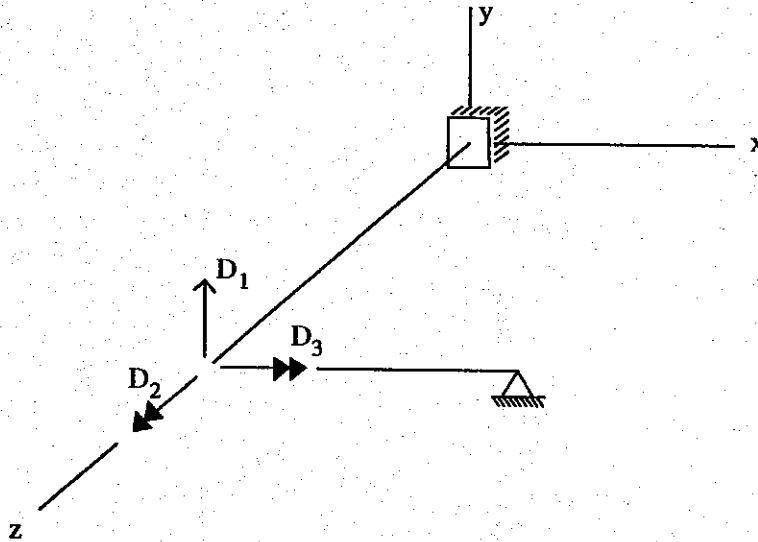
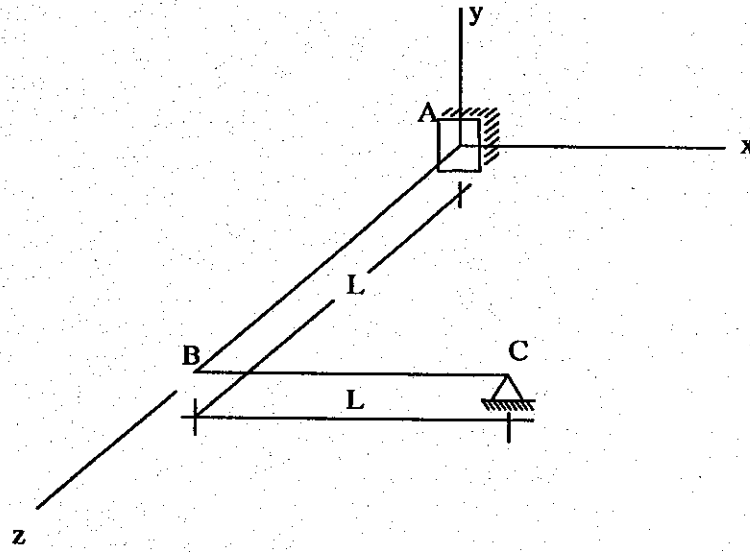
$$K = EI/L^3 \begin{bmatrix} 24 & 6L & -6L \\ 6L & (4+n)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & (4+n)L^2 \end{bmatrix}$$

Donde

$$n = GJ/EI$$

Problema No. 2

Hallar la matriz de rigidez de la siguiente parrilla.



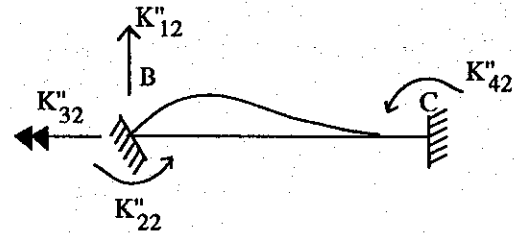
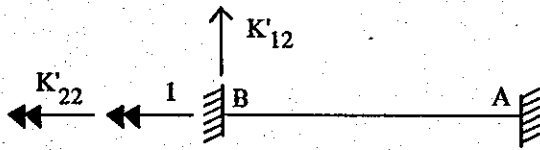
$$K_{11} = K'_{11} + K''_{11} = 12EI/L^3 + 12EI/L^3 = 24EI/L^3$$

$$K_{21} = K'_{21} + K''_{21} = 0 + 6EI/L^2 = 6EI/L^2$$

$$K_{31} = K'_{31} + K''_{31} = 6EI/L^2 + 0 = 6EI/L^2$$

$$K_{41} = 6EI/L^2$$

*D₂



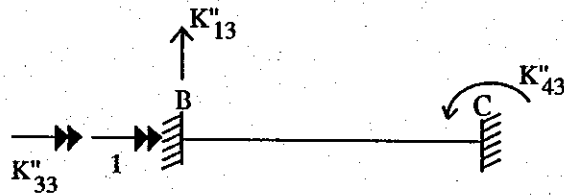
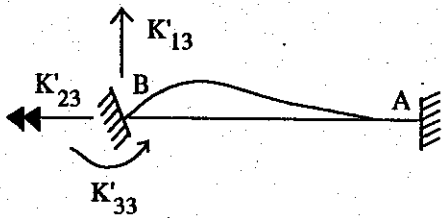
$$K_{12} = K'_{12} + K''_{12} = 0 + 6EI/L^2 = 6EI/L^2$$

$$K_{22} = K'_{22} + K''_{22} = GJ/L + 4EI/L$$

$$K_{32} = K'_{32} + K''_{32} = 0 + 0 = 0$$

$$K_{42} = 2EI/L$$

*D₃

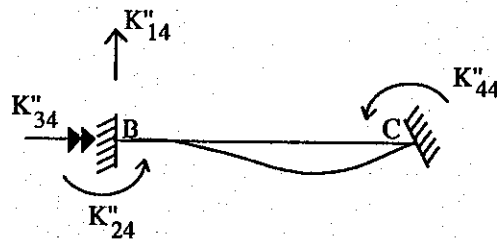
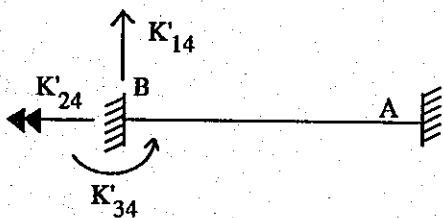


$$K_{13} = K'_{13} + K''_{13} = 6EI/L^2 + 0 = 6EI/L^2$$

$$K_{23} = K'_{23} + K''_{23} = 0 + 0 = 0$$

$$K_{33} = 4EI/L - GJ/L$$

$$K_{43} = 6EI/L^2$$



$$K_{14} = K'_{14} + K''_{14} = 0 + 6EI/L^2 = 6EI/L^2$$

$$K_{24} = K'_{24} + K''_{24} = 0 + 2EI/L = 2EI/L$$

$$K_{34} = K'_{34} + K''_{34} = 0 + 0 = 0$$

$$K_{44} = 4EI/L$$

Por lo tanto se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} 24EI/L^3 & 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L + GJ/L & 0 & 2EI/L \\ 6EI/L^2 & 0 & 4EI/L - GJ/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

SECRETARÍA DE DEFENSA
COMANDO EN JEFE FUERZA DE GUERRILLA
UNIDAD DE CONTROL

2.5 Efectos de temperatura, deformaciones previas y desplazamientos de apoyos

Los efectos de los cambios de temperatura, deformación previa de los miembros y desplazamientos de los apoyos, pueden incorporarse rápidamente en el análisis de una estructura resuelta mediante el método de la rigidez. El procedimiento conveniente es: considerar que todos estos efectos toman lugar en la estructura fija y sumar todas las acciones resultantes a las acciones producidas por las cargas. Por ejemplo, en la estructura fija sujeta a cargas únicamente, es necesario calcular las acciones A_{DL} correspondientes a los desplazamientos desconocidos. Cuando se supone que los cambios de temperatura ocurren en la misma estructura fija, pueden tomar lugar acciones adicionales correspondientes a los desplazamientos desconocidos. Estas acciones se denominarán mediante el vector A_{DT} , que es consistente con el vector A_{DL} excepto que la causa es la temperatura y no las cargas. Se puede aplicar la misma idea a las deformaciones previas y a los desplazamientos de los apoyos, los que producen en la estructura fija las acciones A_{DP} y A_{DR} , respectivamente. Cuando todas estas acciones han sido determinadas para la estructura fija pueden formarse los vectores A_{DL} , A_{DT} , A_{DP} y A_{DR} . Estos vectores son de orden $n_k \times 1$. La suma de estos vectores contiene la suma de todas las acciones correspondientes a los desplazamientos desconocidos y se denominan como el vector A_{DS} , por lo tanto se tiene que:

$$A_{DS} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR}$$

De donde las ecuaciones de acciones quedarán:

$$A_{DS} = A_{DS} + K D \quad \text{ó} \quad D = K^{-1} (A_D - A_{DS})$$

Debido a que en este caso son acciones las que producen las deformaciones, entonces es necesario modificar la ecuación para acciones de extremo de miembro, siendo:

$$A_{MS} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR}$$

De donde entonces

$$A_M = A_{MS} + A_{MD} D$$

De igual manera para las matrices de reacciones

$$A_R = A_{RS} + A_{RD} D$$

Donde

$$A_{RS} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR}$$

2.6 Ejemplos Numéricos

Problema No. 1

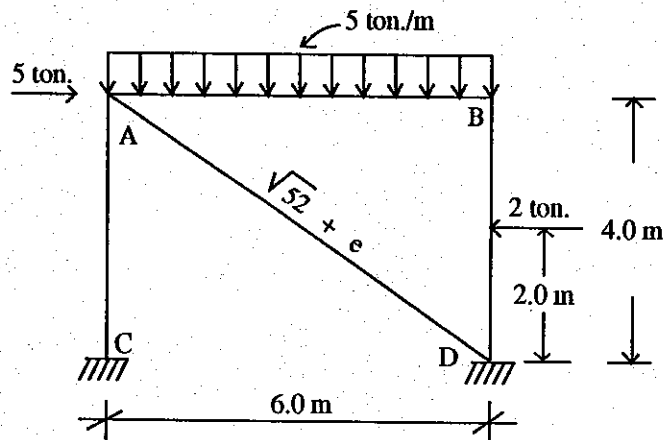
El problema No. 2 del capítulo 2 que corresponde a marcos es el que se utilizará para la aplicación en este caso de deformación previa y desplazamiento de un apoyo. La matriz de rigidez, la matriz A_{DL} y la matriz A_D ya fueron resueltos por lo que únicamente se copiarán los datos obtenidos.

Se colocará un miembro del nudo A al nudo B con una sección igual a 25.806 cm^2 cuyo miembro tiene un exceso de fabricación de 0.5 cm .

El módulo de elasticidad = $21.092087 \times 10^6 \text{ ton/cm}^2$

Un asentamiento en el apoyo D = 2 cm .

Todos los demás miembros tendrán una sección = 800 cm^2 .



$$A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad A_{DL} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K^{-1} = 1/EI \begin{bmatrix} 31/40 & 1/40 & -4/5 \\ 1/40 & 31/40 & -4/5 \\ -4/5 & -4/5 & 64/15 \end{bmatrix}$$

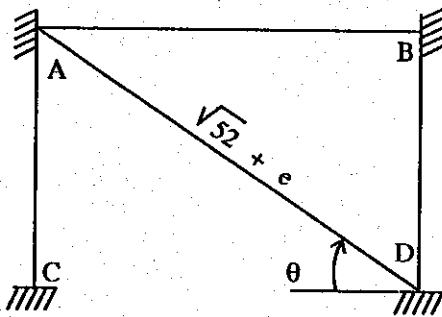
Cálculo de la matriz A_{DS}

$$A_{DS} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR}$$

Donde para este ejemplo:

$$A_{DT} = 0$$

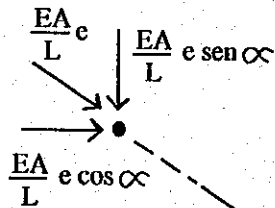
Cálculo de la matriz A_{DP}



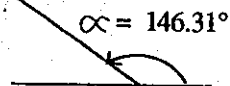
Para una barra inclinada que sufre un alargamiento se tiene que al colocar la barra en la estructura fija, el efecto será de un acortamiento de la barra, de una longitud inicial $L + e$ a una longitud final L , para que pueda ser armada la estructura, de donde la carga axial a la misma será de $E A e/L$

$$\tan \theta = 4/6 \Rightarrow \theta = 33.69^\circ$$

$$\alpha = 180 - \theta = 146.31^\circ$$



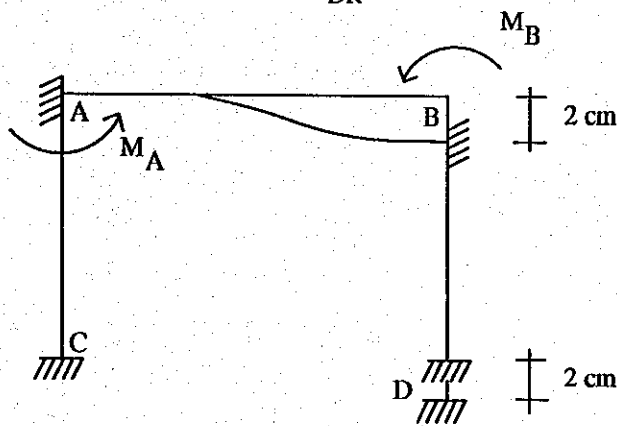
$$EA/L (e) \cos \alpha = \frac{(21.092087 \times 10^6) (0.0025806) (0.005) \cos (146.31^\circ)}{\sqrt{52}}$$



La componente que actúa en dirección del desplazamiento D_3 , es $EA \cos \alpha L$ que es la única acción que contribuye a las deformaciones que se dan en la estructura. por lo tanto la matriz A_{DP} es igual a:

$$A_{DP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 31.40 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz A_{DR}



$$I = 1/12 (0.20) (0.4)^3 = 1.06667 \times 10^{-3}$$

$$M_A = M_B = 6EI/L^2 \Delta = M$$

$$M = 6 (21.092087 \times 10^6) (1.06667 \times 10^{-3}) (0.02) / 6^2 = 75 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Por lo tanto

$$A_{DR} = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$A_{DS} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 31.40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 60 \\ 32.40 \end{bmatrix}$$

Ahora se sustituye en la ecuación

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DS})$$

Para encontrar las deformaciones respectivas, de donde entonces:

$$D = 1/EI \begin{bmatrix} 31/40 & 1/40 & -4/5 \\ 1/40 & 31/40 & -4/5 \\ -4/5 & -4/5 & 64/15 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 90 \\ 60 \\ 32.40 \end{bmatrix} \right)$$

$$D_1 = -0.0020 \text{ rad} \quad D_2 = -0.0010 \text{ rad} \quad D_3 = -0.0008 \text{ m}$$

El lector puede observar los cambios de los resultados que se dan en este problema con respecto al problema No. 2 del capítulo 2, y así formarse un juicio razonable de qué cambios se producen, al incluirle una barra diagonal con un exceso en su longitud.

Problema No. 2

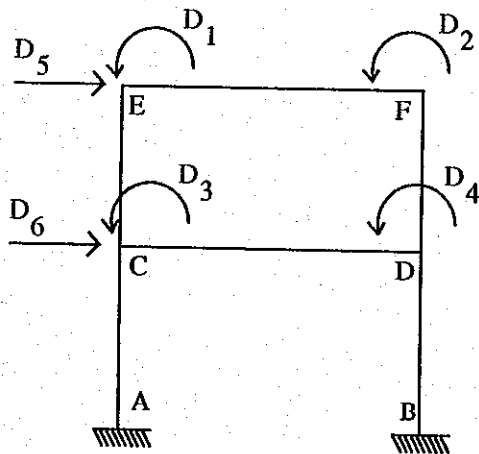
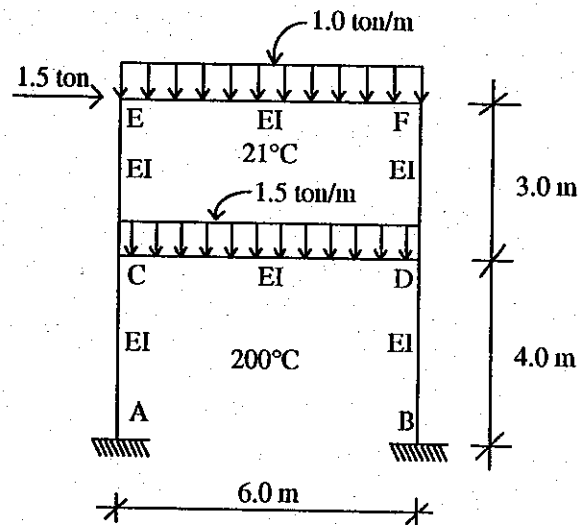
Calcular los desplazamientos del problema No. 4 del capítulo 2 correspondiente a marco. Suponiendo las condiciones de carga que se muestran en la figura y además que en el primer nivel se utilizará para un horno cuya temperatura máxima será de 200°C, el segundo nivel será utilizado para oficinas y la temperatura ambiente estará alrededor de los 21°C en el día y en la noche será de 15°C. Considerar además que el apoyo A sufrirá un asentamiento de 2 cm.

Sección de vigas y columnas $b = 30 \text{ cm}$ y $h = 30 \text{ cm}$

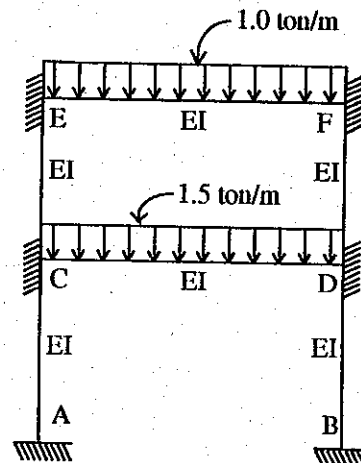
recubrimiento = 2.5 cm

$E = 2,109.2087 \text{ ton/cm}^2$

$\alpha = -0.00001 \text{ m/m}^\circ\text{C}$



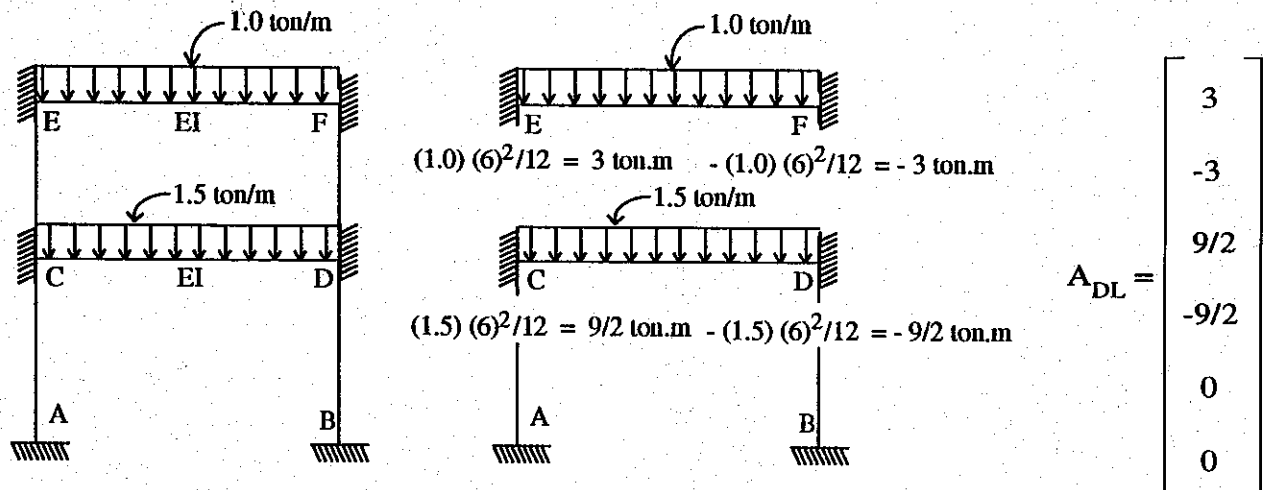
Desplazamiento de la estructura



Estructura Fija

En el cálculo de la matriz A_{DS} intervienen las matrices A_{DL} , A_{DT} y A_{DR} que corresponden a las cargas, cambio de temperatura y asentamiento de un apoyo en la estructura fija, las cuales servirán para hallar las acciones que contribuyen en dirección a las deformaciones que se dan en el problema que se está analizando.

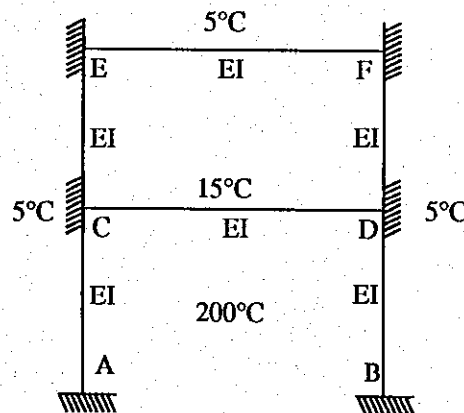
Cálculo de la matriz A_{DL}



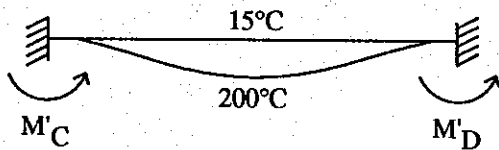
Cálculo de la matriz A_{DT}

El momento crítico se da cuando la temperatura externa baja y posiblemente se da en horas de la noche. Suponer que la temperatura externa es de 5°C y que el horno está trabajando a su máxima potencia.

Del capítulo 4, sección 4.6 se tiene que: $M = \alpha EI \Delta T / d$



TRAMO C - D



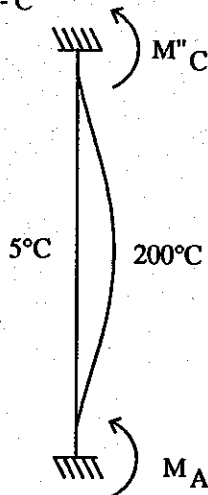
$$M'_C = (-0.00001) (2,109.2087) (1/12) (30)^4 (185) / 27.5$$

$$M'_C = -95.777 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M'_D = -(-0.00001) (2,109.2087) (1/12) (30)^4 (185) / 27.5$$

$$M'_D = 95.777 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

TRAMO A - C



$$M''_C = -(-0.00001) (2,109.2087) (1/12) (30)^4 (195) / 27.5$$

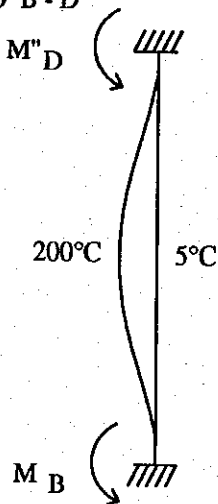
$$M''_C = 100.9544 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_C = M'_C + M''_C$$

$$M_C = -95.777 + 100.9544$$

$$M_C = 5.1774 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

TRAMO B - D



$$M''_D = (-0.00001) (2,109.2087) (1/12) (30)^4 (195) / 27.5$$

$$M''_D = -100.9544 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_D = M'_D + M''_D$$

$$M_D = 95.777 - 100.9544$$

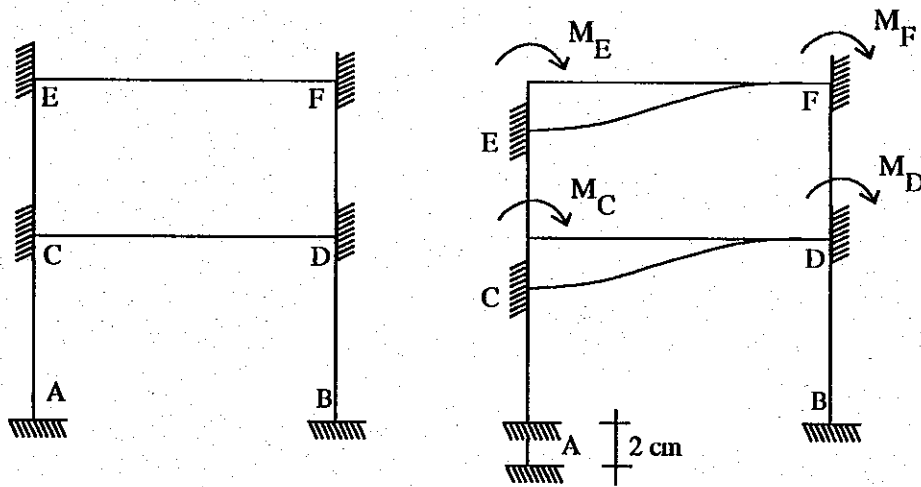
$$M_D = -5.1774 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$A_{DT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.1774 \\ -5.1774 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NOTA:

Compruebe que las contribuciones en dirección de los desplazamientos 1 y 2 son cero, haciendo un análisis semejante al anterior.

Cálculo de la matriz A_{DR}



$$M = 6EI\Delta / L^2$$

$$M_E = M_F = M_C = M_D = -6(2,109.2087)(1/12)(30)4(2) / (600)^2 = -47.4572 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$A_{DT} = \begin{bmatrix} -47.4572 \\ -47.4572 \\ -47.4572 \\ -47.4572 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A_{DS} queda de la siguiente forma:

$$A_{DS} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4.5 \\ -4.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.1774 \\ -5.1774 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -47.4572 \\ -47.4572 \\ -47.4572 \\ -47.4572 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44.4572 \\ -50.4572 \\ -37.7798 \\ -57.1346 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz A_D

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez fue hallada en el problema 4 capítulo 2 de marcos, por lo que se tiene:

$$K = EI \begin{bmatrix} 28474.3174 & 4745.7196 & 9491.4391 & 0.0 & 9491.4391 & -9491.4391 \\ 4745.7196 & 28474.3174 & 0.0 & 9491.4391 & 9491.4391 & -9491.4391 \\ 9491.4391 & 0.0 & 42711.4762 & 4745.7196 & 9491.4391 & -4152.5046 \\ 0.0 & 9491.4391 & 4745.7196 & 42711.4762 & 9491.4391 & -4152.5046 \\ 9491.4391 & 9491.4391 & 9491.4391 & 9491.4391 & 12655.2522 & -12655.2522 \\ -9491.4391 & -9491.4391 & -4152.5046 & -4152.5046 & -12655.2522 & 17994.1867 \end{bmatrix}$$

De la ecuación

$$A_D = A_{DS} + K D$$

Despejando D se tiene

$$D = K^{-1} (A_D - A_{DS})$$

$$D_1 = 0.00307 \text{ rad}$$

$$D_2 = 0.00313 \text{ rad}$$

$$D_3 = 0.00239 \text{ rad}$$

$$D_4 = 0.00289 \text{ rad}$$

$$D_5 = -0.0135 \text{ m}$$

$$D_6 = -0.005 \text{ m}$$

Nota:

Debe tenerse presente que las estructuras estarán sometidas a acciones, en las cuales se debe determinar en qué momento se hace crítica la misma, para lo cual se debe de hallar una optimización para no elevar los costos y diseñar bajo factores de seguridad, que pueda garantizar que la estructura va a ser funcional bajo las condiciones a las que pueda estar sometida.

CAPITULO 3
METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES

Principales características de las matrices de rigidez

La ecuación general de rigidez se escribe simbólicamente como sigue:

$$A_D = K D$$

El orden en que se anotan las acciones nodales de la matriz K debe ser el mismo al anotar los desplazamientos correspondientes en la matriz D . Así si la primera acción nodal anotada en la matriz A_D es X_1 , entonces el primer desplazamiento anotado en la matriz D debe ser D_1 , etc. Si a lo largo de todo el análisis se conserva este orden, las matrices de rigideces tendrán las siguientes características:

1. Serán simétricas respecto a la diagonal, o sea, $K_{ij} = K_{ji}$. Una prueba de esta característica puede determinarse a partir de la ley de las deformaciones recíprocas del Teorema de Maxwell, si el lector desea comprobar el teorema deberá consultar algún libro de Análisis Estructural, ya que este punto sale del contenido del presente trabajo.
2. La matriz completa de rigidez, ya sea para un solo elemento o toda una estructura es singular. Sin embargo, si se especifican suficientes condiciones de frontera, de manera que la estructura sea estable (y la matriz de rigidez se modifica para reflejar esas condiciones), la matriz resultante deberá ser no singular.
3. Los coeficientes de rigideces en la diagonal son siempre positivos. La razón de esta característica tiene que ver con el hecho de que los coeficientes de rigidez en la diagonal principal representan, cada una de las acciones necesarias en un nodo para producir un desplazamiento correspondiente en ese nodo. Una acción negativa necesaria para producir un desplazamiento positivo es contrario al comportamiento observado de las estructuras.

Como se vio en el capítulo anterior, cada término de la matriz de rigidez, se calcula directamente examinando los extremos del miembro de cada nodo y sumando las rigideces que contribuye cada miembro, seguidamente se profundizará cómo hacer el análisis para una matriz de rigidez, por lo que ahora se llamará el Método Directo de las Rigideces.

3.1 Matriz de rigidez del miembro

En el cálculo de las rigideces nodales, las rigideces del miembro se deben calcular primero en función de las direcciones de las coordenadas establecidas para la estructura. La rigidez nodal K_{ij} se encuentra entonces como la suma de las rigideces correspondientes del miembro k_{ij} . Surgen dificultades cuando la orientación del miembro difiere de las direcciones de las coordenadas de la estructura. Se atacará el problema determinando primero las rigideces del miembro en un sistema local de coordenadas conveniente para el miembro. Después las rigideces del miembro se convierten al sistema de coordenadas de la estructura (o global), y por último se colocan en la matriz de rigidez de la estructura. En este estudio se usa un apóstrofo para designar las cantidades en las coordenadas de los miembros. Por ejemplo k' es la matriz de rigideces del miembro en sus mismas coordenadas.

Considere un miembro prismático de longitud L , área A , momento de inercia I con relación al eje z , y módulo de elasticidad E . Se desarrollará una matriz de rigideces para este elemento simple. Véase en la figura 9, este miembro en el sistema coordenadas del miembro, en donde éste queda a lo largo del eje x , con sus ejes principales en las direcciones Y y Z .

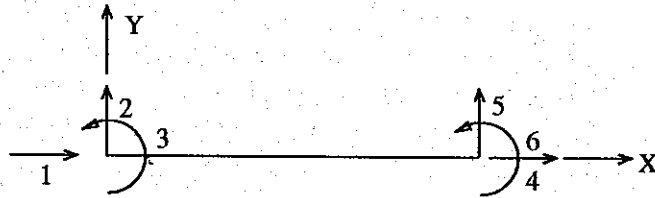


Fig. 9 Sistema de coordenadas de miembro

En la figura se definen seis direcciones para los desplazamientos, correspondientes a los seis grados de libertad para los extremos del miembro. Toda estructura reticular de dos dimensiones, de miembros prismáticos, está formada por elementos de este tipo, de manera que una vez que se ha calculado la matriz de rigideces del miembro se puede usar repetidas veces para cada uno de los miembros de la estructura. la matriz de rigideces del miembro se calcula aplicando un desplazamiento unitario correspondiente a cada uno de los grados de libertad del miembro en turno. Las rigideces del miembro se indican con una k' minúscula, de manera que k'_{ij} es la acción correspondiente al grado de libertad i debido a un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad j .

En la figura 10 se indican cada uno de los desplazamientos unitarios por turno, con las acciones correspondientes necesarios para producir el desplazamiento.

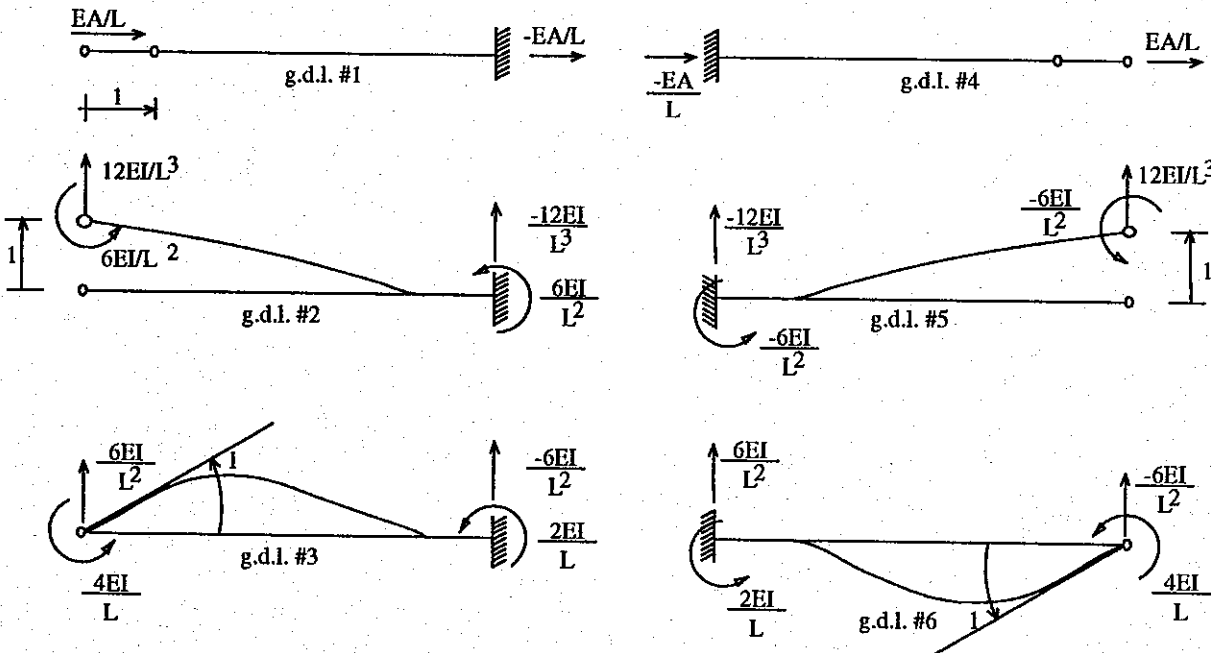


Fig. 10 Desplazamientos unitarios

Los vectores se muestran en la posición que se ha supuesto positiva, y los signos negativos significan que la acción en realidad obra en sentido opuesto al indicado.

La matriz de rigideces del miembro se puede escribir directamente con la información que se presenta en la figura anterior.

$$[k'] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Esta matriz de rigideces del miembro se aplica a todos los miembros rectos prismáticos. Sólo los términos E, I, A y L cambian de valor de miembro a miembro. La matriz es adecuada únicamente para las estructuras planas, ya que sólo se ha considerado traslación en el plano y rotación con respecto a un punto. En una estructura tridimensional se introducen tres grados de libertad adicionales en cada extremo del miembro, la matriz de rigideces restante de 12 X 12 se desarrolla en textos de análisis avanzado.

3.2 Matriz de Rotación

El método directo para la formulación de las rigideces de miembro es satisfactorio para vigas continuas y armaduras. Además un método que emplea la rotación de ejes es apropiado para estructuras complejas.

La rotación de ejes para vectores en dos dimensiones, se formula sobre una base geométrica.

Considérense los vectores V_1 y V_2 en el sistema de coordenadas X, Y de la figura 11 (llamado sistema de coordenadas globales). Se indican también las componentes en el sistema coordenado x,y (sistema de coordenadas local).

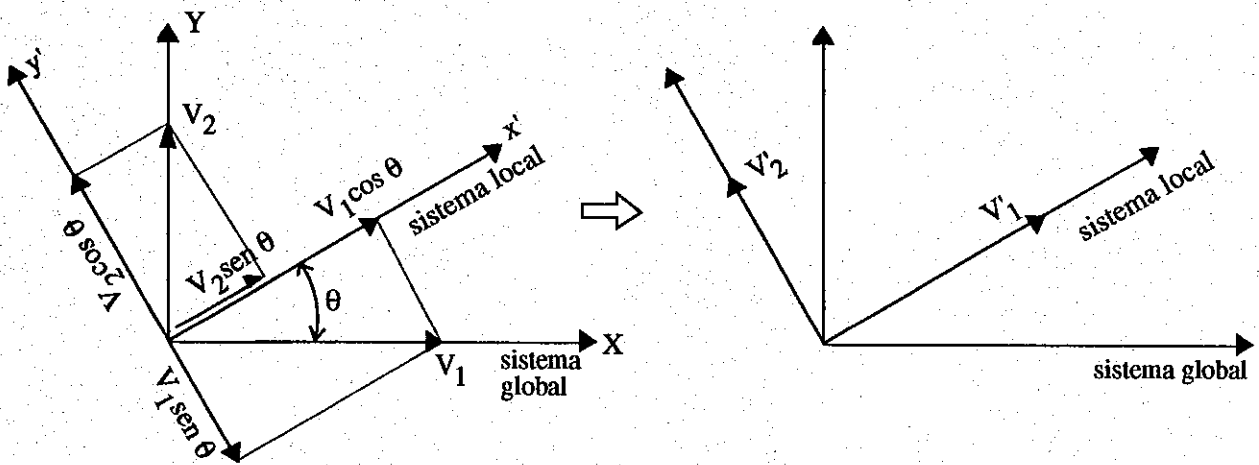


Fig. 11 Rotación de Ejes

Se observa que la transformación del sistema global al local es simplemente

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \cos \theta + V_2 \sin \theta \\ V'_2 &= -V_1 \sin \theta + V_2 \cos \theta \end{aligned}$$

o expresado como matriz

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

En la que la ordenación de senos y cosenos es una matriz de rotación, que es una forma especial de la clase general conocida como matrices de transformación.

3.3 Matriz de rigidez global

La matriz de rigidez de miembro expresada en coordenadas del mismo no se puede introducir a la matriz nodal de la estructura, hasta que está transformada a las coordenadas de la estructura.

Se debe tener en cuenta que, las acciones y los desplazamientos son cantidades vectoriales, por lo tanto sus componentes deben tener la misma dirección si se van a sumar.

Evidentemente para transformar la matriz de rigidez en sus coordenadas se debe utilizar la matriz de rigidez de rotación y para esto considere lo siguiente:

Relacionar las acciones y los desplazamientos que existen en el sistema coordenadas local del miembro.

Considerando únicamente 2 grados de libertad estos serán en dirección x' y en dirección y' que corresponden al miembro.

Las acciones en los extremos del miembro q' están relacionadas a los desplazamientos d' en los extremos por medio de la matriz de rigidez del miembro.

$$\begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{bmatrix} \quad \text{a)}$$

Ahora se utilizará la matriz de rotación como se mencionó anteriormente, las acciones y los desplazamientos son cantidades vectoriales entonces se puede decir que:

$$\text{Acciones} \quad \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{b)}$$

en la que los términos en q sin apóstrofo son acciones en el sistema de coordenadas global de la estructura.

Los desplazamientos de los extremos en el sistema coordenado del miembro se pueden escribir de manera semejante, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \text{c)}$$

en la que los términos en d, sin apóstrofo son desplazamientos en el sistema global de coordenadas de la estructura.

Sustituyendo las ecuaciones b) y c) en a) se obtiene la relación entre acciones y los desplazamientos de donde se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \cos \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \cos \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

en forma de abreviación matricial, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

- Donde
- $\begin{bmatrix} r \end{bmatrix}$ matriz de rotaciones
 - $\begin{bmatrix} k' \end{bmatrix}$ matriz de rigideces en las coordenadas del miembro.
 - $\begin{bmatrix} q \end{bmatrix}$ matriz de acciones en los extremos de miembro en el sistema coordenado de la estructura.
 - $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$ matriz de desplazamientos en los extremos de miembro en el sistema de coordenadas de la estructura.

multiplicando por r^{-1} , se tiene que:

$$\begin{bmatrix} r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

Puesto que $\begin{bmatrix} q \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$ son las acciones y los desplazamientos en el sistema de coordenadas de la estructura es posible interpretar $\begin{bmatrix} r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \end{bmatrix}$ como la matriz de rigidez del miembro en el sistema de coordenadas de la estructura $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$, donde $q = \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} d$ siendo $K = r^{-1} k' r$

Se ha hecho la transformación para los primeros dos grados de libertad de un miembro. El tercer grado de libertad es una rotación, que no cambia cuando se transforman las coordenadas de un plano. Los grados de libertad cuarto y quinto se deben transformar de la misma manera que el primero y el segundo, mientras que el sexto es el mismo caso del tercero. La ordenación de la transformación se puede describir de la siguiente forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o en forma expandida

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para estructuras planas, entonces, la matriz de rigidez del miembro en el sistema de coordenadas de la estructura es simplemente:

$$[K] = [R]^T [k'] [R]$$

Se debe comprobar una propiedad muy importante y útil de la matriz de rotaciones R: que su inversa es igual a su matriz transpuesta, por tanto se tiene que:

$$[K] = [R^{-1}] [k'] [R]$$

Esta matriz da como resultado la transformación de la matriz de rigidez del miembro de una estructura plana al sistema de coordenadas de la estructura, llamado sistema de coordenadas global.

3.4 Integración de las matrices a una estructura

En los siguientes pasos se va a definir como hallar la matriz de la estructura, a través de los conceptos que se han dado en este capítulo.

- a) El primer paso es definir el sistema de coordenada global de la estructura, así como también de las suposiciones del análisis. Luego se procede a numerar los grados de libertad, se seguirá la numeración en el sentido de las agujas del reloj, se analizarán también los grados de libertad restringida que corresponden a las restricciones que se dan en la estructura.
- b) Seguidamente hay que definir los sistemas de coordenados del miembro y se calcula la matriz de rigidez para cada miembro en su propio sistema de coordenadas, éstos se definen eligiendo arbitrariamente un extremo del miembro como origen. El cálculo de la matriz de rigidez hace uso del sistema de coordenadas idéntico al que se utilizó para formular la matriz de rigidez de miembro sección 3.1.
- c) El siguiente paso es evaluar ahora la matriz de rotaciones para cada uno de los miembros. El sistema de coordenadas de la estructura tiene su origen en el punto elegido en el inciso a).
- d) Ahora se tiene que transformar cada una de las matrices de rigidez de los miembros al sistema de coordenadas de la estructura según la ecuación:

$$[K] = [R]^T [k'] [R]$$

- e) A continuación, el paso quizá más importante es la formación de la matriz de rigidez de la estructura. Recordando que el elemento K_{ij} de la matriz de rigideces de la estructura es la acción correspondiente al grado de libertad i , causado por un desplazamiento unitario correspondiente a j . Cada una de estas rigideces nodales se forman de acuerdo a las sumas de las rigideces de los miembros. El problema consiste en colocar los elementos de la matriz de rigideces del miembro en las posiciones correctas, en la matriz de rigidez de la estructura. La disposición que se debe realizar es examinar por turno cada uno de los miembros, los grados de los nudos en cada miembro y de la estructura estarán relacionados como se indica, según la figura del inciso b, donde los grados de libertad de la estructura están definidos en los miembros. Seguidamente se escribirán las matrices de rigideces de los miembros en las que corresponderán a los grados de libertad de la estructura, es decir que en la parte de arriba y al lado de cada una de las matrices de los miembros se colocarán los números que corresponden a los grados de libertad según el sistema de coordenados de la estructura, en el ejemplo que se presentará se podrá visualizar mejor, esta información es la necesaria para colocar los elementos de la matriz de rigideces de los miembros dentro de la matriz de rigideces de la estructura. Cuando se escribe un número en una posición en que ya hay otro, la nueva contribución se suma al anterior. De esta manera se expresa el hecho de que la rigidez nodal es la suma de las rigideces de extremo para los miembros que concurren al nudo.

3.5 El método directo de las rigideces (de los desplazamientos) enfocado a la computación:

Las computadoras han ocasionado un cambio radical en la ingeniería civil: este cambio afecta tanto al análisis y diseño de las estructuras como a la enseñanza misma de la profesión.

La computadora representa la culminación de dispositivos de cálculo como el ábaco, regla de cálculo, tablas, nomogramas, calculadora de escritorio, etc. y más que una herramienta, es un enfoque completamente diferente en métodos, conceptos y educación ingenieril. Ningún otro desarrollo ha tenido tanta influencia en la historia de la ingeniería.

En las aplicaciones se usa principalmente la computadora digital, siendo razones posibles la facilidad en la programación y el hecho de que las características de la computadora concuerdan con los aspectos de precisión y meticulosidad, presentes en la mayoría de los ingenieros.

En las aplicaciones se observa también la influencia del desarrollo en los métodos de solución, en los lenguajes de programación y en el avance del equipo, que ha permitido la elaboración de sistemas integrados.

Entre los logros de mayor alcance en la ingeniería estructural está la capacidad de analizar automáticamente casi todo tipo de estructura con un elevado grado de precisión y a un costo razonable.

La aparición de la computadora digital ha hecho posible este perfeccionamiento. Al aparecer la computadora se crearon de inmediato; métodos de análisis adecuados para el cálculo en computadora: el más usado de ellos es el método directo de rigideces, inventado en la década de 1950.

Al principio de dicha década Samuel Levy sugirió alguna de las ventajas de un método de desplazamientos usando coeficientes de influencia para el análisis de las estructuras de los aviones. Al mismo tiempo varias personas estaban elaborando una variedad de métodos para el análisis con base en métodos matriciales, con objeto de aprovechar la computadora digital. Este confuso conjunto de métodos se consolidó con el tiempo. Hacia 1954 Turner, Clough, Martín y Topp presentaron el primer tratamiento del método directo de las rigideces. Demostraron que la matriz de rigideces, es un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigidez que se usan para determinar los desplazamientos, se puede plantear como la superposición de las rigideces de los elementos o miembros.

La dualidad de los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos fue demostrada por Argyris y Kelsey en 1960 en su tratamiento de los teoremas de energía. Desde entonces, se han obtenido una gran unidad de los diversos procedimientos, y se ha visto un rápido aumento en el tamaño de los problemas que se tratan, según aumentan el tamaño y las potencialidades de las computadoras.

En la actualidad, el ingeniero en estructuras debe estar familiarizado con el método de análisis de las rigideces; porque constituye una poderosa herramienta de análisis. Al mismo tiempo deberá estudiar el uso correcto de esta forma automática de análisis.

3.5.1 El sistemas de código en el método de rigidez.

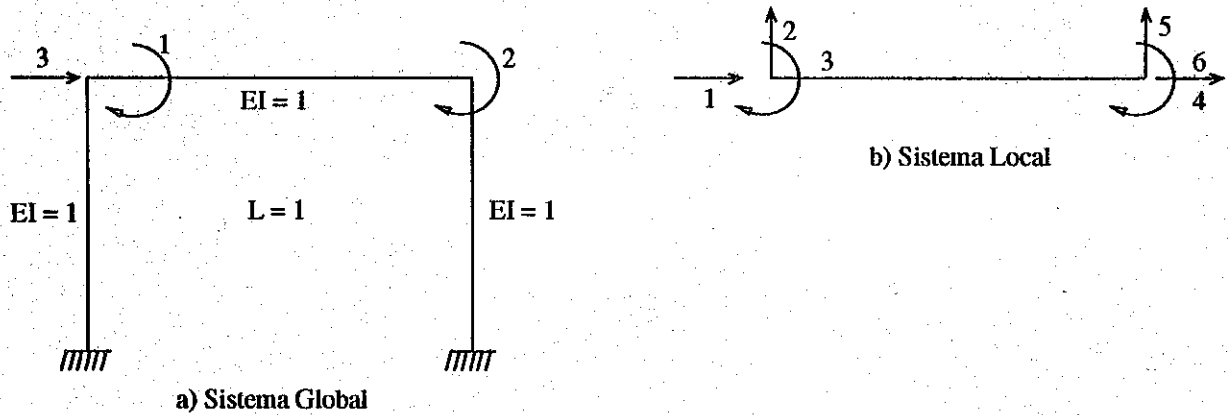
La principal tarea en la formulación de un problema por el método de rigideces es el de sintetizar el sistema de la matriz de rigidez de sus elementos, el sistema de código, el cual se describirá en seguida, realiza los objetivos en una forma más eficiente para la aplicación en computadoras.

Los códigos pueden ser escritos por inspección, colocando en cada elemento su sucesiva secuencia de números en el sistema local y en su posición correspondiente al sistema global de la estructura.

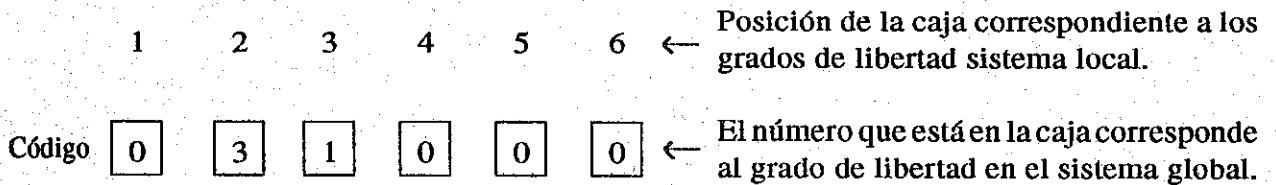
El código de número contiene la siguiente información:

- A. Identifica cada elemento de el sistema por su nombre, el cual es su serie de números (código) y el lugar donde está el elemento conectado con la estructura.
- B. Da inicialmente la matriz de cada uno de los miembros de la estructura.
- C. Los pasos para construir la matriz de rigidez de la estructura.

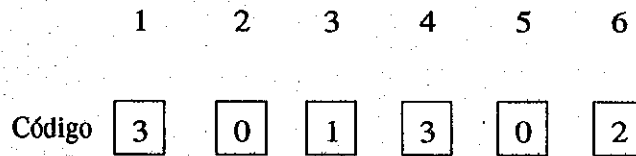
A. Considere el marco de la figura a) con 3 sistemas de coordenadas locales. Por simplicidad colóquese $L=1$, $EI=1$ para todos los miembros, numérese cada elemento con su sistema coordinado local siguiendo la convención mostrada en la figura b).



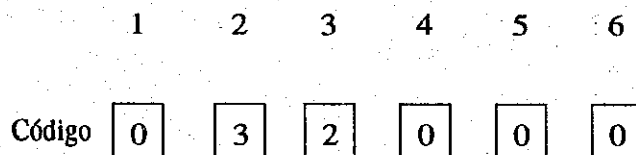
Por lo tanto para cada elemento se tiene un código de 6 números, por ejemplo en la columna izquierda del marco fijo se escribe el siguiente sistema de código en 6 cajas:



La posición (1, 2,3, 4, 5, 6) de cada caja en este código, representa la dirección de los grados de libertad de cada miembro. Procediendo de una manera similar el código para la viga de la figura a) es:



y para la columna derecha



B. Si se escribe el código del elemento 0 3 1 0 0 0 como una columna

1	0
2	3
3	1
4	0
5	0
6	0

Esto da [k] para la columna izquierda del marco. La posición de cada caja representa el número de la fila K y, el número dentro de la caja es el número de la columna de [k] en cada uno deberá ser puesto el #1, (todos los otros elementos de la fila son cero), un cero en una caja significa que toda la fila es cero, el procedimiento del código da:

0	[0	0	0	0]
3	[0	0	0	1]
1	[1	0	0	0]
0	[0	0	0	0]
0	[0	0	0	0]
0	[0	0	0	0]

Obteniendo los códigos de los 3 elementos se obtiene la matriz completa K.

C. Se construye la matriz de rigidez de la siguiente forma:

- a. Se escribe arriba y en la izquierda de cada elemento de la matriz su código.
- b. Para un miembro cualquiera se coloca cada elemento de su matriz en el sistema matricial de rigidez, el número de filas y columnas especificado por el número dentro de la caja a la izquierda y arriba del elemento respectivamente.

Un cero en el código 0 significa que la correspondiente fila y columna de la matriz de rigidez del elemento no contribuye en el sistema de rigidez por lo que no es considerado. Según la sección 3.2 y con los datos proporcionales en este problema se construyen las matrices de rigidez para cada miembro del marco, véase la tabla.

Considérese por ejemplo el sistema de códigos de la matriz de rigidez de elemento de la columna izquierda $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. El 12 va en la posición (3,3) de la matriz de rigidez de la estructura, el 6 corresponde a la posición (3,1), el 6 y el 4 corresponden a la posición (3,1) y (1,1) respectivamente, se sigue el mismo procedimiento para la viga y la columna derecha del marco y así la matriz de rigidez del marco es obtenida por la suma de todas las contribuciones de los elementos.

N →	1	2	3	4	5	6
Elemento	0	3	1	0	0	0
K ↓						
1	0	1	0	0	-1	0
2	3	0	12	6	0	-12
3	1	0	6	4	0	-6
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	-12	-6	0	12
6	0	0	6	2	0	-6

N →	1	2	3	4	5	6
Elemento	3	0	1	3	0	2
K ↓						
3	1	0	0	-1	0	0
0	0	12	6	0	-12	6
1	0	6	4	0	-6	2
3	-1	0	0	1	0	0
0	0	-12	-6	0	12	-6
2	0	6	2	0	-6	4

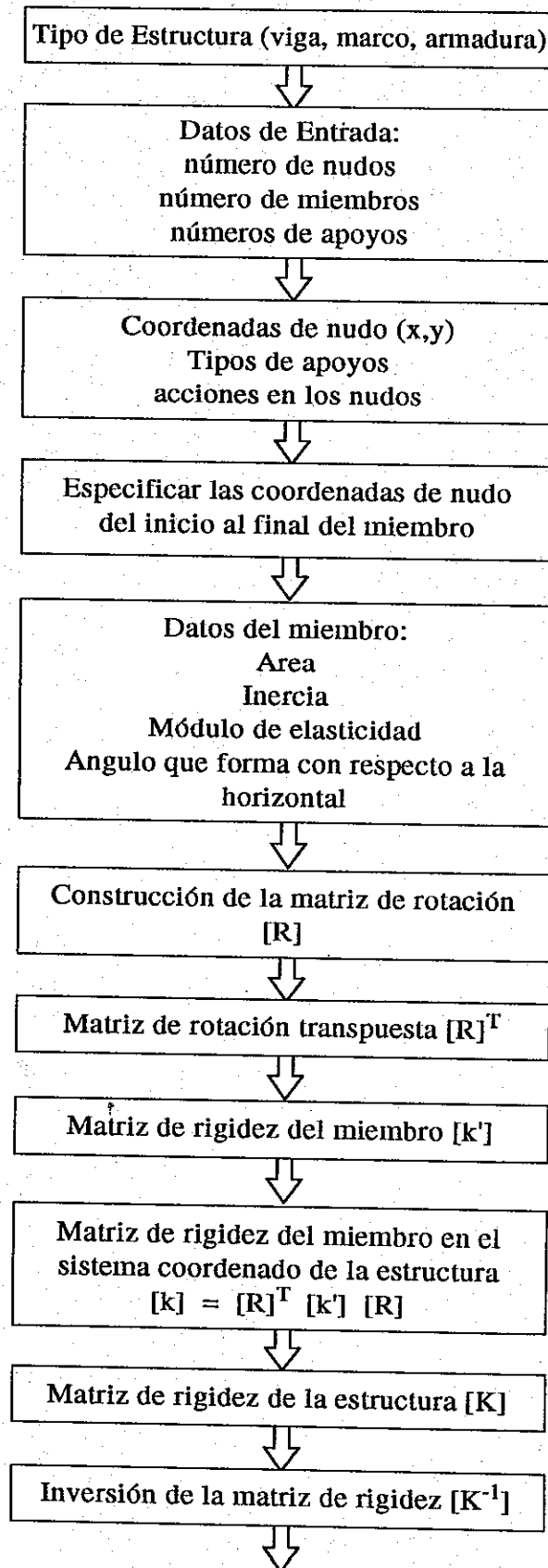
N →	1	2	3	4	5	6
Elemento	0	3	2	0	0	0
K ↓						
0	1	0	0	-1	0	0
3	0	12	6	0	-12	6
2	0	6	4	0	-6	2
0	-1	0	0	1	0	0
0	0	-12	-6	0	12	-6
0	0	6	2	0	-6	4

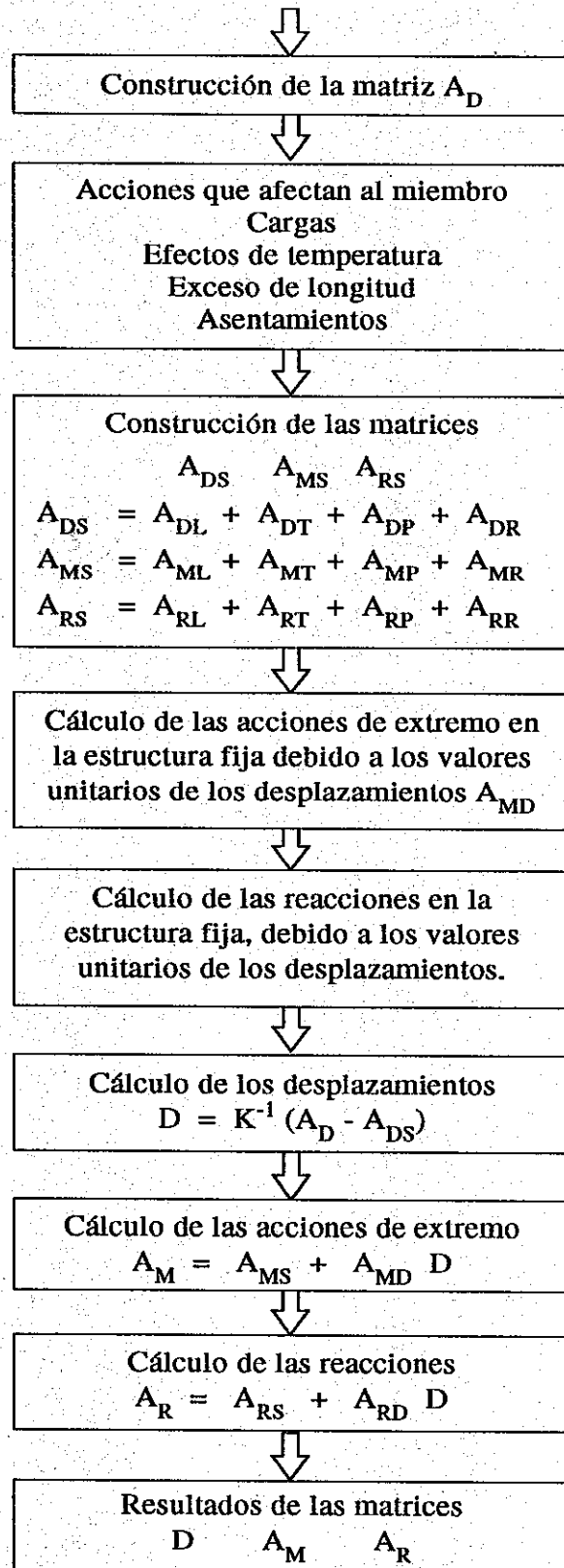
$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \\ & & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

NOTA:

El sistema de código puede ser una iteración de una computadora, que calcula la matriz de rigidez de cualquier estructura, es decir que la misma al ingresar los datos del problema ésta asigna a cada elemento (según la dirección) los grados de libertad (restringidos y no restringidos) de la estructura, realizando después un procedimiento similar al problema que se presentó en esta sección.

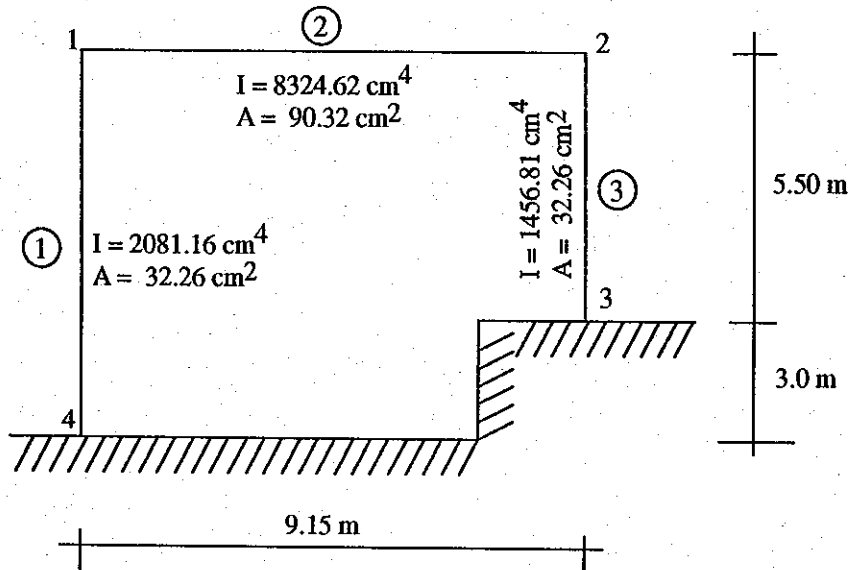
3.5.2 Diagrama General del Método de Rigidez



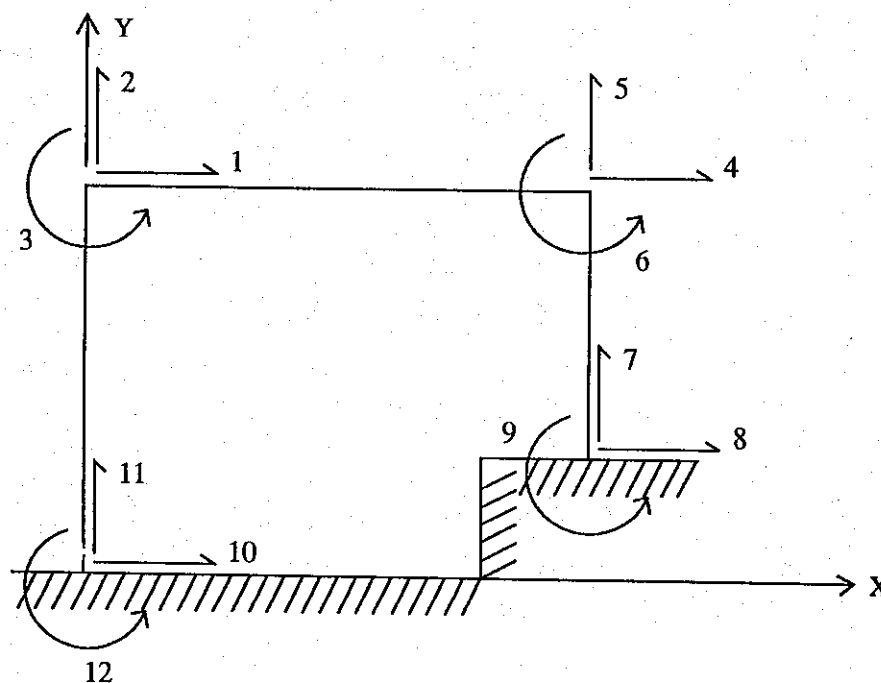


3.6 Ejemplo de la matriz de rigidez directa

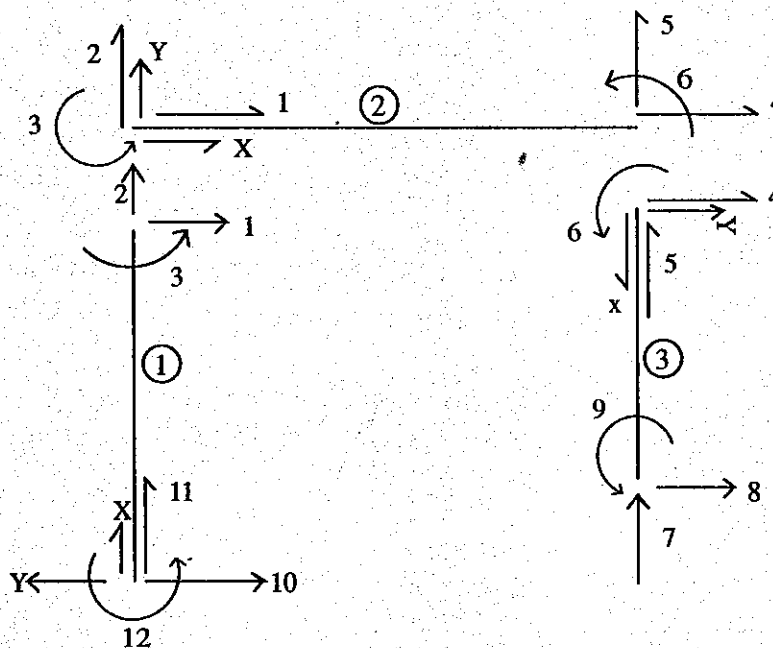
Encontrar la matriz de rigidez de la estructura que se presenta en la figura, considerando los datos que se presentan, para la resolución de este problema se tomará en consideración los pasos expuestos en la sección 3.4, obsérvese entonces:



- a) Se define primeramente el sistema de coordenadas global por simplicidad el eje X coincide con el suelo donde está ubicado el nudo 4, el eje Y se hace coincidir con los nudos 1 y 4, los grados de libertad restringida se dan en los nudos 3 y 4. Ahora los nudos 1 y 2 son los grados de libertad sin restricción, véase en la estructura como se denotan: (se sigue la numeración en el sentido de las agujas del reloj).



- b) Se define ahora el sistema de coordenadas del miembro para cada uno de los elementos del marco, observe que en un extremo de cada miembro se coloca el origen para el nuevo sistema de coordenadas.



Seguidamente se calcula la matriz de rigidez de cada uno de los miembros por lo tanto se tiene que:

Miembro ①

$$I = 2081.16 \text{ cm}^4 \quad A = 32.26 \text{ cm}^2 \quad L = 850 \text{ cm} \quad E = 2109.2087 \text{ ton/cm}^2$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 80.0507 & 0.0 & 0.0 & -80.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0858 & 36.4534 & 0.0 & -0.0858 & 36.4534 \\ 0.0 & 36.4534 & 20,656.9448 & 0.0 & -36.4534 & 10,328.4724 \\ -80.0507 & 0.0 & 0.0 & 80.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0858 & -36.4534 & 0.0 & 0.0858 & -36.4534 \\ 0.0 & 36.4534 & 10,328.4724 & 0.0 & -36.4534 & 20,656.9448 \end{bmatrix}$$

Miembro ②

$$I = 8324.62 \text{ cm}^4 \quad A = 90.32 \text{ cm}^2 \quad L = 915 \text{ cm} \quad E = 2109.2087 \text{ ton/cm}^2$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} 208.2008 & 0.0 & 0.0 & -208.2008 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2750 & 125.8326 & 0.0 & -0.2750 & 125.8326 \\ 0.0 & 125.8326 & 76,757.8620 & 0.0 & -125.8326 & 38,378.9310 \\ -208.2008 & 0.0 & 0.0 & 208.2008 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.2750 & -125.8326 & 0.0 & 0.2750 & -125.8326 \\ 0.0 & 125.8326 & 38,378.9310 & 0.0 & -125.8326 & 76,757.8620 \end{bmatrix}$$

Miembro (3)

$$I = 1456.81 \text{ cm}^4 \quad A = 32.26 \text{ cm}^2 \quad L = 550 \text{ cm} \quad E = 2109.2087 \text{ ton/cm}^2$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} 123.7147 & 0.0 & 0.0 & -123.7147 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2216 & 60.9464 & 0.0 & -0.2216 & 60.9464 \\ 0.0 & 60.9464 & 22,347.0278 & 0.0 & -60.9464 & 11,173.5139 \\ -123.7147 & 0.0 & 0.0 & 123.7147 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.2216 & -60.9464 & 0.0 & 0.2216 & -60.9464 \\ 0.0 & 60.9464 & 11,173.5139 & 0.0 & -60.9464 & 22,347.0278 \end{bmatrix}$$

c) Para armar la matriz de rotaciones para cada uno de los miembros únicamente se debe observar qué ángulo forma con respecto a la horizontal y luego evaluar la matriz hallada en la sección 3.2, por lo tanto se tiene que:

$$\text{Miembro (1)} \quad \theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta = 0 \\ \text{sen}\theta = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Miembro (2)} \quad \theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta = 1 \\ \text{sen}\theta = 0 \end{matrix}$$

$$\text{Miembro (3)} \quad \theta = 270^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \cos\theta = 0 \\ \text{sen}\theta = -1 \end{matrix}$$

$$[R] = \begin{matrix} \text{Miembro (1)} & \text{Miembro (2)} & \text{Miembro (3)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

d) Ahora se transformará cada una de las matrices de rigidez de los miembros al sistema de coordenadas de la estructura:

$$[k] = [R]^T [k'] [R]$$

De donde*

Miembro ①

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80.0507 & 0 & 0 & -80.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0858 & 36.4534 & 0.0 & -0.0858 & 36.4534 \\ 0.0 & 36.4534 & 20,656.9448 & 0.0 & -36.4534 & 10,328.4724 \\ -80.0507 & 0.0 & 0 & 80.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0858 & -36.4534 & 0.0 & 0.0858 & -36.4534 \\ 0.0 & 36.4534 & 10,328.4724 & 0.0 & -36.4534 & 20,656.9448 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Miembro ①

$$[k] = \begin{bmatrix} 0.0858 & 0.0 & -36.4534 & -0.0858 & 0.0 & -36.4534 \\ 0.0 & 80.0507 & 0.0 & 0.0 & -80.0507 & 0.0 \\ -36.4534 & 0.0 & 20,656.9448 & 36.4534 & 0.0 & 10,328.4724 \\ -0.0858 & 0.0 & 36.4534 & 0.0858 & 0.0 & 36.4534 \\ 0.0 & 80.0507 & 0.0 & 0.0 & 80.0507 & 0.0 \\ -36.4534 & 0.0 & 10,328.4724 & 36.4534 & 0.0 & 20,656.9448 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez transformadas de los miembros ② y ③, se calculan de la misma manera, y los resultados se dan en seguida (el lector deberá de corroborar los datos expuestos a continuación).

Miembro ②

$$[k] = \begin{bmatrix} 208.2008 & 0.0 & 0.0 & -208.2008 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2750 & 125.8326 & 0.0 & -0.2750 & 125.8326 \\ 0.0 & 125.8326 & 76,757.8620 & 0.0 & -125.8326 & 38,378.9310 \\ -208.2008 & 0.0 & 0 & 208.2008 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.2750 & -125.8326 & 0.0 & 0.2750 & -125.8326 \\ 0.0 & 125.8326 & 38,378.9310 & 0.0 & -125.8326 & 76,757.8620 \end{bmatrix}$$

Miembro 3

$$[k]= \begin{bmatrix} 0.2216 & 0.0 & 60.9464 & -0.2216 & 0.0 & 60.9464 \\ 0.0 & 123.7147 & 0.0 & 0.0 & -123.7147 & 0.0 \\ 60.9464 & 0.0 & 22,347.0278 & -60.9464 & 0.0 & 11,173.5139 \\ -0.2216 & 0.0 & -60.9464 & 0.2216 & 0.0 & -60.9464 \\ 0.0 & -123.7147 & 0.0 & 0.0 & 123.7147 & 0.0 \\ 60.9464 & 0.0 & 11,173.5139 & -60.9464 & 0.0 & 22,347.0278 \end{bmatrix}$$

e) Para la formación de la matriz de rigidez de la estructura, se deben colocar los números de los grados de libertad según el sistema global, en cada una de las matrices de rigidez del miembro en la parte de arriba y al lado izquierdo de cada una de ellas.

La intersección será un valor de la matriz de rigidez de la estructura y su posición corresponderá a la numeración que se ha colocado en las matrices de rigidez de miembro, para una mejor comprensión vease como se forma la matriz de rigidez de la estructura.

MIEMBRO ①

	10	11	12	1	2	3
10	0.0858					
11						
12						
1						
2						
3						

MIEMBRO ②

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

MIEMBRO ③

	4	5	6	8	7	9
4						
5						
6						
8						
7						
9						

La posición (1,1) Fila 1 Columna 1, del miembro ① tiene el valor igual a 0.0858 este valor se deberá colocar en la posición (10,10) de la matriz de rigidez de la estructura, y así sucesivamente con los demás componentes del miembro ①, también se deberá hacer el mismo procedimiento para los miembros ② y ③.

MATRIZ DE RIGIDEZ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	208.2008 0.0858	0.0 0.0	0.0 36.4534	-208.2008	0.0	0.0				-0.0858	0.0	36.4534
2	0.0 0.0	0.2750 80.0507	125.8326 0.0	0.0	-0.2750	125.8326				0.0	-80.0507	0.0
3	0.0 36.4534	125.8326 0.0	76757.86 20656.94	0.0	-125.8326	38378.93				-36.4534	0.0	10328.47
4	-208.2008	0.0	0.0	0.2216 208.2008	0.0 0.0	60.9464 0.0	0.0	-0.2216	60.9464			
5	0.0	-0.2750	-125.8326	0.0	123.7147 0.2750	0.0 -125.8326	-123.7147	0.0	0.0			
6	0.0	125.8326	38378.93	60.9464 0.0	0.0 -125.8326	22347.02 76757.86	0.0	-60.9464	11173.51			
7				0.0	-123.7147	0.0	123.7147	0.0	0.0			
8				-0.2216	0.0	-60.9464	0.0	0.2216	-60.9464			
9				60.9464	0.0	11173.51	0.0	-60.9464	22347.02			
10	-0.0858	0.0	-36.4534							0.0858	0.0	-36.4534
11	0.0	-80.0507	0.0							0.0	80.0507	0.0
12	36.4534	0.0	10328.47							-36.4534	0.0	20656.94

[K] =

Los lugares vacíos significan que en ellos ningún miembro contribuye a la rigidez. Toman un valor igual a cero. Los ceros se escriben cuando las contribuciones del miembro son cero. El que hayan dos números en un lugar significa que dos miembros contribuyen a la rigidez nodal, que se obtiene sumando los dos números.

La ordenación se divide de manera que los primeros seis renglones y columnas correspondan a los grados reales de libertad, teniendo restricciones las estructuras en sus apoyos. Los últimos seis renglones y columnas corresponden a los grados de libertad que están realmente restringidos.

3.7 Programa del método de rigidez en el Lenguaje Basic, para una calculadora Casio 850

```

5 PRINT "METODO DE RIGIDEZ"
10 INPUT "HAY DATOS"; F$: IF F$ = "SI" THEN 45
15 CLEAR: INPUT "NUMERO DE DEFORMACIONES"; D:M=D+1
16 DIM A(M,M), B(M,M)
20 IF D< 2 THEN PRINT "NO COMPUTABLE": END
30 FOR A=1 TO D: FOR B=1 TO D
35 PRINT "K(";A;",";B;")": INPUT A(A,B)
40 NEXT B,A
45 FOR A=1 TO D:PRINT "Q(";A;")";
50 INPUT A(A,M): NEXT A: IF F$ <> "SI" THEN 75
55 FOR A=1 TO D:B(A,0)=0:FOR B=1 TO D
60 B(A,0)=B(A,0) + B(A,B)*A(B,M)
65 NEXT B,A: FOR A=1 TO D
70 A(A,M) = B (A,0): NEXT A: GOTO 130
75 FOR A = 1 TO D:B(A,A) = 1: NEXT A
80 FOR B=1 TO D - 1: C=B: FOR A = B + 1 TO D
85 IF ABS(A(C,B)) < ABS (A(A,B)) THEN C = A
90 NEXT A: IF C = B THEN 110
95 FOR A=1 TO H:E=A(B,A): A(B,A)=A(C,A):A(C,A)=E
97 IF A=M THEN 105
100 E=B(B,A):B(B,A) = B(C,A): B(C,A) = E
105 NEXT A
110 FOR A=B+1 TO D: FOR C= 1 TO M
113 IF C< = B THEN 120
115 A(A,C) = A(A,C) - A(A,B) * A (B,C)/A(B,B)
120 B(A,C) = B(A,C) - A(A,B) * B(B,C)/A(B,B)
125 NEXT C,A,B
130 IF A(D,D) = 0 THEN PRINT "NO HAY SOLUCION": END
135 A(D,0) = A(D,M)/A(D,D)
140 FOR A = D-1 TO 1 STEP -1: C=0
145 FOR B = A+1 TO D:C = C + A (A,B) * A (B,0): NEXT B
150 A(A,0) = (A(A,M) - C) / A (A,A): NEXT A
155 FOR A = 1 TO D: PRINT "D";A;"=";A(A,0): NEXT A
160 INPUT "CALCULAR REACCIONES (SI/NO)";F$: IF F$ = "SI" THEN 190
170 INPUT "CALCULAR DEFORMACIONES (SI/NO)"; F$: IF F$ = "SI" THEN 10
180 PRINT "TERMINO SECCION DE TRABAJO": END
190 PRINT "CALCULO DE REACCIONES"

```

```

200 INPUT "LONGITUD DE MIEMBRO (L)";L
210 INPUT "MODULO DE RIGIDEZ (EI)";E
220 INPUT "MOMENTO FIJO EN A (MFa)";A
230 INPUT "MOMENTO FIJO EN B (MFb)";B
240 INPUT "CORTE FIJO EN A (VFa)";C
250 INPUT "CORTE FIJO EN B (VFb)";V
260 INPUT "No. GIRO EN A";F : IF F <> 0 THEN F = A (F,0)
270 INPUT "No. GIRO EN B";G : IF G <> 0 THEN G = A (G,0)
280 INPUT "No. DE DEF. TRASLACIONAL EN A";H
290 INPUT "No. DE DEF. TRASLACIONAL EN B";I
300 X=1: INPUT "LOS CORTES COINCIDEN CON SUS TRASLACIONES";Z$
310 IF Z$ = "NO" THEN X = -1
320 IF H <> 0 THEN H = X * A (H,0)
330 IF I <> 0 THEN I = X * A (I,0)
340 A = A + 4 * E * F / L + 6 * E * H / L ^ 2 + 2 * E * G / L - 6 * E * I / L ^ 2
350 B = B + 2 * E * F / L + 6 * E * H / L ^ 2 + 4 * E * G / L - 6 * E * I / L ^ 2
360 C = C + 6 * E * F / L ^ 2 + 12 * E * H / L ^ 3 + 6 * E * G / L ^ 2 - 12 * E * I / L ^ 3
370 V = V - 6 * E * F / L ^ 2 - 12 * E * H / L ^ 3 - 6 * E * G / L ^ 2 + 12 * E * I / L ^ 3
380 PRINT "Ma = ";A: PRINT "Mb = ";B
390 PRINT "Va = ";C: PRINT "Vb = ";V
400 INPUT "CALCULAR OTRO ELEMENTO"; Z$: IF Z$ = "SI" THEN 190
430 INPUT "CALCULAR OTRA CONDICION DE CARGA"; Z$ : IF Z$ = " SI" THEN 10
440 PRINT "EL PROGRAMA TERMINO"

```


CAPITULO 4
METODOS DE CALCULO DE REACCIONES
EN ESTRUCTURAS FIJAS

4.1 Método Area-Momento

Este método, se basa en la relación entre el momento y la curvatura, proporciona medios prácticos y eficientes, para calcular la pendiente y la deflexión de la curva elástica de las vigas y de los marcos. El método tiene dos teoremas: uno que relaciona la curvatura con la pendiente de la misma, y el otro que relaciona la curvatura con la deflexión. Ambos teoremas son desarrollados en forma analítica.

En la figura 12.a, AB se muestra una parte de la elástica de una viga sometida a cargas. Se tiene que ρ representa el radio de curvatura de este elemento y el momento flector por M , del estudio de Resistencia de Materiales se tiene que:

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (4.1)$$

Donde

E = Módulo de elasticidad del material

I = Momento de inercia de la sección respecto a su eje neutro

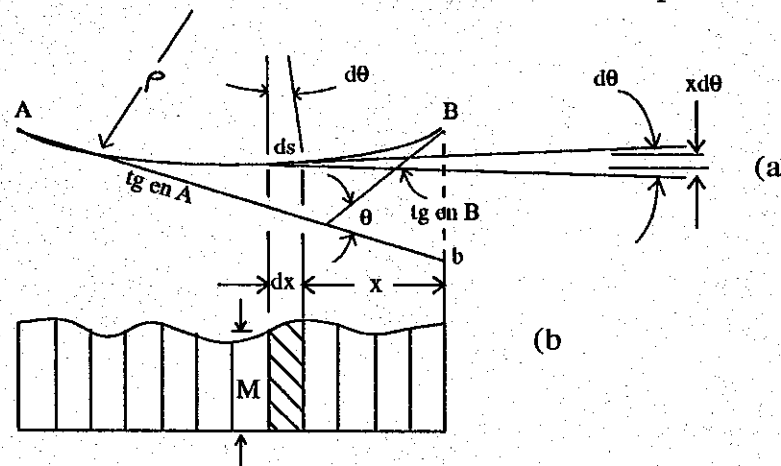


Fig. 12 Diagrama area de momento

La figura 12.b, inmediatamente debajo de AB representa el diagrama de momentos flectores correspondiente a la longitud AB de la viga.

El elemento de longitud ds , subtendiendo un ángulo $d\theta$, medido respecto al centro de curvatura del elemento ds , como se ve en la figura, es evidente que $ds = \rho d\theta$, de donde $\rho = ds/d\theta$, sustituyendo la ecuación (4.1) se tiene que:

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

Como sólo se consideran deformaciones laterales muy pequeñas, se sustituye ds por su proyección horizontal dx , por lo que

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

Este ángulo $d\theta$, puede considerarse también como el ángulo entre las tangentes a la elástica, en los extremos del elemento de longitud ds como puede verse, ya que los lados de esos dos ángulos son perpendiculares. Ahora puede hallarse el ángulo θ dentro las tangentes, la elástica en los puntos A y B sumando todos esos ángulos $d\theta$, esto es

$$\theta = \int d\theta = \int_A^B \frac{M dx}{EI}$$

Es el llamado primer teorema del área de momentos, que se enuncia de la siguiente forma:

Teorema 1:

El área bajo el diagrama de momentos entre los puntos A y B, de una curva elástica, es igual al cambio en la pendiente entre los puntos A y B.

Se observa que el diagrama de curvatura está dado por M/EI . En virtud de que tanto M como EI pueden variar sobre la longitud, es posible utilizar este teorema para vigas con EI variables.

En cualquier caso la validez de este teorema se deriva del hecho de que es posible determinar en forma directa el cambio en la pendiente encontrando áreas bajo los diagramas de curvatura, ya sea exacta o aproximadamente, en caso de que la curva se vuelva extremadamente complicada.

Una vez que se tiene un método para calcular el cambio de pendiente entre las tangentes en dos puntos de la elástica, es fácil desarrollar un procedimiento para calcular distancias verticales entre las tangentes. En una distancia dx , el eje neutro cambia de dirección en una magnitud $d\theta$. La deflexión de un punto sobre la viga con respecto a la tangente en otro punto debido a este cambio angular, es igual a x (la distancia del punto cuya deflexión se busca a la distancia diferencial particular) por $d\theta$

$$d\delta = x d\theta$$

El valor de $d\theta$ obtenido con el primer teorema se sustituye en esta expresión:

$$d\delta = \frac{x M dx}{EI} = \frac{M x dx}{EI}$$

Para determinar la deflexión total desde la tangente en un punto A hasta la tangente en otro punto B sobre la viga, se necesita determinar la suma de los productos de cada ángulo $d\theta$ (entre A y B) por la distancia al punto donde se busca la deflexión. Lo anterior constituye un enunciado del segundo teorema del área del diagrama de momentos flexionantes.

$$\delta_{AB} = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx$$

Encontrándose así el segundo teorema el área de momentos:

Teorema 2:

La deflexión de una tangente a la curva elástica de una viga con respecto a una tangente en otro punto, es igual al momento del diagrama M/EI entre los dos puntos; respecto al punto donde se busca la deflexión.

4.2 Método de la viga conjugada

El método de la viga conjugada está basado en una analogía que puede establecerse entre las operaciones realizadas para calcular los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante a partir de los diagramas de carga y las operaciones necesarias para calcular las pendientes y desplazamientos de una viga a partir de los diagramas de curvatura. Para ilustrar la analogía primero considérense las ecuaciones diferenciales fundamentales de la flexión de vigas y las derivadas sucesivas.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{w}{EI} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{V}{EI} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = \theta = \text{rotación} \\ y = \text{desplazamiento} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} = w \\ \frac{dM}{dx} = V \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \end{array}$$

Empezando con la diferencial de cuarto orden, se integra la función de carga para obtener la función de la fuerza cortante y se integra la función de la fuerza cortante para obtener la función del momento. Integrando dos veces ésta se obtiene, de manera consecutiva, la rotación y el desplazamiento de la viga. Ahora si se piensa en el diagrama de M/EI como un diagrama de carga, entonces los procedimientos que se han desarrollado para encontrar la fuerza cortante y los momentos en una viga también producirán las rotaciones y los desplazamientos.

Para utilizar esta analogía, se coloca el diagrama M/EI en lo que se denomina la viga conjugada. De esta manera se pueden utilizar los procedimientos usuales para encontrar la fuerza cortante y el momento en una viga. Ya que la fuerza cortante es obtenida por una integración de la carga (sobre la viga conjugada), éste es ahora equivalente a la pendiente (es decir, a una integración de $M/EI = \partial\theta/\partial x$). La segunda integración produce el momento en la viga conjugada, que ahora es equivalente al desplazamiento.

Estas ideas son resumidas a continuación:

- 4.2.1 Determinar el diagrama M/EI para la viga real.
- 4.2.2 Colocar el diagrama M/EI como una carga sobre la viga conjugada.
- 4.2.3 Calcular la fuerza cortante en la viga conjugada:
fuerza cortante en la viga conjugada = rotación de la viga real.
- 4.2.4 Calcular el momento en la viga conjugada:
Momento en la viga conjugada = desplazamiento de la viga real.

Las cargas y las propiedades de la viga real no tienen efecto en la forma cómo esté apoyada la viga conjugada. Los únicos factores que afectan a los apoyos de la viga imaginaria son los apoyos de la viga real. Las longitudes de las dos vigas son iguales.

La viga conjugada debe tener soportes que permitan que las acciones análogas adecuadas sucedan, por lo tanto se tiene que: para las diversas condiciones de apoyo que deben emplearse y se pueda aplicar el método, se debe analizar lo siguiente:

Extremo Libre

El extremo libre de una viga, rota y se desplaza cuando la viga se carga. La viga conjugada debe tener fuerza cortante y momento flexionante en ese extremo cuando se carga con el diagrama de M/EI . El único tipo de apoyo que es capaz de proporcionar fuerza cortante y momento flexionante, es el empotramiento. Un extremo libre en la viga real, se convierte en uno empotrado en la viga conjugada.

Empotramiento

Se puede elaborar una misma explicación similar en sentido inverso para el caso de un empotramiento. Ni pendiente ni deflexión pueden ocurrir en un empotramiento, por lo que en ese punto de la viga conjugada no debe tenerse ni fuerza cortante ni momento flexionante. Un empotramiento en la viga real se convierte en un extremo libre en la viga conjugada.

Apoyo simple de extremo

En apoyos de este tipo, el extremo de la viga se rota, pero no se desplaza cuando se carga la viga. En la viga imaginaria habrá fuerza cortante, pero no flexionante en ese punto, situación que sólo se presenta en un apoyo simple. Un extremo simplemente apoyado en la viga real permanece igual en la viga conjugada.

Apoyo simple interior.

No existe deflexión en un apoyo simple interior ni en un extremo simplemente apoyado. Cuando la viga se carga, en ambos hay rotación, pero las situaciones son un poco distintas. La rotación en apoyo simple interior es continua a través de éste, es decir, no se produce cambio brusco de pendiente.

Este efecto no se presenta en un extremo con apoyo simple, donde repentinamente cambia la pendiente. Si en un apoyo simple interior no existen cambios de pendiente, no puede haber variación de la fuerza cortante en el apoyo correspondiente en la viga conjugada.

Cualquier tipo de apoyo externo en ese tipo originaría un cambio en la fuerza cortante por tanto, ahí es necesaria una articulación interna libre. Un apoyo simple interior en la viga real se convierte en una articulación interior libre en la viga conjugada.

Articulación interna libre

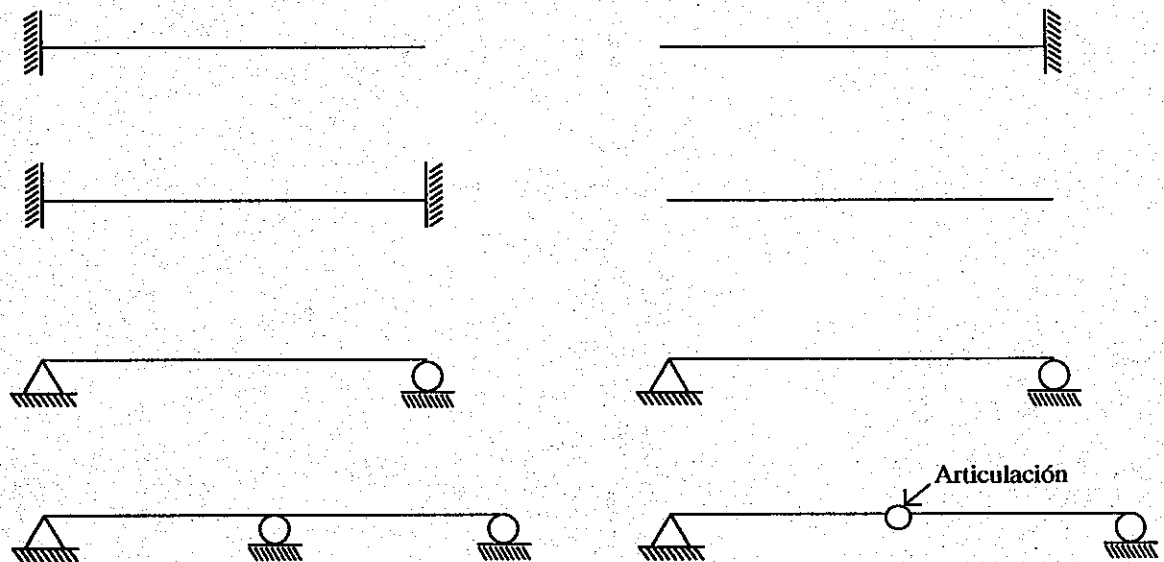
En una articulación interna libre existe tanto pendiente como deflexión, lo cual implica que el apoyo correspondiente en la viga conjugada también debe tener fuerza cortante y momento flexionante. Una articulación interna libre en la viga real se convierte en un apoyo simple en la viga conjugada.

Equilibrio

Las reacciones, los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes de la viga conjugada se calculan fácilmente por estática, ya que tal viga siempre es estáticamente determinada, aún cuando la viga real pueda ser hiperestática. Algunas veces la viga conjugada puede aparecer como completamente inestable.

El ejemplo más notorio es la viga conjugada para una viga doblemente empotrada, que no tiene ningún tipo de apoyo. Al observar con más detalle las áreas del diagrama M/EI , se ve que estas áreas están equilibradas con tanta precisión entre las cargas hacia abajo y hacia arriba (áreas positivas y negativas, respectivamente) que no necesita ningún apoyo.

Cualquier apoyo que pudiera parecer necesario tendría reacciones nulas, y se proporcionarían fuerzas cortantes y momentos flexionantes adecuados para coincidir con las verdaderas pendientes y deflexiones, aún una viga real continua sobre varios apoyos simples, tiene una viga conjugada con apoyos simples en sus extremos. Véase en la fig. 13 los casos expuestos anteriormente comparados con las vigas reales.



VIGA REAL

VIGA CONJUGADA

Fig. 13 Comparación entre viga real y conjugada

4.3 Método general para calcular momentos fijos (momentos de sujeción = MF)

Para cualquier condición de carga ver la figura 14 en la que se presentan los momentos de sujeción de ambos extremos de la viga a analizar

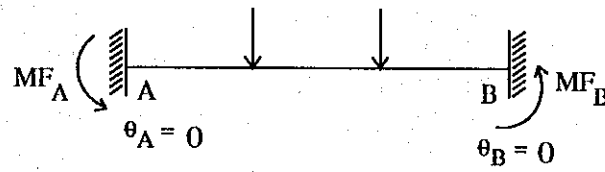
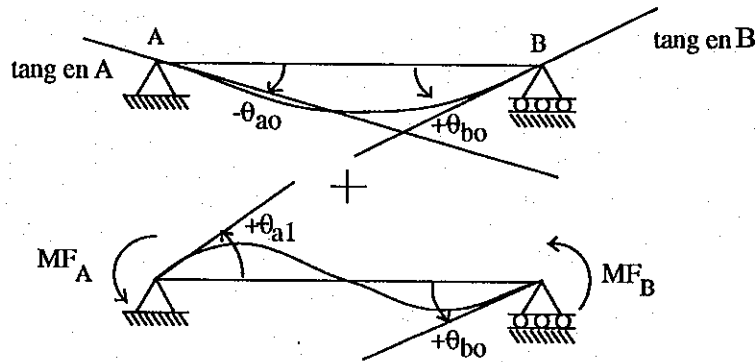


Fig. 14 Viga sujeta a cargas

Aplicando el principio de superposición a la viga se obtienen las siguientes vigas simplemente apoyadas.



$$\Sigma \theta_A = 0$$

$$\theta_A = -\theta_{a0} + \theta_{a1} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\Sigma \theta_B = 0$$

$$\theta_B = -\theta_{b0} + \theta_{b1} = 0 \quad (4.3.2)$$

Del segundo teorema del método area momento:

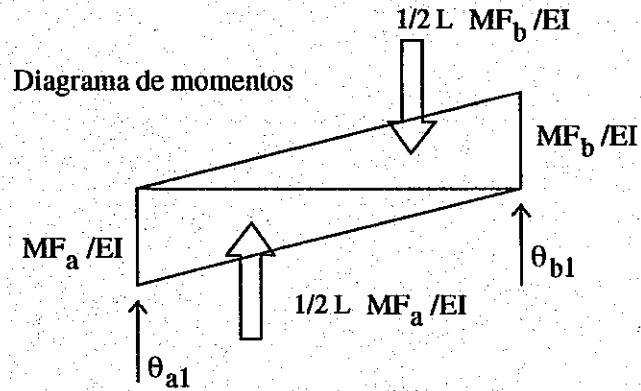
$$\delta_{AB} = \int_A^B \frac{Mx}{EI} dx$$

Si $Q = M\bar{x} =$ Momento estático del diagrama de momentos.

$$\theta_{a0} = -\frac{Q_b}{EI \cdot L}$$

$$\theta_{b0} = \frac{Q_a}{EI \cdot L}$$

Aplicando la definición de viga conjugada a la viga que se está analizando se tiene que:



Resolviendo se tiene que:

$$\theta_{a1} = 1/3 (1/2 L MF_b/EI) - 2/3 (1/2 L MF_a/EI)$$

$$\theta_{a1} = -1/3 (MF_a L/EI) + 1/6 (MF_b L/EI)$$

$$\theta_{b1} = 2/3 (1/2 L MF_b/EI) - 1/3 (1/2 L MF_a/EI)$$

$$\theta_{b1} = -1/6 (MF_a L/EI) + 1/3 (MF_b L/EI)$$

De la ecuación (4.3.1)

$$-Q_b/(EIL) - 1/3 (MF_a L/EI) + 1/6 (MF_b L/EI) = 0$$

De la ecuación (4.3.2)

$$Q_a/(EIL) + 1/3 (MF_b L/EI) - 1/6 (MF_a L/EI) = 0$$

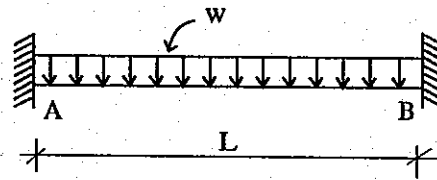
Realizando las sustituciones del caso:

$$MF_a = 2/L^2 (2Q_b - Q_a) \quad (4.3.3)$$

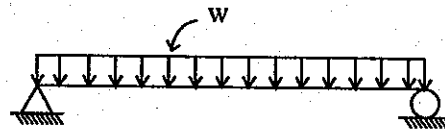
$$-MF_b = -2/L^2 (2Q_a - Q_b) \quad (4.3.4)$$

4.4 Ejemplos

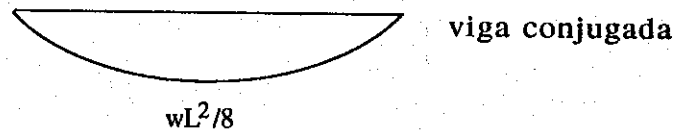
4.4.1 Hallar las reacciones de la siguiente viga:



Se aplica el principio de superposición, en el que se obtiene la viga simplemente apoyada:



Se obtiene el diagrama de momentos de la viga simplemente apoyada:



De la definición del método de área de momentos, se encuentra el momento estático:

$$Q_a = Q_b = \frac{2}{3}L \cdot \frac{wL^2}{8} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.4):

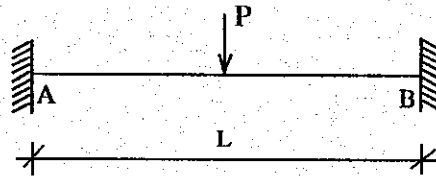
$$MF_a = \frac{2}{L^2} \left(\frac{wL^4}{24}\right) = \frac{wL^2}{12}$$

$$MF_b = \frac{2}{L^2} \left(-\frac{wL^4}{24}\right) = -\frac{wL^2}{12}$$

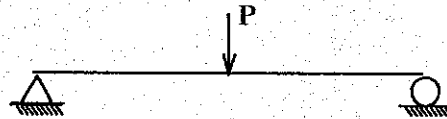
Las reacciones se obtienen fácilmente aplicando ecuaciones de estática, de donde:

$$R_A = wL/2 \quad \text{y} \quad R_B = wL/2$$

4.4.2 Hallar las reacciones de la siguiente viga:



Aplicando el principio de superposición se obtiene:



El diagrama de momentos de la viga es el siguiente:



viga conjugada

De la definición del método de área de momentos se encuentra el momento estático

$$Q_a = Q_b = \frac{1}{2} (L) \frac{PL}{4} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{16}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.4):

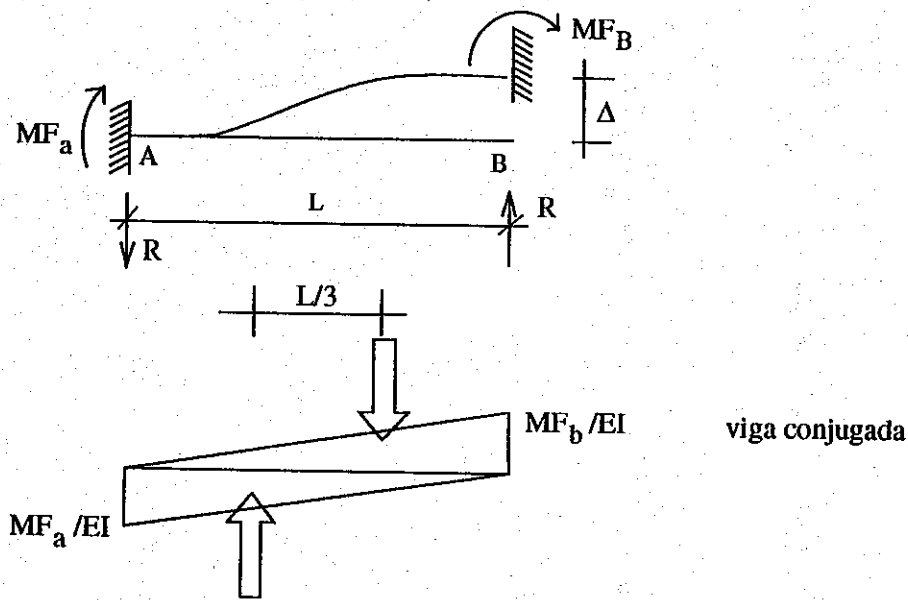
$$MF_a = \frac{2L}{L^2} \left(\frac{PL^3}{16}\right) = \frac{PL}{8}$$

$$MF_b = \frac{2L}{L^2} \left(-\frac{PL^3}{16}\right) = -\frac{PL}{8}$$

Las reacciones se obtienen fácilmente aplicando ecuaciones de estática, de donde:

$$R_A = P/2 \quad \text{y} \quad R_B = P/2$$

4.4.3 Hallar las reacciones de la viga que sufre un desplazamiento vertical:



Recuerde que el momento en la viga conjugada es un desplazamiento en la viga real.

Suponiendo que: $MF_a = MF_b = MF$

Aplicando la definición de área-momento se tiene que:

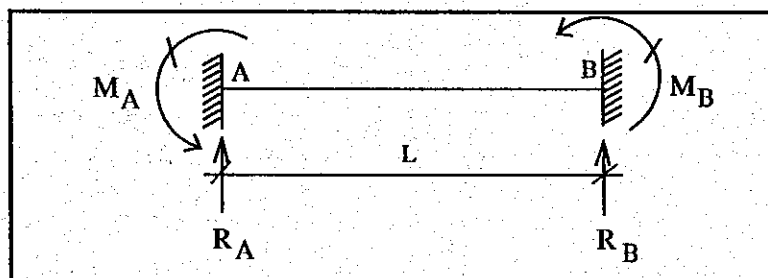
$$\Delta = L/3 (1/2(MF L/EI)) \Rightarrow MF = 6EI/L^2 \Delta$$

Por estática se tiene:

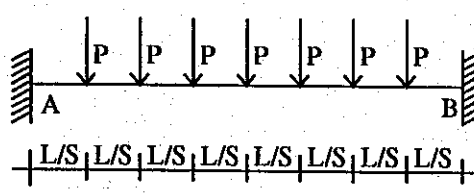
$$R = 12EI/L^3 \Delta$$

4.5 Acciones de empotramiento

4.5.1 Acciones de empotramiento producidas por cargas



6

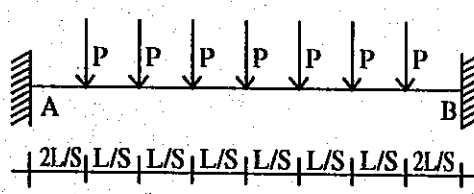


$$M_A = -M_B = PL(S^2-1)/(12S)$$

$$R_A = R_B = \sum_1^{S-1} (S)P/S, \text{ si } S \text{ es par y } L/S \geq 1/2$$

$$R_A = R_B = P(S-1)/2, \text{ si } S \text{ es impar y } L/S \geq 1/3$$

7

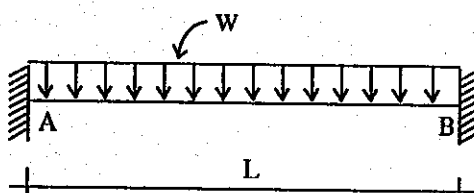


$$M_A = -M_B = PL(2S^2+1)/(24S)$$

$$R_A = R_B = \sum_1^{S-1} (S-S+1)P/S, \text{ si } S \text{ es par y } L/S \geq 1/4$$

$$R_A = R_B = P(S-1), \text{ si } S \text{ es impar y } L/S \geq 1/5$$

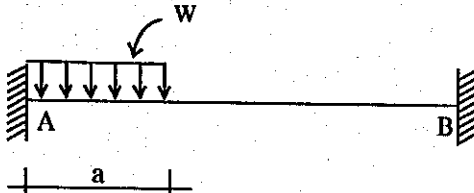
8



$$M_A = -M_B = wL^2/12$$

$$R_A = R_B = wL/2$$

9



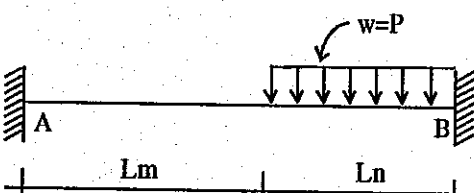
$$M_A = wa^2(6L^2 - 8aL + 3a^2)/(12L^2)$$

$$M_B = -wa^3(4L - 3a)/(12L^2)$$

$$R_A = wa(2L^3 - 2a^2L + a^3)/(2L^3)$$

$$R_B = wa^3(2L - a)/(2L^3)$$

10



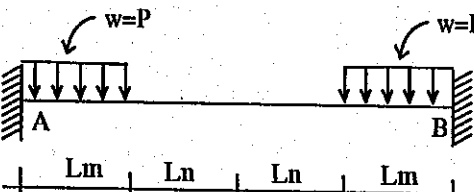
$$M_A = PL^2 n^3(4-3n)/12$$

$$M_B = -PL^2 n^2(6-8n+3n^2)/12$$

$$R_A = PL^2/2 (2 - 2n + n^2)$$

$$R_B = PL(n - n^2 + n^3 - n^4/2)$$

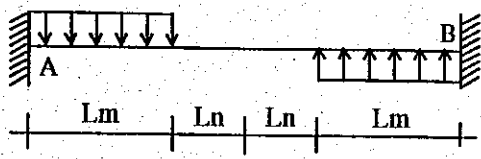
11



$$M_A = -M_B = PL^2 m^2 (1 + n)/3$$

$$R_A = R_B = wLm$$

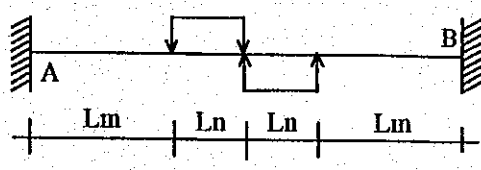
12



$$M_A = M_B = PL^2 m^2 (2n + m^2)/2$$

$$-R_A = R_B = PLm (m^2 - 2m^2Ln - Lm^4 - 1)$$

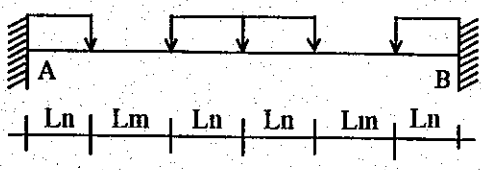
13



$$M_A = M_B = PL^2 n^2 (1 - 2n^2)/4$$

$$-R_A = R_B = PLn^2 (n^2 - 3/2)$$

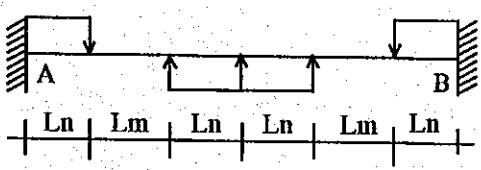
14



$$M_A = -M_B = PL^2 n(3 + 6n - 8n^2)/12$$

$$R_A = R_B = 2PLn$$

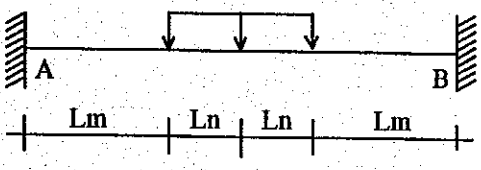
15



$$-M_A = M_B = PL^2 n(1 - 2n)/4$$

$$R_A = R_B = 0$$

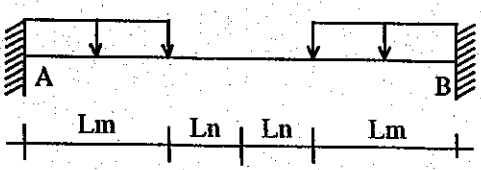
16



$$M_A = -M_B = PL^2 n(3 - 4n^2)/12$$

$$R_A = R_B = PLn$$

17



$$M_A = M_B = PL^2 m^2 (2n + m^2)/2$$

$$R_A = -R_B = PLm (m - 1 - 2mn - m^3)$$

18

$$M_A = wL^2/30 \quad R_A = 3wL/20$$

$$M_B = -wL^2/20 \quad R_B = 7wL/20$$

19

$$M_A = PL^2n^3(5-4n)/20$$

$$M_B = -PL^2n^2(10-15n+6n^2)/30$$

$$R_A = PLn/20 (10 + 15n^2 - 10n - 8n^3 - 10m)$$

$$R_B = -PLn/20 (15n^2 - 10n - 8n^3 - 10m)$$

20

$$M_A = PL^2n^3(5-3n)/60$$

$$M_B = -PL^2n^2(10 - 10n + 3n^2)/60$$

$$R_A = -PLn/20 (10m + 10n + 2n^3 - 5n^2 - 10)$$

$$R_B = PLn/20 (10m + 10n + 2n^3 - 5n^2)$$

21

$$M_A = PL^2m^2(2-m)/12$$

$$M_B = -PL^2m^2(2-m)/12$$

$$R_A = R_B = PLm/2$$

22

$$M_A = M_B = PL^2n^2(5-6n^2)/60$$

$$R_A = -R_B = -PLn(30n + 20n^2 - 15 + 12n^3)/60$$

23

$$M_A = -M_B = PL^2n(3-2n^2)/24$$

$$R_A = R_B = PLn/2$$

24

$$M_A = PL^2 (5 + 2a)/60$$

$$M_B = -PL^2 (5 - 3a)/60$$

$$R_A = PL (1/2 + 1/6a)$$

$$R_B = PL (1/2 + 1/3a)$$

25

$$M_A = PL^2 (1 - 2m^2 + m^3)/12$$

$$M_B = -PL^2 (1 - 2m^2 + m^3)/12$$

$$R_A = R_B = PL (m + 2n)/2$$

26

$$M_A = -M_B = PL^2 (2/\pi^3)$$

$$R_A = R_B = PL/\pi$$

27

$$M_A = M_B = PL^2 (3/4\pi^3)$$

$$R_A = -R_B = PL (\pi^2 + 3)/(2\pi^3)$$

28

$$M_A = -M_B = PL^2 (2/27\pi^3)$$

$$R_A = R_B = PL/(2\pi)$$

29

Para S par: $M_A = M_B = PL^2 (6/S^3\pi^3)$

Para S impar: $M_A = -M_B = PL^2 (2/S^3\pi^3)$

Para S par: $R_B = -R_A = PL / (S^2 2\pi) \left[\sum_{i=1}^{S/2} (4S-3) - \sum_{i=1}^{S/2} (4S-1) - 12/(S\pi^2) \right]$

Para S impar: $R_B = PL / (\pi S^2) \left[\sum_{i=1}^{(S+1)/2} (4S-3) - \sum_{i=1}^{(S-1)/2} (4S-1) \right]$ $R_A = 2PL / (S\pi) - R_B$

30

Parábola de K°

$M_A = -M_B = \frac{PL^2 K(K+4)}{[12(K+1)(K+3)]}$
 $R_A = R_B = \frac{KPL}{2(K+1)}$

31

Parábola de K°

$M_A = -M_B = \frac{PL^2}{4(K+1)(K+3)}$
 $R_A = R_B = \frac{PL}{K+1}$

32

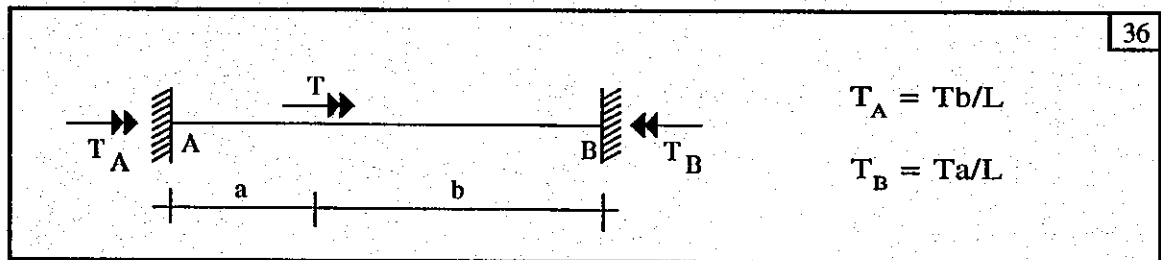
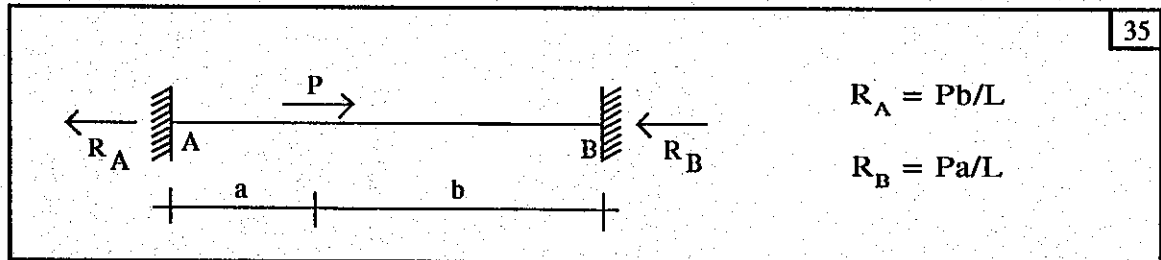
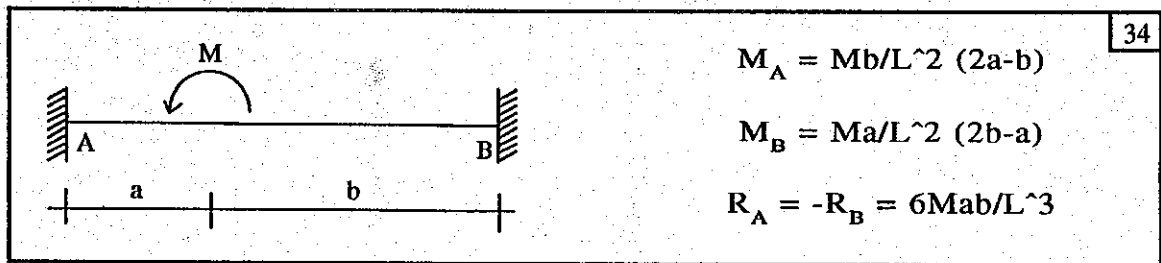
Parábola de K°

$M_A = \frac{2PL^2}{[(K+2)(K+3)(K+4)]}$
 $M_B = -\frac{PL^2}{[(K+3)(K+4)]}$
 $R_B = PL \left[\frac{4(K+2)(K+1) - 8(K+1) + 3(K+3)(K+2)(K+4)}{4(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)} \right]$
 $R_A = \frac{PL}{K+1} - R_B$

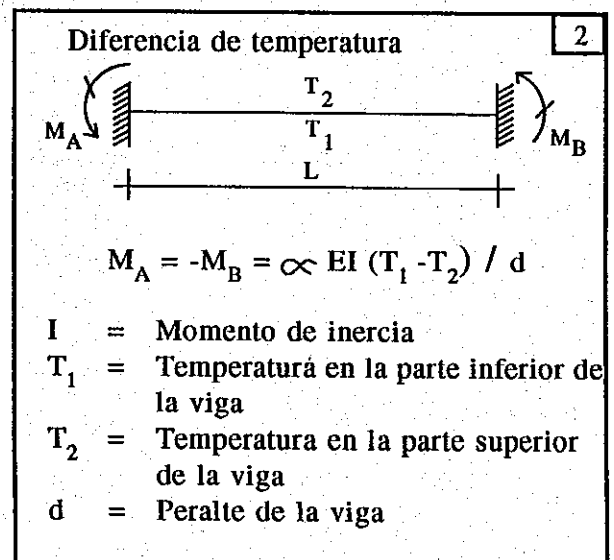
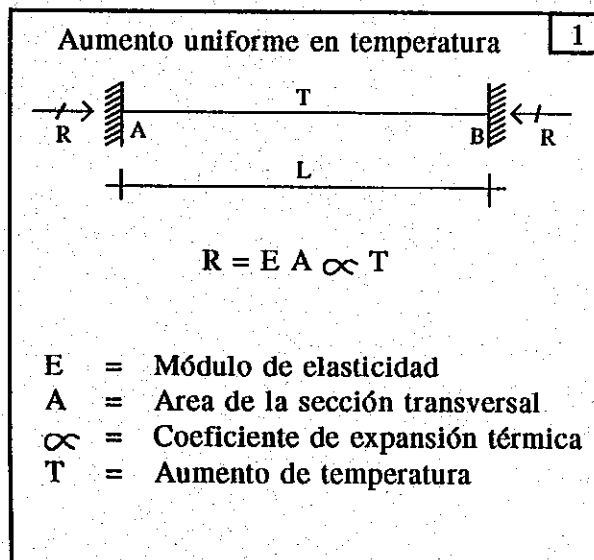
33

Parábola de K°

$M_A = \frac{2PL^2 n^3(K+4 - 3n)}{[(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)]}$
 $M_B = -PL n^2 \left[\frac{(K+4)(K+3+4n) + 6n^2}{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)} \right]$
 $R_B = \frac{PL}{(K+1)} \left[\frac{(m+3/4n)}{(m+n)} - \frac{n^2[2n(K+4-3n) - (K+4)(K+3+4n+6n^2)]}{(K+2)(K+3)(K+4)} \right]$
 $R_A = \frac{PL}{K+1} - R_B$



4.5.2 Acciones de empotramiento producidas por cambios de temperatura



4.5.3 Acciones de empotramiento producidas por deformaciones previas

1

Barra con exceso de longitud

$R = E A e / L$

E = Módulo de elasticidad
 A = Área de la sección transversal
 e = Exceso de longitud

2

Barra con quiebre

$M_A = 2EI \theta / L^2 (2L - 3a) \quad M_B = 2EI \theta / L^2 (L - 3a)$

$R_A = -R_B = 6EI \theta / L^3 (L - 2a)$

I = Momento de inercia
 θ = Angulo del quiebre

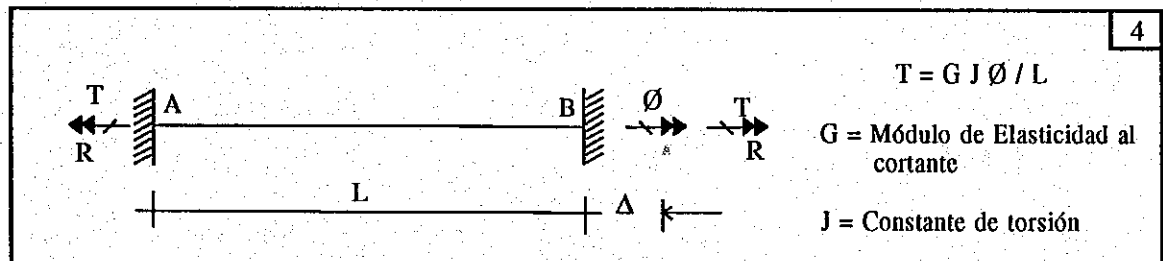
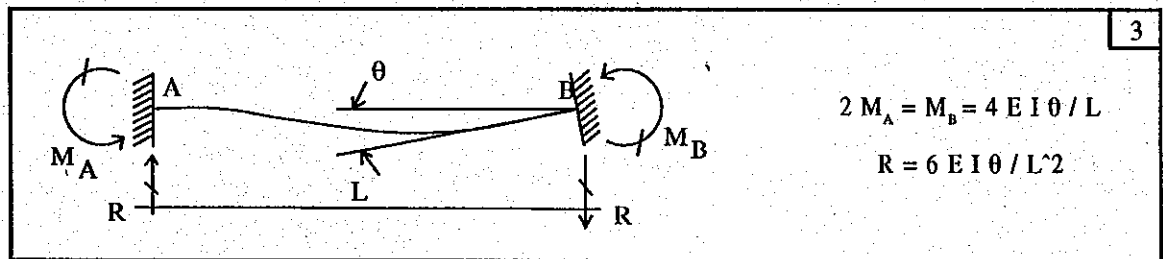
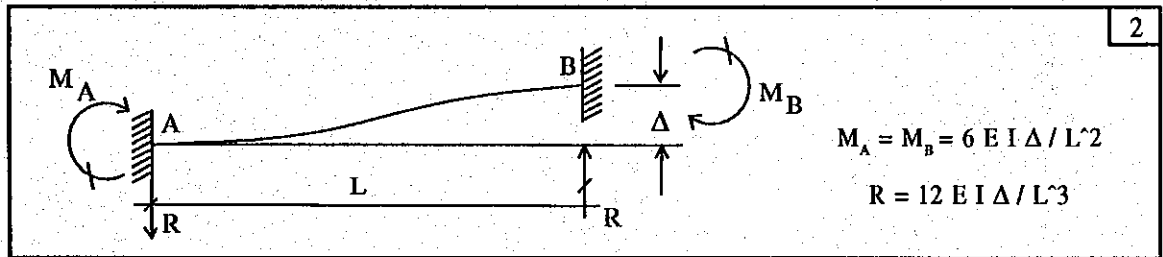
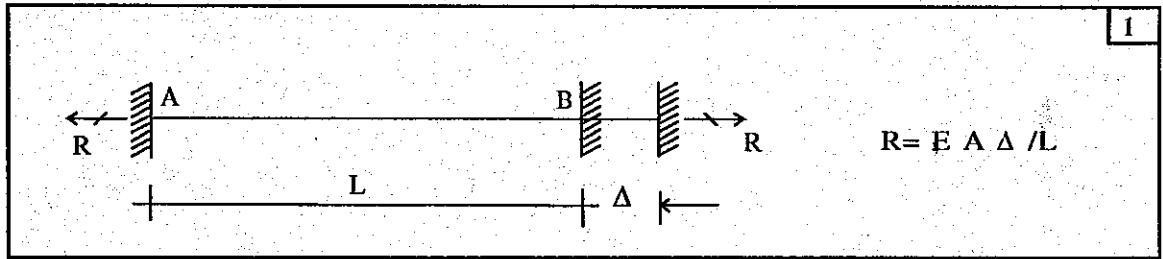
3

Curvatura circular inicial

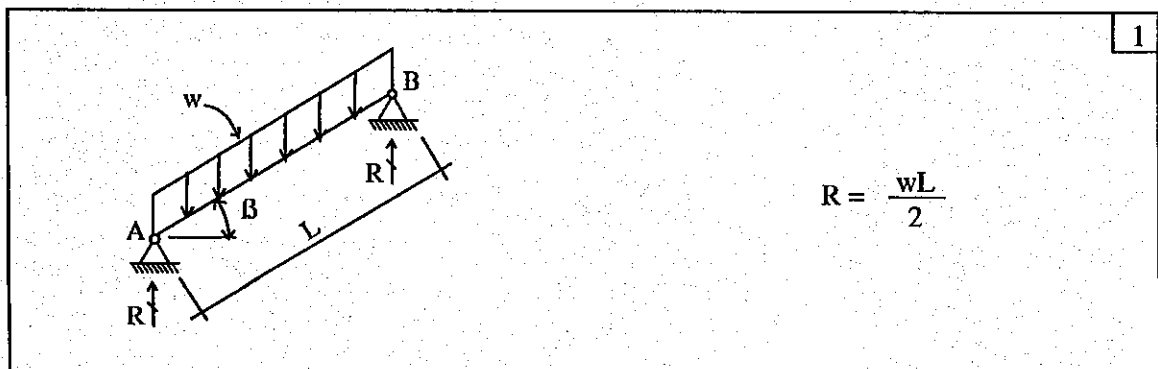
$M_A = -M_B = 8EI e / L^2$

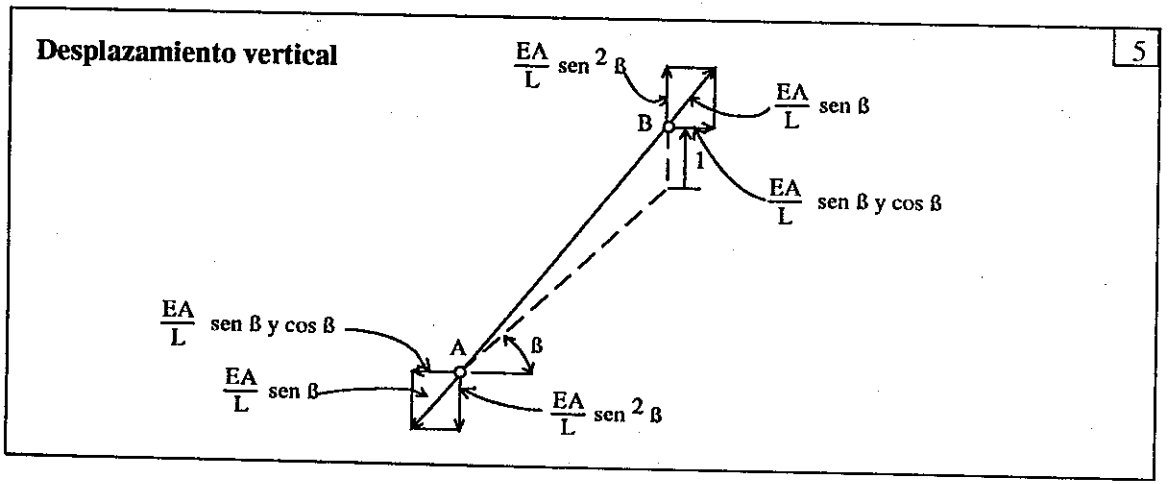
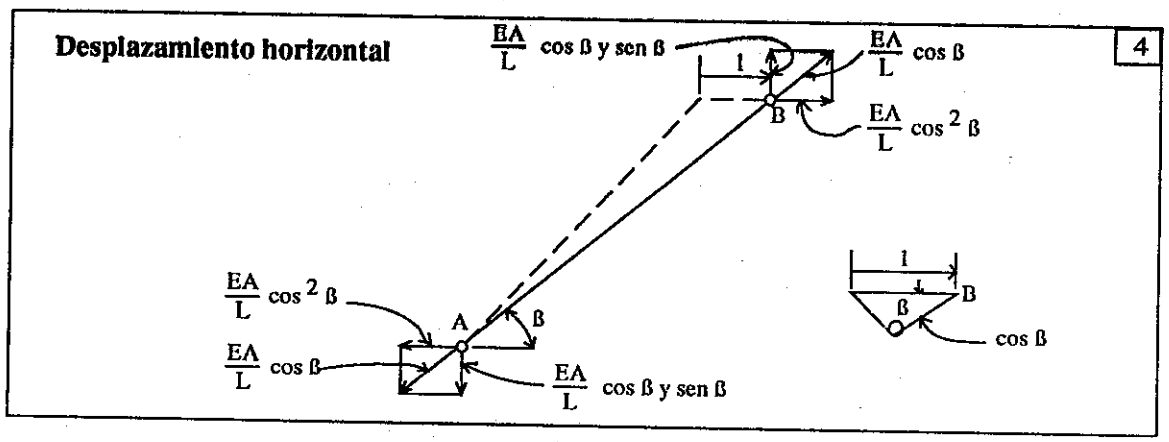
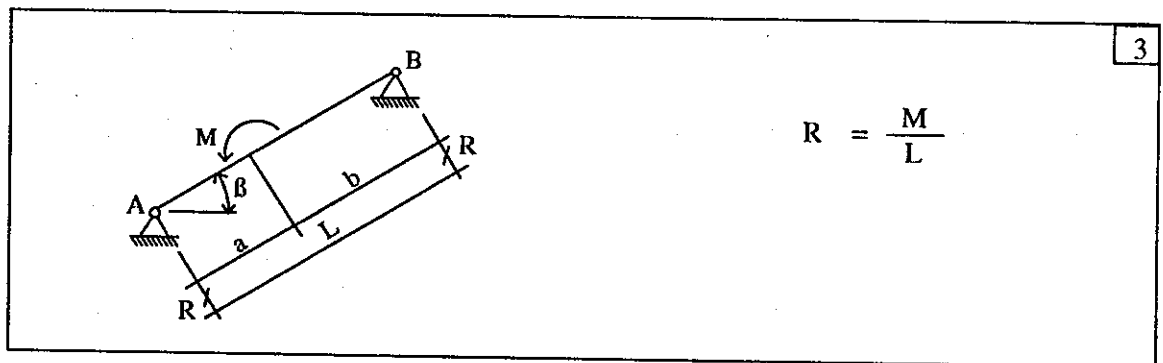
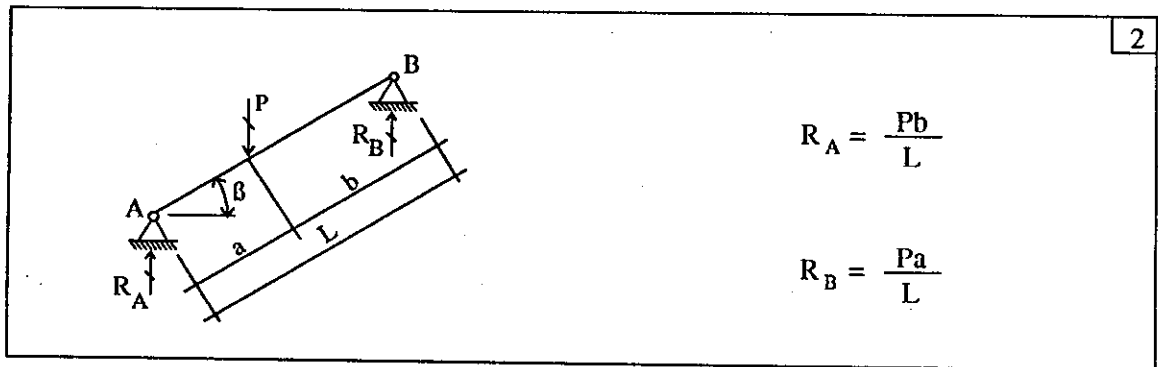
e = Deflexión inicial en el centro de la barra

4.5.4 Acciones de empotramiento producidas por desplazamientos de extremo



4.6 Acciones de extremo para miembros de armaduras





CONCLUSIONES

1. Al observar qué tipo de estructura se va a analizar, el analista puede ver cuáles son los esfuerzos predominantes en la estructura, con lo cual definir la cantidad de desplazamientos o grados de libertad que existen y con ello saber de antemano cuántas filas y columnas tendrá la matriz de rigidez fundamental en el método de rigidez.
2. El Método de Rigidez básico no se adapta para el análisis de estructuras de gran envergadura para elaborarlo a mano; tanto en teoría como en aplicación; sin embargo, el método directo de las rigideces es posible formularlo en términos de algoritmos sencillos, aplicables a una gran variedad de estructuras, requiriéndose para el mismo la disponibilidad de una computadora.
3. Se concluye que una de las ventajas que presenta el planteamiento matricial, es que cualquier número de cargas se pueden considerar fácilmente, una vez calculada la matriz de rigidez.
4. El Método de Cross en su resolución para esfuerzos a flexión utiliza procedimientos iterativos, pero cuando es necesario analizar esfuerzos debido a ladeo se requiere el uso de un sistema de ecuaciones para resolverlo, complicándose así el método, por lo que es difícil adaptarlo a un programa de computación.
5. El Método de Kani utiliza procedimientos iterativos para su solución, pero tiene una gran desventaja para adaptarlo a un programa de computación, debido que al analizar miembros inclinados ya no resulta ser tan sencillo como el Método de Rigidez.
6. Con el advenimiento de las computadoras, el Método de Rigidez se adapta mucho mejor que cualquier otro método de análisis al uso de la computadora, de ahí que sea el método más usado en la actualidad.

RECOMENDACIONES

1. Se hace necesario que el laboratorio de este curso tenga un estudio profundo, para que en el mismo pueda acoplarse a los temas que se imparten en el mismo, a fin que el estudiante no tenga únicamente los conceptos teóricos sino que también los pueda visualizar y palpar a través de modelos de estructuras bajo una diversidad de fuerzas que puedan afectar a las mismas y así el estudiante tenga una mejor comprensión del Análisis Estructural.
2. Se recomienda que el estudiante del curso repase con anticipación los temas que se van dando, por parte del catedrático, según el programa del mismo, para que se puedan despejar las dudas en clase, y así aprovechar al máximo esta guía de estudio.
3. Se recomienda a las personas interesadas en esta área de la Ingeniería Civil que amplíen sus conocimientos referente al Método de Rigidez aplicados a estructuras espaciales y a elementos finitos.
4. Es conveniente hacer énfasis en la elaboración y utilización de programas de computación referentes al método de rigidez en el análisis estructural.
5. En la práctica el análisis y diseño estructural son materias inseparables, por lo que se hace necesario que el catedrático de estos cursos los relacionen para que el estudiante pueda comprender la importancia de la unión de estas materias.
6. En base a la presente tesis se sugiere hacer estudios utilizando el Método de Rigidez.

REFERENCIAS

1. Apuntes de clase del 1er. Semestre de 1994
2. Apuntes de clase el 2do. Semestre de 1994
3. Gere, James M.
Weaver, Willian, Jr.
ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES
9na. Edición
Cia. Editorial Continental, S. A. de C. V.
México 22, D.F. Julio de 1984
534 pgs.
4. Laible, Jeffrey P.
ANALISIS ESTRUCTURAL
1ra. Edición
Mcgraw-Hill / Interamericana
México D.F. Marzo de 1992
910 pgs.
5. Nash, William A.
TEORIA Y PROBLEMAS DE RESISTENCIA DE MATERIALES
Mcgraw-Hill / Interamericana
Panamá 1969, Serie de Compendios Schaum
299 pgs.
6. Singer, Ferdinand L.
Andrew, Pytel
RESISTENCIA DE MATERIALES
3ra. Edición
Harla Harper y Row Latinoamericana 1982
560 pgs.
7. Tuma, Jan J.
ANALISIS ESTRUCTURAL
1ra. Edición
Mcgraw-Hill de México S, A. de C. V.
México D.F. Marzo de 1975
291 pgs.
8. White, Gergely y Sexsmith
ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS
Volumen II
Editorial Limusa
356 pgs.