

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO  
DE EDIFICIOS POR MÉTODOS DINÁMICOS**

TESIS

PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**ALFREDO JO LEÓN CHANG**

AL CONFERIRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, AGOSTO DE 1,996

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

**CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO  
DE EDIFICIOS POR MÉTODOS DINÁMICOS**

tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil con fecha del 31 de mayo de 1,994.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Alfredo Jo León Chang". The signature is stylized and written over a horizontal line.

Alfredo Jo León Chang

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

JUNTA DIRECTIVA  
DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

DECANO	ING. JULIO ISMAEL GONZÁLEZ PODSZUECK
VOCAL 1°	ING. MIGUEL ÁNGEL SÁNCHEZ GUERRA
VOCAL 2°	ING. JACK DOUGLAS IBARRA SOLÓRZANO
VOCAL 3°	ING. JUAN ADOLFO ECHEVERRÍA MÉNDEZ
VOCAL 4°	BR. FERNANDO WALDEMAR DE LEON CONTRERAS
VOCAL 5°	BR. PEDRO IGNACIO ESCALANTE PASTOR
SECRETARIO	ING. FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ LÓPEZ

TRIBUNAL QUE PRACTICO  
EL EXAMEN GENERAL PUBLICO

DECANO	ING. JULIO ISMAEL GONZÁLEZ PODSZUECK
EXAMINADOR	ING. ALFREDO ENRIQUE BEBER ACEITUNO
EXAMINADOR	ING. TOMÁS MOSCOSO CAMINADE
EXAMINADOR	ING. LUIS ALFONSO SOSA GONZÁLEZ
SECRETARIO	ING. FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ LÓPEZ

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central

**SISMOCONSULT**  
**HECTOR MONZON DESPANG**  
**CONSULTORIA EN INGENIERIA CIVIL**

---

Guatemala, 19 de julio de 1996.

Ing. Ricardo Ibarra,  
Jefe del Depto. de Estructuras,  
Facultad de Ingeniería,  
Universidad de San Carlos de Guatemala,  
Ciudad.

Estimado Ing. Ibarra:

Por este medio me complace aprobar el trabajo de graduación del estudiante de ingeniería civil Alfredo Jo León Chang.

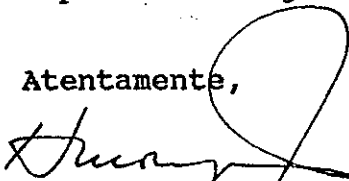
Este trabajo de graduación toca un aspecto de importancia crucial en la ingeniería estructural: el análisis sísmico de edificios por métodos dinámicos para obtener un estimado más correcto de los efectos de las excitaciones sísmicas. El método convencional que se suele usar, que es el método estático equivalente, no toma en cuenta muchos factores que influyen en acercar los resultados del análisis sísmico al comportamiento sísmico real de las estructuras. Siempre no se logra todo en modelaje matemático y además de la dinámica todavía queda el problema de la respuesta no-elástica, pero ese es otro tema.

En nuestro país es tan importante estimar lo más correctamente posible las excitaciones sísmicas de una estructura como estimar sus cargas gravitacionales. Hacerlo por métodos dinámicos es hoy en día tan fácil como hacerlo por los métodos tradicionales.

Cabe esperar que en el transcurso de la presente década se generalice en nuestro medio el análisis sísmico de edificios utilizando métodos dinámicos. De allí el valor de este trabajo de graduación, para diseminar ideas que en otros ámbitos de América Latina ya se usan en forma generalizada. Invito a los estudiantes de ingeniería y también a los profesionales que no lo han hecho, a ponerse al día. Espero que este trabajo les sea de utilidad para ello.

Felicito a Alfredo Jo por su trabajo.

Atentamente,



Héctor Monzón Despang  
Ingeniero Civil Col.932



**FACULTAD DE INGENIERIA**

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, agosto 7 de 1996

Ingeniero  
Jack Douglas Ibarra,  
Director de la Escuela  
de Ingeniería Civil,  
Facultad de Ingeniería,  
U S A C.


Señor Director

Por medio de la presente informo a usted, que he revisado el trabajo de tesis titulado CRITERIOS PARA EL ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS POR METODOS DINAMICOS, elaborado por el estudiante Alfredo Jo León Chang, y asesorado por el Ing. Hector Monzón Despang.

Habiendo determinado que dicho trabajo cumple con lo establecido, y que será de mucha utilidad para estudiantes y profesionales de la ingeniería civil, el suscrito le da su aprobación.

Sin otro particular, me suscribo de usted,

Atentamente,

  
Ing. Ricardo A. Ibarra M.  
Jefe del Departamento de Estructuras



**FACULTAD DE INGENIERIA**

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Héctor Monzón Despang y como coordinador Jefe del Departamento de Estructuras Ing. Ricardo A. Ibarra M., sobre el trabajo de tesis del estudiante Alfredo Jo León Chang, titulado "CRITERIOS PARA EL ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS POR METODOS DINAMICOS", da por este medio su aprobación a dicha tesis.

  
Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano



Guatemala, agosto de 1,996.

JDIS/isa.



FACULTAD DE INGENIERIA

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

El Decano de la Facultad de Ingeniería, luego de conocer la autorización por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano, al trabajo de tesis CRITERIOS PARA EL ANALISIS SISMICO DE EDIFICOS POR METODOS DINAMICOS del estudiante Alfredo Jo León Chang, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

Ing. Julio Ismael González Podszueck

DECANO

Guatemala, agosto de 1,996

/isa.

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios, mis oraciones en agradecimiento por haberme permitido finalizar con satisfacción otra etapa académica.

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de alguna manera contribuyeron a la realización de este trabajo, especialmente al Ing. Héctor Monzón Despang por su valioso tiempo dedicado en la asesoría del mismo y por su valiosa colaboración en la elaboración de este trabajo.



# ACTO QUE DEDICO A:

LA MEMORIA DE MI PADRE

VENANCIO JO CHANG

MI MADRE

YUTCHEN CHANG CHAW

MIS HERMANOS

ARTURO  
LIDYA ESPERANZA  
ALMA SUSANA  
EVA CRISTINA  
BLANCA LETICIA  
VICENTE  
CLAUDIA MARÍA

MIS HERMANOS POLÍTICOS

FANNY QUAN DE JO  
MARTIN McLAUGHLIN  
LEONEL LEÓN LAU

MIS SOBRINOS

NICOLE  
DIEGO ANTONIO

MIS TÍOS

MIS PRIMOS

MIS AMIGOS

MIS CATEDRÁTICOS

LA FACULTAD DE INGENIERÍA

LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

# ÍNDICE

LISTA DE ILUSTRACIONES.....	I
LISTA DE TABLAS.....	IV
LISTA DE SÍMBOLOS.....	VI
GLOSARIO.....	X
INTRODUCCIÓN.....	XIII

## CAPÍTULO 1

### ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO VRS. ESTÁTICO EQUIVALENTE

1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. ANTECEDENTES.....	3
1.3. OBJETIVO DE ESTE TRABAJO.....	3
1.4. PLANTEO DEL PROBLEMA	
1.4.1. Respuesta dinámica.....	4
1.4.2. Respuesta postelástica.....	4
1.4.3. Respuesta aleatoria.....	4
1.4.4. Caracterización de los sismos.....	5
1.4.5. Características dinámicas.....	5
1.4.6. Suposiciones de análisis.....	6
1.4.7. ¿Qué método utilizar?.....	6
1.5. ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO.....	7
1.6. ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO.....	8
1.6.1. Análisis paso a paso versus análisis con espectro.....	9
1.6.2. Análisis con varios grados de libertad....	9
1.6.3. Análisis dinámico en resumen.....	9

## CAPÍTULO 2

### TIPOS DE ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

2.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO (1 GRADO DE LIBERTAD)...	11
2.2. PARÁMETROS PARA DESCRIBIR EXCITACIÓN SÍSMICA.....	22
2.3. ANÁLISIS DINÁMICO "PASO A PASO".....	26
2.4. ANÁLISIS CON ESPECTRO DE RESPUESTA.....	30
2.5. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.....	34
2.6. ANÁLISIS DINÁMICO MODAL	
2.6.1. Análisis dinámico modal con historia de la respuesta.....	38
2.6.2. Análisis dinámico con espectro de res- puesta.....	46
2.7. RESUMEN.....	51

### CAPÍTULO 3

#### MODELOS ANALÍTICOS, DATOS Y RESULTADOS

3.1. MÉTODO DE RIGIDEZ.....	57
3.1.1. Matriz de rigideces del miembro tomando las coordenadas del miembro.....	59
3.1.2. Matriz de rigideces del miembro tomando el sistema de coordenadas de la estructura.....	63
3.1.3. Matriz de rigidez de una estructura.....	66
3.1.4. Fuerzas y momento fijos.....	67
3.1.5. Solución del sistema de ecuaciones.....	68
3.1.6. Fuerzas finales.....	68
3.2. MATRICES DE MASA DE UNA ESTRUCTURA.....	69
3.3. MODELO ANALÍTICO DE LA ESTRUCTURA.....	70
3.3.1. Modelo geométrico.....	71
3.3.2. Modelo de las condiciones de continuidad..	74
3.3.3. Modelo del comportamiento del material....	76
3.3.4. Modelo de acciones impuestas.....	78
3.3.5. Rigidez efectiva de elementos de concreto reforzado.....	78
3.4. CONDENSACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO.....	79
3.5. EXCITACIÓN - ESTRUCTURA - RESPUESTA.....	83
3.6. DECONDENSACIÓN DE RESULTADOS.....	85
3.7. SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS.....	85
3.8. RESUMEN.....	86

### CAPÍTULO 4

#### EXCITACIONES SÍSMICAS PARA DISEÑO

4.1. ACELEROGRAMAS.....	91
4.2. ESPECTROS ELÁSTICOS DE RESPUESTA ESPECÍFICOS.....	98
4.3. ESPECTROS ELÁSTICOS DE RESPUESTA GENÉRICOS.....	106
4.4. RESPUESTA POSTELÁSTICA - FACTORES DE REDUCCIÓN...	115
4.5. FORMULACIONES DINÁMICAS EMPÍRICAS.....	121
4.6. DERIVACIÓN DE FORMULACIÓN ESTÁTICA EQUIVALENTE...	124
4.7. RESUMEN.....	126

### CAPÍTULO 5

#### EJEMPLO

5.1. DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA.....	132
5.2. PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA.....	133
5.3. CONDENSACIÓN DE LA ESTRUCTURA.....	135
5.4. CÁLCULO DE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS.....	136
5.5. EXCITACIÓN SÍSMICA DE DISEÑO.....	137

5.6.	CÁLCULO DE MASA PARTICIPANTE Y DEFORMACIONES MODALES.....	140
5.7.	CÁLCULO DE LA FUERZA INERCIAL.....	143
5.8.	SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS.....	144
5.9.	CORRECCIÓN EMPÍRICA DE RESULTADOS.....	146
5.10.	DECONDENSACIÓN DE RESULTADOS.....	147
5.11.	CÁLCULO DE FUERZAS INTERNAS.....	147
5.12.	ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE.....	157
5.13.	COMENTARIOS.....	165
CONCLUSIONES.....		XV
RECOMENDACIONES.....		XVII
BIBLIOGRAFÍA.....		XVIII
REFERENCIAS.....		XX

# LISTA DE ILUSTRACIONES

## CAPÍTULO 1

1.1.	Equilibrio estático.....	2
1.2.	Equilibrio dinámico.....	2

## CAPÍTULO 2

2.1.	Idealización de un sistema de un grado de libertad.....	11
2.2.	Diagrama de cuerpo libre de una estructura de un grado de libertad sujeta a movimiento sísmico del suelo.....	12
2.3.	Estructura de un piso sujeta a movimiento sísmico del suelo.....	13
2.4.	Fuerza efectiva de sismo (comparación de fuerza externa-fuerza de sismo).....	14
2.5.	Movimiento armónico simple.....	15
2.6.	Efecto de amortiguación en vibración libre.....	16
2.7.	Efecto de amortiguamiento en frecuencia natural de vibración.....	17
2.8.	Efecto de amortiguación en vibración libre.....	18
2.9.	Número de ciclos requeridos para reducir la amplitud de vibración al 50% planteado como una función del coeficiente de amortiguamiento.....	19
2.10.	Computación de deformación o desplazamiento del espectro de reacción.....	21
2.11.	Fuerza lateral equivalente.....	22
2.12.	Historias de aceleraciones, velocidades y desplazamientos del terreno en un sismo registrado en la ciudad de México.....	23
2.13.	Sistema con rigidez no lineal.....	28
2.14.	Espectros de respuesta de deformación o desplazamiento, seudovelocidad y pseudoaceleración del sismo de El Centro.....	32
2.15.	Gráfica logarítmica del espectro de respuesta del sismo de El Centro.....	34
2.16.	Representación de un edificio por un sistema de varios grados de libertad.....	35
2.17.	Modos de vibración de un sistema de tres grados de tres grados de libertad.....	37
2.18.	Fuerza lateral equivalente en n-ésimo modo de vibración.....	42
2.19.a.	Respuesta sísmica (desplazamiento del techo) de edificio de tres niveles.....	43
2.19.b.	Respuesta sísmica (corte en la base) de un edificio de tres niveles.....	44

### CAPÍTULO 3

3.1.	Coefficientes de influencia de rigidez del miembro.....	60
3.2.	Elemento que se une a nudos de ancho finito....	62
3.3.	Deformaciones producidas en un elemento que se une a nudos de ancho finito.....	62
3.4.	Transformación de coordenadas.....	64
3.5.	Estructuración de un edificio típico de varios pisos.....	72
3.6.	Diferentes modelos para el análisis de un edificio a base de marcos.....	73
3.7.	Efecto de la rigidez del nudo en las fuerzas internas en el extremo de la viga de un marco..	75
3.8.	Idealización de apoyos a base de zapatas.....	76
3.9.	Estructura sujeta a cargas sísmicas.....	81
3.10.	Modelo de estructura para la formulación matricial.....	83

### CAPÍTULO 4

4.1.	Acelerogramas de los tres componentes de un sismo.....	91
4.2.	Registro de aceleración, velocidad y desplazamiento correspondientes a un sismo corto y de alta aceleración.....	94
4.3.	Temblor de el Centro 18 de mayo de 1,940 componente NS.....	95
4.4.	Acelerogramas.....	95
4.5.	Demostración de la convergencia de espectro de respuesta del acelerograma sintético al espectro que le sirvió de base.....	98
4.6.	Espectros de respuesta de (a) Deformación o desplazamiento, (b) seudovelocidad y (c) espectro de respuesta de pseudoaceleración. Sismo de el Centro, componente S00°E. Porcentaje de amortiguamiento $\xi=2\%$ .....	100
4.7.	Espectros de respuesta derivados de la componente Norte-Sur, del sismo de El Centro, California 1,940.....	101
4.8.	Comparación entre los límites de los espectros y los máximos desplazamientos del suelo...	104
4.9.	Espectros de respuesta de aceleración derivados la componente Norte-Sur del sismo de El Centro, California, 1,940.....	106
4.10.	Espectros de respuesta suavizada del desplazamiento promedio. $S_d$ por Housner, escala arbitraria.....	107
4.11.	Espectros de respuesta suavizada de la velocidad promedio, $S_v$ por Housner, escala arbitraria.....	107

4.12.	Espectros de respuesta suavizada de la aceleración promedio, $s_a$ por Housner, escala arbitraria.....	108
4.13.	Espectros elásticos para diseño sismo-resistente.....	109
4.14.	Espectros de aceleración promedio para diferentes condiciones del sitio de registro.....	110
4.15.	Espectro de respuesta promedio para diferentes tipos de suelos.....	111
4.16.	Espectro de aceleración del percentil 84, para diferentes tipos de suelo.....	112
4.17.	Curvas espectrales normalizadas.....	112
4.18.	Curvas espectrales normalizadas para condiciones de suelos duros.....	113
4.19.	Propuesta de variación de la fuerza lateral para diferentes tipos de suelos.....	113
4.20.	Espectro de respuesta sugerido por el Proyecto de Normas Sismo-resistentes para la República de Guatemala.....	114
4.21.	Respuesta estructural elástica y postelástica..	115
4.22.	Ductilidad al desplazamiento $\mu$ contra R para OS sometidos al efecto del sismo de El Centro 1,940 componente N-S.....	117
4.23.	Efectos de la respuesta inelástica en los espectros de diseño.....	118
4.24.	Sistemas estructurales resistentes a sismos y rangos de variación del factor de ductilidad...	119
4.25.	Influencia de los detalles de refuerzo en los diagramas fuerza-desplazamiento.....	121

## CAPÍTULO 5

5.1.	Planta de la estructura a analizar.....	131
5.2.	Marcos típicos de la estructura.....	132

# LISTA DE TABLAS

## CAPÍTULO 4

4.1.	Factores de amplificación del movimiento del suelo.....	105
4.2.	Factores de reducción de respuesta sísmica por capacidad postelástica de la estructura.....	120

## CAPÍTULO 5

5.1.	Diagonal de matriz de masas de la estructura.....	134
5.2.	Matrices condensadas de los marcos en dirección "X".....	135
5.3.	Matrices condensadas de los marcos en dirección "Y".....	135
5.4.	Matrices de rigidez de la estructura.....	136
5.5.	Valores característicos, frecuencias y períodos de vibración de la estructura.....	137
5.6.	Valores de aceleración correspondientes a cada modo de vibración de la estructura.....	139
5.7.	Desplazamientos modales máximos y masa participante de la estructura en dirección "X".....	141
5.8.	Desplazamientos modales máximos y masa participante de la estructura en dirección "Y".....	142
5.9.	Fuerzas inerciales modales que actúan en la estructura en dirección "X".....	143
5.10.	Fuerzas inerciales modales que actúan en la estructura en dirección "Y".....	144
5.11.	Fuerzas inerciales totales que actúan en la estructura en dirección "X" obtenidas con superposición modal de resultados.....	145
5.12.	Fuerzas inerciales totales que actúan en la estructura en dirección "Y" obtenidas con superposición modal de resultados.....	146
5.13.	Fuerzas inerciales modales corregidas que actúan en la estructura en dirección "X".....	148
5.14.	Fuerzas inerciales modales corregidas que actúan en la estructura en dirección "Y".....	149
5.15.	Fuerzas inerciales totales para diseño corregidas que actúan en la estructura en dirección "X" obtenidas con superposición modal de resultados.....	150
5.16.	Fuerzas inerciales totales para diseño corregidas que actúan en la estructura en dirección "Y" obtenidas con superposición modal de resultados.....	150



5.17.	Fuerzas internas del marco 01 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico dinámico.....	151
5.18.	Fuerzas internas del marco 02 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico dinámico.....	153
5.19.	Fuerzas internas del marco AA en dirección "Y" obtenidas del análisis sísmico dinámico.....	155
5.20.	Fuerzas por nivel en cada dirección de la estructura obtenidas por medio del análisis sísmico estático equivalente.....	158
5.21.	Fuerzas por marco obtenidas del análisis sísmico estático equivalente.....	158
5.22.	Fuerzas internas del marco 01 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente.....	159
5.23.	Fuerzas internas del marco 02 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente.....	161
5.24.	Fuerzas internas del marco AA en dirección "Y" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente.....	163

# LISTA DE SÍMBOLOS

- $a$  = Amplitud de vibración.  
 $A$  = Área de un miembro prismático.  
 $A_1^1$  = Seudoaceleración correspondiente al período fundamental estimado.  
 $A_o$  = Aceleración máxima efectiva del terreno correspondiente al sismo básico de diseño.  
 $A_t$  = Aceleración máxima del terreno.  
 $A_x$  = Área axial de un miembro prismático.  
 $A_v$  = Área a corte de un miembro prismático.  
 $A_s$  = Aceleración del suelo.  
 $AF$  = Acciones fijas en un elemento en coordenadas globales.  
 $AF_i$  = Vector de acciones fijas (fuerza y momentos) del  $i$ -ésimo elemento en coordenadas globales.  
 $AF'$  = Vector de acciones fijas de un elemento en coordenadas locales.  
 $c$  = Constante de amortiguación o amortiguamiento de la estructura.  
 $C$  = Matriz de amortiguamiento de la estructura.  
 $C_{cr}$  = Amortiguamiento crítico de la estructura.  
 $C_s$  = Coeficiente sísmico de diseño.  
 $CD$  = Factor de deformación postelástica.  
 $d$  = Desplazamiento en los extremos del miembro en el sistema global de coordenadas de la estructura.  
 $d_e^*$  = Vector de deformaciones nodales en el elemento.  
 $d_e^{**}$  = Vector de fuerzas finales en un elemento.  
 $d'$  = Desplazamientos en los extremos del miembro.  
 $D$  = Desplazamiento o deformación.  
 $D(T)$  = Amplificación dinámica de la estructura.  
 $E$  = Módulo de elasticidad.  
 $EI$  = Rigidez flexionante efectiva de un elemento.  
 $EA_{col}$  = Rigidez axial efectiva de una columna.  
 $EC$  = Módulo de elasticidad del concreto.  
 $f_D$  = Frecuencia de ciclo de vibración de la estructura amortiguada.  
 $F_e$  = Vector de fuerzas nodales en el elemento.  
 $f_i$  = Fuerza lateral en cada piso.  
 $f_s$  = Fuerza lateral equivalente.  
 $f'c$  = Resistencia a compresión del concreto.  
 $F_A$  = Fuerza de amortiguamiento.  
 $F_I$  = Fuerza de inercia.  
 $F_R$  = Fuerza de rigidez o fuerza elástica.  
 $F_{jn}$  = Valor máximo de la fuerza lateral equivalente en el piso  $j_n$  del modo  $n$ .  
 $F_A(t)$  = Fuerza de amortiguamiento en función del tiempo.  
 $F_R(t)$  = Fuerza de rigidez en función del tiempo.  
 $F_R(u)$  = Fuerza de rigidez en función lineal del desplazamiento.  
 $FF_e$  = Vector de fuerzas finales en un elemento.  
 $g$  = Aceleración de la gravedad.  
 $h$  = Altura del techo sobre la base de la estructura.  
 $h_j$  = Altura del piso  $j$ .  
 $h_n$  = Altura efectiva de la fuerza resultante sobre la base.

- $hN$  = Altura total del edificio medida desde la base o nivel del terreno.  
 $H$  = Altura del edificio.  
 $I$  = Inercia de un miembro prismático.  
 $I_g$  = Momento de inercia de la sección bruta transversal de un elemento.  
 $I_s$  = Momento de inercia del acero de refuerzo longitudinal con respecto al eje neutro de la sección transversal de un elemento.  
 $j$  = Número de ciclos para reducir la amplitud.  
 $k$  = Rigidez lateral de la estructura.  
 $k_{aa}$  = Submatriz con desplazamientos de traslación originados por los grados de libertad de traslación.  
 $k_{ab}$  = Submatriz con desplazamientos de traslación originados por los grados de libertad de rotación.  
 $k_{ba}$  = Submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de traslación.  
 $k_{bb}$  = Submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de traslación.  
 $K$  = Matriz de rigideces de la estructura.  
 $K_e'$  = Matriz de rigidez del elemento.  
 $K_{ij}$  = Fuerza o rigidez nodal correspondiente al grado de libertad  $i$  causado por la aplicación de un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad  $j$ .  
 $K_{cond}$  = Matriz condensada de la estructura.  
 $k_{ij}$  = Rigidez del miembro correspondiente al grado de libertad  $i$  causado por el desplazamiento del grado de libertad  $j$ .  
 $k'$  = Matriz de rigidez del miembro en sus coordenadas.  
 $l$  = Longitud de un miembro prismático.  
 $L$  = Largo de edificio o dimensión mayor del edificio.  
 $m$  = Masa.  
 $m_j$  = Masa del piso  $j$ .  
 $-m_c(t)$  = Fuerza externa aplicada a la estructura en el techo.  
 $M$  = Matriz diagonal de masas de la estructura.  
 $M_n$  = Masa modal.  
 $M_o$  = Momento en la base de la estructura.  
 $M_{on}$  = Momento máximo en la base del edificio.  
 $n$  = Número del modo de vibración o  $n$ -ésimo modo de vibración.  
 $N$  = Número total de niveles de pisos del edificio.  
 $p(t)$  = Proporción de la variación de la carga aplicada a la estructura.  
 $q$  = Fuerza en los extremos del miembro en el sistema de coordenadas global de la estructura.  
 $q_{in}$  = Fuerza lateral en el  $i$ -ésimo nivel en el  $n$ -ésimo modo de vibración.  
 $q'$  = Fuerza en los extremos del miembro.  
 $Q$  = Vector de carga o cargas nodales aplicadas.  
 $Q_a$  = Fuerza equivalente a  $Q_{cond}$  y son fuerzas que se concentran en cada nivel de la estructura debido a acciones sísmicas.  
 $Q_{cond}$  = Vector de cargas nodales condensado.  
 $Q_{AN}$  = Vector de cargas nodales aplicadas directamente en los nodos.  
 $r$  = Deformaciones de nudos en apoyos.  
 $r$  = Reacción modal máxima para diseño o resultante de la combinación de las reacciones modales máximas.  
 $\bar{r}_n$  = Reacciones modales máximas.

- $r(t)$  = Reacción del edificio al movimiento sísmico del suelo.  
 $R$  = Factor de reducción postelástica en función de la ductilidad.  
 $RO$  = Porcentaje de área de acero de refuerzo en un elemento.  
 $[r]$  = Matriz de rotaciones  
 $[R]^{-1}$  = Matriz inversa de rotaciones.  
 $[R]^T$  = Matriz transpuesta de rotaciones.  
 $S$  = Factor que depende del tipo del suelo.  
 $S_a$  = Aceleración seudoespectral o aceleración máxima.  
 $S_d$  = Desplazamiento espectral o desplazamiento máximo.  
 $S_v$  = Velocidad seudoespectral o velocidad máxima.  
 $S_a[T]$  = Respuesta sísmica máxima de un oscilador elástico simple.  
 $S_a/g$  = Ordenada espectral expresada como fracción de la aceleración de la gravedad.  
 $t$  = tiempo  
 $T$  = Período de vibración del sistema.  
 $T_B$  = Período de oscilación de la estructura que depende de el perfil del suelo y sirve para determinar la amplificación dinámica.  
 $T_D$  = Período de vibración de la estructura amortiguada.  
 $T_n$  = Período de vibración del modo de vibración natural.  
 $T_a$  = Período empírico de vibración de la estructura.  
 $TE$  = Período de vibración natural empírico.  
 $u$  = Desplazamiento relativo o deformación relativa.  
 $u_i$  = Desplazamiento en el instante  $t_i$ .  
 $u_j$  = Desplazamiento en el piso  $j$ .  
 $u_u$  = Deformación unitaria.  
 $u_y$  = Deformación a la cedencia.  
 $u(t)$  = Deformación o desplazamiento en el techo de la estructura debido al movimiento sísmico.  
 $u(t)_c$  = Respuesta complementaria de oscilador simple.  
 $u(t)_n$  = Respuesta homogénea del oscilador simple.  
 $u(0)$  = Desplazamiento inicial.  
 $u_o(t)$  = Desplazamiento ocurrido en la base de la estructura debido al movimiento sísmico del suelo.  
 $U_n$  = Desplazamiento modal.  
 $U_m$  = Reacción del sistema real en función del tiempo.  
 $U_{an}$  = Respuesta máxima de aceleración en el modo de vibración natural o pseudo-aceleración.  
 $U_{dn}$  = Respuesta máxima de desplazamiento en el modo de vibración natural.  
 $U_{jn}$  = Desplazamiento máximo en el piso  $j_n$ .  
 $U_{vn}$  = Respuesta máxima de velocidad en el modo de vibración natural o pseudo-velocidad.  
 $U_{MAX}$  = Desplazamiento máximo de la masa.  
 $\dot{u}$  = Velocidad.  
 $\dot{u}_i$  = Velocidad en el instante  $t_i$ .  
 $\dot{u}(0)$  = Velocidad inicial.  
 $\ddot{u}$  = Aceleración de la masa.  
 $\ddot{u}_i$  = Aceleración en el instante  $t_i$ .  
 $\ddot{u}_o$  = Aceleración del suelo.  
 $\ddot{u}_T$  = Aceleración total.  
 $V_t$  = Velocidad máxima del terreno.  
 $V$  = Corte basal de la estructura.

- $V_{\max}$  = Corte basal máximo.  
 $V_{on}$  = Esfuerzo en la base igual a la resultante de las fuerzas laterales equivalentes  $f_{jn}$ .  
 $\bar{V}_{on}$  = Valor máximo de esfuerzo en la base del edificio.  
 $W_j$  = Peso del piso  $j$ .  
 $W_n$  = Peso efectivo del edificio que participa en el modo de vibración  $n$ .  
 $Y_n$  = Desplazamiento generalizado en el modo  $n$ .  
 $\bar{Y}_n$  = Desplazamiento modal máximo.  
 $Y_{in}(t)$  = Desplazamiento en el nivel  $i$  del modo  $n$  en el instante  $t$ .  
 $i$  = Deformaciones en nudos que no son apoyos.  
 $\Delta t$  = Intervalo de tiempo.  
 $\Delta t/T$  = Proporción del incremento de período para el análisis paso a paso.  
 $\Delta_{jn}$  = Desplazamiento máximo en la historia  $j_n$ .  
 $\alpha_o$  = Factor en función de la pseudoaceleración y el peso para encontrar la fuerza lateral en cada piso.  
 $\beta$  = Forma en que varía la aceleración en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y debe ser menor que  $1/2$ .  
 $\xi$  = Constante o proporción de amortiguamiento de la estructura.  
 $\xi_n$  = Proporción de amortiguamiento del modo de vibración natural.  
 $\delta$  = Decremento logarítmico.  
 $\delta_u$  = Deformación última.  
 $\delta_y$  = Deformación a la primera cedencia.  
 $\omega$  = Frecuencia circular del sistema no amortiguado.  
 $\omega_D$  = Frecuencia circular de la estructura amortiguada.  
 $\omega_n$  = Frecuencia del modo de vibración natural.  
 $\omega_{nD}$  =  $n$ -ésima frecuencia natural circular de vibración de una estructura de múltiples pisos amortiguada.  
 $\tau$  = tiempo.  
 $\mu$  = Ductilidad al desplazamiento.  
 $\mu_n$  = Reacción del sistema de libertad de grado único correspondiente al terremoto al final del intervalo  $\Delta t$ .  
 $\phi_n$  = Vector renglón de la forma modal correspondiente al vector columna.  
 $\phi_{in}$  = Factor que define la escala a que interviene el modo  $n$  en el movimiento del nivel  $i$ .  
 $\phi_{jn}$  =  $j$ -ésimo modo natural de vibración.

# GLOSARIO

**ACELERACIÓN EN UNA ESTRUCTURA O EDIFICIO**

Es la aceleración que se produce en una estructura o edificio debido a la deformación que sufre la estructura con respecto del suelo, la cual es ocasionada por el movimiento sísmico.

**ACELERACIÓN ESPECTRAL**

Respuesta de aceleración máxima absoluta a un período dado de un sistema estructural.

**ACELEROGRAMAS**

Registro de la historia de aceleraciones que provoca el sismo en una dirección determinada.

**AMORTIGUAMIENTO**

Disipación de energía que se produce en un sistema con el tiempo o la distancia.

**AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO**

Es el mínimo amortiguamiento que permite a un sistema desplazado retornar a su posición inicial sin oscilación.

**AMPLITUD**

Máximo desplazamiento de un sistema con respecto a su posición de equilibrio.

**ARTICULACIÓN PLÁSTICA**

Se dice que ocurre una articulación plástica cuando en un punto de un miembro, el refuerzo longitudinal ha empezado a fluir, dejando de aceptar más esfuerzos y deformándose hasta la ruptura si la carga se incrementa lo suficiente.

**DEFORMACIÓN A LA CEDENCIA O A LA FLUENCIA**

Es la deformación causada en un material debido a la aplicación de un esfuerzo igual a su límite de fluencia. Cuando esto ocurre se dice que el material ha empezado a fluir, o sea, deja de aceptar esfuerzos y sus deformaciones serán permanentes.

**DEFORMACIÓN POSTELÁSTICA ULTIMA**

Es la deformación que ocurre, inmediatamente, antes de la rotura.

**DESPLAZAMIENTO ESPECTRAL**

Respuesta de desplazamiento relativo máximo de un sistema estructural.

**DERIVA**

Desplazamiento lateral relativo entre los niveles o pisos de una estructura.

**DUCTILIDAD**

Es la capacidad de un material de aceptar deformaciones después de sobrepasar su límite de fluencia, sin llegar a la ruptura. Numéricamente, el coeficiente de ductilidad se define como el cociente entre la deformación postelástica última y la deformación a la cedencia.

**EPICENTRO**

Proyección sobre la superficie del terreno, del punto en que se inicia la ruptura de la falla, lo cual origina las vibraciones que dan lugar a un sismo.

**ESPECTRO DE RESPUESTA**

Gráfica con respecto a la frecuencia o período cuya ordenada representa la pseudo-aceleración absoluta, pseudo-velocidad relativa o desplazamiento espectral para sistemas de un grado de libertad simple cuando son excitadas por un movimiento sísmico específico.

**ESTRUCTURA HIPERESTÁTICA**

Estructura que es estáticamente indeterminada, es decir en la cual las ecuaciones de equilibrio estático no son suficientes para determinar todas las fuerzas internas de la estructura.

**ESTRUCTURA ISOSTÁTICA**

Estructura que es estáticamente determinada para la cual las ecuaciones de equilibrio estático son suficientes para determinar las fuerzas internas de la estructura.

**FLUENCIA O CEDENCIA**

El límite de fluencia o esfuerzo de cedencia, es el esfuerzo después del cual, el material empieza a sufrir deformaciones permanentes aunque se retire la causa de estas deformaciones.

**FRECUENCIA CIRCULAR**

Oscilación periódica por cambio angular, expresada en radianes por unidad de tiempo.

**FRECUENCIA DE VIBRACIÓN**

Número de ciclos de una oscilación periódica que ocurre en una unidad de tiempo. Es el recíproco del tiempo tomado para un ciclo completo de vibración libre de un sistema.

**FUERZA LATERAL EQUIVALENTE**

Fuerza externa que si es aplicada como una fuerza estática, causaría una deformación conocida.

**GRADO DE LIBERTAD**

Los grados de libertad de una estructura son el número mínimo de parámetros necesarios para describir de manera única la figura deformada de la estructura. Los parámetros pueden ser ciertos desplazamientos y rotaciones en diversos puntos de la estructura.

**INTEGRAL DE DUHAMEL**

Integral usada para evaluar la respuesta simple de una excitación arbitraria. También llamada integral de Convolución.

**MODO DE VIBRACIÓN**

Es la forma o configuración de desplazamientos adoptada por una estructura al vibrar libremente bajo la acción de un impulso y suponiendo que no existe amortiguamiento en la misma y con una frecuencia particular para cada forma.

**MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE**

Forma o movimiento sinusoidal de una onda periódica y constante en la que oscila un sistema con amortiguamiento nulo y en el cual la aceleración es proporcional al desplazamiento.

**NUDOS**

Es la unión entre una columna o columnas u una viga o vigas de un marco. Es también la unión entre vigas y muros.

**PERÍODO DE VIBRACIÓN**

Tiempo para una oscilación completa (ciclo) de un cuerpo elástico, vibrando en un modo dado de vibración libre. Es el recíproco de la frecuencia.

**RIGIDEZ**

Es el valor del momento, aplicado en un extremo simplemente apoyado de un miembro, necesario para producir la rotación unitaria (1 radián) de este extremo simplemente apoyado, no permitiéndose traslación de ninguno de los extremos, siendo el extremo más alejado simplemente apoyado, restringido o fijo. Es decir es el momento de extremo por unidad de rotación o la resistencia a la rotación de un miembro.

**VELOCIDAD ESPECTRAL**

Respuesta de velocidad relativa máxima de un sistema estructural a un período dado.

**VIBRACIÓN LIBRE**

Vibración que ocurre en un sistema bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema en sí y en la ausencia de fuerzas externas.



# INTRODUCCIÓN

Guatemala es un país propenso a la actividad sísmica ya que está ubicado entre la unión de varias placas tectónicas y además localmente en el país existen varias fallas geológicas y gran cantidad de volcanes.

Una de las preocupaciones principales del hombre es reducir el riesgo sísmico o peligro sísmico al que se ven amenazadas sus estructuras, las cuales serán sacudidas por un movimiento sísmico debido a que sus bases se moverán con el suelo, con lo cual se desarrollarán desplazamientos, velocidades y aceleraciones cambiantes en las partículas de masa de la estructura, introduciendo efectos dinámicos sobre la misma. Para reducir el riesgo sísmico es de vital importancia conocer el comportamiento de las estructuras ante dichos movimientos y determinar las excitaciones sísmicas que actúan sobre las mismas.

Desde hace muchos años se han realizado intentos para tomar en cuenta las fuerzas de origen sísmico en el diseño de estructuras, al principio se utilizaban factores fijos que se relacionaban únicamente a la masa de cada nivel de la estructura, en base a las experiencias se dieron cuenta que este método no funcionaba para todas las estructuras, ya que no tomaban en cuenta las características de las estructura como lo son su rigidez y su elasticidad, las cuales influyen en la respuesta dinámica de la estructura. Con el paso del tiempo se crearon formulaciones para tomar en cuenta estas características, lo cual dio paso a el análisis más real y completo formulado hasta el momento, este análisis es el análisis sísmico dinámico.

En este trabajo se describirán los criterios básicos del análisis sísmico dinámico, que es necesario en un país de alta sismicidad como el nuestro y por ello se hará énfasis en las estructuras de varios niveles, en las cuales se justifica plenamente un análisis dinámico.

El trabajo está formado por cinco temas esenciales en los cuales se describen algunos criterios para el análisis sísmico de edificios.

En el primer tema, titulado análisis sísmico dinámico versus estático equivalente, se hace una introducción del análisis sísmico y se efectúa un planteamiento de este problema, luego se describen en forma introductoria los dos posibles tipos de análisis sísmico que son el estático equivalente y el dinámico.

Luego de tener una idea referente a el problema del análisis sísmico y de ver la importancia del análisis sísmico dinámico, el segundo tema descrito es concerniente a los tipos de análisis

sísmico dinámico. En este tema se describe el fundamento de la dinámica estructural, el cual es desarrollado estudiando la respuesta ante las excitaciones sísmicas de estructuras de un grado de libertad y luego de estructuras de varios grados de libertad. Este estudio se basa en el análisis de las ecuaciones de movimiento. Una vez conocido el comportamiento de las estructuras ante las excitaciones sísmicas se describen los diferentes métodos de análisis sísmico dinámico, haciendo énfasis en el análisis dinámico modal.

En un análisis sísmico no es suficiente conocer la respuesta dinámica de la estructura, como se dijo es necesario determinar las características elásticas y de rigidez de la estructura que influyen en el comportamiento dinámico. El tercer tema trata de los modelos analíticos, los datos y resultados. Aquí se describe la forma de modelar la estructura, determinando sus características dinámicas y además se describen los procedimientos para simplificar el modelo de la estructura, para poder aplicar de una forma más sencilla las excitaciones sísmicas.

En el cuarto tema se describen las excitaciones sísmicas para diseño a las cuales se verá sometida la estructura. En este tema se describen las fuentes de información sísmica, como lo son los acelerogramas y los espectros de respuesta, de las cuales se pueden obtener las excitaciones para diseño. También se describe la respuesta postelástica que presenta una estructura ante las excitaciones sísmicas.

Por último se presenta una aplicación práctica de los temas descritos anteriormente, analizando con la ayuda de un computador una estructura, a la cual se le efectúa un análisis sísmico modal con espectro respuesta y luego se compara con un análisis sísmico estático equivalente.

# CAPÍTULO 1

## ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO VRS. ESTÁTICO EQUIVALENTE

### 1.1. INTRODUCCIÓN

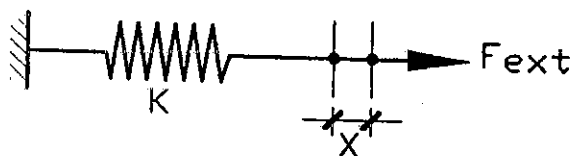
Cuando una estructura o un edificio es sacudido por un movimiento sísmico, su base se mueve con el suelo, por tanto se desarrollan desplazamientos, velocidades y aceleraciones cambiantes en las partículas de masa del edificio, introduciendo efectos llamados "dinámicos", que no existen en una estructura en reposo. Además los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de ese movimiento son muy irregulares, tanto en dirección como en magnitud y duración, lo que complica más la respuesta de la estructura a las vibraciones del suelo.

Pese a la compleja acción de un sismo sobre una estructura, para efectos prácticos sólo se consideran las fuerzas horizontales que actúan sobre la estructura al nivel de cada piso. En igual forma se parte de que el movimiento del suelo sólo es de carácter traslacional y que si hubiera alguna componente de rotación, se puede despreciar, por lo menos en una primera aproximación.

Los primeros intentos realizados para tomar en cuenta las fuerzas de origen sísmico en el diseño de una estructura, se desarrollaron bajo la idea de que la fuerza lateral que se generaba en un nivel determinado de la estructura, era una fracción constante del peso de ese nivel. De esa manera se usó con mucha frecuencia un coeficiente fijo de 0.1. Aunque la aplicación de este antiguo método, da resultados satisfactorios para algunas estructuras, al aumentar la altura de las construcciones se vió que no era el más recomendable, pues no tomaba en cuenta las características elásticas de la estructura (rigidez o flexibilidad), que influían en su comportamiento ante las excitaciones de origen sísmico e influían en la respuesta dinámica de la misma. De modo que se hicieron varias formulaciones con el paso del tiempo, los que condujeron a lo que se llama análisis sísmico estático equivalente. En éste la carga sísmica es función del período fundamental de oscilación de la edificación calculado empíricamente. Además la distribución de las cargas a lo alto de la estructura también es empírica. Por lo tanto las cargas sísmicas son de carácter pseudodinámico aunque se apliquen al modelo estructural como si fueran cargas estáticas laterales. Hoy en día, con las facilidades de computación que existen es igualmente fácil hacer análisis con modelos dinámicos más avanzados. El uso de estas metodologías

de análisis no sólo se justifica, sino que se hace necesario en un país de alta sismicidad como el nuestro. Pero para poder comprender por qué la estructura responde dinámicamente es necesario estudiar el equilibrio estático y el equilibrio dinámico de una estructura.

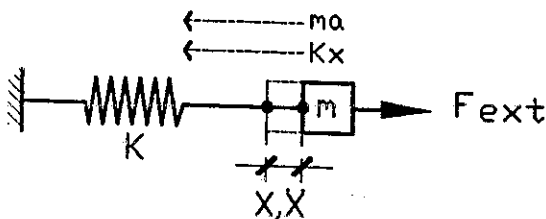
**Equilibrio estático.** Si a un resorte se le aplica una fuerza externa  $F_{ext}$  que provoca un desplazamiento  $x$ , a partir de su posición inicial de reposo, se desarrolla una fuerza asociada con esta deformación, que es igual a una constante  $k$  del resorte por el desplazamiento obtenido. Esto es lo que sucede cuando hay equilibrio estático (ver fig. 1.1). Además, si se suspende la fuerza, el resorte volverá nuevamente a su posición inicial; esto se llama comportamiento elástico.



$$\begin{aligned} \Sigma F_h &= 0 \\ kx &= F_{ext} \\ \text{notar: si } F_{ext} &= 0 \longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

FIGURA 1.1. EQUILIBRIO ESTÁTICO.

**Equilibrio dinámico.** Si al sistema (resorte) se le agrega una masa  $m$ , y se le aplica la misma fuerza externa  $F_{ext}$ , se provocará el mismo desplazamiento  $x$ ; pero en el proceso de aplicación el cuerpo debe desplazarse desde el reposo, por lo que hay una aceleración. Como ahora el sistema tiene masa, se producirá en el sistema una fuerza adicional llamada inercia. Por la primera y segunda leyes de Newton, la masa se opone al movimiento, resultando la siguiente ecuación de equilibrio dinámico tomando la masa como cuerpo libre:



$$\begin{aligned} kx + ma &= F_{ext} \\ \text{Si } a &= \text{segunda derivada} \\ \text{del desplazamiento } a &= \ddot{x} \\ kx + m\ddot{x} &= F_{ext} \end{aligned}$$

FIGURA 1.2. EQUILIBRIO DINÁMICO.

en donde:

Si  $x = \text{cte.} \longrightarrow \ddot{x} = 0 \longrightarrow kx = F_{ext}$  : Caso estático.  
 Si  $x = \text{variable} \longrightarrow \ddot{x} \neq 0 \longrightarrow kx + m\ddot{x} = F_{ext}$  : Caso dinámico  
 Incluso si  $F_{ext} = 0 \longrightarrow kx = -m\ddot{x} \longrightarrow x \neq 0 \longrightarrow$  Hay movimiento

Este último es el caso del sismo, que no produce fuerza externa sobre el edificio, sino una deformación de éste.

Si  $\ddot{x}=0 \rightarrow kx=-m\ddot{x}$  donde  $m\ddot{x}$  es un efecto interno llamado "inercia" o, por tener unidades de fuerza, se le llama "fuerza inercial". Nótese que la solución de esta ecuación (que es una ecuación diferencial) involucra senos y cosenos, que son funciones repetitivas cíclicas, o sea que el sismo induce vibraciones.

Si  $\ddot{x}$  cesa entonces  $m\ddot{x}$  cesa, el caso es estático sin fuerza inercial.

## 1.2. ANTECEDENTES

El análisis de edificios por métodos dinámicos ha sido relativamente poco usado y es poco conocido en nuestro país. Este curso solo se imparte a partir del quinto año en un curso optativo en la Universidad de San Carlos de Guatemala o a nivel de maestría en otra universidad. La dinámica estructural se ve envuelta en un halo de dificultad (que realmente no tiene). Por ello su escasa aplicación. Poco se ha tratado sobre este tema en la USAC como tesis de graduación. De los trabajos de tesis que lo tratan, uno data de 1978, del Ing. Fredy Conlledo titulado "Consideraciones teórico-prácticas para efectuar análisis dinámicos de edificios". El más reciente es de 1983, que es el trabajo de tesis del Ing. Andrés Ramos titulado "Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios".

## 1.3. OBJETIVO DE ESTE TRABAJO

Se intenta proporcionar a los estudiantes y profesionales interesados en el tema criterios sobre el análisis sísmico de edificios por métodos dinámicos.

Al mismo tiempo se desea demostrar que la aplicación de estos métodos de análisis en Guatemala es accesible y poco complicada, al contrario de lo que se piensa.

También se intenta explicar en forma sencilla y resumida los factores que intervienen en el procedimiento de un análisis sísmico por métodos dinámicos. Así el lector podrá tener una idea clara de lo que es un análisis sísmico de edificios por métodos dinámicos usando datos aplicables a Guatemala y podrá observar la importancia que representa la aplicación de los métodos dinámicos en el análisis sísmico y estructural.

Por último, se intenta despertar el interés en el estudio de este tema, dejando abierta la oportunidad para que en el futuro se amplíe sobre el tema.

## 1.4. PLANTEO DEL PROBLEMA

### 1.4.1. RESPUESTA DINÁMICA

Como se describió anteriormente, los esfuerzos a los que queda sometida una estructura al soportar los movimientos sísmicos, resultan directamente de la distorsión provocada en la estructura por el movimiento del suelo sobre el que descansa.

Esta distorsión depende a su vez de la flexibilidad o la rigidez de la estructura y por lo tanto diferentes estructuras responden de diferente manera a vibraciones en la base. Esta respuesta amplificada o deamplificada es fácilmente calculable con el programa y el computador adecuados.

### 1.4.2. RESPUESTA POSTELÁSTICA

Cuando se analiza una estructura sujeta a sismos, hay un factor adicional, ajeno al problema dinámico en sí, pero que no puede dejarse de lado si se quiere obtener resultados realistas: la respuesta postelástica.

No hay estructuras (excepto raras excepciones) que resistan un sismo fuerte en el rango elástico de sus materiales. Siempre se necesita echar mano de la resistencia postelástica de los materiales. Para que una estructura resista un sismo en el rango postelástico se la debe proveer de ductilidad. Esto se logra en el caso del concreto reforzado proporcionando una cantidad adecuada de acero (de refuerzo) a la estructura para que ésta no colapse.

Considerados los dos aspectos antes citados es lógico esperar que para que una estructura no sufra demasiado con un terremoto, debe ser suficientemente resistente y suficientemente dúctil para resistir las fuerzas que se generan con carácter transitorio.

### 1.4.3. RESPUESTA ALEATORIA

El movimiento sísmico en la base de la estructura es caracterizado por los desplazamientos, velocidades y aceleraciones que son aleatorias en dirección, magnitud, duración y frecuencia de vibración.

Incertidumbres en el logro de un diseño sismoresistente apropiado surgen de una serie de factores, entre los cuales los más importantes son:

1. La dificultad de predecir las características de los movimientos sísmicos a los que estará sometido la estructura durante su período de vida (intensidad, duración y características de la frecuencia de vibración).

2. Donde la determinación analítica de la respuesta de la estructura a un movimiento sísmico particular es deseada y puede ser utilizada, la dificultad está en determinar con precisión los valores de los parámetros estructurales que afectan la respuesta de la estructura (rigidez y amortiguación), del mismo modo como las propiedades dinámicas del terreno o el medio que la soporta.

#### 1.4.4. CARACTERIZACIÓN DE LOS SISMOS

En cuanto a la descripción del movimiento sísmico se refiere, un parámetro usado frecuentemente es la variación respecto al tiempo de la aceleración del suelo en las cercanías de la estructura. Esta puede ser descrita por dos fuerzas o componentes: una horizontal y otra vertical. Los movimientos de oscilación y rotación se caracterizan por la variación con respecto al tiempo de los desplazamientos angulares que pueden producirse en cualquiera de los tres planos. Sin embargo, debido a que los edificios son relativamente más flexibles con respecto a distorsiones horizontales o laterales, en la mayoría de los casos prácticos solo se consideran las fuerzas horizontales de aceleración sísmica en el análisis estructural. La vibración vertical genera aumentos y disminuciones de las fuerzas verticales que las estructuras normales pueden acomodar sin problema. Por ello se suele despreciar el sismo vertical, o bien se puede considerar que produce efectos que no influyen esencialmente en el diseño de la estructura.

En la mayoría de los casos se hace una simplificación más de la verdadera respuesta tridimensional de las estructuras. Consiste en suponer que las fuerzas horizontales de aceleración, actúan en dirección paralela a los ejes principales del edificio. Con ello se supone en forma implícita que el diseño de un edificio con este método tendrá una resistencia adecuada a la actuación de la aceleración en cualquier dirección.

#### 1.4.5. CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS

El movimiento del terreno en la base de una estructura se manifiesta como un movimiento oscilatorio de tipo transitorio, que perturba dinámicamente a la estructura, produciendo deformaciones temporales en sus elementos, de acuerdo con sus características dinámicas (masa, rigidez y amortiguamiento). Como consecuencia, de tales deformaciones aparecen esfuerzos internos que tienen que ser resistidos por elementos de la estructura.

Las características dinámicas de una estructura están dadas por la siguiente información: (a) los períodos propios de oscilación, (b) las formas o modos propios de oscilación y (c) los factores de amortiguamiento, los cuales dependen del tipo de construcción, de los materiales utilizados, de la distribución de los elementos estructurales, de las dimensiones, etc. El conocimiento de esas características es fundamental para poder determinar, en combinación con las propiedades del terreno los efectos de los sismos.

Sin embargo, de las tres características mencionadas, el período de oscilación adquiere una importancia especial, ya que al definir la rigidez dinámica se determina en buena parte el comportamiento de la estructura ante la excitación sísmica. Los modos de oscilación se tomarán en cuenta cuando el análisis es dinámico y se hacen suposiciones empíricas cuando el análisis es estático equivalente. El amortiguamiento de las estructuras comunes aunque es pequeño, es muy importante y se toma en cuenta empíricamente.

#### 1.4.6. SUPOSICIONES DE ANÁLISIS

Entre las más importantes suposiciones, comunes al análisis estático y el dinámico, están las siguientes:

1) Fuerzas y deformaciones pueden ser determinadas por las combinaciones lineales de resultados de análisis independientes, de idealizaciones planas del edificio para cada componente horizontal del movimiento del suelo, incluyendo desplazamientos rotacionales horizontales determinados de una forma indirecta y con bases empíricas.

2) La respuesta estructural postelástica, que es no lineal puede ser modelada, con un aceptable grado de exactitud, por medio de análisis lineales del edificio, afectando los resultados con un modificador empírico (factor de reducción, R).

Es posible que ambas suposiciones sean inadecuadas si la estructura es radicalmente diferente a estructuraciones convencionales.

En particular, ambos métodos pueden ser inadecuados si el movimiento lateral en las dos direcciones principales del edificio y el movimiento torsional están fuertemente acoplados. Edificios con grandes excentricidades entre el centro de gravedad y el centro de rigidez de los niveles pueden responder de modo inesperado. Para estos edificios, análisis independientes para las dos direcciones laterales pueden ser insuficientes, y como mínimo tres grados de libertad por nivel (dos traslacionales y uno rotacional) deben ser incluidos en el modelo. El método dinámico, con una apropiada generalización de los conceptos involucrados puede ser aplicado fácilmente a estos casos.

#### 1.4.7. ¿QUE MÉTODO UTILIZAR?

Los análisis sísmicos estáticos equivalentes han sido usados casi siempre debido a su sencillez y a los buenos resultados que con su aplicación se han alcanzado. Pero los resultados no siempre son tan satisfactorios como se pretende, especialmente al tratarse de edificios altos, de estructuras con distribución irregular de rigideces y de construcciones caracterizadas por asimetrías pronunciadas. En estos casos, las estructuras suelen sufrir daños que no son explicables según el criterio estático,



y la única manera de lograr un comportamiento sísmico satisfactorio, consiste en recurrir a aceleraciones de diseño desmesuradamente conservadoras. A veces ni esto es suficiente. Es preferible mejorar la técnica analítica.

Hay otros casos donde los métodos simplificados pueden fallar.

A veces, los cortantes dinámicos desarrollados por los terremotos fuertes son mayores que los requeridos por los métodos estáticos equivalentes en edificios rígidos y de poco amortiguamiento.

Algunas veces en edificios altos, los análisis dinámicos indican esfuerzos muy superiores a los calculados estáticamente, por el problema del "chicoteo", es decir, relacionado a la aparición de cortantes sísmicos sumamente elevados en la última o últimas plantas de un edificio. Sin embargo, hoy en día las formulaciones estáticas introducen correcciones empíricas para tomar en cuenta este efecto.

Sin embargo, la mayoría de los resultados obtenidos por métodos de análisis dinámico son menores que los obtenidos por el método estático equivalente, porque la respuesta se divide entre varios modos que no actúan simultáneamente. Esto redundante en economía de diseño.

La diferencia principal entre los dos métodos estriba no tanto en la magnitud del corte basal sino en la distribución de las fuerzas laterales. Mientras que en el análisis dinámico el cálculo de las fuerzas está basado en la estimación de los varios períodos y la forma de los diversos modos de vibración, en el análisis estático equivalente se basan en la estimación del período fundamental de vibración y en simples fórmulas para la distribución de fuerzas que sólo son apropiadas para edificios con una distribución regular de su masa y su rigidez sobre su altura. Lo difícil es juzgar cuándo una estructura deja de ser "regular".

Con las facilidades computacionales de hoy en día es más simple recurrir de entrada a los métodos dinámicos.

## 1.5. ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

Este método es una opción en la totalidad de normas sismo-resistentes actuales pero tiende a usarse cada vez menos. Se utiliza un conjunto de fuerzas estáticas horizontales aplicadas a la estructura, para simular los efectos de las cargas sísmicas. La distribución de estas fuerzas de diseño a lo alto del edificio es supuestamente similar a los resultados obtenidos en un análisis dinámico. De cualquier manera sus magnitudes son un poco arbitrarias, los valores seleccionados son influenciados en gran parte por el

juicio y la experiencia de los redactores de reglamentos. Las fuerzas de diseño especificadas por la mayoría de las normas son generalmente grandes en comparación a las que corresponden a los valores más altos que se obtienen por medio de un análisis elástico-dinámico.

La estructura se diseña para resistir una fuerza horizontal total igual a una constante  $C_s$  multiplicada por el peso total de la estructura. Esta fuerza se distribuye aplicando una parte a cada piso de la estructura. El valor de la constante  $C_s$  varía aproximadamente entre 0.05 y 0.3 y depende de las condiciones regionales y geológicas, la importancia del edificio, su período fundamental de oscilación, su ductilidad y la distribución de la rigidez en la estructura y a veces otros factores, según la norma que se trate.

Se puede afirmar que el método del análisis estático equivalente es apropiado para edificios con las siguientes características: el sistema sismoresistente debe ser el mismo en todos los niveles; las masas y rigideces de los niveles no deben variar en más del 30 % en los niveles adyacentes; los momentos de inercia y áreas de las secciones de los elementos estructurales no deben variar más del 30 % en los niveles adyacentes.

En éste trabajo, no se entrará en más detalles sobre el método.

## 1.6. ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

Puesto que la fuerza lateral que actúa durante un sismo no se puede evaluar en forma precisa por el procedimiento de la fuerza lateral equivalente, se adopta el análisis dinámico cuando se requiere una evaluación más acertada de la fuerza sísmica y el comportamiento estructural.

Hay dos métodos, el elástico y el inelástico, para el análisis dinámico, pero el primero se utiliza más a menudo por razones de simplicidad.

Aún cuando las estructuras trabajen en el rango inelástico, el análisis dinámico basado en la hipótesis de comportamiento lineal constituye actualmente el método más digno de confianza para calcular la distribución de esfuerzos. Para calcular la magnitud de los esfuerzos se aplica una reducción empírica.

Ambos métodos requieren que la estructura sea idealizada como un ensamble de masas interconectadas por elementos elásticos. La inclusión del amortiguamiento es indirecta y empírica. Se supone un amortiguamiento viscoso por simplicidad matemática.

La respuesta dinámica se calcula modelando analíticamente

un sistema con una partícula de masa.

En vista de lo anterior, en esta sección únicamente se hará referencia al análisis dinámico lineal elástico en una forma breve.

#### 1.6.1. ANÁLISIS PASO A PASO VERSUS ANÁLISIS CON ESPECTRO

Se supone que una estructura, por compleja que sea, se ha reducido a un sistema de una masa sujeta a un resorte elástico y un amortiguador viscoso. Este se llama sistema de un grado de libertad. Se puede aplicar un sismo, es decir una aceleración variable con el tiempo, al soporte del resorte y del amortiguador y examinar paso a paso la respuesta haciendo análisis estructurales a cada pequeño incremento de tiempo. Esta es la primera forma y la más laboriosa de evaluar la respuesta lineal elástica, y se llama "análisis dinámico paso a paso".

La segunda forma es pre-evaluar la respuesta máxima calculando lo que se llama espectro de respuesta del sismo. Cuando se tiene la estructura específica de interés reducida a un sistema de una sola masa (o sea de un grado de libertad), entonces se evalúa su respuesta máxima por la sencilla operación de leer en el espectro del mismo (ver detalles en el siguiente capítulo). Esta forma de cálculo es práctica y simple y se llama "análisis dinámico con espectro de respuesta".

#### 1.6.2. ANÁLISIS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Obviamente las estructuras reales tienen masas o sea varios grados de libertad. Por lo tanto se requiere un artificio matemático para hacer posible el cálculo de respuesta usando las opciones de análisis para un grado de libertad descritas en el numeral anterior. Para ello se usa un "análisis dinámico modal". Se sabe que la respuesta vibratoria real de un sistema con  $n$  masas se puede descomponer en  $n$  "modos de vibración" cada uno con un período de oscilación característico. Cada modo actúa o responde como un sistema simple de un grado de libertad, de manera que se puede calcular las respuestas de los  $n$  modos y después superponerlos (ver detalles en el capítulo 2 y 3) teniéndose así la respuesta del sistema.

#### 1.6.3. ANÁLISIS DINÁMICO EN RESUMEN

De acuerdo a las secciones anteriores un análisis dinámico de uso práctico para estructuras reales es el siguiente:

- a) Modelar la estructura como un ensamble de masas interconectadas por elementos estructurales elásticos.
- b) Hacer un análisis modal de ese ensamble determinando  $n$  modos de vibración.

- c) Evaluar por medio de un espectro sísmico la respuesta máxima de cada modo de vibración.
- d) Combinar las respuestas de los modos y estimar la respuesta máxima del ensamble.
- e) Corregir la respuesta máxima elástica obtenida por medio de un factor de reducción  $R$  para obtener un estimado de la respuesta de cedencia de la estructura.
- f) Conociendo la respuesta máxima del ensamble averiguar los esfuerzos máximos de cada elemento específico de la estructura.
- g) Estos esfuerzos máximos en cada miembro debidos al sismo se combinan linealmente con los esfuerzos producidos por las cargas muertas y vivas y con eso se diseñan los diversos elementos de la estructura.

## CAPÍTULO 2

# TIPOS DE ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

### 2.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO (1 GRADO DE LIBERTAD)

Una estructura responde a una excitación sísmica, descrita por una historia de aceleraciones (o de velocidades o de desplazamientos) que se presentan en el suelo sobre el que está desplantada, mediante una vibración a través de la cual disipa la energía que es aportada a la estructura por dicho movimiento. La amplitud de la vibración necesaria para disipar esa energía depende de las características del sistema constituido por el conjunto subsuelo-cimentación-estructura-elementos no estructurales. A pesar de la complejidad de un sistema como éste, las principales características de su respuesta pueden describirse mediante el análisis de un sistema elástico simple de un grado de libertad.

El sistema elástico simple está constituido por una estructura de un piso idealizada como se muestra en la figura 2.1.

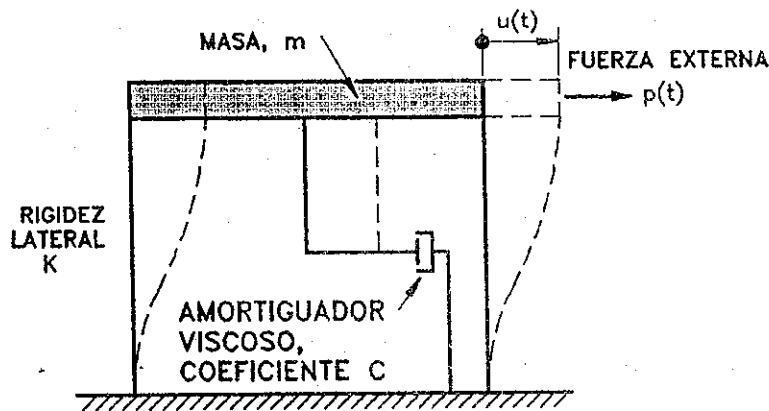


FIGURA 2.1. IDEALIZACIÓN DE UN SISTEMA SIMPLE DE 1 GRADO DE LIBERTAD. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

En esta idealización, se supone que las columnas que soportan el techo no tienen masa y la masa completa de la estructura está concentrada en el techo; el techo es rígido; las columnas son flexibles a la deformación lateral, pero, rígidas en la dirección

vertical; se supone que la estructura, está cimentada en un suelo rígido.

Cuando el sistema está sujeto a un movimiento de su base, definido por una historia de desplazamientos,  $u_0$ , o de aceleraciones del suelo  $\ddot{u}_0$ , la masa entrará en oscilación y se generarán sobre ella tres tipos de fuerzas:

- a) La fuerza de inercia que, de acuerdo con el principio de D'Alambert es proporcional a la masa y a la aceleración total que ésta sufre,  $\ddot{u}_T$ ; esta última es igual a la suma de la aceleración del terreno,  $\ddot{u}_0$ , más la de la masa relativa al terreno,  $\ddot{u}$ .

$$F_I = m\ddot{u}_T \quad (2.1)$$

- b) La fuerza que se genera en la columna por su rigidez lateral al tratar de ser desplazada con respecto al terreno. Suponiendo que la respuesta de la columna se mantiene dentro de un intervalo lineal, dicha fuerza será igual al producto del desplazamiento relativo de la masa con respecto al suelo, por la rigidez lateral de la columna.

$$F_R = ku \quad (2.2)$$

- c) La fuerza de amortiguamiento que trata de restablecer el equilibrio de la estructura en vibración. Esta fuerza puede considerarse proporcional a la velocidad de la masa con relación al suelo; al factor de proporcionalidad se le llama coeficiente de amortiguamiento.

$$F_A = c\dot{u} \quad (2.3)$$

Por lo tanto al estar sometido el sistema a la influencia del movimiento sísmico del suelo, la base de la estructura es desplazada por una cantidad  $u_0(t)$  si el suelo es rígido, y la estructura sufre deformación  $u(t)$ . El desplazamiento total del techo de la estructura es entonces:

$$u_T(t) = u_0(t) + u(t) \quad (2.4)$$

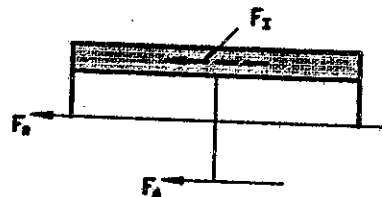


FIGURA 2.2. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UNA ESTRUCTURA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETA A MOVIMIENTO SÍSMICO DEL SUELO. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

En el diagrama de cuerpo libre de la masa, mostrado en la figura 2.2, la ecuación de equilibrio dinámico es:

$$F_I + F_A + F_R = 0 \quad (2.5)$$

Las ecuaciones 2.2 y 2.3 aún se aplican, porque las fuerzas elásticas y de amortiguación dependen únicamente del desplazamiento relativo y la velocidad, no de las cantidades totales, Sustituyendo:

$$m\ddot{u}_T + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.6)$$

y ya que

$$\ddot{u}_T = \ddot{u}_o + \ddot{u} \quad (2.7)$$

la fuerza de inercia con la ayuda de la ecuación 2.7, puede ser expresada como:

$$F_I = m*(\ddot{u}_o + \ddot{u}) \quad (2.8)$$

La ecuación 2.5, después de sustituir las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.8, puede expresarse:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_o(t) \quad (2.9)$$

Esta es la ecuación de movimiento, gobernando la deformación  $u(t)$  del sistema estructural idealizado de la figura 2.3, sujeto a aceleración  $\ddot{u}_o(t)$  del sismo.

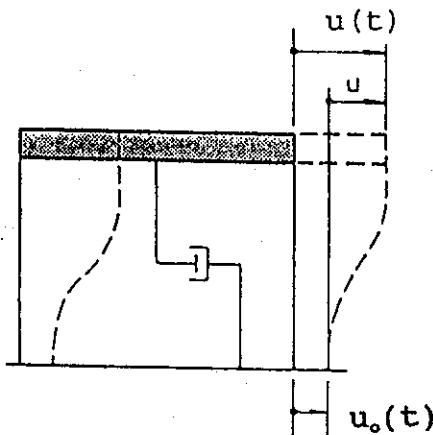


FIGURA 2.3. ESTRUCTURA DE UN PISO SUJETA A MOVIMIENTO SÍSMICO DEL SUELO. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

La comparación de las ecuaciones de movimiento debidas al movimiento del suelo (Ec. 2.9) y debidas a una fuerza externa (ver referencia 3 para deducción), muestran que las ecuaciones de movimiento para la estructura sujeta a la aceleración del suelo  $= \ddot{u}_o(t)$  o bien a una fuerza externa  $= -m\ddot{u}_o(t)$ , son iguales. La relación de deformación  $u(t)$  de la estructura a la aceleración

del suelo  $\ddot{u}_o(t)$  será idéntica a la reacción de la estructura sobre base fija debido a una fuerza externa igual a la masa que mide la aceleración del suelo, actuando en sentido opuesto a la aceleración. Como se muestra en la figura 2.4, el movimiento del suelo puede ser reemplazado por una fuerza efectiva  $= -m\ddot{u}_o(t)$ . Esta equivalencia fue el fundamento para crear el método estático equivalente.

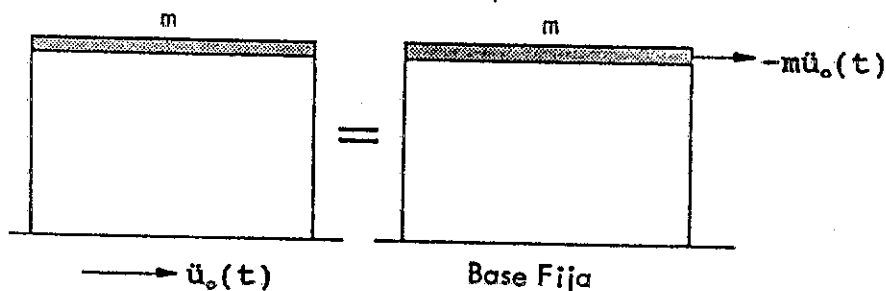


FIGURA 2.4. FUERZA EFECTIVA DE SISMO (COMPARACIÓN DE FUERZA EXTERNA -FUERZA DE SISMO). (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

Dividiendo la ecuación de equilibrio dinámico entre  $m$ , se tiene que:

$$\frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \ddot{u}_o \quad (2.10)$$

las dos constantes,  $c/m$  y  $k/m$ , representan conceptos relacionados con la vibración libre del sistema (la que corresponde al caso  $\ddot{u}_o = 0$ ). La vibración libre toma lugar cuando una estructura se ve sujeta a una excitación externa que cesa. La estructura continúa moviéndose, aún en la ausencia de una fuerza externa o de un movimiento sísmico que ya ha cesado. De ellas,

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (2.13)$$

o,

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

en que  $\omega$  es la frecuencia circular del sistema no amortiguado, o sea aquella con la que oscila éste cuando se le impone un desplazamiento y se le suelta. Cuando el amortiguamiento es nulo, el sistema describe un movimiento armónico simple, con la frecuencia mencionada y con período (figura 2.5) igual a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m/k} \quad (2.12)$$

Así, las propiedades de vibración libre  $\omega$ ,  $T$  y  $f$ , dependen solamente de la masa y rigidez de la estructura. La más rígida de dos estructuras, teniendo la misma masa, tendrá la frecuencia





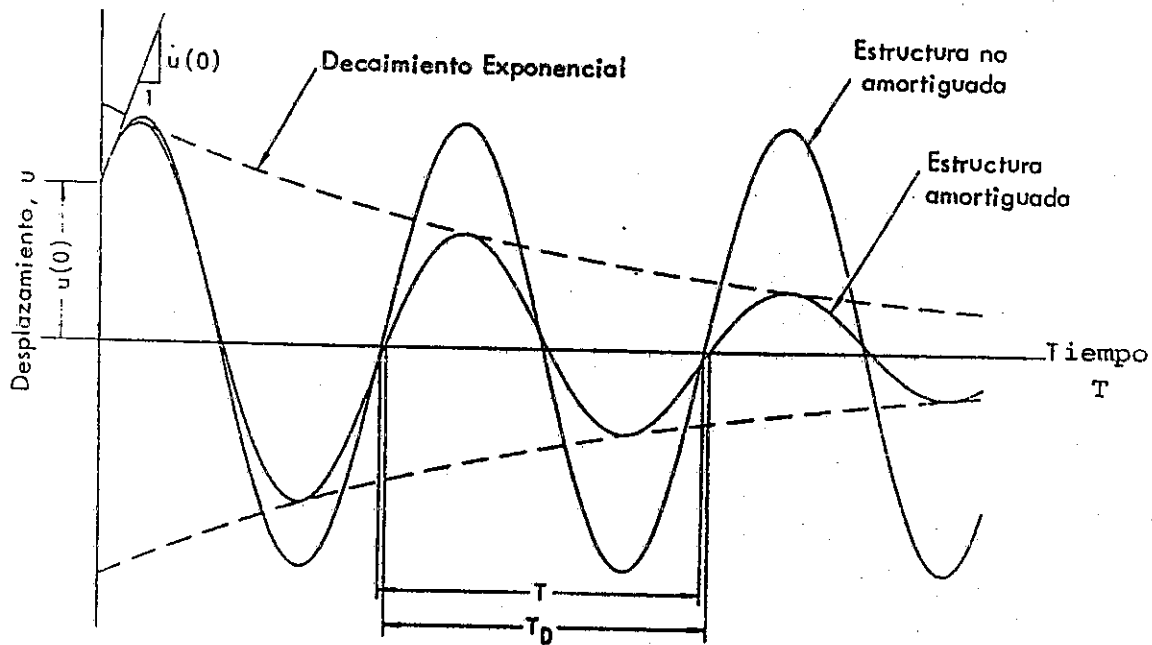


FIGURA 2.6. EFECTO DE AMORTIGUACIÓN EN VIBRACIÓN LIBRE. (Adaptado de Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

De la misma manera como para la estructura no amortiguada. Además, la frecuencia circular natural y el período de vibración están influenciados por el amortiguamiento, como sigue:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.15a)$$

$$T_D = T / \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.15b)$$

En vibración libre, se define como amortiguamiento crítico aquel para el cual el sistema, después de desplazado, volvería a su posición de reposo sin oscilar. Este vale:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.16)$$

pero

$$\sqrt{km} = m \sqrt{k/m} = m\omega \quad (2.17a)$$

$$\xi = \frac{c}{2\omega m} \quad (2.17b)$$

por otra parte

$$\frac{c}{m} = 2\omega\xi \quad (2.18)$$

La amortiguación tiene el efecto de reducir la frecuencia circular natural de vibración o sea aumentar el período natural de vibración. La figura 2.7 muestra que, para proporciones de amortiguación menores que 0.2, un rango en el cual incluye la mayoría de las estructuras, estos efectos no tienen importancia, por ejemplo,  $\omega_D$  es, aproximadamente igual a  $\omega$  y por consiguiente  $T_D$  es aproximadamente igual a  $T$ .

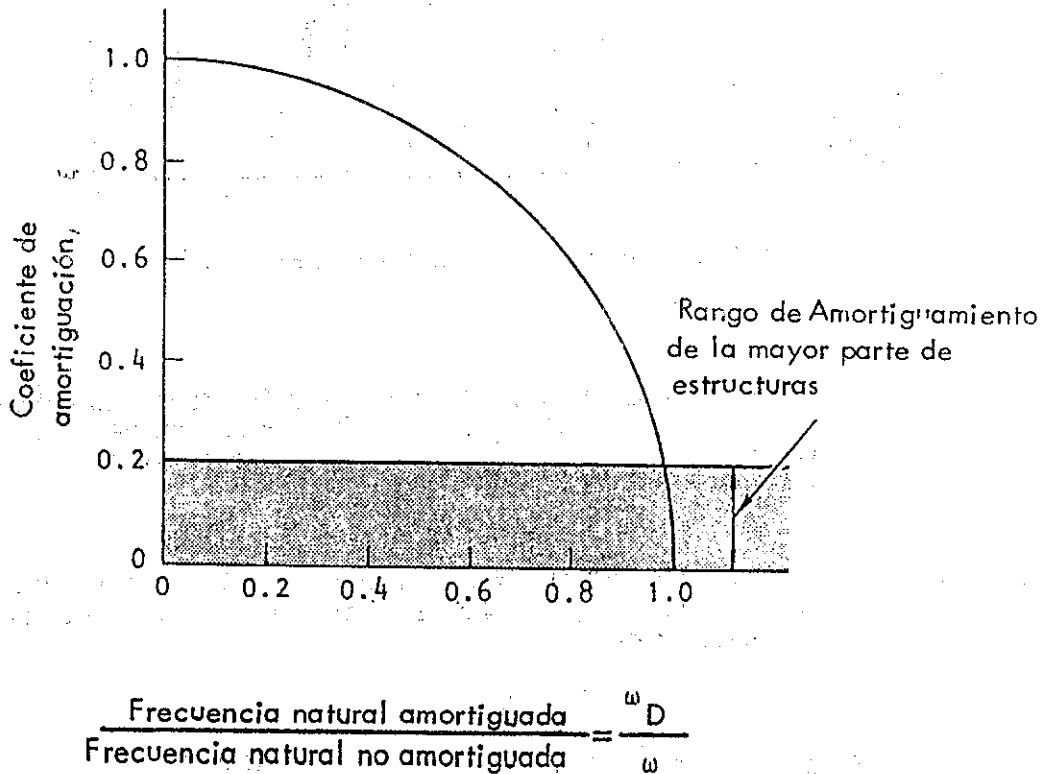


FIGURA 2.7. EFECTO DE AMORTIGUAMIENTO EN FRECUENCIA NATURAL DE VIBRACIÓN. (Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

La amplitud de desplazamiento disminuye progresivamente debido a la amortiguación. Como está mostrado en la figura 2.6, este decaimiento es exponencial con el tiempo y es aparente que el porcentaje de decaimiento depende del coeficiente de amortiguación  $\xi$ , como se muestra en la figura 2.8.

Puede demostrarse para sistemas con amortiguación baja, que la proporción de cualesquiera dos puntos máximos sucesivos (ambos positivos o ambos negativos), es:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} \approx e^{2\pi\xi} \quad (2.19)$$

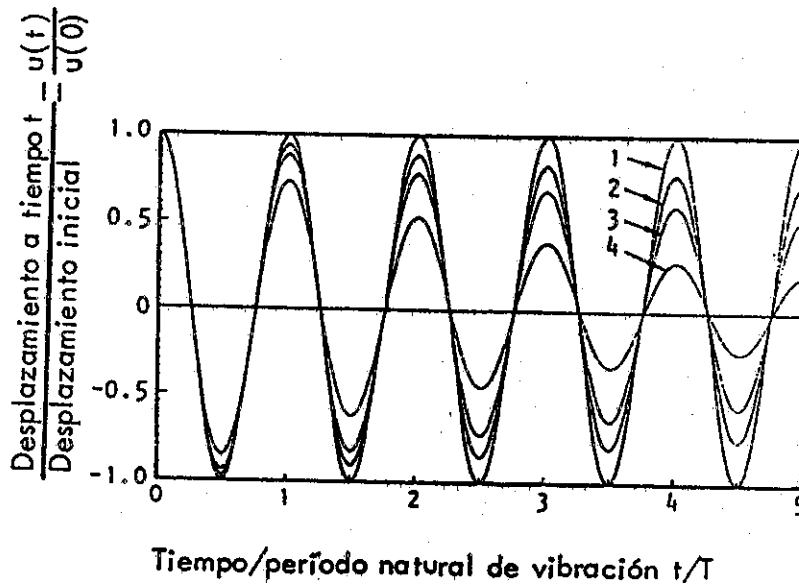


FIGURA 2.8. EFECTO DE AMORTIGUACIÓN EN VIBRACIÓN LIBRE. LAS CURVAS 1, 2, 3 Y 4 SON PROPORCIONES DE AMORTIGUACIÓN DE 0, 1, 2 Y 5% RESPECTIVAMENTE. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

La proporción de cualesquiera dos puntos máximos sucesivos, es la misma, por ejemplo  $u_i/u_{i+1}$  no depende de  $i$ . El decremento logarítmico se define como:

$$\delta = \ln (u_i/u_{i+1}) \quad (2.20)$$

Combinando las ecuaciones 2.19 y 2.20, conduce a:

$$\delta = 2\pi\xi \quad (2.21)$$

Considerando los puntos máximos de reacción, los cuales son varios ciclos aparte, por ejemplo  $j$  ciclos, puede demostrarse que:

$$\ln (u_i/u_{i+j}) = j\delta = 2j\pi\xi \quad (2.22)$$

Por medio de la ecuación anterior se puede obtener el número de ciclos  $j$ , requeridos para reducir la amplitud al 50%. En la figura 2.9 se muestra el trazo de esta ecuación.

Con lo cual el movimiento de la estructura de un piso, sujeta a movimiento del suelo, figura 2.4a, es gobernado por la ecuación 2.9, la cual puede ser escrita como:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{u}_o(t) \quad (2.23)$$

La solución de esta ecuación conduce a la reacción de deformación  $u(t)$ , la cual depende de: (1) las características de la aceleración

del suelo  $\ddot{u}_o(t)$ , (2)  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la frecuencia de vibración circular natural (o equivalentemente el período de vibración natural  $T$ ) de la estructura sin amortiguación, y (3) la proporción de amortiguación  $\xi$  de la estructura.

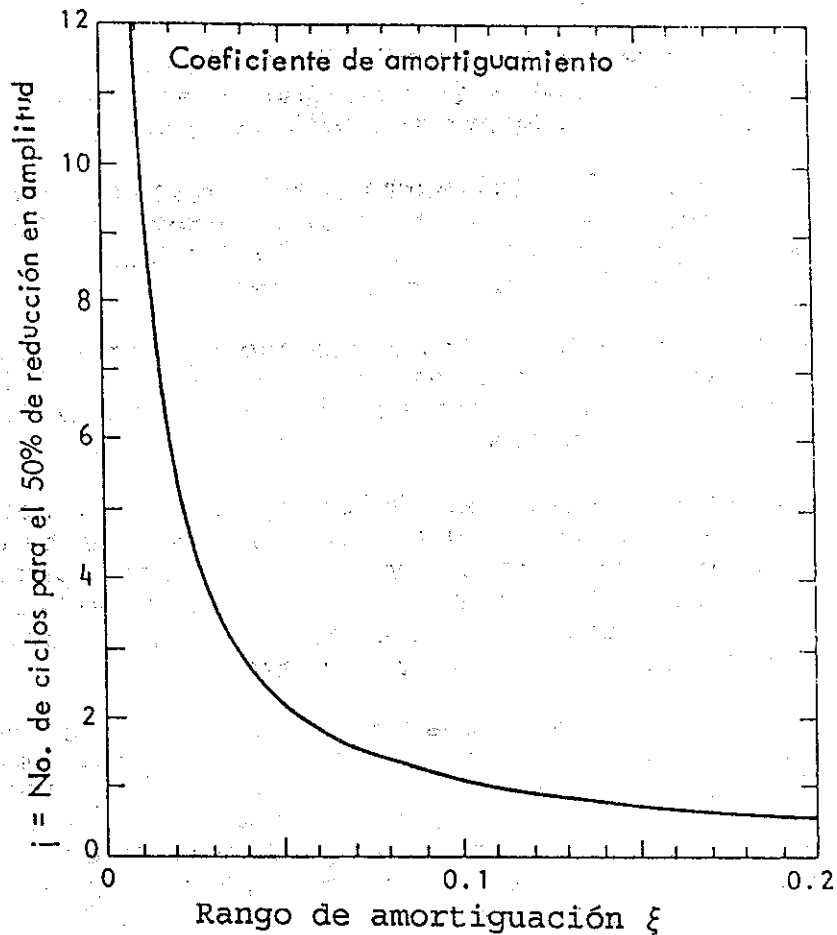


FIGURA 2.9. NÚMERO DE CICLOS REQUERIDOS PARA REDUCIR LA AMPLITUD DE VIBRACIÓN AL 50% PLOTEADO COMO UNA FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

La solución de la ecuación diferencial, cuando la estructura parte del reposo, se obtiene como la superposición de la respuesta a una serie de impulsos diferenciales, en la forma llamada integral de Duhamel

$$u(t) = - \frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{u}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.24)$$

donde  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ , es la frecuencia de vibración circular de la estructura amortiguada. Para una función de aceleración del suelo dada  $\ddot{u}_o(t)$  y propiedades del sistema  $\omega$  (o  $T = 2\pi/\omega$ ) y  $\xi$ , la integral de Duhamel en la ecuación 2.24, puede proporcionar la historia de respuesta de deformación  $u(t)$ .

Como  $\omega_D \approx \omega$ , ya que para estructuras usuales, el valor de amortiguamiento no excede de 10 por ciento del crítico ( $\xi = 1$ ), en cuyo caso  $\omega_D = 0.995\omega$ , se puede escribir la ecuación 2.24 como:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.25)$$

La solución presentada en la forma de la ecuación anterior implica la aproximación  $1-\xi^2 = 1$ , que es aceptable ya que para las estructuras de ingeniería civil generalmente  $\xi < 0.1$ .

La velocidad y la aceleración de la masa se pueden calcular derivando sucesivamente la expresión anterior (Ec. 2.25) con respecto al tiempo. Para fines de diseño interesarían los valores máximos absolutos de dichas respuestas.

De la ecuación 2.25 se desprende que para un temblor conocido (o sea para valores conocidos de  $\ddot{u}_0$  en el tiempo) los valores máximos de  $u$  y de sus derivadas dependen solamente de la frecuencia natural  $\omega$  y del amortiguamiento  $\xi$  del sistema.

Para unas aceleraciones dadas  $\ddot{u}_0$ , es usual mantener fijo el amortiguamiento e ir calculando alguna respuesta máxima para distintos valores de  $\omega$  (o lo que es lo mismo, para distintos valores del período  $T = 2\pi/\omega$ ). Si estas respuestas máximas se grafican teniendo como abscisa el valor del período, se obtiene el espectro de la respuesta en cuestión.

La figura 2.10 muestra los resultados de tales computaciones para tres estructuras sujeta al mismo movimiento sísmico. La proporción de amortiguación  $\xi = 2\%$ , es la misma para las tres estructuras, de manera que las diferencias en sus reacciones de deformación son asociadas con su período de vibración natural. El tiempo requerido por la estructura para completar un ciclo de vibración en reacción a movimiento típico del suelo, está muy cerca del período de vibración natural de la estructura.

Una vez que la historia de reacción de deformación  $u(t)$  ha sido evaluada, el esfuerzo y momento en la base del edificio puede ser determinado convenientemente, introduciendo el concepto de fuerza lateral equivalente. Esta fuerza externa  $f_e$ , que si es aplicada, como una fuerza estática, causaría deformación  $u$  (figura 2.11). Así, en cualquier instante de tiempo la fuerza lateral equivalente es:

$$f_e(t) = ku(t) \quad (2.26a)$$

La ecuación anterior puede ser expresada en términos de masa, como:

$$f_e = m\omega^2 u(t) \quad (2.26b)$$

El esfuerzo de base  $V_0$  y momento de base  $M_0$  pueden ser determinados por análisis estático de la estructura, sujeta a la fuerza lateral

equivalente, así:

$$V_o(t) = f_o(t) \tag{2.27a}$$

$$M_o(t) = hf_o(t) \tag{2.27b}$$

donde h es la altura del techo sobre la base. Después de la sustitución de la ecuación 2.27b, el esfuerzo de base y momento de base, pueden ser expresados como:

$$V_o(t) = m\omega^2 u(t) \tag{2.28a}$$

$$M_o(t) = hV_o(t) \tag{2.28b}$$

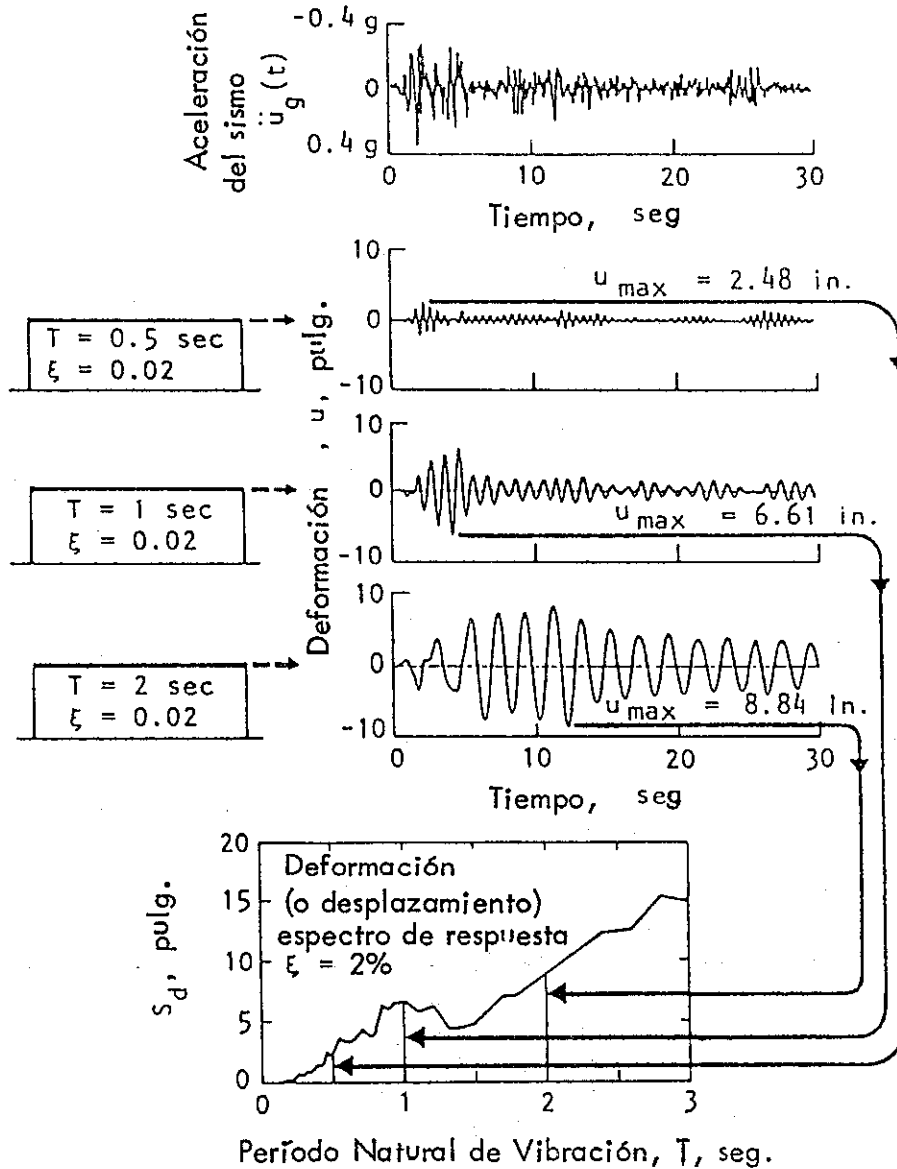


FIGURA 2.10. COMPUTACIÓN DE DEFORMACIÓN O DESPLAZAMIENTO DEL ESPECTRO DE REACCIÓN. (Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

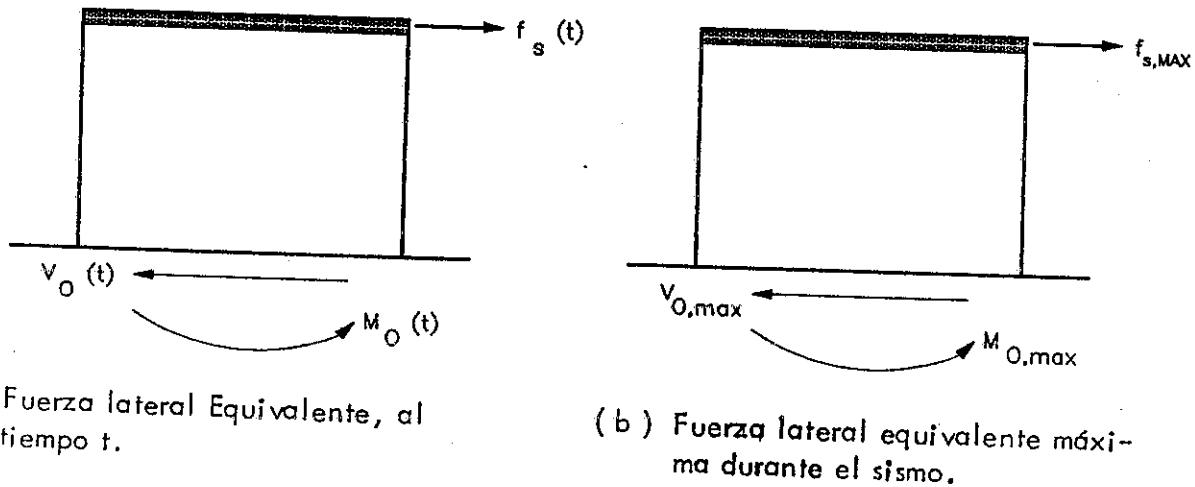


FIGURA 2.11. FUERZA LATERAL EQUIVALENTE. (Adaptado de Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

## 2.2. PARÁMETROS PARA DESCRIBIR EXCITACIÓN SÍSMICA

Los temblores se clasifican de acuerdo con el fenómeno que los origina. Los más frecuentes, y de mayor interés en ingeniería, se originan por desplazamientos relativos súbitos dentro de la corteza terrestre por la acción de fuerzas geológicas, y se denominan tectónicos.

Información sobre las características del movimiento sísmico del suelo puede obtenerse de acelerogramas de sismos pasados. Los acelerogramas son un registro de la historia de aceleraciones que provoca un sismo específico en una dirección determinada y constituye la descripción más útil del movimiento del suelo en el lugar. El análisis de los acelerogramas permite una evaluación cuantitativa de la intensidad sísmica mucho más objetiva y confiable que por medio de la escala de Mercalli. Las características de los acelerogramas que más se relacionan con la potencialidad destructiva, o sea con la intensidad del sismo, son las amplitudes máximas (aceleración máxima y velocidad máxima), la duración de la etapa sensible, o sea aquella en que la amplitud de aceleración tiene un valor apreciable y, finalmente, las frecuencias de vibración dominantes del movimiento.

La aceleración no es el único parámetro del movimiento del suelo que influye en la respuesta de las estructuras; importan además la velocidad del movimiento del terreno y, en algunos



casos, su desplazamiento. Integrando en el tiempo del acelerograma se obtiene la historia de velocidades e, integrando de esta última, se obtienen la de desplazamientos del terreno, La integración se realiza mediante métodos numéricos estándar. La figura 2.12 muestra las aceleraciones, velocidades y desplazamientos correspondientes a un registro en particular.

Los estudios de riesgo sísmico de lugares específicos se basan esencialmente en el análisis estadístico de la información disponible sobre los sismos ocurridos. La cantidad y calidad de los datos disponibles es muy variable de uno a otro lugar.

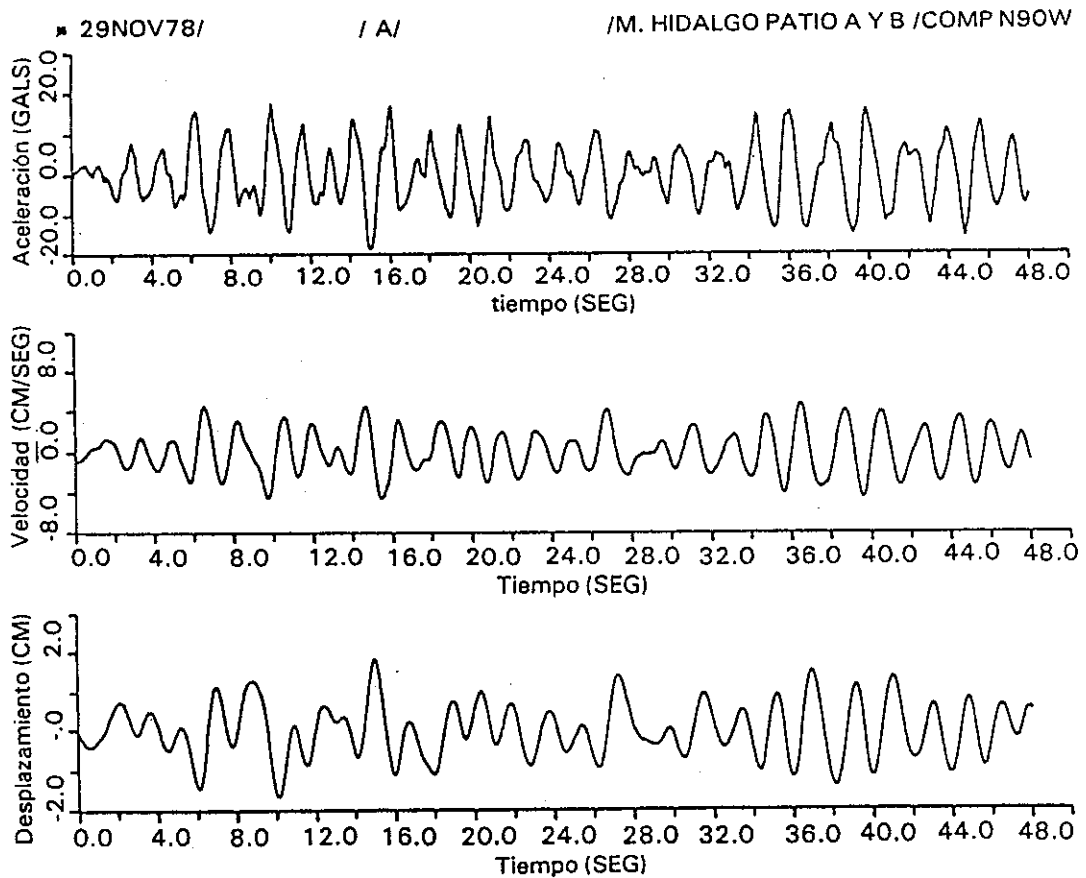


FIGURA 2.12. HISTORIAS DE ACELERACIONES, VELOCIDADES Y DESPLAZAMIENTOS DEL TERRENO EN UN SISMO REGISTRADO EN LA CIUDAD DE MÉXICO. (Diseño estructural, Roberto Meli).

La combinación de las influencias sobre diferentes estructuras de la amplitud de la aceleración del suelo y los componentes de las frecuencias de vibración (pero no de la duración del movimiento del suelo) es convenientemente representada por medio del llamado "espectro de respuesta", que es una gráfica que muestra las máximas respuestas inducidas por las vibraciones del movimiento del suelo

en un sistema estructural de un grado de libertad con períodos fundamentales de oscilación diferentes pero teniendo el mismo grado de amortiguamiento interno.

La gráfica que muestra las máximas aceleraciones inducidas en una gama de estructuras con diferentes características vibratorias y con períodos de oscilación fundamentales comprendidos entre 0 a varios segundos, es llamada "espectro de respuesta de aceleraciones"; la que representa las máximas velocidades se llama "espectro de respuesta de velocidades" y la que muestra los máximos desplazamientos se le denomina "espectro de respuesta de desplazamientos".

En muchos casos las características de los movimientos del suelo para las cuales una estructura será diseñada pueden ser suficientemente bien representadas en términos de estos espectros de respuesta. En otros casos, donde también se desea incluir la influencia de la duración del sismo, es necesario especificar una historia en el tiempo de las aceleraciones.

Es muy importante el diferenciar entre dos conceptos de movimiento sísmico que están relacionados, pero pueden ser significativamente diferentes uno del otro:

1. El máximo movimiento sísmico del suelo que una estructura deberá resistir con un aceptable margen de seguridad. Este movimiento reflejará el ambiente sísmico en el cual la estructura se construirá. Este puede ser denominado "movimiento sísmico de seguridad". Este depende solo de la sismicidad de la región, la probabilidad de ocurrencia de varios grados de severidad de movimiento sísmico durante la vida de la estructura, y del riesgo que la sociedad está dispuesta a aceptar con consideración a la ocurrencia del movimiento sísmico.
2. El grado del movimiento sísmico que deberá ser incorporado dentro del análisis y diseño estructural. Este movimiento que regularmente es denominado "movimiento sísmico de diseño", depende de muchos factores, incluyendo la selección del máximo movimiento sísmico del suelo que la estructura deberá resistir, pero también deben considerarse los siguientes:
  - a. Método de análisis al cual será incorporado
  - b. La disposición del procedimiento de análisis a ser conservador.
  - c. Grado de amortiguamiento para el cual el análisis está hecho, tomando en cuenta dentro del mismo el grado aceptable de daño.
  - d. Profundidad a la que está embebida la estructura en el suelo y la consideración en el procedimiento de diseño de los efectos producidos por el movimiento sísmico con la variación de la profundidad embebida.
  - e. Efectos de la interacción suelo-estructura, si éstos no están incluidos directamente dentro del procedimiento de análisis.

- f. Efectos de las variaciones del espacio en el movimiento del suelo, si estos no están incluidos directamente dentro del procedimiento de análisis.
- g. Las propiedades de los materiales usadas en el análisis.
- h. Combinación de las cargas y/o componentes del movimiento del suelo utilizado en el análisis.
- i. Esfuerzos característicos de la estructura y la consecuencia de los esfuerzos pasajeros que exceden los esfuerzos de los elementos y miembros estructurales.
- j. Ductilidad de la estructura.
- k. Grado de aceptabilidad de los daños.

Esta diferenciación entre los dos conceptos de movimiento sísmico es importante, porque las cualidades de las respuestas individuales para la selección de los dos movimientos es muy diferente a tomar un movimiento sísmico de diseño de uno real. La selección del movimiento sísmico para diseño usado en ingeniería para el análisis requiere del conocimiento de la respuesta del movimiento sísmico del suelo, las características de los materiales, los procedimientos analíticos, los procedimientos de diseño, y junto a todos éstos la experiencia relacionada con la respuesta de las estructuras de diferentes tipos durante los sismos actuales con su respectivo criterio de diseño.

Como se puede ver la selección de los parámetros de excitación sísmica para diseño dependen de muchos factores y criterios. Sin embargo los parámetros básicos pueden ser obtenidos de espectros de respuesta ya que las gráficas de los espectros de respuesta toman en cuenta muchos factores conservadores que crean una curva envolvente que, adecuadamente seleccionada, puede ser utilizada en nuestro país, aunque no haya por el momento demasiada información de acelerogramas específicos.

Entre los parámetros de excitación sísmica para diseño que se pueden obtener a partir de acelerogramas están el pico máximo registrado en un sismo anterior (si la estructura se construirá en un lugar con información real y directa), también se puede utilizar la raíz cuadrada de la suma de los picos perpendiculares máximos al cuadrado (cada pico máximo representa una dirección del sismo), o utilizando los valores obtenidos directamente de las gráficas de respuestas de aceleraciones espectrales (cuando se efectúan correlaciones y se ajustan las curvas con información de diferentes acelerogramas producidos en diferentes regiones para diferentes tipos de suelo). Así también, dichos parámetros se pueden obtener directamente de la gráfica de los espectros de respuesta genéricos o específicos que dan los valores máximos de los parámetros de excitación para diseño, incluyendo en ellas el ajuste de las gráficas para diferentes factores que influyen en la selección del parámetro de diseño.

En el capítulo 4, específicamente en las secciones 4.1, 4.2 y 4.3, se estudiará con más atención lo que son los parámetros para describir excitación sísmica.

### 2.3. ANÁLISIS DINÁMICO "PASO A PASO"

La integración directa proporciona el análisis más consistente y completo de cualquier movimiento sísmico dado. Se aplica una función excitadora dependiente del tiempo (acelerograma del sismo) y se calcula la correspondiente historia de respuesta de la estructura durante el sismo. Esto quiere decir que pueden obtenerse los diagramas de momento y fuerzas en cada uno de los intervalos prescritos a través del movimiento aplicado.

Para analizar un edificio por el método paso a paso se tienen que emplear métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con la ayuda de computadoras digitales para ahorrar tiempo en la solución de las mismas, ya que aun cuando se empleen hipótesis simplificadoras resultaría un trabajo tedioso por ser repetitivo y tardado.

Como se indicó este método consiste en resolver la ecuación diferencial:

$$u(t) = - \frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

dada en la ecuación 2.24 (integral de Duhamel) para intervalos muy cortos de tiempo.

Como se menciona en la referencia 2 muchos procedimientos están disponibles para la integración numérica de la ecuación de equilibrio con incrementos de tiempo. La técnica descrita aquí es simple en concepto pero está fundamentada para producir resultados excelentes con la utilización de computadoras.

Además Meli, ref. 2, comenta que se han desarrollado programas de computadora para dos tipos de comportamiento: elástico lineal e postelástico no lineal, aplicando procedimientos de integración "paso a paso". El comportamiento lineal es rara vez analizado por integración directa, a menos que esté implicado un acoplamiento entre modos, ya que las técnicas modales normales son más sencillas, más baratas y casi tan precisas. Se han realizado análisis tridimensionales no lineales de manera que puedan tomar en cuenta los tres componentes ortogonales del acelerograma de un sismo dado, y aplicarlos simultáneamente a la estructura. En principio, esta es la técnica de análisis dinámico más completa hasta ahora pero, desafortunadamente, es muy costoso su empleo.

También comenta que en el mercado existen programas especialmente desarrollados para el análisis sísmico no lineal de edificios como el DRAIN-TABS. Sin embargo, este programa no es estrictamente tridimensional, porque considera al edificio formado por marcos y/o muros planos, ligados por los diafragmas de piso. Este tipo de hipótesis es aceptable si se considera comportamiento no lineal, porque éste, sobre todo en las columnas, está influenciado decisivamente por las cargas en las tres direcciones. Aunque existen otros programas con los que se podría hacer un análisis no lineal tridimensional,

no se tienen en la actualidad conocimientos suficientes sobre las leyes constitutivas que rigen el comportamiento de elementos estructurales ante cargas cíclicas en tres direcciones, y por tanto no se pueden desarrollar modelos analíticos completamente confiables. Un problema adicional es que, incluso con las limitaciones citadas, el análisis no lineal consume mucho tiempo de computadora, más aún si se tienen que hacer varios temblores.

Por lo anterior, el análisis sísmico paso a paso no lineal de edificios ha sido aplicado a sistemas planos en trabajos de investigación, y se piensa que es todavía impráctico usar este tipo de análisis para fines de diseño cotidiano. Se continúan haciendo investigaciones para correlacionar la respuesta no lineal de edificios, con la respuesta elástica, que permitan al diseñador interpretar mejor los resultados de análisis que consideren sólo comportamiento lineal.

Existen varios procedimientos de integración paso a paso. Generalmente, la historia de respuesta está dividida en incrementos de tiempo muy cortos, cada uno de los cuales supone que la estructura es linealmente elástica. Entre cada intervalo, las propiedades de la estructura son modificadas para ajustarse al estado de deformación correspondiente. En otras palabras, la respuesta no lineal es obtenida como una secuencia de respuestas lineales de sistemas que difieren sucesivamente. Para más detalle ver ref. 4 capítulo 8.

Si se desea hacer un análisis paso a paso lineal, conviene encontrar en primer lugar los modos de vibrar del edificio, para luego calcular numéricamente la respuesta en cada modo, lo cual significa tratar con sistemas de un solo grado de libertad, puesto que las respuestas modales están desacopladas entre sí. Se tiene además la ventaja de que sólo es necesario considerar unos cuantos de los primeros modos. No obstante, hay que examinar con cuidado ciertos aspectos como el amortiguamiento y la reducción por ductilidad asociados a cada modo, la selección de temblores que sean realmente independientes entre sí y congruentes con las intensidades implícitas en los aspectos de diseño, y la manera de considerar las excentricidades accidentales.

Con el propósito de ilustrar algunos conceptos involucrados en el análisis paso a paso, se presenta a continuación un método propuesto por Newmark para tal fin (ver ref. 4 capítulo 8). La presentación se limita a un sistema de un grado de libertad, aunque el procedimiento puede aplicarse a estructuras de varios grados de libertad.

**Método  $\omega$  de Newmark:** En un sistema no lineal de un grado de libertad, como el de la figura 2.13, las fuerzas de amortiguamiento y de rigidez ya no son respectivamente proporcionales a la velocidad y al desplazamiento relativo ( $\dot{u}$  y  $u$ ), y en general serán funciones de  $F_A$  y  $F_R$  del tiempo. Entonces la condición de equilibrio dinámico se expresa:

$$m\ddot{u} + F_A(t) + F_R(t) = -m\ddot{u}_0 \quad (2.29)$$

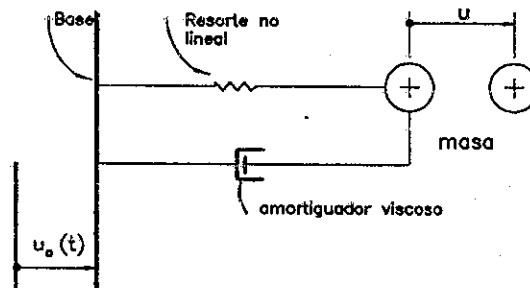


FIGURA 2.13. SISTEMA CON RIGIDEZ NO LINEAL. (Adaptado de Manual de diseño sísmico de edificios, Enrique Bazan).

Sin embargo, en edificios es frecuente considerar solamente la linealidad en las fuerza de rigidez y suponer que el amortiguamiento es viscoso. Así la ecuación anterior queda

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + F_R(t) = -\ddot{u}_o \quad (2.30)$$

Es, además, común que las fuerzas  $F_R$  se expresen como funciones lineales del desplazamiento  $u$  y se puede escribir  $F_R(t)$  como  $F_R(u)$ .

Para resolver la ecuación 2.30, Newmark propuso el siguiente procedimiento:

- Sean  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  y  $\ddot{u}_i$  los valores del desplazamiento, la velocidad y la aceleración relativas en el instante  $t_i$ . El subíndice  $i+1$  denota las cantidades correspondientes al tiempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . Supóngase el valor de  $\ddot{u}_{i+1}$ .
- Calcúlese  $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})\Delta t/2$
- Calcúlese  $u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + (1/2 - \omega)\ddot{u}_i(\Delta t)^2 + \omega\ddot{u}_{i+1}(\Delta t)^2$
- Calcúlese un nuevo valor de  $\ddot{u}_{i+1}$  con la ecuación 2.30
- Compárese el valor obtenido en (d) con el supuesto en (a). Si se los considera suficientemente parecidos, se procede a efectuar los cálculos para el siguiente incremento de tiempo; en caso contrario, se repiten los pasos (b) a (e), con el valor  $\ddot{u}_{i+1}$  calculado en (d).

El valor de  $\omega$  se puede asociar a la forma en que se supone que varía la aceleración en el intervalo  $\Delta t$ . Si  $\omega = 1/6$  dicha variación es lineal entre  $\ddot{u}_i$  y  $\ddot{u}_{i+1}$ ; si  $\omega = 1/4$  la aceleración es constante, igual a  $(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})/2$ . El valor  $\omega = 1/8$  corresponde a una variación escalonada de la aceleración. Por otra parte, el método es estable incondicionalmente cuando  $\omega$  es menor que  $1/4$ .

En resumen el procedimiento a seguir en términos generales es el siguiente:

- 1) Se calcula la rigidez de la estructura para ese incremento, basándose en el estado de desplazamiento existente al principio del incremento.
- 2) Se calculan los cambios de desplazamiento suponiendo que las aceleraciones varían linealmente durante el intervalo.
- 3) Estos cambios de desplazamiento se suman al estado de desplazamientos que se tenía al principio del intervalo, para obtener los desplazamientos al final del intervalo.
- 4) Se calculan los esfuerzos correspondientes a los desplazamientos totales.

En el libro Dynamics of Structures de Clough y Penzien (Referencia 4) se presenta un procedimiento más detallado en el que toma en cuenta que las propiedades de rigidez y amortiguamiento no son lineales. Si se quiere profundizar más sobre el análisis del comportamiento de las estructuras no lineales ver referencia 4 capítulo 8.

La determinación de la matriz de rigidez para cada incremento representa la parte más importante del análisis, ya que deben obtenerse cada vez las matrices de rigidez de los miembros individuales para su correspondiente estado de deformación.

Como cualquier proceso de integración numérico, la secuencia del método paso a paso, dependerá del ancho del incremento del tiempo  $\Delta t$ . Tres factores deben ser considerados en la elección de este intervalo (1) la proporción de variación de la carga aplicada  $p(t)$ , (2) el estado de las propiedades no lineales de amortiguamiento y rigidez, y (3) el período  $T$  de vibración de la estructura. El incremento de tiempo debe ser suficientemente corto para permitir la representación real de todos estos factores, el último siendo asociado con el comportamiento del sistema. En general, la variación de la propiedad de los materiales no es un factor determinante; si surge un súbito cambio significativo, como en la producción de una fuerza elastoplástica, pueden introducirse una subdivisión especial en el incremento del tiempo para manejar el efecto correctamente. También, el incremento de tiempo requerido para aproximar adecuadamente las cargas de los aspectos dinámicos significativos pueden ser difíciles de estimar.

De este modo, si la historia de la carga es relativamente simple, la elección del intervalo de tiempo dependerá esencialmente del período de vibración de la estructura. Este método de aceleración lineal es sólo condicionalmente estable y dará una solución contraria si el incremento de tiempo es mayor que aproximadamente la mitad del período de vibración. Sin embargo, el incremento debe ser considerablemente más corto que esto para proporcionar una razonable exactitud, de esta manera ese evitará el problema de la inestabilidad numérica en el análisis. En general, la proporción del incremento del período  $\Delta t/T \leq 1/10$  es una buena regla para obtener resultados confiables. Si hubiese alguna duda acerca del resultado obtenido,

un segundo análisis puede hacerse partiendo el incremento del tiempo asumido; si la respuesta no varía apreciablemente en el segundo análisis, se puede asumir que los errores existentes en la integración numérica son despreciables.

Conviene notar que en los lapsos en que la rigidez varía linealmente con la deformación (siendo además lineal el amortiguamiento) el método no tiene que ser iterativo, y para calcular los valores de aceleración, velocidad y desplazamiento correspondientes a un incremento de tiempo, con base en los del tiempo anterior, basta resolver por cualquier método el sistema de ecuaciones formado por las expresiones de los pasos (b) y (c) anteriormente descritos, y por la ecuación de equilibrio dinámico (que tendría el subíndice  $u_{i+1}$  para los valores de  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$  y  $u$ ). Nótese que se trata de tres ecuaciones lineales (con coeficientes constantes); las incógnitas son  $\ddot{u}_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1}$  y  $u_{i+1}$ . Opcionalmente, en este caso se puede considerar como incógnitas los incrementos de aceleraciones, velocidades y desplazamientos. Cuando el sistema es lineal, las iteraciones sólo constituyen una forma de resolver el sistema de ecuaciones.

#### 2.4. ANÁLISIS DINÁMICO CON ESPECTRO DE RESPUESTA

La historia completa de la magnitud de alguna respuesta en términos de deformación, velocidad, aceleración, corte basal, o momento en la base, pueden ser determinados por procedimientos como el análisis mostrado en el capítulo anterior. De cualquier forma, para propósitos de diseño, generalmente es suficiente con conocer sólo el valor absoluto máximo de excitación ocasionado por un sismo. Así la respuesta máxima será:

$$r_{\max} = \max |r(t)| \quad (2.31)$$

Por lo tanto, como dice Chopra, ref. 3, el trazo de los valores de respuesta máxima como función de la frecuencia natural de la estructura, o como función de una propiedad relacionada a la frecuencia, como el período natural, constituye el "espectro de respuesta" para esa cantidad. El espectro de respuesta de deformación o desplazamiento es por lo tanto un trazo de la magnitud  $S_d$  definida como:

$$S_d = U_{\max} \quad (2.32)$$

La figura 2.10 muestra el concepto básico de la computación del espectro de respuesta de deformación. Las variaciones en el tiempo de las tres estructuras a un movimiento de suelo seleccionado es presentada. Para cada estructura el valor máximo de deformación (valor absoluto), durante un sismo es determinado de esta historia de respuesta. El  $U_{\max}$  es determinado para cada estructura por



medio de un punto en el espectro de respuesta de deformación. Repitiendo varias computaciones para un rango de valores de  $T$ , manteniendo la constante de amortiguamiento  $\xi$ , se obtiene el espectro de respuesta de deformación para el movimiento del suelo; como se verá más adelante en el capítulo 4, el espectro de respuesta completo incluye curvas espectrales para diferentes valores de amortiguamiento.

Al mismo tiempo la máxima deformación puede ser expresada en términos de  $S_v$  como:

$$S_v = \omega S_d \quad (2.33a)$$

o equivalente a:

$$S_a = \frac{2\pi}{T} S_d \quad (2.33b)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural de vibración de la estructura y  $T$  es el período natural de vibración. El valor  $S_v$  tiene unidades de velocidad y está relacionada a la energía de deformación máxima  $E_{max}$  acumulada en la estructura durante un sismo por la ecuación:

$$E_{max} = \frac{1}{2} m S_v^2 \quad (2.34a)$$

que viene dada por:

$$E_{max} = \frac{1}{2} k U_{max}^2 = \frac{1}{2} k S_d^2 = \frac{1}{2} k (S_v/\omega)^2 = \frac{1}{2} m S_v^2 \quad (2.34b)$$

El espectro de respuesta de pseudo-velocidad es un trazo de  $S_v$  como función de la frecuencia natural o del período de vibración del sistema.

Para el movimiento del suelo de la figura 2.10 el valor de  $S_v$ , correspondiente a cualquier período de vibración  $T$ , puede ser determinado por la ecuación 2.33b y el valor de  $S_a$  para el mismo período  $T$ , computada en la figura 2.10 y trazada en la figura 2.14a. Los valores resultantes de  $S_v$ , trazados en la figura 2.14b, como función del período de vibración  $T$ , para un valor constante de amortiguamiento, proporcionan el espectro de respuesta de pseudo-velocidad para el movimiento del suelo de la figura 2.10.

Otra forma adecuada de presentar la máxima deformación es por medio del valor  $S_a$  definida como:

$$S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d \quad (2.35a)$$

o equivalente a:

$$S_a = \frac{2\pi}{T} S_v = \left| \frac{2\pi}{T} \right|^2 S_d \quad (2.35b)$$

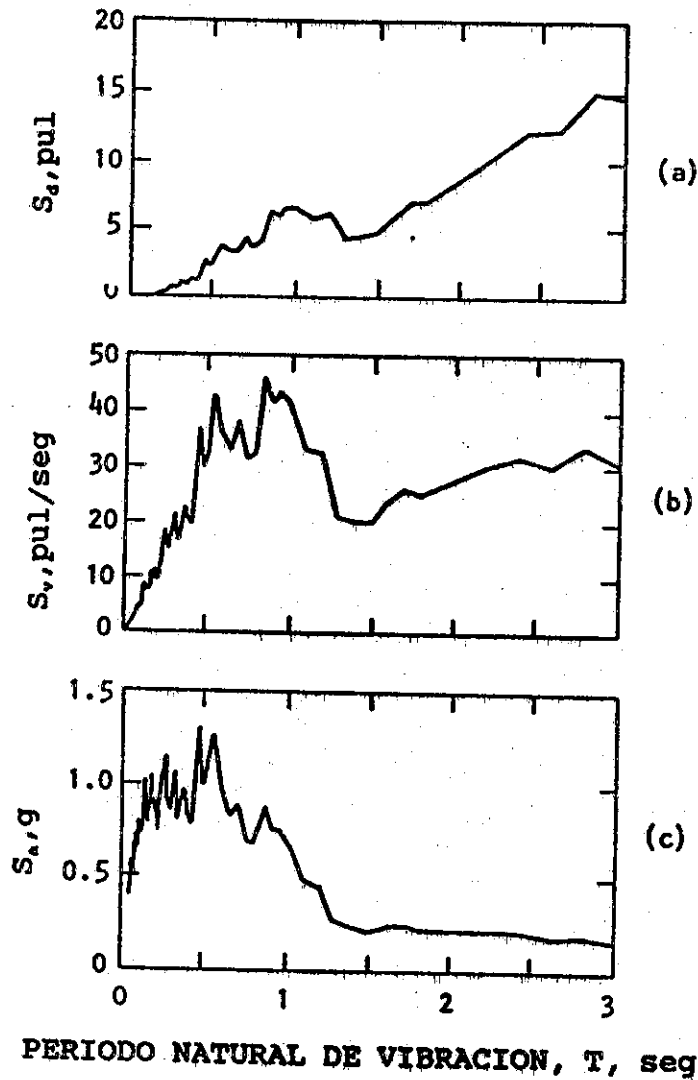


FIGURA 2.14. (a) DEFORMACIÓN O DESPLAZAMIENTO, (b) SEUDOVELOCIDAD Y (c) ESPECTRO DE RESPUESTA DE SEUDOACELERACIÓN. SISMO DE EL CENTRO, COMPONENTE S00°E. PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO  $\xi=2\%$ . (Adaptado de Dynamics of structures a primer, Anil Chopra).

El valor  $S_a$  tiene unidades de aceleración y está relacionada al máximo valor del corte basal como:

$$V_{o,max} = m\omega^2 S_d = mS_a \quad (2.36)$$

El corte basal máximo puede ser expresado como:

$$V_{o,max} = \frac{S_a}{g} W \quad (2.37)$$

Donde  $W$  es el peso del sistema y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Cuando esta expresada de esta manera,  $S_a/g$  es similar a la empleada

usualmente en códigos sísmicos de edificios. El espectro de pseudo aceleración es un trazo de  $S_a$  como función de la frecuencia natural o el período de vibración del sistema para el movimiento del suelo de la figura 2.10. El valor de  $S_a$ , correspondiente a cualquier valor de  $T$ , computado como se ilustra en la figura 2.10 y trazado en la figura 2.14a. Los valores resultantes de  $S_a$ , trazados en la figura 2.14c, como función del período de vibración  $T$ , para un valor constante de amortiguamiento, proporcionan el espectro de respuesta de pseudo aceleración, para el movimiento del suelo de la figura 2.10.

El espectro respuesta de deformación, pseudo-velocidad, y pseudo-aceleración para un sismo están relacionados por medio de la ecuación 2.35. Cualquiera de estos espectros puede ser obtenido de cualquiera de los otros dos, y cada uno de los tres espectros contienen la misma información. Los tres espectros representan una forma simplificada de presentar la misma información de la respuesta estructural.

En el capítulo 4, específicamente en los capítulos 4.1 y 4.2, se estudiarán con más detalle los espectros de respuesta.

La respuesta máxima de una estructura de un grado de libertad, conociendo su período natural de vibración  $T$  (o frecuencia circular  $\omega$ , o frecuencia  $f$ ) y su constante de amortiguamiento  $\xi$ , para el movimiento sísmico, y para la cual un espectro de respuesta está disponible, puede ser fácilmente determinada sin la necesidad de conocer la respuesta de la historia completa. La máxima deformación está relacionada a las ordenadas del espectro de respuesta mediante la ecuación:

$$U_{\max} = S_d = \frac{S_v}{\omega} = \frac{S_a}{\omega^2} \quad (2.38a)$$

$$U_{\max} = S_d = \left| \frac{T}{2\pi} \right| S_v = \left| \frac{T}{2\pi} \right|^2 S_a \quad (2.38b)$$

Del mismo modo el máximo corte basal puede ser expresado como:

$$V_o \max = k S_d = m \omega S_v = m S_a \quad (2.39)$$

y el máximo momento en la base está relacionado al máximo corte basal por la ecuación:

$$M_o \max = h V_o \max \quad (2.40)$$

Para diferentes valores de  $T$  (o  $\omega$ , o  $f$ ) y  $\xi$ , correspondientes a una estructura, cualquier valor de  $S_d$ ,  $S_v$  o  $S_a$  es leído del espectro de respuesta, como el mostrado en la figura 2.15, para luego ser sustituido en la ecuaciones 2.38 y 2.39 para determinar el valor máximo de deformación y el máximo corte basal en la estructura producido por un sismo.

Los espectros de respuesta de deformación, pseudo-velocidad

y pseudo-aceleración son suficientes para determinar las deformaciones máximas y las fuerzas máximas necesarias para el diseño estructural.

### RESPONSE SPECTRUM

#### IMPERIAL VALLEY EARTHQUAKE MAY 18, 1940 - 2037 PST

111A001 40.001.0 EL CENTRO SITE  
IMPERIAL VALLEY IRRIGATION DISTRICT COMP 500E  
DAMPING VALUES ARE 0, 2, 5, 10, AND 20 PERCENT OF CRITICAL

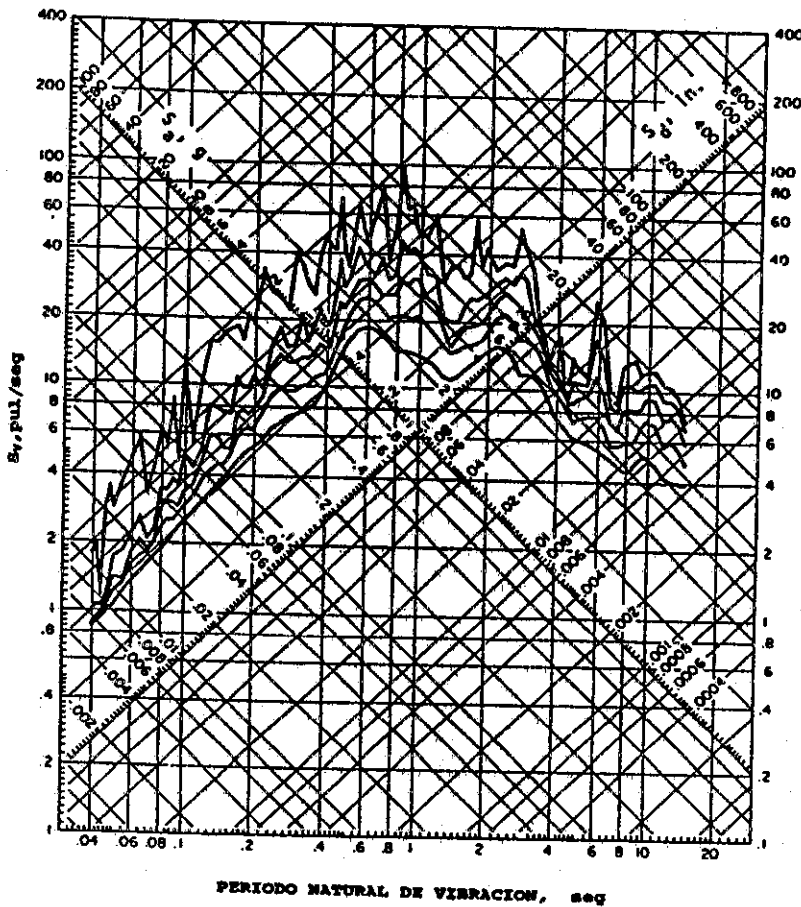


FIGURA 2.15. GRÁFICA LOGARÍTMICA DEL ESPECTRO DE RESPUESTA. SISMO DE EL CENTRO, COMPONENTE S00°E. (antes Hudson, 1979). (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

## 2.5. SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Un sistema de varios grados de libertad puede idealizarse en un edificio simétrico en que las masas se consideran concentradas en cada piso y los resortes representan la rigidez lateral de cada entrepiso (figura 2.16). En el equilibrio de cada entrepiso intervienen los mismos tipos de fuerzas que en el sistema de

un grado de libertad.

$$F_I + F_R + F_A = 0 \quad (2.41)$$

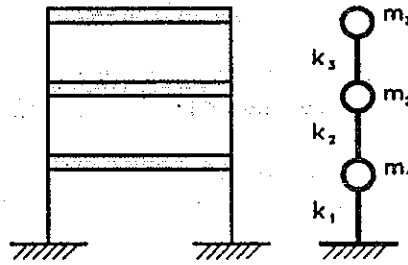


FIGURA 2.16. REPRESENTACIÓN DE UN EDIFICIO POR UN SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. (Adaptado de Diseño estructural, Roberto Meli).

En donde cada masa de piso representa un grado de libertad, con una ecuación de equilibrio dinámico para cada uno:

$$\begin{aligned} F_{Ia} + F_{Ra} + F_{Aa} &= 0 \\ F_{Ib} + F_{Rb} + F_{Ab} &= 0 \\ F_{Ic} + F_{Rc} + F_{Ac} &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Los distintos términos de esta expresión se determinan con ecuaciones idénticas a las empleadas para el sistema de un grado de libertad, pero las variables representan vectores matriciales. Así la fuerza de inercia vale:

$$F_I = M\ddot{u}_T \quad (2.43)$$

En este caso  $F_I$  es el vector de fuerzas de inercia,  $\ddot{u}_T$  es el vector de aceleraciones totales y  $M$  la matriz (diagonal) de masas.

Para cada masa se tiene entonces una fuerza de inercia:

$$\begin{aligned} F_{Ia} &= m_a \ddot{u}_{Ta} \\ F_{Ib} &= m_b \ddot{u}_{Tb} \\ F_{Ic} &= m_c \ddot{u}_{Tc} \end{aligned} \quad (2.44)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{Ia} \\ F_{Ib} \\ F_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & m_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_c \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Debe notarse que la matriz de masas es diagonal para un sistema de masas agrupadas, sin considerar acoplamiento entre las masas. Meli, ref. 12, dice que en sistemas coordenados de forma generalizada, usualmente hay acoplamiento entre las

coordenadas, lo que complica la solución. Esta es una razón primordial para usar el método de masas concentradas.

Las fuerzas en las columnas valen:

$$F_R = Ku \quad (2.46)$$

en que  $F_R$  es el vector de fuerzas en cada entrepiso,  $u$  el vector de desplazamientos y  $K$  la matriz de rigideces del sistema.

Las fuerzas de la ecuación 2.42 dependen de los desplazamientos y usando coeficientes de rigidez pueden expresarse como

$$\begin{aligned} F_{Ra} &= k_{aa}u_a + k_{ab}u_b + k_{ac}u_c \\ F_{Rb} &= k_{ba}u_a + k_{bb}u_b + k_{bc}u_c \\ F_{Rc} &= k_{ca}u_a + k_{cb}u_b + k_{cc}u_c \end{aligned} \quad (2.47)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{Ra} \\ F_{Rb} \\ F_{Rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ac} \\ k_{ba} & k_{bb} & k_{bc} \\ k_{ca} & k_{cb} & k_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

De manera similar, las fuerzas debidas al amortiguamiento son:

$$F_A = C\dot{u} \quad (2.49)$$

en que  $F_A$  es el vector de fuerzas de amortiguamiento,  $\dot{u}$  el vector de velocidad y  $C$  la matriz de amortiguamiento. Usualmente el amortiguamiento se considera igual en todos los entrepisos y la matriz  $C$  se vuelve una constante, además el amortiguamiento se expresa en términos de coeficientes de amortiguamiento.

La ecuación de equilibrio toma la misma forma que en un sistema de un grado de libertad, aunque ahora se trata de una ecuación matricial:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_0 \quad (2.50)$$

El procedimiento para la determinación de las matrices de masa, rigidez y amortiguación se detallan en el capítulo 3 en la referencia 15.

El primer paso para la solución de esta ecuación diferencial es resolver el caso de vibración libre con amortiguamiento nulo, que permite determinar con buena aproximación los períodos de vibración y formas modales.

En este caso no hay fuerza externa y el amortiguamiento se considera nulo, entonces la ecuación diferencial 2.50 se reduce a:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (2.51)$$

Ante la acción de un impulso y suponiendo que no existe amortiguamiento, la estructura vibrará libremente adoptando una configuración de desplazamientos que se denomina forma modal y con una frecuencia de vibración peculiar de cada modo. Existen tantos modos como número de grados de libertad tiene el sistema.

En vibración libre, el movimiento es armónico simple:

$$u = a \text{ sen } \omega t$$

en que "a" representa la amplitud de vibración. Nuevamente, la ecuación se expresa en forma matricial, u es un vector de desplazamientos y "a" un vector de constantes de amplitud. Por lo tanto se tiene:

$$\ddot{u} = -\omega^2 a \text{ sen } \omega t$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial 2.51

$$Ka - \omega^2 Ma = 0$$

Para que "a" sea diferente de cero se requiere

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.52)$$

Esta ecuación se resuelve con métodos numéricos estándar y permite encontrar los N valores de la frecuencia  $\omega$  que corresponden a cada modo natural de vibración del sistema (uno por cada masa concentrada que compone el sistema).

Conocidos los N valores de  $\omega$  se pueden determinar los N valores de  $a_i$  que corresponden a cada frecuencia natural y que determinan la forma modal correspondiente. La figura 2.17 muestra los modos de vibración de un sistema de tres grados de libertad.

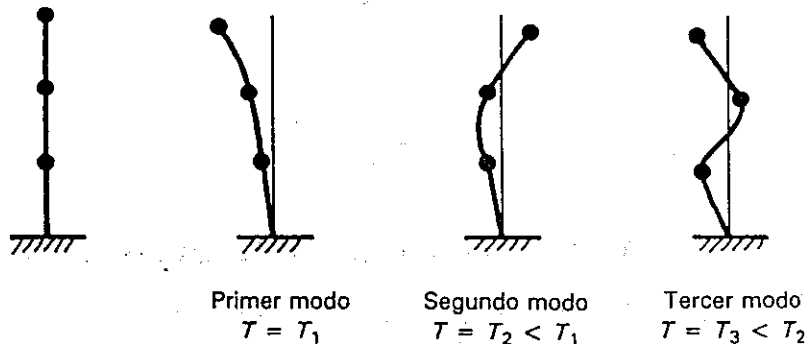


FIGURA 2.17. MODOS DE VIBRACIÓN DE UN SISTEMA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD. (Adaptado de Diseño estructural, Roberto Meli).

El primer modo, o modo fundamental, se caracteriza por no mostrar puntos de inflexión y por tener la frecuencia más baja

(el período más largo). Al pasar a los modos superiores, la configuración presenta cada vez un nuevo punto de inflexión y el período natural va disminuyendo.

Interesa conocer la respuesta del sistema de varios grados de libertad ante una excitación sísmica cualquiera impuesta en su base. Al excitar el sistema, cada modo responde como un sistema independiente de un grado de libertad y la respuesta total será la combinación de las respuestas independientes de cada modo, multiplicada cada una por un factor de participación.

El desplazamiento de piso  $i$  propuesto por Dowrick, ref. 6 se obtendrá, por tanto, como la suma de las participaciones de cada modo a dicho desplazamiento:

$$u_i = \sum_{n=1}^N \phi_{in} Y_{in}(t) \quad (2.53)$$

en que  $Y_{in}(t)$  es el desplazamiento en el nivel  $i$ , del modo  $n$ , en el instante  $t$  y  $\phi_{in}$  es el factor que define la escala a que interviene el modo  $n$ , en el movimiento del nivel  $i$ .

Puede hacerse una simplificación importante en las ecuaciones de movimiento, debido al hecho de que cada modo tiene una ecuación independiente de forma, exactamente equivalente a la de un sistema de un grado de libertad. Por las propiedades de ortogonalidad de las formas modales la ecuación 2.50 puede escribirse

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{\phi_n^T F(t)}{\phi_n^T M \phi_n} \quad (2.54)$$

donde  $Y_n$  es un desplazamiento generalizado en el modo  $n$ , que lleva al desplazamiento real y  $\phi_n$  es el vector renglón de la forma modal correspondiente al vector columna  $\phi_n$ .

## 2.6. ANALISIS DINÁMICO MODAL

### 2.6.1. ANALISIS DINÁMICO MODAL CON HISTORIA DE LA RESPUESTA

El análisis modal normal es una técnica más limitada que la integración directa, ya que depende de la separación artificial de los modos normales de vibración y de combinación de fuerzas y desplazamientos asociados por superposición con un número elegido de ellos. Como con las técnicas de integración directa, pueden aplicarse a la estructura los acelerogramas de sismos reales y con ello determinar una historia de esfuerzos aunque, debido al uso de la técnica de superposición, estará limitada al comportamiento



lineal del material. Aunque el análisis modal puede proporcionar cualquier grado de precisión para el comportamiento lineal, incorporando todas las respuestas modales, usualmente dicha aproximación se realiza empleando solamente los primeros modos, con objeto de ahorrar tiempo de cálculo. Se tienen problemas al analizar sistemas en que los modos no pueden separarse en forma válida; por ejemplo, cuando existe acoplamiento entre modos.

El uso del espectro de respuesta con la técnica de análisis modal, que será descrito en el capítulo siguiente, admite únicamente los valores máximos de las funciones, tales como desplazamiento, aceleración, esfuerzo cortante o momento. En algunos casos, como una función varía con el tiempo durante un terremoto, puede ser también de interés.

Por otra parte, usando el método de análisis modal en conjunto con un registro de terremoto, apropiado, la respuesta de varios sistemas de libertad de grado único, con frecuencias similares a las del sistema real que está siendo analizado, son computados. Usando una representación de medida histórica, estas computaciones son hechas en series de pasos de tiempo, empezando con las condiciones iniciales y tomando un intervalo de tiempo pequeño y computando la respuesta final de este  $\Delta t$ .

Las respuestas de las formas de modo del sistema real son después computadas y combinadas, usando factores de participación apropiados, para obtener la reacción del sistema real como una función del tiempo. En forma de ecuación, esto es:

$$U_m = \sum_{n=1}^N f_n U_{nm} \mu_n(t) \quad (2.55)$$

donde  $\mu_n$  es la reacción del sistema de libertad de grado único correspondiente al sismo al final de este intervalo  $\Delta t$ , y es una función del período o frecuencia del sistema y el ingreso del movimiento del sismo particular.

La reacción es después calculada, usando otro intervalo de tiempo. Esta operación continúa hasta que las condiciones máximas son encontradas o el final del período de tiempo de interés es alcanzado. Los cálculos son hechos mejor por computadora, ya que son largos y repetitivos.

En la mayoría de los casos, este método dará valores más exactos para las velocidades, desplazamientos, esfuerzos cortantes, etc., que el método de espectro de respuesta.

Sin embargo, los valores calculados aplican únicamente a un registro de aceleración particular. Así, mientras que ellos pueden aproximar los movimientos para el sismo precedente, pueden no tener significado para el siguiente. Por consiguiente, el analista tiene que balancear el costo aumentado del tiempo de

la computadora y la exactitud de los resultados obtenidos, y decidir si usar el método de espectro de respuesta o el método de análisis modal con medida histórica. Además, mientras que el método de medida histórica parece producir resultados más precisos, hay varias posibilidades de error y los resultados pueden no ser tan exactos como ellos parecen primero.

La ecuación de movimiento presentada por Chopra, ref. 3 para el modo de vibración natural  $n$ , del edificio de múltiples pisos idealizado, puede ser expresado como:

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = -\frac{U_n}{M_n} \ddot{u}_o(t) \quad (2.56)$$

donde

$$U_n = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn} \quad (2.57a)$$

y la masa modal

$$M_n = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2 \quad (2.57b)$$

Esta ecuación modal, es también la ecuación de movimiento para un sistema de un grado de libertad (ecuación 2.23), con frecuencia de vibración natural  $\omega_n$  y proporción de amortiguación  $\xi_n$ , excitada al grado  $U_n/M_n$ , por la aceleración del suelo  $U_o(t)$ . Así, por analogía con la ecuación 2.24, el desplazamiento modal es:

$$Y_n(t) = -\frac{U_n}{M_n} \frac{1}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{u}_o(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (2.58)$$

$$\text{Con } \omega_{nd} = \omega_n \sqrt{1-\xi_n^2}$$

La contribución del modo  $n$  al desplazamiento  $u_j(t)$ , en el piso  $j_o$ , es dada por:

$$U_{jn}(t) = Y_n(t) \phi_{jn}, \quad j=1,2,3,\dots,N \quad (2.59)$$

lo cual, después de la sustitución de la ecuación 2.58, llega a ser:

$$U_{jn}(t) = -\frac{U_n}{M_n} \frac{\phi_{jn}}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{u}_o(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (2.60)$$

La deformación o desvío, en el piso  $j$ , es dado por la diferencia de desplazamientos de los pisos, arriba y abajo:

$$\Delta_{jn}(t) = U_{jn}(t) - U_{j-1,n}(t) \quad (2.61)$$

Wakabayashi, ref. 18, dice que las fuerzas internas, tales como esfuerzos de piso, momentos, etc., asociados con deformaciones del edificio de múltiples pisos, pueden ser convenientemente determinados por la introducción del concepto de fuerzas laterales equivalentes. Estas son fuerzas externas  $F$ , las cuales, si son aplicadas como fuerzas estáticas, causarían desplazamientos estructurales  $u$ . Así, en cualquier instante de tiempo, las fuerzas equivalentes asociados con desplazamientos modales  $u_n(t)$ , son:

$$f_n(t) = KU_n(t)$$

y después de la sustitución de la ecuación 2.59, llegan a ser:

$$f_n(t) = K\phi_n Y_n(t)$$

Será útil expresar estas fuerzas en términos de matriz de masa, lo cual puede ser arreglado con la ayuda de la ecuación 2.52

$$f_n(t) = \omega_n^2 m \phi_n Y_n(t) \quad (2.62a)$$

Así, la fuerza en el piso  $j_0$  (figura 2.14), es:

$$f_{j_n}(t) = \omega_n^2 m_j \phi_{j_n} Y_n(t) \quad (2.62b)$$

la cual, después de la sustitución de la ecuación 2.58, llega a ser:

$$f_{j_n}(t) = -m_j \phi_{j_n} \frac{U_n}{M_n} \frac{\omega_n^2}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{[-\xi_{n\omega n}(t-\tau)]} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (2.63)$$

Cualquier fuerza interna, puede ser determinada por análisis estático de la estructura sujeta a las fuerzas laterales equivalentes. Por ejemplo, el esfuerzo y momento en la base del edificio, son:

$$V_{on}(t) = \sum_{j=1}^N f_{j_n}(t) \quad (2.64a)$$

$$M_{on}(t) = \sum_{j=1}^N h_j f_{j_n}(t) \quad (2.64b)$$

donde  $h_j$  es la altura del piso  $j_0$ , arriba de la base (figura 2.18). Después de sustituir la ecuación 2.63, el esfuerzo de base puede ser expresado como:

$$V_{on}(t) = -\frac{U_n}{M_n} \frac{\omega_n^2}{\omega_{nd}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{[-\xi_{n\omega n}(t-\tau)]} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (2.65a)$$

y, el momento de base, como:

$$M_{on}(t) = -\frac{U_n}{M_n} \frac{\omega_n^2}{\omega_{nd}} \left| \sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{j_n} \right| \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{[-\xi_{n\omega n}(t-\tau)]} \text{sen}[\omega_{nd}(t-\tau)] d\tau \quad (2.65b)$$

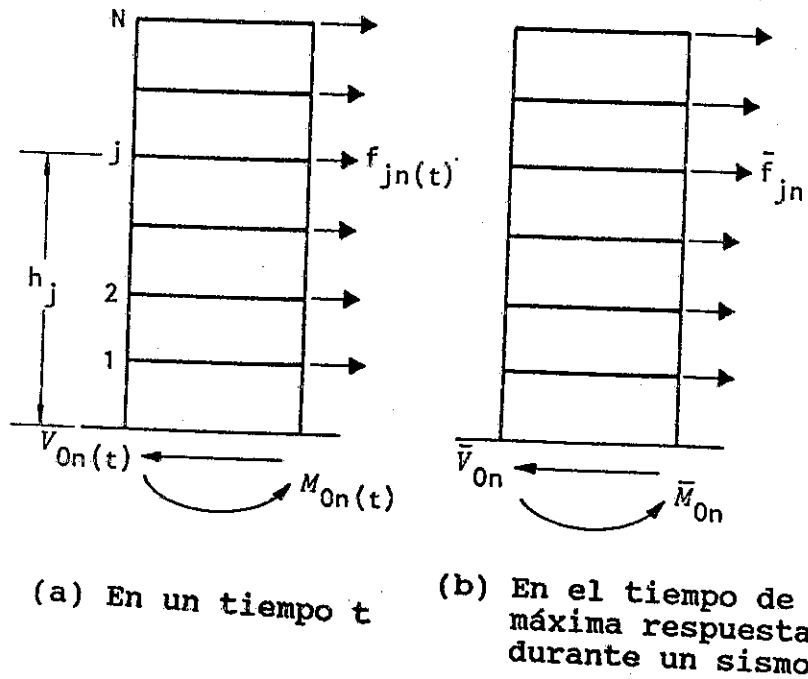


FIGURA 2.18. FUERZA LATERAL EQUIVALENTE EN  $n$ -ésimo MODO DE VIBRACIÓN. (Adaptado de Dynamics of structures, a primer, Anil Chopra).

La respuesta sísmica de la estructura, es obtenida combinando las respuestas modales en todos los modos de vibración. Así, el desplazamiento en el piso  $j_0$ , la fuerza lateral equivalente en el piso  $j_0$ , el esfuerzo de base, y el momento de base, son dados por:

$$U_j(t) = \sum_{n=1}^N U_{jn}(t) \quad (2.66a)$$

$$f_j(t) = \sum_{n=1}^N f_{jn}(t) \quad (2.66b)$$

$$V_o(t) = \sum_{n=1}^N V_{on}(t) \quad (2.66c)$$

$$M_o(t) = \sum_{n=1}^N M_{on}(t) \quad (2.66d)$$

En general, el valor total de cualquier respuesta  $r(t)$  es la combinación de las contribuciones de todos los modos de vibración

a esa cantidad de respuesta:

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) \quad (2.67)$$

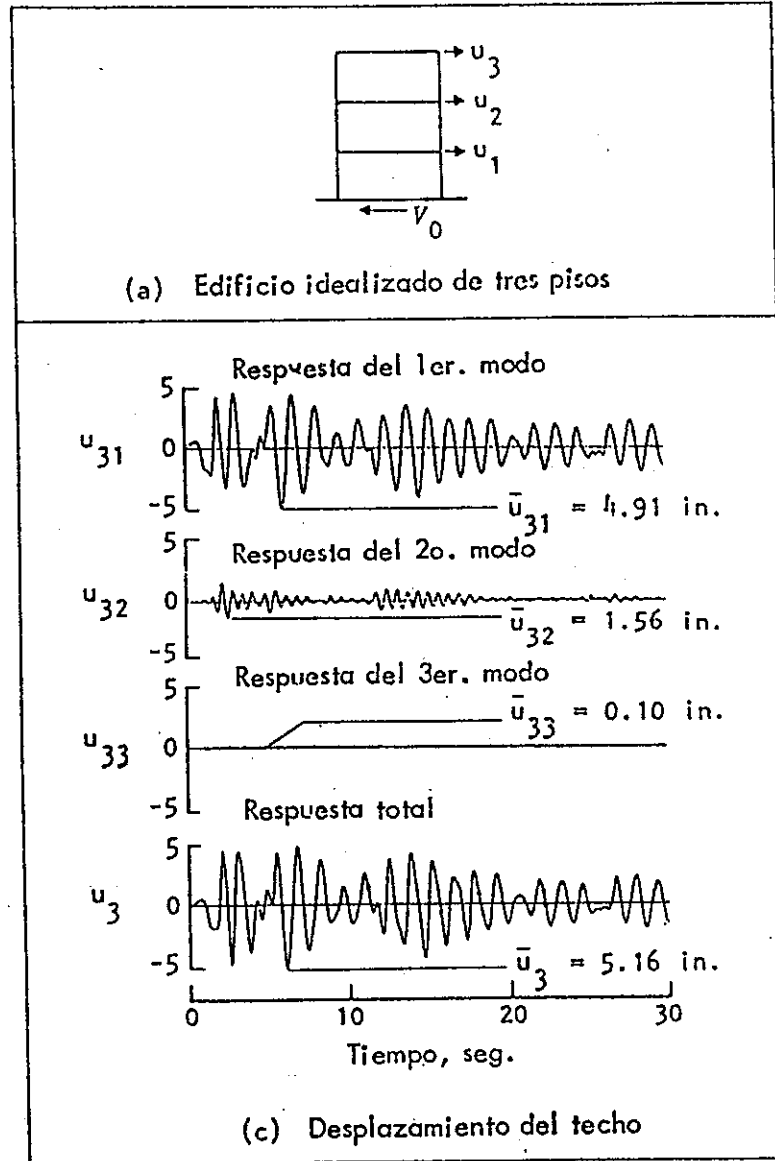


FIGURA 2.19.a. RESPUESTA SÍSMICA (DESPLAZAMIENTO DEL TECHO) DE UN EDIFICIO DE TRES NIVELES. (Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

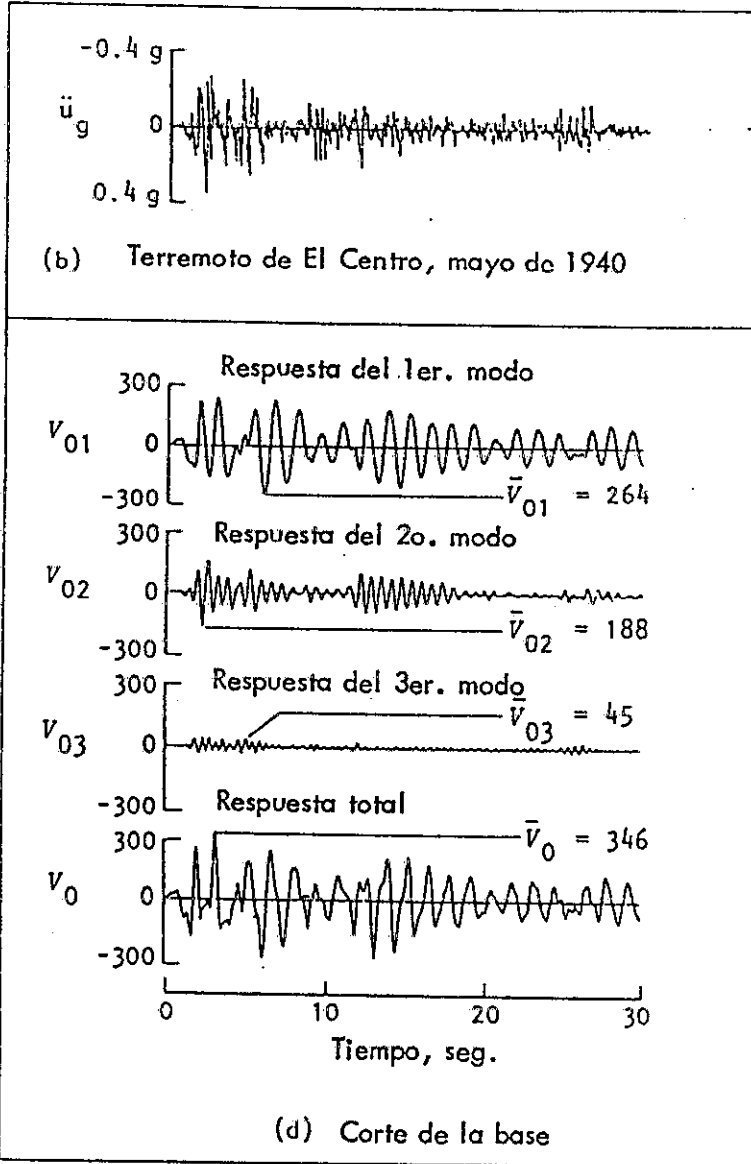


FIGURA 2.19.b. RESPUESTA SÍSMICA (CORTE EN LA BASE) DE UN EDIFICIO DE TRES NIVELES. (Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios, Andrés Ramos).

Siguiendo el método modal, o método de superposición de modos, descrito con más detalle en el capítulo 3.6, la respuesta de un edificio de tres pisos idealizado de la figura 2.19, al movimiento sísmico, mostrado en la misma figura, es determinada con la ayuda de un programa de computadora. Una porción pequeña de los resultados de la respuesta es decir, el desplazamiento del techo y esfuerzo de base, es presentada. Mostradas como una función de tiempo durante el terremoto, las contribuciones

de los tres modos de vibración natural a cada cantidad de respuesta a lo largo con las respuestas totales.

Una característica muy atractiva del método modal, es que análisis independientes de sistemas de un solo grado de libertad, para cada vibración natural, pueden ser hechos. Aún más significativo es el hecho que, en general, la respuesta necesita ser determinada únicamente en los primeros pocos modos, porque la respuesta a los terremotos es, primeramente, debida a los modos más bajos de vibración (ver por ejemplo, los resultados de la figura 2.19b). Así únicamente las primeras pocas frecuencias naturales y modos de vibración necesitan ser calculados y los cálculos de respuesta necesitan ser repetidos solamente para los primeros pocos modos de vibración.

Un análisis modal completo, suministra la historia de respuesta de una estructura, incluyendo fuerzas, desplazamientos, y deformaciones a una historia de aceleración del suelo especificada. Desde la historia de respuesta, la respuesta máxima puede ser rápidamente determinada. Mostrados en la figura 2.19, están los valores máximos del desplazamiento del techo  $U(t)$  y esfuerzo de base  $V_o(t)$ , para la estructura de tres pisos, sujeta al movimiento del suelo seleccionado.

**RESUMEN:** La respuesta de un edificio de múltiples pisos idealizado, al movimiento sísmico del suelo, puede ser computada por el procedimiento siguiente:

1. Definir la aceleración del suelo  $\ddot{u}_o(t)$  por las ordenadas numéricas del acelerograma corregido.
2. Definir propiedades estructurales.
  - a. Computar matrices de masa y rigidez  $M$  y  $K$ .
  - b. Estimar proporciones de amortiguación modal  $\xi_n$ .
3. Resolver el problema Eigen (valores característicos) de la ecuación 2.52, para determinar las frecuencias  $\omega_n$  (períodos naturales  $T=2\pi/\omega_n$ ) y modos  $\phi_n$  de vibración.
4. Computar la respuesta en modos de vibración individuales, repitiendo los pasos siguientes para cada modo:
  - a. Calcular la respuesta modal  $U_n(t)$  por evaluación numérica de la integral de Duhamel en la ecuación 2.58 o resolviendo directamente la ecuación 2.57, la ecuación de movimiento para el sistema de un solo grado de libertad con propiedades representativas del modo particular.
  - b. Calcular desplazamientos de piso, con la ecuación 2.59.
  - c. Calcular derivas de piso, a partir de los desplazamientos de piso, usando la ecuación 2.61.
  - d. Calcular fuerzas laterales equivalentes, desde la ecuación 2.62.
  - e. Calcular fuerzas internas, esfuerzos y momentos de

piso por análisis estático de la estructura sujeta a fuerzas laterales equivalentes; en particular, el esfuerzo de base y momento de base, pueden ser calculados desde la ecuación 2.64.

5. Determinar el valor total de la cantidad de respuesta  $r(t)$ , desde la ecuación 2.67, combinando las contribuciones modales  $r_n(t)$  a la cantidad de reacción, de acuerdo al capítulo 3.6. En particular, desplazamientos de piso, fuerzas laterales equivalentes, esfuerzo de base y momento de base, pueden obtenerse con las ecuaciones 2.66.

### 2.6.2. ANÁLISIS DINÁMICO CON ESPECTRO DE RESPUESTA

La técnica del espectro respuesta es realmente un caso especial, simplificado, del análisis modal con la historia de la respuesta completa. Los modos de vibración son determinados, en período y forma, de la manera más usual y las magnitudes de respuesta máximas correspondientes a cada modo son obtenidas con referencias a un espectro de respuesta. Una vez hecho lo anterior se emplea una regla arbitraria para superponer las respuestas de los distintos modos. Los momentos y fuerzas resultantes en la estructura, corresponden a las envolventes de valores máximos más que a un conjunto de valores existentes simultáneamente. El método de espectro de respuesta tiene la gran virtud de ser veloz y de poco costo.

El uso del método de espectro respuesta presume que hay disponible un espectro de respuesta apropiado para el lugar de interés en particular.

Como ya se dijo, la historia de respuesta completa, se usa poco hoy en día para diseño de estructuras; se considera que los valores máximos de respuesta al sismo, usualmente bastan porque la respuesta en cada modo de vibración puede ser fácilmente modelada para un sistema de grado de libertad simple. La respuesta máxima en el modo puede ser directamente computada desde el espectro de respuesta de terremoto y existen procedimientos para combinar los máximos modales para obtener estimados (pero, no el valor exacto) del máximo de reacción total.

La respuesta máxima en el modo de vibración natural puede ser expresada en términos de  $U_{dn}$ ,  $U_{vn}$ , y  $U_{an}$ , los cuales son las ordenadas de deformación (o desplazamiento), pseudo-velocidad y pseudo-aceleración de espectros de respuesta, respectivamente, correspondiendo al período de vibración  $T_n$  (o frecuencia de vibración  $\omega_n$ ) y al amortiguamiento  $\xi_n$ , del modo.

Basados en las definiciones de estos espectros de respuesta y en las ecuaciones de desplazamientos modales, los valores máximos de las varias cantidades de reacción, obtenidos de referencia 3 son dados por las ecuaciones 2.68 a 2.69.



El desplazamiento modal máximo es:

$$\bar{Y}_n = \frac{U_n}{M_n} U_{dn} \quad (2.68)$$

El desplazamiento máximo en piso  $j_n$  es:

$$U_{jn} = \frac{U_n}{M_n} U_{dn} \phi_{jn} \quad (2.69)$$

Y la deformación máxima (o desplazamiento) en la historia  $j_n$  es:

$$\Delta_{jn} = \frac{U_n}{M_n} U_{dn} (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) (n) \quad (2.70)$$

El signo algebraico de  $U_n$ , no necesita ser retenido en las ecuaciones 2.68-2.71, además, el signo algebraico de  $\phi_{jn}$  (y  $\phi_{j-1,n}$ ), puede ser obviada en la ecuación 2.69, pero, debe ser retenido en la ecuación 2.70, porque las direcciones relativas de desplazamientos en pisos arriba y abajo del piso, afectan el desplazamiento del piso.

El valor máximo de la fuerza lateral equivalente en el piso  $j_n$  (figura 2.18) es:

$$F_{jn} = \frac{U_n}{M_n} U_{dn} m_j \phi_{jn} \quad (2.71)$$

Los valores máximos de fuerzas internas en el edificio, esfuerzo de piso y momento de piso pueden ser determinados por análisis estático del edificio sujeto a las fuerzas laterales equivalentes máximas  $F_{jn}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Al aplicar estas fuerzas a la estructura, la dirección de las fuerzas es controlado por el signo algebraico de  $\phi_{jn}$ . Por consiguiente, las fuerzas laterales equivalentes, para el modo fundamental, actuarán en la misma dirección, pero para el segundo y modos más altos, les cambiarán la dirección a medida que uno se mueve en la parte superior de la estructura. Por análisis estático, los valores máximos de esfuerzo y momento en la base del edificio, son:

$$V_{on} = \sum_{j=1}^N F_{jn}$$

$$M_{on} = \sum_{j=1}^N h_j F_{jn}$$

donde  $h_j$  = altura del piso  $j$   
 $f_{jn}$  = fuerza lateral en el piso  $j$  del modo  $n$ .

Después de substituir la ecuación 2.71, estas ecuaciones llegan a ser:

$$\bar{V}_{on} = \frac{U_n^2}{M_n} U_{an} \quad (2.72)$$

$$M_{on} = \frac{U_n}{M_n} U_{an} \sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn} \quad (2.73)$$

En estas ecuaciones los desplazamientos son relacionados al espectro de respuesta de deformación y las fuerzas al espectro de respuesta de pseudoaceleración. Sin embargo como se indicó en el capítulo 2.4,  $U_{dn}$ ,  $U_{vn}$ , y  $U_{an}$ , están interrelacionadas por las ecuaciones;

$$U_{an} = \omega_n U_{vn} = \omega_n^2 U_{dn} \quad (2.35a)$$

o equivalente por las ecuaciones:

$$U_{an} = \frac{2\pi}{T_n} U_{vn} = \left| \frac{2\pi}{T_n} \right|^2 U_{dn} \quad (2.35b)$$

Así los desplazamientos y deformaciones (Ecuaciones 2.68 a 2.70), pueden ser expresadas también en términos de  $U_{vn}$ , o  $U_{an}$ , y las fuerzas (Ecuaciones 2.71 a 2.73) en términos de  $U_{dn}$  o  $U_{vn}$ .

La forma de las ecuaciones 2.69 y 2.71 a 2.73, es similar a la empleada usualmente en referencias estándar. Con lo cual la ecuación 2.71, puede ser reescrita como:

$$V_{on} = \frac{U_{an}}{g} W_n \quad (2.74)$$

En el cual  $g$  es la aceleración de la gravedad y el peso efectivo  $W_n$  (o porción del peso) del edificio que participa en el modo de vibración  $n$ , es dado por:

$$W_n = \frac{\left| \sum_{j=1}^N W_j \phi_{jn} \right|^2}{\sum_{j=1}^N W_j \phi_{jn}^2} \quad (2.75)$$

Donde  $W_j = m_j g$  es el peso del piso  $j$ ,  $\phi_{jn}$  es el desplazamiento modal del piso  $j$ , y  $N$  es el número total de niveles del piso. La ecuación 2.75, indica que el peso total de un edificio de un piso, es efectivo en producir el esfuerzo de base, mientras que únicamente una porción del peso de un edificio de múltiples pisos es efectiva en producir el esfuerzo de base, debido al modo de vibración  $n$ , la porción depende de la distribución de peso sobre la altura y la forma del modo. La ecuación 2.75, dará valores de  $W_n$  que son independientes de cómo los modos son normalizados. Puede ser probada analíticamente que, la suma de los pesos efectivos en todos los modos de vibración del edificio

es igual al peso total de edificio; por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^N W_n = \sum_{i=1}^N W_j$$

El momento de base máximo, debido al modo de vibración  $n_o$  (Ecuación 2.73). Puede ser reescrito como:

$$M_{on} = h_n V_{on} \quad (2.76)$$

Donde:

$$h_n = \frac{\sum_{i=1}^N h_j W_j \phi_{jn}}{\sum_{i=1}^N W_j \phi_{jn}} \quad (2.77)$$

El esfuerzo de base  $V_{on}$  es igual a la resultante de las fuerzas laterales equivalentes  $f_{jn}$  y,  $h_n$  puede ser interpretada como la altura de la fuerza resultante sobre la base. Porque la fuerza lateral equivalente está concentrada en la parte superior de un edificio de un piso, la altura total del edificio es efectiva en producir el momento base. En un edificio de múltiples pisos, sin embargo, las fuerzas laterales equivalentes están localizadas en los varios pisos y la altura efectiva  $h_n$ , es menor que la altura total del edificio;  $h_n$  depende de la distribución del peso sobre la altura y la forma de modo. La ecuación 2.77, dará valores de  $h_n$ , que son independientes de cómo los modos son normalizados.

Para algunos de los modos de vibración más altos que el modo fundamental, la altura efectiva computada con la ecuación 2.77, puede resultar ser negativa. Un valor negativo para  $h_n$  implica que, en cualquier instante de tiempo en particular, en el tiempo en que las reacciones modales alcanzan sus máximos, el esfuerzo de base  $V_{on}(t)$  y el momento de base  $M_{on}(t)$ , debido al modo de vibración  $n$ , tienen signos algebraicos opuestos. Si esta distinción no interesa, el signo negativo en  $h_n$ , puede ser ignorado.

Empezando con las ecuaciones 2.71 y 2.72, puede ser demostrado que, la fuerza lateral  $f_{jn}$ , en el piso  $j$ , en el modo de vibración, es relacionado al esfuerzo de base en el modo, por la ecuación:

$$f_{jn} = V_{on} \frac{W_j \phi_{jn}}{\sum_{i=1}^N W_i \phi_{jn}} \quad (2.78)$$

Los desplazamientos del piso, o deflexiones, debido a las fuerzas laterales  $f_{jn}$ , en el modo  $n$ , son proporcionales a la forma de modo, y las dos están relacionadas simplemente así:

$$U_{jn} = \frac{1}{W_n^2} \frac{q}{W_j} \bar{F}_{jn} \quad (2.79)$$

Como se indicó una reacción  $r(t)$  del edificio al movimiento del suelo de terremoto, es la superposición de las contribuciones  $r_n(t)$ , de los modos de vibración natural a la cantidad de respuesta y la respuesta máxima en modos de vibración individual, pueden ser determinados directamente desde el espectro de respuesta de terremoto.

Porque, en general, los máximos modales  $\bar{F}_n$  no ocurren al mismo tiempo, no pueden ser directamente superpuestos para alcanzar  $r$ , los máximos de la respuesta combinada (figura 2.19).

En el capítulo 3.6 se presentan parámetros para superponer los máximos modales, para así poder obtener un parámetro conservador de la respuesta sísmica.

**RESUMEN:** La respuesta sísmica de un edificio de múltiples pisos puede ser estimado con el espectro de respuesta para el movimiento sísmico del suelo, por el procedimiento siguiente:

1. Determinar o seleccionar el espectro de respuesta para el movimiento del suelo, si no está disponible ya.
2. Definir propiedades estructurales.
  - a) Computar matrices de masa y rigidez  $m$  y  $k$ .
  - b) Estimar el amortiguamiento modal  $\xi_n$ .
3. Resolver el problema-eigen de la ecuación de las propiedades de vibración para determinar las pocas frecuencias naturales más bajas,  $\omega_n$  (períodos naturales  $T_n = 2\pi/\omega_n$ ) y los modos  $\phi_n$  de vibración.
4. Computar la respuesta máxima, en modos de vibración individuales, repitiendo los pasos siguientes para los modos de vibración más bajos:
  - a) Correspondiendo al período  $T_n$  y proporción de amortiguación  $\xi_n$ , leer las ordenadas  $U_{dn}$  y  $U_{an}$  de la deformación (o desplazamiento) y espectros de respuesta pseudo-aceleración, del movimiento sísmico del suelo.
  - b) Computar los desplazamientos del piso a partir de la ecuación 2.69.
  - c) Computar desviaciones de piso con los desplazamientos del piso usando la ecuación 2.70.
  - d) Computar fuerzas laterales equivalentes, a partir de la ecuación 2.71 (o con la ecuación 2.69, después de la computación del esfuerzo de base por la ecuación 2.74).

- e) Computar fuerzas internas (esfuerzos de piso y momentos de piso) por análisis estático de la estructura sujeta a fuerzas laterales equivalentes; en particular, el esfuerzo de base puede ser computado con la ecuación 2.72 (o ecuación 2.74) y el momento de base con la ecuación 2.73 (o ecuación 2.74).
5. Determinar un estimado del máximo  $\bar{r}$  de cualquier respuesta (desplazamiento) de un piso (deformación en un piso, esfuerzo o momento en un piso, etc.), combinando los máximos modales  $\bar{r}_n$ , para la cantidad de respuesta de acuerdo al capítulo 3.6.

## 2.7. RESUMEN

Para el estudio de la dinámica de estructuras es necesario primero comprender lo que son las ecuaciones de movimiento, para ello la forma simplificada de estudiarlo es por medio de una estructura de un grado de libertad, para luego aplicarle las excitaciones sísmicas y analizarla por medio de los diferentes métodos de análisis sísmico dinámico, entre los cuales están el método paso a paso, el método con espectro respuesta y el método de análisis modal; para estos dos últimos métodos, es necesario aplicar los principios básicos de una estructura de un grado de libertad, para analizar una estructura de varios grados de libertad, que sería un edificio de múltiples pisos, ya que con ello se obtendrán los diferentes modos de vibración de la estructura y así se podrá obtener una respuesta para diseño.

Una estructura responde a una excitación sísmica, mediante una vibración a través de la cual disipa la energía que es incorporada a la estructura por dicho movimiento. Las principales características de su respuesta pueden ilustrarse mediante el estudio de un sistema simple de un grado de libertad.

Cuando el sistema está sujeto a un movimiento de su base, definido por una historia de desplazamientos,  $u_0$ , o de aceleraciones del suelo  $\ddot{u}_0$ , la masa entrará en oscilación y se generarán sobre ella tres tipos de fuerzas: la fuerza de inercia, la fuerza elástica (por su rigidez) y la fuerza de amortiguamiento, con lo cual la ecuación de equilibrio dinámico es:

$$F_I + F_A + F_R = 0$$

Sustituyendo cada una de las tres fuerzas por los parámetros que las representan queda:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_0(t)$$

Que es la ecuación de movimiento, gobernando la deformación

$u(t)$  del sistema estructural, sujeto a aceleración  $\ddot{u}_o(t)$  del sismo.

De la comparación de las ecuaciones de movimiento debidas al movimiento del suelo y debidas a una fuerza externa, se determina que son una misma. Con lo cual el movimiento del suelo puede ser reemplazado por una fuerza efectiva  $= -m_o(t)$ . Esta equivalencia fue el fundamento para crear el método estático equivalente.

Dividiendo la ecuación de equilibrio dinámico entre  $m$ , queda en función de dos constantes,  $c/m$  y  $k/m$ , que representan conceptos relacionados con la vibración libre del sistema. La vibración libre toma lugar cuando una estructura sigue moviéndose después de que se ve sujeta a una excitación externa que cesa. Cuando el amortiguamiento es nulo, el sistema describe un movimiento armónico simple. Así, las propiedades de vibración libre  $\omega$ ,  $T$  y  $f$ , dependen solamente de la masa y rigidez de la estructura.

El amortiguamiento representa la disipación de energía que la estructura realiza, principalmente debido a fricción interna de los materiales y al rozamiento entre los componentes de la construcción; este amortiguamiento hace decaer las oscilaciones. En vibración libre, se define como amortiguamiento crítico aquel para el cual el sistema, después de desplazado, volvería a su posición de reposo sin oscilar. Con lo cual el movimiento de la estructura de un piso, sujeta a movimiento del suelo, es gobernado por la ecuación:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{u}_o(t)$$

La solución de esta ecuación conduce a la reacción de deformación  $u(t)$ , la cual depende de: (1) las características de la aceleración del suelo  $\ddot{u}_o(t)$ , (2)  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la frecuencia de vibración circular natural (o equivalentemente el período de vibración natural  $T$ ) de la estructura sin amortiguación, y (3) la proporción de amortiguación  $\xi$  de la estructura.

La solución de la ecuación diferencial, cuando la estructura parte del reposo, se obtiene como la superposición de la respuesta a una serie de impulsos diferenciales, en la forma llamada integral de Duhamel que puede proporcionar la historia de respuesta de deformación  $u(t)$ .

$$u(t) = - \frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{u}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau$$

La velocidad y la aceleración de la masa se pueden calcular derivando sucesivamente la expresión anterior con respecto al tiempo. Para fines de diseño interesarían los valores máximos absolutos de dichas respuestas.

Una vez que la historia de reacción de deformación  $u(t)$  ha sido evaluada, el esfuerzo y momento en la base del edificio puede ser determinado convenientemente, introduciendo el concepto

de fuerza lateral equivalente. El esfuerzo de base  $V_0$  y el momento de base  $M_0$  pueden ser determinados por análisis estático de la estructura, sujeta a la fuerza lateral equivalente, así:

$$\begin{aligned} V_0(t) &= m\omega^2 u(t) \\ M_0(t) &= hV_0(t) \end{aligned}$$

Como se indicó anteriormente dentro de la integral de Duhamel o en la ecuación de movimiento es necesario conocer las características de la aceleración del suelo. Estas aceleraciones o excitaciones sísmicas se originan por desplazamientos relativos súbitos dentro de la corteza terrestre de la acción de fuerzas geológicas, y se denominan tectónicas. Estos temblores o sismos son los de mayor interés en la ingeniería.

Información sobre las características del movimiento sísmico del suelo puede obtenerse de acelerogramas de sismos pasados, que son un registro de la historia de aceleraciones que provoca el sismo específico. Las características de los acelerogramas que más se relacionan con la potencialidad destructiva, o sea con la intensidad del sismo, son las amplitudes máximas (aceleraciones y velocidades máximas), la duración de la etapa sensible, o sea aquella en que la amplitud de aceleración tiene un valor apreciable y las frecuencias de vibración dominantes del movimiento.

La aceleración no es el único parámetro del movimiento del suelo que influye en la respuesta de las estructuras; importan además la velocidad del movimiento del terreno y, en algunos casos, su desplazamiento.

La combinación de las influencias sobre diferentes estructuras de la amplitud de la aceleración del suelo y los componentes de las frecuencias de vibración (pero no de la duración del movimiento del suelo) es convenientemente representada por medio del espectro de respuesta, que es una gráfica que muestra las máximas respuestas inducidas por las vibraciones del movimiento del suelo en un sistema estructural de un grado de libertad, con períodos fundamentales de oscilación diferentes, pero teniendo el mismo grado de amortiguamiento interno.

La selección de la excitación sísmica para diseño, usada en ingeniería, para el análisis requiere del conocimiento de la respuesta del movimiento sísmico del suelo, las características de los materiales, los procedimientos analíticos, los procedimientos de diseño, y junto a todos éstos la experiencia relacionada con la respuesta de las estructuras de diferentes tipos durante los sismos actuales, con su respectivo criterio de diseño.

Luego de conocer la ecuación de movimiento y las excitaciones de diseño se procede al análisis de la estructura. Entre los métodos de análisis se tiene la integración directa de la ecuación del movimiento, lo que constituye el análisis paso a paso que proporciona el análisis más consistente y completo de cualquier movimiento sísmico dado. En éste análisis se aplica una función

excitadora dependiente del tiempo y se calcula la correspondiente historia de respuesta de la estructura durante el sismo. Esto quiere decir que pueden obtenerse los diagramas de momento y fuerzas en cada uno de los intervalos prescritos a través del movimiento aplicado.

Para analizar un edificio por el método paso a paso se tienen que emplear métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con la ayuda de computadoras digitales para ahorrar tiempo en la solución de las mismas, ya que aun cuando se empleen hipótesis simplificadoras resultaría un trabajo tedioso por ser repetitivo y tardado.

Como se indicó anteriormente este método consiste en resolver la ecuación diferencial:

$$u(t) = - \frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{u}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Existen varios procedimientos de integración paso a paso. Generalmente, la historia de respuesta está dividida en incrementos de tiempo muy cortos, cada uno de los cuales supone que la estructura es linealmente elástica (aunque pueden ser estructuras no lineales que en resultan imprácticas). Entre cada intervalo, las propiedades de la estructura son modificadas para ajustarse al estado de deformación correspondiente. En otras palabras, la respuesta no lineal es obtenida como una secuencia de respuestas lineales de sistemas que difieren sucesivamente.

Las fuerzas de amortiguamiento y de rigidez ya no son respectivamente proporcionales a la velocidad y al desplazamiento relativo. Entonces la condición de equilibrio dinámico se expresa:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + F_r(t) = - \ddot{u}_0$$

ya que en edificios es frecuente considerar solamente la linealidad en la fuerza de rigidez y suponer que el amortiguamiento es viscoso.

La determinación de la matriz de rigidez para cada incremento representa la parte más importante del análisis, ya que deben obtenerse cada vez las matrices de rigidez de los miembros individuales para su correspondiente estado de deformación. Además la secuencia del método paso a paso, dependerá del ancho del incremento del tiempo  $\Delta t$  y la elección del intervalo de tiempo dependerá esencialmente del período de vibración de la estructura.

Este método tiene mayor uso en estructuras de 1 grado de libertad ya que para estructuras mayores resulta tardado y tedioso, aún con la ayuda de un computador.

En el método de análisis sísmico dinámico con espectro respuesta la respuesta máxima de una estructura de un grado de libertad conociendo su período natural de vibración  $T$  (o frecuencia circular



$\omega$ , o frecuencia  $f$ ) y su constante de amortiguamiento  $\xi$  para el movimiento sísmico, y para la cual un espectro de respuesta está disponible, puede ser fácilmente determinada sin la necesidad de conocer la respuesta de la historia completa, ya que la máxima deformación está relacionada a las ordenadas del espectro de respuesta y a las propiedades de la estructura anteriormente mencionadas. De la misma forma el corte basal máximo y el máximo momento en la base pueden determinarse, debido a que están relacionados a la masa de la estructura y a las ordenadas del espectro de respuesta. El corte basal máximo se puede expresar mediante la ecuación:

$$V_{o,max} = kS_d = m\omega S_v = mS_a$$

Con lo cual esta técnica es sumamente fácil ya que solo es necesario conocer las propiedades de la estructura y la respuesta máxima de excitación sísmica obtenida del espectro de respuesta.

Como en la realidad existen estructuras de varios grados de libertad como los edificios de múltiples pisos, es necesario conocer el comportamiento de estos sistemas.

Un sistema de varios grados de libertad puede idealizarse en un edificio simétrico, en que las masas se consideran concentradas en cada piso y los resortes representan la rigidez lateral de cada entrepiso; cada masa de piso representa un grado de libertad, con una ecuación de equilibrio dinámico para cada uno. Entonces la ecuación de equilibrio toma la misma forma que en un sistema de un grado de libertad, aunque ahora se trata de una ecuación matricial.

El primer paso para la solución de esta ecuación diferencial es resolver el caso de vibración libre con amortiguamiento nulo que permite determinar con buena aproximación los períodos de vibración y formas modales. Como no hay fuerza externa y el amortiguamiento se considera nulo, entonces la ecuación diferencial se reduce a:

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

Ante la acción de un impulso, la estructura vibrará libremente, adoptando una configuración de desplazamientos que se denomina forma modal y con una frecuencia de vibración peculiar de cada modo. Existen tantos modos como número de grados de libertad tiene el sistema.

En vibración libre, el movimiento es armónico simple, con lo cual la ecuación anterior queda:

$$|K - \omega^2 M| = 0$$

El resolver esta ecuación permite encontrar los  $N$  valores de la frecuencia  $\omega$  que corresponden a cada modo natural de vibración del sistema, por ello esta ecuación es la base de la dinámica

estructural. Al excitar el sistema, cada modo responde como un sistema independiente de un grado de libertad y la respuesta total será la combinación de las respuestas independientes de cada modo, multiplicada cada una por un factor de participación. El desplazamiento de piso  $i$  se obtendrá, por tanto, como la suma de las participaciones de cada modo a dicho desplazamiento.

Conociendo el comportamiento de la estructuras de múltiples pisos se pueden utilizar otros métodos de análisis dinámico como el método de análisis modal.

El análisis modal normal es una técnica más limitada que la integración directa, ya que depende de la separación artificial de los modos normales de vibración y de la combinación de fuerzas y desplazamientos asociados por superposición con un número elegido de ellos.

El uso del espectro de respuesta con la técnica de análisis modal, admite únicamente los valores máximos de las funciones, tales como desplazamiento, aceleración, esfuerzo cortante o momento. En algunos casos, como una función varía con el tiempo durante un terremoto, puede ser también de interés. Usando una representación de medida histórica, estas computaciones son hechas en series de pasos de tiempo, empezando con las condiciones iniciales y tomando un intervalo de tiempo pequeño y computando la respuesta final de este  $\Delta t$ . Las respuestas de las formas de modo del sistema real son después computadas y combinadas, usando factores de participación apropiados, para obtener la reacción del sistema real como una función del tiempo.

La reacción es después calculada, usando otro intervalo de tiempo. Esta operación continúa hasta que las condiciones máximas son encontradas o el final del período de tiempo de interés es alcanzado. Los cálculos son hechos mejor por computadora, ya que son largos y repetitivos. En la mayoría de los casos, este método dará valores más exactos para las velocidades, desplazamientos, esfuerzos cortantes, etc., que el método de espectro de respuesta. Sin embargo, los valores calculados aplican únicamente a un registro de aceleración particular. Así, mientras que ellos pueden aproximar los movimientos para el terremoto precedente, pueden no tener significado para el siguiente. Por consiguiente, el analista tiene que balancear el costo aumentado del tiempo de la computadora y la exactitud de los resultados obtenidos, y decidir si usar el método de espectro de respuesta o el método de análisis modal con medida histórica. En la práctica del diseño, el análisis modal se emplea en conjunción con los espectros de respuesta. Con esta técnica, la estructura se descompone primero en sistemas de un grado de libertad con respecto a las coordenadas normales. La respuesta máxima de cada sistema de un grado de libertad se obtiene del correspondiente espectro de respuesta. El cortante en la base que se obtuvo de la respuesta se distribuye a todos los niveles de piso. Por último la respuesta de cada nivel del piso se calcula por medio de técnicas de superposición modal.

## CAPÍTULO 3

# MODELOS ANALÍTICOS, DATOS Y RESULTADOS

### 3.1. MÉTODO DE RIGIDEZ

Para analizar una estructura sujeta a cargas, frecuentemente se considera a la misma integrada por un grupo de elementos. Las propiedades de la estructura se determinan a partir de las propiedades relativamente sencillas de las partes individuales.

Las condiciones de compatibilidad de deformaciones y continuidad de esfuerzos son las que se utilizan para poder unir físicamente varios elementos y conformar una estructura. Estas condiciones en las uniones se reemplazan por condiciones en puntos concentrados de la estructura denominados nudos o nodos. Las propiedades de los elementos individuales se describen por relaciones entre cargas nodales y desplazamientos nodales.

Para el análisis de estructuras es necesario considerar dos principios importantes que son la linealidad de la estructura y la superposición de efectos en la estructura, para ello es necesario obtener las variables para la solución de las estructuras en función de variables nodales.

Existen tres tipos de ecuaciones que las cargas nodales y deformaciones de los elementos deben cumplir:

1. Las ecuaciones entre cargas nodales y deformaciones nodales para los elementos individuales. Estas se derivan de las relaciones esfuerzo-deformación del material del elemento.
2. Las ecuaciones de compatibilidad nodal. Estas hacen iguales las deformaciones nodales apropiadas de aquellos elementos que tienen un nudo en común.
3. Las ecuaciones de equilibrio nodal. Estas indican que en un nudo la carga externa debe ser igual a la suma algebraica de las cargas nodales que actúan en los elementos que se unen en dicho nudo.

Si las condiciones de equilibrio (condición 3) proporcionan suficientes ecuaciones para definir todas las fuerzas internas unívocamente, entonces se dice que la estructura es estáticamente determinada. De lo contrario, se dice que es estáticamente indeterminada

o hiperestática. En el análisis de este último tipo de estructuras es necesario usar las tres condiciones para obtener los esfuerzos y/o deformaciones.

Los métodos en los cuales las condiciones de compatibilidad se usan primero para llegar a las ecuaciones de equilibrio nodal, se denominan métodos de equilibrio o desplazamiento. Las deformaciones nodales son consideradas como las incógnitas básicas. Las ecuaciones de compatibilidad (condición 2) son combinadas con las relaciones de esfuerzo-deformación de un elemento (condición 1) para obtener expresiones de las cargas nodales en los elementos en términos de las deformaciones de equilibrio (condición 3). El resultado es un sistema de ecuaciones que relacionan las cargas externas (es decir, las cargas nodales equivalentes) con las deformaciones nodales. Estas ecuaciones se resuelven para las deformaciones nodales, después de las cuales las fuerzas nodales internas pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de los elementos individuales (condición 1).

El método de rigideces es como sigue: Primero, cada uno de los grados de libertad de la estructura recibe un número para fines de notación; los desplazamientos correspondientes a cada uno de los grados de libertad son las incógnitas que se van a determinar. El segundo paso consiste en calcular los coeficientes de influencia de rigidez; con este objeto, se sujetan todos los nodos de la estructura, y luego se ejecuta con una serie de análisis, uno por cada grado de libertad, por turno, dando un desplazamiento unitario. Cuando al grado de libertad  $j$  se da un desplazamiento unitario, se determina las fuerzas correspondientes a cada uno de los grados de libertad  $i$ , llamado  $K_{ij}$ , luego se formulan las ecuaciones de equilibrio y siempre son de la forma:

$$\begin{aligned} K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + \dots + K_{1n}D_n &= Q_1 \\ K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + \dots + K_{2n}D_n &= Q_2 \\ \vdots & \\ K_{n1}D_1 + K_{n2}D_2 + \dots + K_{nn}D_n &= Q_n \end{aligned} \quad (3.1a)$$

o en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

En notación matricial abreviada se puede escribir la ecuación 3.1b como:

$$[K] [D] = [Q] \quad (3.1c)$$

donde a  $[K]$  se le llama matriz de rigideces de la estructura y a  $[D]$  y  $[Q]$  vectores de desplazamiento y de carga, respectivamente. La ecuación 3.1 es la expresión de equilibrio en los nodos que se pueden desplazar libremente.

En la ecuación 3.1b  $K_{ij}$  es la fuerza nodal correspondiente al grado de libertad  $i$ , causado por la aplicación de un desplazamiento unitario correspondiente al grado de libertad  $j$ .  $D_1, D_2, \dots, D_n$  son los desplazamientos nodales desconocidos y  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  las cargas nodales aplicadas, correspondientes al grado de libertad  $1, 2, \dots, n$ . La formación de la matriz  $[K]$  es un paso importante del proceso de análisis.

En las cargas nodales aplicadas se usa la misma convención de signos, así como en las fuerzas en los extremos de los miembros y los momentos: las fuerzas son positivas si están dirigidas hacia arriba o a la derecha, y los momentos son positivos si tienen la dirección contraria del movimiento de las manecillas del reloj.

Debido a que en el análisis de la rigidez los grados de libertad se localizan en las uniones o nodos, a la fuerza  $K_{ij}$  se le llamará rigidez nodal, con lo cual cada término de la matriz de rigideces se puede calcular directamente examinando los extremos del miembro en cada nodo y sumando las rigideces con que contribuye cada miembro. Este es el detalle que ha dado motivo al término método directo de las rigideces.

Para determinar las características de rigidez de una estructura completa, es necesario hallar las propiedades de rigidez de los elementos individuales.

La matriz de rigidez del elemento para los miembros del marco, puede construirse resolviendo de manera directa para las fuerzas que ocurren en los extremos de los miembros, debido a un desplazamiento simple del extremo cuando todos los demás desplazamientos se mantienen en un valor de cero.

Algunas propiedades importantes de una matriz de rigidez del elemento son:

- a. Singularidad; es decir, sin posibilidad de invertirse.
- b. Simetría,  $k_{ij} = k_{ji}$ .
- c. Cada columna representa un conjunto de acciones en equilibrio.
- d. Cuando se multiplica cada renglón por un conjunto de desplazamientos que represente un movimiento de cuerpo rígido, se obtiene una fuerza o momento cero.

### 3.1.1. MATRIZ DE RIGIDECES DEL MIEMBRO TOMANDO LAS COORDENADAS DEL MIEMBRO

En el cálculo de las rigideces nodales, las rigideces del miembro se deben calcular primero en función de las direcciones de las coordenadas establecidas para la estructura. La rigidez nodal  $K_{ij}$  se encuentra entonces como la suma de las rigideces correspondientes de los miembros que concurren al nodo (del miembro  $k_{ij}$ ). Surgen dificultades cuando la orientación del miembro difiere de las direcciones de las coordenadas de la estructura.

Se atacará el problema determinando primero las rigideces del miembro en un sistema local de coordenadas convenientemente para el miembro. Después las rigideces del miembro se convierten al sistema de coordenadas de la estructura (o global), y por último se colocan en la matriz de rigideces de la estructura. En este estudio White, ref. 19, usa un apóstrofe para designar las cantidades en las coordenadas de los miembros. Por ejemplo  $[k']$  es la matriz de rigideces del miembro en sus coordenadas.

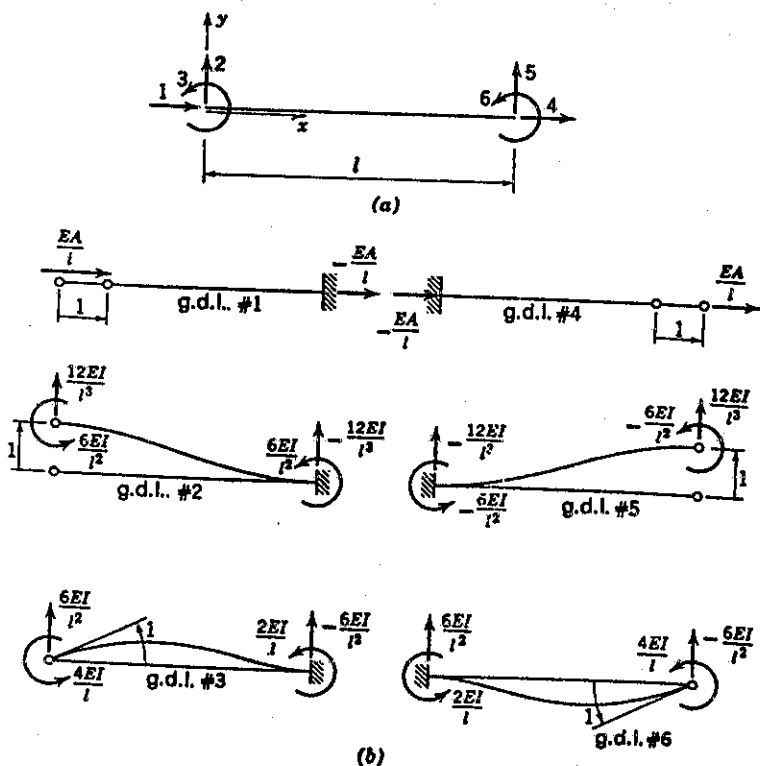


FIGURA 3.1 COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE RIGIDEZ DEL MIEMBRO. (Estructuras estáticamente indeterminadas, Richard White).

Considérese un miembro prismático de longitud  $l$ , área  $A$ , momento de inercia  $I$  con relación al eje 'z', y módulo de elasticidad  $E$ . Se desarrollara una matriz de rigideces para este elemento simple. En la figura 3.1 se muestra este miembro en el sistema de coordenadas del miembro, en donde éste queda a lo largo del eje 'x', con sus ejes principales en las direcciones 'y' y 'z'. En la figura se define seis direcciones para los desplazamientos, correspondientes a los seis grados de libertad para los extremos del miembro. Toda estructura reticular de dos dimensiones, de miembros prismáticos, está formada por elementos de este tipo, de manera que una vez que se ha calculado la matriz de rigideces del miembro se puede utilizar repetidas veces para cada uno de los miembros de la estructura. La matriz de rigideces del miembro se calcula aplicando un desplazamiento unitario correspondiente a cada uno de los grados de libertad del miembro en turno. Las

rigideces del miembro se indican con una  $k'$  minúscula, de manera que  $k'_{ij}$  es la fuerza o par correspondiente al grado de libertad  $j$ . En la figura 3.1b se indican cada uno de los desplazamientos unitarios por turno, con las fuerzas y pares correspondientes necesarios para producir el desplazamiento. Los vectores se muestran en la posición que se ha supuesto positiva, y los signos negativos significan que la fuerza en realidad obra en sentido opuesto al indicado.

La matriz de rigideces del miembro se puede escribir directamente con la información que se presenta en la figura 3.1b.

donde  $F_e$  = vector de fuerzas nodales en el elemento

$K_e'$  = matriz de rigidez del elemento

$d_e^*$  = vector de deformaciones nodales en el elemento

Esta matriz de rigideces del miembro se aplica a todos los miembros rectos prismáticos. Sólo los términos  $E$ ,  $I$ ,  $A$  y  $l$  cambian de valor de miembro a miembro. La matriz es adecuada únicamente para estructuras planas, ya que sólo se ha considerado traslación en el plano y rotación con respecto a un punto.

La matriz de rigidez obtenida de la figura 3.1b es la siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \frac{12EI}{(1+B)L^3} & \frac{6EI}{(1+B)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+B)L^3} & \frac{6EI}{(1+B)L^2} \\
 \dots & \dots & \frac{(4+B)EI}{(1+B)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+B)L^2} & \frac{(2-B)EI}{(1+B)L} \\
 \dots & \dots & \dots & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{12EI}{(1+B)L^3} & -\frac{6EI}{(1+B)L^2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{(4+B)EI}{(1+B)L} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \\ d_5^* \\ d_6^* \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$F_e \qquad \qquad \qquad K_e' \qquad \qquad \qquad d_e^*$

(3.2)

Una matriz muy importante en el análisis de estructuras formadas por marcos planos es la matriz de rigidez de un elemento que se une a nudos de ancho finito, sin considerar deformación axial (figura 3.2 y figura 3.3).

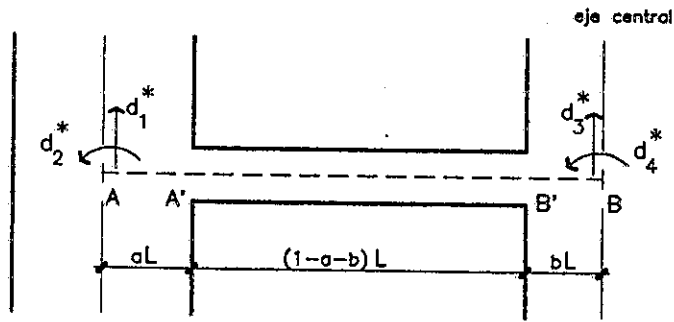


FIGURA 3.2 ELEMENTO QUE SE UNE A NUDOS DE ANCHO FINITO. (Adaptado de Análisis de estructuras por el método directo de rigidez, Milton Matus).

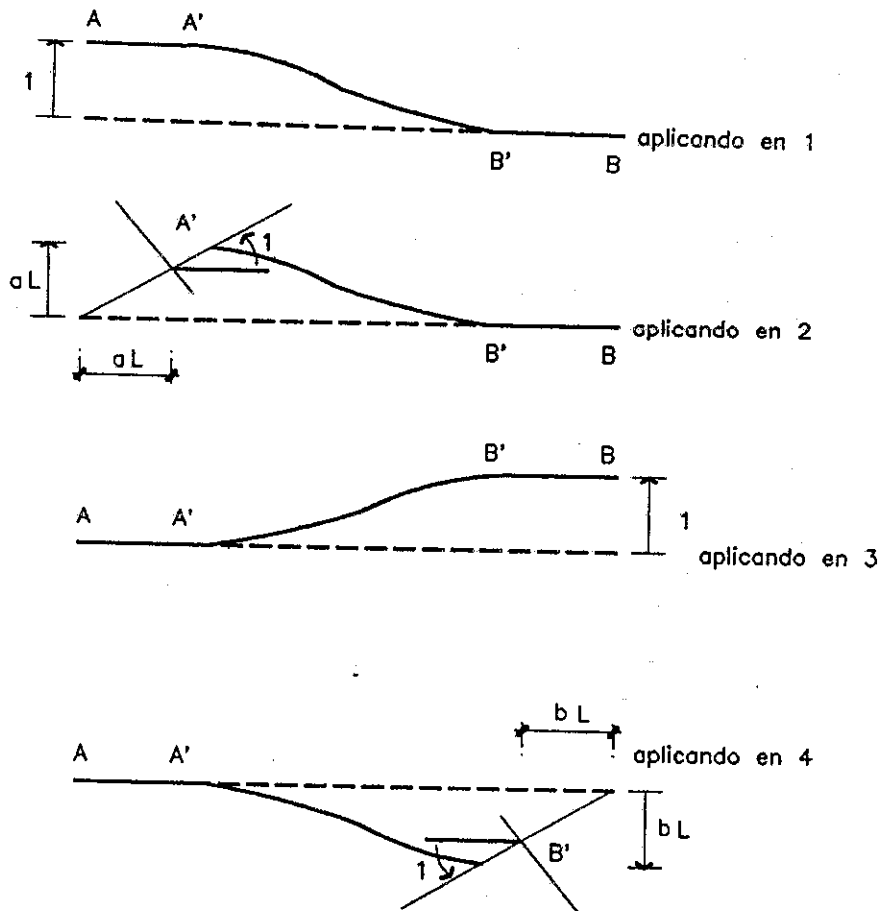


FIGURA 3.3. DEFORMACIONES PRODUCIDAS EN UN ELEMENTO QUE SE UNE A NUDOS DE ANCHO FINITO. (Adaptado de Análisis de estructuras por el método directo de rigidez, Milton Matus).



y la matriz de rigidez del elemento es:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{12}{(cL)^3} & \frac{6}{(cL)^2} + \frac{12a}{c^3L^2} & \frac{-12}{(cL)^3} & \frac{6}{(cL)^2} + \frac{12b}{c^3L^2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{(4+B)+12a+12a^2}{cL} & \frac{-6}{(cL)^2} + \frac{12a}{c^3L^2} & \frac{(2-B)+6(a+b)+12ab}{cL} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \text{SIMETRICA} & \frac{12}{(cL)^3} & \frac{-6}{(cL)^2} + \frac{12b}{c^3L^2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & \frac{(4+B)+12b+12b^2}{cL} & \frac{12}{(cL)^3} & \frac{-6}{(cL)^2} + \frac{12b}{c^3L^2} & \frac{(4+B)+12b+12b^2}{cL}
 \end{array}$$

$$K_e' = \frac{EI}{(1+B)} * k \quad (3.3)$$

### 3.1.2. MATRIZ DE RIGIDEZES DEL MIEMBRO TOMANDO EL SISTEMA DE COORDENADAS DE LA ESTRUCTURA

Gergely, ref. 19, menciona que la rigidez del miembro, expresada en el sistema de coordenadas del miembro, no se puede introducir en la matriz de rigideces nodal de la estructura hasta que se haya transformado al sistema de coordenadas de la estructura. Puesto que las fuerzas y los desplazamientos son cantidades vectoriales, sus componentes deben tener el mismo sentido si se van a sumar.

Además menciona que con el objeto de idear la transformación adecuada, hay que considerar primero la relación entre las fuerzas y los desplazamientos que existe en el sistema de coordenadas local del miembro. Entonces primero se consideran sólo las dos componentes de las fuerzas, correspondientes a los grados de libertad 1 y 2 del miembro. Las fuerzas en los extremos del miembro  $q'$  están relacionadas a los desplazamientos  $d'$  en los mismos extremos por medio de la matriz de rigideces del miembro.

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} q_1' \\ q_2' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} k_{11}' & k_{12}' \\ k_{21}' & k_{22}' \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} d_1' \\ d_2' \end{array} \right|
 \end{array} \quad (3.4)$$

Se examinarán los medios por los cuales las componentes de los vectores se pueden expresar en diferentes sistemas coordenados, considérese los vectores  $V_1$  y  $V_2$  en el sistema de coordenadas  $X, Y$  de la figura 3.4 (llamado sistema de coordenadas global). Se indican también en la figura sus componentes en el sistema de coordenadas  $x, y$  (sistema de coordenadas local). Se observa que la transformación del sistema global al local es simplemente:

$$\begin{array}{l}
 V_1' = V_1 \cos \alpha + V_2 \sin \alpha \\
 V_2' = V_1 \sin \alpha + V_2 \cos \alpha
 \end{array} \quad (3.5a)$$

o, expresada como matriz

$$\begin{vmatrix} V_1' \\ V_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} \quad (3.5b)$$

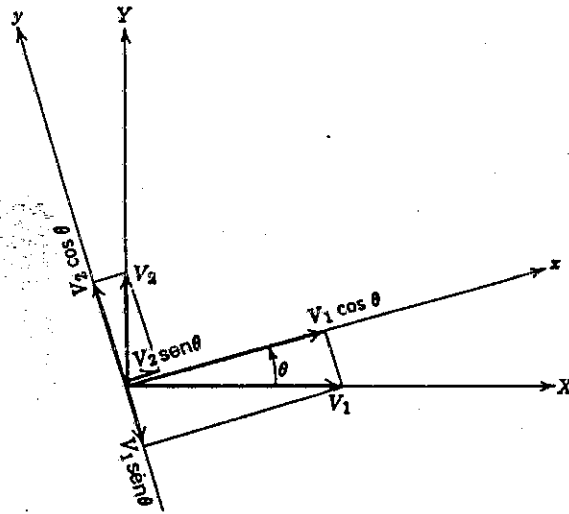


FIGURA 3.4. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS. (Adaptado de Estructuras estáticamente indeterminadas, Peter Gergely).

en la que la ordenación de senos y cosenos es una matriz de rotación, que es una forma especial de la clase general conocida como matrices de transformación.

Debido a que tanto las fuerzas como los desplazamientos son cantidades vectoriales, se pueden transformar de la misma manera que los vectores  $V$ . En el sistema de coordenadas del miembro, las fuerzas extremas en el mismo se escriben

$$\begin{vmatrix} q_1' \\ q_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

en la que los términos  $q$  sin apóstrofe son fuerzas en el sistema de coordenadas global de la estructura. Los desplazamientos de los extremos en el sistema de coordenadas del miembro se pueden escribir de manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} d_1' \\ d_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

en la que los términos en  $d$ , sin apóstrofo, son desplazamientos en el sistema global de coordenadas de la estructura.

Sustituyendo las ecuaciones 3.6 y 3.7 en la ecuación 3.4 se obtiene la relación entre las fuerzas y los desplazamientos

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11}' & k_{12}' \\ k_{21}' & k_{22}' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} \quad (3.8a)$$

En forma de abreviación matricial, se tiene

$$[r][q] = [k'] [r] [d] \quad (3.8b)$$

donde  $[r]$  es la matriz de rotaciones,  $[k']$  la matriz de rigideces en las coordenadas del miembro,  $[q]$  las fuerzas en los extremos del miembro en el sistema de coordenadas de la estructura y  $[d]$  los desplazamientos en los extremos del miembro en el sistema de coordenadas de la estructura.

Multiplicando por  $[r]^{-1}$ , se tiene

$$\begin{aligned} [r]^{-1}[r][q] &= [r]^{-1}[k'] [r] [d] \\ [q] &= [r]^{-1}[k'] [r] [d] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Puesto que  $[q]$  y  $[d]$  son las fuerzas en los extremos y los desplazamientos en el sistema de coordenadas de la estructura, es posible interpretar  $[r]^{-1}[k'] [r]$  como la matriz de rigideces del miembro, en el sistema de coordenadas de la estructura  $[k]$ .

Sexsmith, ref. 19, propone una idealización de una transformación para los primeros dos grados de libertad de un miembro. El tercer grado de libertad es una rotación, que no cambia cuando se transforman las coordenadas de un plano. Los grados de libertad cuarto y quinto se deben transformar de la misma manera que el primero y el segundo, mientras que el sexto es el mismo caso que el tercero. La ordenación de la transformación se puede expandir en la siguiente matriz de 6 X 6.

$$[R] = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & r & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.10a)$$

o en forma expandida

$$[R] = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.10b)$$

Para estructuras planas, entonces, la matriz de rigideces del miembro en el sistema de coordenadas de la estructura es simplemente:

$$[k] = [R]^{-1}[k'] [R] \quad (3.11a)$$

La matriz inversa de rotaciones es igual a su transpuesta. Lo que significa que la inversión en el sentido usual es innecesaria, y una forma más sencilla de la ecuación 3.11a se convierte en

$$[k] = [R]^{-T}[k'] [R] \quad (3.11b)$$

La ecuación 3.11b indica una multiplicación directa de matrices, que se usa para transformar la matriz de rigideces del miembro de una estructura plana al sistema de coordenadas de la estructura.

### 3.1.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

La ecuación 3.11 se determina para cada elemento por separado. Todas estas ecuaciones se combinan para obtener una ecuación matricial de equilibrio de la estructura:

$$[K] [D] = [Q] \quad (3.1c)$$

donde [K] = matriz de rigidez de la estructura  
 [Q] = vector de cargas nodales (que son datos)  
 [D] = vector de deformaciones nodales (que son la incógnitas a resolverse)

Esta ecuación representa un juego de ecuaciones de equilibrio para las fuerzas de los elementos en todos los nodos en las cuales se desea conocer el vector [D].

El proceso de ensamblar la matriz de rigidez de la estructura K se hace sumando las matrices de rigidez de todos los elementos globales

$$K = \sum K_{ei} \quad (3.12)$$

Para ser consistentes con la adición de matrices, las matrices de rigidez de todos los elementos deben expandirse al mismo tamaño de K, aumentándolas con filas y columnas de ceros. Sin embargo, esta operación puede evitarse en ejecución de programas de computadora. Se colocan únicamente los términos de  $K_{ei}$  en los lugares apropiados de K. Previamente todos los coeficientes de K se han inicializado con ceros.

De igual forma se ensambla el vector de cargas nodales Q:

$Q_{AN}$  = vector de cargas nodales aplicadas directamente en los nodos

$AF_i$  = vector de acciones fijas (fuerzas y momentos) del  $i$ -ésimo elemento en coordenadas globales

Teóricamente se necesita aumentar  $AF_i$  con ceros para hacer consistente la adición matricial, pero este paso puede evitarse en el proceso de programación.

La matriz de rigidez de una estructura,  $K$  tiene que partirse en sub-matrices que correspondan a las deformaciones de los nodos que constituyen apoyos, y a las deformaciones de los nodos que no son soportes:

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{1r} \\ K_{r1} & K_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1 \\ D_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_r \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

donde el subíndice  $r$  se refiere a deformaciones de nudos en apoyos, y el subíndice  $1$  se refiere a las demás deformaciones.

Desarrollando las operaciones matriciales, se obtiene la primera ecuación

$$K_{11} D_1 = (Q_1 - K_{1r} D_r) \quad (3.14)$$

El término  $-K_{1r} D_r$  representa un vector de cargas equivalentes debido al efecto de las deformaciones de los apoyos. Esto permite que las deformaciones de los apoyos se manejen como cargas nodales equivalentes, calculándolas tratando a cada elemento por separado. Lo anterior tiene ventaja de generar únicamente la matriz  $K_{11}$ . Para determinar las reacciones en los apoyos, teóricamente se necesitaría aplicar la ecuación

$$K_{r1} D_1 + K_{rr} D_r = Q_r \quad (3.15)$$

sin embargo, determinar las reacciones en los apoyos es equivalente a establecer las fuerzas finales inducidas en los elementos que se unen a los apoyos. Por lo que puede evitarse la aplicación de la ecuación 3.15, y determinar las reacciones cuando se calculen las fuerzas en los elementos.

#### 3.1.4. FUERZAS Y MOMENTOS FIJOS

Reacciones fijas en un elemento son las reacciones que se producen al poner cargas al elemento, restringiendo todos sus grados de libertad. Estas reacciones se aplican como acciones a los nodos correspondientes de la estructura.

Las acciones fijas en un elemento en coordenadas globales se determinan con la siguiente expresión:

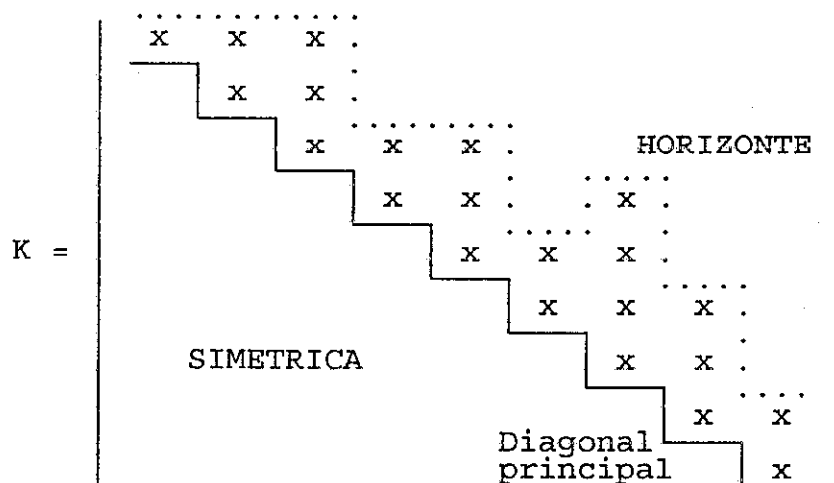
$$AF = R^T AF' \quad (3.19)$$

donde  $AF'$  = vector de acciones fijas de un elemento en coordenadas

locales, y se obtienen planteando las cargas externas en componentes paralelas y/o normales a los ejes locales.

### 3.1.5. SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El análisis de sistemas estructurales grandes requiere de una rutina de resolución eficaz, que trabaje sólo con la parte utilizable de la matriz de rigidez de la estructura. La única parte que debe formarse y almacenarse se muestra a continuación



x = Coeficientes almacenados en la matriz de rigidez compactada

La solución de sistemas de ecuaciones es muy variada y dependerá del número de ecuaciones a resolver, los más utilizados son los métodos de eliminación matricial, los cuales aprovechan la simetría, ancho de banda y la poca densidad de los coeficientes no-cero de la matriz K. Básicamente se expresa la matriz K como el producto de matrices triangulares, luego se lleva a cabo un proceso de eliminación hacia adelante, y finalmente un proceso de sustitución hacia atrás para encontrar las deformaciones nodales D, como el método de Cholesky modificado (descrito en la ref. 11).

### 3.1.6. FUERZAS FINALES

Por medio del proceso de inversión o descomposición se obtiene el vector de desplazamientos nodales [D].

Si ahora se aplican los desplazamientos nodales en coordenadas locales del miembro a la matriz de rigidez de cada elemento se obtienen las acciones.

Con lo cual las fuerzas finales en un elemento se pueden determinar después de obtener las deformaciones nodales D. Se procede a aplicar la ecuación 3.1 o similar, pero agregándole

las fuerzas y momentos fijos (si los hubiere):

$$FF_e = F_e + AF = K_e' d_e^* + Af \tag{3.16}$$

donde  $FF_e$  = vector de fuerzas finales en un elemento

El vector de deformaciones  $d_e^*$  puede obtenerse a partir de la expresión

$$d_e^* = R d_e^{**} \tag{3.17}$$

donde  $d_e^{**}$  = vector de deformaciones en un elemento en coordenadas globales

Para un elemento con seis grados de libertad, el vector  $d_e^*$  será:

$$d_e^* = \begin{pmatrix} d_1^{**} \cos \alpha + d_2^{**} \sin \alpha \\ \dots \dots \dots \\ -d_1^{**} \sin \alpha + d_2^{**} \cos \alpha \\ \dots \dots \dots \\ d_3^{**} \\ \dots \dots \dots \\ d_4^{**} \cos \alpha + d_5^{**} \sin \alpha \\ \dots \dots \dots \\ -d_4^{**} \sin \alpha + d_5^{**} \cos \alpha \\ \dots \dots \dots \\ d_6^{**} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

### 3.2. MATRICES DE MASA DE UN ESTRUCTURA

El procedimiento más simple para definir las propiedades de masa de cualquier estructura es asumir que la masa completa está concentrada en los puntos en los cuales están definidos los desplazamientos traslacionales. Los procedimientos usuales para definir los puntos de masa a ser localizados en cada nudo consisten en asumir que la estructura está dividida en segmentos, los nudos sirven como puntos de conexión.

La masa de cada segmento de una estructura se asume que está concentrada en puntos de masa en cada uno de sus nodos, la distribución del segmento de masa a estos puntos se determina por estática. La masa total concentrada en cada nodo de la estructura completa entonces, es la suma de las contribuciones nodales de todos los segmentos referidos a su nodo.

Para un sistema en el cual solamente se definen los grados de libertad traslacionales (como en el caso de una estructura de múltiples pisos), la matriz de masa tiene una forma diagonal y ésta podría escribirse como:

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

en la cual hay tantos términos como grados de libertad. La diagonal de términos  $m_{ij}$  de esta matriz aparece porque una aceleración de cualquier punto de masa produce una fuerza de inercia en aquel punto solamente. La fuerza de inercia en  $i$ , debida a la aceleración unitaria del punto  $i$ , es obviamente igual a la masa concentrada en ese punto; de donde el coeficiente de masa  $m_{ij} = m_j$  en un sistema de masa concentrada. Si más de un grado de libertad traslacional es especificado en cualquier punto nodal, el mismo punto de masa será asociado con cada grado de libertad. De otra manera, la masa asociada con cualquier grado de libertad rotacional será cero porque la suposición de que la masa está concentrada en puntos limita a que el sistema no tenga inercia rotacional.

### 3.3. MODELO ANALÍTICO DE LA ESTRUCTURA

El modelo estructural con el cual se realiza el análisis está integrado por las siguientes partes:

- a) Modelo geométrico. Este es un esquema que representa las principales características geométricas de la estructura. Su determinación implica identificar la parte de la construcción que desarrolla funciones estructurales y eliminar la parte que no influye significativamente en la respuesta de la estructura. Requiere representar la estructura por medio de un arreglo de componentes estructurales básicos, cuyo comportamiento estructural puede conocerse (barras, placas, resortes, arcos, cascarones, etc.) y definir las propiedades geométricas "equivalentes" de estos componentes básicos.
- b) Modelo de las condiciones de continuidad en las fronteras. Debe establecerse cómo cada elemento está conectado a sus adyacentes (si a través de un nudo rígido o permitiendo algún tipo de deformaciones relativa por ejemplo) y cuáles son las condiciones de apoyo de la estructura (empotramiento, apoyo libre, etc.).
- c) Modelo de comportamiento de los materiales. Debe suponerse una relación acción-respuesta (o esfuerzo-deformación) del material que compone la estructura. Generalmente se hace la hipótesis de comportamiento elástico lineal, aunque ésta tiene limitaciones en muchos casos.
- d) Modelo de las acciones impuestas. Las acciones que afectan la estructura para una condición dada de funcionamiento, se representan por conjuntos de cargas o de deformaciones impuestas.



### 3.3.1. MODELO GEOMÉTRICO

Las construcciones suelen ser sistemas complejos en los que interactúan diversos componentes, por lo cual en general no es tarea fácil y directa extraer de la construcción completa un esquema sencillo que reproduzca fielmente la forma en que la construcción responde ante diferentes tipos de acciones.

Por ejemplo en un edificio como el modelo de la figura 3.5 se ignoran en esa idealización diversos elementos que influyen en la respuesta estructural. En principio, todo elemento que interfiere con la deformación de la estructura bajo carga y toma esfuerzos a raíz de dicha interferencia, influye en la respuesta y debería considerarse como estructural. Sin embargo esta influencia es despreciable si la rigidez del elemento en cuestión es muy inferior a la de los elementos principales de la estructura. Esta consideración permite ignorar en el modelo estructural elementos tales como ventanería, ductos de instalaciones, plafones y cancelas cuya rigidez es muy baja. Sin embargo, otros componentes como los pretilos de concreto de la fachada y el firme de mortero sobre los pisos, no parecen tener una contribución despreciable a la respuesta ante cargas verticales, a la vez que el efecto de los muros de bloques de concreto del núcleo central y de las losas inclinadas de escalera parece significativa en la respuesta ante cargas laterales. Estos elementos suelen ignorarse justificadamente en el modelo analítico, porque su contribución estructural es poco confiable debido a que se construyen sin control de su calidad estructural y porque es conservador no tomarlos en cuenta. Deben tenerse, sin embargo, las precauciones siguientes, al adoptar ese criterio:

- a) Hay casos en que no es conservador ignorar la contribución de algunos componentes a la respuesta estructural, como cuando un elemento supuestamente no estructural toma una carga no prevista y la transmite a una parte de la estructura que no está calculada para resistirla. Esto ocurre, por ejemplo, cuando los muros divisorios, o las losas de escalera, están ligados a la estructura principal y son elementos de gran rigidez para fuerzas en su plano (muros de mampostería, escaleras de concreto y también sillares de ventanas que ponen "zancadilla" a las columnas). Absorben, por tanto, una porción importante de las cargas laterales que llegan a actuar sobre la estructura y la transmiten imprevistamente a los elementos a los que se encuentran ligados. El resultado puede ser grave cuando la posición de estos elementos es tal que introduce torsiones importantes en planta y concentraciones de fuerza en ciertos elementos estructurales.
- b) Al deformarse un elemento no estructural junto con la estructura principal, pueden introducirse en él esfuerzos que no sea capaz de resistir y le ocasionen daños inaceptables.

Por lo anterior, es importante asegurarse que los elementos designados como no estructurales no afecten desfavorablemente

el comportamiento de la estructura y tampoco se vean afectados por las deformaciones de ésta. Cuando existe la posibilidad de una interacción desfavorable, conviene proveer holguras y formas de conexión entre elementos no estructurales y la estructura que permitan que esta última pueda deformarse libremente sin introducir esfuerzos en dichos elementos.

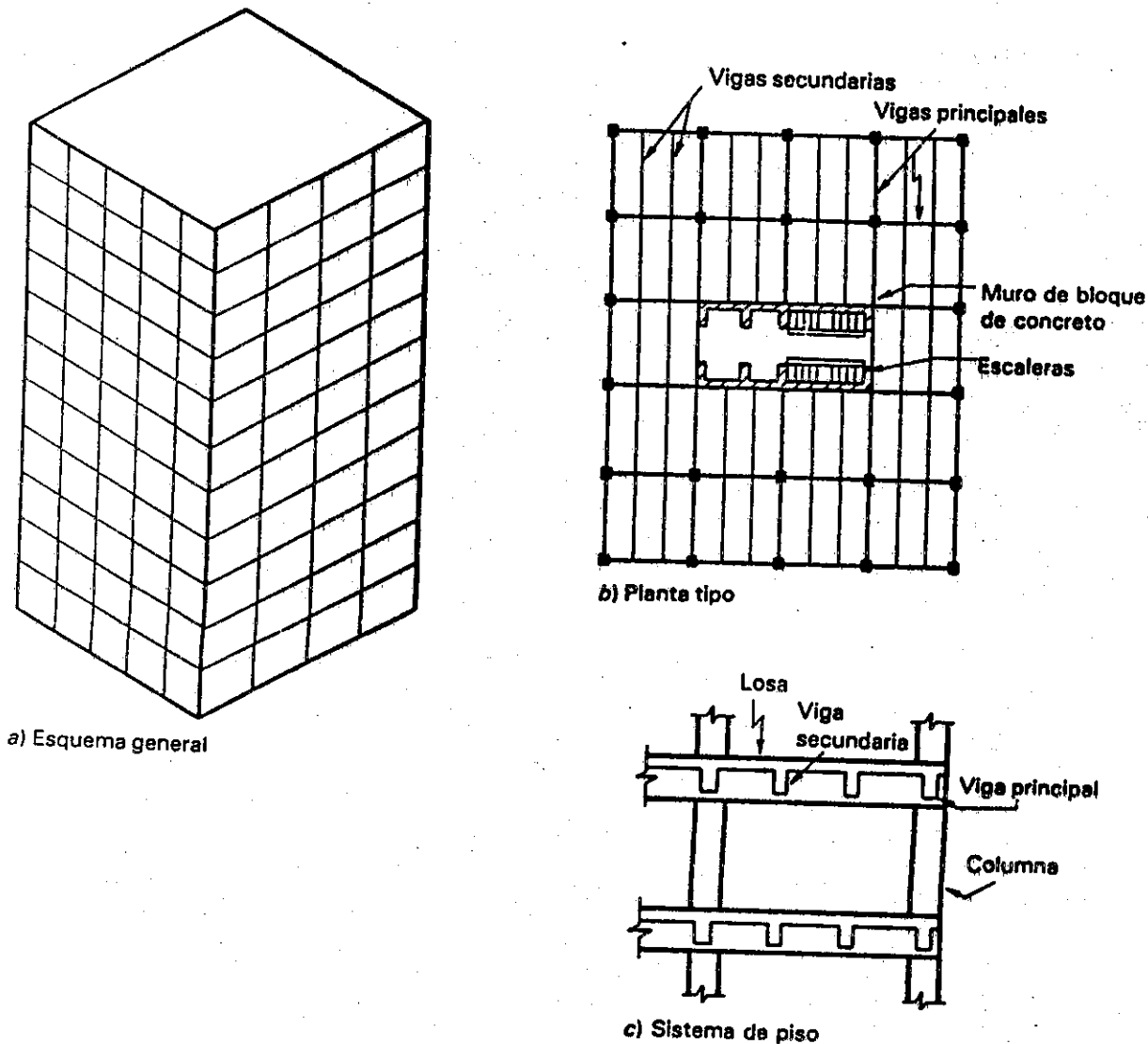


FIGURA 3.5 ESTRUCTURACIÓN DE UN EDIFICIO TÍPICO DE VARIOS PISOS. (Adaptado de Diseño estructural, Roberto Meli).

El marco tridimensional de la figura 3.6, además de ignorar los elementos de materiales no estructurales, elimina también otros que son claramente parte de la estructura, como las losas y las vigas secundarias. El modelo en cuestión pretende representar la respuesta global de la estructura ante sistemas de cargas que le afecten en su conjunto. Por ello, esquematiza la estructura por medio de un conjunto de elementos estructurales "principales", en cuanto afectan la respuesta de conjunto, eliminan algunos

elementos estructurales "secundarios", en cuanto a que sólo tienen una influencia local en la respuesta, o asimila su influencia empleando propiedades equivalentes de los elementos principales que toman en cuenta el efecto de dichos elementos secundarios en la respuesta global.

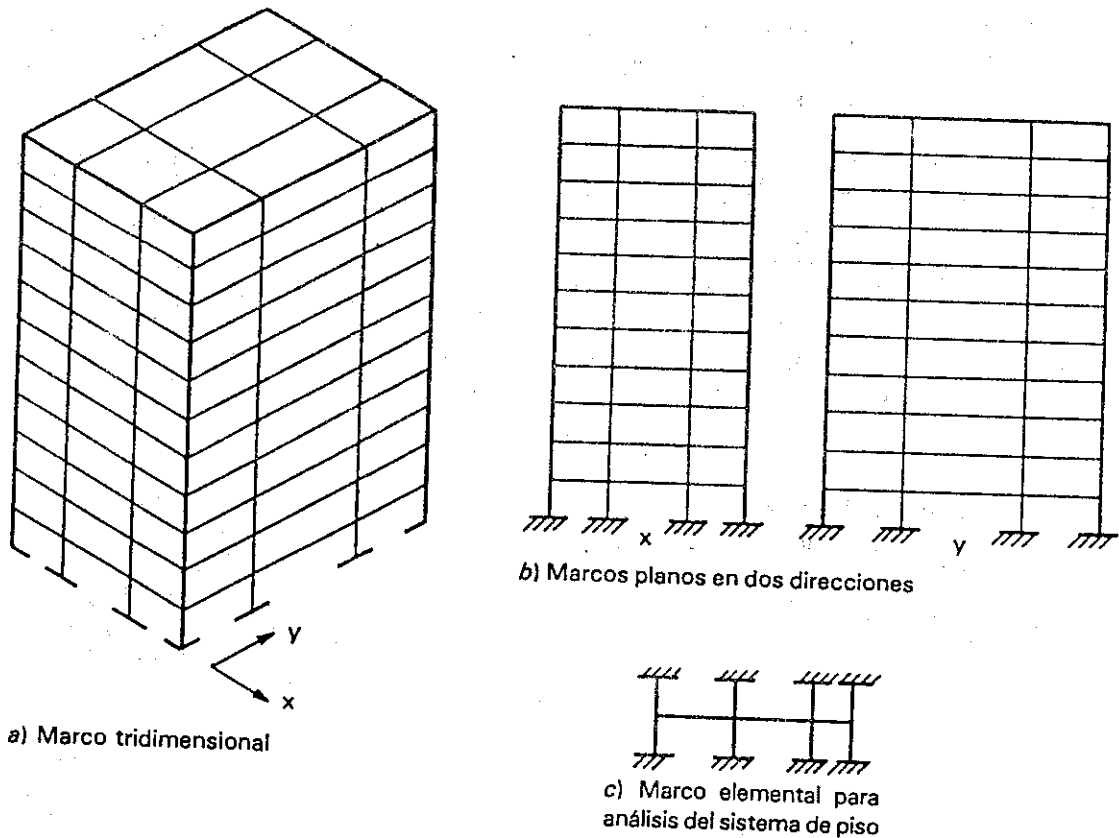


FIGURA 3.6. DIFERENTES MODELOS PARA EL ANÁLISIS DE UN EDIFICIO A BASE DE MARCOS. (Adaptado de Diseño estructural, Roberto Meli).

El procedimiento más conveniente proporcionado por Meli, ref. 12, resulta, en general, en el análisis de un modelo global esquemático para la respuesta de conjunto de la estructura, y el de una serie de modelos locales más refinados para el estudio de los efectos detallados de las acciones en determinadas porciones de la estructura.

El marco tridimensional propuesto para el análisis global resulta excesivamente complejo para su solución, si no se cuenta con un programa de cómputo. Si el arreglo de los elementos principales de la estructura y la distribución de cargas no son muy irregulares, resulta aceptable analizar en forma independiente los marcos bidimensionales que la componen, cada uno sujeto a las cargas que le corresponden según su área tributaria o su rigidez lateral. Al realizar esta descomposición se pierden los efectos de la interacción entre los diferentes marcos debidos, por ejemplo,

a la rigidez torsional de los elementos que los conectan, la cual puede ser significativa si las características de rigidez de los diversos marcos son muy distintas.

### 3.3.2. MODELO DE LAS CONDICIONES DE CONTINUIDAD

El modelo analítico de la estructura debe especificar las condiciones de continuidad entre un elemento y otro y las de frontera entre la estructura y sus apoyos.

Las condiciones de continuidad entre los elementos de una estructura dependen esencialmente del detalle constructivo con que se resuelve la conexión. Se puede lograr un nudo rígido, o sea uno en que no existan deformaciones concentradas que permitan movimientos relativos entre los dos elementos que se conectan, o se puede detallar la conexión de manera que se libere alguna restricción sea de desplazamiento o de giro logrando, por ejemplo, una articulación. La suposición que se haga en el modelo analítico debe ser congruente con el tipo de conexión que se especifique en los planos para los elementos en cuestión.

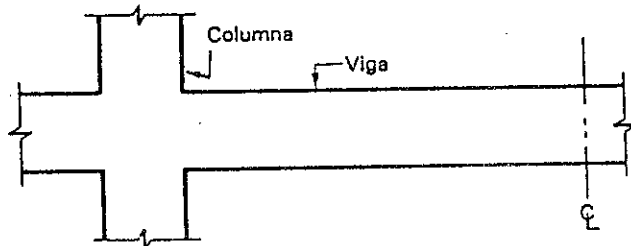
En las construcciones de concreto reforzado colado en el lugar, el monolitismo obliga al diseño de uniones continuas y es necesario detallar el refuerzo de manera que se puedan resistir las fuerzas causadas por esta continuidad y se eviten fallas locales en la conexión. En estructuras de acero se puede lograr continuidad entre los elementos y capacidad de transmitir momentos, según la forma en que se diseñen las conexiones.

La continuidad entre los elementos de una estructura produce hiperestaticidad y, por tanto, vuelve más laborioso el análisis, aunque esto ya no es problema hoy en día con las facilidades de cómputo. Otra desventaja de la continuidad es que hace a la estructura sensible a los cambios volumétricos por temperatura y asentamientos diferenciales. Por otra parte, la continuidad hace a la estructura más rígida y permite soluciones más económicas, además de que, al proporcionarle redundancia, la hace menos sujeta a colapsos bruscos por defectos locales.

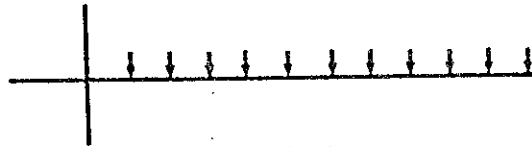
El modelo geométrico de una estructura a base de barras suele ignorar el espesor de las juntas; se considera una barra de momento de inercia constante de eje a eje de columnas y de vigas. En realidad, a las barras que representan a las vigas debería considerárseles un momento de inercia muy superior en el tramo que va desde la cara de las columnas al eje de éstas; de manera similar debería procederse para las barras que representan a las columnas. Si la conexión es maciza, como en una estructura de concreto, el momento de inercia en esas zonas es prácticamente infinito.

Meli, ref. 12, dice que en vigas de marcos la diferencia en el momento negativo en el eje y en el paño de la columna suele ser significativa (figura 3.7), es conveniente diseñar la viga

para el momento que se presenta en el paño. Estrictamente, el incremento de rigidez de la viga en la zona de columnas producirá un aumento en el momento negativo y una disminución en el positivo por el mayor empotramiento que se tiene; sin embargo, estas modificaciones pueden ignorarse, ya que puede aducirse que serán absorbidas por ligeras redistribuciones. Con las facilidades actuales de cómputo es sumamente fácil tomar en cuenta la rigidez de los nodos.



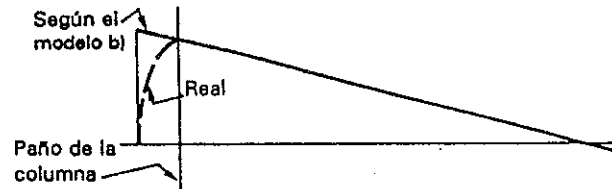
a) Porción de un marco de concreto



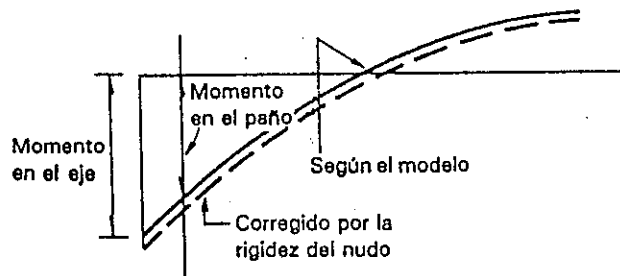
b) Modelo que ignora la rigidez de la unión viga-columna



c) Modelo que considera la rigidez del nudo



d) Diagrama de fuerzas cortantes



e) Diagrama de momentos flexionantes

FIGURA 3.7. EFECTO DE LA RIGIDEZ DEL NUDO EN LAS FUERZAS INTERNAS EN EL EXTREMO DE LA VIGA DE UN MARCO. (Diseño estructural, Roberto Meli).

Las condiciones de apoyo de la estructura sobre el terreno dependen del tipo de cimentación que se proporcione y de las propiedades del subsuelo. Se acostumbra modelar el apoyo con una de las condiciones extremas; empotramiento o articulación, aunque generalmente las condiciones serán intermedias, y deberían ser representadas por medio de resortes que reprodujeran la rigidez de la cimentación. Las incertidumbres en las propiedades del suelo y sus variación con el tiempo hacen poco predecibles las características de estos resortes y justifican considerar las condiciones extremas más representativas. Por ejemplo en las columnas sobre zapatas de la figura 3.8 conviene considerar apoyos articulados, a menos que se trate de un suelo extraordinariamente rígido, o a menos que se tengan contratrabes de liga que restrinjan el giro (como ocurre en la dirección 'y' del caso ilustrado en dicha figura).

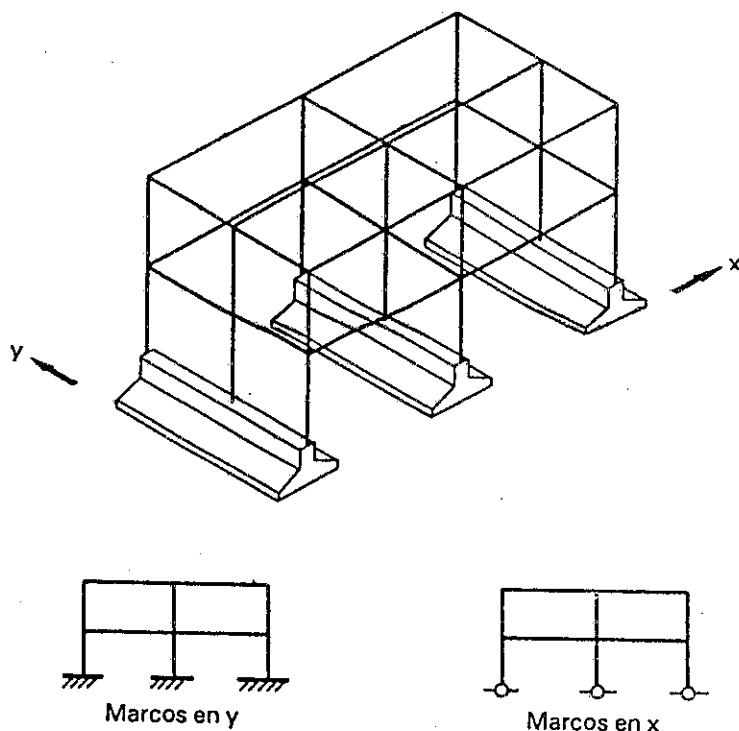


FIGURA 3.8. EJEMPLO DE IDEALIZACIÓN DE APOYOS A BASE DE ZAPATAS. (Diseño estructural, Roberto Meli).

### 3.3.3. MODELO DEL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL

Normalmente el análisis se realiza con procedimientos que implican la hipótesis que el comportamiento de la estructura es lineal y elástico y se adoptan en el modelo propiedades lineales

elásticas representativas del comportamiento de la estructura. Esta hipótesis es aceptable y conveniente en prácticamente todos los casos de carga vertical y viento y también se usa para respuesta sísmica, aún cuando en éste caso la estructura excede su comportamiento lineal elástico. Conviene entender claramente en qué grado difiere el comportamiento real del elástico lineal, en qué criterio se debe basar la determinación de las propiedades elásticas equivalentes y cuál es la magnitud de los errores que se pueden cometer con estas hipótesis.

Aunque la mayoría de los materiales y elementos estructurales tiene un comportamiento que no se despega mucho del lineal en un intervalo de esfuerzos bastante amplio, existen diversas fuentes de no linealidad. La fuente más importante de no linealidad es la que proviene del propio material.

En una estructura isostática el comportamiento no lineal modifica solamente las deformaciones con respecto a las calculadas en un análisis elástico, ya que la distribución de fuerzas internas está regida por condiciones de equilibrio únicamente. En estructuras hiperestáticas la distribución de fuerzas internas depende de las rigideces relativas de los elementos estructurales; por tanto, si algún elemento, o parte de éste, pierde rigidez por entrar en una etapa de comportamiento postelástico, su rigidez relativa con respecto a los elementos a los que está conectado disminuirá, dando lugar a una modificación de la distribución de fuerzas internas y, en general, a una reducción en el nivel de esfuerzos en el elemento que ha perdido rigidez. A esta modificación de fuerzas internas se le llama redistribución por comportamiento postelástico.

Redistribuciones mucho mayores ocurren cuando alguna sección de un elemento llega a su momento de fluencia. Esto suele ocurrir durante excitaciones sísmicas significativas. Si los elementos de una estructura tienen comportamiento dúctil, cuando se alcanza el momento flexionante de fluencia en una sección de un elemento la capacidad de carga no crece ya prácticamente, pero la sección es capaz de mantener este momento para deformaciones muy superiores a las de fluencia y por tanto constituye lo que se conoce como una "articulación plástica". Si se forma una articulación plástica en una estructura isostática, ésta se vuelve un mecanismo. En cambio, en una estructura hiperestática al formarse una articulación plástica se tiene una sección que mantiene una capacidad de momento constante, pero que para cargas mayores se comporta como una articulación; de manera que la estructura es capaz de soportar cargas que exceden a la que correspondió a la formación de la articulación plástica, pero con una distribución de fuerzas internas diferente. El colapso de esta estructura ocurrirá sólo cuando se haya formado el suficiente número de articulaciones plásticas para que la estructura se vuelva un mecanismo o cuando en alguna articulación plástica se alcance una rotación tan grande que la sección sea incapaz de mantener su momento resistente y ocurra una falla local.

### 3.3.4. MODELO DE ACCIONES IMPUESTAS

Como se indicó anteriormente las acciones que afectan la estructura se representan por conjuntos de cargas o deformaciones impuestas en el modelo. Estas dependen de la modelación de las mismas, es decir que se deben analizar todos los elementos estructurales y no estructurales y observar el grado de influencia que estos tienen a nivel de cargas o deformaciones sobre el modelo de "elementos principales" adoptado. Estas influencias se deben transformar en cargas reales que se puedan aplicar al modelo, es decir, se deben transformar a cargas equivalentes que al aplicarlas al modelo, éste actué reflejando la realidad. Las equivalencias de las cargas se pueden ilustrar en forma de carga puntual en un elemento (como la carga que produce una viga secundaria en una viga principal), carga distribuida (como la carga que produce una losa en la viga), una carga puntual aplicada al nodo o carga nodal (como la carga de una viga secundaria que llega a la columna); así también las fuerzas sísmicas pueden transformarse en fuerzas equivalentes laterales aplicadas al modelo en los diferentes niveles de la misma. Las deformaciones se aplican comúnmente a los nudos o nodos que se definen por sus coordenadas globales en el modelo.

En la referencia 11, se mencionan algunos casos de modelos de estructuras, entre ellas: modelos con geometría rectangular, con elementos con orientación arbitraria en el plano X-Y, con diafragma rígido, con muros con o sin aberturas, simétricos, con soportes oblicuos, con deformaciones conocidas en los apoyos, sujetas a cargas sísmicas. Ver capítulo III de ref. 11, si se quiere profundizar en el estudio de los mismos.

### 3.3.5. RIGIDEZ EFECTIVA DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

Idealmente las rigideces de los elementos estructurales deben reflejar la cantidad de acero de refuerzo longitudinal, el grado de agrietamiento, las cargas axiales, la fluencia plástica, etc. Sin embargo, cuando se trata del diseño de edificios con centenares de puntos de interés, las consideraciones anteriores no son económicamente factibles. Por lo que se utilizan procedimientos simplificados:

$$\begin{aligned} \text{En columnas} \quad EI_{col} &= E_c I_{g\ col} (0.2 + 9.6 RO_{col}) & (3.21) \\ EA_{col} &= E_c I_{g\ col} (1.0 + 7.0 RO_{col}) \end{aligned}$$

$$\text{En vigas} \quad EI_{viga} = E_c (a I_g + 8 I_s) \quad (3.22)$$

donde:  $a$  = coeficiente que puede tomarse entre 0.15 y 0.20  
 $f'c$  = resistencia a compresión del concreto, en Kg/cm<sup>2</sup>  
 $E_c$  =  $15100 \sqrt{f'c}$ , módulo de elasticidad del concreto, en Kg/cm<sup>2</sup>

$EI_{col}$  = rigidez flexionante efectiva de una columna

$EA_{col}$  = rigidez axial efectiva de una columna

$EI_{viga}$  = rigidez flexionante efectiva de una viga



- $I_{g \text{ col}}$  = momento de inercia de la sección bruta transversal de una columna  
 $I_{g \text{ viga}}$  = momento de inercia de la sección bruta transversal de una viga  
 $RO_{\text{col}}$  = porcentaje de área de acero de refuerzo en una columna  
 $I_g$  = momento de inercia del acero de refuerzo longitudinal con respecto al eje neutro de la sección transversal de una viga.

Para propósitos de diseños preliminares, pueden tomarse los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 EI_{\text{col}} &= 0.8 E_c I_{g \text{ col}} \\
 EI_{\text{viga}} &= 0.5 E_c I_{g \text{ viga}} \\
 EA_{\text{col}} &= 1.1 E_c A_{g \text{ col}}
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

### 3.4. CONDENSACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

En una estructura sujeta a sismo las masas de los pisos se desplazan principalmente horizontal. Los desplazamientos rotacionales en plano vertical y los desplazamientos verticales para luces cortas en edificios son mucho menos importantes. Bajo este concepto, la matriz de masa se genera teniendo en cuenta únicamente los desplazamientos de traslación horizontal y excepcionalmente desplazamientos verticales en estructuras de gran luz; en cambio la matriz de rigidez tiene en cuenta traslaciones horizontales, verticales y rotaciones, puesto que los tres tipos de grados de libertad son importantes en las reacciones de la estructura. Por esta razón, las matrices  $M$  y  $K$  resultan de dimensiones menores. Es natural que esta aparente incongruencia de dimensiones no permita combinar las matrices directamente. Como sí es necesario combinarlas, la matriz  $K$  se debe modificar, para reducir sus grados de libertad en rotación y en general los grados de libertad verticales. Esta operación se llama una condensación estática; la condensación estática no modifica en nada las características de la estructura; simplemente se involucran los grados de libertad rotacionales y verticales en términos de los de traslación horizontal.

La matriz de rigidez  $K$  de una estructura completa relaciona todas las fuerzas aplicadas con sus correspondientes deformaciones. En muchos casos, sin embargo, interesa trabajar explícitamente solo un número reducido de fuerzas y deformaciones, mientras que el resto de deformaciones y fuerzas se expresan como funciones de las que interesa trabajar explícitamente.

Matus, ref. 11 utiliza los siguientes subíndices:

- a Correspondiente a los grados de libertad que interesa manejar explícitamente, o retenidos
- b Correspondiente a los grados de libertad restantes (condensados)

La matriz de rigidez  $K$  puede particionarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

donde

- $K_{aa}$  = es la submatriz con desplazamientos de traslación originados por los grados de libertad de traslación.  
 $K_{ab}$  = es la submatriz con desplazamientos de traslación originados por los grados de libertad de rotación.  
 $K_{ba}$  = es la submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de traslación.  
 $K_{bb}$  = es la submatriz con rotaciones originadas por los grados de libertad de rotación.

Desarrollando la ecuación matricial anterior se tiene

$$K_{aa}D_a + K_{ab}D_b = Q_a \quad (3.25)$$

$$K_{ba}D_a + K_{bb}D_b = Q_b \quad (3.26)$$

Despejando  $D_b$  de la ecuación 3.26

$$D_b = K_{bb}^{-1} (Q_b - K_{ba}D_a) \quad (3.27)$$

Sustituyendo la ecuación 3.27 en forma expandida en la ecuación 3.25:

$$\begin{aligned} K_{aa}D_a + K_{ab}K_{bb}^{-1}Q_b - K_{ab}K_{bb}^{-1}K_{ba}D_a &= Q_a \\ [K_{aa} - K_{ab}K_{bb}^{-1}K_{ba}] D_a &= Q_a - K_{ab}K_{bb}^{-1}Q_b \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } K_{cond} &= K_{aa} - K_{ab}K_{bb}^{-1}K_{ba} \\ Q_{cond} &= Q_a - K_{ab}K_{bb}^{-1}Q_b \end{aligned} \quad (3.29)$$

entonces la ecuación 3.28 puede expresarse como

$$K_{cond}D_a = Q_{cond} \quad (3.30)$$

donde  $K_{cond}$  = matriz condensada de la estructura  
 $Q_{cond}$  = vector de cargas nodales condensado

La ecuación 3.30 tiene forma similar a la ecuación 3.1, y puede resolverse por diferentes métodos, entre ellos el método de Choleski modificado, ver referencia 11.

Es importante observar que la condensación de una matriz de rigidez significa satisfacer las ecuaciones de equilibrio correspondientes a los grados de libertad condensados ( $D_b$ ), sólo que éstos se expresan implícitamente. Estos grados de libertad no son descartados. Nada se pierde ni es aproximado en el proceso de condensación.

La selección de los grados de libertad a ser condensados queda a discreción del analista. Sin embargo, generalmente la selección no es tan arbitraria. Usualmente existen razones lógicas para elegir determinados grados de libertad para ser condensados (como se mencionó los grados de libertad rotacionales por los traslacionales).

Cuando una estructura está sujeta a cargas sísmicas, (ver figura 3.9) un número limitado de fuerzas se concentran y se aplican en cada nivel de la estructura. Dichas fuerzas se relacionan con los desplazamientos laterales. Conviene, entonces, elegirlos como  $Q_a$  y  $D_a$ . Mientras que  $Q_b=0$  por lo que las ecuaciones 3.27 y 3.29a se simplifican a

$$D_b = - K_{bb}^{-1} K_{ba} D_a \quad (3.31)$$

$$Q_{cond} = Q_a \quad (3.32)$$

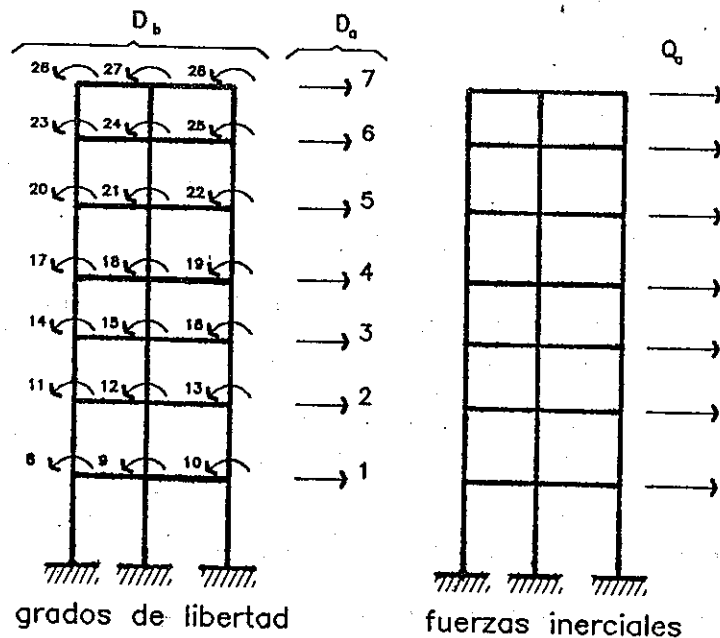


FIGURA 3.9. ESTRUCTURA SUJETA A CARGAS SÍSMICAS

En general, el procedimiento a seguir es el siguiente: calcular la matriz condensada  $K_{cond}$  y el vector de cargas condensado  $Q_{cond}$ , se resuelve el sistema de ecuaciones dado por la ecuación 3.30 obteniéndose  $D_a$ .

Para llevar a cabo la condensación de matrices, es necesario invertir la matriz  $K_{bb}$ , para ello se pueden emplear varios métodos, entre ellos el método de Choleski para matrices simétricas. (ver Ref. 11 cap IV-A-2).

La condensación de matrices puede llevarse a cabo a cualquier nivel, desde elementos simples, como vigas y/o columnas, hasta

super elementos como edificios o sub-estructuras. De hecho el análisis por sub-estructuras es una aplicación del concepto de condensación.

Una estructura se considera como la unión de componentes mayores llamados sub-estructuras. Cada sub-estructura se analiza o condensa por separado (este es el proceso en "paralelo"); es decir, se condensan los grados de libertad internos, permaneciendo los grados de libertad que están en contacto con otras sub-estructuras. La rigidez total de la estructura se forma ensamblando las matrices condensadas de las sub-estructuras.

La forma conveniente de iniciar la numeración de los grados de libertad a ser condensados es con los grados de libertad que se retienen, y después continuar con los grados de libertad restantes. En el caso específico de sub-estructuras, debe iniciarse la numeración de los grados de libertad que están ubicados en los nudos de contacto entre sub-estructuras, y después los grados de libertad que se encuentren en los nudos interiores, es decir, no asociados con otras sub-estructuras.

Cuando una sub-estructura posee características muy particulares, el análisis de la misma puede simplificarse bastante. Un ejemplo típico son los edificios altos, cuyas estructuras posean regularidad en elevación. Si el edificio tiene 20 niveles o más, es probable que no pueda realizarse un análisis simultáneo del mismo, debido a limitaciones de memoria del computador. Ante esa limitación de capacidad de memoria, pero con la ventaja que el edificio es regular en elevación, surge el procedimiento de condensación en serie.

En dicho procedimiento, se calculan las matrices de rigidez nivel por nivel. Las matrices tienen como orden máximo el número de grados de libertad que existen en un nivel, por lo que los requerimientos de memoria principal disminuyen, pero aumenta el manejo de información hacia y desde memoria secundaria.

A pesar que el procedimiento que se implementa trata estructuras con regularidad en elevación, aún los edificios irregulares podrían también estudiarse. Lo anterior se puede lograr agregando elementos ficticios con inercias y/o áreas muy pequeñas comparadas con el resto de elementos, inclusive iguales a cero. El número de elementos ficticios sería el necesario para que la estructura a modelar se vuelva regular en elevación.

Para la formulación matricial del procedimiento de la condensación en serie para estructuras se hacen las siguientes suposiciones:

- Existe diafragma rígido, por lo que se considera solo una deformación lateral por nivel.
- Las columnas se consideran rígidas axialmente, por lo que no se tienen deformaciones verticales.

Entonces, las deformaciones que se tendrán en un nivel son: giro por cada nudo, y un desplazamiento lateral para todas las columnas. La formulación matricial se hace partiendo de una estructura como la que se muestra en la figura 3.10.

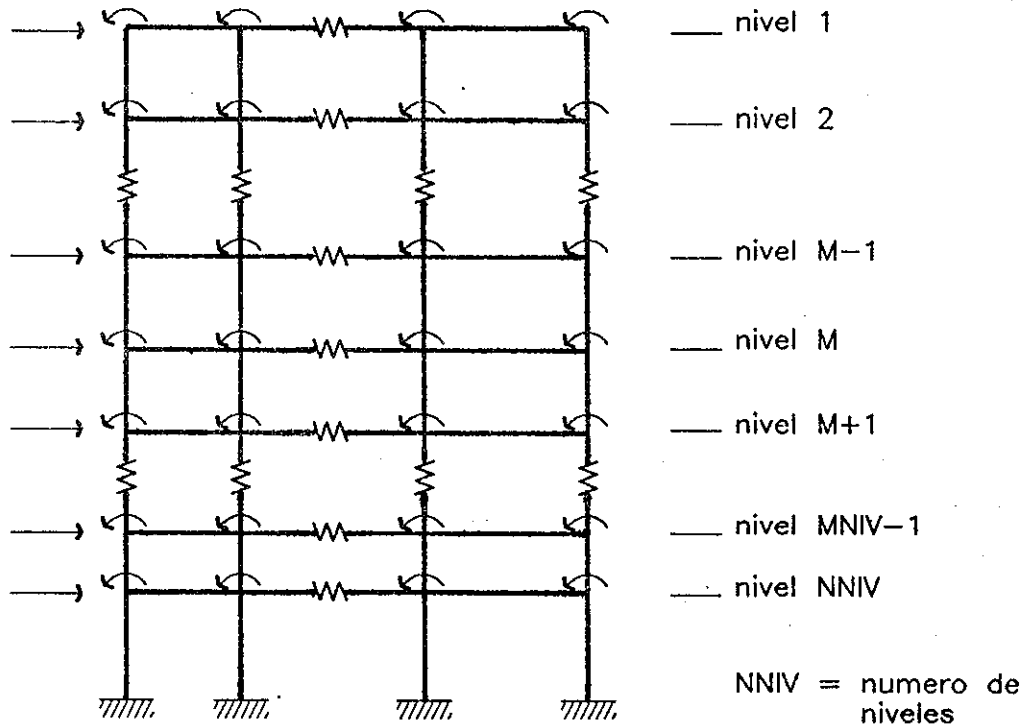


FIGURA 3.10. MODELO DE ESTRUCTURA PARA LA FORMULACIÓN MATRICIAL

De la condensación de matrices nivel por nivel se llega a las ecuaciones generales

$$AA_{M,M}^* = AA_{M,M} - BA_{M,M-1} AA_{M-1,M-1}^{*-1} AB_{M-1,M} \quad (3.33)$$

$$Q_M^* = Q_M - BA_{M,M-1} AA_{M-1,M-1}^{*-1} Q_{M-1}^* \quad (3.34)$$

El proceso de condensación en serie se realiza aplicando las ecuaciones 3.33 y 3.34, desde el nivel 1 hasta llegar al nivel NNIV, en seguida se aplica la expresión

$$DEF_{NNIV} = AA_{NNIV,NNIV}^* Q_{NNIV}^* \quad (3.35)$$

### 3.5. EXCITACIÓN - ESTRUCTURA - RESPUESTA

Luego de condensar una estructura se le debe excitar, aplicándole los parámetros excitadores para la región, para así obtener una

respuesta de la estructura.

La excitación de la estructura ante cargas sísmicas, se realiza por medio de un análisis dinámico.

Existen varios métodos para el análisis de estructuras por medio de análisis dinámico, pero como se indicó en el capítulo anterior lo más recomendable es la aplicación del método de análisis modal con uso del espectro de respuesta.

Antes de efectuar el análisis sísmico dinámico para obtener una respuesta ante la excitación sísmica, es necesario integrar el modelo analítico de la estructura conforme los aspectos mencionados en el capítulo 3.3.

Luego de integrar el modelo analítico de la estructura, se procede a excitar la misma por medio del análisis sísmico dinámico en el cual se deben realizar los siguientes pasos para obtener la respuesta en términos de deformaciones:

1. Estimación del número de modos que intervendrán en la excitación (solo los primeros modos son necesarios, aunque se debe chequear que por lo menos este participando el 90% de la masa actuante). (ver capítulo 2.5).
2. Se debe integrar la matriz de rigidez y la matriz de masas. (ver capítulo 3.1 y 3.2).
3. Determinación de los grados de libertad excitados por vectores unitarios iniciales. (ver capítulo 3.4).
4. Cálculo de las frecuencias de vibración o períodos de vibración (ver capítulo 2.5).
5. Cálculo de los modos de vibración (ver capítulo 2.5).
6. Se procede a obtener la excitación sísmica, en base a los parámetros del espectro de respuesta reducido que reconoce la capacidad postelástica de la estructura, para cada modo de vibración para obtener la aceleración de diseño. (ver capítulo 4.2, capítulo 4.3 y capítulo 4.4).
7. Cálculo de las deformaciones por cada modo de vibración para cada grado de libertad, calculando al mismo tiempo el porcentaje de participación de cada masa. (ver capítulo 2.5 y capítulo 2.6).
8. Cálculo de deformaciones por grado de libertad con superposición de resultados. (ver capítulo 2.6 y 3.6).
9. Cálculo de fuerzas internas por métodos estáticos con base a los desplazamientos o deformaciones obtenidas. (ver capítulo 2.6 y 3.1).

El procedimiento descrito en los incisos 4 y 5 son los más importantes y fundamentales para el análisis sísmico dinámico, ya que en base a éstos se obtendrá la excitación que tendrá la estructura, es decir se obtiene el comportamiento de la estructura ante una vibración libre. Los procedimientos descritos a partir del inciso 6 que consisten en determinar la respuesta o comportamiento de la estructura ante parámetros de excitación impuestas a la estructura pueden variar, dependiendo de el método de análisis

sísmico dinámico a utilizar, en este caso se plantea el uso del análisis modal con espectro respuesta. Ver los distintos métodos de análisis dinámico en el capítulo anterior.

### 3.6. DECONDENSACIÓN DE RESULTADOS

La decondensación es el proceso inverso a la condensación, es decir en este proceso se determinan las deformaciones de los grados de libertad condensados en términos de los otros grados de libertad retenidos. Es decir, luego de determinar los desplazamientos de los grados de libertad traslacionales, se calculan los desplazamientos de los grados de libertad rotacionales (estos se transformaron en términos de los de traslación).

El procedimiento a seguir en la decondensación de resultados es resolver la ecuación 3.30 para obtener  $D_a$  y luego resolver la ecuación 3.31:

$$D_b = -K_{bb}^{-1}K_{ba}D_a$$

con lo cual se obtienen los grados de libertad condensados, este proceso como se dijo es la decondensación.

En un proceso de decondensación en serie el procedimiento sería similar al paralelo, solo que aplicando la siguiente ecuación:

$$DEF_M = AA_{M,M}^*{}^{-1} (Q_M^* - AB_{M,M+1}DEF_{M+1}) \quad (3.36)$$

y este proceso se realiza del nivel  $N_{NIV}$  hasta el nivel 1, inverso a lo efectuado en la condensación.

La decondensación se debe realizar después de que la estructura condensada se excitó para obtener una respuesta en término de los grados de libertad retenidos.

### 3.7. SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS

Una estructura de múltiples pisos tiene varios modos de vibración, cada una con su propio valor de  $\omega$ . Ya que las vibraciones en cada modo generalmente no estarán en fase una con otra, sus valores máximos no ocurrirán al mismo tiempo. Así, simplemente, agregando los valores máximos para los varios modos de vibración, no es posible obtener el máximo para el sistema. En vez de ello, los máximos de cada modo deben ser combinados de tal manera que la reacción esperada del sistema total refleje la realidad probable.

En un edificio de múltiples pisos el esfuerzo máximo en

la base, debido a cada modo, ocurre en diferentes instantes de tiempo durante el sismo.

Debido a ello se utilizan generalmente 3 métodos para la combinación modal: (1) La suma directa de los máximos absolutos de los varios modos para obtener un estimado conservador de la respuesta, con lo cual suministra un estimado superior al máximo de respuesta total:

$$\bar{r} \leq \sum_{n=1}^N \bar{r}_n \quad (3.37)$$

este estimado de respuesta total es, a menudo, demasiado conservador y es por lo tanto inconveniente en aplicaciones de diseño; (2) Una raíz cuadrada de la suma de los cuadrados, la cual toma en cuenta la probabilidad de que los máximos de los modos no ocurren todos al mismo tiempo.

$$\bar{r} = \sqrt{\sum \bar{r}_n^2} \quad (3.38)$$

y únicamente los modos más bajos contribuyen significativamente a la necesidad de la reacción total a ser incluida en la suma. La fórmula raíz cuadrada de la suma de los cuadrados, no es siempre un vaticinador conservador de la respuesta del terremoto. Sin embargo, ésta generalmente proporciona una estimación buena de respuesta máxima para sistemas con períodos de vibración naturales bien separados y (3) También se puede utilizar un promedio de los métodos 1 y 2 para tener un estimado no tan bajo ni tan conservador.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{r}_n + \sqrt{\sum \bar{r}_n^2}}{2} \quad (3.39)$$

Aunque actualmente se desarrollan otros métodos para la combinación de los modos principales, aún no han sido puestos en práctica.

### 3.8. RESUMEN

Para analizar una estructura sujeta a cargas, frecuentemente se considera a la misma integrada por un grupo de elementos. Las propiedades de la estructura se determinan a partir de las propiedades relativamente sencillas de las partes individuales.

Las condiciones de compatibilidad de deformaciones y continuidad de esfuerzos son las que se utilizan para poder unir físicamente varios elementos y conformar una estructura. Estas condiciones en las uniones se reemplazan por condiciones en puntos concentrados de la estructura denominados nudos o nodos. Las propiedades



de los elementos individuales se describen por relaciones entre cargas nodales y desplazamientos nodales.

El método de rigideces es como sigue: Primero, cada uno de los grados de libertad de la estructura recibe un número para fines de notación; los desplazamientos correspondientes a cada uno de los grados de libertad son las incógnitas que se van a determinar. El segundo paso consiste en calcular los coeficientes de influencia de rigidez; con este objeto, se sujetan todos los nodos de la estructura, y luego se ejecuta con una serie de análisis, uno por cada grado de libertad, por turno, dando un desplazamiento unitario. Cuando al grado de libertad  $j$ , se le da un desplazamiento unitario, se determinan las fuerzas correspondientes a cada uno de los grados de libertad  $i$ , llamado  $K_{ij}$ , luego se formulan las ecuaciones de equilibrio y siempre son de la forma:

$$[K] [D] = [Q]$$

donde a  $[K]$  se le llama matriz de rigideces de la estructura y a  $[D]$  y  $[Q]$  vectores de desplazamiento y de carga, respectivamente. La ecuación anterior es la expresión de equilibrio en los nodos que se pueden desplazar libremente.

La formación de la matriz  $[K]$  es un paso importante del proceso de análisis. Algunas propiedades importantes de una matriz de rigidez del elemento son: singularidad, simetría, que cada columna representa un conjunto de acciones en equilibrio y que cuando se multiplica cada renglón por un conjunto de desplazamientos que representa un movimiento de cuerpo rígido, se obtiene una fuerza o momento cero.

Por aparte en el cálculo de las rigideces nodales, las rigideces del miembro se deben calcular primero en función de las direcciones, de las coordenadas establecidas para la estructura. La rigidez nodal  $K_{ij}$  se encuentra entonces como la suma de las rigideces correspondientes de los miembros que concurren al nodo. Después las rigideces del miembro se convierten al sistema de coordenadas de la estructura (o global), y por último se colocan en la matriz de rigideces de la estructura.

De manera que una vez que se ha calculado la matriz de rigideces del miembro se puede usar repetidas veces para cada uno de los miembros de la estructura.

De igual forma como se ensambla la matriz de rigidez se debe ensamblar el vector de cargas nodales  $Q$  y el vector de acciones fijas para una estructura.

La matriz de rigidez de una estructura,  $K$  tiene que partirse en sub-matrices que correspondan a las deformaciones de los nodos que constituyen apoyos, y a las deformaciones de los nodos que no son soportes. De éstas se tiene que determinar primero la matriz de rigidez para los grados de libertad sin restricción, ya que determinar las reacciones en los apoyos es equivalente

a establecer las fuerzas finales inducidas en los elementos que se unen a los apoyos. Por lo que pueden determinarse las reacciones cuando se calculen las fuerzas en los elementos. Las fuerzas finales en un elemento se pueden determinar después de obtener las deformaciones nodales  $D$ .

Para el análisis de sistemas estructurales grandes se requerirá de una rutina de resolución eficaz, que trabaje sólo con la parte utilizable de la matriz de rigidez de la estructura.

Otra propiedad estructural importante que hay que determinar para el análisis de una estructura es la matriz de masa de la misma.

El procedimiento más simple para definir las propiedades de masa de cualquier estructura es asumir que la masa completa está concentrada en los puntos en los cuales están definidos los desplazamientos traslacionales, con lo cual la masa total concentrada en cada nodo de la estructura completa es la suma de las contribuciones nodales de todos los segmentos referidos a su nodo, y por ello la matriz de masa tiene una forma diagonal en la cual hay tantos términos como grados de libertad traslacionales tenga la estructura.

El modelo estructural con el cual se realiza el análisis está integrado por las siguientes partes:

- a) Modelo geométrico. Este es un esquema que representa las principales características geométricas de la estructura. Su determinación implica identificar la parte de la construcción que desarrolla funciones estructurales y eliminar la parte que no influye significativamente en la respuesta de la estructura.
- b) Modelo de las condiciones de continuidad en las fronteras. Debe establecerse cómo cada elemento está conectado a sus adyacentes.
- c) Modelo de comportamiento de los materiales. Debe suponerse una relación acción-respuesta (o esfuerzo-deformación) del material que compone la estructura.
- d) Modelo de las acciones impuestas. Las acciones que afectan la estructura para una condición dada de funcionamiento, se representan por conjuntos de cargas o de deformaciones impuestas.

Por aparte en una estructura sujeta a sismo las masas de los pisos se desplazan principalmente horizontalmente, bajo este concepto, la matriz de masa se genera teniendo en cuenta únicamente los desplazamientos de traslación horizontal y excepcionalmente desplazamientos verticales en estructuras de gran luz; en cambio la matriz de rigidez tiene en cuenta traslaciones horizontales y rotaciones, puesto que los tres tipos de grados de libertad son importantes en las reacciones de la estructura. Por esta razón, las matrices  $M$  y  $K$  resultan de dimensiones menores. Es natural que esta aparente incongruencia de dimensiones no permita

combinar las matrices directamente. Como sí es necesario combinarlas, la matriz  $K$  se debe modificar, para reducir sus grados de libertad en rotación y en general los grados de libertad verticales. Esta operación se llama una condensación estática; la condensación estática no modifica en nada las características de la estructura; simplemente se involucran los grados de libertad rotacionales y verticales en términos de los de traslación horizontal.

En general, el procedimiento consiste en calcular la matriz condensada  $K_{cond}$  y el vector de cargas condensado  $Q_{cond}$  para poder obtener el vector  $D_a$  que está formado por las deformaciones traslacionales.

Una estructura se considera como la unión de componentes mayores llamados sub-estructuras. Cada sub-estructura se analiza o condensa por separado (este es el proceso en "paralelo"); es decir, se condensan los grados de libertad internos, permaneciendo los grados de libertad que están en contacto con otras sub-estructuras. La rigidez total de la estructura se forma ensamblando las matrices condensadas de las sub-estructuras.

Si un edificio tiene 20 niveles o más, es probable que no pueda realizarse un análisis simultáneo del mismo, debido a limitaciones de memoria del computador. Ante esa limitación de capacidad de memoria, pero con la ventaja que el edificio es regular en elevación, surge el procedimiento de condensación en serie.

En dicho procedimiento, se calculan las matrices de rigidez nivel por nivel. Las matrices tienen como orden máximo el número de grados de libertad que existen en un nivel, por lo que los requerimientos de memoria principal disminuyen.

Luego de integrar el modelo analítico de la estructura, se procede a excitar la misma por medio del análisis sísmico dinámico, en el cual se obtiene la respuesta de la estructura en término de deformaciones o reacciones. La excitación de la estructura se realiza por medio de la aplicación de los parámetros excitadores de la región.

El paso más importante y fundamental del análisis sísmico dinámico es la determinación de los valores característicos de la estructura, que son las frecuencias de vibración y los modos de vibración de una estructura, ya que en base a éstos se obtendrá la excitación que sufrirá la estructura.

Para obtener las frecuencias y modos de vibración de la estructura, es necesario determinar las matrices de masa y rigidez en función de los grados traslacionales para poder resolver la ecuación de vibración libre presentada en el capítulo anterior y con ello obtener los valores característicos para cada grado de libertad traslacional de la estructura. Es decir que se ingresan dos matrices (masa y rigidez) y se obtienen otras dos (modos y frecuencias).

La decondensación se debe realizar después de que la estructura

condensada se excitó para obtener una respuesta en término de los grados de libertad retenidos.

La decondensación de la estructura es el proceso inverso a la condensación, es decir en este proceso se determinan los grados de libertad modificados en términos de los otros grados de libertad retenidos.

Algo importante que se debe tomar en cuenta antes de la decondensación es que una estructura de múltiples pisos tiene varios modos de vibración, cada una con su propio valor de  $\omega$ . Ya que las vibraciones en cada modo generalmente no estarán en fase una con otra, sus valores máximos no ocurrirán al mismo tiempo. Así, simplemente, agregando los valores máximos para los varios modos de vibración, no es posible obtener el máximo para el sistema. En vez de ello, los máximos de cada modo deben ser combinados de tal manera que la reacción esperada del sistema total refleje la realidad probable.

Debido a ello se utilizan generalmente 3 métodos para la combinación modal: (1) los máximos absolutos de las varias formas de modo, (2) Una raíz cuadrada de la suma de la aproximación de los cuadrados ó (3) Un promedio de los métodos 1 y 2 para tener un estimado no tan bajo ni tan conservador. Estas combinaciones son las de mayor aceptación, en la actualidad se realizan estudios para proponer combinaciones que estén más apegadas a la realidad.

## CAPÍTULO 4

# EXCITACIONES SÍSMICAS PARA DISEÑO

### 4.1. ACELEROGRAMAS

Un acelerograma es un registro de la historia de aceleraciones que provoca el sismo en una dirección determinada y para fines de ingeniería constituye la descripción más útil del movimiento del suelo en el lugar. Los acelerogramas se registran en aparatos llamados acelerógrafos que, colocados en un sitio, arrancan automáticamente al ser excitados por el movimiento del terreno y registran simultáneamente la aceleración en dos direcciones horizontales ortogonales y en una vertical (figura 4.1). El análisis de los acelerogramas permite una evaluación cuantitativa de la intensidad sísmica, mucho más objetiva y confiable que por medio de escalas subjetivas como la escala de Mercalli.

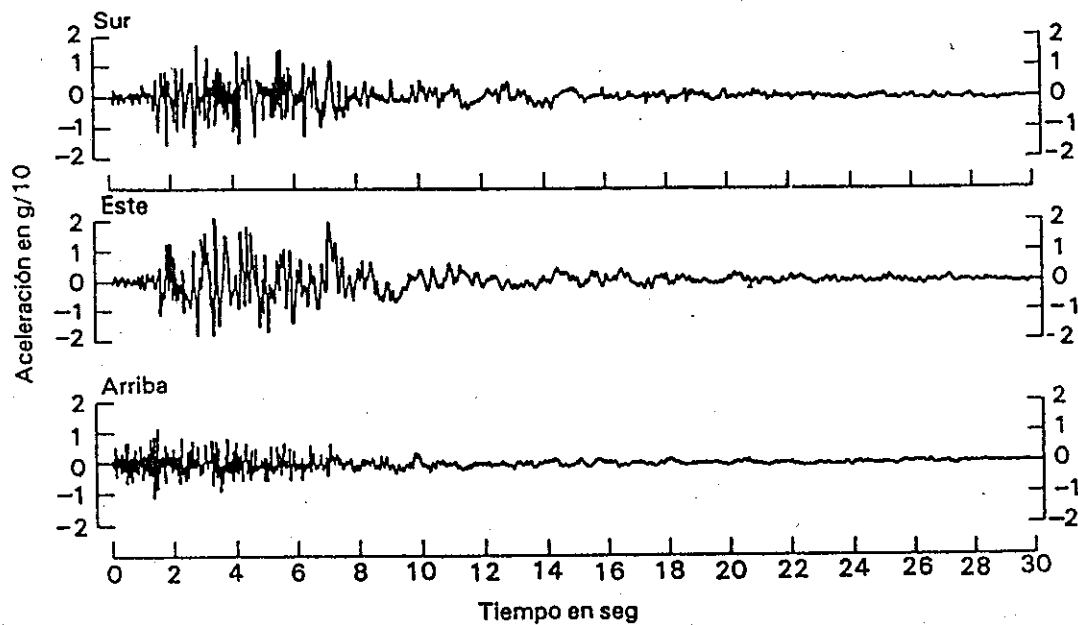


FIGURA 4.1 ACELEROGRAMAS DE LOS TRES COMPONENTES DE UN SISMO. (Diseño estructural, Roberto Meli).

Las características de los acelerogramas que más se relacionan

con la potencialidad destructiva, o sea con la intensidad del sismo, son la aceleración máxima, la duración de la etapa sensible, o sea aquella en que la amplitud de aceleración tiene un valor apreciable y, finalmente, las frecuencias de vibración dominantes del movimiento.

Un acelerograma de un sismo se puede considerar como la superposición aleatoria de un gran número de ondas armónicas que cubren una gama de frecuencias muy amplia, pero que suelen tener amplitudes muy grandes sólo dentro de un intervalo de períodos dominantes que depende del tipo de sismo, de la distancia a la fuente sísmica y del tipo del suelo. Ante esa serie de ondas de diferente período, el sistema responde con mayor amplitud a las que tienen período similar al suyo, mientras que para el resto la respuesta es pequeña.

El mayor interés del ingeniero que en alguna forma tiene que ver con el planeamiento o diseño de obras civiles desde el punto de vista sísmico, es tener una idea sobre cuáles serán las aceleraciones que las ondas del terremoto portarán en el sitio donde se construirá la obra. Es lógico hablar del interés en la aceleración, puesto que aceleración combinada con masa es fuerza, fuerza produce deformación, deformación produce esfuerzo interno en la estructura y si éste es muy alto produce daño a la construcción.

Los acelerogramas son elementos de estudio de gran importancia para los ingenieros, pues dan informaciones sobre las características locales de los sismos. El registro de acelerogramas se inició en la década entre 1930 y 1940, por lo tanto hay mucha menor información sobre acelerogramas que sobre sismogramas. En realidad la principal razón no estriba tanto en lo nuevo del método de registro sino en la particularidad misma del registro, la cual corresponde a las aceleraciones fuertes del sismo.

El estudio detenido de los acelerogramas les permite a los ingenieros determinar, además, las frecuencias dominantes del tren ondulatorio y sus variaciones en términos de la distancia entre el instrumento y el foco; un número suficiente de ellos les permite inferir qué puede esperarse para el futuro en la misma localidad donde se han registrado los que han servido para la inferencia.

El acelerograma generalmente se registra para niveles de aceleración mínima que se predeterminan en rangos que van desde 1 al 5 por ciento de la aceleración de la gravedad; el instrumento mantiene un tiempo de registro posterior al decaimiento de la señal, cuando ya ésta no alcanza a los niveles mínimos predeterminados para el registro.

La información que puede ser obtenida directamente del acelerograma por medio de una inspección visual y a simple escala sin digitación y sin necesidad de un proceso puede resumirse en: (1) picos de aceleración, (2) tiempo de duración del movimiento sísmico, (3)

frecuencia de las ondas predominantes y una vaga idea del rango de frecuencia, (4) relaciones de amplitud y frecuencia respecto a movimientos horizontales y verticales, y (5) distancia aproximada del lugar de medición al epicentro del sismo. Información de este tipo es suficiente para relacionar el sismo a registros de sismos pasados en diferentes maneras.

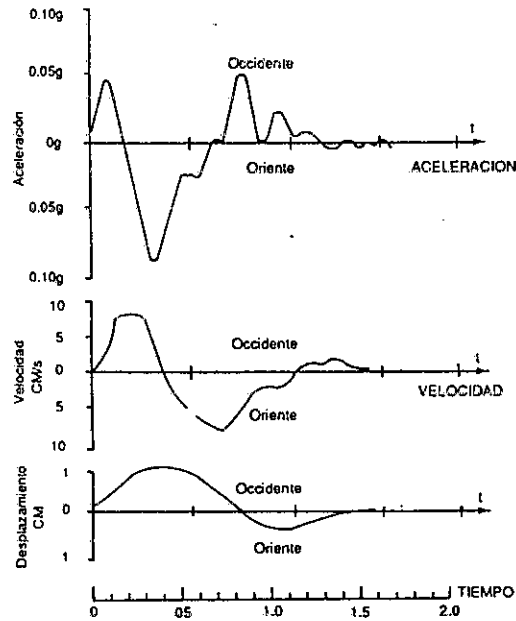
Para efectuar comparaciones visuales con sentido es esencial que los acelerogramas estén ploteados a la misma escala.

El efecto práctico de los registros sísmicos por medio de acelerogramas es que junto con registro pasados la correlación de la información sea más válida, para poder utilizarla con mayor confiabilidad.

Las ventajas que se tienen con la digitalización de los acelerogramas son: (1) la resolución es mejorada y produce un incremento en el rango dinámico como medida de magnitud, (2) es posible introducir correcciones para transformar las características a las que el rango de frecuencia debe ser extendido para medirlo, (3) computaciones digitales proporcionan mayor exactitud en la integración de acelerogramas para encontrar velocidades y desplazamientos del suelo, parámetros que pueden correlacionarse en diferentes formas con parámetros geofísicos y geológicos, (4) el cálculo de la frecuencia espectral, el espectro de respuesta y respuestas estructurales se tornan más sencillas por la introducción de los datos en computadoras digitales, y (5) la existencia de la digitalización de los datos hace posible el estudio estadístico de la información y la preparación de ploteos de información a diferentes escalas. Otra ventaja importante es que se separan las altas frecuencias de las bajas frecuencias para obtener un mejor registro.

Estudios adelantados sobre los acelerogramas registrados para muchos y variados sismos conducen, según la ref. 14, a dividirlos en cuatro categorías:

- \* Categoría uno: aquellos cuyo registro corresponde a prácticamente un solo choque; este tipo de registro se logra a cortas distancias del epicentro, para sismos superficiales, con instrumentos registradores colocados sobre terreno firme. A este grupo pueden asignarse temblores muy destructores como el de Agadir en 1960 y el de Skopje, Yugoslavia en 1963. Las magnitudes de los sismos nombrados son apenas moderadas y su foco superficial indica movimientos unidireccionales principalmente. Es casi seguro que las frecuencias dominantes del tren ondulatorio correspondan a períodos cortos del orden de 0.2 segundos. En la figura 4.2 se aprecian los registros de un sismo asimilable a este grupo. En la parte superior de la figura se aprecia la aceleración, mientras que la segunda parte muestra la velocidad, la cual corresponde a la integración de la aceleración; la doble integral de la aceleración es el desplazamiento, el cual aparece en la parte inferior de la misma figura.



**FIGURA 4.2.** REGISTRO DE ACELERACIÓN Y VELOCIDAD Y DESELAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A UN SISMO CORTO Y DE ALTA ACELERACIÓN. (Ingeniería Sísmica, Alberto Sarria).

- \* Categoría dos: sismos moderadamente largos con movimientos irregulares; el contenido frecuencial de este grupo de terremotos es muy amplio y puede estimarse entre 0.05 y 6 o más segundos, con una distribución de frecuencias muy uniforme, por lo cual se ha tendido a asimilarlos al llamado "ruido blanco". El sismo de El Centro, California, que se aprecia en detalle en la figura 4.3. es asimilable a este tipo de terremotos lo mismo que aquellos mostrados en conjunto en la figura 4.4. El sismo de la figura 4.3 sirvió para establecer muchos de los conceptos que todavía perduran, en vista que durante un lapso largo fue el único registro disponible en la zona epicentral de un sismo de magnitud elevada.
- \* Categoría tres: corresponde a sismos de larga duración que muestra períodos predominantes bastante marcados, tal como se aprecia en la figura 4.4, correspondientes al que azotó a Ciudad de México en 1985. Hay que ser cautelosos en la forma de interpretar estos registros porque lo que se puede estar resaltando es la respuesta local y no el acelerograma en su conjunto.
- \* Categoría cuatro: sismos que inducen grandes deformaciones en el suelo como el de Anchorage, Alaska en 1964, y uno que ocurrió en la zona pantanosa del Chocó en Colombia, el cual a pesar de su magnitud moderada produjo fenómenos de licuación muy amplios, derribando extensiones de selva y alterando el curso de algunas corrientes de agua menores.



Nuevamente esta situación debe mirarse con criterio porque lo que sucede al subsuelo puede no ser debido a una particularidad del acelerograma, sino más bien a que el suelo en alguna forma es susceptible a la licuación.

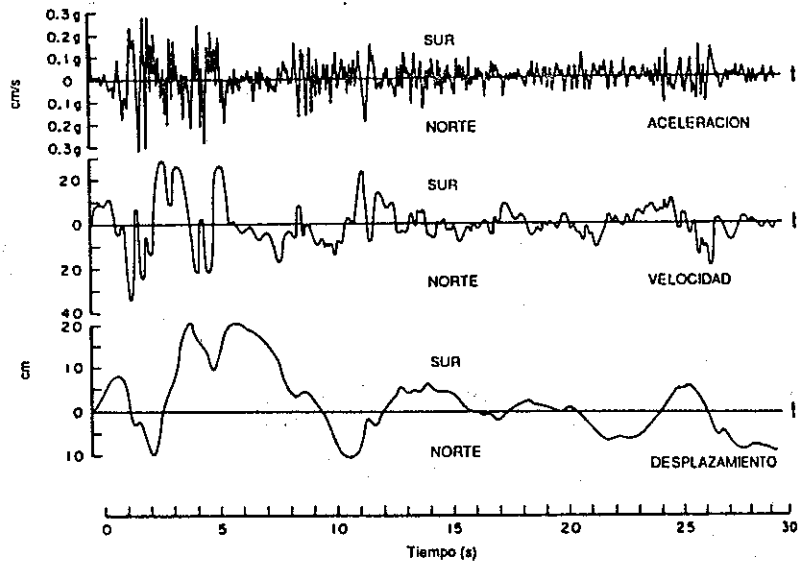


FIGURA 4.3. TEMBLOR DE EL CENTRO 18 MAYO 1940 COMPONENTE NS. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

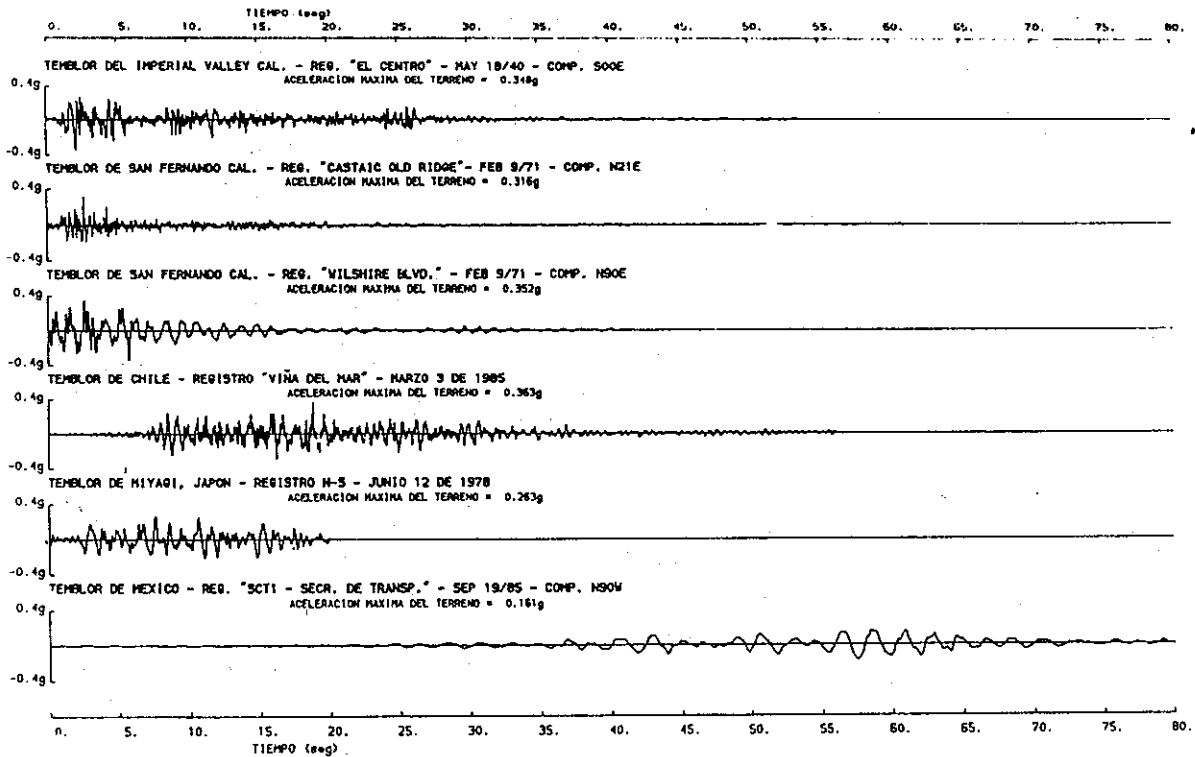


FIGURA 4.4. ACELEROGRAMAS. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

En los cuatro tipos de sismos considerados anteriormente, especialmente en los tres últimos grupos, se aprecia que un sismo, produce acciones sobre las rocas y suelos de tal manera que son aleatorias su duración, su contenido de frecuencias y las aceleraciones inducidas.

Precisamente por las limitaciones en la predicción de los efectos de la duración del sismo hipotético que en el futuro sacudiría a determinada construcción, se ha pensado que la mejor manera de enfrentar el problema, cuando las circunstancias del peligro sísmico lo ameriten, sería analizar la respuesta de las construcciones en dominio del tiempo y no en el de la frecuencia. Housner y Jennings, mencionan la posibilidad de que se presenten modos con frecuencias muy similares, lo cual haría que en estructuras como presas, las respuestas modales estimadas por combinación de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas individuales, resulten subestimando la respuesta total; en este caso el análisis contra el tiempo también resulta deseable, aunque los acelerogramas registrados en el pasado adolecen de un peligro del cual no se suele tener conciencia; hay en general buen control sobre el estado de las baterías o sistema de registro del instrumento, pero rara vez se calibra en mesa vibratoria el acelerógrafo una vez que ha registrado el evento.

Con el correr del tiempo, sismos menores registrados por instrumentos cercanos al epicentro, han mostrado aceleraciones aparentemente muy elevadas pero que efectivamente parece que así son.

Otra consideración de importancia en contra del empleo directo de acelerogramas pasados tiene que ver con el proceso mismo de la ruptura, es decir el ambiente de ruptura. Este proceso es lo suficientemente complicado como para por lo menos tener presente que debe desempeñar un papel, principalmente en sismos con epicentro cercano.

En conclusión, la posibilidad de emplear acelerogramas pasados para el análisis en el dominio del tiempo de construcciones futuras, no parece conveniente; no obstante, puede resultar recomendable emplearlos teniendo en cuenta la posibilidad que consiste en tomar acelerogramas de eventos registrados en el pasado y modificarlos en cuanto a la intensidad de los picos de aceleración, en referencia al contenido frecuencial y eventualmente en cuanto a la duración.

Si se conocen algunas condiciones del ambiente sismotectónico, tales como magnitud máxima que puede ocurrir debido a una ruptura de la fuente, distancia epicentral entre la fuente y la construcción que se quiere evaluar y si hay registros pasados provenientes de la misma fuente, la metodología de modificación de registros pasados puede ser una buena alternativa para el análisis contra el tiempo.

La metodología según Sarria, ref. 16 consistiría entonces en analizar las duraciones de las fases de ascenso, máxima intensidad

y descenso, que podría tener un sismo hipotético que en el futuro sacudiera la construcción de interés. La duración de las fases está relacionada con la diferencia S-P, porque las primeras ondas en llegar son las P por ser las más rápidas. Estas ondas, como se sabe, son portadoras de menos energía que las S que llegan posteriormente. La distancia focal gobierna la diferencia de tiempos de llegada de las ondas P y S, por lo tanto, esta diferencia de tiempos está íntimamente relacionada con la fase de ascenso de la intensidad de aceleración. La fase de alta intensidad de aceleración se puede obtener mediante la escalación de los valores del acelerograma registrado, a la aceleración máxima probable, o máxima evaluada. Por último, la fase de descenso de la intensidad de aceleración debe tener una mayor duración que la de ascenso, porque las ondas que la conforman provienen de las zonas más alejadas de la ruptura.

El contenido frecuencial también puede modificarse mediante el proceso de incremento o decremento del período por medio de la señal registrada para llegar al acelerograma de diseño. Para distancias epicentrales de la construcción que se va a analizar con el acelerograma registrado, la frecuencia media del acelerograma de diseño que se está tratando de producir debe incrementarse y en caso de mayor distancia, reducirse. Si se trabaja con el período medio se invierten las cosas.

La posibilidad de generación de acelerogramas sintéticos ha sido bastante empleada en el pasado pero enfocada desde un punto de vista más ingenieril que sismológico.

El enfoque ingenieril se ha basado fundamentalmente en la idea de que una señal aleatoria presente una cierta ciclicidad, puede reproducirse mediante la sumatoria de un número apropiado de términos de una serie de Fourier. Si se logra introducir la aleatoriedad apropiada en la sumatoria, en teoría se podría llegar a producir el resultado buscado. Una dificultad tiene que ver con la comprobación, es decir, contra qué se comprueba el resultado obtenido. En este proceso la serie de términos se desacopla en el tiempo mediante un ángulo de fase generado como una variable aleatoria. La intensidad de los pulsos se genera ajustándose a un espectro de diseño. La comprobación se logra al generar el espectro de respuesta del acelerograma sintético, el cual resulta muy aproximado al espectro de diseño que le dio origen al acelerograma sintético. En la figura 4.5 se muestra el espectro de respuesta y el de diseño que le dio origen al acelerograma.

Si el método funciona aceptablemente bien sólo podría ser objeto de crítica en referencia al manejo del ángulo de fase y del espectro de diseño que permiten generarlo. Nuevamente se llega a la necesidad de lograr un enfoque integrado de los problemas de la ruptura de la fuente sismogénica, la propagación del tren ondulatorio y la respuesta estructural para poder aportar acertadamente la proporción de las variables que interviniendo en todo este proceso, pueden ser manejadas por el ingeniero.

Si esto se puede lograr en forma razonable, el método de generación sintética con base en el espectro de diseño conforma una buena posibilidad para el análisis de la respuesta. No obstante, estos métodos todavía no están lo suficientemente maduros como para hacer parte de las actuales herramientas de los ingenieros.

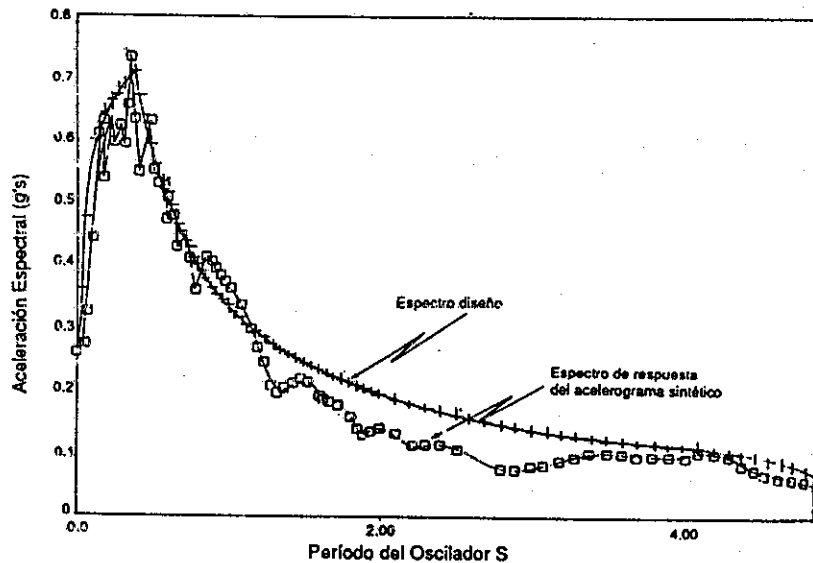


FIGURA 4.5. DEMOSTRACIÓN DE LA CONVERGENCIA DEL ESPECTRO DE RESPUESTA DEL ACELEROGRAMA SINTÉTICO AL ESPECTRO QUE LE SIRVIÓ DE BASE. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

#### 4.2. ESPECTROS ELÁSTICOS DE RESPUESTA ESPECÍFICOS

En el diseño de estructuras sujetas a una vibración de estado permanente, la mayor preocupación es el máximo valor (en sentido absoluto) de la respuesta. El desplazamiento relativo  $u$  alcanza su máximo cuando la integral toma el máximo valor en la integral de Duhamel. Con el máximo valor de esta cantidad definida como  $S_v$ , se tiene

$$S_d = \frac{1}{\omega} S_v = \frac{T}{2\pi} S_v = u_{\max} \quad (4.1)$$

$S_d$  se llama desplazamiento espectral, y por tanto

$$S_v = \left\{ \int \ddot{u}_o(\tau) e^{[-\xi\omega(t-\tau)]} \text{sen}\omega(t-\tau) d\tau \right\}_{\max} \quad (4.2)$$

En las estructuras amortiguadas  $S_v$  no es idéntica a la respuesta de la velocidad máxima, aunque muy parecida; por lo tanto,  $S_v$

se considera la velocidad máxima y se llama velocidad pseudoespectral o simplemente velocidad espectral.

Después, como una aproximación razonable

$$S_v \approx \dot{u}_{\max} \quad (4.3)$$

De acuerdo con la ecuación 4.2

$$S_a = \omega S_v = \frac{2\pi}{T} S_v \approx (\ddot{u} + \ddot{u}_o)_{\max} \quad (4.4)$$

$S_a$  se llama aceleración espectral (o, más exacto, aceleración pseudoespectral, porque  $S_a$  en la generalidad de los casos no representa exactamente el valor máximo de la aceleración).

La carga sísmica aplicada a la estructura, por ejemplo el cortante máximo en la base  $V_{\max}$ , es

$$V_{\max} = m S_a = \frac{W}{g} S_a \quad (4.5)$$

Esta ecuación indica que el cortante máximo en la base se puede calcular con rapidez una vez que se conocen la masa de la estructura y la aceleración espectral. Al utilizar las ecuaciones 4.1 hasta 4.4,  $S_a$ ,  $S_d$  y  $S_v$  se pueden obtener con respecto a cada combinación particular de un período natural y un coeficiente de amortiguamiento para un sistema de un grado de libertad sujeto a un movimiento sísmico. Los diagramas del trazo de  $S_a$ ,  $S_v$  y  $S_d$  se llaman respectivamente espectros de respuesta de la aceleración, espectro de respuesta de la velocidad y espectro de respuesta del desplazamiento.

Por tanto se define el espectro de respuesta como el conjunto de máximos valores de desplazamiento, velocidad o aceleración, que sobre un oscilador simple puede originar una carga aleatoria o determinista. El interés en este caso corresponde a las cargas sísmicas, que son aleatorias por excelencia.

La figura 4.6 muestra un trazo de  $S_d$ ,  $S_v$  y  $S_a$  de un sistema de un grado de libertad de la componente sur-este del movimiento del terreno del sismo de El Centro, registrado en 1,940.

Una vez que se conocen el período natural y el coeficiente de amortiguamiento de una estructura, se puede determinar a partir de este diagrama la respuesta máxima de la estructura sujeta a este movimiento sísmico. Además, a partir de la ecuación 4.5, se calcula la fuerza cortante máxima en la base, aplicada de la estructura.

Ya que las ecuaciones 4.1, 4.3 y 4.4 correlacionan entre sí a  $S_a$ ,  $S_v$  y  $S_d$ , esos tres espectros se pueden trazar en una sola figura, como se muestra en la figura 4.7. En ésta, la abscisa designa el período natural y la ordenada el espectro de velocidad,

en que ambos ejes siguen una escala logarítmica.  $S_d$  y  $S_a$  se leen en ejes inclinados  $-45^\circ$  y  $45^\circ$  respecto a la abscisa.

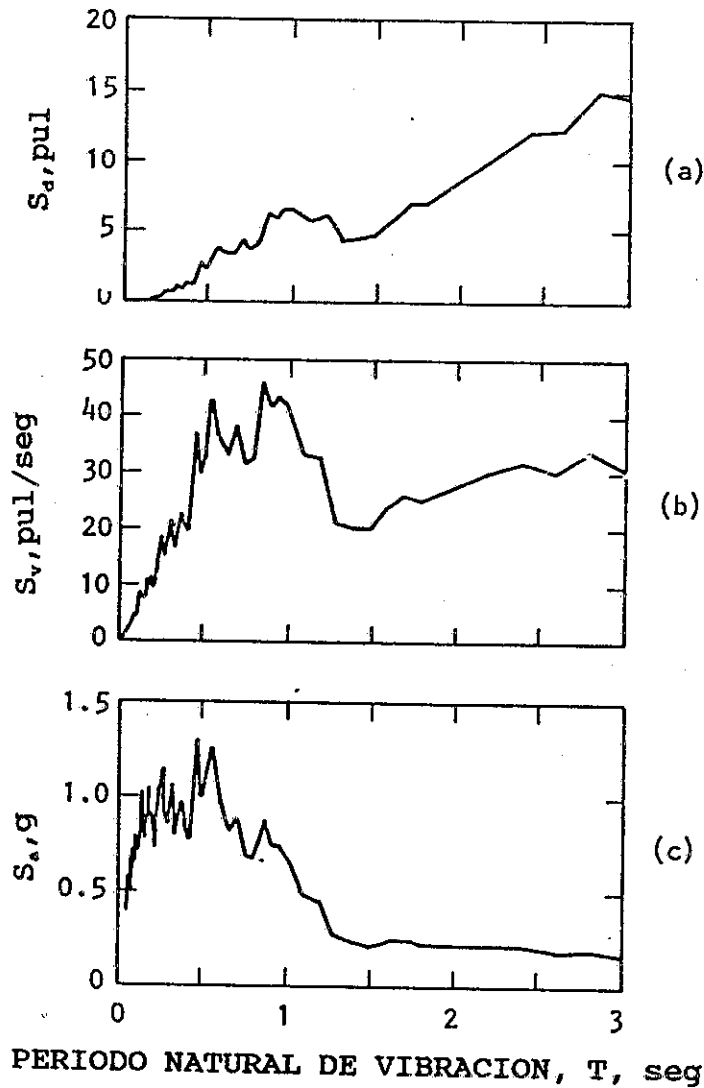


FIGURA 4.6 (a) DEFORMACIÓN O DESPLAZAMIENTO, (b) SEUDOVELOCIDAD Y (c) ESPECTRO DE RESPUESTA DE SEUDOACELERACIÓN. SISMO DE EL CENTRO, COMPONENTE S00°E. PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO  $\xi=2\%$ . (Adaptado de Dynamics of structures a primer, Anil K. Chopra).

Para calcular los espectros se han seguido varios métodos, entre los cuales se pueden mencionar:

1. Por integración numérica de la integral de Duhamel, usando intervalos finitos de tiempo.
2. Por un procedimiento semigráfico, usando aparatos adecuados.
3. Por medio de un péndulo de torsión.
4. Por medio de un computador electrónico de analogía.

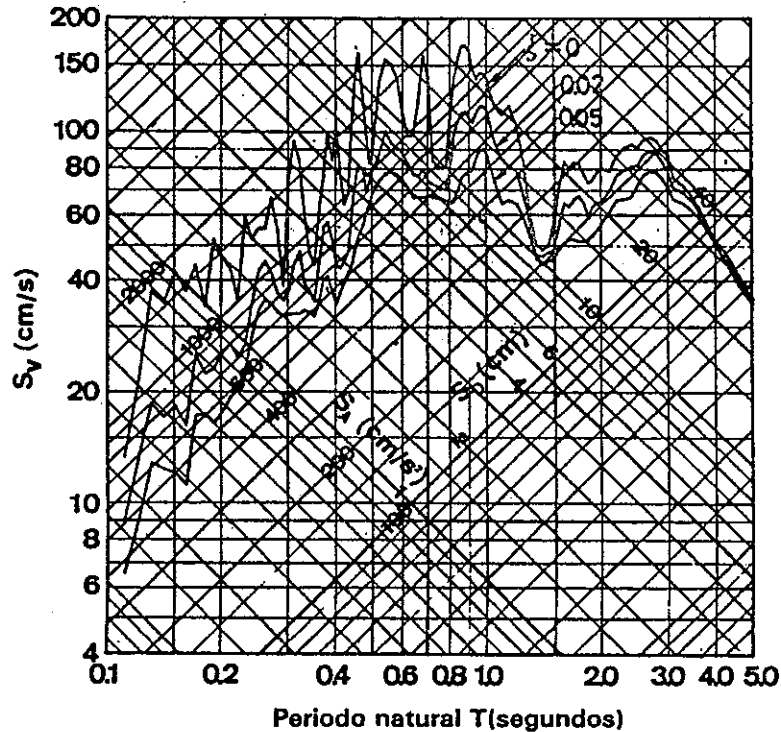


FIGURA 4.7. ESPECTROS DE RESPUESTA DERIVADOS DE LA COMPONENTE NORTE-SUR, DEL SISMO DE EL CENTRO, CALIFORNIA, 1,940. (Diseño de estructuras sismorresistentes, Minoru Wakabayashi).

A continuación se explica brevemente y sin entrar mucho en detalle, el cálculo del espectro de respuesta por medio de integración numérica, que es la base del proceso de cálculo de espectros de respuesta por los otros métodos mencionados.

Para iniciar el tratamiento de los espectros de respuesta de los osciladores simples en estado elástico, se debe definir la respuesta general del oscilador simple como la suma de la respuesta homogénea  $u(t)_h$  más la complementaria  $u(t)_c$ . Se analizó allí que la solución homogénea corresponde a aquella en la cual la carga externa es nula. Cuando la carga sobre el oscilador actúa sobre la masa como una consecuencia del movimiento y no como la causa de éste, se llega a la siguiente ecuación:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_0 = P_{\text{efectiva}} \quad (4.6)$$

La carga efectiva es una carga puramente inercial que no actúa externamente sobre la masa, sino que corresponde a la fuerza de inercia derivada del movimiento. La solución de la ecuación diferencial 4.6, corresponde entonces a la de una ecuación homogénea, dada por la siguiente ecuación:

$$u(t') = e^{-\beta t'} [P(\tau) \text{sen} \omega_d t' d\tau] \quad (4.7)$$

Debe recordarse que la frecuencia amortiguada  $\omega_d$ , es prácticamente igual a la circular natural  $\omega$ , tal como se demostró en el capítulo 2, siempre y cuando los valores del amortiguamiento con respecto al crítico  $\xi$  sean pequeños, como sucede en la realidad. No obstante, con el fin de presentar la teoría espectral en forma aceptablemente completa, se conserva la frecuencia amortiguada en términos de la natural;  $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$ . Si se tiene en cuenta que  $P_{\text{efectiva}} = -m\ddot{u}$  y además se puede decir que  $\beta = \xi \omega_d$ , con lo cual se puede expandir la ecuación 4.7 y se obtiene la siguiente:

$$u(t') = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\xi \omega_d (t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) [\text{sen} \omega_d t * \text{cos} \omega_d \tau - \text{cos} \omega_d t * \text{sen} \omega_d \tau] d\tau \quad (4.8)$$

En términos simples se puede decir que la ecuación 4.8 corresponde a la expresión:

$$u(t') = \phi [P(\tau), \omega, m, \xi] \quad (4.9)$$

Una vez digitalizada la señal aleatoria se obtienen parejas de valores  $[(\ddot{u}_{oi}), \tau_i]$  que conforman la base de la integración numérica. Para efectuar la integración numérica lo que se hace es seleccionar un valor de  $\omega$  muy pequeño y un  $\xi$  apropiado. Por ejemplo, para el primer ensayo  $\omega = 0.01$  rad/s y  $\xi = 0$ . Se introduce el primer par de valores y se obtiene la respuesta del sistema para valores incrementales del tiempo  $\Delta t_i$ ; esta operación se repite con el siguiente par de valores  $[(\ddot{u}_{oi}), \tau_i]$ ; se obtiene la respuesta, acumulándola a la obtenida en el primer proceso. Se toma el tercer par de valores y se obtiene la respuesta, acumulándola a la de los dos primeros pares de valores, y así sucesivamente. Todo lo anterior se hace manteniendo  $\omega$  y  $\xi$  constantes. No se repite ninguna operación, puesto que a medida que los pares de valores  $[(\ddot{u}_{oi}), \tau_i]$  avanzan en el tiempo, el proceso acumulativo se realiza en el dominio de  $t'$  mientras que el dominio del tiempo  $\tau$ , va quedando atrás sin modificaciones. Este proceso se repite hasta que se agotan los pares de valores  $[(\ddot{u}_{oi}), \tau_i]$  es decir cuando se llega al límite superior de la integración numérica, que es igual al límite superior de la integral de la ecuación.

Según Sarria, ref. 16 cuando se termina el primer proceso, se incrementa el valor de  $\omega$  a  $\omega + \Delta\omega$ , se mantiene  $\xi$  en el mismo valor inicial y se repite todo el proceso descrito en el párrafo anterior. Cada vez que se hace un proceso de estos, se extrae el mayor valor absoluto de la integración numérica. Se conforman entonces nuevos pares de valores  $[\omega_n, u_n(t)_{\text{max}}]$ . Operaciones posteriores repiten cada proceso, pero con nuevos valores de  $\xi$ ; es usual desarrollar esto para valores de  $\xi$  iguales a cero, dos, cinco y siete por ciento. Cada uno de los valores  $u_n(t)_{\text{max}}$  se denomina el desplazamiento espectral, correspondiente a la frecuencia  $\omega_n$  con la cual va pareado. El conjunto de todos los desplazamientos espectrales, conforma entonces el espectro de desplazamiento para cada valor de  $\xi$  seleccionado. La respuesta  $u(t')$  se desarrolla en el dominio del tiempo, mientras que el espectro queda reducido al dominio de la frecuencia.



De acuerdo con los planteamientos anteriores, con  $t'=t-\tau$  el desplazamiento espectral  $S_d$  queda expresado por:

$$S_d = \left| \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.10)$$

Al derivar la ecuación 4.10 se obtiene la velocidad espectral  $S_v$ , relativa de la masa con respecto al suelo:

$$S_v = \left| \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \cos\omega_d(t-\tau) d\tau + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.11)$$

De las dos integrales que conforman la ecuación 4.11 domina la primera porque la segunda tiende a  $\xi$ , que como se sabe es un valor pequeño. Por tanto, la velocidad espectral puede aproximarse al valor siguiente:

$$S_v \approx \left| \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \cos\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.12)$$

Al derivar la ecuación 4.11 se obtiene la aceleración espectral de la masa  $S_a$ :

$$S_a = \left| \omega(1-2\xi^2) \sqrt{1-\xi^2} \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau + 2\xi\omega_d \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \cos\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.13)$$

De las dos integrales de la ecuación 4.13, la primera tiende a quedar multiplicada por  $\omega$ , mientras que la segunda tiende a quedar multiplicada por  $\xi$ . Esto significa que la segunda se puede despreciar frente a la primera. Por lo tanto, la aceleración espectral se puede evaluar en forma suficientemente aproximada, por:

$$S_a \approx \left| \omega_d \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.14)$$

Los anteriores resultados presentados por Sarria en ref. 16 se resumen en la forma siguiente:

$$S_d = \left| \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.10)$$

$$S_v \approx \left| \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \cos\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.12)$$

$$S_a \approx \left| \omega_d \int_0^t e^{-\xi\omega_d(t-\tau)} \ddot{u}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (4.14)$$

La primera y la última ecuación están expresadas en términos de  $\operatorname{sen}\omega_d$ , mientras que la segunda queda en términos de  $\cos\omega_d$ . Recordando que para una señal más o menos larga el esfuerzo numérico resulta bastante grande, conviene pensar en qué sucedería si las tres ecuaciones se expresan en términos de  $\operatorname{sen}\omega_d$ . Esto se

ha hecho en muchas oportunidades y se ha comprobado que las variaciones son menores en vista de que las dos funciones circulares varían entre los mismos límites. Si esto se acepta se llega a las expresiones siguientes, que se conocen con los nombres de desplazamiento espectral, pseudovelocidad espectral y pseudoaceleración espectral, respectivamente.

$$S_d = S_a \quad (4.15)$$

$$S_v = \omega S_d \quad (4.16)$$

$$S_a = \omega^2 S_d = \omega S_v \quad (4.17)$$

Las expresiones anteriores pueden resultar en errores apreciables en el caso de acelerogramas de corta duración y altos valores de la aceleración; en estas circunstancias es necesario recurrir a las ecuaciones completas para la evaluación de los espectros de velocidad y aceleración.

Los espectros de aceleración se han convertido en los de mayor empleo en la ingeniería civil debido a que la fuerza involucra la masa y la aceleración. En la figura 4.8 se aprecia la tendencia general de los espectros. Para ello se muestran valores de aceleración, velocidad y desplazamiento del suelo mediante las rectas inferiores y las respuestas espectrales, por medio de las rectas superiores.

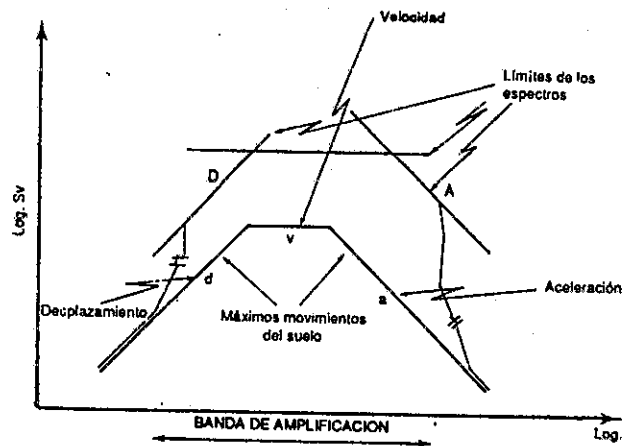


FIGURA 4.8. COMPARACIÓN ENTRE LOS LÍMITES DE LOS ESPECTROS Y LOS MÁXIMOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

En primer término debe indicarse que si el período del oscilador es muy pequeño, la aceleración espectral tiende a ser la del terreno, pero si el período es muy largo la aceleración de la masa tiende a ser nula. La razón de este comportamiento es que si la rigidez del resorte es muy alta y la masa pequeña, sucede

como si la masa y el suelo fueran una misma cosa; la aceleración de la masa no es relativa sino absoluta en este caso. Mientras que si el resorte es débil y la masa grande, el resorte no puede desarrollar fuerza suficiente para arrastrar la masa; por lo tanto esta tiende a quedarse inmóvil. Para largos períodos, el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo tiende a ser igual al desplazamiento del suelo.

El desplazamiento relativo para largos períodos suele presentar serios errores, porque el acelerograma generalmente no inicia ni finaliza con aceleraciones nulas debido a la forma como se dispara el instrumento, a partir de un cierto nivel de referencia y debido a como termina, no cuando hubo cero aceleración sino de acuerdo con un control de tiempo, luego que la amplitud decae por debajo del nivel mínimo de arranque. Para evitar errores de este tipo, en la actualidad los acelerogramas se someten a una corrección en la línea base de referencia y luego sus pares de valores si se introducen al proceso numérico de evaluación de los espectros.

La amplificación espectral se ha podido establecer a partir de muchos espectros. En la tabla 4.1 tomada de Newmark y Hall, ref.13, se aprecia que la amplificación es máxima para la aceleración, intermedia para la velocidad y menor para el desplazamiento.

$\xi$ (%)	$S_a$	$S_v$	$S_d$
0.0	6.4	4.0	2.5
0.5	5.8	3.6	2.2
1.0	5.2	3.2	2.0
2.0	4.3	2.8	1.8
5.0	2.6	1.9	1.4
7.0	1.9	1.5	1.2
10.0	1.5	1.3	1.1
20.0	1.2	1.1	1.0

TABLA 4.1. FACTORES DE AMPLIFICACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL SUELO

Los valores de la tabla 4.1 se han empleado como base para la mayoría de los códigos modernos de construcción sismo resistente, en los cuales se ha integrado la amplificación de la construcción con la capacidad de absorber las fuerzas por parte del sistema estructural. En los modernos códigos de construcción sismo resistente, es usual encontrar que la aceleración máxima sobre el terreno firme, puede ser amplificada hasta en un 250% por la construcción.

Los valores de la tabla indican una amplificación aproximada de 2.5 para la aceleración, cuando el coeficiente de amortiguamiento con respecto al crítico es del orden de cinco por ciento o un poco superior. Esta es la situación que corresponde a estructuras dúctiles de concreto reforzado o de acero, sometidas al efecto de sismos intensos. Por esta razón, algunos códigos se apoyan en esta amplificación para determinar la aceleración espectral sobre la estructura, cuando se conoce la máxima sobre el terreno y recomiendan que la aceleración sobre la construcción no sobrepase 2.5 veces la del terreno, tal como se indico.

### 4.3. ESPECTROS ELÁSTICOS DE RESPUESTA GENÉRICOS

Dada la irregularidad en la forma de los espectros, que presentan variaciones bruscas en la magnitud de la respuesta máxima en función del período natural, es posible que dos estructuras que tengan prácticamente las mismas características respondan de manera totalmente distinta ante un mismo sismo.

Como se muestra en la figura 4.9, los espectros de respuesta varían mucho con el período natural. Sin embargo, para los propósitos de diseño son de mayor significación los espectros generalizados en lugar de un espectro específico. Las figuras 4.10 a la 4.12 muestran los espectros de respuesta promedio, ideados por Housner, de dos componentes, cada uno de cuatro registros diferentes de sismos registrados en Estados Unidos.

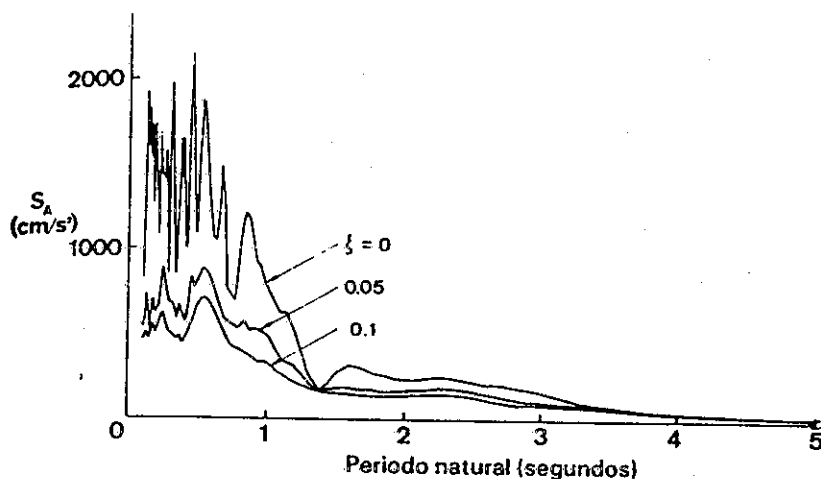


FIGURA 4.9. ESPECTROS DE RESPUESTA DE ACELERACIÓN DERIVADOS DE LA COMPONENTE NORTE-SUR DEL SISMO DE EL CENTRO, CALIFORNIA, 1,940. (Diseño de estructuras sismorresistentes, Minoru Wakabayashi).

Los investigadores George W. Housner y Nathan M. Newmark, pioneros de los estudios de los espectros de diseño, conciben

el espectro de diseño como envolventes de los valores máximos a partir de ciertas dispersiones de los datos. Por lo tanto, el resultado corresponde a líneas curvas suavizadas y no a los característicos dientes de sierra del espectro de respuesta específico.

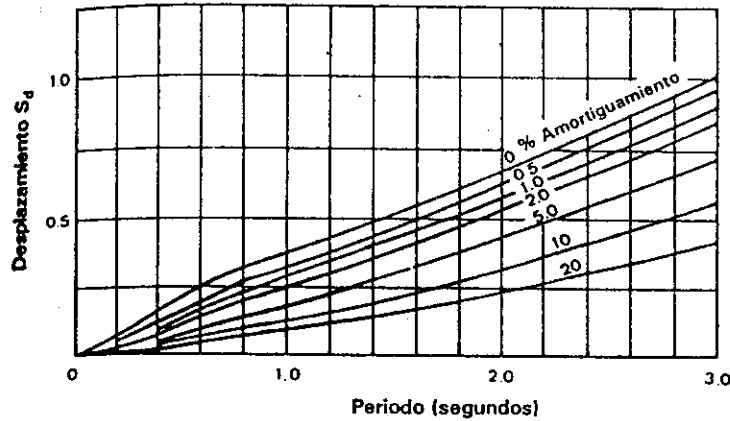


FIGURA 4.10. ESPECTROS DE RESPUESTA SUAVIZADA DEL DESPLAZAMIENTO PROMEDIO,  $S_d$  POR HOUSNER; ESCALA ARBITRARIA. (Strong ground motion, G.W. Housner).

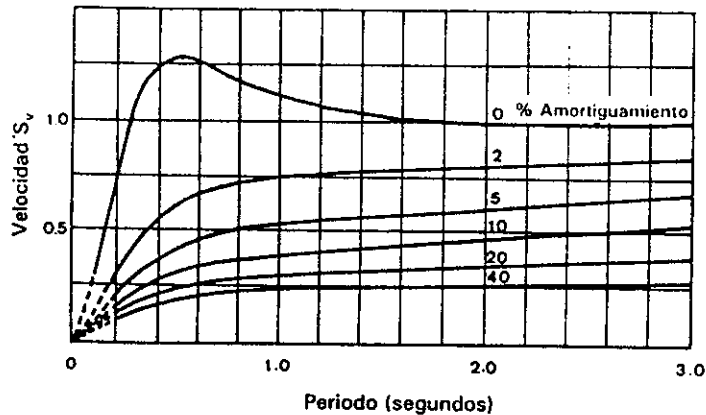


FIGURA 4.11. ESPECTROS DE RESPUESTA SUAVIZADA DE LA VELOCIDAD PROMEDIO,  $S_v$ , POR HOUSNER; ESCALA ARBITRARIA. (Behavior of structures during earthquakes, G.W. Housner).

Por tanto, para fines de diseño, si se desea proyectar una estructura para un temblor particular, puede adoptarse un espectro obtenido como la curva media o envolvente del teórico. Si en una región son frecuentes temblores cuyas curvas medias tienen diferentes características, es razonable trazar la curva media de cada uno de ellos, reducir todas a una intensidad común (por ejemplo, haciendo que el área bajo la curva del espectro medio de velocidades sea la misma) y adoptar para diseño la envolvente

de todos los espectros medios reducidos, multiplicada por un factor que tome en cuenta la intensidad esperada, las consecuencias de la falla de la estructura, su importancia, etc.

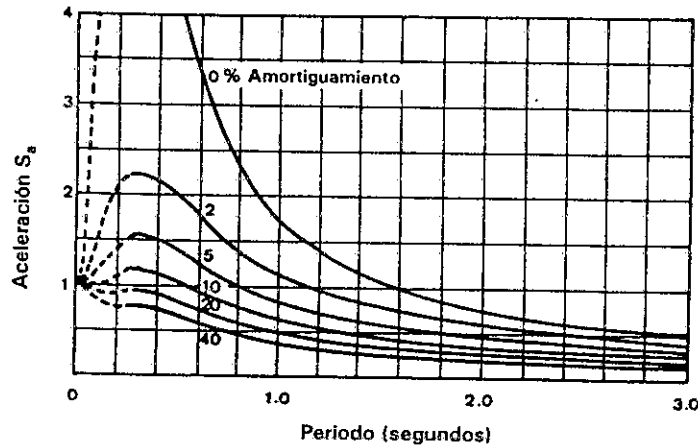


FIGURA 4.12. ESPECTROS DE RESPUESTA SUAVIZADA DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO,  $S_a$ , POR HOUSNER; ESCALA ARBITRARIA. (Behavior of structures during earthquakes, G.W. Housner).

Al igual que en los espectros elásticos específicos, Newmark y Hall emplean una escala tripartita, con el logaritmo de la frecuencia o el período en las abscisas y el logaritmo de la seudoaceleración espectral en las ordenadas; la seudoaceleración espectral queda sobre una escala logarítmica en una línea a  $45^\circ$  con respecto a la horizontal y el desplazamiento espectral sobre una escala logarítmica en línea con ángulo de  $135^\circ$  con respecto a la horizontal. Según los autores mencionados, el espectro se construye de la siguiente manera, basándose en la muestra disponible con un percentil del 84.1 correspondiente a una desviación estandar.

Con métodos probabilísticos se obtienen la aceleración focal máxima probable. Este valor se ubica sobre las abscisas, en frecuencia de 33 hertz a partir de la cual se traza una línea correspondiente a la llamada zona de transición, que se prolonga hasta encontrar la línea A a una frecuencia de 9 hertz; ese es el llamado punto B.

La aceleración correspondiente a la línea A que se extiende entre los puntos B=9 y C=2.5 hertz, se obtiene a 9 hertz con la ecuación:

$$(AB=4.38-1.04\ln\xi)_{9.0 \text{ hertz}} \quad (4.18)$$

La línea V se extiende entre los puntos C=2.5 y D=0.25 hertz y se obtiene a 2.5 hertz con la ecuación:

$$(AC=3.38-0.67\ln\xi)_{2.5 \text{ hertz}} \quad (4.19)$$

La línea D se extiende entre 0 y 0.25 hertz y se obtiene mediante la ecuación:

$$(AD=2.73-0.45\ln\xi)_{0.25 \text{ hertz}} \quad (4.20)$$

Para la aplicación de las ecuaciones anteriores, se debe tener en cuenta que el amortiguamiento con respecto al crítico  $\xi$ , se debe tomar en porcentaje; por ejemplo,  $\xi=0.07$  se debe tomar igual a 7. Además, los valores obtenidos en las tres ecuaciones, son multiplicadores de la aceleración a 33 hertz. Es decir, el punto A se obtiene multiplicando la aceleración a 33 hertz por el resultado de la ecuación 4.18 y así sucesivamente.

Queda gobernado entonces el espectro elástico de diseño por cuatro frecuencias, llamadas de quiebre en los valores: 33, 9, 2.5 y 0.25 hertz. Además por niveles de aceleración gobernados por las ecuaciones 4.18 a 4.20. En la figura 4.13 se aprecia el espectro elástico de diseño para una central hidroeléctrica, deducido mediante las recomendaciones anteriores.

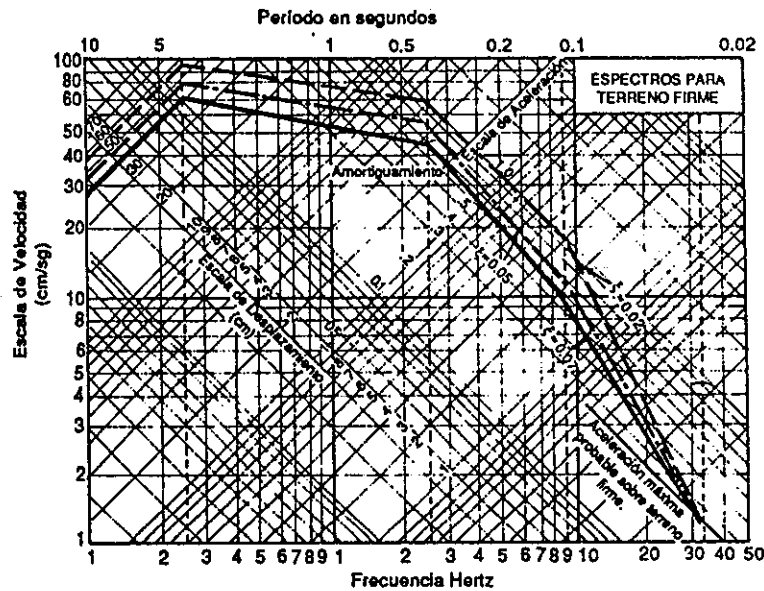


FIGURA 4.13. ESPECTROS ELÁSTICOS PARA DISEÑO SISMORRESISTENTE. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

Seed et al., ref 17, estudiaron ampliamente las formas de los espectros de respuesta y presentaron envolventes correspondientes a las diferentes posibilidades de localización de los acelerógrafos que registraron las señales. Algunos ubicados sobre roca, otros sobre suelos firmes y otros sobre suelos blandos. En la figura 4.14 se aprecian los resultados de estos investigadores, los cuales han servido de base a una buena parte de los modernos códigos de construcción sismo resistente utilizadas en la actualidad.

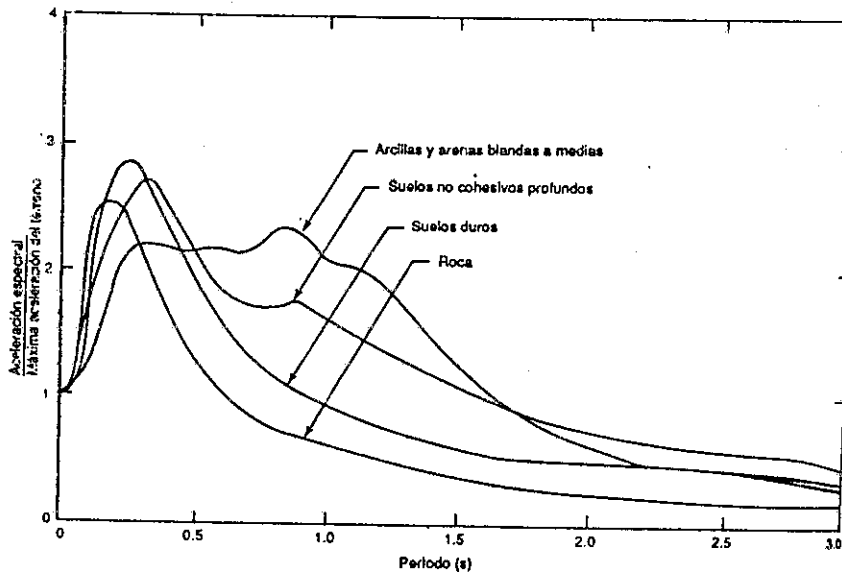


FIGURA 4.14. ESPECTROS DE ACELERACIÓN PROMEDIO PARA DIFERENTES CONDICIONES DEL SITIO DE REGISTRO. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria; originalmente de Seed, Idriss y Ugas).

Para propósitos ingenieriles es conveniente y conservador, simplificar la forma espectral mostrada en las figuras 4.15 y 4.16 por eso, por ejemplo, en el estudio de suelos duros o rocosos es adecuadamente conservador representar el promedio de las formas espectrales como se muestra en la figura 4.15, por medio de la línea punteada definida por los puntos A, B, C y D, las coordenadas de estos puntos son:

Punto	Período	$(S_a)_{max}/a_{max}$
A	0.1 seg	2.7
B	0.5 seg	2.7
C	1.0 seg	1.2
D	2.0 seg	0.6

y, para 5% de amortiguamiento, el uso de esta forma espectral provee una representación conservadora del espectro actual. Se puede notar que la aceleración espectral máxima,  $(S_a)_{max}$ , en este caso es simplemente 2.7 veces la aceleración máxima.

Similarmente, en la figura 4.16, para suelos duros o rocosos es adecuadamente conservador representar el promedio de una desviación estándar (percentil 84) de las formas espectrales como se muestra



en la figura 4.16, por medio de la línea punteada definida por los puntos P, Q, R y S, las coordenadas de estos puntos son:

Punto	Período	$(S_a)_{max}/a_{max}$
P	0.1 seg	3.4
Q	0.5 seg	3.4
R	1.0 seg	1.7
S	2.0 seg	0.85

nuevamente, para 5% de amortiguamiento, una curva de esta forma provee una representación conservadora del espectro mostrada en la figura. Para esta curva la aceleración espectral máxima,  $(S_a)_{max}$ , es igual a 3.4 veces la aceleración máxima,  $a_{max}$ , para el movimiento del suelo.

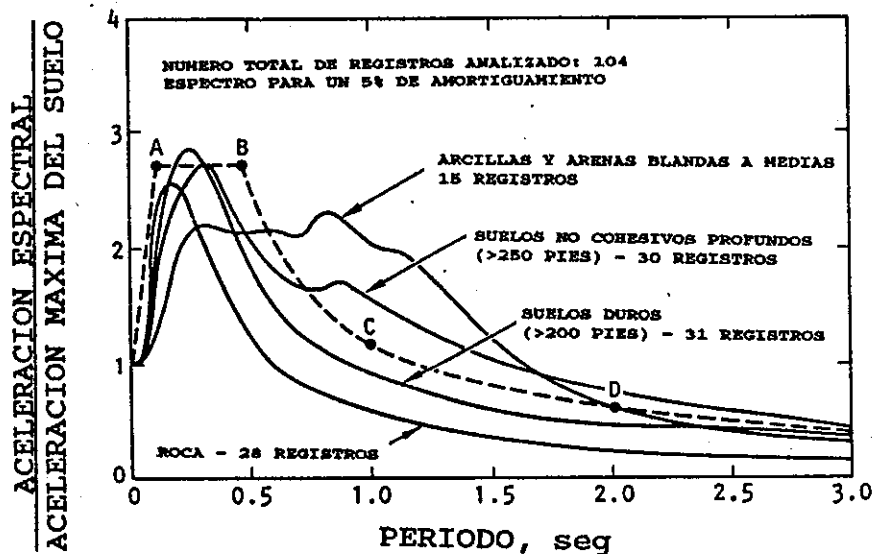


FIGURA 4.15. ESPECTRO DE RESPUESTA PROMEDIO PARA DIFERENTES TIPOS DE SUELOS. (Adaptado de Ground motions and soil liquefaction during earthquakes, H.B. Seed y I.M. Idriss).

Finalmente podría considerarse para propósitos de diseño simplificar el espectro de respuesta mostrado en la figura 4.15 para cuatro diferentes tipos de suelo en la forma mostrada en la figura 4.17, involucrando solo tres categorías diferentes de suelo; suelos cohesivos profundos; arcillas y arenas blandas a medias; y rocas y suelos duros. Combinando las curvas mostradas en la figura 4.17 con valores representativos de picos de aceleración del suelo para diferentes tipos de suelo para áreas donde la aceleración máxima de suelo en roca podría ser 0.2g o más, llevarían

a las curvas espectrales mostradas en la figura 4.18. Puede notarse en la figura 4.19 que una familia similar de curvas fueron ligeramente modificadas para poder utilizarse con otras provisiones de diseño sísmico, para que al ser utilizado en edificios muy altos o muy bajos se puede estar siempre del lado conservador. Esta modificación fue propuesta por el Código ATC-3 y es el que se recomienda por la propuesta de Normas para Guatemala.

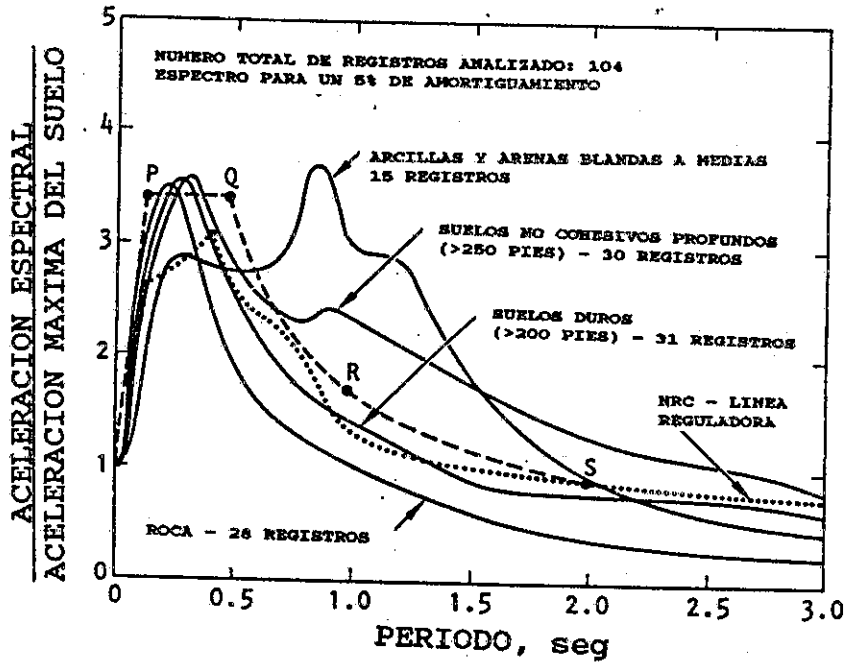


FIGURA 4.16. ESPECTRO DE ACCELERACIÓN DEL PERCENTIL 84 PARA DIFERENTES TIPOS DE SUELO. (Adaptado de Ground motions and soil liquefaction during earthquakes, H.B. Seed y I.M. Idriss).

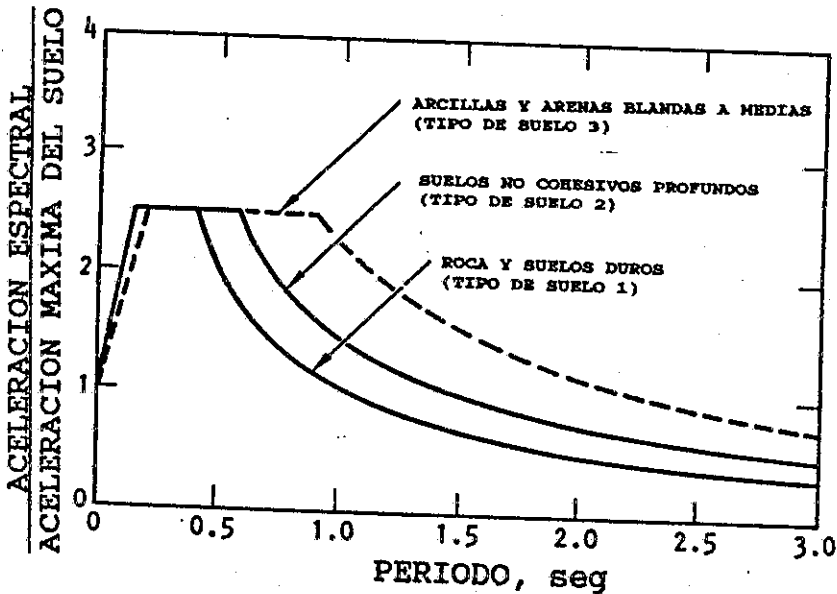


FIGURA 4.17. CURVAS ESPECTRALES NORMALIZADAS. (Adaptado de Ground motions and soil liquefaction during earthquakes, H.B. Seed y I.M. Idriss).

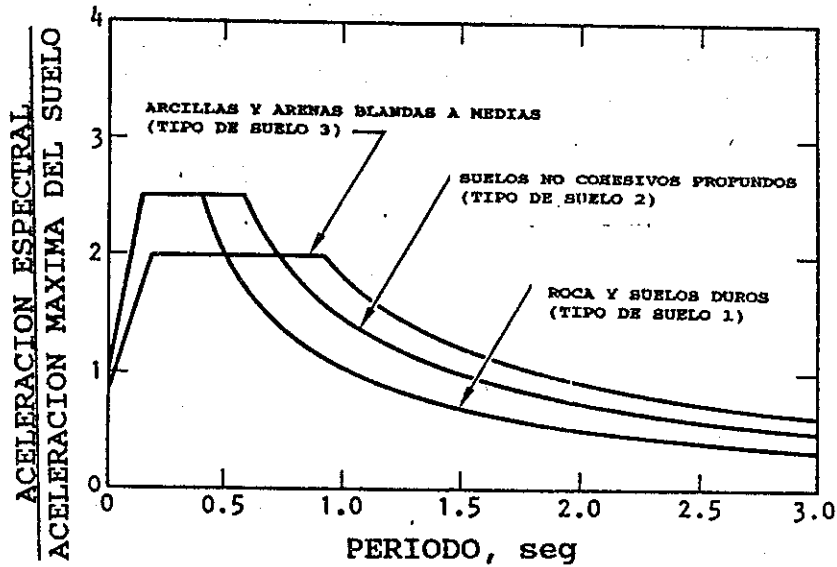


FIGURA 4.18. CURVAS ESPECTRALES NORMALIZADAS PARA CONDICIONES DE SUELOS DUROS. (Adaptado de Ground motions and soil liquefaction during earthquakes, H.B. Seed y I.M. Idriss).

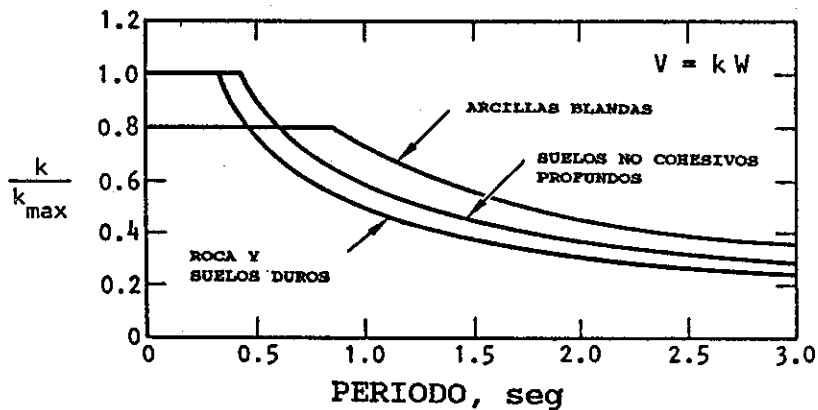


FIGURA 4.19. PROPUESTA DE VARIACIÓN DE LA FUERZA LATERAL PARA DIFERENTES TIPOS DE SUELOS. (Adaptado de Ground motions and soil liquefaction during earthquakes, H.B. Seed I.M. Idriss).

Según este documento, la envolvente de espectros para amortiguamiento de 5 por ciento puede construirse con la expresión siguiente:

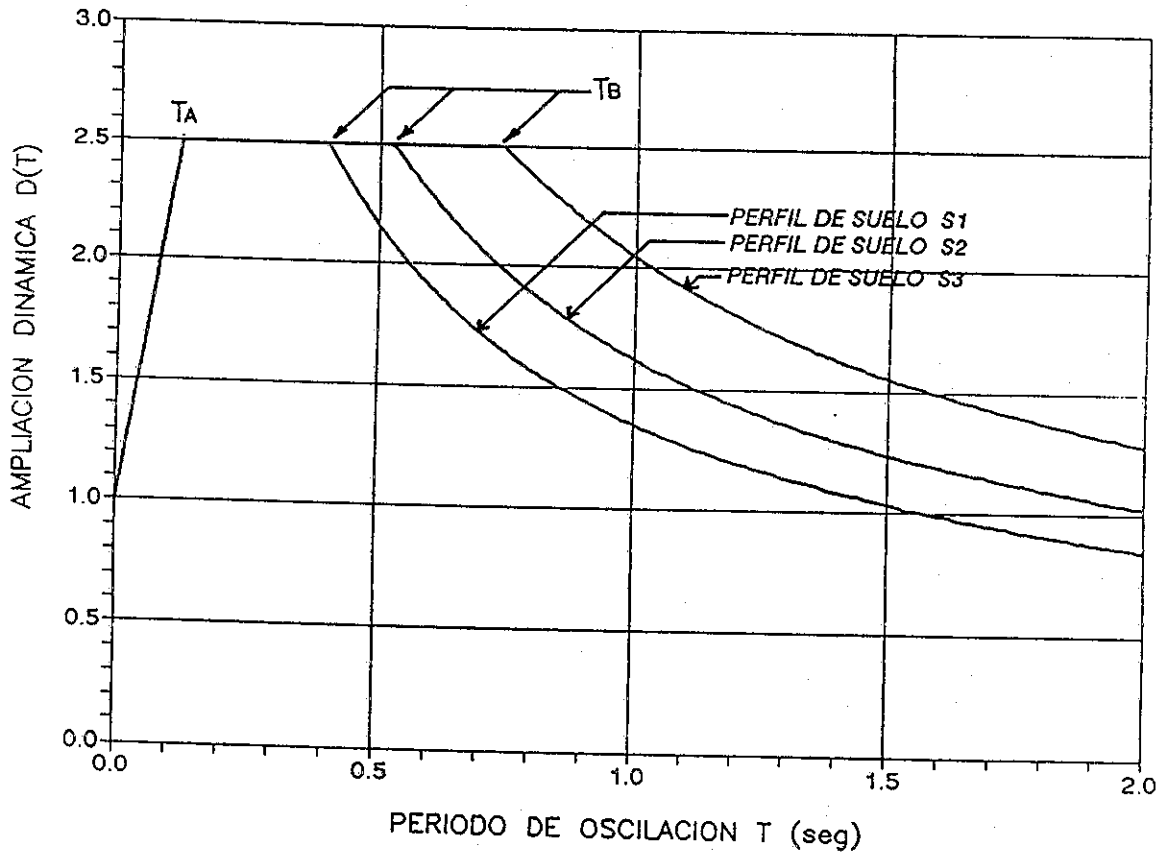
$$\frac{S_a}{g} = 0.0016 \frac{V_t S}{T^{2/3}} < 2.5 A_t/g \tag{4.21}$$

en que  $S_a/g$  es la ordenada espectral expresada como fracción de la aceleración de la gravedad;  $V_t$  (cm/seg) y  $A_t$  (cm/seg<sup>2</sup>) son la velocidad y aceleración máximas del terreno, respectivamente;

T es el período del sistema, en seg, y S un factor que depende del tipo de suelo, y para el cual el ATC propone

- S = 1.0 para roca o terreno firme sobre roca (S<sub>1</sub>).
- S = 1.2 para suelos granulares o suelos cohesivos compactos (S<sub>2</sub>).
- S = 1.5 para suelos de mediana a alta compresibilidad (S<sub>3</sub>).

La figura 4.20 muestra el espectro de respuesta sugerido para la República de Guatemala.



Para definiciones y explicaciones ver Sección 2-2.2.2

Función de amplificación dinámica	
Cuando $T < T_A$	$D(T) = 1.0 + 1.5 T/T_A$
Cuando $T_A \leq T \leq T_B$	$D(T) = 2.5$
Cuando $T_B \leq T$	$D(T) = 2.5 (T_B/T)^{0.67}$

	PERFIL DEL SUELO		
	S1	S2	S3
$T_A$	0.12	0.12	0.12
$T_B$	0.40	0.52	0.74

FIGURA 4.20. ESPECTRO DE RESPUESTA SUGERIDO POR EL PROYECTO DE NORMAS SISMO RESISTENTES PARA LA REPÚBLICA DE GUATEMALA. (Proyecto de normas sismo resistentes para la República de Guatemala, Héctor Monzón, et al.)

4.4. RESPUESTA POSTELÁSTICA - FACTORES DE REDUCCIÓN

La figura 4.21 corresponde a una generalización idealizada de los procesos de respuesta estructural elástica y postelástica. En la parte superior de la figura se aprecia la gráfica de carga inercial horizontal desarrollada por la masa del oscilador lineal indicado. El área bajo la línea de carga contra deformación, correspondiente al triángulo abc, es la energía elástica almacenada por la rigidez del sistema. En la gráfica intermedia se aprecia una idealización del mismo caso, con la diferencia de que el comportamiento del sistema es postelástico; en este caso hay energía potencial almacenada y energía disipada por la acción inelástica del oscilador sometido al efecto del acelerograma que lo desplaza.

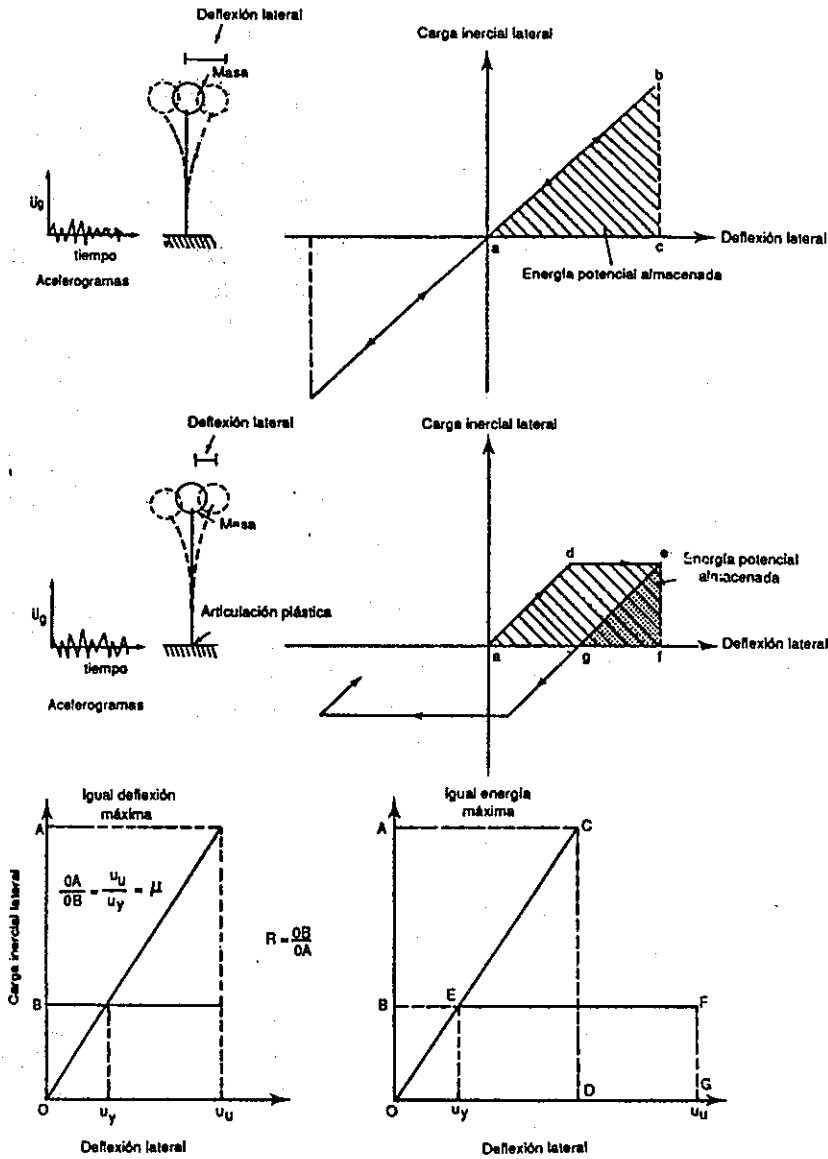


FIGURA 4.21. RESPUESTA ESTRUCTURAL ELÁSTICA Y POSTELÁSTICA (ELASTO-PLÁSTICA). (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

En la parte inferior de la figura 4.21 se aprecian dos puntos claves;  $u_y$  que corresponde a la deformación de la primera cedencia y  $u_u$  que corresponde a la deformación última. Entre mayor sea la deformación última, tanto mayor el área bajo la línea horizontal de carga. Se define la ductilidad al desplazamiento, como el cociente entre la deformación unitaria y la de cedencia.

$$\mu = u_u/u_y \quad (4.22)$$

La deformación de cedencia es un concepto más o menos familiar para el ingeniero; no sucede lo mismo con el concepto de deformación última, porque este tiene particularidades en el caso de las estructuras de concreto reforzado, tal como se verá un poco más adelante. De todas maneras, la deformación última se puede entender como la máxima de compresión en el concreto. La ductilidad disponible en un elemento estructural depende de una serie de condiciones del elemento estructural bajo consideración.

Si un oscilador simple se somete a la acción de los impulsos de un acelerograma, en un instante de tiempo cualquiera, la carga inercial sobre la masa llegará a un máximo para el amortiguamiento especificado. Si el oscilador responde inelásticamente, la carga inercial será inferior que la elástica para el mismo acelerograma. El mismo concepto se puede extender al caso estático equivalente a una carga sísmica, tal como lo presentan los códigos para diseño de construcciones resistentes a la acción de los sismos. Si se divide la carga elástica estática máxima por la carga inelástica estática máxima, se obtiene el llamado factor de reducción de la carga estática. En la práctica, este cociente puede variar entre 1.0 que corresponde a estados muy elásticos y casi sin capacidad de disipación de energía, hasta 6 o algo similar para sistemas estructurales aperticados con refuerzo y requisitos de despiece especiales.

Si en la figura 4.21 se suponen deformaciones laterales  $u$ , iguales tanto para el caso elástico como para el inelástico, la ecuación de relación esfuerzo-deformación para el concreto confinado, tiene las siguientes implicaciones:

$$\mu = OA/OB = u_u/u_y \quad (4.23)$$

Esta expresión quiere decir que si la carga lateral elástica estática se divide por la ductilidad, el oscilador tendría en su sistema de rigidez una carga inercial bastante menor que la elástica. Al inverso de la ductilidad al desplazamiento, se lo suele llamar factor de reducción  $R$ .

Volviendo a la noción del factor de reducción, conviene analizar la situación de igual energía en lugar de concentrarse en la posibilidad de energías bajo la misma deformación. De nuevo en la figura 4.21, se pueden hacer las siguientes consideraciones de orden geométrico:

$$OA \times OD/2 = OB \times \Delta_y/2 + (\Delta_u - \Delta_y) OB$$

pero si se tiene en cuenta que:  $OD = D_y \times OA / OB$  se puede obtener:

$$(\Delta_y/2) (OA^2/OB) = OB (\Delta_u - \Delta_y/2)$$

$$(OB/OA)^2 = \Delta_y/2 (\Delta_u - \Delta_y/2), \text{ por lo tanto}$$

$$R = 1/\sqrt{2\mu-1} \quad (4.24)$$

En la figura 4.22, se observa el factor de reducción  $R$  en términos de  $\mu^{-1}$  que corresponde a igual deformación elástica, e inelástica, y de  $1/\sqrt{2\mu-1}$  que corresponde a igual energía elástica que inelástica, pero a mayor deformación inelástica que elástica. Tal como se puede apreciar, para pequeños valores de  $R$  hay importantes diferencias para ambas posibilidades.

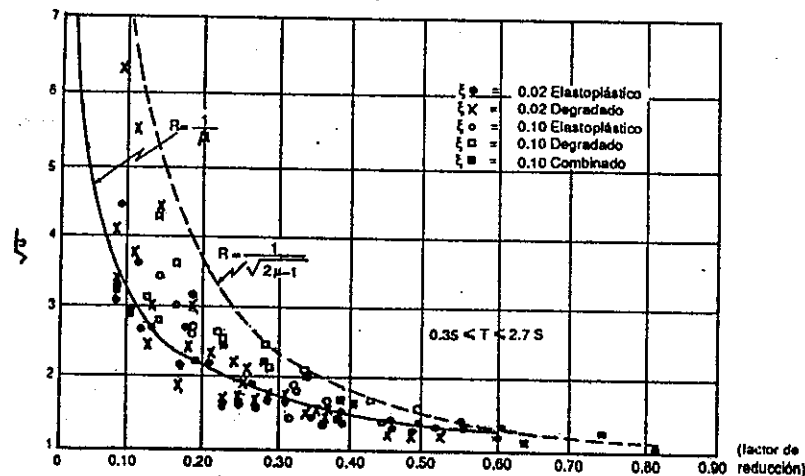


FIGURA 4.22. DUCTILIDAD AL DESPLAZAMIENTO  $\mu$  CONTRA  $R$  PARA OS COMETIDOS AL EFECTO DEL SISMO DE EL CENTRO 1,940 COMPONENTE N-S. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

En el supuesto de que se busca un factor de reducción bajo, es decir una alta ductilidad, debe aceptarse que esto implica necesariamente altas deformaciones laterales que tendrán importantes efectos sobre los elementos no estructurales de la construcción. En otras palabras, alta ductilidad implica alta deformación estructural. La estructura correctamente diseñada puede acomodar estas altas deformaciones, pero los muros divisorios podrían resultar gravemente averiados.

Las estructuras de acero y las de concreto reforzado bien diseñadas, presentan una característica de enorme importancia llamada la ductilidad  $\mu$ . Este término se refiere a la relación entre el desplazamiento máximo que puede resistir una estructura llamado  $\Delta_u$  y el desplazamiento máximo a la primera cedencia del acero o del acero de refuerzo en cualquier parte de la construcción, llamado  $\Delta_y$ . La ductilidad al desplazamiento como se vio se puede definir como:

$$\mu = \Delta_u / \Delta_y \quad (4.25)$$

Newmark y Hall, recomiendan modificar el espectro elástico en términos de  $1/\mu$  y de  $1/\sqrt{2\mu-1}$ . Estas modificaciones las hace en los siguiente términos:

Para frecuencias inferiores a 2 hertz, las ordenadas del espectro elástico de aceleración se multiplican por  $1/\mu$ ; para frecuencias entre 2 y 8 hertz, las ordenadas del espectro de diseño elástico de aceleración se reducen en proporción a  $(2\mu-1)^{-1}$ . Nuevamente habría en este caso una transición entre el punto a 8 o 9 hertz y el punto a 33 hertz, límite de frecuencia al cual ya no habría modificación por efectos de la ductilidad. La figura 4.23 corresponde a una demostración cualitativa sobre la modificación al espectro elástico de aceleración para diseño, introducida por la ductilidad  $\mu$ .

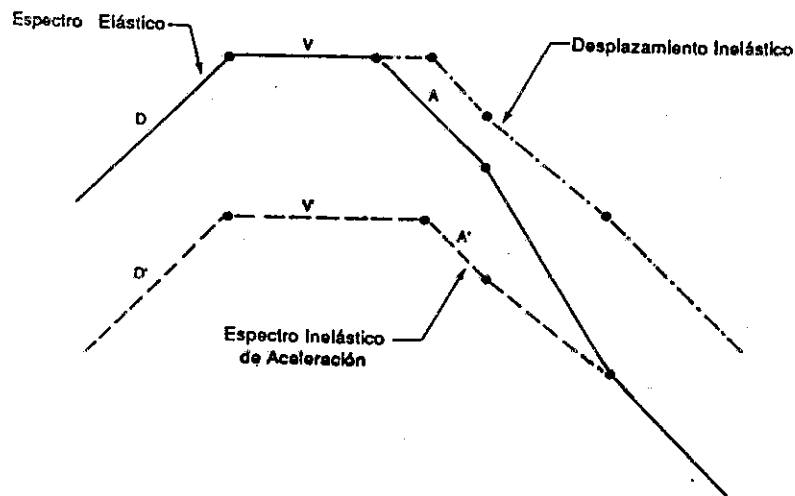


FIGURA 4.23. EFECTOS DE LA RESPUESTA INELÁSTICA EN LOS ESPECTROS DE DISEÑO. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

Para sistemas estructurales de largo período, caso de los edificios altos, por ejemplo Newmark recomienda tener cautela con el tipo de espectro de diseño a emplear por las incertidumbres asociadas a la combinación modal. Considera él que los espectros, tanto elástico como inelástico, deben modificarse en términos de  $(f)^{-1/3}$  para frecuencias por debajo de 1 hertz. De todas maneras se insiste aquí en el punto fundamental de que los espectros de diseño propuestos son evaluados para condiciones de cimentación sobre un suelo firme.

Estudios experimentales y analíticos desarrollados en diferentes lugares, demuestran que la ductilidad disponible al desplazamiento, en una estructura de concreto reforzado, depende fundamentalmente del sistema estructural y de la cantidad y distribución del acero de refuerzo. La figura 4.24 utilizada por Grases, muestra cuatro sistemas estructurales diferentes, el de la izquierda corresponde a un pórtico, para el cual la ductilidad al desplazamiento  $\mu$ ,



está entre 2.5 y 6; el sistema del centro izquierda corresponde a la unión entre pórtico y muro, por esto se le llama sistema dual, en el cual la ductilidad está entre 2 y 5; el del centro derecha corresponde a un muro para el cual la ductilidad puede estar entre 1.5 y 4 y, por último a la derecha, se observa el llamado sistema péndulo invertido, para el cual la ductilidad puede variar entre 1 y 1.5. Es claro entonces que el empleo del sistema estructural tipo I permitiría, si el refuerzo fuera adecuado, absorber fuerzas sísmicas mayores que el tipo III. Pero como no todo es perfecto, las deformaciones del sistema estructural tipo I serían bastante mayores que las del tipo III, para alturas iguales y sometidas al efecto del mismo sismo. En la actualidad la línea de acción para edificios que sobrepasen aproximadamente siete pisos, tiende a orientarse más hacia estructuras del tipo II fundamentalmente. Para estructuras altas, la tendencia es clara hacia las estructuras duales, tipo II, que conforman una solución con buena ductilidad, buena tenacidad y buena rigidez y resistencia.

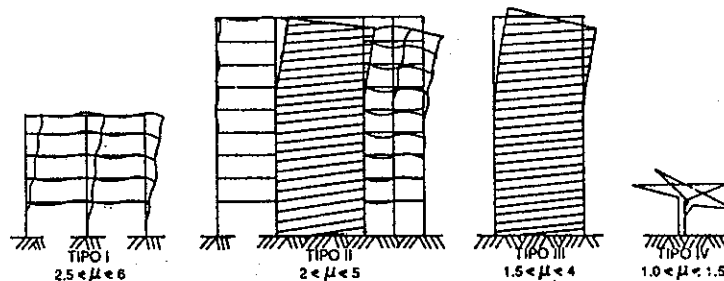


FIGURA 4.24. SISTEMAS ESTRUCTURALES RESISTENTES A SISMO Y RANGOS DE VARIACIÓN DEL FACTOR DE DUCTILIDAD. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

Ahora, la misma estructura con diferente armadura tiene a su vez diferentes reservas de ductilidad. A la izquierda de la figura 4.25 se observa un pórtico con una armadura transversal escasa, mientras que el de la derecha posee una armadura transversal definitivamente más generosa. Si el pórtico se somete a la acción de cargas transversales alternantes, la relación fuerza horizontal  $F$  contra deformación horizontal  $\delta$ , resulta bien diferente en los dos pórticos; la pendiente de esta curva es la rigidez del sistema. Como se aprecia en la parte inferior de la figura, en el de la izquierda la rigidez, va disminuyendo a medida que aumenta el número de ciclos, mientras que en el de la derecha la rigidez se sostiene de manera muy similar al valor correspondiente al primer ciclo. En ambas estructuras la deformación a la primera cedencia  $\delta_y$  es prácticamente la misma, más no es así con la deformación última  $\delta_u$  que resulta muy superior en la estructura de la derecha debido al mejor y más abundante refuerzo. Nuevamente se observa que una buena cantidad de refuerzo bien colocado, conduce a una estructura dúctil, con buen comportamiento ante el efecto de sismos intensos, de larga duración.

Como se dijo el factor de reducción de respuesta sísmica depende de las características del sistema estructural seleccionado por el diseñador, en la siguiente tabla se presentan en detalle para los cuatro sistemas estructurales mencionados anteriormente, los factores de reducción sugeridos por el proyecto de normas sismo resistentes de la República de Guatemala.

SISTEMA ESTRUCTURAL Véase Numeral 3-1.3.1	SISTEMA VERTICAL SISMO-RESISTENTE	FACTOR $R_o$ (Numeral 3-1.2.2)
E1. SISTEMA DE CAJON	con muros estructurales:	
	de mampostería reforzada	2.5
	de concreto reforzado	3.5
	de mampostería sin refuerzo	1.0
	de mampostería parcialmente reforzada	1.7
	de madera	4.0
	con marcos arriostrados	3.0
E2. SISTEMA DE MARCOS:		
	E2-1 marcos ordinarios:	
	de acero estructural	3.5
	de concreto reforzado	1.7
E2-2 marcos especiales:		
de acero estructural	5.5	
de concreto reforzado	5.0	
E3. SISTEMA COMBINADO DE MUROS Y MARCOS:	con muros de mampostería reforzada	3.5
	con muros de concreto reforzado	4.5
	con marcos arriostrados en vez de muros	
	arriostres ordinarios	3.5
	arriostres excéntricos	4.0
E4. SISTEMA DUAL DE MUROS Y MARCOS:	con muros de mampostería reforzada	3.5
	con muros de concreto reforzado	5.5
	con marcos arriostrados en vez de muros	
	arriostres ordinarios	3.5
	arriostres excéntricos	5.0
E5. PENDULO INVERTIDO:	de concreto reforzado	
	confinado	2.0
	ordinario	no usar
	de estructura de acero	
	con detalles ordinarios	1.0
con detalles sísmicos	2.0	
	de estructura de madera	2.5
E6. OTRO TIPO: Clasificar como E5 o bien consultar exclusiones específicas en los Capítulos 3-7, 3-8, 3-9 y subsiguientes agregados a estas normas.		

TABLA 4.2. FACTORES DE REDUCCIÓN DE RESPUESTA SÍSMICA POR CAPACIDAD POST-ELÁSTICA (DUCTILIDAD) DE LA ESTRUCTURA. (Proyecto de normas de diseño sismo-resistente para la República de Guatemala, Héctor Monzón et al.).

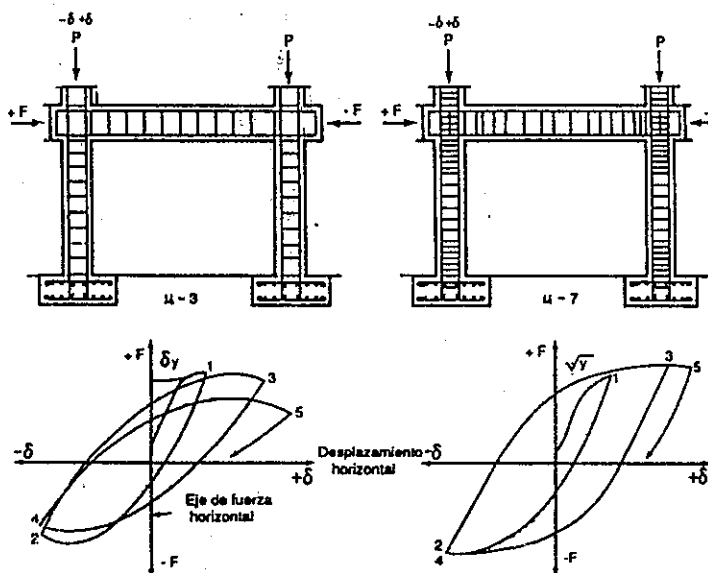


FIGURA 4.25. INFLUENCIA DE LOS DETALLES DE REFUERZO EN LOS DIAGRAMAS FUERZA-DESPLAZAMIENTO. (Ingeniería sísmica, Alberto Sarria).

#### 4.5. FORMULACIONES DINÁMICAS EMPÍRICAS

Las características dinámicas de una estructura están dadas por la siguiente información: a) los períodos propios de oscilación; b) los modos propios de oscilación; y c) los factores de amortiguamiento, los cuales dependen del tipo de construcción, de los materiales utilizados, de la distribución de los elementos estructurales, de las dimensiones, etc. El conocimiento de esas características es fundamental para determinar, en combinación con las propiedades físico-mecánicas del suelo, la intensidad de la respuesta de la estructura al movimiento del terreno. Sin embargo, de las tres características mencionadas, el período de oscilación adquiere una importancia especial, ya que al definir la rigidez dinámica se conoce el comportamiento de la estructura ante la excitación sísmica, en buena parte.

El tema de los modos de vibración de la estructura, al igual que los factores de amortiguamiento ya fueron tratados en capítulos anteriores, en especial en el capítulo 2.

Dada la influencia decisiva que tienen los períodos naturales de vibración en las respuestas sísmicas, conviene disponer de procedimientos sencillos que permitan estimarlos con cierta precisión. Esto no siempre es posible, y cuando no lo sea, se deberá recurrir a métodos de análisis sumamente elaborados o bien proceder conservadoramente introduciendo explícitamente el margen de incertidumbre que envuelva a los valores calculados.

Si se hace un análisis dinámico de la estructura, se pueden obtener los períodos naturales de vibración por procedimientos iterativos como el método de Stodola-Vianello, utilizando preferiblemente la matriz de flexibilidades en lugar de la de rigideces para lograr la convergencia al modo de mínima frecuencia o fundamental. También son muy útiles los métodos de Newmark y el de Holzer; este último conviene utilizarlo para obtener los modos superiores de vibración. Estos procedimientos dan a la vez la forma de los modos de vibración que son necesarias conocer para proseguir con un análisis dinámico para la determinación de los cortantes. Otro método muy utilizado es el de Rayleigh, que se basa en el principio de la conservación de la energía. Si se desea profundizar sobre el tema ver referencias 3, 4, 13, y cualquier otro texto sobre dinámica estructural.

Existe una serie de fórmulas empíricas deducidas por medio de observaciones en distintos países, mediante la vibración forzada de estructuras y cálculos por diferentes caminos para así seleccionar el procedimiento de cálculo más apropiado a cada caso. Las experiencias de otros no necesariamente son dignas de confianza para nuestros edificios.

Las razones para retener una fórmula que ni es exacta ni rigurosa son:

1. Que es sencilla.
2. Que es conservadora.
3. Que es probablemente tan adecuada para su propósito con otras simplificaciones que se hacen en los procedimientos de diseño.

Para una determinación exacta del período  $T$  deberían considerarse muchos factores, tales como: condiciones del suelo; propiedades elásticas de los materiales de construcción; dimensiones de los miembros estructurales; número, tamaño y espaciamiento de aberturas; número y construcción de tabiques; masa y su distribución; etc. Como se ve, el problema es muy complejo y no se puede garantizar exactitud rigurosa.

Se ha observado que la rotación de un edificio alrededor de su base, al vibrar, tiene un efecto considerable en alargar los períodos naturales de vibración del edificio, especialmente el fundamental. Esta rotación tiene mayor efecto en un edificio rígido que en uno flexible. La rotación de un edificio sobre sus fundaciones tiene un efecto de acolchonamiento, que hace disminuir los cortes dinámicos y momentos a lo largo del edificio en todos sus modos. También los entrantes o remetimientos y las torres en los edificios afectan el período  $T$ .

Por lo general, basta con conocer el período fundamental para el primer modo de vibración, aunque en estructuras muy flexibles los dos modos siguientes pueden llegar a ser de mucha importancia.

Muchos autores han propuesto varias fórmulas empíricas que

se originan en base a los parámetros geométricos de la estructura (altura, ancho, largo, número de pisos), pero como se mencionó las experiencias de otros no son necesariamente aplicables a estructuras en nuestro país.

Existe un estudio realizado por el Ing. Jorge Arias, bib.1, para Guatemala titulado Características dinámicas de los edificios en Guatemala, en el cual analizó varias estructuras construidas hasta el año 1,978 para determinar una fórmula aplicable en el país que diera un parámetro del período natural de vibración.

Arias realizó un estudio de fórmulas de diferentes códigos y normas de diseño que estaban en función del número de niveles (fórmulas lineales y no lineales); en función de la altura del edificio (fórmulas lineales y no lineales); y en función del número de niveles, alto, ancho y largo de la estructura; y las comparó con los períodos registrados al excitar las estructuras analizadas. De dicha comparación determinó que las fórmulas más recomendadas para el país son:

- a.  $T = 0.219 + 0.019 H$
- b.  $T = 0.221 \sqrt{H} - 0.405$
- c.  $T = 0.059 H^{0.755}$

éstas fórmulas son las que registraron una correlación mayor.

De la comparación de fórmulas propuestas por varios códigos y normas determinó que el parámetro que tiene mayor influencia en la determinación del período natural de vibración es la altura y la relacionar este parámetro con el ancho y el largo no producen una variación significante.

El mismo Arias determinó que las fórmulas propuestas no son del todo confiables para su aplicación ya que en esa fecha no se contaba con muchas estructuras de alturas considerables para así obtener una curva envolvente más efectiva.

En el Proyecto de normas sismo-resistentes para la República de Guatemala propone que el período fundamental de vibración de la edificación, puede estimarse en forma genérica igualándolo a un período empírico  $T_E$ , calculado con las expresiones siguientes:

Para edificios en general:

$$T_E = 0.09 * h_n / \sqrt{L} \quad (4.26)$$

Para sistemas estructurales formados por marcos puede utilizarse:

$$T_E = K_T * h_n^{0.75} \quad (4.27)$$

donde:

- $K_T = 0.061$  para marcos de concreto.
- $K_T = 0.085$  para marcos de acero.

- $h_N$  = es la altura total de edificio desde la base o nivel del terreno medida en metros.  
 $L$  = es la distancia entre los ejes estructurales extremos en la dirección de análisis, medida en metros.

De cualquier forma el período  $T$  para calcular la demanda sísmica no deberá ser mayor que  $1.2 TE$ .

#### 4.6. DERIVACIÓN DE FORMULACIÓN ESTÁTICA EQUIVALENTE

La magnitud de las fuerzas laterales está basada en la estimación del período fundamental de vibración y de la distribución de fuerzas asociadas a través de fórmulas simplificadas para edificios con una distribución regular de masa y rigidez a lo alto de la estructura.

La estimación del período natural de vibración se trató en el capítulo 4.5, con lo cual se estudiará la derivación de las fuerzas laterales.

La distribución de fuerzas laterales sobre la altura del edificio es generalmente complejo debido a que un número de modos naturales de vibración contribuyen significativamente a estas fuerzas. La contribución de varios modos de vibración a las fuerzas laterales y al corte basal dependen de un número de factores, incluyendo la forma del espectro de respuesta y de la forma de los modos que al mismo tiempo dependen de la masa y rigidez de la estructura. De cualquier manera, estas fuerzas están mayormente en función del primer período fundamental de vibración. Por ello el procedimiento de la fuerza lateral equivalente, está determinado por fórmulas similares a las utilizadas para el primer modo de vibración, pero modificadas para obtener una aproximación para los efectos producidos por los modos altos.

Las siguientes fórmulas toman en cuenta los efectos producidos por los modos altos, en donde  $f_i$  es la fuerza lateral en cada piso  $i$ , y son las que se recomiendan en el ATC-3.

$$\alpha_o = A_1^1 / g W \quad (4.28)$$

en donde  $A_1^1$  es la pseudoaceleración correspondiente al período fundamental estimado y el amortiguamiento apropiado, determinado del espectro de respuesta de diseño para los factores de ductilidad y amortiguamiento seleccionados, y

$$W = \sum_{i=1}^N W_i \quad \rightarrow \quad \text{es el peso total del edificio}$$

con lo cual

$$f_i = \alpha_o \frac{W_i h_i^k}{\sum_{j=1}^N W_j h_j^k} \quad (4.29)$$

en donde  $h_i$  es la altura del  $i$ ésimo nivel respecto a la base y  $k$  es un coeficiente relacionado a la estimación del período fundamental de vibración de la siguiente manera:

$$K = \begin{cases} 1 & T \leq 0.5 \text{ seg.} \\ (T+1.5)/2 & 0.5 < T < 2.5 \text{ seg.} \\ 2 & T \geq 2.5 \text{ seg.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Es importante comprender en qué se basan estas fórmulas. Si  $\beta_1$ , el peso efectivo para el primer modo, es cambiado por  $W$ , el peso total, la ecuación para sistemas postelásticos ( $\alpha_o = A_n^1/g \beta_n$ ) con  $n=1$ , será igual a la ecuación 4.28. Al analizar ambas fórmulas con el mismo período fundamental para determinar  $A_1$ . El término  $\beta_1$  siempre será más pequeño que  $W$ ; valores típicos para  $\beta_1$  oscilan entre 60 a 80 por ciento de  $W$ , dependiendo de la distribución del peso sobre la altura y la forma del primer modo. La ecuación 4.28 entonces proporcionará un valor para el corte basal que será significativamente mayor al del primer modo; por ello contribuye indirecta y aproximadamente a los valores de los modos de vibración más altos.

Si  $\alpha_{o1}$  es cambiada por el corte basal total  $\alpha_o$ , la ecuación para determinar la fuerza lateral en el  $i$ ésimo nivel en el  $n$ ésimo modo de vibración

$$Q_{in} = \frac{\alpha_o W_i \phi_{in}}{\sum_{j=1}^N W_j \phi_{jn}} \quad (4.31)$$

ésta se vuelve igual a la ecuación 4.29, con  $K=1$ . Si la forma del primer modo es una línea recta. Para  $K=2$  la forma del primer modo es una parábola con vértice en la base. La ecuación 4.29 con  $K=1$  es apropiada para edificios con un período fundamental de 0.5 seg o menor, porque la influencia de los modos de vibración altos respecto al modo fundamental es pequeña para la respuesta sísmica de edificios con períodos pequeños, y el modo fundamental de vibración varía un poco de la línea recta. Incluso respuestas sísmicas de edificios con períodos largos son debidas primero al modo fundamental de vibración, la influencia de modos altos puede ser significativa, y el modo fundamental tiende a estar entre una línea recta y una parábola con su vértice en la base. La distribución de la fuerza con la ecuación 4.29 con  $K=2$  es entonces apropiada para edificios con períodos fundamentales de 2.5 seg o mayores. Variaciones lineales de  $K$  entre valores de 1 para el período de 0.5 seg y 2 para el de 2.5 seg proporcionan una transición simple entre dos valores extremos.

#### 4.7. RESUMEN

Las excitaciones sísmicas para diseño se pueden obtener a través de registros como los acelerogramas, espectros elásticos de respuesta específica o genéricos.

Un acelerograma es un registro de la historia de aceleraciones que provoca el sismo en una dirección determinada y para fines de ingeniería constituye la descripción más útil del movimiento del suelo en el lugar. El análisis de los acelerogramas permite una evaluación cuantitativa de la intensidad sísmica, mucho más objetiva y confiable que por medio de escalas subjetivas como la escala de Mercalli.

Las características de los acelerogramas que más se relacionan con la potencialidad destructiva, o sea con la intensidad del sismo, son la aceleración máxima, la duración de la etapa sensible y las frecuencias de vibración dominantes del movimiento.

Es lógico hablar del interés en la aceleración, puesto que aceleración combinada con masa es fuerza, fuerza produce deformación, deformación produce esfuerzo interno en la estructura y si éste es muy alto produce daño a la construcción.

La información que puede ser obtenida directamente del acelerograma por medio de una inspección visual y a simple escala sin digitación y sin necesidad de un proceso, puede resumirse en: (1) picos de aceleración, (2) tiempo de duración del movimiento sísmico, (3) frecuencia de las ondas predominantes y una vaga idea del rango de frecuencia, (4) relaciones de amplitud y frecuencia respecto a movimientos horizontales y verticales, y (5) distancia aproximada del lugar de medición al epicentro del sismo.

Un sismo, produce acciones sobre las rocas y suelos de tal manera que son aleatorias su duración, su contenido frecuencial y las aceleraciones inducidas. Pero como en el diseño de estructuras sujetas a una vibración de estado permanente, la mayor preocupación es el máximo valor (en sentido absoluto) de la respuesta. Con lo cual el desplazamiento relativo  $u$  alcanza su máximo cuando la integral toma el máximo valor en la integral de Duhamel. A este desplazamiento máximo  $S_a$  se le llama desplazamiento espectral, en las estructuras amortiguadas  $S_v$  no es idéntica a la respuesta de la velocidad máxima, aunque muy parecida; por lo tanto,  $S_v$  se considera la velocidad máxima y se llama velocidad seudoespectral o simplemente velocidad espectral y a  $S_a$  se le llama aceleración espectral (o, más exacto, aceleración seudoespectral, porque  $S_a$  en la generalidad de los casos no representa exactamente el valor máximo de la aceleración).

El espectro de respuesta es el conjunto de máximos valores de desplazamiento, velocidad o aceleración, que sobre un oscilador simple puede originar una carga aleatoria o determinista.

Una vez que se conocen el período natural y el coeficiente



de amortiguamiento de una estructura, se puede determinar a partir de este diagrama la respuesta máxima de la estructura sujeta a este movimiento sísmico, y con ello calcular la fuerza cortante máxima en la base, aplicada de la estructura.

Los espectros de aceleración se han convertido en los de mayor empleo en la ingeniería civil debido a que la fuerza involucra la masa y la aceleración.

Si el período del oscilador es muy pequeño, la aceleración espectral tiende a ser la del terreno, pero si el período es muy largo la aceleración de la masa tiende a ser nula, con lo cual las construcciones tienden a amplificar los parámetros registrados en el suelo. La amplificación es máxima para la aceleración, intermedia para la velocidad y menor para el desplazamiento.

Una amplificación aproximada muy utilizada es la de 2.5 para la aceleración, cuando el coeficiente de amortiguamiento con respecto al crítico es del orden de cinco por ciento o un poco superior. Esta es la situación que corresponde a estructuras dúctiles de concreto reforzado o de acero, sometidas al efecto de sismos intensos. Por esta razón, algunos códigos se apoyan en esta amplificación para determinar la aceleración espectral sobre la estructura, cuando se conoce la máxima sobre el terreno y recomiendan que la aceleración sobre la construcción no sobrepase 2.5 veces la del terreno.

Dada la irregularidad en la forma de los espectros, que presentan variaciones bruscas en la magnitud de la respuesta máxima en función del período natural, es posible que dos estructuras que tengan prácticamente las mismas características respondan de manera totalmente distinta ante un mismo sismo.

Los espectros de respuesta varían mucho con el período natural, con lo cual, para los propósitos de diseño son de mayor significación los espectros generalizados en lugar de un espectro específico.

El espectro de diseño se concibe como envolventes de los valores máximos a partir de ciertas dispersiones de los datos. Por lo tanto, el resultado corresponde a líneas curvas suavizadas y no a los característicos dientes de sierra del espectro de respuesta específico.

Para fines de diseño, puede adoptarse un espectro obtenido como la curva media o envolvente del teórico. Si en una región son frecuentes temblores cuyas curvas medias tienen diferentes características, es razonable trazar la curva media de cada uno de ellos, reducir todas a una intensidad común y adoptar para diseño la envolvente de todos los espectros medios reducidos, multiplicada por un factor que tome en cuenta la intensidad esperada, las consecuencias de la falla de la estructura, su importancia, etc.

Para propósitos ingenieriles es conveniente y conservador,

simplificar la forma espectral como el promedio de las formas espectrales o por el promedio de una desviación estándar (percentil 84), y también simplificar el espectro para cuatro diferentes tipos de suelo.

Como se indicó, dos parámetros importantes en la utilización de los espectros de respuesta son los parámetros elásticos y postelásticos de la estructura.

En un proceso elástico la energía elástica es almacenada por la rigidez del sistema, mientras que en un proceso postelástico hay energía potencial almacenada y energía disipada por la acción inelástica del oscilador sometido al efecto del acelerograma que lo desplaza.

Un parámetro importante en el proceso de una estructura elástica y postelástica es la ductilidad al desplazamiento, definido como el cociente entre la deformación unitaria y la de cedencia.

La deformación última se puede entender como la máxima de compresión en el concreto. La ductilidad disponible en un elemento estructural depende de una serie de condiciones del elemento estructural bajo consideración.

Si un oscilador simple se somete a la acción de los impulsos de un acelerograma, en un instante de tiempo cualquiera la carga inercial sobre la masa llegará a un máximo para el amortiguamiento especificado. Si el oscilador responde inelásticamente, la carga inercial será inferior que la elástica para el mismo acelerograma. Si se divide la carga elástica estática máxima por la carga inelástica estática máxima, se obtiene el llamado factor de reducción de la carga estática. En la práctica, este cociente puede variar entre 1.0 que corresponde a estados muy elásticos y casi sin capacidad de disipación de energía, hasta 6 o algo similar para sistemas estructurales aperticados con refuerzo y requisitos de despiece especiales.

Si la carga lateral elástica estática se divide por la ductilidad, el oscilador tendría en su sistema de rigidez una carga inercial bastante menor que la elástica. Al inverso de la ductilidad al desplazamiento, se lo suele llamar factor de reducción  $R$ . El factor de reducción  $R$  en términos de  $\mu^{-1}$  que corresponde a igual deformación elástica e inelástica, y de  $1/\sqrt{2\mu-1}$  que corresponde a igual energía elástica que inelástica.

En el supuesto de que se busca un factor de reducción bajo, es decir una alta ductilidad, debe aceptarse que esto implica necesariamente altas deformaciones laterales que tendrán importantes efectos sobre los elementos no estructurales de la construcción. En otras palabras, alta ductilidad implica alta deformación estructural. La estructura correctamente diseñada puede acomodar estas altas deformaciones, pero los muros divisorios podrían resultar gravemente averiados.

Estudios experimentales y analíticos desarrollados en diferentes lugares, demuestran que la ductilidad disponible al desplazamiento, en una estructura de concreto reforzado, depende fundamentalmente del sistema estructural y de la cantidad y distribución del acero de refuerzo. Los sistemas se pueden dividir básicamente en cuatro sistemas estructurales diferentes: un pórtico, la unión entre pórtico y muro, a un muro y el llamado sistema péndulo invertido.

Además las características dinámicas de una estructura están dadas por la siguiente información: a) los períodos propios de oscilación; b) los modos propios de oscilación; y c) los factores de amortiguamiento, los cuales dependen del tipo de construcción, de los materiales utilizados, de la distribución de los elementos estructurales, de las dimensiones, etc. El conocimiento de esas características es fundamental para determinar, en combinación con las propiedades físico-mecánicas del suelo, la intensidad de la respuesta de la estructura al movimiento del terreno. Sin embargo, de las tres características mencionadas, el período de oscilación adquiere una importancia especial, ya que al definir la rigidez dinámica se conoce el comportamiento de la estructura ante la excitación sísmica, en buena parte.

Dada la influencia decisiva que tienen los períodos naturales de vibración en las respuestas sísmicas, conviene disponer de procedimientos sencillos que permitan estimarlos con cierta precisión. Esto no siempre es posible, y cuando no lo sea, se deberá recurrir a métodos de análisis sumamente elaborados o bien proceder conservadoramente introduciendo explícitamente el margen de incertidumbre que envuelva a los valores calculados.

Existe una serie de fórmulas empíricas deducidas por medio de observaciones en distintos países, mediante la vibración forzada de estructuras y cálculos por diferentes caminos para así seleccionar, el procedimiento de cálculo más apropiado a cada caso. Las experiencias de otros no necesariamente son dignas de confianza para nuestros edificios.

Las razones para retener una fórmula que ni es exacta ni rigurosa son: que es sencilla, que es conservadora y que es probablemente tan adecuada para su propósito con otras simplificaciones que se hacen en los procedimientos de diseño.

Por ejemplo la magnitud de las fuerzas laterales está basada en la estimación del período fundamental de vibración y de la distribución de fuerzas asociadas a través de fórmulas simplificadas para edificios con una distribución regular de masa y rigidez a lo alto de la estructura.

La contribución de varios modos de vibración a las fuerzas laterales y al corte basal dependen de un número de factores, incluyendo la forma del espectro de respuesta y de la forma de los modos que al mismo tiempo dependen de la masa y rigidez de la estructura. De cualquier manera, estas fuerzas están mayormente en función del primer período fundamental de vibración. Por

ello el procedimiento de la fuerza lateral equivalente, está determinado por fórmulas similares a las utilizadas para el primer modo de vibración, pero modificadas para obtener una aproximación para los efectos producidos por los modos altos.

## CAPÍTULO 5

## EJEMPLO

Con el objeto de ilustrar en forma práctica lo explicado en los capítulos anteriores a continuación se hará un análisis sísmico dinámico a la siguiente estructura.

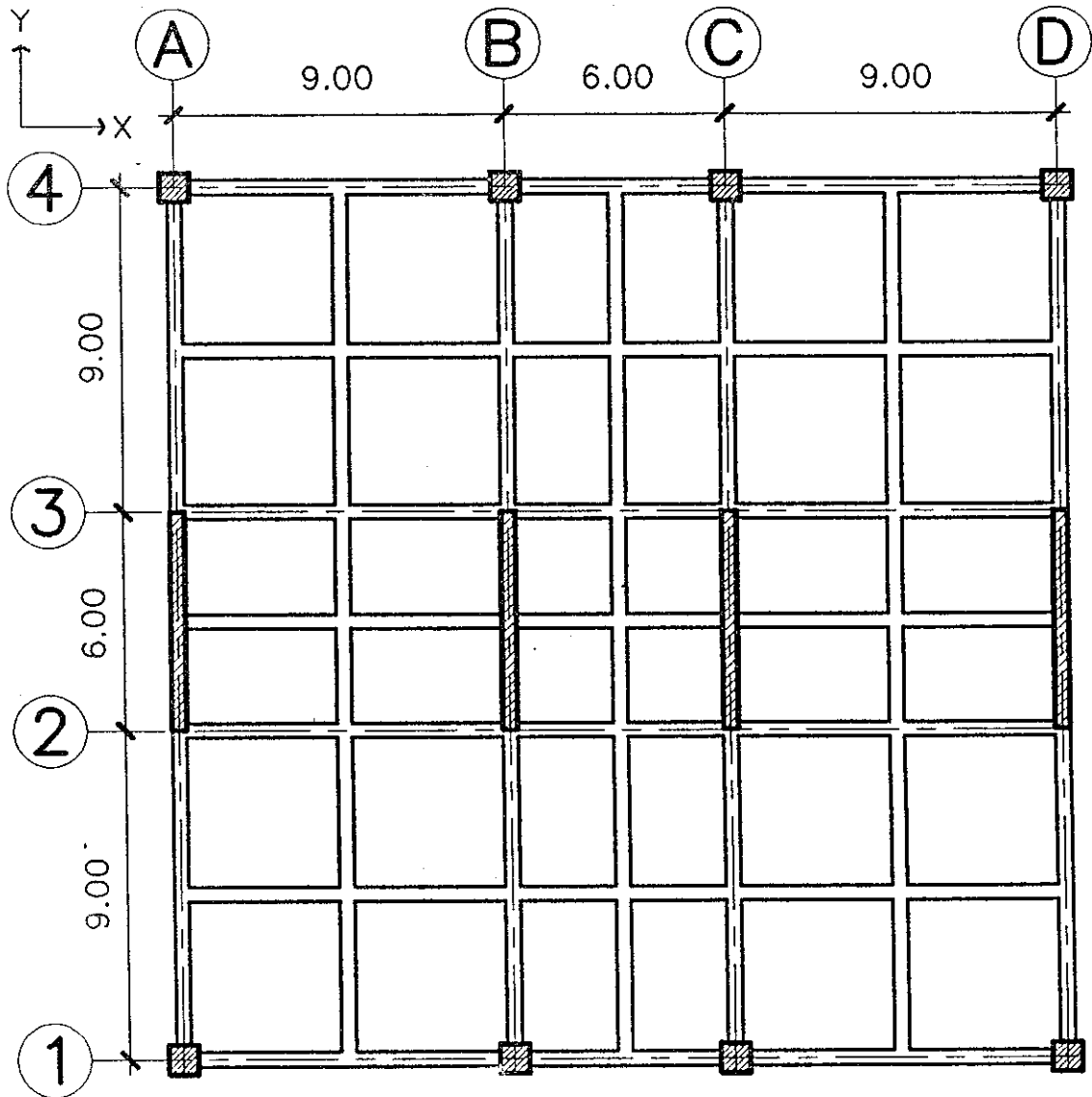


FIGURA 5.1. PLANTA DE LA ESTRUCTURA A ANALIZAR

### 5.1. DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Como se puede observar esta estructura está formada por muros y marcos, como se indicó en el capítulo 4.4 esta estructura es lo que corresponde al llamado sistema dual en la dirección de los marcos letra (dirección "Y") y en la dirección de los marcos número corresponde a un sistema de marcos rígidos (dirección "X").

La estructura está formada por 10 plantas típicas de 24 m de largo por 24 m de ancho, tiene una altura de entrepisos de 3.5 m, excepto en el segundo nivel que es de 4.0 m, con lo cual la altura total de la misma es de 35.5 m. La estructura contará con 8 columnas de 0.75 x 0.75 m, con 4 muros estructurales de 0.40 x 6.00 m y por vigas principales de 0.40 x 0.75. Esta estructuración corresponde a un ejemplo donde se quieren mostrar dos tipos de sistemas estructurales resistentes a sismos (sistema dual y sistema de marcos rígidos). En la práctica estos sistemas utilizados puede que no sean los más adecuados para estructuras como la del ejemplo.

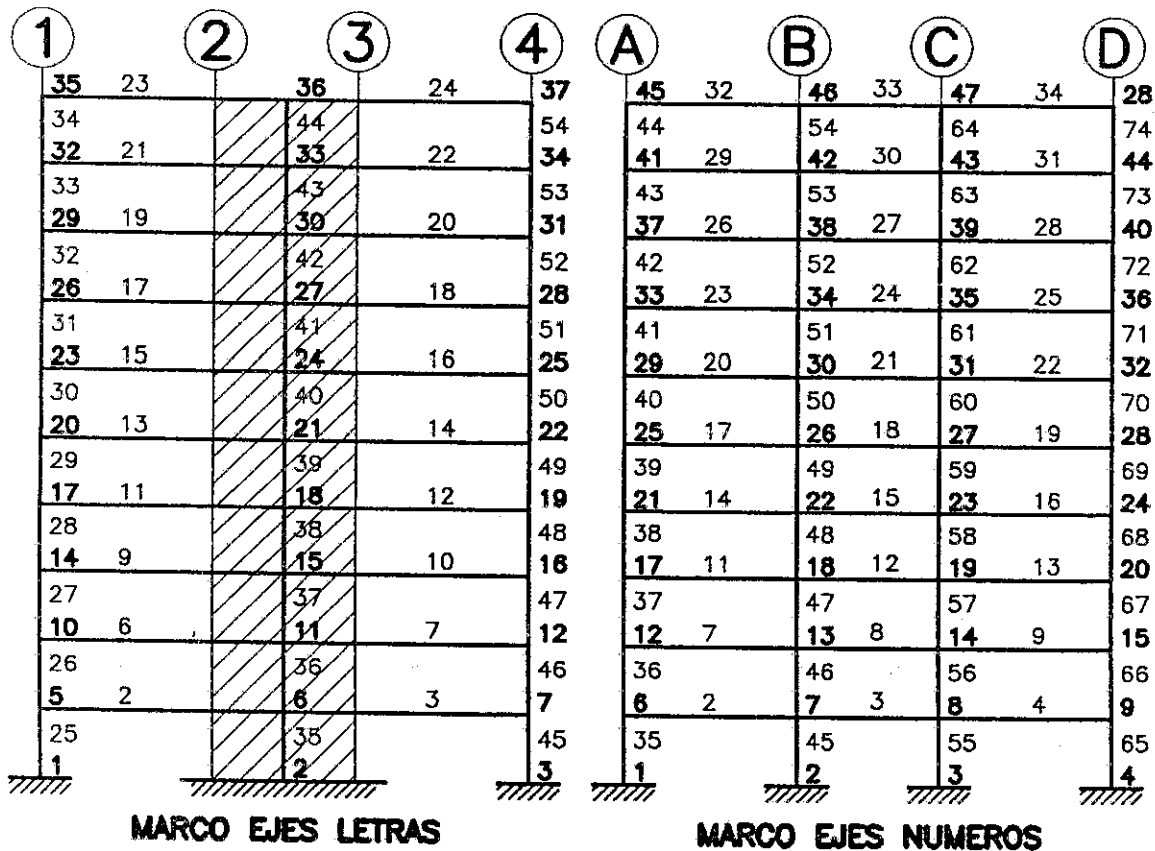


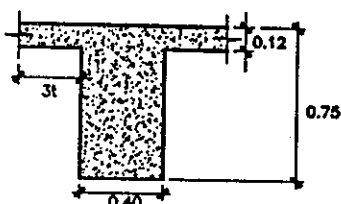
FIGURA 5.2. MARCOS TÍPICOS DE LA ESTRUCTURA

## 5.2. PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA

### 5.2.1. PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

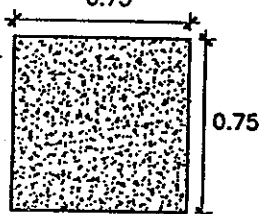
Como se indicó en el capítulo 3.2.5 las rigideces de los elementos estructurales que forman la estructura deben reflejar la cantidad de acero de refuerzo longitudinal, el grado de agrietamiento, las cargas axiales, la fluencia plástica, entre otros factores. Para tomar en cuenta estos factores en forma simplificada se multiplicará la rigidez axial de las columnas y muros por 1.1, la rigidez flexionante de vigas por 0.5 y la rigidez flexionante de las columnas y muros por 0.8. Por aparte para la rigidez flexionante de la viga se tomara la rigidez de una viga "T", formada por la contribución de una franja de 3 veces el espesor de la losa como alas (patín).

#### \* VIGA PRINCIPAL



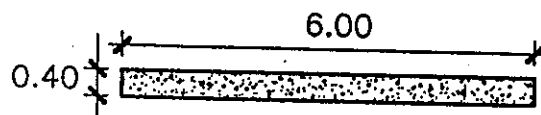
$$\begin{aligned} A_x &= 0.386 \text{ m}^2 \\ A_v &= 0.300 \text{ m}^2 \\ I &= 0.5(2.08 \text{ E-}2 \text{ m}^4) = 1.04 \text{ E-}2 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

#### \* COLUMNA



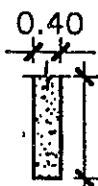
$$\begin{aligned} A_x &= 1.1(0.56) = 0.62 \text{ m}^2 \\ A_v &= 0.75(0.75) = 0.56 \text{ m}^2 \\ I &= 0.8[1/12(0.75)^4] = 2.11 \text{ E-}2 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

#### \* MURO ESTRUCTURAL



##### DIRECCION PRINCIPAL

$$\begin{aligned} A_x &= 1.1(2.4) = 2.64 \text{ m}^2 \\ A_v &= 0.4(6) = 2.40 \text{ m}^2 \\ I &= 0.8[1/12(0.4)(6)^3] = 5.76 \text{ m}^4 \end{aligned}$$



##### DIRECCION TRANSVERSAL

$$\begin{aligned} A_x &= 1.1(0.48) = 0.53 \text{ m}^2 \\ A_v &= 1.2(0.4) = 0.48 \text{ m}^2 \\ I &= 0.8[1/12(1.2)(0.4)^3] = 5.12 \text{ E-}3 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

### 5.2.2. MASAS

Para el cálculo de las masas se tomará únicamente la carga muerta, tomando en cuenta el peso propio de la estructura y la carga muerta superpuesta. Para la losa 1 la carga muerta superpuesta será de 200 Kg/m<sup>2</sup> (CMS), para la losa 2 será de 400 Kg/m<sup>2</sup> y de la losa 3 a la losa 10 será de 350 Kg/cm<sup>2</sup>. La integración de

las masas de la estructura es la siguiente:

\* LOSA 1

$PP_{LOSA} = 0.12(2.4)(24x24) =$	165.89 Ton
$CMS = 2.0(24x24) =$	115.20 Ton
$PP_{col} = 0.75(0.75)(3.5)(2.4)(8) =$	37.80 Ton
$PP_{muro} = 0.4(6)(3.5)(2.4)(4) =$	80.64 Ton
$PP_{viga\ prin} = 0.4(0.63)(9x16+6x4)(2.4) =$	101.60 Ton
$P_{perimetral} = 1(24x4) =$	96.00 Ton
$PP_{viga\ sec} = 0.4(0.63)(9x12)(2.4) =$	<u>65.30 Ton</u>
	662.43 Ton ≈ 665 Ton

\* LOSA 2

$PP_{LOSA} = 0.12(2.4)(24x24) =$	165.89 Ton
$CMS = 4.0(24x24) =$	230.40 Ton
$PP_{col} = 0.75(0.75)(3.75)(2.4)(8) =$	40.50 Ton
$PP_{muro} = 0.4(6)(3.5)(2.4)(4) =$	80.64 Ton
$PP_{viga\ prin} = 0.4(0.63)(9x16+6x4)(2.4) =$	101.60 Ton
$P_{perimetral} = 1(24x4) =$	96.00 Ton
$PP_{viga\ sec} = 0.4(0.63)(9x12)(2.4) =$	<u>65.30 Ton</u>
	786.09 Ton ≈ 785 Ton

\* LOSA 3 A LOSA 10

$PP_{LOSA} = 0.12(2.4)(24x24) =$	165.89 Ton
$CMS = 3.5(24x24) =$	201.60 Ton
$PP_{col} = 0.75(0.75)(3.5)(2.4)(8) =$	37.80 Ton
$PP_{muro} = 0.4(6)(3.5)(2.4)(4) =$	80.64 Ton
$PP_{viga\ prin} = 0.4(0.63)(9x16+6x4)(2.4) =$	101.60 Ton
$P_{perimetral} = 1(24x4) =$	96.00 Ton
$PP_{viga\ sec} = 0.4(0.63)(9x12)(2.4) =$	<u>65.30 Ton</u>
	748.83 Ton ≈ 750 Ton

Luego de determinar las propiedades de los elementos se procede a determinar la matriz de rigidez de cada marco, y con las masas por losa se procede a determinar la matriz de masas de la estructura, que es la misma para ambas direcciones de la estructura. Estas matrices se determinan conforme lo que se explicó en el capítulo 3.1 y 3.2, y la diagonal de la matriz de masas de la estructura es la tabulada en la tabla 5.1.

GL	MASA (Ton)
1	665
2	785
3	750
4	750
5	750
6	750
7	750
8	750
9	750
10	750

TABLA 5.1. DIAGONAL DE LA MATRIZ DE MASAS DE LA ESTRUCTURA



### 5.3. CONDENSACIÓN DE LA ESTRUCTURA

Como se indicó en el capítulo 3.4 es necesario reducir la matriz de rigidez en términos de los grados de libertad traslacionales y esto se hace mediante la expresión:

$$K_{\text{cond}} = K_{aa} - K_{ab}K_{bb}^{-1}K_{ba}$$

Con lo cual la matriz condensada de cada marco queda como se muestra en la tabla 5.2 y 5.3.

MARCO PRUEBA 01 PARA TESIS archivo SCTESI01.A12		MARCO PRUEBA 02 PARA TESIS archivo SCTESI02.A12	
DIAGONAL DE MATRIZ CONDENSADA SC ngc = 10		DIAGONAL DE MATRIZ CONDENSADA SC ngc = 10	
GL	K CONDENSADA	GL	K CONDENSADA
1	9.4293E+04	1	2.7689E+04
2	7.4248E+04	2	2.2714E+04
3	7.3739E+04	3	2.2639E+04
4	8.7776E+04	4	2.7506E+04
5	8.9088E+04	5	2.7739E+04
6	8.9177E+04	6	2.7751E+04
7	8.9099E+04	7	2.7744E+04
8	8.8013E+04	8	2.7632E+04
9	7.3323E+04	9	2.5584E+04
10	2.0461E+04	10	9.1843E+04

TABLA 5.2. MATRICES CONDENSADAS DE LOS MARCOS EN DIRECCIÓN "X"

MARCO PRUEBA AA PARA TESIS archivo SCTESIAA.A12	
DIAGONAL DE MATRIZ CONDENSADA SC ngc = 10	
GL	K CONDENSADA
1	7.0073E+05
2	5.9218E+05
3	5.8909E+05
4	6.4907E+05
5	6.5021E+05
6	6.5029E+05
7	6.5007E+05
8	6.4653E+05
9	5.9390E+05
10	1.4898E+05

TABLA 5.3. MATRIZ CONDENSADA DE LOS MARCOS EN DIRECCIÓN "Y"

En las matrices presentadas en las tablas 5.2 y 5.3 cada término constituye el grado de libertad traslacional por losa.

Luego de obtener la matriz condensada de cada marco se procede a efectuar la condensación en paralelo de la estructura, con lo cual la matriz de rigidez de la estructura queda como la presentada en la tabla 5.4.

MARCO PRUEBA ZX PARA TESIS archivo SCTESIZX.A12 GOTESIZX.A12 01020201		MARCO PRUEBA ZY PARA TESIS archivo SCTESIZY.A12 GOTESIZY.A12 AAAAAAA	
DIAGONAL DE MATRIZ CONDENSADA SC ngc = 10		DIAGONAL DE MATRIZ CONDENSADA SC ngc = 10	
GL	K CONDENSADA	GL	K CONDENSADA
1	2.4396E+05	1	2.8029E+06
2	1.9392E+05	2	2.3687E+06
3	1.9276E+05	3	2.3564E+06
4	2.3057E+05	4	2.5963E+06
5	2.3365E+05	5	2.6008E+06
6	2.3386E+05	6	2.6012E+06
7	2.3369E+05	7	2.6003E+06
8	2.3129E+05	8	2.5861E+06
9	1.9781E+05	9	2.3756E+06
10	5.9290E+04	10	5.9590E+05

DIRECCIÓN "X"

DIRECCIÓN "Y"

TABLA 5.4. MATRICES DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

El modelo del análisis del ejemplo utilizado no es tridimensional, sino es un análisis plano, es decir un análisis independiente en cada dirección con lo cual la matriz de rigidez del edificio en cada dirección se obtiene sumando los términos correspondientes de los marcos individuales.

#### 5.4. CÁLCULO DE LOS VALORES CARACTERÍSTICOS

Para ello es necesario estimar el número de modos de vibración que intervendrán en la excitación, en el caso de la estructura analizada se tomarán 10 modos de vibración para cada dirección y se chequeará que el 90% de la masa esté en participación, si no es así se aumentará el número de modos. El cálculo de los valores característicos se hace por medio de la ecuación:

$$|K - \omega^2 M| = 0$$

y luego de determinar los N valores de la frecuencia  $\omega$ , se determinarán los modos de vibración  $\phi_n$  y los períodos de vibración de cada modo con la expresión:

$$T = 2\pi/\omega_n$$

los valores característicos, las frecuencias y los períodos resultantes para cada modo son los presentados en la tabla 5.5.

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL RESUMEN DE RESULTADOS			
archivo MOTESIZX.A12			
modo	v.carac	frec Hz	T seg
1	+8.063E+00	0.45	2.213
2	+8.028E+01	1.43	0.701
3	+2.576E+02	2.55	0.391
4	+5.698E+02	3.80	0.263
5	+1.086E+03	5.24	0.191
6	+1.973E+03	7.07	0.141
7	+3.365E+03	9.23	0.108
8	+5.010E+03	11.26	0.089
9	+6.492E+03	12.82	0.078
10	+8.279E+03	14.48	0.069

DIRECCIÓN "X"

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL RESUMEN DE RESULTADOS			
archivo MOTESIZY.A12			
modo	v.carac	frec Hz	T seg
1	+2.562E+01	0.81	1.241
2	+5.102E+02	3.59	0.278
3	+2.960E+03	8.66	0.115
4	+8.662E+03	14.81	0.068
5	+1.783E+04	21.25	0.047
6	+3.060E+04	27.84	0.036
7	+4.553E+04	33.96	0.029
8	+5.853E+04	38.50	0.026
9	+6.832E+04	41.60	0.024
10	+7.750E+04	44.31	0.023

DIRECCIÓN "Y"

TABLA 5.5. VALORES CARACTERÍSTICOS, FRECUENCIAS Y PERÍODOS DE VIBRACIÓN DE LA ESTRUCTURA.

### 5.5. EXCITACIÓN SÍSMICA DE DISEÑO

Para excitar la estructura se necesitan algunas excitaciones sísmicas para diseño.

Para este caso se utilizará el espectro recomendado por el Proyecto de Normas Sismo-Resistentes para la República de Guatemala, ref. 8.

Para la creación de este espectro se necesitan conocer los siguientes parámetros de excitación:

\* ACELERACIÓN DEL SUELO

Esta aceleración pico del suelo depende del índice de sismicidad conforme a la zonificación sísmica del territorio nacional. Para una estructura localizada en la capital se tomará un valor

de  $A_s=0.35g$ . Véase el mapa de la ref. 8 que para índice de sismicidad específica un mínimo de  $0.30 g$ .

#### \* TIPO DE SUELO

Este factor toma en cuenta las características del suelo del lugar. Para la estructura se tomará un valor de  $S=1.2$  que corresponde a suelos firmes profundos, como los del valle de Guatemala.

#### \* FACTOR DE REDUCCIÓN POSTELÁSTICA

Este factor, como se indicó en el capítulo 4.4, depende del tipo de estructura y de su ductilidad. Para la estructura en la dirección del sistema dual el factor de reducción corresponde a  $6.5$ , y en la dirección del sistema de marcos el factor de corrección corresponde a  $6.0$ . Se tomará un valor de  $RQ=6.5$  en sentido "X" y un valor de  $RQ=6.0$  en sentido "Y" según se especifica en la tabla 4.2 que contiene los factores propuestos por la Recomendación de Normas Sismo-Resistentes para la República de Guatemala.

#### \* AMPLIFICACIÓN MÁXIMA

Este es el valor máximo de amplificación de la aceleración del suelo. En el espectro propuesto por el proyecto de Normas Sismo-Resistentes para la República de Guatemala el factor de amplificación máxima es  $2.5$ .

Con estos parámetros se puede determinar, de la gráfica del espectro de respuesta, la amplificación máxima, para poder determinar la aceleración máxima de cada modo de vibración excitado.

Con los parámetros anteriores se pueden determinar los valores de aceleración para cada modo, los cuales se presentan en la tabla 5.6.

En el cuadro siguiente (tabla 5.6), los parámetros  $A_s$  (aceleración del suelo),  $S$  (tipo de suelo) y  $RQ$  (factor de reducción postelástica) se describieron antes. Los parámetros  $CD$  (factor de deformación postelástica) y  $T_a$  (período empírico de vibración de la estructura) se describirán después en los capítulos 5.6 y 5.9 respectivamente. Además  $f_{rec}$  es frecuencia de vibración de la estructura,  $T$  es el período de vibración de la estructura,  $S'a$  es la pseudo aceleración obtenido del espectro respuesta,  $S_d$  es el desplazamiento máximo y factor de excitación es el factor de participación de cada modo o eigen-valor.

El período de vibración de las siguientes tablas (tabla 5.6) corresponden a la estructura desnuda, con secciones fracturadas.

En la realidad las estructuras son más rígidas por la tabicación interior y exterior. La corrección recomendable para tomar en cuenta los períodos reales se hace en la sección 5.8.

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL - CUADRO RESUMEN RQ = 6						
ENSAMBLE ZX PARA SUPERPOSICIÓN						
archivos GOTESIZX.A12						
QXTESIZX.GUA						
EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN X, ENSAMBLE PLANO						
As=0.35G S=1.2 RQ=6.00 AMPLIF. MAX=2.5						
modo	frec Hz	T seg	S'a (g)	Sd	fact.excit	masa gener
1	0.45	2.213	0.056	0.338	+.250E+02	.100E+01
2	1.43	0.701	0.119	0.073	-.825E+01	.100E+01
3	2.55	0.391	0.146	0.028	+.525E+01	.100E+01
4	3.80	0.263	0.146	0.013	-.415E+01	.100E+01
5	5.24	0.191	0.146	0.007	-.299E+01	.100E+01
6	7.07	0.141	0.146	0.004	+.208E+01	.100E+01
7	9.23	0.108	0.137	0.002	-.181E+01	.100E+01
8	11.26	0.089	0.123	0.001	-.203E+01	.100E+01
9	12.82	0.078	0.115	0.001	-.134E+01	.100E+01
10	14.48	0.069	0.109	0.001	+.403E+00	.100E+01

DIRECCIÓN "X"

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL - CUADRO RESUMEN RQ = 6.5						
ENSAMBLE ZY PARA SUPERPOSICIÓN						
archivos GOTESIZY.A12						
QYTESIZY.GUA						
EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN Y, ENSAMBLE PLANO						
As=0.35G S=1.2 RQ=6.50 AMPLIF. MAX=2.5						
modo	frec Hz	T seg	S'a (g)	Sd	fact.excit	masa gener
1	0.81	1.241	0.075	0.159	+.230E+02	.100E+01
2	3.59	0.278	0.135	0.014	-.115E+02	.100E+01
3	8.66	0.115	0.132	0.002	+.701E+01	.100E+01
4	14.81	0.068	0.099	0.001	+.503E+01	.100E+01
5	21.25	0.047	0.086	0.000	-.348E+01	.100E+01
6	27.84	0.036	0.078	0.000	-.232E+01	.100E+01
7	33.96	0.029	0.074	0.000	-.188E+01	.100E+01
8	38.50	0.026	0.071	0.000	-.185E+01	.100E+01
9	41.60	0.024	0.070	0.000	-.111E+01	.100E+01
10	44.31	0.023	0.069	0.000	+.345E+00	.100E+01

DIRECCIÓN "Y"

TABLA 5.6. VALORES DE ACELERACIÓN CORRESPONDIENTES A CADA MODO DE VIBRACIÓN DE LA ESTRUCTURA.

## 5.6. CÁLCULO DE MASA PARTICIPANTE Y DEFORMACIONES MODALES

Los desplazamientos modales máximos como se indicó en el capítulo 2.6.2 se obtienen de las aceleraciones modales máximas, mediante la expresión:

$$U_{jn} = \frac{U_n}{M_n} U_{dn} \phi_{jn}$$

o mediante la expresión

$$U_{dn} = \frac{U_{an}}{\omega_n^2}$$

Los valores de aceleración máxima son los que se obtienen de la tabla anterior (tabla 5.6).

Los desplazamientos modales máximos obtenidos de las expresiones anteriores son los desplazamientos modales máximos de nuestra estructura, que resultan de aplicar el factor de reducción postelástica RQ, o sea que son deformaciones que aún son elásticas y que en teoría corresponderían al punto donde la estructura empieza a ceder.

En la práctica para un sismo fuerte la estructura cede y se deforma en el rango postelástico.

Para estimar la deformación postelástica máxima se multiplica la deformación elástica de cedencia por el factor CD (que es numéricamente similar al reductor RQ). Está es una simplificación que evita un análisis dinámico postelástico.

Como se indicó en el capítulo 2.6 la masa de la estructura no interviene completamente en la excitación de cada modo, con lo cual es necesario calcular la masa que participa en cada modo y esta como se describió en el capítulo 2.6 se obtiene de la siguiente expresión:

$$W_n = \frac{\left| \begin{array}{c} N \\ \sum_{i=1} W_j \phi_n \end{array} \right|^2}{\begin{array}{c} N \\ \sum_{i=1} W_j \phi_n^2 \end{array}}$$

En las tabla 5.7 se presentan los desplazamientos modales máximos de la estructura en dirección "X", así como la masa participante de cada modo en la dirección "X", y en las tabla 5.8 se presentan los desplazamientos modales máximos de la estructura en dirección "Y", así como la masa participante de cada modo en dicha dirección.

ENSAMBLE ZX PARA SUPERPOSICIÓN EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN X, ENSAMBLE PLANO As=0.35G S=1.2 RQ=6.00 AMPLIF. MAX=2.5							
DEFORMACIONES MODALES - equivalente postelástico - CD = 5							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+3.759E-02	+8.128E-03	+3.540E-03	+1.874E-03	+8.044E-04
2	0.800E+02	1.0	+9.663E-02	+1.917E-02	+7.003E-03	+2.809E-03	+7.769E-04
3	0.765E+02	1.0	+1.719E-01	+2.866E-02	+6.676E-03	+5.838E-04	-6.462E-04
4	0.765E+02	1.0	+2.302E-01	+3.046E-02	+2.632E-03	-1.873E-03	-8.383E-04
5	0.765E+02	1.0	+2.822E-01	+2.582E-02	-2.832E-03	-2.380E-03	+2.808E-04
6	0.765E+02	1.0	+3.278E-01	+1.578E-02	-6.690E-03	-4.666E-04	+9.699E-04
7	0.765E+02	1.0	+3.659E-01	+2.443E-03	-6.779E-03	+1.919E-03	+1.663E-04
8	0.765E+02	1.0	+3.959E-01	-1.147E-02	-3.038E-03	+2.349E-03	-8.905E-04
9	0.765E+02	1.0	+4.173E-01	-2.317E-02	+2.490E-03	+3.581E-04	-5.612E-04
10	0.765E+02	1.0	+4.303E-01	-3.090E-02	+7.101E-03	-2.260E-03	+7.610E-04
MASA PARTICIPANTE ABSOLUTA Y RELATIVA							
total		modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	
0.759E+03		0.624E+03	0.680E+02	0.276E+02	0.172E+02	0.892E+01	
1.000		0.822	0.090	0.036	0.023	0.012	
porcentaje total acumulado de masa participante 99.98%							
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10
1	0.678E+02	1.0	+3.116E-04	+1.752E-04	+1.604E-04	+5.691E-05	+4.161E-06
2	0.800E+02	1.0	+1.145E-04	-3.777E-05	-1.049E-04	-5.287E-05	-4.885E-06
3	0.765E+02	1.0	-3.852E-04	-1.408E-04	+1.584E-05	+5.292E-05	+7.689E-06
4	0.765E+02	1.0	+2.701E-05	+1.674E-04	+7.227E-05	-4.446E-05	-1.122E-05
5	0.765E+02	1.0	+3.838E-04	+1.012E-05	-1.098E-04	+1.648E-05	+1.331E-05
6	0.765E+02	1.0	-8.460E-05	-1.753E-04	+6.643E-05	+1.834E-05	-1.377E-05
7	0.765E+02	1.0	-3.713E-04	+1.255E-04	+2.577E-05	-4.554E-05	+1.255E-05
8	0.765E+02	1.0	+1.394E-04	+7.849E-05	-9.912E-05	+5.385E-05	-9.793E-06
9	0.765E+02	1.0	+3.456E-04	-1.846E-04	+9.894E-05	-3.958E-05	+5.818E-06
10	0.765E+02	1.0	-2.464E-04	+8.891E-05	-3.798E-05	+1.344E-05	-1.783E-06
MASA PARTICIPANTE ABSOLUTA Y RELATIVA							
total		modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10	
0.759E+03		0.431E+01	0.327E+01	0.411E+01	0.181E+01	0.163E+00	
1.000		0.006	0.004	0.005	0.002	0.000	
porcentaje total acumulado de masa participante 100.00%							

TABLA 5.7. DESPLAZAMIENTOS MODALES MÁXIMOS Y MASA PARTICIPANTE DE LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "X".

<b>ENSAMBLE ZY PARA SUPERPOSICIÓN</b> <b>EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN Y, ENSAMBLE PLANO</b> <b>As=0.35G S=1.2 RQ=6.5 AMPLIF. MAX=2.5</b>							
<b>DEFORMACIONES MODALES - equivalente postel stico - CD = 5.5</b>							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+5.788E-03	+1.384E-03	+3.624E-04	+1.137E-04	+4.070E-05
2	0.800E+02	1.0	+1.920E-02	+3.737E-03	+7.706E-04	+1.746E-04	+3.826E-05
3	0.765E+02	1.0	+4.156E-02	+6.437E-03	+8.924E-04	+6.987E-05	-2.518E-05
4	0.765E+02	1.0	+6.534E-02	+7.944E-03	+5.830E-04	-8.333E-05	-4.134E-05
5	0.765E+02	1.0	+9.162E-02	+8.107E-03	+8.414E-06	-1.514E-04	+5.418E-06
6	0.765E+02	1.0	+1.192E-01	+6.721E-03	-5.422E-04	-7.199E-05	+4.462E-05
7	0.765E+02	1.0	+1.471E-01	+3.890E-03	-7.791E-04	+7.516E-05	+1.765E-05
8	0.765E+02	1.0	+1.747E-01	-2.280E-05	-5.621E-04	+1.433E-04	-3.420E-05
9	0.765E+02	1.0	+2.016E-01	-4.524E-03	+3.551E-05	+5.768E-05	-3.083E-05
10	0.765E+02	1.0	+2.274E-01	-9.097E-03	+7.784E-04	-1.179E-04	+2.878E-05
<b>MASA PARTICIPANTE ABSOLUTA Y RELATIVA</b>							
total		modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	
0.759E+03		0.527E+03	0.132E+03	0.492E+02	0.253E+02	0.121E+02	
1.000		0.694	0.174	0.065	0.033	0.01	
porcentaje total acumulado de masa participante 99.98%							
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10
1	0.678E+02	1.0	+1.485E-05	+8.525E-06	+7.615E-06	+2.627E-06	+2.420E-07
2	0.800E+02	1.0	+4.683E-06	-2.425E-06	-5.608E-06	-2.734E-06	-3.142E-07
3	0.765E+02	1.0	-1.640E-05	-5.998E-06	+1.500E-06	+2.915E-06	+5.043E-07
4	0.765E+02	1.0	+3.575E-07	+7.698E-06	+3.266E-06	-2.426E-06	-7.215E-07
5	0.765E+02	1.0	+1.643E-05	+3.224E-07	-5.525E-06	+9.233E-07	+8.527E-07
6	0.765E+02	1.0	-2.201E-06	-7.913E-06	+3.546E-06	+9.798E-07	-8.795E-07
7	0.765E+02	1.0	-1.632E-05	+5.568E-06	+1.131E-06	-2.459E-06	+7.982E-07
8	0.765E+02	1.0	+3.589E-06	+3.967E-06	-5.016E-06	+2.930E-06	-6.242E-07
9	0.765E+02	1.0	+1.474E-05	-8.034E-06	+4.830E-06	-2.080E-06	+3.614E-07
10	0.765E+02	1.0	-8.582E-06	+3.394E-06	-1.680E-06	+6.446E-07	-1.023E-07
<b>MASA PARTICIPANTE ABSOLUTA Y RELATIVA</b>							
total		modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10	
0.759E+03		0.538E+01	0.352E+01	0.341E+01	0.124E+01	0.119E+00	
1.000		0.007	0.005	0.004	0.002	0.000	
porcentaje total acumulado de masa participante 100.00%							

TABLA 5.8. DESPLAZAMIENTOS MODALES MÁXIMOS Y MASA PARTICIPANTE DE LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "Y".



### 5.7. CÁLCULO DE LA FUERZA INERCIAL

Luego se procede a calcular la fuerza inercial total que actúa en la estructura. Las fuerzas elásticas máximas para cada modo estimado como se indicó en el capítulo 2.6.2 son estimadas para cada modo mediante la siguiente expresión:

$$F_{jn} = U_n/M_n U_{an} m_j \phi_{jn}$$

Los valores de las fuerzas inerciales para la estructura del ejemplo son presentados en las tablas 5.9 y 5.10.

ENSAMBLE ZX PARA SUPERPOSICIÓN EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN X, ENSAMBLE PLANO As=0.35G S=1.2 RQ=6.00 AMPLIF. MAX=2.5							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+4.109E+00	+8.847E+00	+1.236E+01	+1.447E+01	+1.184E+01
2	0.800E+02	1.0	+1.247E+01	+2.463E+01	+2.887E+01	+2.562E+01	+1.350E+01
3	0.765E+02	1.0	+2.120E+01	+3.518E+01	+2.630E+01	+5.086E+00	-1.073E+01
4	0.765E+02	1.0	+2.839E+01	+3.739E+01	+1.037E+01	-1.632E+01	-1.392E+01
5	0.765E+02	1.0	+3.480E+01	+3.169E+01	-1.115E+01	-2.074E+01	+4.662E+00
6	0.765E+02	1.0	+4.041E+01	+1.938E+01	-2.635E+01	-4.066E+00	+1.610E+01
7	0.765E+02	1.0	+4.512E+01	+2.999E+00	-2.670E+01	+1.672E+01	+2.761E+00
8	0.765E+02	1.0	+4.882E+01	-1.408E+01	-1.197E+01	+2.046E+01	-1.479E+01
9	0.765E+02	1.0	+5.144E+01	-2.845E+01	+9.808E+00	+3.120E+00	-9.318E+00
10	0.765E+02	1.0	+5.306E+01	-3.793E+01	+2.797E+01	-1.969E+01	+1.264E+01
T	0.759E+03	r=1	+3.398E+02	+7.967E+01	+3.951E+01	+2.467E+01	+1.275E+01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T		EFI					
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10
1	0.678E+02	1.0	+8.333E+00	+7.993E+00	+1.090E+01	+5.008E+00	+4.670E-01
2	0.800E+02	1.0	+3.614E+00	-2.034E+00	-8.414E+00	-5.493E+00	-6.472E-01
3	0.765E+02	1.0	-1.162E+01	-7.245E+00	+1.214E+00	+5.253E+00	+9.734E-01
4	0.765E+02	1.0	+8.149E-01	+8.613E+00	+5.536E+00	-4.413E+00	-1.421E+00
5	0.765E+02	1.0	+1.158E+01	+5.208E-01	-8.411E+00	+1.636E+00	+1.685E+00
6	0.765E+02	1.0	-2.552E+00	-9.017E+00	+5.089E+00	+1.820E+00	-1.744E+00
7	0.765E+02	1.0	-1.120E+01	+6.457E+00	+1.974E+00	-4.520E+00	+1.588E+00
8	0.765E+02	1.0	+4.204E+00	+4.038E+00	-7.593E+00	+5.345E+00	-1.240E+00
9	0.765E+02	1.0	+1.042E+01	-9.497E+00	+7.579E+00	-3.928E+00	+7.365E-01
10	0.765E+02	1.0	-7.434E+00	+4.574E+00	-2.910E+00	+1.334E+00	-2.257E-01
T	0.759E+03	r=1	+6.164E+00	+4.402E+00	+4.960E+00	+2.041E+00	+1.735E-01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T		EFI					

TABLA 5.9. FUERZAS INERCIALES MODALES QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "X".

<b>ENSAMBLE ZY PARA SUPERPOSICIÓN</b> <b>EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN Y, ENSAMBLE PLANO</b> <b>As=0.35G S=1.2 RQ=6.5 AMPLIF MAX=2.5</b>							
<b>FUERZAS INERCIALES</b>							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+1.828E+00	+8.702E+00	+1.322E+01	+1.214E+01	+8.944E+00
2	0.800E+02	1.0	+7.157E+00	+2.774E+01	+3.319E+01	+2.200E+01	+9.926E+00
3	0.765E+02	1.0	+1.480E+01	+4.565E+01	+3.672E+01	+8.413E+00	-6.241E+00
4	0.765E+02	1.0	+2.327E+01	+5.634E+01	+2.399E+01	-1.003E+01	-1.025E+01
5	0.765E+02	1.0	+3.263E+01	+5.749E+01	+3.462E-01	-1.823E+01	+1.343E+00
6	0.765E+02	1.0	+4.245E+01	+4.766E+01	-2.231E+01	-8.668E+00	+1.106E+01
7	0.765E+02	1.0	+5.240E+01	+2.759E+01	-3.206E+01	+9.050E+00	+4.375E+00
8	0.765E+02	1.0	+6.223E+01	-1.617E-01	-2.313E+01	+1.726E+01	-8.477E+00
9	0.765E+02	1.0	+7.179E+01	-3.209E+01	+1.461E+00	+6.945E+00	-7.642E+00
10	0.765E+02	1.0	+8.100E+01	-6.452E+01	+3.203E+01	-1.420E+01	+7.134E+00
T O T	0.759E+03	r=1 r=0 ΣFI	+3.896E+02	+1.744E+02	+6.346E+01	+2.468E+01	+1.018E+01
			+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo 10
1	0.678E+02	1.0	+5.603E+00	+4.784E+00	+5.493E+00	+2.212E+00	+2.312E-01
2	0.800E+02	1.0	+2.085E+00	-1.607E+00	-4.775E+00	-2.718E+00	-3.543E-01
3	0.765E+02	1.0	-6.975E+00	-3.796E+00	+1.220E+00	+2.769E+00	+5.433E-01
4	0.765E+02	1.0	+1.521E-01	+4.872E+00	+2.657E+00	-2.304E+00	-7.773E-01
5	0.765E+02	1.0	+6.987E+00	+2.040E-01	-4.495E+00	+8.768E-01	+9.187E-01
6	0.765E+02	1.0	-9.363E-01	-5.008E+00	+2.885E+00	+9.305E-01	-9.476E-01
7	0.765E+02	1.0	-6.943E+00	+3.524E+00	+9.204E-01	-2.336E+00	+8.600E-01
8	0.765E+02	1.0	+1.527E+00	+2.510E+00	-4.081E+00	+2.782E+00	-6.724E-01
9	0.765E+02	1.0	+6.271E+00	-5.085E+00	+3.930E+00	-1.975E+00	+3.893E-01
10	0.765E+02	1.0	-3.651E+00	+2.148E+00	-1.367E+00	+6.122E-01	-1.102E-01
T O T	0.759E+03	r=1 r=0 ΣFI	+4.120E+00	+2.547E+00	+2.387E+00	+8.503E-01	+8.067E-02
			+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00

TABLA 5.10. FUERZAS INERCIALES MODALES QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "Y".

## 5.8. SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS

La respuesta de la estructura es realmente una combinación de todos los modos, los resultados son una superposición o combinación lineal de modos. Pero como los modos tienen diferentes períodos

de vibración no alcanzan sus valores máximos simultáneamente. La combinación "verdadera" en un momento dado, no es la suma de todos los máximos. Entonces se usan recursos empíricos para lograr una combinación razonable, probabilística.

O sea, luego de determinar las fuerzas individuales se procede a superponer los resultados de una manera empírica.

El peor caso sería que todos los máximos de todos los modos ocurran simultáneamente, lo que es improbable. Para calcular este máximo se suman directamente las fuerzas de todos los modos (suma absoluta).

El caso más benévolo es cuando todos los modos están totalmente desfasados. La respuesta probable puede calcularse como la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de las fuerzas inerciales de los modos (raíz de suma cuadrática).

Hay métodos que dan valores intermedios tomando la correlación entre modos, o sea modos con períodos muy parecidos entre sí tienden a sumarse directamente y modos con períodos disímiles sumarían cuadráticamente. Para ello hay que estimar correlaciones entre los modos.

Una forma simple de resolver el problema es simplemente promediar la suma absoluta con la suma de la raíz de suma cuadrática.

Los resultados con las superposiciones modales de resultados propuestas en el capítulo 3.7 para el ejemplo son presentados en las tablas 5.11 y 5.12.

RESUMEN POR GRADO DE LIBERTAD FUERZAS INERCIALES						
GdeL	masa	R infl	Ssimple	Sabs	RCSC	.5 (Sabs+RCSC)
1	0.678E+02	1.0000	+8.434E+01	+8.434E+01	+2.958E+01	+5.696E+01
2	0.800E+02	1.0000	+9.212E+01	+1.253E+02	+5.053E+01	+8.791E+01
3	0.765E+02	1.0000	+6.561E+01	+1.248E+02	+5.232E+01	+8.856E+01
4	0.765E+02	1.0000	+5.503E+01	+1.272E+02	+5.384E+01	+9.051E+01
5	0.765E+02	1.0000	+4.627E+01	+1.269E+02	+5.479E+01	+9.083E+01
6	0.765E+02	1.0000	+3.907E+01	+1.265E+02	+5.567E+01	+9.110E+01
7	0.765E+02	1.0000	+3.519E+01	+1.200E+02	+5.691E+01	+8.847E+01
8	0.765E+02	1.0000	+3.321E+01	+1.325E+02	+5.902E+01	+9.577E+01
9	0.765E+02	1.0000	+3.192E+01	+1.343E+02	+6.262E+01	+9.846E+01
10	0.765E+02	1.0000	+3.139E+01	+1.678E+02	+7.530E+01	+1.215E+02
TOTAL	0.759E+03	EFI:r=1 EFI:r=0	+5.141E+02 +0.000E+00	+5.141E+02	+3.525E+02	+4.333E+02

TABLA 5.11. FUERZAS INERCIALES TOTALES QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS CON SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS

RESUMEN POR GRADO DE LIBERTAD						
FUERZAS INERCIALES						
GdeL	masa	R infl	Ssimple	Sabs	RCSC	.5 (Sabs+RCSC)
1	0.678E+02	1.0000	+6.316E+01	+6.316E+01	+2.389E+01	+4.353E+01
2	0.800E+02	1.0000	+9.265E+01	+1.116E+02	+5.042E+01	+8.099E+01
3	0.765E+02	1.0000	+9.311E+01	+1.271E+02	+6.192E+01	+9.452E+01
4	0.765E+02	1.0000	+8.792E+01	+1.346E+02	+6.733E+01	+1.010E+02
5	0.765E+02	1.0000	+7.807E+01	+1.235E+02	+6.910E+01	+9.631E+01
6	0.765E+02	1.0000	+6.712E+01	+1.429E+02	+6.932E+01	+1.061E+02
7	0.765E+02	1.0000	+5.739E+01	+1.401E+02	+6.858E+01	+1.043E+02
8	0.765E+02	1.0000	+4.978E+01	+1.228E+02	+6.936E+01	+9.609E+01
9	0.765E+02	1.0000	+4.399E+01	+1.376E+02	+7.985E+01	+1.087E+02
10	0.765E+02	1.0000	+3.908E+01	+2.068E+02	+1.096E+02	+1.582E+02
TOTAL	0.759E+03	EFI:r=1 EFI:r=0	+6.723E+02 +0.000E+00	+6.723E+02	+4.324E+02	+5.523E+02

TABLA 5.12. FUERZAS INERCIALES TOTALES QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "Y" OBTENIDAS CON SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS

### 5.9. CORRECCIÓN EMPÍRICA DE RESULTADOS

Ya se mencionó que las edificaciones reales no son estructuras desnudas. Son más rígidas que lo que indica el análisis dinámico porque tienen tabicación exterior e interior e inicialmente las secciones de concreto no están fracturadas todavía. Por eso, es frecuente que las fuerzas  $F_{jn}$  resultan más bajas que las reales. Es necesario introducir una corrección empírica propuesta en el ATC 3-06 y otros lineamientos afines incluyendo el Proyecto de Normas Sismo-Resistentes para la República de Guatemala.

Se calcula el período fundamental empírico (cálculo empírico del período de vibración del primer modo o modo fundamental). Este período se multiplica por 1.4 y se calcula el cortante basal empírico.

El período empírico para el ejemplo puede calcularse, como se indicó en el capítulo 4.5, mediante las expresiones propuestas en el Proyecto de Normas Sismo-Resistentes para la República de Guatemala, que toman en cuenta que el tipo de estructura está formada por marcos de concreto reforzado para la dirección formada por marcos rigidez.

Para la dirección con sistema de marcos (dirección "X"):

$$T_a = kh^{0.75} = 0.061(35.5)^{0.75} = 0.88 \text{ seg.}$$

Para la dirección con sistema de marcos y muros (dirección "Y"):

$$T_a = 0.09 * h_n / \sqrt{L} = 0.09 (35.5) / \sqrt{24} = 0.64 \text{ seg.}$$

El valor de corte basal empírico con período de 1.4  $T_a$  se compara con el corte basal obtenido de la superposición de modos. En los ejemplos esta comparación daría:

En X

$$\frac{V_{\text{basal empírico para } T=1.4 T_a}}{V_{\text{basal superposición modal}}} = \frac{611.15 \text{ Ton}}{433.31 \text{ Ton}} = 1.41$$

En Y

$$\frac{V_{\text{basal empírico para } T=1.4 T_a}}{V_{\text{basal superposición modal}}} = \frac{697.65 \text{ Ton}}{552.32 \text{ Ton}} = 1.26$$

Los cortes basales empíricos del ejemplo son mayores que los obtenidos en la superposición de modos, pero si en una estructura

$$V_{1.4 \text{ empírico}} < V_{\text{superposición}} \longrightarrow \text{factor} < 1.0, \implies \text{tomar } 1.0$$

Ahora lo que se hace es multiplicar los resultados de fuerzas inerciales por el factor de corrección. Para el ejemplo los cuadros de resultados son los presentados en las tablas 5.13 y 5.14.

Las fuerzas inerciales finales por nivel son las presentadas en las tablas 5.15 y 5.16.

## 5.10. DECONDENSACIÓN DE RESULTADOS

Luego de que se ha excitado la estructura se procede a decondensar la misma, para poder calcular las fuerzas internas de cada miembro que conforma el marco y como se indicó en el capítulo 3.6 esto se hace por medio de la expresión:

$$D_b = -K_{bb}^{-1} K_{ba} D_a$$

## 5.11. CÁLCULO DE FUERZAS INTERNAS

El cálculo de los esfuerzos de piso y los momentos de pisos se puede realizar por medio de un análisis estático de la estructura sujeta a fuerzas inerciales calculadas anteriormente. El método que se utilizará es el de rigideces, descrito en el capítulo 3.1. Los resultados del análisis para cada marco son los presentados en las tablas 5.17, 5.18 y 5.19.

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL - FUERZAS INERCIALES MODALES RQ = 6							
ENSAMBLE ZX PARA SUPERPOSICIÓN							
archivos GOTESIZX.A12							
QXTESIZX.GUA							
EXCITACIÓN SÍSMICA DIRECCIÓN X, ENSAMBLE PLANO							
As=0.35G S=1.2 RQ=6.00 AMPLIF. MAX=2.5							
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.410427							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+5.796E+00	+1.248E+01	+1.744E+01	+2.041E+01	+1.670E+01
2	0.800E+02	1.0	+1.759E+01	+3.474E+01	+4.072E+01	+3.614E+01	+1.904E+01
3	0.765E+02	1.0	+2.990E+01	+4.962E+01	+3.709E+01	+7.174E+00	-1.513E+01
4	0.765E+02	1.0	+4.004E+01	+5.274E+01	+1.462E+01	-2.302E+01	-1.963E+01
5	0.765E+02	1.0	+4.908E+01	+4.470E+01	-1.573E+01	-2.925E+01	+6.575E+00
6	0.765E+02	1.0	+5.700E+01	+2.733E+01	-3.716E+01	-5.734E+00	+2.271E+01
7	0.765E+02	1.0	+6.363E+01	+4.229E+00	-3.766E+01	+2.358E+01	+3.894E+00
8	0.765E+02	1.0	+6.885E+01	-1.985E+01	-1.688E+01	+2.886E+01	-2.085E+01
9	0.765E+02	1.0	+7.256E+01	-4.012E+01	+1.383E+01	+4.400E+00	-1.314E+01
10	0.765E+02	1.0	+7.484E+01	-5.349E+01	+3.945E+01	-2.777E+01	+1.782E+01
T	0.759E+03	r=1	+4.793E+02	+1.124E+02	+5.572E+01	+3.479E+01	+1.799E+01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T							
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.410427							
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo 10
1	0.678E+02	1.0	+1.175E+01	+1.127E+01	+1.537E+01	+7.064E+00	+6.587E-01
2	0.800E+02	1.0	+5.098E+00	-2.869E+00	-1.187E+01	-7.747E+00	-9.128E-01
3	0.765E+02	1.0	-1.639E+01	-1.022E+01	+1.712E+00	+7.408E+00	+1.373E+00
4	0.765E+02	1.0	+1.149E+00	+1.215E+01	+7.808E+00	-6.224E+00	-2.004E+00
5	0.765E+02	1.0	+1.633E+01	+7.346E-01	-1.186E+01	+2.307E+00	+2.377E+00
6	0.765E+02	1.0	-3.599E+00	-1.272E+01	+7.177E+00	+2.567E+00	-2.459E+00
7	0.765E+02	1.0	-1.580E+01	+9.107E+00	+2.784E+00	-6.375E+00	+2.240E+00
8	0.765E+02	1.0	+5.929E+00	+5.695E+00	-1.071E+01	+7.538E+00	-1.749E+00
9	0.765E+02	1.0	+1.470E+01	-1.339E+01	+1.069E+01	-5.541E+00	+1.039E+00
10	0.765E+02	1.0	-1.048E+01	+6.451E+00	-4.104E+00	+1.881E+00	-3.184E-01
T	0.759E+03	r=1	+8.693E+00	+6.209E+00	+6.995E+00	+2.879E+00	+2.448E-01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T							

TABLA 5.13. FUERZAS INERCIALES MODALES CORREGIDAS QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "X".

ANÁLISIS DINÁMICO MODAL -- FUERZAS INERCIALES MODALES RQ = 6.5							
ENSAMBLE ZY PARA SUPERPOSICION							
archivos GOTESIZY.A12							
QYTESIZY.GUA							
EXCITACION SISMICA DIRECCION Y, ENSAMBLE PLANO							
As=0.35G S=1.2 RQ=6.5 AMPLIF. MAX=2.5							
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.263128							
GL	masa	Rin	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
1	0.678E+02	1.0	+2.309E+00	+1.099E+01	+1.670E+01	+1.534E+01	+1.130E+01
2	0.800E+02	1.0	+9.040E+00	+3.504E+01	+4.192E+01	+2.779E+01	+1.254E+01
3	0.765E+02	1.0	+1.869E+01	+5.766E+01	+4.638E+01	+1.063E+01	-7.883E+00
4	0.765E+02	1.0	+2.939E+01	+7.117E+01	+3.030E+01	-1.267E+01	-1.294E+01
5	0.765E+02	1.0	+4.121E+01	+7.262E+01	+4.373E-01	-2.303E+01	+1.696E+00
6	0.765E+02	1.0	+5.362E+01	+6.020E+01	-2.818E+01	-1.095E+01	+1.397E+01
7	0.765E+02	1.0	+6.619E+01	+3.485E+01	-4.049E+01	+1.143E+01	+5.526E+00
8	0.765E+02	1.0	+7.860E+01	-2.043E-01	-2.922E+01	+2.180E+01	-1.071E+01
9	0.765E+02	1.0	+9.067E+01	-4.053E+01	+1.846E+00	+8.773E+00	-9.652E+00
10	0.765E+02	1.0	+1.023E+02	-8.149E+01	+4.046E+01	-1.794E+01	+9.012E+00
T	0.759E+03	r=1	+4.921E+02	+2.203E+02	+8.015E+01	+3.117E+01	+1.285E+01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T							
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.263128							
GL	masa	Rin	modo 6	modo 7	modo 8	modo 9	modo10
1	0.678E+02	1.0	+7.077E+00	+6.043E+00	+6.939E+00	+2.794E+00	+2.920E-01
2	0.800E+02	1.0	+2.634E+00	-2.029E+00	-6.032E+00	-3.433E+00	-4.476E-01
3	0.765E+02	1.0	-8.810E+00	-4.795E+00	+1.541E+00	+3.497E+00	+6.863E-01
4	0.765E+02	1.0	+1.921E-01	+6.154E+00	+3.356E+00	-2.910E+00	-9.818E-01
5	0.765E+02	1.0	+8.825E+00	+2.577E-01	-5.677E+00	+1.108E+00	+1.160E+00
6	0.765E+02	1.0	-1.183E+00	-6.326E+00	+3.644E+00	+1.175E+00	-1.197E+00
7	0.765E+02	1.0	-8.770E+00	+4.451E+00	+1.163E+00	-2.950E+00	+1.086E+00
8	0.765E+02	1.0	+1.928E+00	+3.171E+00	-5.155E+00	+3.514E+00	-8.494E-01
9	0.765E+02	1.0	+7.922E+00	-6.423E+00	+4.964E+00	-2.495E+00	+4.918E-01
10	0.765E+02	1.0	-4.611E+00	+2.713E+00	-1.727E+00	+7.733E-01	-1.392E-01
T	0.759E+03	r=1	+5.205E+00	+3.218E+00	+3.015E+00	+1.074E+00	+1.019E-01
O		r=0	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00	+0.000E+00
T							

TABLA 5.14.

FUERZAS INERCIALES MODALES CORREGIDAS QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "Y".

RESUMEN POR GRADO DE LIBERTAD						
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.410427						
GdeL	masa	R infl	Ssimple	Sabs	RCSC	.5 (Sabs+RCSC)
1	0.678E+02	1.0000	+1.189E+02	+1.189E+02	+4.172E+01	+8.034E+01
2	0.800E+02	1.0000	+1.299E+02	+1.767E+02	+7.126E+01	+1.240E+02
3	0.765E+02	1.0000	+9.254E+01	+1.760E+02	+7.379E+01	+1.249E+02
4	0.765E+02	1.0000	+7.762E+01	+1.794E+02	+7.593E+01	+1.277E+02
5	0.765E+02	1.0000	+6.526E+01	+1.789E+02	+7.728E+01	+1.281E+02
6	0.765E+02	1.0000	+5.511E+01	+1.785E+02	+7.851E+01	+1.285E+02
7	0.765E+02	1.0000	+4.964E+01	+1.693E+02	+8.027E+01	+1.248E+02
8	0.765E+02	1.0000	+4.683E+01	+1.869E+02	+8.325E+01	+1.351E+02
9	0.765E+02	1.0000	+4.503E+01	+1.894E+02	+8.831E+01	+1.389E+02
10	0.765E+02	1.0000	+4.427E+01	+2.366E+02	+1.062E+02	+1.714E+02
TOTAL	0.759E+03	EFI:r=1 EFI:r=0	+7.252E+02 +0.000E+00	+7.252E+02	+4.971E+02	+6.112E+02

TABLA 5.15. FUERZAS INERCIALES TOTALES PARA DISEÑO CORREGIDAS QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS CON SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS

RESUMEN POR GRADO DE LIBERTAD						
FUERZAS INERCIALES DE DISEÑO AJUSTADAS POR UN FACTOR DE 1.263128						
GdeL	masa	R infl	Ssimple	Sabs	RCSC	.5 (Sabs+RCSC)
1	0.678E+02	1.0000	+7.978E+01	+7.978E+01	+3.018E+01	+5.498E+01
2	0.800E+02	1.0000	+1.170E+02	+1.409E+02	+6.369E+01	+1.023E+02
3	0.765E+02	1.0000	+1.176E+02	+1.606E+02	+7.821E+01	+1.194E+02
4	0.765E+02	1.0000	+1.111E+02	+1.701E+02	+8.505E+01	+1.276E+02
5	0.765E+02	1.0000	+9.862E+01	+1.560E+02	+8.729E+01	+1.217E+02
6	0.765E+02	1.0000	+8.478E+01	+1.805E+02	+8.756E+01	+1.340E+02
7	0.765E+02	1.0000	+7.249E+01	+1.769E+02	+8.663E+01	+1.318E+02
8	0.765E+02	1.0000	+6.288E+01	+1.551E+02	+8.761E+01	+1.214E+02
9	0.765E+02	1.0000	+5.557E+01	+1.738E+02	+1.009E+02	+1.373E+02
10	0.765E+02	1.0000	+4.936E+01	+2.612E+02	+1.385E+02	+1.998E+02
TOTAL	0.759E+03	EFI:r=1 EFI:r=0	+8.492E+02 +0.000E+00	+8.492E+02	+5.461E+02	+6.976E+02

TABLA 5.16. FUERZAS INERCIALES TOTALES PARA DISEÑO CORREGIDAS QUE ACTÚAN EN LA ESTRUCTURA EN DIRECCIÓN "Y" OBTENIDAS CON SUPERPOSICIÓN MODAL DE RESULTADOS



SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT  
 \*AEDCBM1\*SISMOCOSULT\*  
 Programa AED KBM1 versión 2.0 jul 87 / 2.21 abr 95  
 Proyecto: TESIS  
 Subestructura: 01

COMBINACIÓN DE REACCIONES MODALES PARA EL SISMO  
 archivos QXTESI2X.GUA  
 DXTESI01.AES

MARCO PRUEBA 01 PARA TESIS  
 MODOS DE VIBRACIÓN COMBINADOS 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 forma de combinación: 0.5 RCSC + 0.5 SABS

clave de combinación: X archivado en RXTESI01.AES  
 clave subestructura: G1TESI01.a12G 26-10-95/16:05

REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS

ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
1						
2	+0.000E+00	-1.574E+01	-6.639E+01	+0.000E+00	+1.574E+01	-6.350E+01
3	+0.000E+00	-3.592E+01	-9.430E+01	+0.000E+00	+3.592E+01	-9.430E+01
4	+0.000E+00	-1.574E+01	-6.350E+01	+0.000E+00	+1.574E+01	-6.639E+01
5						
6						
7	+0.000E+00	-1.764E+01	-7.412E+01	+0.000E+00	+1.764E+01	-7.144E+01
8	+0.000E+00	-4.022E+01	-1.056E+02	+0.000E+00	+4.022E+01	-1.056E+02
9	+0.000E+00	-1.764E+01	-7.144E+01	+0.000E+00	+1.764E+01	-7.412E+01
10						
11	+0.000E+00	-1.705E+01	-7.175E+01	+0.000E+00	+1.705E+01	-6.894E+01
12	+0.000E+00	-3.798E+01	-9.969E+01	+0.000E+00	+3.798E+01	-9.969E+01
13	+0.000E+00	-1.705E+01	-6.894E+01	+0.000E+00	+1.705E+01	-7.175E+01
14	+0.000E+00	-1.498E+01	-6.276E+01	+0.000E+00	+1.498E+01	-6.082E+01
15	+0.000E+00	-3.281E+01	-8.614E+01	+0.000E+00	+3.281E+01	-8.614E+01
16	+0.000E+00	-1.498E+01	-6.082E+01	+0.000E+00	+1.498E+01	-6.276E+01
17	+0.000E+00	-1.423E+01	-5.966E+01	+0.000E+00	+1.423E+01	-5.770E+01
18	+0.000E+00	-3.054E+01	-8.015E+01	+0.000E+00	+3.054E+01	-8.015E+01
19	+0.000E+00	-1.423E+01	-5.770E+01	+0.000E+00	+1.423E+01	-5.966E+01
20	+0.000E+00	-1.297E+01	-5.437E+01	+0.000E+00	+1.297E+01	-5.265E+01
21	+0.000E+00	-2.737E+01	-7.185E+01	+0.000E+00	+2.737E+01	-7.185E+01
22	+0.000E+00	-1.297E+01	-5.265E+01	+0.000E+00	+1.297E+01	-5.437E+01
23	+0.000E+00	-1.140E+01	-4.778E+01	+0.000E+00	+1.140E+01	-4.629E+01
24	+0.000E+00	-2.342E+01	-6.149E+01	+0.000E+00	+2.342E+01	-6.149E+01
25	+0.000E+00	-1.140E+01	-4.629E+01	+0.000E+00	+1.140E+01	-4.778E+01
26	+0.000E+00	-9.535E+00	-3.995E+01	+0.000E+00	+9.535E+00	-3.871E+01
27	+0.000E+00	-1.887E+01	-4.952E+01	+0.000E+00	+1.887E+01	-4.952E+01
28	+0.000E+00	-9.535E+00	-3.871E+01	+0.000E+00	+9.535E+00	-3.995E+01

-----continúa

las fuerzas internas del marco 01 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico dinámico continúan en la siguiente página...

Proyecto: TESIS			Subestructura: 01			
REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS						
ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
29	+0.000E+00	-7.188E+00	-3.002E+01	+0.000E+00	+7.188E+00	-2.928E+01
30	+0.000E+00	-1.346E+01	-3.532E+01	+0.000E+00	+1.346E+01	-3.532E+01
31	+0.000E+00	-7.188E+00	-2.928E+01	+0.000E+00	+7.188E+00	-3.002E+01
32	+0.000E+00	-4.699E+00	-1.981E+01	+0.000E+00	+4.699E+00	-1.896E+01
33	+0.000E+00	-7.144E+00	-1.875E+01	+0.000E+00	+7.144E+00	-1.875E+01
34	+0.000E+00	-4.699E+00	-1.896E+01	+0.000E+00	+4.699E+00	-1.981E+01
35	-1.096E+02	+4.572E+01	+1.290E+02	+1.096E+02	-4.572E+01	+1.108E+01
36	-9.753E+01	+2.410E+01	+4.251E+01	+9.753E+01	-2.410E+01	+2.882E+01
37	-8.315E+01	+2.868E+01	+4.767E+01	+8.315E+01	-2.868E+01	+5.115E+01
38	-6.869E+01	+2.013E+01	+2.566E+01	+6.869E+01	-2.013E+01	+3.983E+01
39	-5.547E+01	+2.172E+01	+2.977E+01	+5.547E+01	-2.172E+01	+3.779E+01
40	-4.303E+01	+2.040E+01	+2.461E+01	+4.303E+01	-2.040E+01	+3.416E+01
41	-3.149E+01	+1.814E+01	+2.243E+01	+3.149E+01	-1.814E+01	+3.418E+01
42	-2.097E+01	+1.604E+01	+1.768E+01	+2.097E+01	-1.604E+01	+3.168E+01
43	-1.183E+01	+1.392E+01	+1.221E+01	+1.183E+01	-1.392E+01	+2.986E+01
44	-4.699E+00	+6.859E+00	-8.523E+00	+4.699E+00	-6.859E+00	+1.854E+01
45	-1.198E+02	+6.339E+01	+1.480E+02	+1.198E+02	-6.339E+01	+4.541E+01
46	-1.045E+02	+6.125E+01	+9.359E+01	+1.045E+02	-6.125E+01	+7.928E+01
47	-8.682E+01	+5.545E+01	+9.102E+01	+8.682E+01	-5.545E+01	+9.500E+01
48	-6.934E+01	+5.145E+01	+6.811E+01	+6.934E+01	-5.145E+01	+8.060E+01
49	-5.408E+01	+4.785E+01	+6.523E+01	+5.408E+01	-4.785E+01	+7.069E+01
50	-4.029E+01	+4.524E+01	+5.916E+01	+4.029E+01	-4.524E+01	+6.800E+01
51	-2.807E+01	+3.923E+01	+5.139E+01	+2.807E+01	-3.923E+01	+6.244E+01
52	-1.743E+01	+3.404E+01	+4.221E+01	+1.743E+01	-3.404E+01	+5.529E+01
53	-8.787E+00	+2.699E+01	+3.045E+01	+8.787E+00	-2.699E+01	+4.639E+01
54	-2.651E+00	+1.766E+01	+1.586E+01	+2.651E+00	-1.766E+01	+3.407E+01
55	+1.198E+02	+6.339E+01	+1.480E+02	-1.198E+02	-6.339E+01	+4.541E+01
56	+1.045E+02	+6.125E+01	+9.359E+01	-1.045E+02	-6.125E+01	+7.928E+01
57	+8.682E+01	+5.545E+01	+9.102E+01	-8.682E+01	-5.545E+01	+9.500E+01
58	+6.934E+01	+5.145E+01	+6.811E+01	-6.934E+01	-5.145E+01	+8.060E+01
59	+5.408E+01	+4.785E+01	+6.523E+01	-5.408E+01	-4.785E+01	+7.069E+01
60	+4.029E+01	+4.524E+01	+5.916E+01	-4.029E+01	-4.524E+01	+6.800E+01
61	+2.807E+01	+3.923E+01	+5.139E+01	-2.807E+01	-3.923E+01	+6.244E+01
62	+1.743E+01	+3.404E+01	+4.221E+01	-1.743E+01	-3.404E+01	+5.529E+01
63	+8.787E+00	+2.699E+01	+3.045E+01	-8.787E+00	-2.699E+01	+4.639E+01
64	+2.651E+00	+1.766E+01	+1.586E+01	-2.651E+00	-1.766E+01	+3.407E+01
65	+1.096E+02	+4.572E+01	+1.290E+02	-1.096E+02	-4.572E+01	+1.108E+01
66	+9.753E+01	+2.410E+01	+4.251E+01	-9.753E+01	-2.410E+01	+2.882E+01
67	+8.315E+01	+2.868E+01	+4.767E+01	-8.315E+01	-2.868E+01	+5.115E+01
68	+6.869E+01	+2.013E+01	+2.566E+01	-6.869E+01	-2.013E+01	+3.983E+01
69	+5.547E+01	+2.172E+01	+2.977E+01	-5.547E+01	-2.172E+01	+3.779E+01
70	+4.303E+01	+2.040E+01	+2.461E+01	-4.303E+01	-2.040E+01	+3.416E+01
71	+3.149E+01	+1.813E+01	+2.243E+01	-3.149E+01	-1.813E+01	+3.418E+01
72	+2.097E+01	+1.604E+01	+1.768E+01	-2.097E+01	-1.604E+01	+3.168E+01
73	+1.183E+01	+1.392E+01	+1.221E+01	-1.183E+01	-1.392E+01	+2.986E+01
74	+4.698E+00	+6.859E+00	-8.523E+00	-4.698E+00	-6.859E+00	+1.853E+01

TABLA 5.17. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO 01 EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT\*  
 AED CBM1\*SISMOCOSULT\*

Programa AED KBM1 versión 2.0 jul 87 / 2.21 abr 95

Proyecto: TESIS

Subestructura: 02

COMBINACIÓN DE REACCIONES MODALES PARA EL SISMO

archivos QXTESIZX.GUA

DXTESI02.AES

MARCO PRUEBA 02 PARA TESIS

MODOS DE VIBRACIÓN COMBINADOS 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

forma de combinación: 0.5 RCSC + 0.5 SABS

clave de combinación: X archivado en RXTESI02.AES

clave subestructura: G1TESI02.a12G 26-10-95/16:05

REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS

ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
2	+0.000E+00	-1.082E+01	-4.924E+01	+0.000E+00	+1.082E+01	-4.381E+01
3	+0.000E+00	-2.053E+01	-5.747E+01	+0.000E+00	+2.053E+01	-5.747E+01
4	+0.000E+00	-1.082E+01	-4.381E+01	+0.000E+00	+1.082E+01	-4.924E+01
5						
6						
7	+0.000E+00	-1.235E+01	-5.584E+01	+0.000E+00	+1.235E+01	-5.036E+01
8	+0.000E+00	-2.377E+01	-6.655E+01	+0.000E+00	+2.377E+01	-6.655E+01
9	+0.000E+00	-1.235E+01	-5.036E+01	+0.000E+00	+1.235E+01	-5.584E+01
10						
11	+0.000E+00	-1.180E+01	-5.345E+01	+0.000E+00	+1.180E+01	-4.803E+01
12	+0.000E+00	-2.223E+01	-6.224E+01	+0.000E+00	+2.223E+01	-6.224E+01
13	+0.000E+00	-1.180E+01	-4.803E+01	+0.000E+00	+1.180E+01	-5.345E+01
14	+0.000E+00	-1.073E+01	-4.819E+01	+0.000E+00	+1.073E+01	-4.404E+01
15	+0.000E+00	-2.037E+01	-5.704E+01	+0.000E+00	+2.037E+01	-5.704E+01
16	+0.000E+00	-1.073E+01	-4.404E+01	+0.000E+00	+1.073E+01	-4.819E+01
17	+0.000E+00	-1.010E+01	-4.544E+01	+0.000E+00	+1.010E+01	-4.144E+01
18	+0.000E+00	-1.886E+01	-5.280E+01	+0.000E+00	+1.886E+01	-5.280E+01
19	+0.000E+00	-1.010E+01	-4.144E+01	+0.000E+00	+1.010E+01	-4.544E+01
20	+0.000E+00	-9.219E+00	-4.144E+01	+0.000E+00	+9.219E+00	-3.785E+01
21	+0.000E+00	-1.700E+01	-4.759E+01	+0.000E+00	+1.700E+01	-4.759E+01
22	+0.000E+00	-9.219E+00	-3.785E+01	+0.000E+00	+9.219E+00	-4.144E+01
23	+0.000E+00	-8.094E+00	-3.636E+01	+0.000E+00	+8.094E+00	-3.325E+01
24	+0.000E+00	-1.464E+01	-4.098E+01	+0.000E+00	+1.464E+01	-4.098E+01
25	+0.000E+00	-8.094E+00	-3.325E+01	+0.000E+00	+8.094E+00	-3.636E+01
26	+0.000E+00	-6.742E+00	-3.026E+01	+0.000E+00	+6.742E+00	-2.772E+01
27	+0.000E+00	-1.188E+01	-3.327E+01	+0.000E+00	+1.188E+01	-3.327E+01
28	+0.000E+00	-6.742E+00	-2.772E+01	+0.000E+00	+6.742E+00	-3.026E+01

-----continúa

las fuerzas internas del marco 02 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico dinámico continúan en la siguiente página...

ALFREDO JO LEÓN CHANG

Proyecto: TESIS			Subestructura: 02			
REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTO						
ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
29	+0.000E+00	-5.165E+00	-2.312E+01	+0.000E+00	+5.165E+00	-2.131E+01
30	+0.000E+00	-8.792E+00	-2.462E+01	+0.000E+00	+8.792E+00	-2.462E+01
31	+0.000E+00	-5.165E+00	-2.131E+01	+0.000E+00	+5.165E+00	-2.312E+01
32	+0.000E+00	-2.955E+00	-1.337E+01	+0.000E+00	+2.955E+00	-1.205E+01
33	+0.000E+00	-4.014E+00	-1.124E+01	+0.000E+00	+4.014E+00	-1.124E+01
34	+0.000E+00	-2.955E+00	-1.205E+01	+0.000E+00	+2.955E+00	-1.337E+01
35	-7.705E+01	+1.723E+01	+3.860E+01	+7.705E+01	-1.723E+01	+1.395E+01
36	-6.873E+01	+1.785E+01	+2.671E+01	+6.873E+01	-1.785E+01	+2.360E+01
37	-5.865E+01	+1.580E+01	+2.595E+01	+5.865E+01	-1.580E+01	+2.689E+01
38	-4.862E+01	+1.552E+01	+2.074E+01	+4.862E+01	-1.552E+01	+2.376E+01
39	-3.913E+01	+1.453E+01	+1.987E+01	+3.913E+01	-1.453E+01	+2.119E+01
40	-3.028E+01	+1.380E+01	+1.830E+01	+3.028E+01	-1.380E+01	+2.045E+01
41	-2.205E+01	+1.210E+01	+1.608E+01	+2.205E+01	-1.210E+01	+1.873E+01
42	-1.456E+01	+1.064E+01	+1.352E+01	+1.456E+01	-1.064E+01	+1.673E+01
43	-8.088E+00	+8.518E+00	+1.014E+01	+8.088E+00	-8.518E+00	+1.393E+01
44	-2.955E+00	+6.224E+00	+6.302E+00	+2.955E+00	-6.224E+00	+1.116E+01
45	-6.342E+01	+2.644E+01	+4.890E+01	+6.342E+01	-2.644E+01	+3.176E+01
46	-5.597E+01	+3.859E+01	+5.563E+01	+5.597E+01	-3.859E+01	+5.256E+01
47	-4.695E+01	+3.038E+01	+4.994E+01	+4.695E+01	-3.038E+01	+5.065E+01
48	-3.812E+01	+3.350E+01	+4.595E+01	+3.812E+01	-3.350E+01	+4.785E+01
49	-2.977E+01	+3.004E+01	+4.138E+01	+2.977E+01	-3.004E+01	+4.274E+01
50	-2.223E+01	+2.835E+01	+3.893E+01	+2.223E+01	-2.835E+01	+4.048E+01
51	-1.549E+01	+2.462E+01	+3.373E+01	+1.549E+01	-2.462E+01	+3.576E+01
52	-9.576E+00	+2.129E+01	+2.853E+01	+9.576E+00	-2.129E+01	+3.110E+01
53	-4.712E+00	+1.670E+01	+2.209E+01	+4.712E+00	-1.670E+01	+2.470E+01
54	-1.138E+00	+1.218E+01	+1.496E+01	+1.138E+00	-1.218E+01	+1.915E+01
55	+6.342E+01	+2.644E+01	+4.890E+01	-6.342E+01	-2.644E+01	+3.176E+01
56	+5.597E+01	+3.859E+01	+5.563E+01	-5.597E+01	-3.859E+01	+5.256E+01
57	+4.695E+01	+3.038E+01	+4.994E+01	-4.695E+01	-3.038E+01	+5.065E+01
58	+3.812E+01	+3.350E+01	+4.595E+01	-3.812E+01	-3.350E+01	+4.785E+01
59	+2.977E+01	+3.004E+01	+4.138E+01	-2.977E+01	-3.004E+01	+4.274E+01
60	+2.223E+01	+2.835E+01	+3.893E+01	-2.223E+01	-2.835E+01	+4.048E+01
61	+1.549E+01	+2.462E+01	+3.373E+01	-1.549E+01	-2.462E+01	+3.576E+01
62	+9.576E+00	+2.129E+01	+2.853E+01	-9.576E+00	-2.129E+01	+3.110E+01
63	+4.712E+00	+1.670E+01	+2.209E+01	-4.712E+00	-1.670E+01	+2.470E+01
64	+1.138E+00	+1.218E+01	+1.496E+01	-1.138E+00	-1.218E+01	+1.915E+01
65	+7.705E+01	+1.723E+01	+3.860E+01	-7.705E+01	-1.723E+01	+1.395E+01
66	+6.873E+01	+1.785E+01	+2.671E+01	-6.873E+01	-1.785E+01	+2.360E+01
67	+5.865E+01	+1.580E+01	+2.595E+01	-5.865E+01	-1.580E+01	+2.689E+01
68	+4.862E+01	+1.552E+01	+2.074E+01	-4.862E+01	-1.552E+01	+2.376E+01
69	+3.913E+01	+1.453E+01	+1.987E+01	-3.913E+01	-1.453E+01	+2.119E+01
70	+3.028E+01	+1.380E+01	+1.830E+01	-3.028E+01	-1.380E+01	+2.045E+01
71	+2.205E+01	+1.210E+01	+1.608E+01	-2.205E+01	-1.210E+01	+1.873E+01
72	+1.456E+01	+1.064E+01	+1.352E+01	-1.456E+01	-1.064E+01	+1.673E+01
73	+8.088E+00	+8.518E+00	+1.014E+01	-8.088E+00	-8.518E+00	+1.393E+01
74	+2.955E+00	+6.224E+00	+6.302E+00	-2.955E+00	-6.224E+00	+1.116E+01

TABLA 5.18. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO 02 EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT\*AED CBM1\*SISMOCONSULT  
 \*AED CBM1\*SISMOCOSULT\*  
 Programa AED KBM1 versión 2.0 jul 87 / 2.21 abr 95

Proyecto: TESIS  
 Subestructura: AA

COMBINACIÓN DE REACCIONES MODALES PARA EL SISMO  
 archivos QYTESIZY.GUA  
 DYTESIAA.AES

MARCO PRUEBA AA PARA TESIS  
 MODOS DE VIBRACIÓN COMBINADOS 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 forma de combinación: 0.5 RCSC + 0.5 SABS

clave de combinacion: Y archivado en RYTESIAA.AES  
 clave subestructura: G1TESIAA.a12G 26-10-95/16:05

REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS

ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
1						
2	+0.000E+00	-2.590E+00	-1.128E+01	+0.000E+00	+2.590E+00	-1.106E+01
3	+0.000E+00	-2.590E+00	-1.106E+01	+0.000E+00	+2.590E+00	-1.128E+01
4						
5						
6	+0.000E+00	-4.305E+00	-1.854E+01	+0.000E+00	+4.305E+00	-1.859E+01
7	+0.000E+00	-4.305E+00	-1.859E+01	+0.000E+00	+4.305E+00	-1.854E+01
8						
9	+0.000E+00	-5.614E+00	-2.410E+01	+0.000E+00	+5.614E+00	-2.432E+01
10	+0.000E+00	-5.614E+00	-2.432E+01	+0.000E+00	+5.614E+00	-2.410E+01
11	+0.000E+00	-6.333E+00	-2.720E+01	+0.000E+00	+6.333E+00	-2.742E+01
12	+0.000E+00	-6.333E+00	-2.742E+01	+0.000E+00	+6.333E+00	-2.720E+01
13	+0.000E+00	-6.757E+00	-2.896E+01	+0.000E+00	+6.757E+00	-2.932E+01
14	+0.000E+00	-6.757E+00	-2.932E+01	+0.000E+00	+6.757E+00	-2.896E+01
15	+0.000E+00	-7.138E+00	-3.059E+01	+0.000E+00	+7.138E+00	-3.098E+01
16	+0.000E+00	-7.138E+00	-3.098E+01	+0.000E+00	+7.138E+00	-3.059E+01
17	+0.000E+00	-7.268E+00	-3.114E+01	+0.000E+00	+7.268E+00	-3.155E+01

-----continúa

las fuerzas internas del marco AA en dirección "Y" obtenidas del análisis sísmico dinámico continúan en la siguiente página...

ALFREDO JO LEÓN CHANG

Proyecto: TESIS						
Subestructura: AA						
REACCIONES COMBINADAS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS						
ele	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
18	+0.000E+00	-7.268E+00	-3.155E+01	+0.000E+00	+7.268E+00	-3.114E+01
19	+0.000E+00	-7.246E+00	-3.097E+01	+0.000E+00	+7.246E+00	-3.152E+01
20	+0.000E+00	-7.246E+00	-3.152E+01	+0.000E+00	+7.246E+00	-3.097E+01
21	+0.000E+00	-7.271E+00	-3.123E+01	+0.000E+00	+7.271E+00	-3.148E+01
22	+0.000E+00	-7.271E+00	-3.148E+01	+0.000E+00	+7.271E+00	-3.123E+01
23	+0.000E+00	-6.696E+00	-2.811E+01	+0.000E+00	+6.696E+00	-2.964E+01
24	+0.000E+00	-6.696E+00	-2.964E+01	+0.000E+00	+6.696E+00	-2.811E+01
25	-5.884E+01	+3.158E+00	+1.312E+01	+5.884E+01	-3.158E+00	-4.062E+00
26	-5.675E+01	+5.663E+00	+1.333E+01	+5.675E+01	-5.663E+00	+2.754E+00
27	-5.307E+01	+6.230E+00	+1.391E+01	+5.307E+01	-6.230E+00	+6.912E+00
28	-4.801E+01	+8.880E+00	+1.496E+01	+4.801E+01	-8.880E+00	+1.012E+01
29	-4.203E+01	+9.059E+00	+1.471E+01	+4.203E+01	-9.059E+00	+1.185E+01
30	-3.543E+01	+9.738E+00	+1.494E+01	+3.543E+01	-9.738E+00	+1.300E+01
31	-2.843E+01	+9.842E+00	+1.448E+01	+2.843E+01	-9.842E+00	+1.333E+01
32	-2.120E+01	+1.034E+01	+1.431E+01	+2.120E+01	-1.034E+01	+1.497E+01
33	-1.397E+01	+8.447E+00	+1.255E+01	+1.397E+01	-8.447E+00	+1.124E+01
34	-6.696E+00	+1.423E+01	+1.564E+01	+6.696E+00	-1.423E+01	+2.422E+01
35	-3.315E-06	+1.681E+02	+2.127E+03	+3.315E-06	-1.681E+02	-1.563E+03
36	-3.231E-06	+1.547E+02	+1.600E+03	+3.231E-06	-1.547E+02	-1.131E+03
37	-3.719E-06	+1.403E+02	+1.193E+03	+3.719E-06	-1.403E+02	-8.307E+02
38	-4.174E-06	+1.222E+02	+9.045E+02	+4.174E-06	-1.222E+02	-6.224E+02
39	-3.914E-06	+1.073E+02	+7.065E+02	+3.914E-06	-1.073E+02	-4.337E+02
40	-4.547E-06	+9.347E+01	+5.168E+02	+4.547E-06	-9.347E+01	-3.098E+02
41	-4.374E-06	+8.592E+01	+3.820E+02	+4.374E-06	-8.592E+01	+3.001E+02
42	-1.959E-06	+7.225E+01	+2.571E+02	+1.959E-06	-7.225E+01	+2.858E+02
43	-3.668E-06	+6.045E+01	-2.184E+02	+3.668E-06	-6.045E+01	+2.265E+02
44	+1.274E-06	+2.656E+01	-1.452E+02	-1.274E-06	-2.656E+01	+9.946E+01
45	+5.884E+01	+3.158E+00	+1.312E+01	-5.884E+01	-3.158E+00	-4.062E+00
46	+5.675E+01	+5.663E+00	+1.333E+01	-5.675E+01	-5.663E+00	+2.754E+00
47	+5.307E+01	+6.230E+00	+1.391E+01	-5.307E+01	-6.230E+00	+6.912E+00
48	+4.801E+01	+8.880E+00	+1.496E+01	-4.801E+01	-8.880E+00	+1.012E+01
49	+4.203E+01	+9.059E+00	+1.471E+01	-4.203E+01	-9.059E+00	+1.185E+01
50	+3.543E+01	+9.738E+00	+1.494E+01	-3.543E+01	-9.738E+00	+1.300E+01
51	+2.843E+01	+9.842E+00	+1.448E+01	-2.843E+01	-9.842E+00	+1.333E+01
52	+2.120E+01	+1.034E+01	+1.431E+01	-2.120E+01	-1.034E+01	+1.497E+01
53	+1.397E+01	+8.447E+00	+1.255E+01	-1.397E+01	-8.447E+00	+1.124E+01
54	+6.697E+00	+1.423E+01	+1.564E+01	-6.697E+00	-1.423E+01	+2.422E+01

TABLA 5.19. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO AA EN DIRECCIÓN "Y" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO DINÁMICO

## 5.12. ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

Con el propósito de observar la importancia de un método de análisis dinámico se analizará la estructura con el método estático equivalente, y se compararán los resultados.

Se utilizará el método estático equivalente propuesto por la Propuesta de Normas sismo-resistentes para la República de Guatemala, ver referencia 8 para más detalle.

El corte basal propuesto por la norma recomendada para la República de Guatemala es:

$$V = C_s W$$

de donde el coeficiente sísmico de diseño es:

$$C_s = S_a [T] / S$$

en el cual la respuesta sísmica máxima de un oscilador elástico simple está dada por:

$$S_a [T] = A_0 \times D(T)$$

y en ésta la amplificación dinámica está dada por:

$$D(T) = 2.5 (T_B/T)^{0.67}$$

ya que en este caso los períodos empíricos de vibración son mayores que el valor de  $T_B=0.52$  propuesto por la norma recomendada.

Se utilizarán los parámetros  $W=7450$  Ton,  $A_0=0.35g$ ,  $R=6.0$  para la dirección "X" y  $R=6.5$  para la dirección "Y" y los parámetros de  $T=0.88$  seg para la dirección "X" y  $T=0.64$  seg para la dirección "Y", los cuales son los mismos utilizados en el análisis sísmico dinámico.

Calculando los cortes basales para la estructura se tiene:

### En dirección "X"

$$\begin{aligned} D(T) &= 2.5 (0.52/0.88)^{0.67} = 1.76 \\ S_a &= 0.35 (1.76) = 0.616 \\ C_s &= 0.616/6.0 = 0.102 \\ V &= 0.102 (7450) = 759.9 \text{ Ton} \end{aligned}$$

### En dirección "Y"

$$\begin{aligned} D(T) &= 2.5 (0.52/0.64)^{0.67} = 2.17 \\ S_a &= 0.35 (2.17) = 0.759 \\ C_s &= 0.759/6.5 = 0.117 \\ V &= 0.117 (7450) = 871.65 \text{ Ton} \end{aligned}$$

Con los cortes basales obtenidos en cada dirección se procede a distribuir el mismo a lo alto del edificio para obtener las fuerzas por nivel.

La distribución de fuerzas a los alto de la estructura es la presentada en la tabla 5.20. La distribución de fuerzas por nivel y por marco se hará en base a la forma propuesta por las normas recomendadas para Guatemala, ver ref. 8.

NIVEL	$W_i$	$h_i$	$W_i * h_i$	$F_x$	$F_y$
1	664.14	3.50	2324.49	11.99	13.75
2	784.80	7.00	5493.60	28.34	32.51
3	749.97	11.00	8249.67	42.55	48.81
4	749.97	14.50	10874.56	56.10	64.34
5	749.97	18.00	13499.46	69.64	79.88
6	749.97	21.50	16124.35	83.17	95.40
7	749.97	25.00	18749.25	96.72	110.94
8	749.97	28.50	21374.14	110.25	126.47
9	749.97	32.00	23999.04	123.80	142.00
10	749.97	35.50	26623.93	137.34	157.53

$$\Sigma W_i * h_i = 147312.49$$

TABLA 5.20. FUERZAS POR NIVEL EN CADA DIRECCIÓN DE LA ESTRUCTURA OBTENIDAS POR MEDIO DEL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

Las fuerzas por marco obtenidas de las fuerzas por nivel son las presentadas en la tabla 5.21 y están dadas en toneladas. Se presentan los datos de los marcos 01 y 02 en dirección "X" y marco AA en dirección "Y"

NIVEL	MARCO 01	MARCO 02	MARCO AA
1	2.62	3.37	3.14
2	6.02	8.16	7.20
3	9.04	12.24	10.92
4	11.96	16.08	14.38
5	14.88	19.94	17.84
6	17.74	23.82	21.32
7	20.64	27.70	24.78
8	23.54	31.58	28.34
9	26.44	35.46	31.72
10	29.32	39.34	35.18

TABLA 5.21. FUERZAS POR MARCO OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE



Las fuerzas internas obtenidas del análisis sísmico estático equivalente para los marcos 01, 02 y AA son presentados en las tablas 5.22, 5.23 y 5.24.

<b>Proyecto: TESIS</b>						
<b>Subestructura: 01      clave : G1TESI01.a12G 26-10-95/16:05</b>						
<b>MARCO PRUEBA 01 PARA TESIS</b>						
<b>COMBINACIÓN DE CARGAS 'S': S = S</b>						
combinación de cargas grabada en archivo PSTESI01.AES						
<b>factor * patrón</b>						
-----						
+1.00 S						
-----						
patrón S: CARGA SÍSMICA EQUIVALENTE						
RSTESI01.AESG1TESI01.a12G 26-10-95/16:05JSTESI01.AES						
<b>REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -</b>						
elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
1						
2	+0.000E+00	-1.385E+01	-5.836E+01	+0.000E+00	+1.385E+01	-5.593E+01
3	+0.000E+00	-3.144E+01	-8.254E+01	+0.000E+00	+3.144E+01	-8.254E+01
4	+0.000E+00	-1.385E+01	-5.593E+01	+0.000E+00	+1.385E+01	-5.836E+01
5						
6						
7	+0.000E+00	-1.708E+01	-7.172E+01	+0.000E+00	+1.708E+01	-6.916E+01
8	+0.000E+00	-3.858E+01	-1.013E+02	+0.000E+00	+3.858E+01	-1.013E+02
9	+0.000E+00	-1.708E+01	-6.916E+01	+0.000E+00	+1.708E+01	-7.172E+01
10						
11	+0.000E+00	-1.717E+01	-7.221E+01	+0.000E+00	+1.717E+01	-6.947E+01
12	+0.000E+00	-3.784E+01	-9.934E+01	+0.000E+00	+3.784E+01	-9.934E+01
13	+0.000E+00	-1.717E+01	-6.947E+01	+0.000E+00	+1.717E+01	-7.221E+01
14	+0.000E+00	-1.564E+01	-6.551E+01	+0.000E+00	+1.564E+01	-6.353E+01
15	+0.000E+00	-3.420E+01	-8.978E+01	+0.000E+00	+3.420E+01	-8.978E+01
16	+0.000E+00	-1.564E+01	-6.353E+01	+0.000E+00	+1.564E+01	-6.551E+01
17	+0.000E+00	-1.415E+01	-5.931E+01	+0.000E+00	+1.415E+01	-5.742E+01
18	+0.000E+00	-3.015E+01	-7.914E+01	+0.000E+00	+3.015E+01	-7.914E+01
19	+0.000E+00	-1.415E+01	-5.742E+01	+0.000E+00	+1.415E+01	-5.931E+01
20	+0.000E+00	-1.241E+01	-5.197E+01	+0.000E+00	+1.241E+01	-5.038E+01
21	+0.000E+00	-2.580E+01	-6.773E+01	+0.000E+00	+2.580E+01	-6.773E+01

-----continúa

las fuerzas internas del marco 01 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente continúan en la siguiente página...

REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -						
elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
22	+0.000E+00	-1.241E+01	-5.038E+01	+0.000E+00	+1.241E+01	-5.197E+01
23	+0.000E+00	-1.037E+01	-4.341E+01	+0.000E+00	+1.037E+01	-4.212E+01
24	+0.000E+00	-2.081E+01	-5.463E+01	+0.000E+00	+2.081E+01	-5.463E+01
25	+0.000E+00	-1.037E+01	-4.212E+01	+0.000E+00	+1.037E+01	-4.341E+01
26	+0.000E+00	-8.052E+00	-3.370E+01	+0.000E+00	+8.052E+00	-3.274E+01
27	+0.000E+00	-1.522E+01	-3.996E+01	+0.000E+00	+1.522E+01	-3.996E+01
28	+0.000E+00	-8.052E+00	-3.274E+01	+0.000E+00	+8.052E+00	-3.370E+01
29	+0.000E+00	-5.578E+00	-2.326E+01	+0.000E+00	+5.578E+00	-2.276E+01
30	+0.000E+00	-9.410E+00	-2.470E+01	+0.000E+00	+9.410E+00	-2.470E+01
31	+0.000E+00	-5.578E+00	-2.276E+01	+0.000E+00	+5.578E+00	-2.326E+01
32	+0.000E+00	-3.453E+00	-1.447E+01	+0.000E+00	+3.453E+00	-1.402E+01
33	+0.000E+00	-4.109E+00	-1.079E+01	+0.000E+00	+4.109E+00	-1.079E+01
34	+0.000E+00	-3.453E+00	-1.402E+01	+0.000E+00	+3.453E+00	-1.447E+01
35	-1.178E+02	+3.313E+01	+1.026E+02	+1.178E+02	-3.313E+01	-1.554E+00
36	-1.039E+02	+2.283E+01	+4.449E+01	+1.039E+02	-2.283E+01	+1.944E+01
37	-8.682E+01	+2.520E+01	+4.211E+01	+8.682E+01	-2.520E+01	+4.105E+01
38	-6.965E+01	+2.017E+01	+2.122E+01	+6.965E+01	-2.017E+01	+3.526E+01
39	-5.401E+01	+1.993E+01	+2.206E+01	+5.401E+01	-1.993E+01	+3.374E+01
40	-3.986E+01	+1.760E+01	+1.751E+01	+3.986E+01	-1.760E+01	+3.178E+01
41	-2.745E+01	+1.525E+01	+1.310E+01	+2.745E+01	-1.525E+01	+2.960E+01
42	-1.708E+01	+1.223E+01	+7.778E+00	+1.708E+01	-1.223E+01	+2.647E+01
43	-9.032E+00	+9.029E+00	+2.487E+00	+9.032E+00	-9.029E+00	+2.279E+01
44	-3.453E+00	+4.076E+00	-2.518E+00	+3.453E+00	-4.076E+00	+1.393E+01
45	-1.298E+02	+4.797E+01	+1.186E+02	+1.298E+02	-4.797E+01	+2.775E+01
46	-1.122E+02	+5.696E+01	+9.188E+01	+1.122E+02	-5.696E+01	+6.760E+01
47	-9.073E+01	+5.158E+01	+8.519E+01	+9.073E+01	-5.158E+01	+8.504E+01
48	-7.006E+01	+5.209E+01	+6.818E+01	+7.006E+01	-5.209E+01	+7.767E+01
49	-5.150E+01	+4.635E+01	+5.930E+01	+5.150E+01	-4.635E+01	+7.048E+01
50	-3.550E+01	+4.124E+01	+5.152E+01	+3.550E+01	-4.124E+01	+6.394E+01
51	-2.210E+01	+3.472E+01	+4.126E+01	+2.210E+01	-3.472E+01	+5.596E+01
52	-1.166E+01	+2.742E+01	+3.001E+01	+1.166E+01	-2.742E+01	+4.677E+01
53	-4.488E+00	+1.885E+01	+1.760E+01	+4.488E+00	-1.885E+01	+3.519E+01
54	-6.561E-01	+1.058E+01	+6.757E+00	+6.561E-01	-1.058E+01	+2.288E+01
55	+1.298E+02	+4.797E+01	+1.186E+02	-1.298E+02	-4.797E+01	+2.775E+01
56	+1.122E+02	+5.696E+01	+9.188E+01	-1.122E+02	-5.696E+01	+6.760E+01
57	+9.073E+01	+5.158E+01	+8.519E+01	-9.073E+01	-5.158E+01	+8.504E+01
58	+7.006E+01	+5.209E+01	+6.818E+01	-7.006E+01	-5.209E+01	+7.767E+01
59	+5.150E+01	+4.635E+01	+5.930E+01	-5.150E+01	-4.635E+01	+7.048E+01
60	+3.550E+01	+4.124E+01	+5.152E+01	-3.550E+01	-4.124E+01	+6.394E+01
61	+2.210E+01	+3.472E+01	+4.126E+01	-2.210E+01	-3.472E+01	+5.596E+01
62	+1.166E+01	+2.742E+01	+3.001E+01	-1.166E+01	-2.742E+01	+4.677E+01
63	+4.487E+00	+1.885E+01	+1.760E+01	-4.487E+00	-1.885E+01	+3.519E+01
64	+6.561E-01	+1.058E+01	+6.757E+00	-6.561E-01	-1.058E+01	+2.288E+01
65	+1.178E+02	+3.313E+01	+1.026E+02	-1.178E+02	-3.313E+01	-1.554E+00
66	+1.039E+02	+2.283E+01	+4.449E+01	-1.039E+02	-2.283E+01	+1.944E+01
67	+8.682E+01	+2.520E+01	+4.211E+01	-8.682E+01	-2.520E+01	+4.105E+01
68	+6.965E+01	+2.017E+01	+2.122E+01	-6.965E+01	-2.017E+01	+3.526E+01
69	+5.401E+01	+1.993E+01	+2.206E+01	-5.401E+01	-1.993E+01	+3.374E+01
70	+3.986E+01	+1.760E+01	+1.751E+01	-3.986E+01	-1.760E+01	+3.178E+01
71	+2.745E+01	+1.525E+01	+1.310E+01	-2.745E+01	-1.525E+01	+2.960E+01
72	+1.708E+01	+1.223E+01	+7.778E+00	-1.708E+01	-1.223E+01	+2.647E+01
73	+9.032E+00	+9.029E+00	+2.487E+00	-9.032E+00	-9.029E+00	+2.279E+01
74	+3.453E+00	+4.076E+00	-2.518E+00	-3.453E+00	-4.076E+00	+1.393E+01

TABLA 5.22. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO 01 EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS SÍSMICO DE EDIFICIOS POR MÉTODOS DINÁMICOS

Proyecto: TESIS						
Subestructura: 02 clave : G1TESI02.a12G 26-10-95/16:05						
MARCO PRUEBA 02 PARA TESIS						
COMBINACIÓN DE CARGAS 'S': S = S						
combinación de cargas grabada en archivo PSTESI02.AES						
factor * patrón						
-----						
+1.00 S						
-----						
patrón S: CARGA SÍSMICA EQUIVALENTE						
RSTESI02.AESG1TESI02.a12G 26-10-95/16:05JSTESI02.AES						
REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -						
elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
1						
2	+0.000E+00	-2.390E+01	-1.088E+02	+0.000E+00	+2.390E+01	-9.672E+01
3	+0.000E+00	-4.514E+01	-1.264E+02	+0.000E+00	+4.514E+01	-1.264E+02
4	+0.000E+00	-2.390E+01	-9.672E+01	+0.000E+00	+2.390E+01	-1.088E+02
5						
6						
7	+0.000E+00	-2.622E+01	-1.183E+02	+0.000E+00	+2.622E+01	-1.072E+02
8	+0.000E+00	-5.061E+01	-1.417E+02	+0.000E+00	+5.061E+01	-1.417E+02
9	+0.000E+00	-2.622E+01	-1.072E+02	+0.000E+00	+2.622E+01	-1.183E+02
10						
11	+0.000E+00	-2.542E+01	-1.151E+02	+0.000E+00	+2.542E+01	-1.035E+02
12	+0.000E+00	-4.752E+01	-1.331E+02	+0.000E+00	+4.752E+01	-1.331E+02
13	+0.000E+00	-2.542E+01	-1.035E+02	+0.000E+00	+2.542E+01	-1.151E+02
14	+0.000E+00	-2.230E+01	-9.999E+01	+0.000E+00	+2.230E+01	-9.175E+01
15	+0.000E+00	-4.252E+01	-1.191E+02	+0.000E+00	+4.252E+01	-1.191E+02
16	+0.000E+00	-2.230E+01	-9.175E+01	+0.000E+00	+2.230E+01	-9.999E+01
17	+0.000E+00	-2.018E+01	-9.071E+01	+0.000E+00	+2.018E+01	-8.281E+01
18	+0.000E+00	-3.745E+01	-1.049E+02	+0.000E+00	+3.745E+01	-1.049E+02
19	+0.000E+00	-2.018E+01	-8.281E+01	+0.000E+00	+2.018E+01	-9.071E+01
20	+0.000E+00	-1.765E+01	-7.925E+01	+0.000E+00	+1.765E+01	-7.257E+01
21	+0.000E+00	-3.229E+01	-9.042E+01	+0.000E+00	+3.229E+01	-9.042E+01
22	+0.000E+00	-1.765E+01	-7.257E+01	+0.000E+00	+1.765E+01	-7.925E+01
23	+0.000E+00	-1.469E+01	-6.590E+01	+0.000E+00	+1.469E+01	-6.045E+01
24	+0.000E+00	-2.620E+01	-7.335E+01	+0.000E+00	+2.620E+01	-7.335E+01
25	+0.000E+00	-1.469E+01	-6.045E+01	+0.000E+00	+1.469E+01	-6.590E+01
26	+0.000E+00	-1.127E+01	-5.048E+01	+0.000E+00	+1.127E+01	-4.646E+01
27	+0.000E+00	-1.926E+01	-5.393E+01	+0.000E+00	+1.926E+01	-5.393E+01
28	+0.000E+00	-1.127E+01	-4.646E+01	+0.000E+00	+1.127E+01	-5.048E+01

las fuerzas internas del marco 02 en dirección "X" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente continúan en la siguiente página...

REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -						
elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
29	+0.000E+00	-7.434E+00	-3.314E+01	+0.000E+00	+7.434E+00	-3.080E+01
30	+0.000E+00	-1.161E+01	-3.252E+01	+0.000E+00	+1.161E+01	-3.252E+01
31	+0.000E+00	-7.434E+00	-3.080E+01	+0.000E+00	+7.434E+00	-3.314E+01
32	+0.000E+00	-3.649E+00	-1.618E+01	+0.000E+00	+3.649E+00	-1.520E+01
33	+0.000E+00	-3.839E+00	-1.075E+01	+0.000E+00	+3.839E+00	-1.075E+01
34	+0.000E+00	-3.649E+00	-1.520E+01	+0.000E+00	+3.649E+00	-1.618E+01
35	-1.727E+02	+4.417E+01	+9.468E+01	+1.727E+02	-4.417E+01	+4.004E+01
36	-1.488E+02	+3.124E+01	+4.585E+01	+1.488E+02	-3.124E+01	+4.163E+01
37	-1.226E+02	+3.599E+01	+5.886E+01	+1.226E+02	-3.599E+01	+5.990E+01
38	-9.717E+01	+2.949E+01	+3.673E+01	+9.717E+01	-2.949E+01	+4.583E+01
39	-7.488E+01	+2.890E+01	+3.812E+01	+7.488E+01	-2.890E+01	+4.280E+01
40	-5.470E+01	+2.548E+01	+3.256E+01	+5.470E+01	-2.548E+01	+3.877E+01
41	-3.705E+01	+2.188E+01	+2.707E+01	+3.705E+01	-2.188E+01	+3.421E+01
42	-2.236E+01	+1.752E+01	+2.041E+01	+2.236E+01	-1.752E+01	+2.866E+01
43	-1.108E+01	+1.264E+01	+1.303E+01	+1.108E+01	-1.264E+01	+2.237E+01
44	-3.649E+00	+6.706E+00	+4.890E+00	+3.649E+00	-6.706E+00	+1.389E+01
45	-1.437E+02	+6.468E+01	+1.176E+02	+1.437E+02	-6.468E+01	+7.970E+01
46	-1.225E+02	+7.592E+01	+1.091E+02	+1.225E+02	-7.592E+01	+1.035E+02
47	-9.811E+01	+6.710E+01	+1.099E+02	+9.811E+01	-6.710E+01	+1.116E+02
48	-7.601E+01	+6.748E+01	+9.249E+01	+7.601E+01	-6.748E+01	+9.646E+01
49	-5.578E+01	+6.002E+01	+8.195E+01	+5.578E+01	-6.002E+01	+8.612E+01
50	-3.850E+01	+5.348E+01	+7.269E+01	+3.850E+01	-5.348E+01	+7.705E+01
51	-2.386E+01	+4.516E+01	+6.058E+01	+2.386E+01	-4.516E+01	+6.586E+01
52	-1.236E+01	+3.567E+01	+4.688E+01	+1.236E+01	-3.567E+01	+5.299E+01
53	-4.369E+00	+2.476E+01	+3.127E+01	+4.369E+00	-2.476E+01	+3.806E+01
54	-1.903E-01	+1.296E+01	+1.468E+01	+1.903E-01	-1.296E+01	+2.161E+01
55	+1.437E+02	+6.468E+01	+1.176E+02	-1.437E+02	-6.468E+01	+7.970E+01
56	+1.225E+02	+7.592E+01	+1.091E+02	-1.225E+02	-7.592E+01	+1.035E+02
57	+9.811E+01	+6.710E+01	+1.099E+02	-9.811E+01	-6.710E+01	+1.116E+02
58	+7.601E+01	+6.748E+01	+9.249E+01	-7.601E+01	-6.748E+01	+9.646E+01
59	+5.578E+01	+6.002E+01	+8.195E+01	-5.578E+01	-6.002E+01	+8.612E+01
60	+3.850E+01	+5.348E+01	+7.269E+01	-3.850E+01	-5.348E+01	+7.705E+01
61	+2.386E+01	+4.516E+01	+6.058E+01	-2.386E+01	-4.516E+01	+6.586E+01
62	+1.236E+01	+3.567E+01	+4.688E+01	-1.236E+01	-3.567E+01	+5.299E+01
63	+4.369E+00	+2.476E+01	+3.127E+01	-4.369E+00	-2.476E+01	+3.806E+01
64	+1.903E-01	+1.296E+01	+1.468E+01	-1.903E-01	-1.296E+01	+2.161E+01
65	+1.727E+02	+4.417E+01	+9.468E+01	-1.727E+02	-4.417E+01	+4.004E+01
66	+1.488E+02	+3.124E+01	+4.585E+01	-1.488E+02	-3.124E+01	+4.163E+01
67	+1.226E+02	+3.599E+01	+5.886E+01	-1.226E+02	-3.599E+01	+5.990E+01
68	+9.717E+01	+2.949E+01	+3.673E+01	-9.717E+01	-2.949E+01	+4.583E+01
69	+7.488E+01	+2.890E+01	+3.812E+01	-7.488E+01	-2.890E+01	+4.280E+01
70	+5.470E+01	+2.548E+01	+3.256E+01	-5.470E+01	-2.548E+01	+3.877E+01
71	+3.705E+01	+2.188E+01	+2.707E+01	-3.705E+01	-2.188E+01	+3.421E+01
72	+2.235E+01	+1.752E+01	+2.041E+01	-2.235E+01	-1.752E+01	+2.866E+01
73	+1.108E+01	+1.264E+01	+1.303E+01	-1.108E+01	-1.264E+01	+2.237E+01
74	+3.649E+00	+6.706E+00	+4.890E+00	-3.649E+00	-6.706E+00	+1.389E+01

TABLA 5.23. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO 02 EN DIRECCIÓN "X" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

Proyecto: TESIS

Subestructura: AA clave : G1TESIAA.a12G 26-10-95/16:05  
MARCO PRUEBA AA PARA TESIS

COMBINACIÓN DE CARGAS 'S': S = S  
combinación de cargas grabada en archivo PSTESIAA.AES

factor \* patrón

-----  
+1.00 S  
-----

patrón S: CARGA SÍSMICA EQUIVALENTE  
RSTESIAA.AESG1TESIAA.a12G 26-10-95/16:05JSTESIAA.AES

REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -

elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
1						
2	+0.000E+00	-3.461E+00	-1.501E+01	+0.000E+00	+3.461E+00	-1.484E+01
3	+0.000E+00	-3.461E+00	-1.484E+01	+0.000E+00	+3.461E+00	-1.501E+01
4						
5						
6	+0.000E+00	-5.933E+00	-2.551E+01	+0.000E+00	+5.933E+00	-2.566E+01
7	+0.000E+00	-5.933E+00	-2.566E+01	+0.000E+00	+5.933E+00	-2.551E+01
8						
9	+0.000E+00	-7.920E+00	-3.396E+01	+0.000E+00	+7.920E+00	-3.435E+01
10	+0.000E+00	-7.920E+00	-3.435E+01	+0.000E+00	+7.920E+00	-3.396E+01
11	+0.000E+00	-9.072E+00	-3.892E+01	+0.000E+00	+9.072E+00	-3.932E+01
12	+0.000E+00	-9.072E+00	-3.932E+01	+0.000E+00	+9.072E+00	-3.892E+01
13	+0.000E+00	-9.686E+00	-4.151E+01	+0.000E+00	+9.686E+00	-4.203E+01
14	+0.000E+00	-9.686E+00	-4.203E+01	+0.000E+00	+9.686E+00	-4.151E+01
15	+0.000E+00	-9.923E+00	-4.249E+01	+0.000E+00	+9.923E+00	-4.309E+01
16	+0.000E+00	-9.923E+00	-4.309E+01	+0.000E+00	+9.923E+00	-4.249E+01
17	+0.000E+00	-9.884E+00	-4.231E+01	+0.000E+00	+9.884E+00	-4.294E+01
18	+0.000E+00	-9.884E+00	-4.294E+01	+0.000E+00	+9.884E+00	-4.231E+01

las fuerzas internas del marco AA en dirección "Y" obtenidas del análisis sísmico estático equivalente continúan en la siguiente página...

ALFREDO JO LEÓN CHANG

REACCIONES EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS - matriz RM -						
elem	ax. n1	corte n1	mom n1	ax. n2	corte n2	mom n2
19	+0.000E+00	-9.603E+00	-4.101E+01	+0.000E+00	+9.603E+00	-4.181E+01
20	+0.000E+00	-9.603E+00	-4.181E+01	+0.000E+00	+9.603E+00	-4.101E+01
21	+0.000E+00	-9.463E+00	-4.060E+01	+0.000E+00	+9.463E+00	-4.101E+01
22	+0.000E+00	-9.463E+00	-4.101E+01	+0.000E+00	+9.463E+00	-4.060E+01
23	+0.000E+00	-8.661E+00	-3.632E+01	+0.000E+00	+8.661E+00	-3.838E+01
24	+0.000E+00	-8.661E+00	-3.838E+01	+0.000E+00	+8.661E+00	-3.632E+01
25	-8.361E+01	+3.579E+00	+1.642E+01	+8.361E+01	-3.579E+00	-5.500E+00
26	-8.014E+01	+7.551E+00	+1.831E+01	+8.014E+01	-7.551E+00	+2.834E+00
27	-7.421E+01	+8.496E+00	+1.938E+01	+7.421E+01	-8.496E+00	+8.657E+00
28	-6.629E+01	+1.243E+01	+2.134E+01	+6.629E+01	-1.243E+01	+1.346E+01
29	-5.722E+01	+1.293E+01	+2.004E+01	+5.722E+01	-1.293E+01	+1.617E+01
30	-4.753E+01	+1.356E+01	+1.976E+01	+4.753E+01	-1.356E+01	+1.821E+01
31	-3.761E+01	+1.331E+01	+1.858E+01	+3.761E+01	-1.331E+01	+1.870E+01
32	-2.773E+01	+1.364E+01	+1.792E+01	+2.773E+01	-1.364E+01	+2.028E+01
33	-1.812E+01	+1.083E+01	+1.549E+01	+1.812E+01	-1.083E+01	+1.483E+01
34	-8.661E+00	+1.829E+01	+1.987E+01	+8.661E+00	-1.829E+01	+3.134E+01
35	-4.320E-06	+1.877E+02	+2.822E+03	+4.320E-06	-1.877E+02	-2.165E+03
36	-4.379E-06	+1.766E+02	+2.215E+03	+4.379E-06	-1.766E+02	-1.597E+03
37	-4.688E-06	+1.675E+02	+1.684E+03	+4.688E-06	-1.675E+02	-1.014E+03
38	-5.207E-06	+1.487E+02	+1.130E+03	+5.207E-06	-1.487E+02	-6.099E+02
39	-4.790E-06	+1.333E+02	+7.429E+02	+4.790E-06	-1.333E+02	-2.763E+02
40	-7.566E-06	+1.142E+02	+4.185E+02	+7.566E-06	-1.142E+02	-1.865E+01
41	-5.729E-06	+9.340E+01	+1.644E+02	+5.729E-06	-9.340E+01	+1.625E+02
42	-4.507E-06	+6.798E+01	-1.737E+01	+4.507E-06	-6.798E+01	+2.553E+02
43	-3.611E-06	+4.525E+01	-1.140E+02	+3.611E-06	-4.525E+01	+2.724E+02
44	-1.221E-06	-1.395E+00	-1.336E+02	+1.221E-06	+1.395E+00	+1.287E+02
45	+8.361E+01	+3.579E+00	+1.642E+01	-8.361E+01	-3.579E+00	-5.500E+00
46	+8.014E+01	+7.551E+00	+1.831E+01	-8.014E+01	-7.551E+00	+2.834E+00
47	+7.421E+01	+8.496E+00	+1.938E+01	-7.421E+01	-8.496E+00	+8.657E+00
48	+6.629E+01	+1.243E+01	+2.134E+01	-6.629E+01	-1.243E+01	+1.346E+01
49	+5.722E+01	+1.293E+01	+2.004E+01	-5.722E+01	-1.293E+01	+1.617E+01
50	+4.753E+01	+1.356E+01	+1.976E+01	-4.753E+01	-1.356E+01	+1.821E+01
51	+3.761E+01	+1.331E+01	+1.858E+01	-3.761E+01	-1.331E+01	+1.870E+01
52	+2.773E+01	+1.364E+01	+1.792E+01	-2.773E+01	-1.364E+01	+2.028E+01
53	+1.812E+01	+1.083E+01	+1.549E+01	-1.812E+01	-1.083E+01	+1.483E+01
54	+8.661E+00	+1.829E+01	+1.987E+01	-8.661E+00	-1.829E+01	+3.134E+01

TABLA 5.24. FUERZAS INTERNAS DEL MARCO AA EN DIRECCIÓN "Y" OBTENIDAS DEL ANÁLISIS SÍSMICO ESTÁTICO EQUIVALENTE

### 5.13. COMENTARIOS

De la comparación de resultados obtenidos en las tablas 5.15 y 5.16 con la tabla 5.20 se puede notar que las fuerzas por nivel obtenidas por medio del análisis sísmico dinámico son mayores que las obtenidas del análisis estático equivalente. La relación entre las fuerzas resultantes por el método dinámico y las fuerzas resultantes por el método estático equivalente son mayores desde 1.24 veces hasta 6.70 veces y van en aumento de arriba hacia abajo. Se puede notar también que si se comparan los resultados con la combinación raíz cuadrada de la suma de cuadrados, del nivel 5 al nivel 10 del edificio las fuerzas por nivel obtenidas por el método estático son mayores en una relación de 1.40 veces a las obtenidas por el método dinámico y del nivel 1 al nivel 5 siempre resultan mayores las del método dinámico que con una relación de 1.10 a 3.5 veces las obtenidas por el método estático equivalente.

De la comparación de resultados obtenidos en la tabla 5.17 con la tabla 5.22 para el marco 01, de las tablas 5.18 con la tabla 5.23 para el marco 02 y de las tablas 5.19 con la tabla 5.24 para el marco AA, se puede notar que las fuerzas internas o esfuerzos obtenidos por el método dinámico para los miembros de los marcos mencionados son menores que las obtenidas por el método estático equivalente, excepto para el marco 01 en el que las fuerzas internas obtenidas por el método dinámico son mayores que las obtenidas por el método estático equivalente.

La comparación de los elementos de los marcos se hará comparando los esfuerzos de momento para las vigas y los esfuerzos de carga axial y momento para las columnas, ya que estos esfuerzos son los de mayor incidencia en el diseño de los elementos.

Para el marco 01 (comparación de las tablas 5.17 con la tabla 5.22) la relación de las fuerzas internas obtenidas para las vigas por el método dinámico va desde 1.05 hasta 1.25 veces las obtenidas por el método estático equivalente y para las columnas va desde 1.35 hasta 7.35 veces. En las vigas la relación aumenta de abajo hacia arriba (en los últimos niveles la relación es mayor) y en las columnas disminuye de abajo hacia arriba.

Para el marco 02 (comparación de las tablas 5.18 con la tabla 5.23) la relación de las fuerzas internas obtenidas para las vigas por el método estático equivalente va desde 1.26 hasta 2.20 veces las obtenidas por el método dinámico y para las columnas va desde 1.24 hasta 2.86. Al igual que en el marco 01 la relación aumenta de abajo hacia arriba en las vigas y disminuye en las columnas.

Para el marco AA (comparación de las tablas 5.19 con la tabla 5.24) la relación de las fuerzas internas obtenidas para las vigas por el método estático equivalente va desde 1.29 hasta 1.45 veces las obtenidas por el método dinámico y para las columnas

y muros va desde 1.29 hasta 1.38. En este marco la relación disminuye de abajo hacia arriba tanto para las vigas como para las columnas y esto es debido a que este marco tiene un muro estructural, el cual trabaja ante las excitaciones sísmicas en los niveles inferiores y en los niveles superiores se apoya de las columnas.

Se puede notar que en los marcos en los que las fuerzas internas obtenidas por el método estático equivalente son mayores a las obtenidas a las del método dinámico (marco 02 y AA) la relación existente no es muy considerable, ya que es menor de 1.5.

La razón principal de que las fuerzas internas obtenidas por el método estático equivalente para los marcos 02 y marco AA sean mayores a las obtenidas a las del método dinámico, es que la respuesta en el método dinámico se divide entre los varios modos de vibración los cuales no actúan simultáneamente.



# CONCLUSIONES

1. En la estructura del ejemplo y frecuentemente en estructuras de geometría regular, las fuerzas de las estructuras obtenidas por el análisis sísmico dinámico son menores que las obtenidas por el análisis sísmico estático equivalente y esto es debido a que en el análisis dinámico no todos los modos de vibración actúan al mismo tiempo, con lo cual las respuestas se contrarrestan a la hora de superponerlas, en cambio en el análisis estático equivalente solo actúa el primer modo de vibración.
2. La aplicación de un análisis sísmico dinámico ante un estático equivalente, cuando las respuestas del análisis sísmico dinámico son menores que las obtenidas en el estático equivalente, es justificable ya que es un análisis más realista y redundante en lo económico, factor de gran importancia sobre todo si son estructuras de gran magnitud.
3. Es conveniente efectuar un análisis sísmico dinámico a las estructuras de geometría regular, ya que las fuerzas resultantes no siempre serán menores que las obtenidas por un análisis estático equivalente, esto se pudo comprobar en los resultados obtenidos para la estructura simple simétrica del ejemplo, en donde las fuerzas de el marco 01 resultaron mayores.
4. En estructuras con geometría irregular se debe realizar un análisis sísmico dinámico ya que los modos de vibración y los períodos de vibración entre cada marco que conforman la estructura tendrán una marcada diferencia, en estructuras altas también se debe realizar un análisis sísmico dinámico ya que los segundos modos tienen una participación nada despreciable.
5. El análisis sísmico dinámico modal con espectro respuesta es el de mejor aplicación en el país, ya que éste es veloz y de poco costo, porque solo se consideran los valores máximos de respuesta al sismo, los que usualmente bastan para el diseño estructural y los cuales son computados directamente del espectro respuesta debido a que la respuesta de cada modo de vibración es fácilmente modelada para un sistema de grado de libertad simple. Además es el de mayor aplicación ya que en el país no se cuenta con registros de historias de excitaciones sísmicas de magnitud considerables, en cambio ya se cuenta con un espectro de respuesta recomendado para el país.
6. La base fundamental del análisis sísmico dinámico es el cálculo de los valores característicos de la estructura, es decir, de los modos de vibración y los períodos de vibración de cada modo.

7. Un paso importante en el análisis sísmico dinámico modal es la superposición modal de resultados, ya que depende en gran parte de ésta la obtención exacta y realista de la magnitud de las fuerzas sísmicas que actúan en la estructura.
8. La combinación de modos por medio de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los modos es por lo regular muy baja, por ello es recomendable utilizar un promedio de la superposición de la suma de absolutos con la raíz cuadrada de la suma de cuadrados. Como se nota en los resultados obtenidos de la estructura analizada en el ejemplo, las fuerzas por nivel obtenidas por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados es menor en varios niveles que las fuerzas obtenidas en el análisis sísmico estático equivalente, en cambio las fuerzas obtenidas por el promedio de la suma de absolutos y la raíz cuadrada de la suma de cuadrados resultó siempre mayor.
9. Para que las fuerzas sísmicas obtenidas del análisis sísmico dinámico resulten lo mas reales posibles hay que efectuar una corrección empírica que modifica el corte basal obtenido, esto es debido a que las estructuras reales no son estructuras desnudas porque tienen tabicación interior y exterior, además la estructura está inicialmente en un rango elástico donde las secciones de concreto no están fracturadas.
10. Es necesario contar con una red sismológica completa en el país para obtener una buena fuente de registros de eventos sísmicos.
11. Se necesita tener una buena fuente de registros de eventos sísmicos para poder determinar con mayor exactitud las excitaciones sísmicas para diseño en nuestro país.
12. Es importante conocer el tipo de suelo sobre el que se construirá una estructura ya que éste parámetro afecta la amplificación dinámica que tendrá la estructura al estar sometida a las excitaciones sísmicas, por ello es de vital importancia fomentar y ampliar el estudio geológico de los suelos en nuestro país, sobre todo en áreas con alto riesgo sísmico.
13. Para realizar un análisis sísmico dinámico es necesario seguir algunos lineamientos y conocer los parámetros de excitación sísmica de la región, por ello es necesario utilizar las Normas Estructurales de Diseño y Construcción recomendadas para la República de Guatemala por la Asociación Guatemalteca de Ingeniería Estructural y Sísmica, ya que en ella se presentan lineamientos a seguir en el análisis sísmico, los cuales están basados en estudios realizados en nuestro país, es decir, toman en cuenta condiciones locales que no son consideradas al utilizar normas o códigos extranjeros y con ello se realiza un análisis sísmico más real.

## RECOMENDACIONES

1. Que se efectúen otros estudios de comparación entre el análisis sísmico dinámico versus el análisis sísmico estático, para corroborar la importancia de la aplicación de los métodos de análisis sísmico dinámico, analizando edificios con diferentes alturas y diferentes geometrías en planta, es decir estructuras de forma irregular, tanto en planta como en elevación.
2. Que en el futuro se amplíe la información sobre este tema de análisis sísmico dinámico, ya que aunque la teoría sobre la dinámica estructural es en principio la misma, existen parámetros de análisis y diseño que van cambiando con las experiencias adquiridas a través de los años.
3. Que en los cursos de pregrado, donde se imparte el tema de análisis sísmico de edificios y en los cuales solo se menciona la existencia de los métodos dinámicos para el análisis sísmico, se de una introducción de lo que son los métodos dinámicos, para que los estudiantes conozcan la base fundamental de estos métodos de análisis, y al mismo tiempo se les despierte el interés para que posteriormente investiguen sobre el tema o lleven los cursos en donde se estudia más a fondo la dinámica estructural.
4. Que se trate de efectuar análisis sísmicos dinámicos a las estructuras, ya que aunque el diseño a veces resulte menos conservador que el análisis estático equivalente, el análisis dinámico es más exacto y por ende la estructura será más económica.
5. Que se utilicen los parámetros y lineamientos recomendados por el Proyecto de Normas Estructurales de Diseño y Construcción recomendadas para la República de Guatemala por la Asociación Guatemalteca de Ingeniería Estructural y Sísmica (AGIES), en la determinación de las excitaciones sísmicas de diseño a las que estarán sometidas las estructuras.
6. Que por medio de las universidades se haga ver a las autoridades la importancia de disponer de información sísmológica en el país, a efecto de ampliar la cobertura y proveer de un mantenimiento adecuado a la red del país.
7. Que se realicen estudios geológicos de las características de los suelos en donde se construirá la estructura, sobre todo en las cabeceras departamentales, que es donde se edificarán estructuras mayores de dos niveles, para así poder conocer con mayor exactitud las amplificaciones dinámicas de las estructuras.

## REFERENCIAS

1. BARNARD, Peter R. et al. Response of buildings to lateral forces. (Reporte de la ACI por la comisión 442). E.E.U.U.: S.P.I. 1,971. 106 pp.
2. BAZAN ZURITA, Enrique y Roberto Meli Piralla. Manual de diseño sísmico de edificios. México: Editorial Limusa. 1,989. 241 pp.
3. CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures a primer. (Monografía por The Earthquake Engineering Reserch Institute). E.E.U.U.: S.P.I. 126 pp.
4. CLOUGH, Ray W. y Joseph Penzien. Dynamics of structures. E.E.U.U.: Editorial Mc Graw Hill. 1,975. 634 pp.
5. CONLEDO LIGORRIA, Fredy Fernando. Consideraciones teórico prácticas para ejecutar análisis dinámicos de edificios. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,979. 146 pp.
6. DOWRICK, D.J. Diseño de estructuras resistentes a sismos. (Para ingenieros y arquitectos). México: Editorial Limusa. 1,984. 410 pp.
7. HIBBELER, R.C. Mecánica para ingenieros: Dinámica. Segunda Edición. México: Editorial Compañía editorial Continental S.A. de C.V. 1,985. 599 pp.
8. MONZON DESPANG, Héctor. et al. Normas Estructurales de Diseño y Construcción recomendadas para la República de Guatemala por AGIES. Guatemala: S.P.I. 1,996.
9. HUDSON, D.E. Reading and interpreting strong motion acelerograms. (Monografía por The Earthquake Engineering Research Institute). E.E.U.U.: S.P.I. 1,979. 112 pp.
10. LAIBLE, Jeffrey P. Análisis Estructural. Segunda Edición. México: Editorial Mc Graw Hill. 1,988. 910 pp.
11. MATUS IZAGUIRRE, Milton R. Análisis de estructuras por el método de directo de rigideces. Programas para computadora HP-3000. (Tesis: Maestría de Estructuras, Facultad de Ciencias y Humanidades, Universidad del Valle de Guatemala). Guatemala: 1,986. 241 pp.
12. MELI PIRALLA, Roberto. Diseño Estructural. México: Editorial Limusa. 1,987. 582 pp.

13. NEWMARK, N.M. y W.J. Hall. Earthquake spectra and design. (Monografía por The Earthquake Engeneering Research Institute). E.E.U.U.: S.P.I. 1,982. 103 pp.
14. NEWMARK, N.M. y Emilio Rosenblueth. Fundamentals of earthquake engeneering. E.E.U.U.: Editorial Prentice-Hill. 1,971. 640 pp.
15. RAMOS GIRON, Andrés Rolando. Método de análisis modal en diseño sísmico de edificios. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,983. 153 pp.
16. SARRIA, Alberto. Ingeniería Sísmica. Colombia: Editorial Ediciones Unidad. 1,990. 610 pp.
17. SEED, H. Bolton y Idriss I.M. Ground Motions and soil liquefaction during earthquakes. (Monografía por The Earthquake Engeneering Research Institute). E.E.U.U.: S.P.I. 1,982. 127 pp.
18. WAKABAYASHI, Minoru y Enrique Martínez Romero. Diseño de estructuras sismorresistentes. Traducción de Victor Manuel Pavón Rodríguez y Enrique Martínez Romero. México: Editorial Mc Graw-Hill. 1,988. 418 pp.
19. WHITE, Richard N. et al. Estructuras estáticamente indeterminadas. Volumen 2. México: Editorial Limusa. 1,977. 356 pp.
20. WILSON, Edward L. CAL 86. Computer assisted learning of structural analysis and the CAL/SAP development system. S.L.I. S.P.I. S.F.I.
21. ATC. Applied Technology Council. Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings. Publicación ATC 3-06. E.E.U.U.: S.P.I. 1,978.

# BIBLIOGRAFIA

1. ARIAS PORRAS, Jorge Eduardo. Características dinámicas de los edificios de Guatemala. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,978. 127 pp.
2. CHANG LIANG, Victor. Del análisis y diseño de edificios de concreto reforzado para cargas sísmicas. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,969. 156 pp.
3. ESCOBAR MOLINA, Héctor Hugo. Análisis de fuerzas de sismo utilizando el código propuesto por la Universidad de Stanford para Guatemala. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,979. 139 pp.
4. SAENZ M., Luis Francisco. Consideraciones sobre el análisis y diseño de edificios. (Tesis: Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala). Guatemala: 1,966. 184 pp.