

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

GUIA TEÓRICO PRÁCTICA DEL CURSO  
DE RESISTENCIA DE MATERIALES II

TESIS

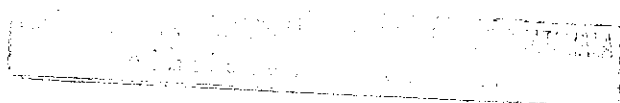
PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA  
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

GILBERTO ARNULFO TAX GODOY

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 1997



08  
T(4152)  
CA

**HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la Ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

**GUIA TEÓRICO PRÁCTICA DEL CURSO  
DE RESISTENCIA DE MATERIALES II**

tema que fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil con fecha 14 de mayo de 1997.

  
GILBERTO ARNULFO TAX GODOY

UNIVERSIDAD DE LA GUINEA-BISSAU  
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

MIEMBROS DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO:	Ing. Erbert René Miranda Barrios
VOCAL PRIMERO:	Ing. Miguel Ángel Sánchez Guerra
VOCAL SEGUNDO:	Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano
VOCAL TERCERO:	Ing. Juan Adolfo Echeverría Méndez
VOCAL CUARTO:	Br. Víctor Rafael Lobos Aldana
VOCAL QUINTO:	Br. Wagner Gustavo López Cáceres
SECRETARIA:	Licda. Gilda Marina Castellanos Baiza

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO:	Ing. Erbert René Miranda Barrios
EXAMINADOR:	Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano
EXAMINADOR:	Ing. Edgar Vinicio Quisónes
EXAMINADOR:	Ing. Elvia Miriam Ruballos Samayoa de la Rosa
SECRETARIA:	Gilda Marina Castellanos Baiza



**FACULTAD DE INGENIERIA**

Escuelas de Ingeniería Civil, Ingeniería  
Mecánica Industrial, Ingeniería Química,  
Ingeniería Mecánica Eléctrica, Técnica  
y Regional de Post-grado de Ingeniería  
Sanitaria.

Ciudad Universitaria, zona 12  
Guatemala, Centroamérica

Guatemala, octubre 28 de 1997

Ingeniero  
Jack Douglas Ibarra,  
Director de la Escuela  
de Ingeniería Civil,  
Facultad de Ingeniería,  
U S A C.

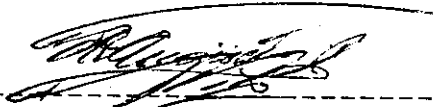
Señor Director

Por medio de la presente informo a usted, que he revisado el trabajo de tesis titulado **GUIA TEORICA Y PRACTICA DEL CURSO DE RESISTENCIA DE MATERIALES II**, elaborado por el estudiante universitario Gilberto Arnulfo Tax Godoy y asesorado por mi persona.

Habiendo determinado que dicho trabajo cumple con lo establecido, y que será de mucha utilidad para estudiantes y profesionales de la ingeniería civil, el suscrito le da su aprobación.

Sin otro particular, me suscribo de usted,

Atentamente,

  
-----  
Ing. Ricardo A. Ibarra M.  
Coordinador Area de Estructuras



CULTAD DE INGENIERIA

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor y Jefe del Departamento de Estructuras Ing. Ricardo Augusto Ibarra M., del trabajo de tesis del estudiante Gilberto Arnulfo Tax Godoy, titulado GUIA TEORICO PRACTICA DEL CURSO DE RESISTENCIA DE MATERIALES II, da por este medio su aprobación a dicha tesis.

  
Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano



Guatemala, noviembre de 1, 1997

JDIS/bbdeb.

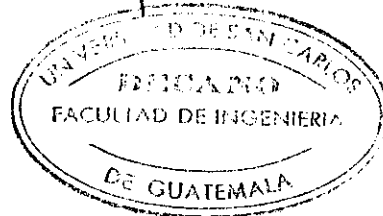


FACULTAD DE INGENIERIA

El Decano de la Facultad de Ingeniería, luego de conocer la autorización por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, Ing. Jack Douglas Ibarra Solórzano, al trabajo de tesis GUIA TEORICO PRACTICA DEL CURSO DE RESISTENCIA DE MATERIALES II, del estudiante Gilberto Arnulfo Tax Godoy, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

  
Ing. Miguel Angel Sanchez Guerra  
DECANO EN FUNCIONES



Guatemala, noviembre de 1,997

/bbdeb.

ACTO QUE DEDICO A:

LA MEMORIA DE MI PAPÁ JOSE LUIS TAX AVILA, QUIEN EN VIDA ME PROPORCIONÓ SUS CONSEJOS Y TODO SU APOYO EN MIS ESTUDIOS.

MI MAMÁ TERESA GODOY, POR SUS CONSEJOS EN LOS MOMENTOS DIFÍCILES POR LOS QUE HE PASADO.

MIS HERMANOS:

GLORIA AMPARO  
HUGO RENE  
ELSA MARINA

MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS DE ESTUDIO.

A LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA Y A LA FACULTAD DE INGENIERIA CON RESPETO Y CARÍÑO.

**AGRADECIMIENTOS:**

AL INGENIERO RICARDO AUGUSTO IBARRA EN LA ASESORÍA DEL PRESENTE TRABAJO DE TESIS.

A SONIA ARDÓN Y CARLOS FIGUEROA POR LA ELABORACIÓN DE LA TESIS .



# ÍNDICE GENERAL

	Página
Glosario .....	i
Símbolos y Fórmulas .....	ii
Introducción .....	iii
Objetivos .....	iv
Capítulo 1. Esfuerzos Combinados .....	1
1.1 Combinación de Esfuerzos .....	1
1.1.1 Esfuerzo axial .....	1
1.1.2 Esfuerzo por flexión .....	2
1.1.3 Esfuerzo de corte simple .....	2
1.1.4 Esfuerzo por torsión .....	3
1.2 Superposición y sus Limitaciones .....	4
1.2.1 Ejemplo .....	5
1.3 Cargas Excéntricas .....	7
1.3.1 Núcleo Central de la Sección .....	8
1.3.2 Ejemplo .....	9
1.3.3 Ejemplo .....	10
1.4 Superposición de esfuerzos cortantes .....	12
1.4.1 Ejemplo .....	15
Capítulo 2. Transformación de Esfuerzos .....	18
2.1 Elementos sometidos a Esfuerzo Normal y Cortante .....	18
2.1.1 El esfuerzo por corte, el esfuerzo normal y las dimensiones de los elementos .....	20
2.2 Ecuación de la transformación de Esfuerzo .....	20
2.2.1 Esfuerzo Plano .....	20
2.2.2 Problema Básico .....	21
2.2.3 Ejemplo .....	23
2.2.4 Ejemplo .....	25
2.3 Esfuerzo Cortante Máximo .....	26
2.3.1 Ejemplo .....	30
2.4 Círculo de Mohr .....	32
2.4.1 Procedimiento para la aplicación del Círculo de Mohr .....	34
2.4.2 Ejemplo .....	37
2.4.3 Ejemplo .....	39
Capítulo 3. Cascarones .....	42
3.1 Cascarones de revolución de pared delgada .....	42
3.1.1 Cilindros de pared delgada .....	42
3.1.1.1 Cambios en las dimensiones .....	44
3.1.2 Cascarón esférico de pared delgada con presión interna .....	46
3.1.2.1 cambios en las dimensiones .....	47
3.1.3 Vaso cilíndrico con extremos hemisféricos .....	47
3.1.4 Discontinuidad en las membranas .....	47
3.1.5 Ejemplo .....	50
3.1.6 Ejemplo .....	50
3.1.7 Ejemplo .....	52

Capítulo 4. Deflexiones en Vigas .....	54
4.1 Vigas .....	54
4.1.1 Clasificación de las Vigas .....	54
4.1.2 Cargas en Vigas .....	55
4.1.3 Curva elástica de una Viga .....	56
4.2 Relación entre Curvatura y Deformación .....	56
4.3 Relación entre Curvatura y Momento Flexionante .....	58
4.4 Ecuación Diferencial de la Elástica .....	60
4.5 Método Doble Integración .....	61
4.5.1 Ejemplo .....	63
4.6 Método Área de Momento .....	66
4.6.1 Ejemplo .....	71
4.6.2 Ejemplo .....	72
Capítulo 5. Vigas Indeterminadas .....	74
5.1 Vigas Estáticamente Indeterminadas .....	74
5.2 Método de Redundantes .....	74
5.2.1 Ejemplo .....	75
5.2.2 Ejemplo .....	77
5.3 Método de Área de Momentos .....	78
5.3.1 Ejemplo .....	79
5.3.2 Ejemplo .....	79
5.4 Ecuación de los tres Momentos .....	80
5.4.1 Ejemplo .....	85
5.4.2 Ejemplo .....	87
Capítulo 6. Columnas .....	90
6.1 Tipos de Columnas .....	90
6.2 Estabilidad y Equilibrio .....	90
6.3 Carga de Pandeo de Euler .....	91
6.4 Longitud Efectiva .....	93
6.5 Limitaciones de la fórmula de Euler .....	95
6.6.1 Ejemplo .....	97
6.6.2 Ejemplo .....	97
Conclusiones .....	99
Recomendaciones .....	100
Referencias .....	101
Bibliografía .....	102

## LISTA DE DIAGRAMAS

	Página
Figura 1 Carga perpendicular que ocasiona esfuerzo axial .....	1
Figura 2 Carga vertical y esfuerzo flexionante .....	2
Figura 3 Momento torsor y esfuerzo torsionante .....	3
Figura 4 Barra cuadrada sometida a torsión .....	3
Figura 5 Elemento sometido a carga axial y vertical .....	5
Figura 6 Carga externa en elementos estructurales .....	7
Figura 7 Superposición para cargas excéntricas .....	7
Figura 8 Núcleo central de la sección .....	8
Figura 9 Esfuerzo cortante y deformación .....	12
Figura 10 Esfuerzo de corte por torsión .....	14
Figura 11 Carga tangencial y momento torsor .....	14
Figura 12 Superposición de elementos sometidos a torsión .....	14
Figura 13 Fuerza cortante y momento flexionante debido a carga vertical .....	18
Figura 14 Esfuerzo cortante vertical y horizontal .....	19
Figura 15 Elemento diferencial y el esfuerzo vertical y horizontal .....	19
Figura 16 Distribución de esfuerzo cortante .....	19
Figura 17 Elemento en esfuerzo plano .....	21
Figura 18 Elemento en forma de cuna .....	21
Figura 19 Sentido de rotación para círculo de Mohr .....	33
Figura 20 Formas del círculo de Mohr .....	34
Figura 21 Estado de esfuerzo de un elemento .....	34
Figura 22 Representación gráfica del círculo de Mohr .....	35
Figura 23 Cilindro sometido a presión interna .....	43
Figura 24 Cascarón esférico sometido a presión interna .....	47
Figura 25 Cilindro con extremos hemisféricos .....	48
Figura 26 Expansión de un cilindro a presión interna .....	50
Figura 27 Cargas y apoyos en vigas .....	55
Figura 28 Elástica de una Viga .....	56
Figura 29 Curvatura y deformación .....	57
Figura 30 Curvatura y momento flexionante .....	59
Figura 31 Curva elástica y deflexión .....	61
Figura 32 Viga con carga aplicada, deformación y momento .....	66
Figura 33 Desviación tangencial de un punto respecto de otro .....	68
Figura 34 Desviación tangencial positiva y negativa .....	69
Figura 35 Variación angular .....	69
Figura 36 Vigas estáticamente Indeterminadas .....	79
Figura 37 Análisis de una viga con carga aplicada de acuerdo a los cortes en un claro .....	82
Figura 38 Elástica en un tramo .....	83
Figura 39 Barra sometida a diferentes cargas .....	90
Figura 40 Estabilidad .....	91
Figura 41 Columnas con diferente apoyo .....	91
Figura 42 Longitud efectiva para columnas .....	94
Figura 43 Esfuerzo admisible en columnas .....	96

## TABLAS

	Página
Tabla 1 Coeficiente para barras rectangulares sometidas a torsión .....	4
Tabla 2 Distinto tipo de Carga, sus Momentos de Área y Centroide .....	70
Tabla 3 Pendiente y Deflexiones en los extremos .....	75
Tabla 4 Coeficiente N para Columnas .....	94

## GLOSARIO

<b>Cargas concéntricas:</b>	Son las cargas que se aplican en el eje centroidal del elemento.
<b>Cargas excéntricas:</b>	Cargas que actúan fuera del eje centroidal del elemento.
<b>Cascarones:</b>	Son aquellos en los cuales las paredes curvas de los recipientes sujetos a presión, son muy delgados en relación con el radio y la longitud.
<b>Curva elástica:</b>	Forma curva que toma el eje longitudinal después de aplicar una carga.
<b>Columnas:</b>	Elemento estructural sometido a compresión axial, lo bastante delgado para generar una falla por flexión lateral o pandeo.
<b>Esfuerzo:</b>	Es la magnitud de carga soportada por un elemento estructural.
<b>Esfuerzo axial:</b>	Esfuerzo ocasionado por la aplicación de una carga perpendicular a la sección transversal del elemento estructural.
<b>Esfuerzo por flexión:</b>	Esfuerzo ocasionado por la aplicación de una carga que actúa verticalmente y perpendicular al eje longitudinal
<b>Esfuerzo longitudinal:</b>	Esfuerzo que se produce paralelo al eje axial, resistiéndose a la presión.
<b>Esfuerzo tangencial:</b>	Esfuerzo perpendicular al eje axial causado por resistirse al efecto de reventarse por presión.
<b>Longitud efectiva de columnas:</b>	Es la longitud entre los puntos de inflexión en la curva de deflexión.
<b>Línea de Esfuerzo Nulo:</b>	Línea dentro del área transversal de un miembro, en la cual el esfuerzo vale cero.
<b>Recipiente a Presión:</b>	Son elementos que contienen líquidos o gases los cuales ejercen presión.
<b>Superposición:</b>	Es separar los efectos de diferentes cargas y la combinación de los resultados obtenidos.
<b>Torsión:</b>	Es el torcimiento o giro de un miembro estructural, haciéndolo rotar alrededor de su eje longitudinal
<b>Vigas:</b>	Elementos estructurales diseñados para soportar cargas que actúan perpendicularmente al eje longitudinal.
<b>Vigas estáticamente determinadas:</b>	Son aquellas en las cuales las reacciones que son incógnitas se pueden determinar con las ecuaciones de la estática.
<b>Vigas estáticamente indeterminadas:</b>	Son aquellas en las cuales no son suficientes las ecuaciones de equilibrio estático para determinar las reacciones que son incógnitas

## SIMBOLOS

$\sigma_a$	Esfuerzo axial
$\tau$	Esfuerzo de corte
$\sigma_T$	Esfuerzo de torsión
$\sigma_F$	Esfuerzo de flexión
$r$	Radio de curvatura
$\sigma_N$	Esfuerzo normal
$\sigma_S$	Esfuerzo corte simple
$I$	Inercia
$E$	Módulo de Elasticidad
$J$	Momento de Inercia
$\sigma_t$	Esfuerzo tangencial
$\sigma_L$	Esfuerzo Longitudinal
$\epsilon$	Deformación
$t_{ij}$	Desviación tangencial de $j$ respecto de $i$
$\delta$	Deformación
$P_{cr}$	Carga crítica
$L_e$	Longitud efectiva

## **INTRODUCCIÓN**

La realización de esta tesis surge con el fin de proporcionar en un solo documento los conceptos fundamentales y necesarios en este curso, los cuales son importantes en cursos posteriores, así como en la formación de estudiantes. El desarrollo está sustentado en el aspecto teórico con el fin de tener las bases que proporcionen una visión clara en la solución de cada problema.

En el capítulo uno se analizan los esfuerzos a los que se someten los elementos estructurales. En el capítulo dos se determinan los esfuerzos con la ecuación de la transformación de esfuerzo y con el círculo de Mohr. Investigando los esfuerzos girados respecto de un eje. Los esfuerzos en cascarones de pared delgada son analizados en el capítulo tres.

Los elementos importantes en las estructuras son las vigas y las columnas, las vigas se flexionan, mientras que las columnas encargadas de transmitir las cargas al suelo pueden sufrir pandeo, esto es tratado en los capítulos 4, 5 y 6.

## **OBJETIVOS**

### **GENERALES**

- 1.- Dar a conocer los conceptos teóricos necesarios para el análisis de los diferentes elementos estructurales.
- 2.- Proporcionar al estudiante en un solo documento la teoría que le sirva de guía para complementar las clases magistrales.
- 3.- Presentar diferentes elementos estructurales y su comportamiento como resultado de la aplicación de cargas.

### **ESPECÍFICOS**

- 1.- A través de la solución de problemas visualizar los criterios que deben tomarse en cuenta para el diseño.
- 2.- Contribuir a que el catedrático pueda referir al estudiante a este documento y dedicar más tiempo a relatar experiencias personales.
- 3.- Plantear la forma en que deben resolverse los problemas por diferentes métodos, si se tienen, lo cual permite tener una mayor confiabilidad en los resultados.



# CAPITULO 1

## Esfuerzos Combinados

### 1.1. Combinación de esfuerzos

El concepto de esfuerzo permite uniformizar el criterio en cuanto la apreciación de la magnitud de una carga soportada por un elemento estructural.

Existen cuatro tipos de cargas las cuales pueden producir diferentes esfuerzos, siendo éstos:

— Esfuerzo por corte simple:  $\tau = (VQ)/Ib$

— Esfuerzo por carga axial:  $\sigma_a = P/A$

— Esfuerzo por carga de torsión:  $\tau = (T\rho)/J$

— Esfuerzo por carga de Flexión:  $\sigma_f = (My)/I$

Los esfuerzos pueden actuar conjuntamente, generando cinco posibles combinaciones según sean las cargas:

1. Esfuerzos normales producidos por carga axial y flexión
2. Esfuerzos de corte producidos por corte simple y corte torsionante.
3. Esfuerzos producidos por corte simple y carga axial
4. Esfuerzos producidos por corte simple, carga axial y flexión
5. Esfuerzos producidos por corte simple, corte torsionante, carga axial y flexión.

#### 1.1.1 Esfuerzo axial

Este esfuerzo es ocasionado cuando una carga actúa perpendicularmente a la sección transversal del elemento estructural (fig. 1).

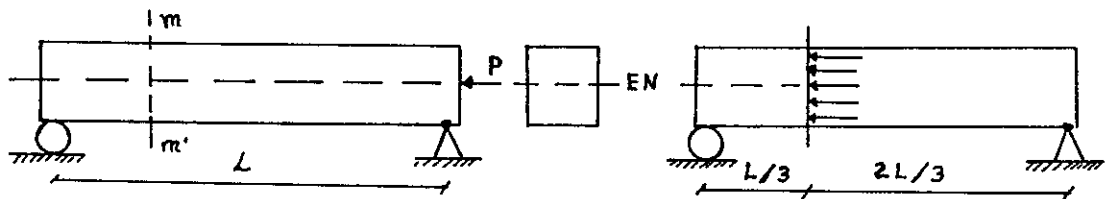


Figura 1

El esfuerzo axial también llamado esfuerzo normal tiene un valor de:

$$\sigma_N = P/A$$

siendo P la carga aplicada y A el área. Este esfuerzo puede ser de tensión o compresión dependiendo de la dirección de la fuerza P. El esfuerzo normal está representado en la Fig. 1.b.

### 1.1.2 Esfuerzo por flexión

El esfuerzo por flexión es ocasionado por la aplicación de una carga vertical (Fig. 2.a).

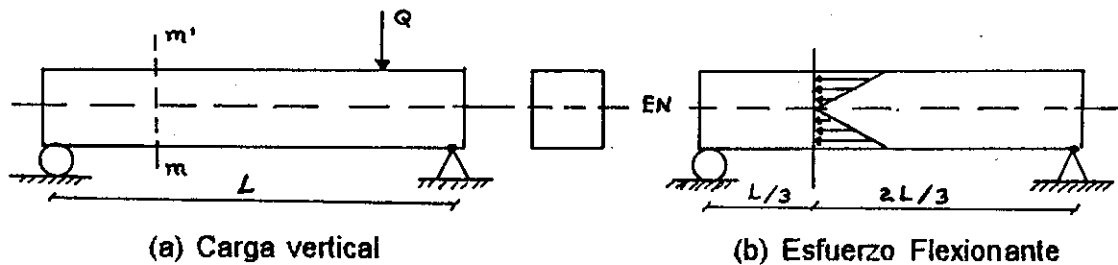


Figura 2

El esfuerzo tiene un valor de:

$$\sigma_F = \pm (MY) / I$$

donde M es el momento que actúa en el punto de análisis, Y es la distancia medida a partir del eje neutro, I es la inercia de la sección transversal y el signo representa la tensión y compresión.

Al analizar la sección m-m (Fig. 2a) se puede observar que el esfuerzo de flexión debido a la carga Q está representado en la Fig. 2b. El esfuerzo aumenta a medida que la distancia (y) se aleje del eje neutro.

### 1.1.3 Esfuerzo de corte simple

El esfuerzo de corte simple es ocasionado por carga vertical (Fig. 2.a). Si se quiere el esfuerzo de corte simple en el punto B, el cual se encuentra a L/2, es necesario determinar el valor del corte en dicho punto.

$$\tau_s = (V Q) / I b = (V A Y) / I b$$

donde V es el valor del corte; A es el área arriba del punto analizado, Y es el centroide del área, medido a partir del eje neutro; I es la inercia y b depende de la sección transversal.

### 1.1.4 Esfuerzo por torsión

El esfuerzo por torsión es apreciable mejor en elementos de sección circular, pero esto no significa que los elementos rectangulares no estén afectados por la torsión.

La torsión es el torcimiento (giro) de un miembro estructural cuando se carga con momentos que producen rotación alrededor de su eje longitudinal (Fig. 3a).

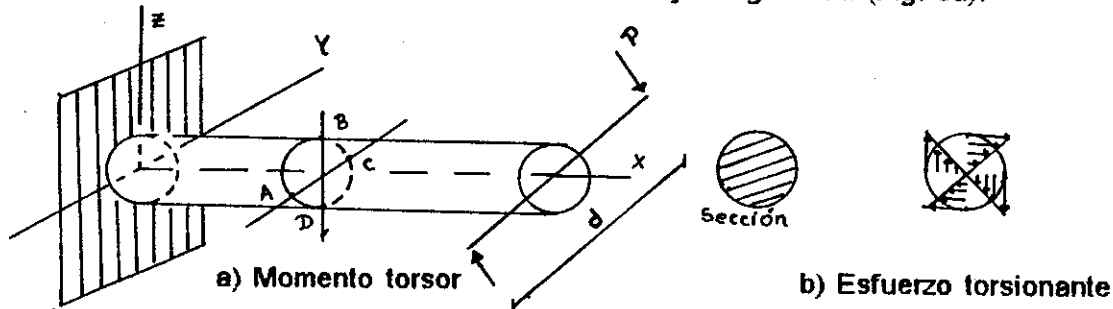


Figura 3

El valor del esfuerzo torsionante está dado por:

$$\tau = (T\rho)/I_p$$

donde  $T$  es la torsión aplicada,  $\rho$  es la distancia requerida a partir del eje hasta un valor igual al del radio e  $I_p$  es el momento polar de inercia de la sección transversal, el cual puede variar según sean estructuras circulares sólidas o huecas. El esfuerzo torsionante aumenta al incrementar el valor de  $\rho$  (Fig. 3b), desde cero en el eje, hasta su valor máximo cuando  $\rho$  sea igual al radio (Fig. 3b).

Las barras huecas son más eficaces para resistir cargas torsionantes que las barras macizas. En una barra sólida circular los esfuerzos cortantes máximos se generan en el perímetro de la sección transversal y nulos en el centro. Por lo tanto en una barra no hueca mucho del material se esfuerza considerablemente por debajo del esfuerzo cortante permisible, es por ello que si se desea una reducción del peso y ahorro del material, entonces, es recomendable utilizar barras huecas.

Es de importancia considerar que en los elementos estructurales circulares sometidos a torsión su sección transversal permanece plana y sin distorsión. Una barra cuadrada retiene únicamente la misma apariencia sólo si se rota  $90^\circ$  o  $180^\circ$ , es decir, que las diagonales de la sección cuadrada de la barra y las líneas que unen los puntos medios de los lados de esa sección permanecen rectos (Fig. 4); sin embargo, debido a la falta de simetría axial de la barra cualquier otra línea dibujada en su sección transversal se deformará fuera de su plano original.

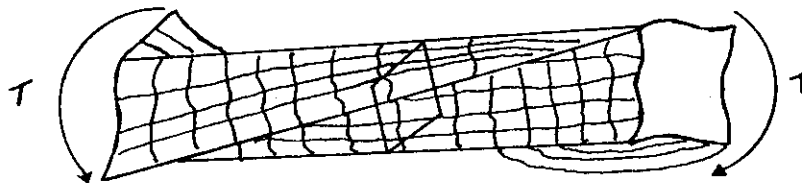


Figura 4

Si se desea saber el esfuerzo de torsión en elementos rectangulares pueden utilizarse los resultados obtenidos de la teoría matemática de la elasticidad para barras rectas, con secciones uniformes rectangulares.

$$\tau_{max} = (T) / (C1 a b^2)$$

siendo T el torque aplicado, a y b el lado más ancho y el más angosto, respectivamente, de la sección transversal y c, es el coeficiente de barras rectangulares sometidas a torsión.

El ángulo de torsión puede expresarse como:

$$\phi = (TL) / (C2 ab^3 G)$$

los coeficientes C1 y C2 dependen sólo de la relación a/b. las ecuaciones de esfuerzo torsionante y ángulo de torsión son válidas dentro del rango elástico.

a/b	C1	C2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
-	0.333	0.333

Tabla 1 coeficientes para barras rectangulares sometidas a torsión.

## 1.2 Superposición y sus Limitaciones

La combinación de esfuerzo normal, flexionante, corte y de torsión se lleva a través de la aplicación del principio de superposición. Este principio dice que una combinación de cargas en una estructura se puede obtener determinando separadamente los efectos de las diferentes cargas y combinando los resultados obtenidos, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1.- Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce.

Esta condición se satisface si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad del material.

2.- La deformación que resulta de cualquier carga dada es pequeña y no afecta las condiciones de aplicación de las demás cargas.

Esta condición se cumple si el esfuerzo debido a las cargas por separado produce deflexiones pequeñas en las vigas, pues deflexiones grandes producirán una desviación inaceptable de la línea de acción de las cargas con relación al eje de la viga.

A través de la superposición se obtendrá un diagrama final, el cual será la combinación de los diagramas aislados que representan al momento aplicado y los que representan las cargas concentradas.

Cuando se tiene la acción simultánea de las cargas P y Q (Fig. 5).

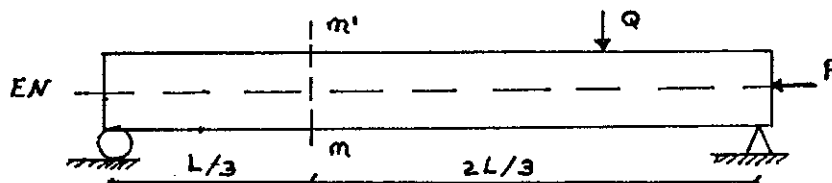


Figura 5

es de importancia el principio de superposición, el cual permite estudiar el efecto por presión debido a P y de flexión debido a Q (Fig 5a y Fig. 5b), en la sección m-m.

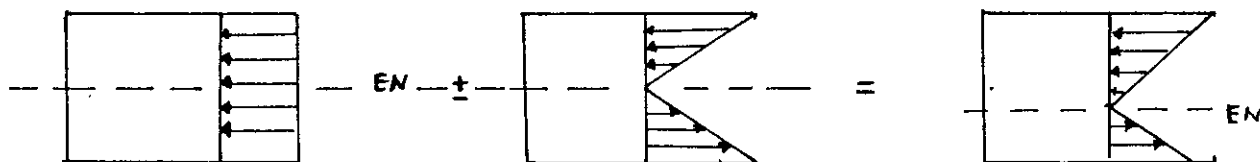


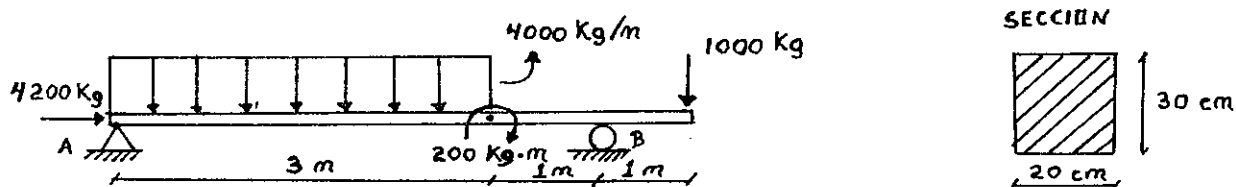
Fig. 5a esfuerzo debido a P

Fig. 5b Esfuerzo de flexión

Fig. 5c esta de esfuerzo final

el resultado de ambos efectos queda representado en la fig. 5c existiendo corrimiento del eje neutro.

**1.2.1 Ejemplo** Obtener el estado de esfuerzo normal máximo que se produce en la viga y la ubicación del eje neutro.



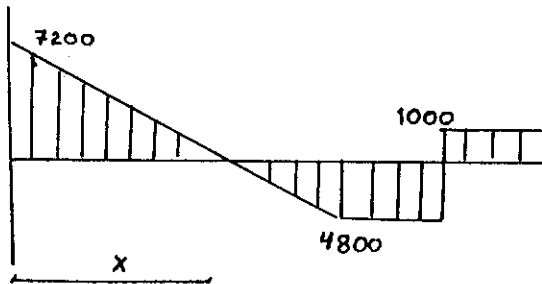
$$\Sigma M_A = 0 \quad (+\downarrow)$$

$$4000(3) (1.5) + 200 + 1000 (5) = R_b (4) \Rightarrow R_B = 5800 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad (+\downarrow)$$

$$-4000(3) (2.5) + 200 + 1000 (1) + R_A (4) \Sigma R_A = 7200 \text{ Kg}$$

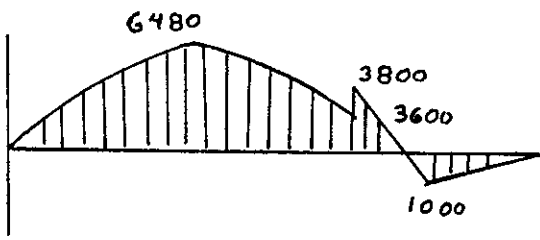
### Diagrama de Corte



$$\frac{x}{7200} = \frac{3}{7200 + 4800}$$

$$x = 1.8 \text{ m}$$

### Diagrama de Momentos

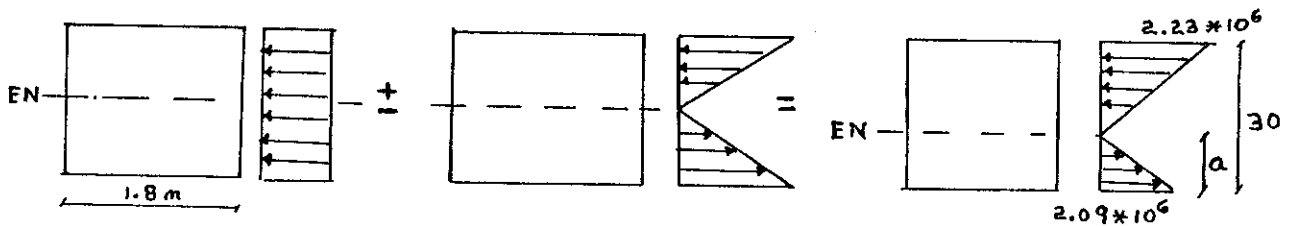


Momento máximo = 6480 kg.m  
cuando  $x = 1.8 \text{ m}$

$$\sigma_N = \sigma_a \pm \sigma_f = \frac{F}{A} \pm \frac{MY}{I}$$

$$\sigma_N = \frac{4200}{0.20 \times 0.3} \pm \frac{6480 (0.15)}{1/12 (0.20 (0.3)^3)}$$

$$\sigma_N = (7000 \pm 2160000) \text{ Kg/m}^2$$



### Eje neutro

$$\frac{2.23 \times 10^6}{30} + \frac{2.09 \times 10^6}{30 - a} = \frac{2.09 \times 10^6}{2.23 \times 10^6 + 2.09 \times 10^6} (30 - a) = 15.48 \text{ cm}$$

### 1.3 Cargas Excéntricas

Los elementos estructurales pueden encontrarse sometidos a cargas concéntricas o excéntricas, siendo el primer caso cuando la carga  $P$  (Fig. 6a) coincide con el eje centroidal del elemento y la fuerza axial interna representa una fuerza normal (Fig. 6b).

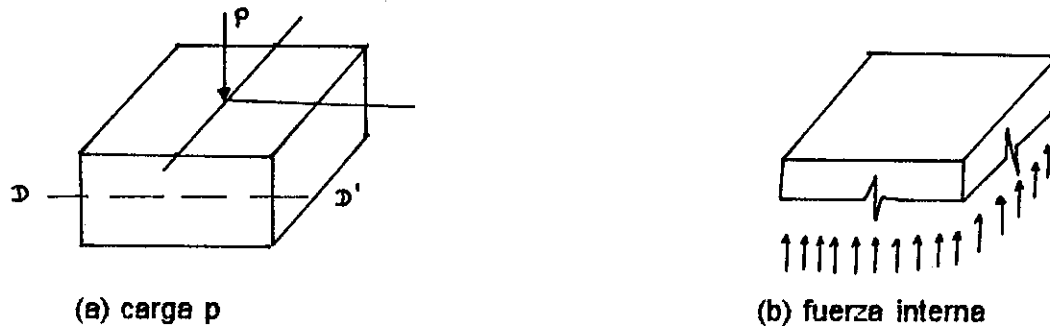


Figura 6

pero en estos elementos la distribución de esfuerzos es uniforme y únicamente estarán sometidos a un esfuerzo de compresión o tensión según la aplicación de la fuerza  $P$ .

$$\sigma_N = \pm P/A$$

Esto debe cumplir con la ley de Saint Venant la cual establece que "aunque varios sistemas de cargas estáticamente equivalentes que actúan sobre un cuerpo pueden tener estos efectos localizados considerablemente diferentes, todos producen esencialmente los mismos esfuerzos en las partes del cuerpo que están suficientemente alejadas de la región de aplicación".<sup>1</sup>

Cuando un elemento está sometido a carga axial excéntrica, produce una distribución de esfuerzo no uniforme, experimentando algunas fibras esfuerzo de compresión altos y otros esfuerzos de compresión bajos o aun esfuerzos de tensión (Fig. 7).

Al aplicar superposición al elemento con carga excéntrica (fig. 7a), éste se analizará con carga axial (Fig. 7b) más dos momentos (Fig. 7c, Fig. 7d), uno alrededor del  $X$  y el otro alrededor del eje  $Y$ .

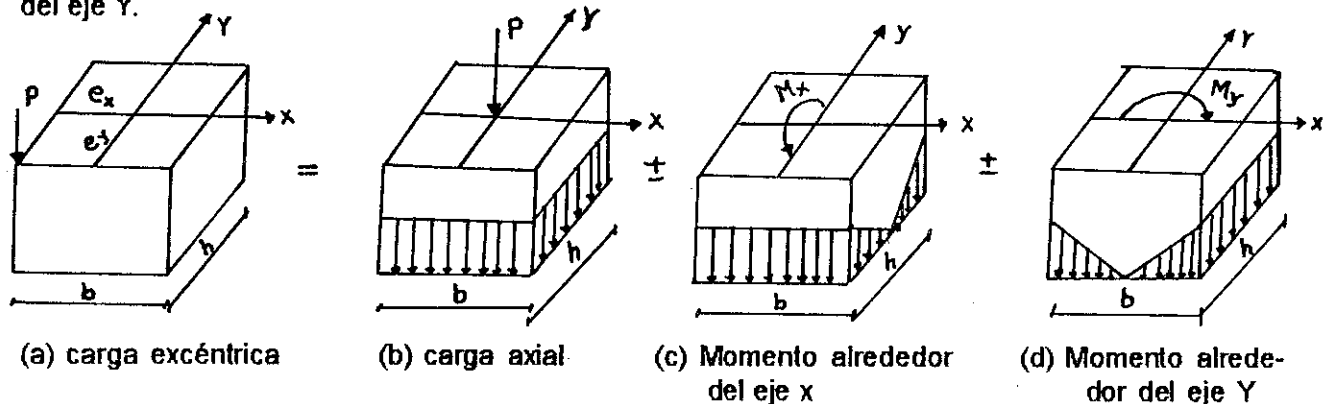


Figura 7

<sup>1</sup> Díaz Sagastume, Resistencia de Materiales, Editorial Limusa, México 1984

el  $M_x = Pe_y$  y el  $M_y = Pe_x$ . El esfuerzo para cualquier punto está dado por la suma del esfuerzo axial, más el esfuerzo flexionante

$$\sigma_N = \sigma_a \pm \sigma_{fx} \pm \sigma_{fy}$$

$$\sigma_N = P/A \pm (M_y X)/I_{yy} \pm (M_x Y)/I_{xx}$$

P es la carga, la cual puede ser positiva o negativa para el esfuerzo axial, tensión y compresión, respectivamente.

En los miembros cargados excéntricamente es posible localizar la línea de esfuerzo dentro del área transversal de un miembro, determinado una línea donde el esfuerzo vale cero. La importancia radica en el hecho que los esfuerzos normales varían linealmente a partir de ella.

### 1.3.1 Núcleo central de la sección

Es una área en la cual la aplicación de la carga P resultante no producirá esfuerzos de tensión en cualquier fibra, hay casos de diseño donde es indeseable que se presenten esfuerzos de tensión. Los muros de mampostería y las zapatas de concreto reforzado pueden fallar bajo la acción de cargas excéntricas, cuando el momento de volcamiento hace que gran parte de la sección transversal esté sujeta a tensión, por ello las zapatas destinadas a recibir momentos en la base se deben diseñar contra volcaduras y presiones no uniformes del suelo.

Para la figura 7a el núcleo central de la sección es:

$$\sigma_N = P/A \pm \frac{(Pe_x)X}{I_{yy}} \pm \frac{(Pe_y)Y}{I_{xx}}$$

siendo  $I_{yy}$  la inercia respecto del eje Y igual a  $1/12 hb^3$  e  $I_{xx}$  la inercia respecto del eje x igual a  $1/12 bh^3$ .

Para ubicar P sobre el eje X,  $\sigma_N = 0$ ,  $e_y = 0$  y  $d = b/2$

$$0 = -P/A \pm \frac{Pe_x (b/2)}{1/12 h b^3} \Rightarrow \rho_x = \pm b/6$$

Para ubicar P sobre el eje Y  $\sigma_N = 0$ ,  $e_x = 0$  y  $d = h/2$

$$0 = -P/A \pm \frac{Pe_y (h/2)}{1/12 b h^3} \Rightarrow \rho_y = \pm h/6$$

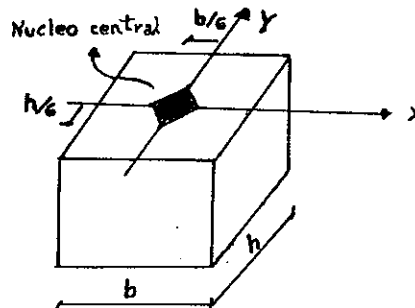
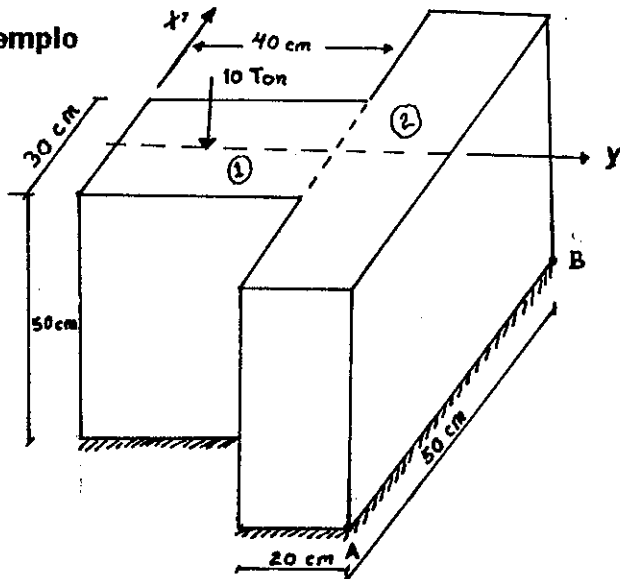


Figura 8



### 1.3.2 Ejemplo



Centroide con respecto a X'

Fig.	Area	$\bar{X}$	$A\bar{X}$
①	40(50)	20	24000
②	20(50)	(40+20)	50000
	$\Sigma = 2200$		$\Sigma = 74000$

Obtener la ubicación de P para que el esfuerzo en la línea A-B = 0

$$X = \frac{\Sigma A\bar{X}}{\Sigma A} \Rightarrow X = \frac{74000}{2200} \Rightarrow \bar{X} = 33.64 \text{ cm}$$

$$M = 10 \text{ ton} \cdot 6.36 \Rightarrow M = 63.6 \text{ TOR cm}$$

$$I = 1/12 bh + A d^2$$

$$I_{x1} = 1/12 (30) (40)^3 + 30 (40) (13.64)^2 = 383259.52 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = 1/12 (50) (20)^3 + 50 (20) (6.36 + 10)^2 = 300982.93 \text{ cm}^4$$

$$I_{total} = 684242.45$$

$$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_A \pm \sigma_I \Rightarrow \sigma_A = \sigma_B = 0$$

$$0 = \frac{P}{Area} \pm \frac{Md}{I}; M = P \text{ eyd}$$

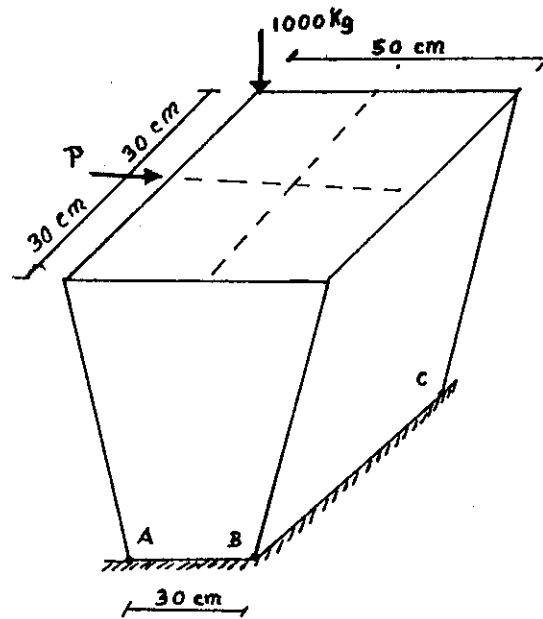
$$0 = - \frac{P}{Area} \pm \frac{P \text{ eyd}}{I} \Rightarrow$$

$$0 = P \left( - \frac{1}{Area} \pm \frac{\text{eyd}}{I} \right) \Rightarrow$$

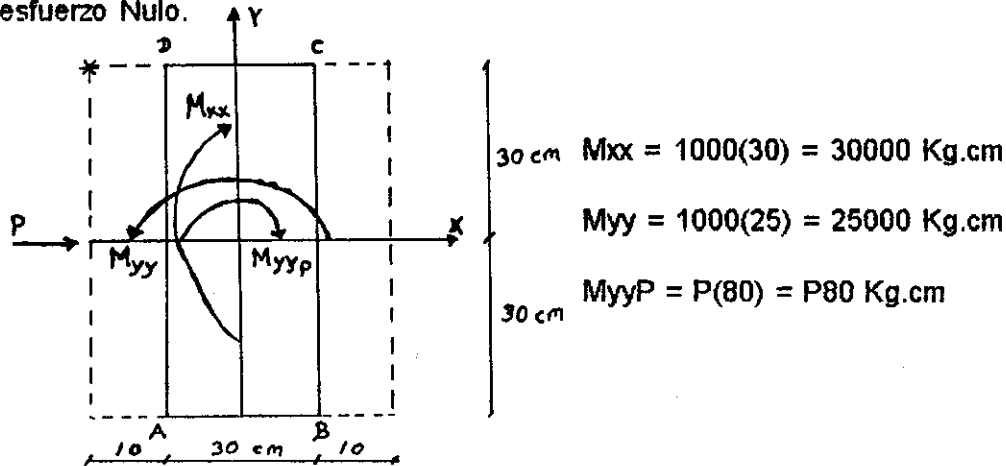
$$\frac{1}{Area} = \frac{\text{eyd}}{I} \Rightarrow \text{ey} = \frac{I}{Ad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ey} = \frac{684242.45 \text{ cm}^4}{(2200) \cdot (26.36) \text{ cm}^3} \Rightarrow \text{ey} = 11.8 \text{ cm}$$

### 1.3.3 Ejemplo



Determinar el valor de P. Para que el esfuerzo en "A" sea cero y determinar la línea de esfuerzo Nulo.



$$30 \text{ cm } M_{xx} = 1000(30) = 30000 \text{ Kg.cm}$$

$$M_{yy} = 1000(25) = 25000 \text{ Kg.cm}$$

$$M_{yy}P = P(80) = P80 \text{ Kg.cm}$$

$$\sigma_N = -\sigma_a + \sigma_{fxx} \pm \sigma_{fyy}$$

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_{yy}(d)}{I_{yy}} \pm \frac{M_{yy}P}{I_{yy}} \pm \frac{M_{xx}(d)}{I_{xx}}$$

$$\sigma_N = -\frac{1000}{30(60)} \pm \frac{25000d}{1/12(60)(30)^3} \pm \frac{P80d}{160/12(30)^3} \pm \frac{30000d}{30/12(60)^3}$$

si  $\sigma_A = 0$

$$0 = -0.56 - \frac{25000(15)}{135000} + \frac{P80(15)}{135000} + \frac{30000(30)}{540000}$$

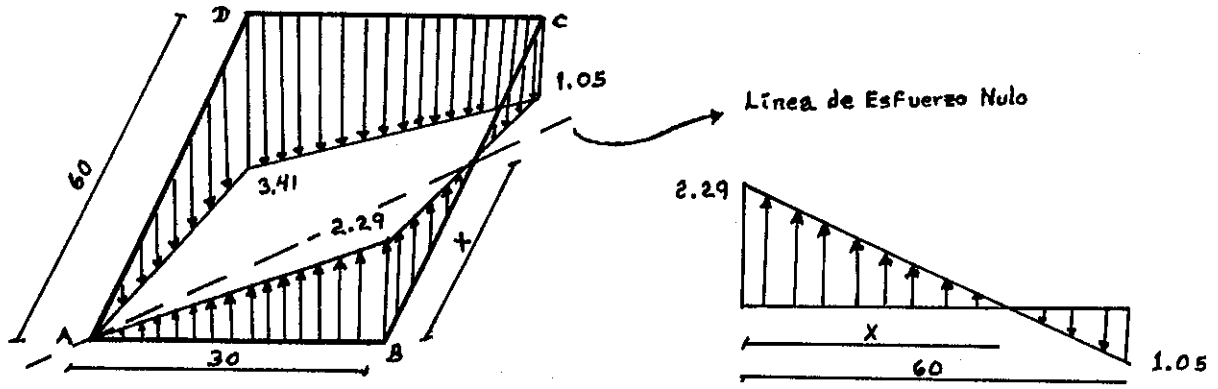
$$0 = -1.67 + \frac{P80(15)}{135000}$$

$$P = 188 \text{ Kg}$$

$$\sigma_B = -0.56 + 0.19(15) - \frac{188(80)15}{135000} + 1.67 = 2.29 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = -0.56 + 0.19(15) - 1.67 - 1.67 = -1.05 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_D = -0.56 - 2.85 + 1.67 - 1.67 = -3.41 \text{ Kg/cm}^2$$



$$\frac{60 - X}{2.29} = \frac{X}{1.05}$$

$$63 - 1.05X = 2.29X \Rightarrow x = 18.86 \text{ cm.}$$

## 1.4 Superposición de esfuerzos cortantes

El esfuerzo cortante actúa paralelo a la superficie, éste al igual que los esfuerzos normales representan la fuerza por unidad de área.

La superposición de esfuerzo cortante es utilizada en elementos circulares, el cual representa un esfuerzo de corte simple y un esfuerzo de torsión.

$$\tau = \tau_s \pm \tau_T$$

siendo  $\tau_s$  el esfuerzo de corte simple y  $\tau_T$  el esfuerzo de corte torsionante.

Si se tiene un pequeño elemento diferencial de un material en forma de un paralelepípedo rectangular, con dimensiones  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  (Fig. 9a).

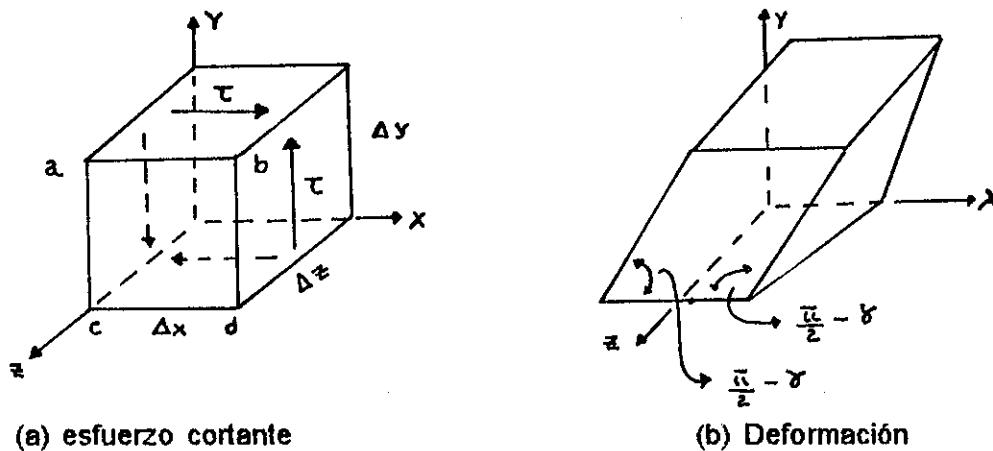


Figura 9

considerar que las caras frontal y posterior están libres de esfuerzo, únicamente existe esfuerzo uniformemente distribuido en la cara superior. Para que esté en equilibrio en la dirección  $x$ , debe actuar un esfuerzo cortante de igual magnitud y sentido contrario en la cara inferior del elemento. La fuerza en la cara superior es  $\tau \Delta x \Delta z$  y esta fuerza es equilibrada por una fuerza de igual magnitud y sentido contrario en la cara inferior. Estas dos fuerzas tienen un momento respecto del eje  $z$  de magnitud  $\tau \Delta x \Delta y \Delta z$ , actuando en el sentido de las manecillas del reloj. El equilibrio del elemento se logra con un momento igual y opuesto, resultante de esfuerzos cortantes que actúan en las caras laterales del elemento. En las caras laterales actuará un esfuerzo igual al de la cara inferior y superior por lo que:

- 1 . - Los esfuerzos cortantes en las caras opuestas de un elemento son de igual magnitud y sentido contrario.
- 2 . - Los esfuerzos cortantes en las caras perpendiculares de un elemento son iguales en magnitud y tienen sentidos tales que ambos esfuerzos apuntan hacia la línea de intersección de las caras sobre las que actúan, o en sentido opuesto.

Esto es válido aun cuando actúan también esfuerzos normales sobre las caras del elemento.

Un elemento sometido únicamente a esfuerzos cortantes, se dice que está sujeto a cortante puro. El esfuerzo de corte origina deformaciones por cortante, el esfuerzo no tiende a alargar o acortar el elemento por lo cual la longitud de los lados del elemento no varían. En vez de ellos los esfuerzos cortantes provocan un cambio de forma del elemento (fig. 9b). El elemento original adquiere la forma de un paralelepípedo oblicuo (romboide).

Los ángulos entre las caras en los puntos b y d, que eran rectos (igual a  $\pi/2$ ) antes de la deformación, se reducen en un pequeño ángulo  $\beta$  a  $(\pi/2) - \beta$ . Al mismo tiempo los ángulos en a y c se incrementan a  $(\pi/2) + \beta$ . El ángulo  $\beta$  es una medida de la distorsión y se denomina deformación angular unitaria.

Los esfuerzos y deformaciones por cortante se suponen positivas si tienen las direcciones mostradas en la figura 9a. Para aclarar estos signos convencionales, hacer referencia a las caras orientadas hacia las direcciones positivas de los ejes como las caras positivas del elemento. En otras palabras, una cara es positiva si su normal se dirige en dirección positiva de un eje coordenado. Las caras opuestas son caras negativas. Por lo que en la fig. 9b, las caras derecha, superior y frontal son caras positivas según X, Y y Z, respectivamente y las caras opuestas son caras negativas según X, Y y Z. Al utilizar esta terminología se pueden establecer los signos convencionales para esfuerzos cortantes como sigue:

Un esfuerzo cortante que actúa sobre una cara positiva de un elemento, es positivo si actúa en dirección positiva de uno de los ejes coordenados y es negativo si actúa en una dirección negativa del eje. Un esfuerzo cortante que actúa en una cara negativa del elemento, es positiva si actúa en dirección negativa de uno de los ejes coordenados y negativo si actúa en la dirección positiva. Por lo tanto, los esfuerzos cortantes mostrados en la Fig 9a son positivos. Una cara es positiva si su normal se dirige en la dirección del eje coordenado.

La deformación angular de un elemento es positiva cuando se reduce el ángulo entre caras positivas (o entre caras negativas). La deformación angular es negativa cuando el ángulo entre dos caras positivas (o dos caras negativas) se incrementa. Por lo que las deformaciones mostradas en la Fig. 9b son positivas y se aprecia que los esfuerzos cortantes positivos producen deformaciones angulares positivas.

#### El esfuerzo cortante simple

$$\tau_s = (VQ) / (Ib)$$

$$\tau_s = (VAY) / (Ib)$$

siendo V el valor de la fuerza cortante; A el área de la sección medida a partir del eje neutro (positiva o negativa); Y el centroide a partir del eje neutro; I la inercia y b el valor de la cuerda.

En secciones circulares el esfuerzo de corte producido por torsión es tangencial al contorno Fig. 10.

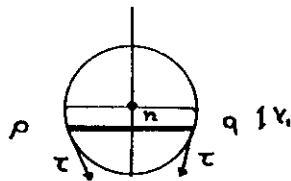


Figura 10

los esfuerzos cortantes  $\tau$  en los extremos de la cuerda deben ser tangentes al contorno de la sección (Fig. 10). En el punto medio  $n$  de la cuerda, la simetría requiere que el esfuerzo cortante sea paralelo al eje Y. Por lo que las líneas de acción de los esfuerzos cortantes en los puntos P y N se Intersectarán en un punto sobre el eje Y. Suponiendo que el esfuerzo cortante en cualquier otro punto sobre la línea  $pa$  también se dirige hacia este mismo punto, se habrá definido de esta manera las direcciones de los esfuerzos cortantes restantes.

En el eje neutro los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje Y y tienen magnitud constante (aquí es máximo) en la sección.

El esfuerzo cortante está definido por

$$\tau = (VAY)/Ib \pm (T\rho)/J$$

La Figura 11 se encuentra afectada por la carga P y el Momento torsor T

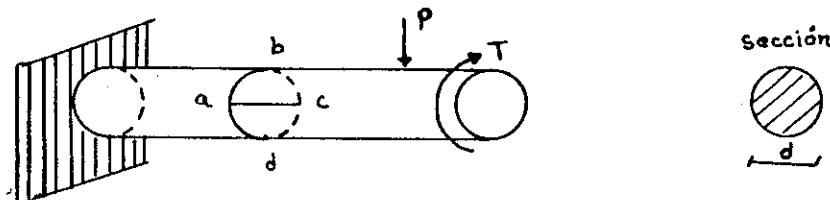


Figura 11

al aplicar superposición para determinar el estado de esfuerzo en la sección abcd está representada en la Fig. 12a y Fig. 12b.

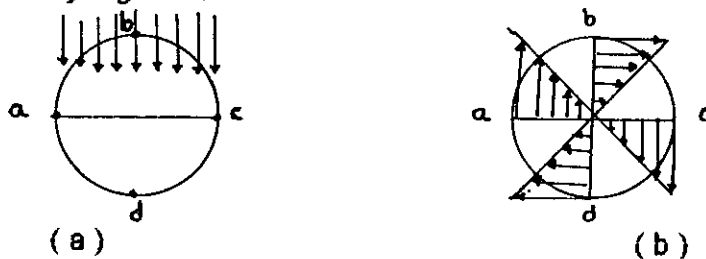
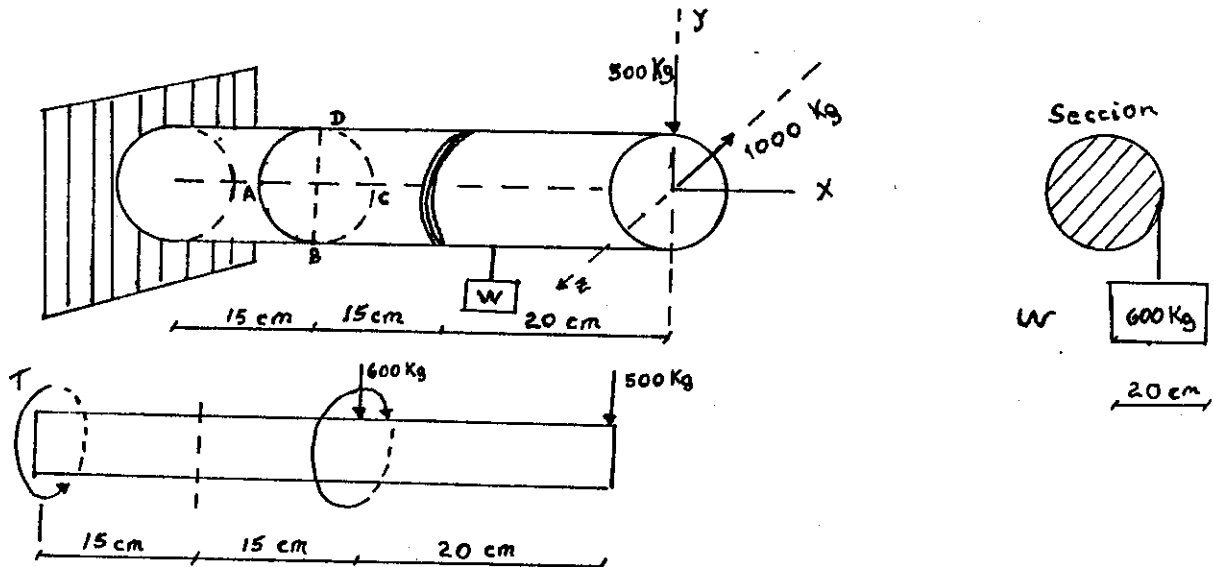


Figura 12

el esfuerzo máximo se tendrá en el punto c y el esfuerzo mínimo en el punto a.

### 1.4.1 Ejemplo

Para la sección indicada determinar el estado de esfuerzo



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R - 600 - 500 = 0 \Rightarrow R = 1100 \text{ Kg}$$

$$\Sigma T = 0 \Rightarrow -T + 600 = 0 \Rightarrow T = 600 \text{ Kg.cm}$$

#### 1.4.1.1 Esfuerzo Cortante

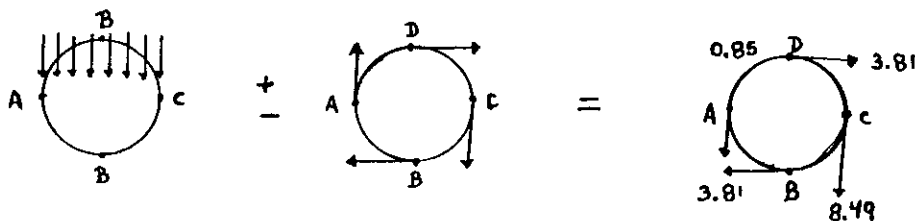
##### 1.4.1.1 Esfuerzo para cargas en Y

$$\tau_c = \tau_y \pm \tau_t$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \pm \frac{Td}{Ib} = \frac{VAy}{J} + \frac{Td}{J}$$

$$\tau = \frac{-1100 \left( \frac{\pi(10)^2}{2} \right) \left( \frac{4(10)}{3\pi} \right) \pm \frac{6000(10)}{\pi(10)^4}}{\frac{\pi(10)^4 (20)}{4} \cdot 2}$$

$$\tau = -4.668 \text{ kg/cm}^2 \pm 3.8197 \text{ Kg/cm}^2$$



### 4.1.4.1.3 Esfuerzo para cargas en Z

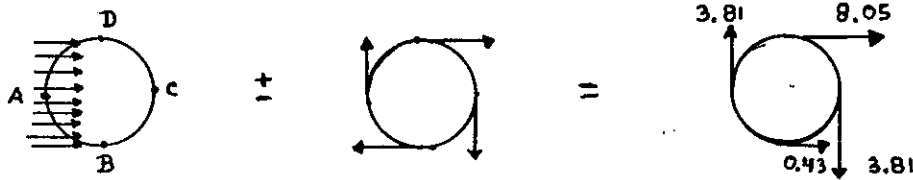
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -Vx + 1000 = 0 \Rightarrow V = 1000 \text{ Kg}$$

$$\tau = \frac{VAy}{Ib} \pm \frac{Td}{j}$$

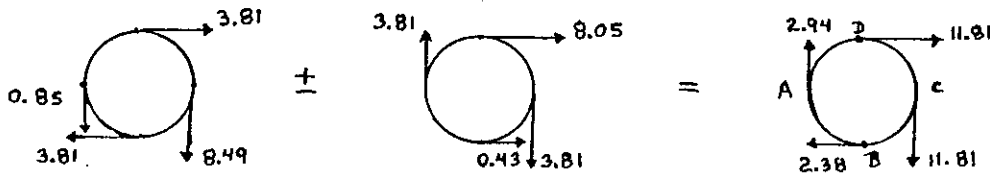
$$\tau = 1000 \frac{\pi(10)^2}{2} \frac{4(10)}{3\pi} \pm \frac{6000(10)}{\frac{\pi(10)^4}{2}}$$

$$\frac{(10)4}{4} \quad (20)$$

$$\tau = 4.24 \pm 3.8197$$



### 1.4.1.4 Esfuerzo Resultante Plano y - z

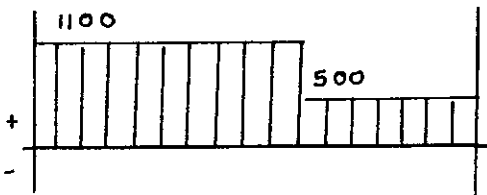


### 1.4.1.5 Esfuerzos Normales

$$\sigma_N = \sigma_a \pm \sigma_F$$

$$\sigma_N = \pm \frac{Md}{I}$$

Esfuerzo en y  
Diagrama de Corte

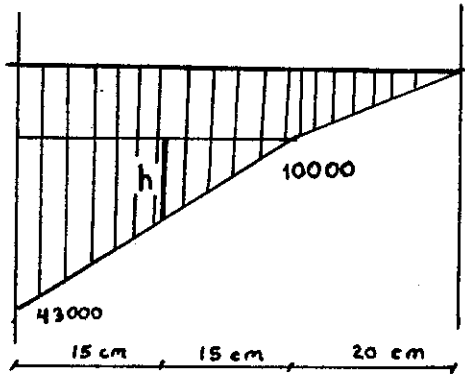


$$M_R = 600(30) + 500(50)$$

$$M_R = 43000 \text{ Kg. cm}$$



**Diagrama de Momentos**



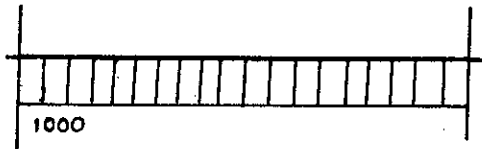
En la sección indicada el momento es:

$$\frac{30}{33000} = \frac{15}{h} \Rightarrow h = 16500 \text{ Kg.cm}$$

$$\sigma_{NZ} = \frac{(16500 + 10000)10}{\frac{\pi(10)^4}{4}}$$

$$\sigma_{NZ} = 33.74 \text{ Kg/cm}^2$$

**Esfuerzo en z  
Diagrama de Corte**

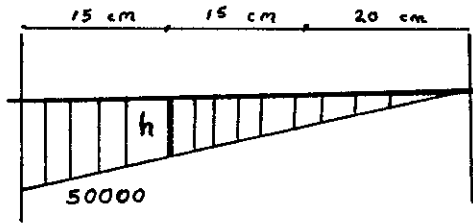


$$M_R = 1000(50) = 50000 \text{ Kg.cm}$$

En la sección indicada el momento es:

$$\frac{50000}{50} = \frac{h}{35} \Rightarrow h = 35000 \text{ Kg.cm}$$

**Diagrama de Momento**



$$\sigma_{NZ} = \frac{35000(10)}{\frac{(10)^4}{4}} = 44.56 \text{ Kg/cm}^2$$

## CAPÍTULO 2

### Transformación de esfuerzos

#### 2.1. Elementos sometidos a esfuerzos normal y cortante

Si una fuerza axial o un momento flexionante, actúa junto a una fuerza cortante o un momento torsionante, los elementos estructurales o mecánicos quedarán sometidos a esfuerzos normales y a esfuerzos cortantes.

La carga vertical  $P$  (Fig. 13) produce dos tipos distintos de efectos claramente diferenciados, la fuerza cortante y el momento flexionante.

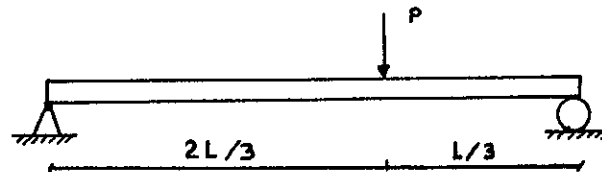


Figura 13

Los efectos que se generan son:

- 1.- Un esfuerzo normal directamente proporcional al momento flexionante.
- 2.- Un esfuerzo cortante que depende de la fuerza cortante.

Existe una relación entre el momento flexionante y los esfuerzos por flexión que se producen y entre la fuerza cortante vertical y los esfuerzos cortantes. Para estos casos es claro que las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal del elemento estructural.

Los esfuerzos normales producidos por el momento flexionante se llaman esfuerzos por flexión y las relaciones entre estos esfuerzos y el momento flexionante se expresan mediante la fórmula de la flexión.

$$\sigma_N = \pm \sigma_F = (Mc)/I$$

Esfuerzo cortante vertical y su relación con el esfuerzo cortante horizontal

Un esfuerzo cortante vertical va siempre acompañado de un esfuerzo horizontal del mismo valor (Fig. 14), dicho esfuerzo da lugar a la fuerza vertical resistente  $V_r = f_c d a$  que equilibra a la fuerza cortante vertical  $V$ .

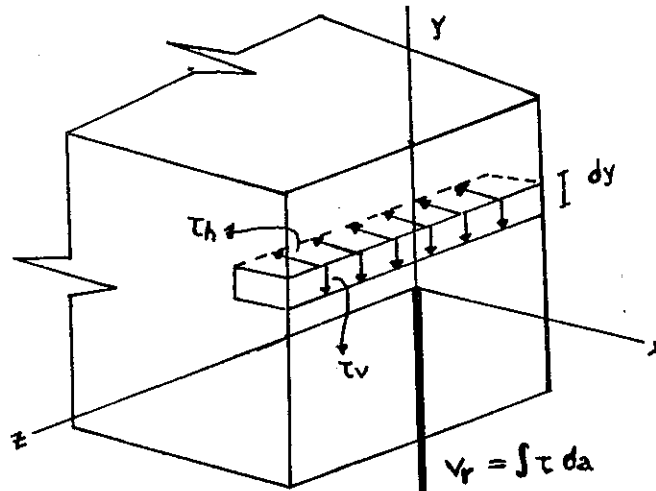


Figura 14 Esfuerzo cortante vertical y horizontal

Los efectos de los esfuerzos vertical y horizontal se representan en un elemento diferencial (Fig. 15 a)

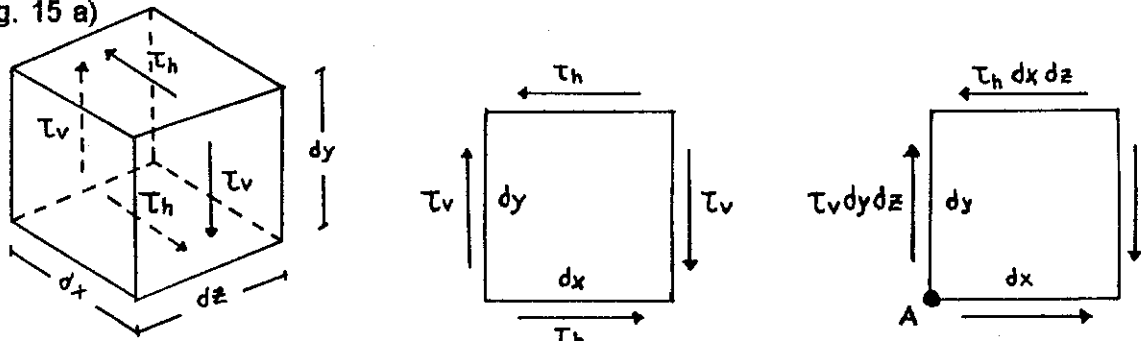


Figura 15

Haciendo sumatoria de Momentos en el punto A (Fig. 15c)

$$MA = 0 \quad +$$

$$-(\tau_h dx dz) dy + (\tau_v dy dz) dx = 0$$

$$(\tau_h dx dz) dy = \tau_v dy dz dx =$$

$$\tau_h = \tau_v$$

por lo que un esfuerzo cortante que actúa en la cara de un elemento va acompañado siempre de otro numéricamente igual en una cara perpendicular al primero.

El esfuerzo cortante en una sección rectangular (Fig. 16) se puede obtener aplicando

$$\tau = (VAy)/Ib$$

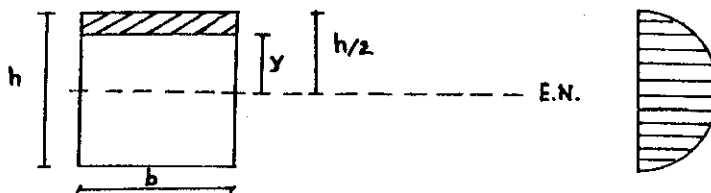


Figura 16 distribución de esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular

para obtener el esfuerzo en la parte ashurada

$$\tau = (V/lb) [b(h/2)-y] (y+(1/2) ((h/2) - (y))$$

$$\tau = (V/l) (1/2) ((h^2 /4) -y^2)$$

lo que demuestra que  $\tau$  va aumentando a partir del eje neutro, lo cual hace que el corte sea mínimo en  $h/2$  y el esfuerzo de corte máximo será

$$\tau_{\max} = (VAy) / (lb) = [V / (bh/2) (h/4)] / [(1/12) (bh^3) b]$$

$$\tau_{\max} = (12Vh^2) / (2 (4) h^3b) = (3V) / (2hb)$$

### 2.1.1 El esfuerzo por corte, el esfuerzo normal y las dimensiones de los elementos

En vigas cortas fuertemente cargadas, las dimensiones vendrán dadas generalmente por el esfuerzo de cortante que varía con  $V$ , mientras que en vigas largas suele ser el esfuerzo normal o por flexión el que limita la carga o determina las dimensiones de la sección, ya que el momento flexionante aumenta con la longitud y las cargas. El esfuerzo cortante tiene mayor importancia en las vigas de madera que en el acero por la poca resistencia al cortante que representan aquellas.

### 2.2. Ecuación de la transformación de esfuerzo

Las vigas y barras circulares, pueden estar sometidas a esfuerzo cortante y esfuerzo normal, los cuales pueden obtenerse a través de la fórmulas de la flexión y cortante, estos esfuerzos actúan sobre la sección transversal de los miembros.

En esfuerzo uniaxial y cortante puro, los esfuerzos máximos para una barra con carga axial ocurren en planos inclinados a  $45^\circ$ , y los esfuerzos de tensión y compresión máximos para una barra en torsión también ocurren sobre planos a  $45^\circ$ . En secciones inclinadas a lo largo de una viga pueden estar afectadas a esfuerzos normales y cortantes, y éstos pueden ser mayores que los que actúan en una sección transversal.

Para la transformación de esfuerzos es necesario asociar un conjunto de ejes coordenados con cada posición de un elemento esforzado. Con ello puede obtenerse las relaciones de la transformación que proporcionan las componentes que actúan sobre los lados de un elemento esforzado, girado a cualquier posición deseada, si se supone que se conocen los esfuerzos para la posición de referencia. Este proceso se conoce como transformación de esfuerzos.

#### 2.2.1 Esfuerzo Plano

Las condiciones de esfuerzo existentes en barras cargadas axialmente, barras en torsión y vigas son casos de esfuerzo plano. Para analizar el esfuerzo plano es necesario considerar un elemento infinitesimal (Fig. 18 a). Las aristas del elemento son paralelas al eje  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , las caras de los elementos se designan considerando las direcciones de sus normales salientes.

De esta manera la cara derecha del elemento se designa como la cara X positiva y la cara izquierda se designa como la cara X negativa. Similarmente la cara Y positiva es la cara superior y la cara frontal es la cara Z positiva.

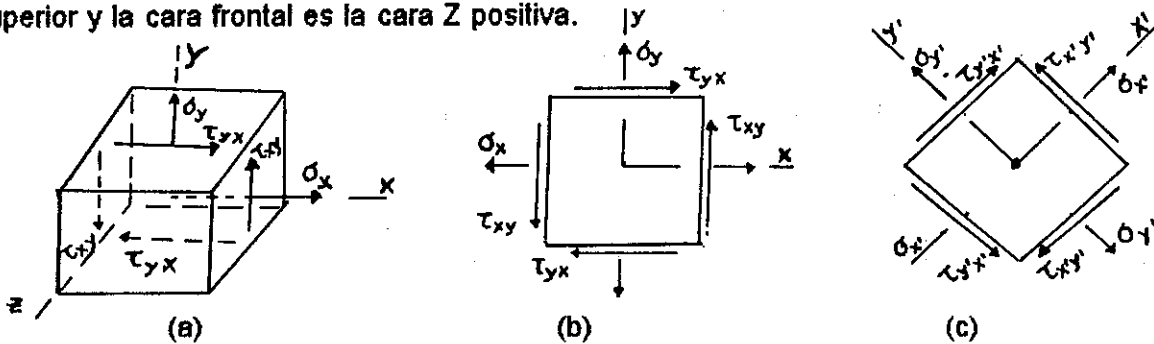


Fig 17 elemento en esfuerzo plano

En el esfuerzo plano, solo las caras X e Y del elemento están sometidas a esfuerzos y todos los esfuerzos actúan paralelos a los ejes X e Y (Fig. 17 a). Un esfuerzo normal ( $\sigma$ ) tiene un subíndice que indica la cara sobre la cual actúa el esfuerzo, en caras opuestas del elemento actúan esfuerzos normales iguales, indicando tensión un esfuerzo positivo. Un esfuerzo cortante ( $\tau$ ) tiene dos subíndices; el primero denota la cara sobre lo cual actúa el esfuerzo y el segundo indica la dirección en tal cara. El esfuerzo  $\tau_{xy}$  actúa en la cara X y en dirección del eje Y, el esfuerzo  $\tau_{yx}$  actúa en la cara Y y en la dirección del eje X. Un esfuerzo cortante es positivo cuando actúa sobre la cara positiva del elemento, en la dirección positiva de un eje, y negativo, cuando actúa sobre la cara positiva, en la dirección negativa de un eje. Por lo que los esfuerzos  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  mostrados en las caras positivas X e Y (Fig. 17 a) son esfuerzos cortantes positivos. Similarmente sobre una cara negativa del elemento, el esfuerzo cortante es positivo en la dirección negativa de un eje, por lo que los esfuerzos  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  mostrados sobre las caras negativas X e Y del elemento en la figura, también son positivos.

Un elemento bajo esfuerzo plano generalmente es representado bidimensionalmente (Fig. 17 b), el elemento es un cuerpo sólido con espesor constante y perpendicular al plano de la figura.

Cuando se conocen los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en estructuras sometidas a flexión y torsión puede determinarse el estado de esfuerzo que actúa sobre secciones inclinadas (Fig. 17 c), en las cuales las caras son perpendiculares y paralelas a la sección inclinada. Para este elemento se tienen los ejes  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , este último permanece constante mientras que el eje  $X'$  y  $Y'$  son girados un ángulos respecto de los ejes X e Y, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

## 2.2.2 Problema Básico

Los esfuerzos se consideran vectores, pero existe el problema que no se pueden sumar y restar vectorialmente, esto es debido a que en ellos está asociada la unidad de área en la que actúan. Cuando se combinan los esfuerzos normales y cortantes el problema básico se resuelve convirtiendo en fuerzas los esfuerzos, las cuales si son cantidades vectoriales simples y, de esta forma se pueden sumar y restar directamente como vectores.

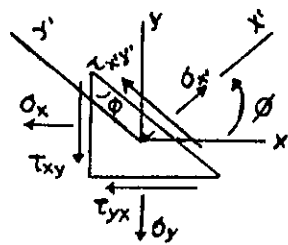
Para un elemento girado se cumple también que:

$$\tau_{xy'} = \tau_{y'x}$$

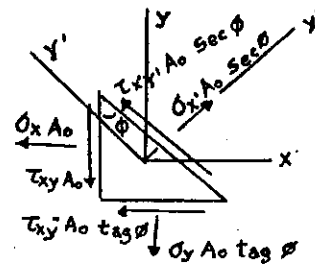
los esfuerzos cortantes que actúan sobre las cuatro caras del elemento se determinan calculando el esfuerzo cortante que actúa sobre cualquier cara.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos girados ( $X'$ ,  $Y'$ ) pueden expresarse en términos de los esfuerzos sobre el elemento  $XY$ , mediante las ecuaciones de equilibrio estático y eligiendo un elemento en forma de cuña.

Para obtener los esfuerzos girados se utilizará el elemento en forma de cuña, cuya cara inclinada es la cara  $X'$  del elemento girado y cuyas otras dos caras laterales son paralelas a los ejes  $X$  y  $Y$  (Fig. 19a). Para escribir las ecuaciones de



(a) Esfuerzos sobre el elemento



(b) Fuerzas sobre el elemento

Figura 18 Elemento en forma de cuña en esfuerzo plano.

equilibrio es necesario obtener las fuerzas que actúan sobre estas caras. Se designa el área de la cara izquierda (la cara  $X$  negativa) como  $A$ , con ello las fuerzas normal y cortante que actúan sobre esta cara son  $\sigma_x A$  y  $\tau_{xy} A$  (Fig. 18 b). El área de la cara inferior (cara  $Y$  negativa) es  $A \tan \phi$  y el área de la cara inclinada (cara  $X'$  positiva) es  $A \sec \phi$ . Las cuatro fuerzas que actúan sobre la cara izquierda e inferior, pueden resolverse en componentes ortogonales que actúan en las direcciones  $X'$  e  $Y'$ .

La suma de fuerzas en dirección  $X'$ , es

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} A \sec \phi - \sigma_x A \cos \phi - \tau_{xy} A \sin \phi \\ - \tau_{yx} A \tan \phi \sin \phi - \sigma_y A \tan \phi \cos \phi = 0 \end{aligned}$$

La suma de fuerzas en dirección  $Y'$ , es

$$\begin{aligned} \tau_{xy} A \sec \phi + \sigma_x A \sin \phi - \tau_{yx} A \cos \phi \\ - \sigma_y A \tan \phi \cos \phi + \sigma_y A \tan \phi \sin \phi = 0 \end{aligned}$$

Aplicando trigonometría y teniendo en cuenta que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , se obtienen las ecuaciones

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi + 2\tau_{xy} \sin \phi \cos \phi$$

$$\tau'_{xy} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

estas proporcionan los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el plano  $X'$ , en función del ángulo de rotación  $\theta$  y los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  que actúan sobre los planos  $X$  e  $Y$ .

El eje  $X'$  es vertical, por lo que el esfuerzo  $\tau'_{xy}$  es positivo a la izquierda, lo que se opone a la dirección positiva de  $\tau_{xy}$ .

Al introducir las identidades trigonométricas

$$\cos^2\theta = 1/2(1 + \cos 2\theta); \sin^2\theta = 1/2(1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin\theta \cos\theta = 1/2 \sin 2\theta$$

las ecuaciones de los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el plano  $x'$ , quedan

$$\sigma'_{xx} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -((\sigma_x - \sigma_y)/2) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

estas ecuaciones para  $\sigma'_{xx}$  y  $\tau'_{xy}$  se conocen como las ecuaciones de transformación para esfuerzo plano, porque transforma las componentes de esfuerzo de un conjunto de ejes a otro.

Los esfuerzos normales  $\sigma'_{yy}$  que actúan sobre la cara  $Y'$  del elemento girado se obtienen al sustituir  $\theta$  por  $\theta+90^\circ$  en

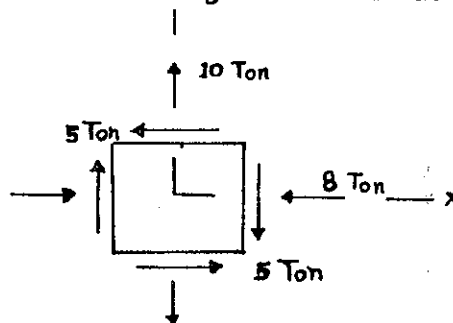
$$\sigma'_{xx} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

lo que da como resultado que

$$\sigma'_{yy} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) - ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

### 2.2.3 Ejemplo

Un elemento se encuentra sometido al siguiente estado de esfuerzos



Determinar los esfuerzos sobre el elemento girado

- 40° respecto del eje  $x$
- 15° respecto del eje  $x$

a) Para  $\theta = 40^\circ$ ,  $\sigma_x = -8T$ ,  $\sigma_y = 10T$  y  $\tau_{xy} = -5T$

$$\sigma_{x'} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = ((-8 + 10)/2) + ((-8 - 10)/2) \cos 2(40) + (-5) \sin 2(40)$$

$$\sigma_{x'} = -5.49 \text{ T/cm}^2$$

El esfuerzo de corte si tiene sentido a favor de las manecillas del reloj es negativo, en caso contrario es positivo.

$$\sigma_{y'} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) - ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

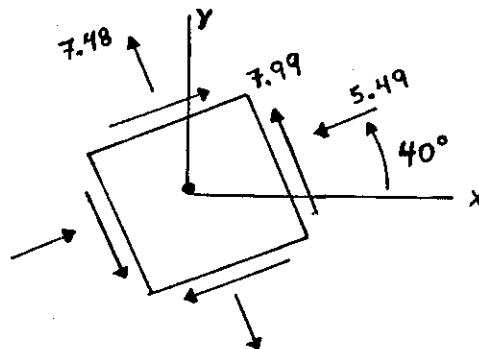
$$\sigma_{y'} = ((-8 + 10)/2) - ((-8 - 10)/2) \cos 2(40) - (-5) \sin 2(40)$$

$$\sigma_{y'} = 7.48 \text{ T/cm}^2$$

$$\tau_{x'y'} = -((\sigma_x - \sigma_y)/2) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -((-8 - 10)/2) \sin 2(40) + (-5) \cos 2(40)$$

$$\tau_{x'y'} = 7.99 \text{ T/cm}^2$$



Para  $\theta = -15^\circ$

Esfuerzos normales

$$\sigma_{x'} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = ((-8 + 10)/2) + ((-8 - 10)/2) \cos 2(-15) + (-5) \sin 2(-15)$$

$$\sigma_{x'} = -4.29 \text{ T/cm}^2$$

$$\sigma_{y'} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) - ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = ((-8 + 10)/2) - ((-8 - 10)/2) \cos 2(-15) - (-5) \sin 2(-15)$$

$$\sigma_{y'} = 6.29 \text{ T/cm}^2$$

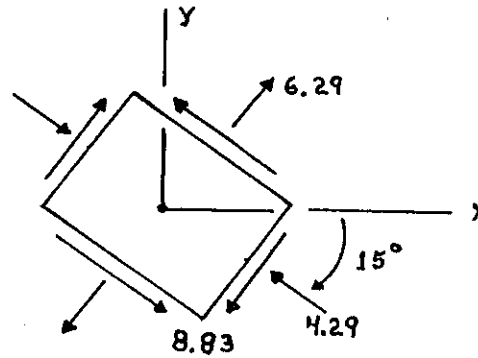


### Esfuerzo de corte

$$\tau_{x'y'} = -((- \sigma_x + \sigma_y)/2) \operatorname{sen} 2\varnothing + \tau_{xy} \cos 2\varnothing$$

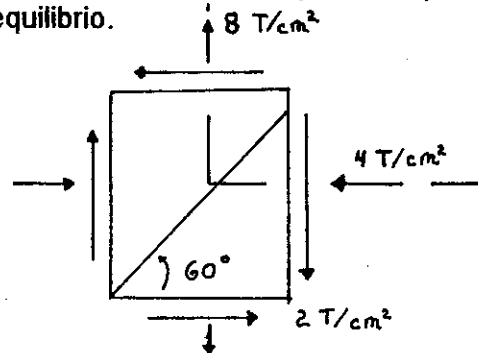
$$\tau_{x'y'} = -((-8 - 10)/2) \operatorname{sen} 2(-15) + (-5) \cos 2(-15)$$

$$\tau_{x'y'} = -8.83 \text{ T/cm}^2$$



### 2.2.4 Ejemplo

Encontrar el valor de esfuerzo cortante y normal para que la cuña aislada por la orientación indicada esté en equilibrio.

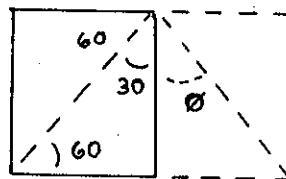


El valor de  $\varnothing$  puede ser:

a) Para  $\varnothing$  respecto a la deducción de fórmulas de transformación de esfuerzo

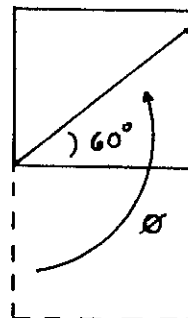
ángulo de deducción positivo

$$\varnothing = -30^\circ$$



b) Para  $\varnothing$  medido respecto de la orientación de la cuña

$$\varnothing = 90 + 60 = 150^\circ$$



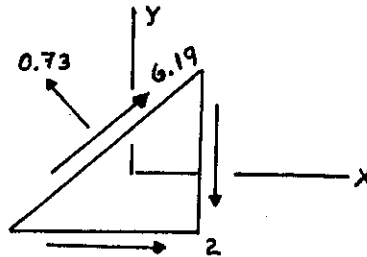
El esfuerzo normal y cortante puede encontrarse con  $\varnothing = -30^\circ$  o  $\varnothing = 150^\circ$

### Esfuerzo Normal

$$\sigma_x' = ((-4 + 8)/2) + ((-4 - 8)/2) \cos 2(-30) + (-2) \sin 2(-30) = 0.73 \text{ T/cm}^2$$

### Esfuerzo de Corte

$$\tau_{xy}' = -((-4 + 8)/2) \sin 2(-30) + (-2) \cos 2(-30) = -6.19 \text{ T/cm}^2 - 6.03 \text{ T/cm}^2$$



### 2.3 Esfuerzo cortante máximo

A través de las ecuaciones de la transformación de esfuerzo puede conocerse el esfuerzo en cualquier ángulo  $\theta$ , a partir del eje X.

Cuando se necesita diseñar elementos, tiene mayor importancia el esfuerzo máximo y mínimo, es por ello que a través de las ecuaciones de la transformación de esfuerzo pueden deducirse los esfuerzos normales máximos y mínimos, los cuales son llamados esfuerzos principales.

Para obtener los ángulos para los cuales el esfuerzo normal es máximo y mínimo, se deriva la ecuación de la transformación de esfuerzo respecto de  $\theta$  ( $d\theta$ ), en este caso el esfuerzo  $\sigma'$  representa el esfuerzo máximo y mínimo girado respecto del eje X.

$$\sigma' = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2 \tau_{xy} \cos 2\theta$$

esta última ecuación al igualarla a cero proporciona los ángulos en los cuales actúan los esfuerzos principales

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2 \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = (2 \tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)$$

$2\theta_p$  representa el ángulo de los esfuerzos principales, los cuales se encuentran entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . Lo cual permite determinar que el ángulo más pequeño estará entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , y el mayor entre  $180^\circ$  y  $360^\circ$ , ambos ángulos difieren en  $180^\circ$ .

De acuerdo a la ecuación

$$\tan 2\theta_p = (2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y) \quad \theta_p = [\tan^{-1} ((2\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y))]$$

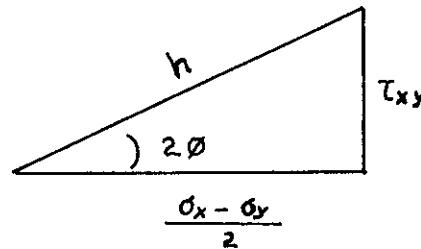
solo el ángulo  $\theta_p$  tendrá dos valores que difieren en  $90^\circ$ , uno entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y el otro entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ , los que permiten determinar que los esfuerzos máximos y mínimos ocurren en planos mutuamente perpendiculares.

Al sustituir los valores de  $\theta_p$  en la ecuación.

$$\sigma' = \sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

se obtiene el valor de los esfuerzos máximos ( $\sigma_a$ ) y mínimo ( $\sigma_b$ ). Al  $\sigma_a$  le corresponde el mayor ángulo ( $\theta_p$ ) y al  $\sigma_b$  le corresponde el menor ángulo ( $\theta_p$ ).

Una forma general para determinar los esfuerzos principales es:



donde:

$$\cos 2\theta_p = ((\sigma_x + \sigma_y) / (2h)), \quad \sin 2\theta_p = (\tau_{xy}) / h$$

$$h^2 = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2)^2 + (\tau_{xy})^2$$

para obtener la raíz de h utilizar la positiva, al sustituir el valor de  $\cos 2\theta$  y  $\sin 2\theta$  en

$$\sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

se obtiene

$$\sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) ((\sigma_x - \sigma_y) / (2h)) + \tau_{xy} (\tau_{xy}) / (h)$$

$$\sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + (1/h) [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + (\tau_{xy})^2]$$

donde  $[((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + (\tau_{xy})^2] = h^2$ , entonces

$$\sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + 1/h (h^2)$$

$$\text{Si } h = [((\sigma_x + \sigma_y) / 2)^2 + (\tau_{xy})^2]^{1/2}$$

la ecuación para esfuerzos principales es

$$\sigma_{a,b} = \begin{matrix} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{matrix} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \left[ \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

esta ecuación parte de la condición que

$$\sigma_{\text{máximo}} + \sigma_{\text{mínimo}} = \sigma_x + \sigma_y$$

correspondiendo al esfuerzo máximo el signo positivo, al esfuerzo mínimo el signo negativo, correspondiendo a este último el menor ángulo ( $\theta_p$ ), medido siempre respecto del eje x. tomando en cuenta que el esfuerzo mínimo difiere del máximo en  $90^\circ$ , es decir, son perpendiculares, por lo que al ángulo que contiene al esfuerzo mínimo es necesario sumarle  $90^\circ$  para ubicar al esfuerzo máximo.

### Esfuerzo cortante máximo

Dentro de un estado de esfuerzo existen planos de elementos girados en los que actúan los esfuerzos cortantes máximos.

De acuerdo a la ecuación

$$\tau_{xy} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

y derivando respecto de  $\theta$  ( $d\theta$ )

$$(d\tau_{xy})/d\theta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$(d\tau_{xy})/\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

igualando la derivada a cero, se encontrará el ángulo ( $\theta_c$ ) respecto del eje X donde se encuentra el corte máximo.

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

$$\text{Tag } 2\theta_c = -(\sigma_x - \sigma_y) / (2\tau_{xy})$$

$\theta_c$  define la orientación de los planos de esfuerzos cortantes máximos. Esta última ecuación proporciona un valor  $\theta_c$  entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y el otro entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ , estos dos valores difieren en  $90^\circ$ . Por lo que los esfuerzos cortante máximo y mínimo ( $\tau_{xy}$ ) ocurren sobre planos perpendiculares. Los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares son iguales en valor absoluto, los esfuerzos cortantes máximos y mínimos difieren únicamente en el signo.

Comparando las ecuaciones

$$\tag 2 \varnothing_p = (2\tau xy) / (\sigma_x - \sigma_y) \quad \text{y} \quad \tag 2 \varnothing_c = -((\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau xy)$$

se puede observar que  $\tag 2 \varnothing_c$  es el inverso de  $\tag 2 \varnothing_p$ . Esto significa que los ángulos  $2 \varnothing_c$  y  $2 \varnothing_p$  difieren en  $90^\circ$ , por lo que  $\varnothing_c$  y  $\varnothing_p$  difieren en  $45^\circ$ ; es por ello que los planos de esfuerzo cortante máximo están a  $45^\circ$  de los planos principales.

El plano del esfuerzo cortante algebraicamente máximo está definido por el ángulo  $\varnothing_{c1}$  para el cual se pueden obtener las ecuaciones.

$$\cos 2 \varnothing_{c1} = \tau xy / (h) \quad \text{sen} 2 \varnothing_{c1} = -((\sigma_x - \sigma_y) / 2h)$$

donde  $2 \varnothing_{c1}$  es el ángulo del esfuerzo cortante máximo y al sustituir las ecuaciones anteriores en

$$\tau x' y' = -((\sigma_x - \sigma_y) / 2) \text{sen} 2 \varnothing + \tau xy \cos 2 \varnothing$$

se obtiene

$$\tau x' y' = -((\sigma_x - \sigma_y) / 2) - ((\sigma_x - \sigma_y) / 2h) + \tau xy ((\tau xy) / h)$$

$$\tau x' y' = (1/h) [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau xy)^2]$$

si  $h^2 = [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + (\tau xy)^2]$  entonces

$$\tau x' y' = h^2 / h$$

donde

$$h = [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + (\tau xy)^2]^{1/2}$$

por lo que la ecuación de esfuerzo cortante es

$$\tau x' y' = \pm [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + (\tau xy)^2]^{1/2}$$

el signo positivo corresponde al esfuerzo cortante máximo y el negativo al esfuerzo cortante mínimo.

El ángulo del esfuerzo cortante máximo se obtiene

$$\varnothing_{c1} = \varnothing_p - 45^\circ$$

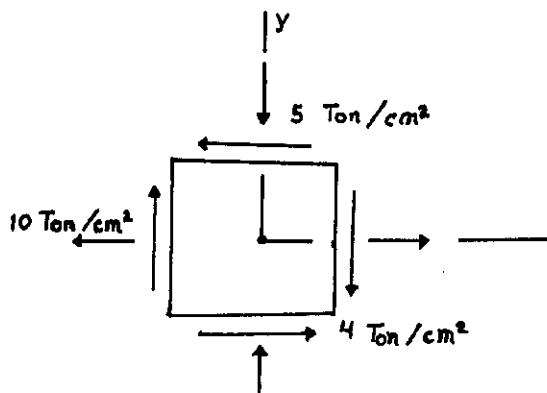
donde  $\phi_p$  es el ángulo mayor en el cual se encuentra el esfuerzo normal máximo medido respecto del eje x.

Sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos también actúan esfuerzos normales, los cuales son llamados esfuerzos normales medios ( $\sigma_{medio}$ ) o esfuerzo normal asociado. El valor de éstos se obtienen a través de

$$\sigma_{medio} = \sigma_{asociado} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

### 2.3.1 Ejemplo

Un elemento en esfuerzo plano está sometido a los esfuerzos



Determinar

- Esfuerzos principales y plano orientado
- Esfuerzos cortante máximo y mínimo y normal asociado con su respectivo plano orientado.

a) Esfuerzos principales

$$\sigma_x = 10 \text{ Ton/cm}^2 \quad \sigma_y = -5 \text{ Ton/cm}^2 \quad \tau_{xy} = -4$$

Ángulo para ubicar los esfuerzos

$$\tan 2\phi_p = (2 \tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y)$$

$$2\phi_p = [\tan^{-1} ((2(-4)) / (10 - (-5)))] = -28.1^\circ$$

El valor de  $\phi_p$  entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  es

$$2\phi_p = 180^\circ - 28.1^\circ = 151.9^\circ \text{ y } \phi_p = 75.95^\circ$$

El valor de  $\phi_p$  entre  $180^\circ$  y  $360^\circ$  es

$$2\phi_p = 360^\circ - 28.1^\circ = 331.9^\circ \text{ y } \phi_p = 165.95^\circ$$

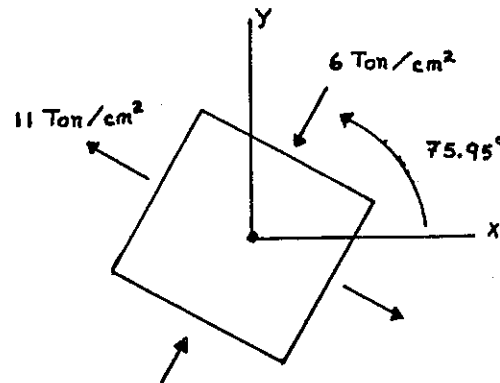
Con los ángulos  $\phi_p = 75.95^\circ$  y  $\phi_p = 165.95^\circ$  se puede determinar el valor de los esfuerzos ( $\sigma_{a,b}$ )

$$\sigma_{a,b} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) \pm ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\phi + 2xy \sin 2\phi$$

$$\sigma_a = (10 - 5)/2 + (10 - (-5))/2 \cos 2(75.95) + (-4) \sin 2(75.95) = -5.99 = 6 \text{ Ton/cm}^2$$

$$\sigma_b = ((10 - 5)/2) + ((10 - (-5))/2) \cos 2(165.95^\circ) + (-4) \sin 2(165.95^\circ) = 10.99 = 11 \text{ Ton/cm}^2$$

el esfuerzo máximo  $\sigma_b' = 11 \text{ Ton/cm}^2$  y  $\phi_p = 165.95$



Los esfuerzos principales pueden obtenerse a través de

$$\sigma_{\text{máximo}} = ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \pm [((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2]^{1/2}$$

$$\sigma_{\text{máximo}} = ((10 - 5)/2) + [((10 - (-5))/2)^2 + (-4)^2]^{1/2} = 11 \text{ ton/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{mínimo}} = ((10 - 5)/2) - [((10 - (-5))/2)^2 + (-4)^2]^{1/2} = -6 \text{ ton/cm}^2$$

el valor del ángulo

$$\cos 2\phi_p = ((\sigma_x - \sigma_y)/2h)$$

$$\sin 2\phi_p = (2\tau_{xy}/h)$$

si

$$h = [((10 - (-5))/2)^2 + (-4)^2]^{1/2} = 8.5$$

$$2\phi_p = \cos^{-1} [((10 - (-5))/2)(8.5)] = 28.07^\circ$$

$$2\phi_p = \sin^{-1} [(-4)/(8.5)] = -28.07^\circ$$

El ángulo que satisface ambas ecuaciones esta entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , por lo que el esfuerzo máximo tiene

$$2 \varphi_{p1} = 360 - 28.07 \Rightarrow 2 \varphi_{p1} = (321.93) \Rightarrow \varphi_{p1} = 165.96^\circ$$

b) Esfuerzo de corte máximo y normal asociado

Esfuerzo cortante

$$\tau_{\max} = \left[ \left( \frac{10 - (-5)}{2} \right)^2 + (4)^2 \right]^{1/2} = 8.5 \text{ ton/cm}^2$$

En ángulo del esfuerzo máximo es

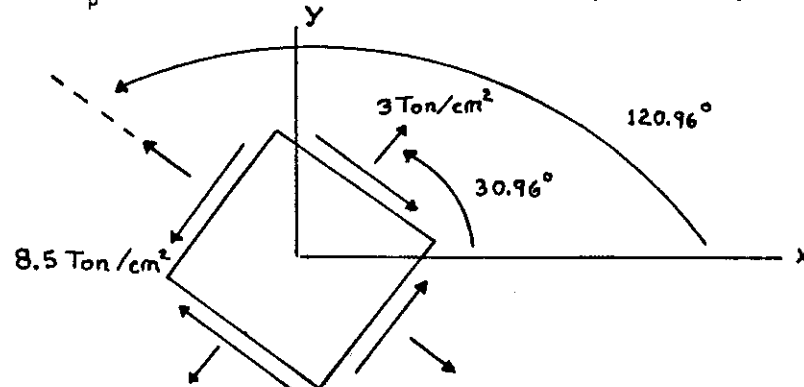
$$\varphi_c = \varphi_{p1} - 45 = 165.96^\circ - 45^\circ = 120.96^\circ$$

El esfuerzo normal asociado ( $\sigma$  medio) es

$$\sigma_{\text{medio}} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \left( \frac{10 - 4}{2} \right) = 3 \text{ ton/cm}^2$$

el ángulo del esfuerzo cortante mínimo ( $\varphi_{p2}$ ) es

$$\varphi_{p2} = 2 \varphi_{p1} - 90^\circ = 120.96 - 90 = 30.96^\circ \text{ respecto del eje X}$$



## 2.4 Círculo de Mohr

El estado de esfuerzo de un elemento girado respecto del eje X, se puede obtener gráficamente a través de utilizar el círculo de Mohr (Ingeniero Otto Mohr 1882).

Las ecuaciones de la transformación de esfuerzo

$$\sigma_{x'} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\vartheta + \tau_{xy} \sin 2\vartheta$$

$$\tau_{x'y'} = -\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\vartheta + \tau_{xy} \cos 2\vartheta$$

son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se escoge un sistema de ejes rectangulares y se grafica un punto M (Fig. 19), de abscisa  $\sigma_{x'}$  y ordenada  $\tau_{x'y'}$ , para cualquier valor de  $\vartheta$ , los puntos así obtenidos estarán situados en un círculo. Para comprobarlo se elimina  $\vartheta$  de las ecuaciones de transformación de esfuerzo



$$\sigma_{x'} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) + ((\sigma_x - \sigma_y)/2) \cos 2\theta + \tau_{xy}$$

$$\tau_{x'y'} = -((\sigma_x - \sigma_y)/2) \sin 2\theta + \tau_{xy}$$

transponiendo  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$(\sigma_{x'} - (\sigma_x + \sigma_y)/2)^2 = ((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2$$

$$(\tau_{x'y'})^2 = -((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2$$

al sumar miembro a miembro la ecuación resultante es

$$((\sigma_{x'} - (\sigma_x + \sigma_y)/2))^2 + (\tau_{x'y'})^2 = ((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2$$

haciendo

$$\sigma_{\text{medio}} = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) \quad \text{y} \quad R^2 = ((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2$$

puede escribirse finalmente

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{medio}})^2 + (\tau_{x'y'})^2 = R^2$$

que es la ecuación de un círculo de radio  $R$ , con centro en el punto  $C$ , de abscisa  $\sigma_{\text{medio}}$  y ordenada cero (Fig. 19 a). Debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar  $M$  se hubiera graficado un punto  $N$ , de abscisa  $\sigma_{x'}$  y ordenada  $-\tau_{x'y'}$  (Fig 19 b).

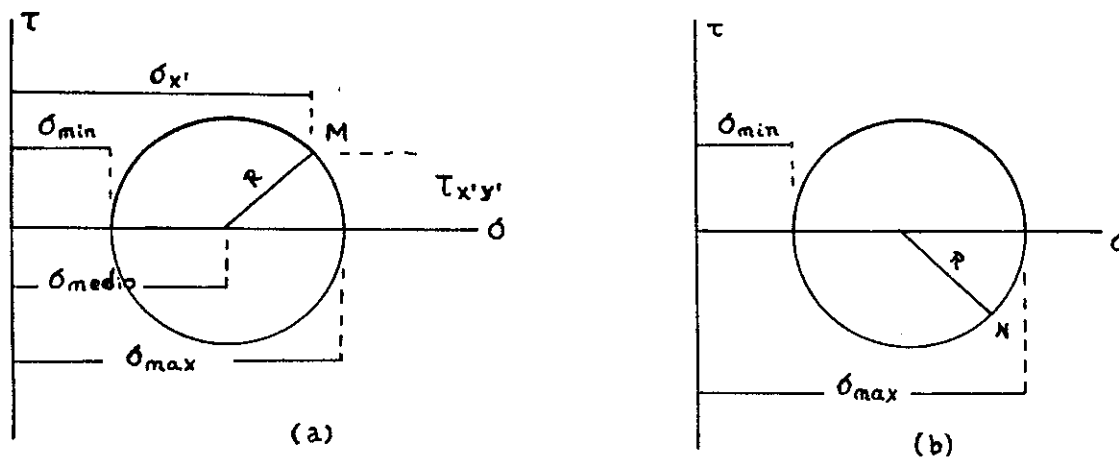
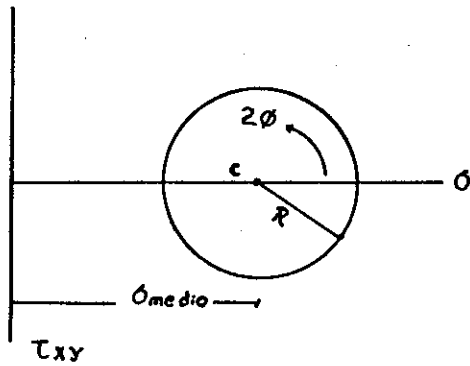


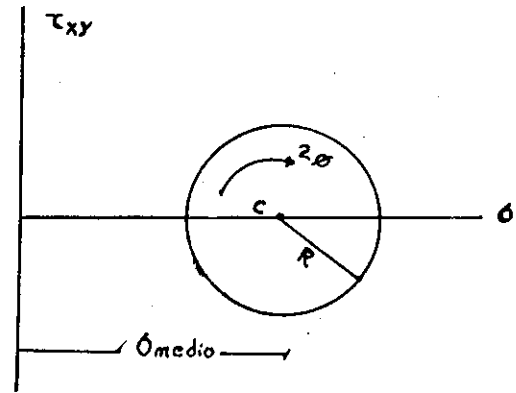
Figura 19

El círculo de Mohr puede trazarse de dos formas diferentes. En la primera forma, se puede trazar  $\sigma_x$  positivo a la derecha y  $\tau_{xy}$  positivo hacia abajo; entonces el ángulo  $2\theta$  es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj (Fig. 20 a).

En la segunda forma,  $\tau_{xy}$  es positivo hacia arriba y  $2\theta$  es positivo en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 20 b).



a) El  $\tau_{xy}$  es positivo hacia abajo y  $2\theta$  es positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



b) El  $\tau_{xy}$  es positivo hacia arriba y  $2\theta$  es positivo en el sentido de las manecillas del reloj.

Fig. 20 formas del círculo del Mohr

Para trazar el círculo de Mohr se utilizará la primera forma, para el elemento plano (Fig. 21)

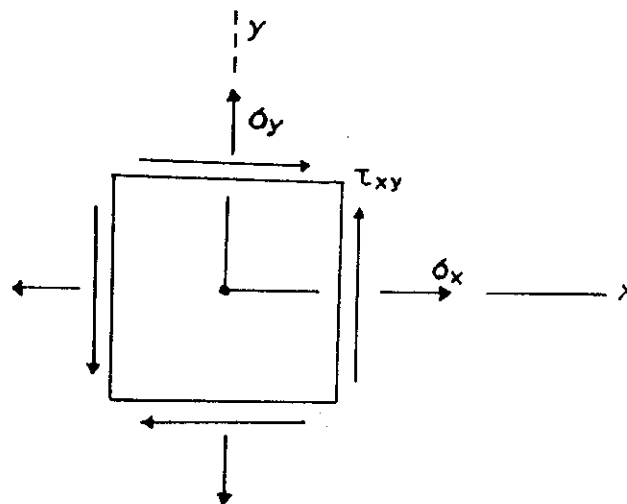


Fig. 21 estado de esfuerzo de un elemento

Procedimiento para la aplicación del círculo el Mohr

Para el elemento en esfuerzo plano (Fig. 21), los pasos a seguir son:

1. Sobre un sistema de ejes coordenados  $\sigma - \tau$ , localizar el centro C del círculo  $((\sigma_x + \sigma_y) / 2)$ , y situar los puntos de coordenadas A  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  y B  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ . Estos últimos son los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre las caras x e y del elemento. Se considera positiva la tensión y negativa la comprensión; el esfuerzo cortante es positivo si el momento respecto del centro del elemento es en el sentido del reloj y negativo en sentido contrario.



y el esfuerzo principal menor en el punto E está dado por

$$\sigma_{\text{menor}} = OE = ((\sigma_x + \sigma_y)/2) - R$$

El ángulo principal  $\phi_p$  localizado entre el eje X y el esfuerzo principal mayor es la mitad de  $2\phi_p$  situado entre los radios CA y CD sobre el círculo de Mohr. El coseno y el seno de  $2\phi_p$  son

$$\cos 2\phi_p = (\sigma_x - \sigma_y)/(2R) \quad \text{y} \quad \sin 2\phi_p = (\tau_{xy})/R$$

El ángulo para el esfuerzo principal menor es

$$\phi_{pE} = \phi_p + 90^\circ$$

Los puntos F y G que representan los puntos de esfuerzo cortante máximo y mínimo están localizados sobre el círculo en ángulo de  $90^\circ$  respecto de los puntos D y E. Por lo que los ángulos de esfuerzo cortante máximo están a  $45^\circ$  de los planos principales. El esfuerzo cortante máximo es numéricamente igual al radio del círculo, los esfuerzos normales (esfuerzo normal asociado) sobre los planos de esfuerzo cortante máximo son iguales a la abscisa del punto C, que es el esfuerzo normal medio.

$$\sigma_{\text{medio}} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2$$

El círculo de Mohr se traza de igual forma cuando se trabaja con esfuerzos negativos (de corte o Normal). En estos casos una parte o todo el círculo de Mohr se localizará a la izquierda del origen. El punto A que representa los esfuerzos sobre el plano  $\phi = 0$ , puede situarse en cualquier lugar del círculo, lo que depende de los valores relativos de los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Sin embargo, el ángulo  $2\phi$  siempre se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del radio CA, sin importar donde esté localizado el punto A.

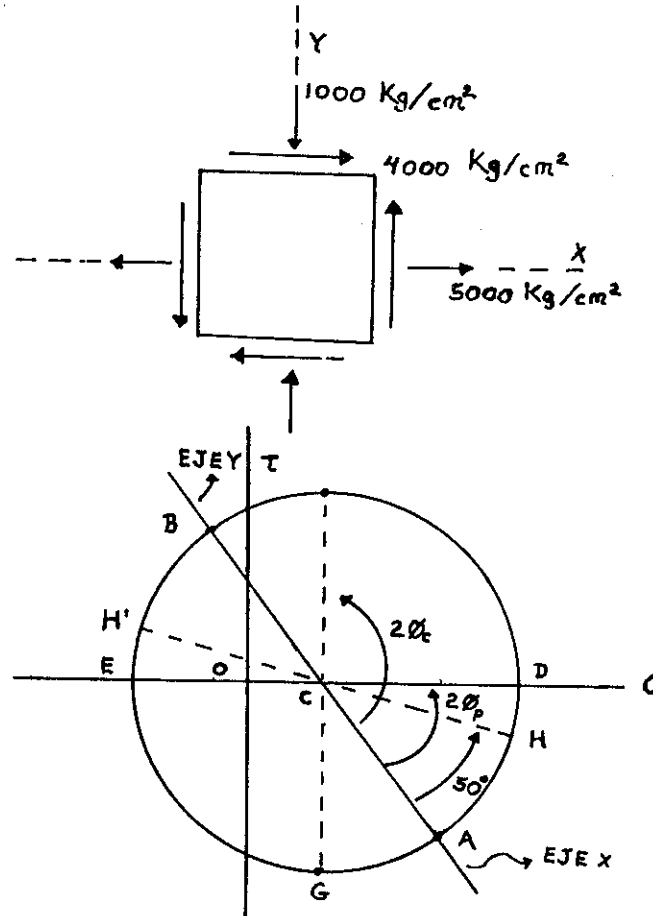
El círculo de Mohr se puede utilizar en forma inversa. Si se conocen los esfuerzos  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$  y  $\tau_{x'y'}$  que actúan sobre un elemento girado, así como el ángulo  $\phi$ , se puede construir el círculo y determinar los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  para  $\phi = 0$ . El procedimiento es localizar los puntos D y D', a partir de los esfuerzos conocidos y luego dibujar el círculo empleando la línea DD' como diámetro. El ángulo  $2\phi$  se debe medir en sentido contrario al ángulo que contiene los esfuerzos  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$  y  $\tau_{x'y'}$  del elemento girado.

A partir del radio CD se puede localizar el punto A, correspondiente a la cara X, del elemento, en seguida, se localiza el punto B, trazando un diámetro desde A. Finalmente se emplean las coordenadas A y B para obtener los esfuerzos que actúan sobre todas las caras del elemento, para el cual  $\phi = 0$ . D representa el eje X' y D' el eje Y'.

## 2.4.2 Ejemplo

Usando círculo de Morh determinar

- Esfuerzos principales (valores y planos orientados)
- Esfuerzo de corte máximo y normal asociado (plano orientado)
- Valores de esfuerzo en un plano orientado a 25 grados.



$$A = (5000, -4000)$$

$$B = (-1000, 4000)$$

centro (C)

$$C = (\sigma_x + \sigma_y) / 2$$

$$C = ((5000 + (-1000)) / 2) = 2000$$

a) Esfuerzos principales

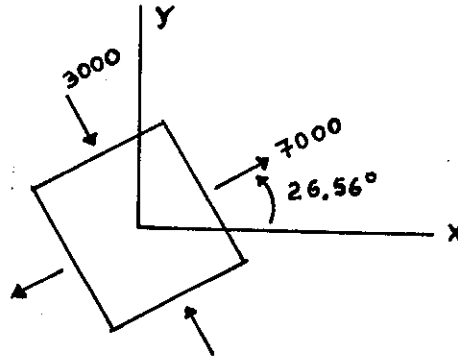
$$R = [((\sigma_x - \sigma_y) / 2)^2 + (\tau_{xy})^2]^{1/2}$$

$$R = [((5000 - (-1000)) / 2)^2 + (4000)^2]^{1/2} = 5000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máximo}} &= D = OC + R = 2000 + 5000 = 7000 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{\text{mínimo}} &= E = OC - R = 2000 - 5000 = -3000 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

El ángulo  $\theta_p$

$$\theta_p = [\text{tag}^{-1} (4000/3000)]/2 = 26.56^\circ$$

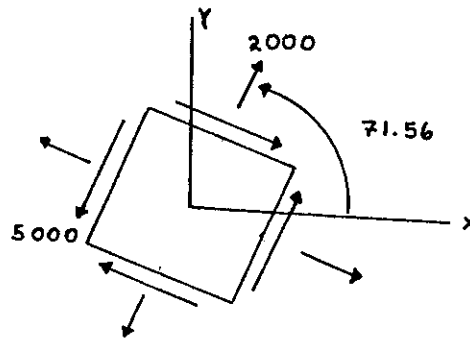


Esfuerzos principales plano orientado

b)  $\tau$  máxima =  $R = 5000 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_{\text{normal asociado}} = \sigma_{\text{medio}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (5000 - 1000)/2 = 2000 \text{ kg/cm}^2$

En ángulo de corte máximo  $\theta_c$

$$\theta_c = (90^\circ + 2\theta_p)/2 = (90^\circ + 2(26.56^\circ)/2) = 71.56^\circ$$



c) Esfuerzos en un plano orientado a  $25^\circ$

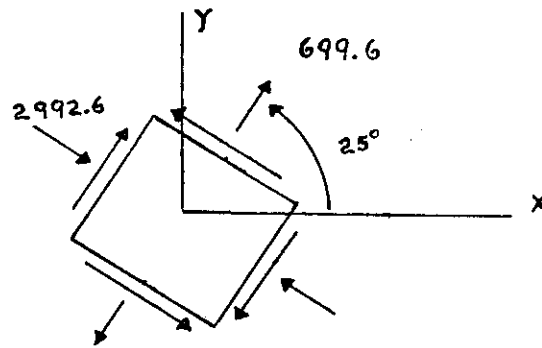
En el círculo de Mohr el ángulo vale  $2\theta$ , entonces el valor real es de  $50^\circ$

Los valores para H son:

$$\sigma_H = R \cos 3.12^\circ + OC = 5000 \cos 3.12^\circ + 2000 = 6992.6 \text{ kg/cm}^2$$

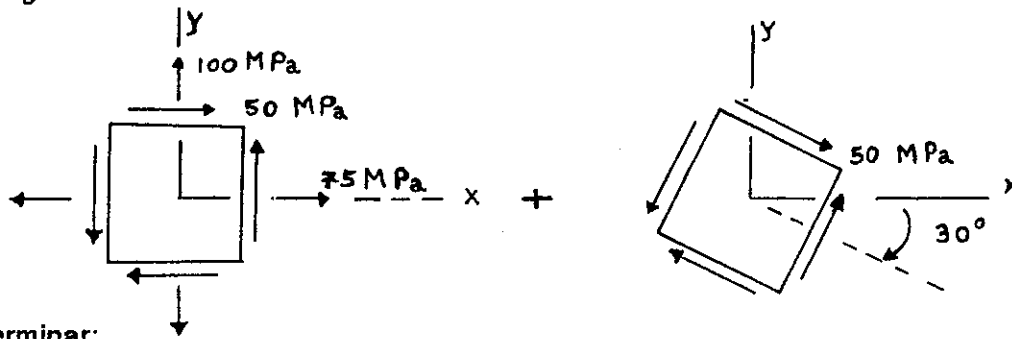
$$\tau_H = R \sin 3.12^\circ = 5000 \sin 3.12^\circ = 272.10 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_H = -R \cos 3.12^\circ + OC = -5000 \cos 3.12^\circ + 2000 = -2992.6 \text{ kg/cm}^2$$



### 2.4.3 Ejemplo

Por superposición se han determinado para una misma sección pero en diferente dirección los siguientes esfuerzos.



Determinar:

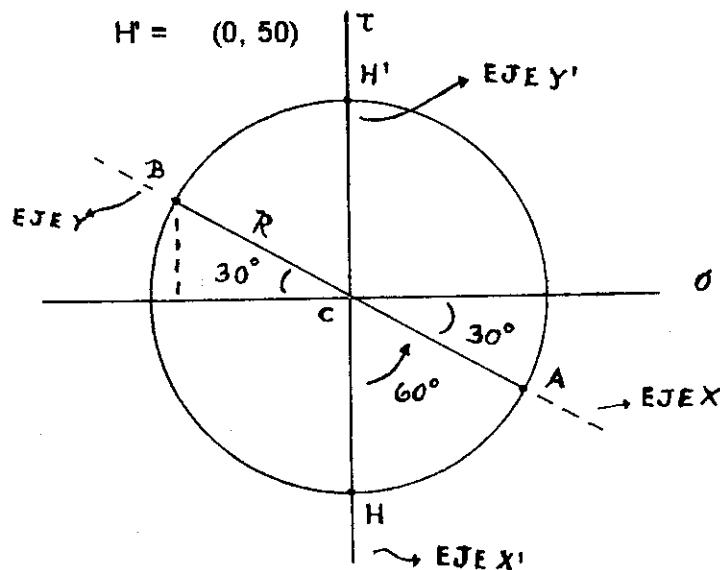
1. El esfuerzo resultante de ambos en los plano xy
2. Los esfuerzos principales y planos orientados
3. Los esfuerzos de corte máximo y normal asociado

1) Esfuerzo resultante

Estado de esfuerzo para el elemento b en el punto x-y

$$H = (0, -50)$$

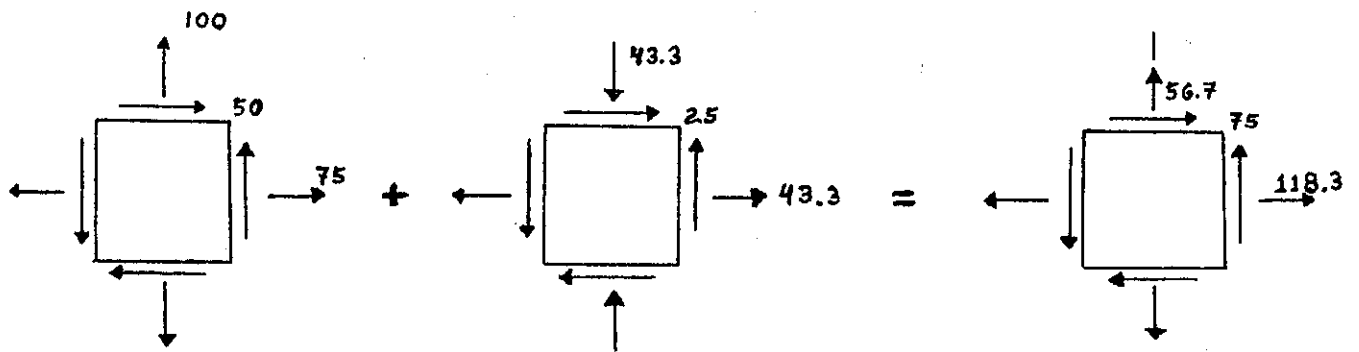
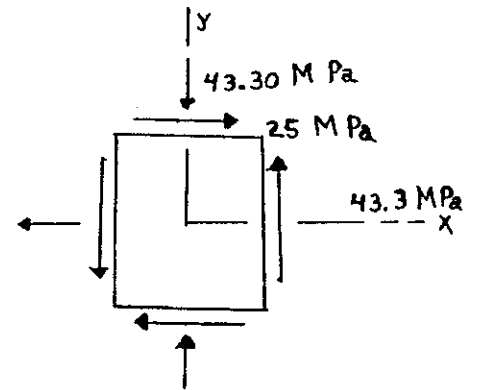
$$H' = (0, 50)$$



$$R = 50$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= R \cos 30^\circ \\ \sigma_x &= 50 \cos 30^\circ = +43.30 \text{ Mpa} \\ \tau_{xy} &= -R \sin 30^\circ = \\ \tau_{xy} &= 50 \sin 30^\circ = -25 \text{ Mpa} \\ \sigma_y &= -50 \cos 30^\circ = \\ \sigma_y &= -50 \cos 30^\circ = -43.3 \text{ Mpa} \\ \tau_{yx} &= R \sin 30^\circ = \\ \tau_{yx} &= 50 \sin 30^\circ = 25 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

Estado de esfuerzo para el elemento b en el plano x-y  $\Rightarrow$

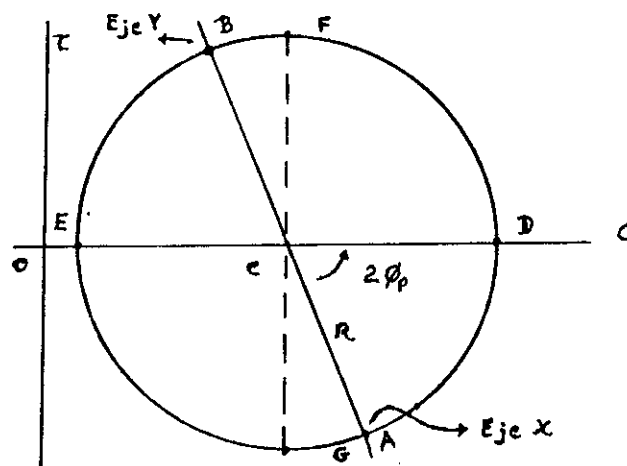


Esfuerzo resultante

## 2) Esfuerzos principales

$$A = (118.3, -75)$$

$$B = (56.7, 75)$$





$$C = \sigma_{\text{medio}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

$$C = (118.3 + 56.7)/2 = 87.5$$

$$R = [((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (\tau_{xy})^2]^{1/2}$$

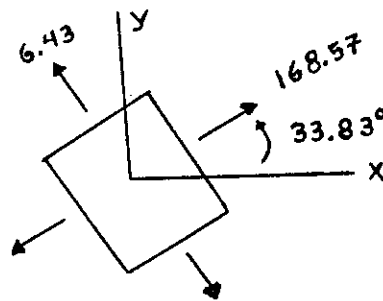
$$R = [((118.3 - 56.7)/2)^2 + (75)^2]^{1/2}$$

$$R = 81.07$$

$$D = \sigma_{\text{máximo}} = C + R = 87.5 + 81.07 = 168.57 \text{ Mpa}$$

$$E = \sigma_{\text{mínimo}} = C - R = 87.5 - 81.07 = 6.43 \text{ Mpa}$$

$$2\phi_p = \text{tg}^{-1} (75/(118.3 - 87.5)) \Rightarrow \phi_p = 33.83^\circ$$

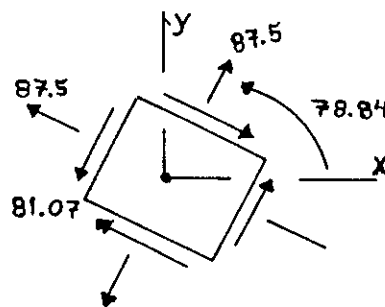


3) Esfuerzo cortante máximo

$$F = \tau_{\text{máximo}} = 81.07 \text{ Mpa}$$

$$\phi_c = (90 + 2\phi_p)/2 = (90^\circ + 2(33.83^\circ))/2 = 78.83^\circ$$

$$\sigma_{\text{asociado}} = \sigma_{\text{medio}} = 87.5 \text{ Mpa}$$



## CAPÍTULO 3

### 3.1 Cascarones de revolución de pared delgada

Los recipientes a presión son estructuras que contienen líquidos o gases a presión, estos pueden ser:

- Cilindros para aire comprimido
- Tubos a presión
- Tanques esféricos y cilindros para almacenamiento de agua y otros líquidos.

Los cascarones son aquellos en los cuales las paredes curvas de los recipientes sujetos a presión son muy delgadas en relación con el radio y la longitud.

El estudio de los recipientes de pared delgada de forma cilíndrica circular y esférica se limita a:

1. La relación del radio  $r$  al espesor de pared delgada  $t$  debe ser mayor que 10, a fin de poder determinar los esfuerzos en las paredes con exactitud razonable, mediante la estática.
2. La presión interna debe ser mayor que la externa, de lo contrario el cascarón puede fallar por colapso, debido al pandeo de las paredes.

En el análisis de cascarones de pared delgada, se supondrá que el espesor ( $t$ ) del cascarón es despreciable comparado con el radio externo y el radio interno, es decir, no se hará ninguna distinción entre los radios interno y externo del cascarón. Se supondrá además que este se puede deformar bajo cargas y que las deformaciones son pequeñas. Esto permite tratar el cascarón como si fuera una membrana y por estar sometido a presión interna, únicamente se desarrollan esfuerzos normales en las paredes, esto se determina haciendo pasar dos planos, uno perpendicular al eje longitudinal del cilindro y el otro paralelo a dicho eje (fig. 23) En las membranas no se desarrollan momentos flexionantes y fuerzas cortantes transversales de magnitud significativa. Una membrana es una analogía de una cuerda flexible, pero puede resistir esfuerzos de compresión.

#### 3.1.1 Cilindros de pared delgada

Un cilindro sometido a una presión  $P$ , está sometido a fuerzas de tensión según sus secciones longitudinales y transversales, la pared de espesor  $t$  es la que soporta estas fuerzas para evitar que estalle.

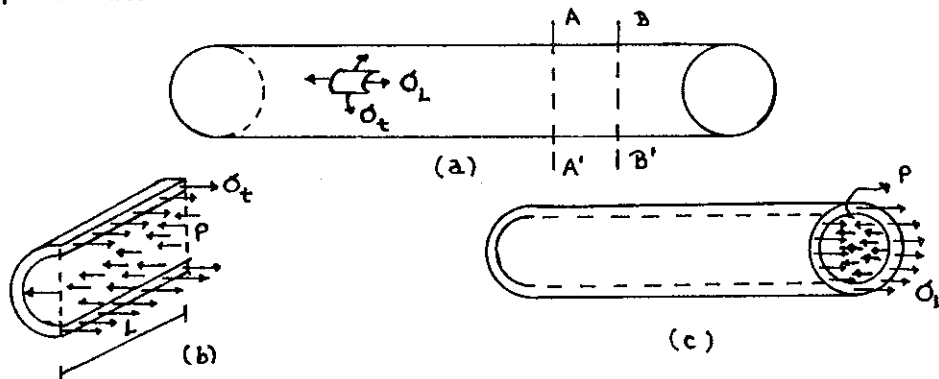


Figura 23 cilindro sometido a presión interna

El cilindro de la figura 23a muestra las tensiones que se producen en él, debido a una presión interna P. El elemento mostrado tiene caras paralelas y perpendiculares al eje del tanque.

Los esfuerzos normales ( $\sigma_t$ ,  $\sigma_l$ ) que actúan sobre las caras laterales de este elemento, representa los esfuerzos de membrana en la pared. Sobre las caras del elemento no actúan esfuerzos cortantes debido a la simetría del recipiente, por lo que los esfuerzos  $\sigma_l$  y  $\sigma_t$  son esfuerzos principales. Debido a su dirección, el esfuerzo  $\sigma_t$  se denomina esfuerzo circunferencial o esfuerzo tangencial (esfuerzo de zuncho); el esfuerzo  $\sigma_l$  es el esfuerzo longitudinal o axial. Estos dos esfuerzos son constantes en todo el espesor de la pared.

### Esfuerzo tangencial (perimetral)

Este esfuerzo es causado al resistirse al efecto de reventarse por la presión aplicada.

Para determinar el esfuerzo tangencial ( $\sigma_t$ ), se aísla un cuerpo libre mediante dos cortes (A-A' y B-B'), separados una distancia L y perpendiculares al eje longitudinal. También es necesario un corte vertical a través del propio eje, permitiendo el cuerpo libre de la Figura 23b.

La fuerza que actúa sobre la mitad del cilindro debido a la presión interna es igual a P x área proyectada = P L(2r).

La fuerza total resistente debida al esfuerzo tangencial  $\sigma_t$  que se tienen en las paredes del cilindro es = 2  $\sigma_t$  Lt

Si de estática se sabe que la sumatoria de fuerzas tiene que ser igual a cero, entonces

La fuerza total resistente = La fuerza que actúa sobre la mitad del cilindro.

$$2 \sigma_t L t = (P) L 2r$$

$$\sigma_t = pr/t$$

donde P es la presión, r el radio y t el espesor de la pared.

### Esfuerzo Longitudinal

El esfuerzo longitudinal se produce paralelo al eje axial, el cual puede analizarse al hacer un corte perpendicular al eje longitudinal (Figura 23c).

La fuerza que actúa en cualquiera de los dos extremos del cilindro debido a la presión interna es.

$$(\text{presión}) \text{ área} = (P) \pi d^2/4$$

La fuerza resistente que actúa en el área de metal es

$$\sigma_L = \pi dt$$

De estática se sabe que la sumatoria de fuerza, debe ser igual a cero, entonces

La fuerza en cualquier extremo = a la fuerza resistente en el área de metal

$$P\pi d^2/4 = \sigma_L \pi dt$$

$$Pd/4 = \sigma_L t$$

si  $d = 2r$  entonces

$$P(2d)/4 = \sigma_L t$$

$$\sigma_L = Pr/2t$$

donde  $P$  es la presión,  $r$  es el radio y  $t$  es el espesor.

### 3.1.1.1. Cambios en las dimensiones

#### a) Cambio de longitud

El cambio de longitud se puede determinar a partir de la deformación de la longitud (DL).

$$DL = 1/E [\sigma_L - \nu\sigma]$$

y el cambio de longitud = deformación longitudinal x longitud original

$$CL = 1/E [\sigma_L - \nu\sigma]L$$

$$CL = (Pr/2tE) [1-2\nu]L$$

donde  $\nu$  es el módulo de Poisson.

#### b) Cambio de diámetro.

El cambio de diámetro puede calcularse a partir de la deformación en un diámetro (Deformación diametral)

Deformación diametral = Cambio de diámetro / diámetro original

el cambio de diámetro puede encontrarse considerando el cambio de circunferencia. El esfuerzo que actúa en una circunferencia es el  $\sigma_L$ , el cual provoca la deformación perimetral ( $\epsilon_r$ ).

cambio de circunferencia = deformación x circunferencia original

cambio de circunferencia =  $\epsilon_t + \pi d$

la nueva circunferencia es  $= \pi d + \pi d \epsilon_t = \pi d (1 + \epsilon_t)$ , esto es porque a presión existe un incremento, por lo que el diámetro de la nueva circunferencia es

$$d_n = d_o (1 + \epsilon_t)$$

donde  $d_o$  es el diámetro inicial, el cambio de diámetro es  $d_o \epsilon_t$  y la deformación diametral es ( $\epsilon_D$ )

$$\epsilon_D = d_o \epsilon_t / d_o = \epsilon_t$$

entonces el cambio de diámetro (Cd) es

$$Cd = d \epsilon_t$$

donde  $\epsilon_t = 1/E [\sigma_H - \nu \sigma_L]$ , entonces

$$Cd = d/E [\sigma_H - \nu \sigma_L]$$

$$Cd = (2r)/(E) [Pr/t - \nu Pr/2t]$$

$$Cd = (2r^2P)/(Et) [1 - \nu/2] = (r^2P) / (Et) [2 - \nu]$$

donde P es la presión.

c) Cambio en el volumen interno

Cambio de volumen = deformación volumétrica X volumen original

se sabe que la

Deformación volumétrica = suma de tres deformaciones directas mutuamente perpendiculares

$$= \epsilon_L + 2\epsilon_D$$

$$= \epsilon_L + 2\epsilon_t$$

Si  $\epsilon_L = 1/E [\sigma_L - \nu \sigma_t]$ , y  $\epsilon_t = (1/E) [\sigma_t - \nu \sigma_L]$ , entonces

$$\text{la Deformación volumétrica} = (1/E) [\sigma_L - \nu \sigma_t] + (2/E) [\sigma_t - \nu \sigma_L]$$

$$\text{Deformación Volumétrica} = (1/E) [\sigma_L - 2 \sigma_t - (\sigma_t - 2\sigma_L)]$$

$$(1/E) [Pr/2t + 2Pr/t - \nu Pr/t - 2\nu Pr/2t]$$

$$\begin{aligned} \text{Deformación volumétrica} &= (Pr/E_t) [1/2 + 2 - \nu - \nu] \\ &= Pr/E_t [5/2 - 2\nu] \\ &= Pr/2E_t [5 - 4\nu] \end{aligned}$$

Por consiguiente, con el volumen interno original  $V_0$ , el cambio en el volumen interno es

$$(Pr/2 E_t) [5 - 4\nu] V_0$$

### 3.1.2 Cascaron esférico de Pared Delgada con presión interna

Debido a la simetría de la esfera, los esfuerzos que se generan a causa de la presión interna serán dos esfuerzos tangenciales mutuamente perpendiculares (Fig. 24).

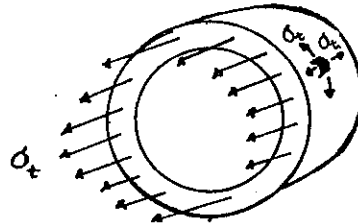


Figura 24  
Cascaron Esférico sometido a presión Interna

la fuerza en un hemisferio debido a la presión interna es, presión X área proyectada

$$(P) (\pi d^2)/4 = P \pi r^2$$

La fuerza resistente  $F_R$  es

$$F_R = \sigma_t \times \pi dt$$

La fuerza resistente tiene que ser igual a la fuerza de un hemisferio

$$P \pi r^2 = \sigma_t (\pi 2rt)$$

$$\sigma_t = Pr/2t$$

donde  $\sigma_t$  es el esfuerzo tangencial, perimetral o anular.

### 3.1.2.1 Cambios en las dimensiones

#### a) Cambio en el volumen interno de la Esfera

El cambio en el volumen = volumen original x deformación volumétrica

donde la

Deformación volumétrica = suma de tres deformaciones mutuamente perpendiculares

$$\text{Deformación volumétrica} = 3 \epsilon_D = 3\epsilon_t$$

$$\text{Deformación volumétrica} = 3/E (\sigma_t - \nu\sigma_t)$$

$$\text{Deformación volumétrica} = 3P \cdot 2r/4tE (1 - \nu)$$

$$\text{Deformación volumétrica} = 3Pr/2tE (1 - \nu)$$

Por lo que

$$\text{El cambio en el volumen interno} = 3Pr / 2tE (1 - \nu) V_0$$

### 3.1.3 Vaso cilíndrico con extremos hemisféricos

En la Figura 25 se muestra un recipiente de sección cilíndrica y hemisférica, en algunos casos pueden tener espesores diferentes, esto es necesario algunas veces, especialmente cuando el esfuerzo anular en el cilindro es el doble que en una esfera del mismo radio y espesor de pared.

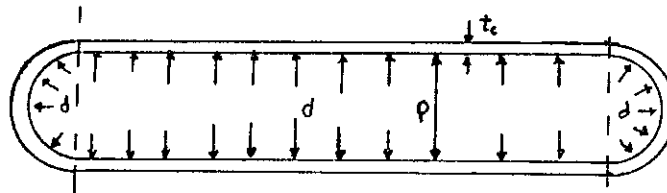


Figura 25  
Sección transversal de un cilindro con extremos hemisféricos

Suponer que el diámetro interno en ambas secciones es igual.

a) Para el cilindro

$$\sigma_t = Pr/2t_c \quad \text{y} \quad \sigma_L = Pr/2t_c$$

donde  $t_c$  es el espesor en el cilindro.

La deformación tangencial o perimetral

$$e_t = 1/E (\sigma_{tC} - \nu \sigma_{LC}) = Pr/2t_c E [2 - \nu]$$

b) Para los extremos hemisféricos

$$\sigma_t = Pr/2(t_s)$$

donde  $t_s$  es el espesor del extremo hemisférico.

La deformación anular

$$e_t = 1/E (\sigma_{ts} - \nu \sigma_{ts}) = (Pr/2t_s E) (1 - \nu)$$

Para evitar que no exista ninguna distorsión en la unión se igualan las dos deformaciones

$$(Pr)/(2t_c E) (2 - \nu) = (Pr/2t_s E) (1 - \nu)$$

de donde

$$t_s/t_c = (1 - \nu) / (2 - \nu)$$

Si el valor de  $\nu = 0.3$ , que es el aceptado para el acero, la relación de espesores resulta

$$t_s/t_c = (1 - 0.3)/(2 - 0.3)$$

$$t_s/t_c = (0.7)/(1.7)$$

Esto significa que el espesor en las paredes debe ser aproximadamente 2.4 el de los extremos hemisféricos para que no haya deformación en la unión. En estas circunstancias, debido a la reducción del espesor en las paredes en los extremos, el esfuerzo máximo se presentará en dichos extremos. Para lograr esfuerzos máximos iguales en las dos porciones, el espesor de las paredes del cilindro debe ser el doble que en los extremos; entonces se presentará alguna distorsión en la unión.

### 3.1.4 Discontinuidad en las membranas

Una discontinuidad de la acción de membrana de un cascarón ocurre en todos los puntos de restricción externa o en las juntas de elementos de cascarón que tienen diferentes ca-



racterísticas de rigidez. Un ejemplo, de esta situación se presenta en las juntas entre el cuerpo de un recipiente cilíndrico y sus extremos. En la Figura 26 el cilindro se encuentra a presión interna y se expande de acuerdo a la línea punteada

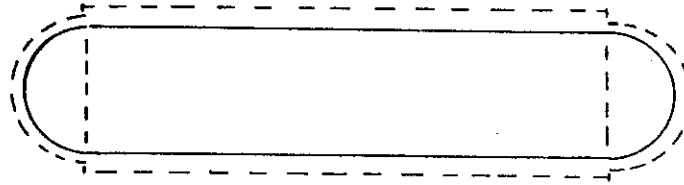


Figura 26

en los extremos tienden a expandirse en distinta cantidad a la del cilindro central debido a las diferencias en los esfuerzos. Esta incompatibilidad de deformaciones produce esfuerzos locales por flexión y de corte en la vecindad de cada junta, puesto que debe haber continuidad física entre los extremos y el cuerpo cilíndrico central. Por tal razón, dichas partes de extremo (llamados fondos o tapas laterales de un tanque) deben tener la curvatura apropiada para los recipientes a presión. Los extremos planos no son convenientes.

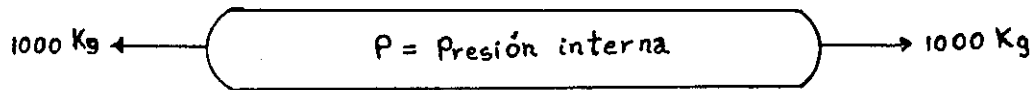
El reglamento de la ASME (American Society of Mechanical Engineers) para la construcción de recipientes a presión, no expuestos al fuego, da información práctica acerca del diseño de los extremos para recipientes.

La mayoría de los recipientes a presión se fabrican de láminas o placas que se unen para formar el recipiente. Un método común para realizar dicha unión es soldando el tope de las piezas, mediante soldadura eléctrica de arco. Las ranuras donde se depositará el metal de soldadura se preparan de varias formas, que dependen del espesor de las placas. Los cálculos de las juntas se hacen con base en un esfuerzo de tensión permisible de la soldadura. Este esfuerzo se suele expresar como cierto porcentaje de la resistencia de la placa entera original del material principal. Para trabajo ordinario se puede utilizar una reducción de 20% sobre el esfuerzo permisible en la placa entera, para el esfuerzo de la soldadura. Para este factor se dice que la eficiencia de la junta es de 80%. En trabajos de alta calidad, algunas especificaciones exigen una efectividad de 100% para una junta soldada.

Las fórmulas de esfuerzo deducidas para recipientes de presión de pared delgada solo se deben emplear para casos de presión interna. Si un recipiente hermético (como un tanque al vacío o un submarino) se ha de diseñar con base en la presión externa, se debe considerar el pandeo local de las paredes que pueda ocurrir.

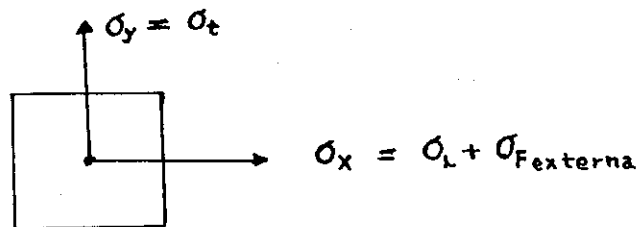
### 3.1.5 Ejemplo

Determinar el valor máximo de presión que se puede aplicar al cilindro de pared delgada si el esfuerzo normal permisible ( $\sigma_{\text{pera}}$ ) es de 12000 Kg/cm<sup>2</sup> y el esfuerzo de corte permisible ( $\tau_{\text{perm}}$ ) es de 2000 kg/cm<sup>2</sup>.



$$\text{ext} = 20 \text{ cm} \quad \text{dint} = 19 \text{ cm}$$

El estado de esfuerzo para un elemento es



$$\sigma_y = \sigma_t = \sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{permisible}} = 12000 \text{ Kg / cm}^2$$

$$\sigma_x = \sigma_L + \sigma_{\text{Fexterna}} = (\sigma_t)/2 + \sigma_{\text{Fexterna}} = 12000/2 + 1000/\pi/4(20^2 - 19^2) = 6326.5 \text{ Kg/cm}^2$$

De circulo de Mohr

Como no existe corte el esfuerzo máximo ( $\sigma_{\text{max}}$ ) = 12000 kg/cm<sup>2</sup>

$$R = \sigma_{\text{max}} - C = \sigma_{\text{max}} - (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

$$R = 12000 - (6326.5 + 12000)/2 = 2836.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{permisible}} = R$  entonces no cumple  $R > 2000 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{Si } R = \sigma_{\text{max}} - C = \sigma_t - (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

$$R = \sigma_i - [(\sigma_L + \sigma_{F\text{externa}}) + \sigma_i] / 2$$

$$2R = 2 \sigma_i - \sigma_L - \sigma_{F\text{externa}} - \sigma_i$$

$$2R = \sigma_i - \sigma_L - \sigma_{F\text{externa}}$$

$$\text{el } \sigma_i = 2\sigma_L \text{ y } R = 2000 \text{ kg/cm}^2 = \tau_{\text{permisible}}$$

entonces

$$2(2000) = \sigma_L - (1000) / (\pi/4) (20^2 - 19^2)$$

$$\sigma_L = 4000 + 326.5 = 4326.5 \text{ kg/cm}^2$$

el valor de la presión cuando  $\sigma_L = 4326.5 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_L = Pr/2t \Rightarrow [(\sigma_L)2(t)]/r = P$$

$$P = 455.4 \text{ kg/cm}^2$$

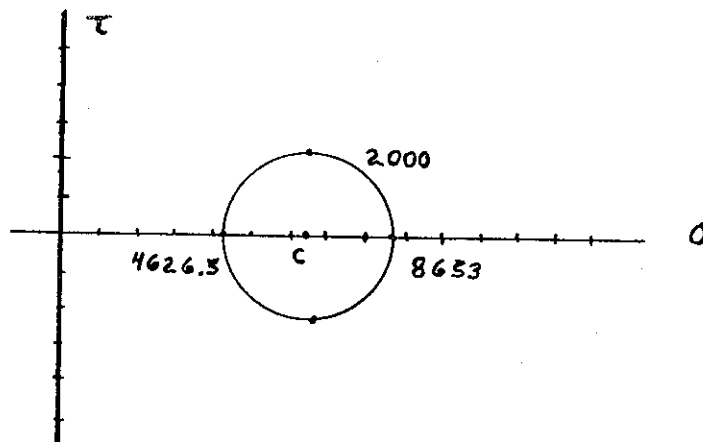
r puede ser el radio externo o el radio interno

$$\sigma_x = 4653$$

$$\sigma_y = 8653$$

$$c = (8653 + 4653)/2 = 6653$$

$$R = 8653 - 6653 = 2000 \text{ kg/cm}^2$$



### 3.1.6 Ejemplo

Determinar el espesor necesario para un cilindro a presión, cuyo diámetro es de 0.8 m. La presión interna es de 840 k Pa y el esfuerzo admisible es de 69 M Pa.

$$d = 0.8 \text{ m}$$

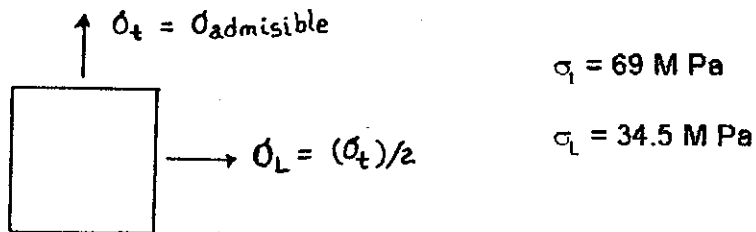
$$P_{int} = 840 \text{ K Pa}$$

$$\sigma_{admisible} = 69 \text{ MPa}$$

$$t = ?$$

$$2r = d \Rightarrow r = 0.8/2 = 0.4 \text{ m}$$

Para un cilindro



El esfuerzo mínimo que puede utilizarse es  $\sigma_L$

$$\sigma_L = Pr/2t \Rightarrow t = Pr/2\sigma_L \Rightarrow t = 840 \text{ Kpa}(0.4)/2 (34.5 \text{ M Pa})$$

$$t = 4.86 \times 10^{-3} \text{ m} \times 1000\text{mm}/1\text{m}$$

$$t = 4.85 = 5 \text{ mm}$$

### 3.1.7 Ejemplo

Obtener el cambio de volumen de un cilindro de pared delgada cuyo volumen original es de  $65.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  y cuya longitud es de 1.3 m, si el espesor de sus paredes es de 6 mm y la presión interna de 1.4 MN/m<sup>2</sup>.  $E = 210 \text{ G N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ .

$$V_0 = 65.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 ; L = 1.3 \text{ m} ; E = 210 \text{ G N/m}^2 \nu = 0.3$$

$$t = 6\text{mm} \times 1\text{m}/1000 \text{ mm} = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Cambio de volumen = Deformación volumétrica x volumen inicial

Cambio de volumen = (suma de las 3 deformaciones mutuamente perpendiculares) ( $V_0$ )

$$\text{Cambio de volumen} = (\epsilon_L + 2\epsilon_r) V_0$$

$$\text{Cambio de volumen} = \{1/E [\sigma_L - \nu\sigma_r] + 2/E [\sigma_r - \nu\sigma_L]\} V_0 \text{ Ec. 1}$$

$$\sigma_L = Pr/2t$$

$$\sigma_r = Pr/t$$

$$V = AL \Rightarrow V_0 = \pi r^2 L \Rightarrow r = [(V_0)/(\pi L)]^{1/2}$$

$$r = [(65.5 \times 10^{-3})/\pi(1.3)]^{1/2} = 0.13 \text{ m}$$

$$\sigma_l = (1.4 \times 10^6) (0.13) / (2)(6 \times 10^{-3}) = 1.52 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_f = (1.4 \times 10^6) (0.13) / (6 \times 10^{-3}) = 3.03 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

Al sustituir valores en Ec. 1 se obtiene

Cambio en el volumen =

$$\{(1/210 \times 10^9) [(1.52 \times 10^7) - 0.3 (3.03 \times 10^7)] + (2 / 210 \times 10^9)$$

$$[3.03 \times 10^7 - 0.3 (1.52 \times 10^7)]\} (5.52) (65.5 \times 10^{-3})$$

$$\text{Cambio en el volumen} = 1.79 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

## CAPÍTULO 4

### Deflexiones en vigas

#### 4.1 Vigas

Los elementos estructurales diseñados para soportar cargas que estén aplicadas perpendiculares al eje longitudinal se denominan vigas.

##### 4.1.1 Clasificación de las vigas

###### a) Estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas

Una viga es estáticamente determinada si las reacciones que son incógnitas, pueden determinarse utilizando las ecuaciones de la estática

$$\Sigma F_x = 0 \quad , \quad \Sigma F_y = 0 \quad , \quad \Sigma M = 0$$

es decir que únicamente se desconocen tres componentes reactivas de sus apoyos (Figura 27.a, b, c, d)

Si la viga es estáticamente indeterminada se desconocen más de tres componentes reactivas de sus apoyos (Figura 27e).

###### b) De acuerdo a sus apoyos

\_ Simplemente apoyadas.

Sus reacciones son el resultado de un pasador (articulación) y un rodillo (Figuras 27a, 27c, y 27d).

\_ En voladizo

Cuando uno de sus extremos está fijo para impedir su rotación, ésta también se llama viga empotrada (Fig. 27b).

\_ Con voladizo

Para estas vigas en un extremo o en ambos, sobresalen aquellas de sus apoyos (Figura 27c, y 27d).

\_ Continuas

Una viga es continua cuando es estáticamente indeterminada, es decir, cuando tiene más de dos apoyos (Figura 27e).

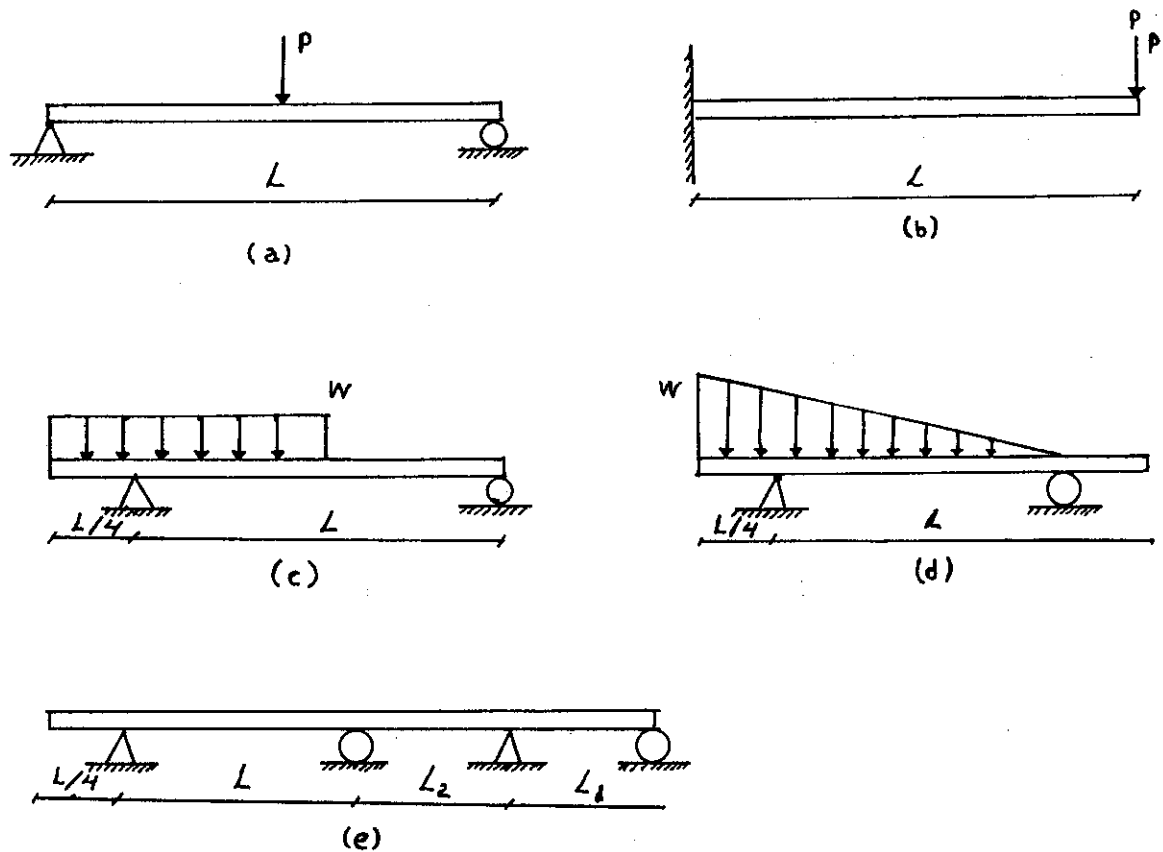


Figura 27

#### 4.1.2 Cargas en Vigas

Las cargas en las vigas son las fuerzas que actúan sobre ella, éstas pueden provenir del peso mismo de la viga y de las otras fuerzas a soportar.

Tipos de cargas en vigas:

\_ Sin carga.

En ella se desprecia el peso propio de la viga, pues es muy pequeño comparado con las demás fuerzas que se apliquen.

\_ Carga concentrada

Cuando la carga actúa directamente en un punto del eje longitudinal de la viga ( Figura 27a y 27b).

\_ Carga uniformemente distribuida

La carga está igualmente distribuida sobre una porción de longitud de la viga (Figura 27c).

## \_ Carga Variable o distribuida no uniformemente

Esta carga varía en intensidad de un lugar a otro (figura 27d).

## \_ Par

Es una fuerza par la que OCASIONA torsión en una viga, es aplicada en cualquier lugar de ésta.

La viga como elemento estructural es de gran importancia, en su diseño tiene mayor importancia la deflexión, la cual mientras sea lo menor posible evitará grandes deformaciones que son las causantes de las grietas en la viga.

En toda viga, la distancia  $L$  entre apoyos recibe el nombre de claro. Los tipos de apoyos que se presentan en la solución de problemas son idealizaciones de las condiciones que realmente se presentan en la práctica.

Los apoyos y cimientos son perfectamente rígidos, y presentan pequeños giros o desplazamientos, los cuales pueden omitirse.

### 4.1.3 Curva Elástica de una viga

El eje neutro de una viga, pasa por el centro de gravedad de la sección transversal (Figura 28a). El eje de la viga sin carga será recto ( $A-A'$ ); al actuar una carga sobre la viga se deformará y entonces la línea recta  $A-A'$  se convertirá en una curva, denominada curva elástica de la viga (Figura 28b). El desplazamiento vertical  $Y$ , de un punto cualquiera de la curva elástica con respecto a su posición original (sin carga) es lo que se llama flecha en ese punto.

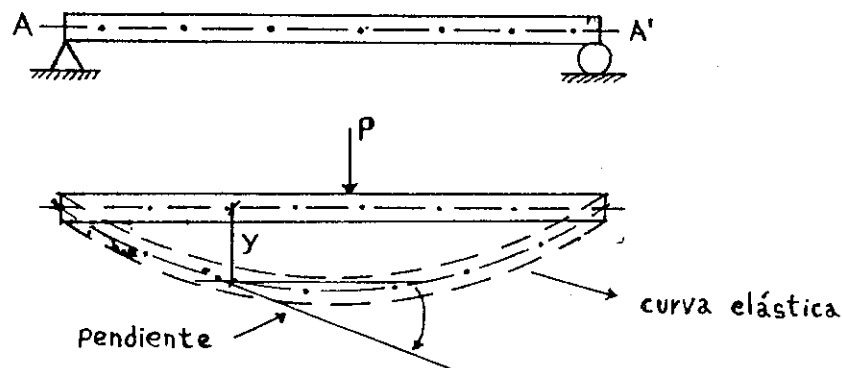


Figura 28 Elástica de una viga

La concavidad de la curva elástica, se determina de acuerdo al momento flexionante, de tal forma los momentos flexionantes positivos hacen que la viga quede concava hacia arriba y viceversa si el momento es negativo.

### 4.2 relación entre curvatura y deformación

Cuando se desean conocer las deflexiones de una viga, se puede considerar la hipótesis de la cinemática fundamental de las deformaciones, la cual dice que las secciones planas per-



manecen planas después de la deformación, con esto se desprecia la deformación por corte de una viga.

Con base en lo expuesto se puede considerar un segmento de viga inicialmente recta y en estado de deformación al aplicar una carga  $P$ , la cual se muestra en la figura 29. La curva elástica, se muestra con una curvatura de radio  $\rho$ . El centro de la curvatura o de un elemento cualquiera se puede hallar prolongando hasta su intersección dos secciones consecutivas, tales como  $AA'$  y  $DD'$ , las cuales permanecen planas y perpendiculares a las líneas longitudinales o fibras de la viga.

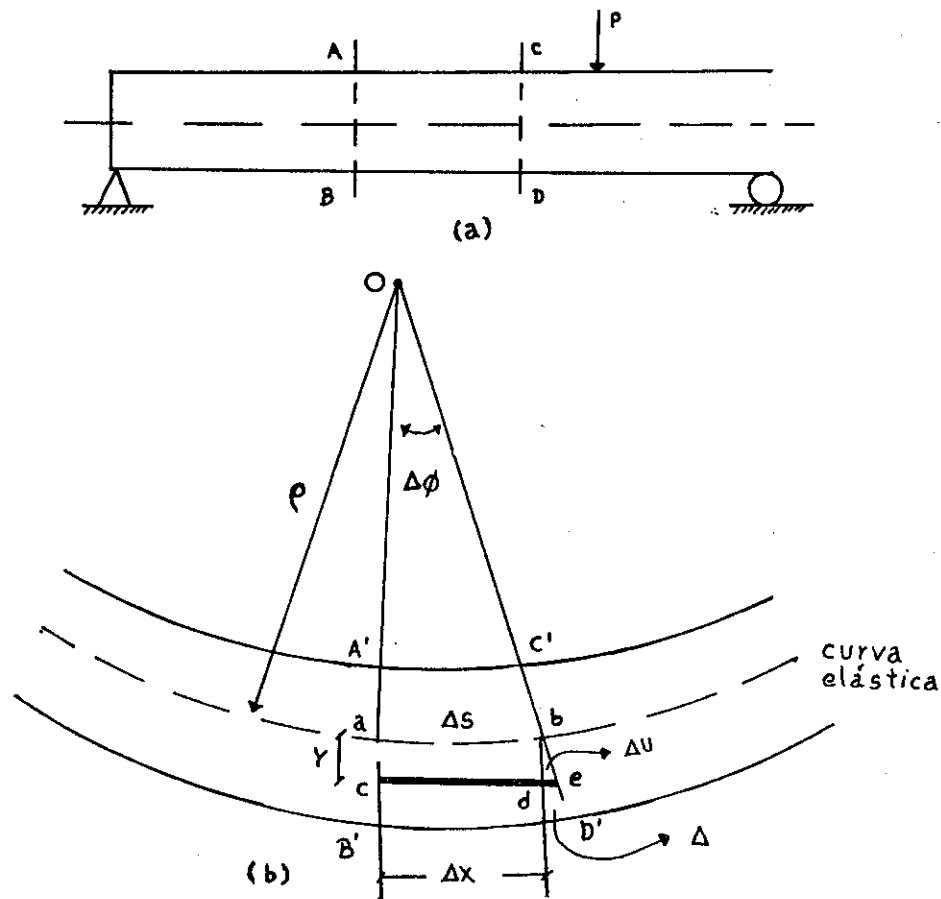


Figura 29 relación entre curvatura y deformación

El hecho que las secciones transversales de una viga en flexión pura permanezcan planas, puede establecerse experimentalmente mediante mediciones de deformación precisas o demostrarse teóricamente por medio de principios de simetría. La simetría de la viga y sus cargas (Figura 29a) requiere que todos los elementos de la viga (en las secciones  $AB$  y  $CD$ ) se deformen de manera idéntica, lo que únicamente es posible si la curva de flexión es circular y si las secciones transversales permanecen planas durante el proceso de carga. Estas conclusiones son válidas para una viga de cualquier material (elástico lineal o no lineal); por supuesto, las propiedades deben ser simétricas respecto al eje  $Y$ .

El elemento  $A'B'$  y  $C'D'$  en una viga flexionada, el ángulo que forman dos secciones consecutivas es  $\Delta\phi$ . Si las distancias  $Y$  desde la superficie neutra hasta las fibras deformadas se asumen de manera usual como positiva hacia arriba, la deformación total  $\Delta u$  de una fibra se puede expresar como

$$\Delta u = -Y\Delta\sigma$$

Con las distancias  $Y$  negativa la fórmula da un alargamiento, lo que concuerda con la deformación que se muestra en la Figura 29b.

Las fibras situadas en la superficie neutra (curva elástica) de la viga deformada, representada por la fibra  $ab$  no sufrirá deformación. Por tanto, la longitud del arco  $\Delta s$  corresponde a la longitud inicial de todas las fibras entre las secciones  $A'B'$  y  $C'D'$ .

La longitud de arco  $\Delta s$  se puede utilizar dividiendo entre  $\Delta u - Y \Delta\sigma$ , entonces se tiene

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -Y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \quad \text{ó} \quad \frac{du}{ds} = -Y \frac{d\phi}{ds}$$

Recordar que  $\Delta s$  utilizado en el análisis tiende a cero,  $du/ds$  es la deformación de la fibra de una viga situada a una distancia  $Y$  del eje neutro. Por tanto

$$du/ds = \epsilon_x$$

El término  $d\phi/ds$  tiene significado geométrico, el cual es  $\Delta s = \rho \Delta\phi$ , éste no varía en la superficie neutra,  $\Delta s$  utilizada en el análisis tiende a cero, por tanto

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} = K$$

esta última ecuación es la definición de la curvatura  $K$  (en la cual  $\phi$  y  $s$  aumentan en el mismo sentido).

Si  $du/ds = -y d\phi/ds$ , al sustituir  $d\phi/ds = 1/\rho = K$  y  $du/ds = \epsilon_x$ , define la relación entre la curva elástica y la deformación de la manera siguiente

$$1/\rho = K = -\epsilon_x/y$$

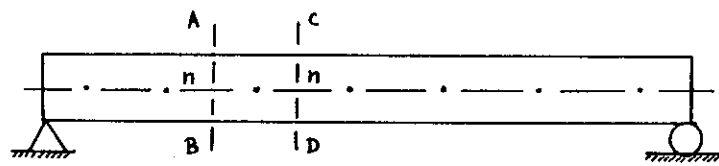
Esta ecuación establece que las deformaciones longitudinales en la viga son proporcionales a la curva y que varían linealmente con la distancia  $Y$  desde la superficie neutra.

#### 4.3 relación entre curvatura y momento flexionante

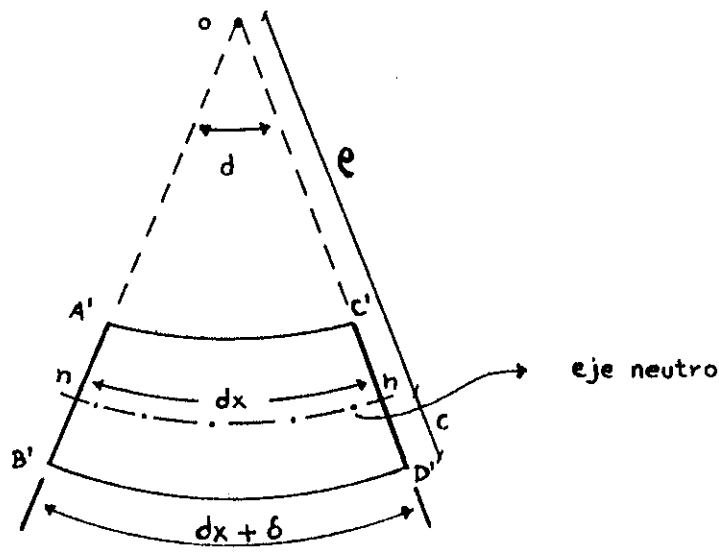
La aplicación de una carga vertical sobre una viga provoca que el eje longitudinal se deflece en la estructura, esta deflexión es el resultado del momento flexionante.

La curva elástica depende del momento flexionante, éste puede generar en la curva concavidad hacia arriba o hacia abajo, según sea el momento positivo o negativo (de acuerdo al diagrama de momento).

Para comprobar la relación existente entre la curvatura y el momento flexionante, se puede observar la Figura 30a. En la cual se muestra una pequeña sección de una viga sin carga, de longitud  $dx$ ; la Figura 30b muestra la misma sección después de que la viga se ha deformado por la acción de cargas aplicadas.



(a)



(b)

Figura 30 Relación entre curvatura y Momento flexionante

Nuevamente se considera que las secciones planas antes de la deformación se conservan planas después de ella, la figura 30b. muestra una pequeña sección de la elástica, ésta es un arco de círculo, A'B' y C'D' que se cortará en el centro de curvatura O, formando un sector circular. El eje neutro no está sujeto a ningún esfuerzo y conserva la longitud original dx. Las fibras que se encuentran arriba y abajo del eje neutro cambian de longitud. Una de las fibras inferiores, situada a una distancia c a partir del eje neutro, aumenta su longitud en una cantidad  $\delta$ .

A través de la geometría de los sectores semejantes Onn y OB'D' se puede escribir

$$d\theta = dx/\rho = (dx + \delta)/(\rho + c)$$

resolviendo, se obtiene

$$dx(\rho + c) = \rho(dx + \delta)$$

$$cdx = \rho\delta$$

$$c = \delta$$

Recordando que la deformación unitaria  $e$  es

$\epsilon = \text{Variación de longitud} / \text{longitud Original} = \delta / dx$   
lo que proporciona la ecuación

$$c/\rho = \epsilon$$

Si la deformación unitaria es

$$\epsilon = \sigma/E$$

y se iguala se llega a la ecuación

$$c/\rho = \sigma/E$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo en las fibras,  $E$  es el módulo de elasticidad,  $c$  es la distancia entre el eje neutro y las fibras, y  $\rho$  es el radio de curvatura.

Si el esfuerzo  $\sigma = Mc/I$ , al sustituir esto en

$$c/\rho = (Mc/I)/E$$

Se obtiene

$$c/\rho = (Mc/I)/E$$

$$1/\rho = M/EI$$

que es la relación entre la curvatura y el momento flexionante.

#### 4.4. Ecuación Diferencial de la Elástica

La ecuación diferencial de la elasticidad se obtiene a través de considerar las deflexiones de una viga, las cuales son pequeñas en comparación de la longitud de la viga, cada segmento pequeño de la elástica puede considerarse aproximadamente como el arco de un círculo de radio de curvatura

En los libros de cálculo, la curvatura de una línea se define como:

$$1/\rho = (d^2y/dx^2) / [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}$$

donde  $X$  e  $Y$  son las coordenadas de un punto en la elástica de una viga.

En las vigas, la pendiente  $dy/dx$  es muy pequeña. Si se eleva al cuadrado el término  $dy/dx$ , se hace tan pequeño, que en comparación de los otros términos puede despreciarse. Considerando lo expuesto, puede escribirse la ecuación de la elástica como

$$1/\rho = d^2y/dx^2$$

#### 4.5 Método Doble Integración

El método de doble integración, tiene su base en la relación existente entre la ecuación de la curva elástica (Figura 30) y el momento flexionante

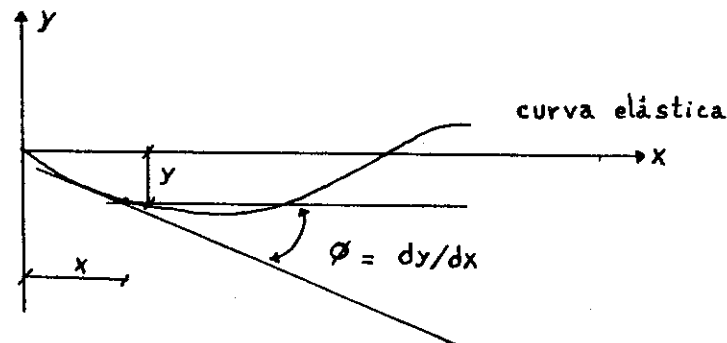


Figura 31

La ecuación de la curva elástica es

$$1/\rho = d^2y/dx^2$$

donde X e Y son las coordenadas de un punto sobre la curva. El momento flexionante se relaciona con la elástica de acuerdo a la ecuación.

$$1/\rho = M/EI$$

esto significa que al igualar las anteriores, se obtiene

$$d^2y/dx^2 = M/(EI)$$

ecuación que permite determinar la pendiente y la deflexión de la elástica de la viga.

Suponiendo que EI es una constante e integrando la ecuación.

$$((d^2y)/(dx^2)) = (M/(EI))$$

se obtiene

$$(dy)/dx = [(M)/(EI)]dx + C_1$$

que es la ecuación de la pendiente, y permite determinar el valor de la misma, en cualquier punto. M es la suma de los momentos de las cargas en función de x y C<sub>1</sub> es una constante, la cual se determina por las condiciones de apoyo.

Aplicando la segunda integración a

$$(EI)(dy/dx) = M dx + C_1$$

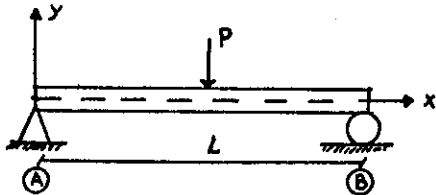
se determina

$$EIY = M dx dx + C_1 X + C_2$$

que es la ecuación que permite obtener el valor de la ordenada en Y (deflexión) para cualquier valor de X.  $C_2$  puede determinarse a partir de las condiciones de apoyo de la viga.

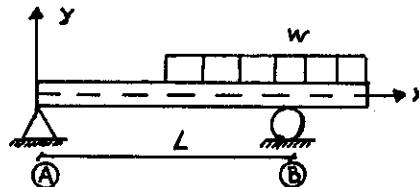
Las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , tendrán un valor que depende de las condiciones de la viga (condiciones de frontera).

**Condiciones de Frontera**



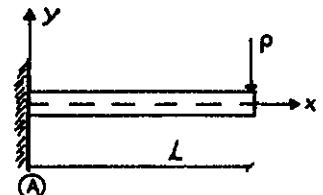
(a) Viga simplemente apoyada

EI Y en A = 0  
EI Y en B = 0



(b) Viga con un tramo en voladizo

EI Y en A = 0  
EI Y en B = 0



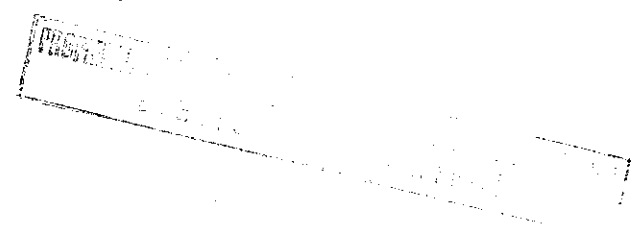
(c) Viga en voladizo

EI Y en A = 0  
EI  $[dy/dx]$  en A=0

El método de doble integración se puede aplicar para cada tramo de carga por separado, es decir que si las condiciones de carga varían a lo largo de la viga, la ecuación de momentos tendrá la variación correspondiente. Esto requiere una ecuación de momentos entre cada dos puntos sucesivos de discontinuidad de cargas (cargas aisladas, comienzo, terminación o cambio de forma en las cargas repartidas), lo que daría lugar a dos integraciones para cada tramo. Por lo tanto se tendría el problema para determinar las constantes que resulten de la integración, resultando algo laborioso y provoca cometer errores. Para evitar errores se puede plantear una ecuación de momentos única y válida para toda la viga, no importando la discontinuidad de cargas existentes en la viga.

Procedimiento del método de Doble Integración aplicando una ecuación de momentos única:

- 1.- Trazar los ejes en la viga (x,y), el eje Y en un extremo (es recomendable en el lado izquierdo) y el eje x en el eje longitudinal.
- 2.- Obtener el valor de las reacciones.
- 3.- Si existen cargas distribuidas que se aplican y no terminan en el extremo derecho de la viga, es necesario prolongarlas hacia él, y restar en la parte de abajo de la viga el incremento (lo que se prolongó).

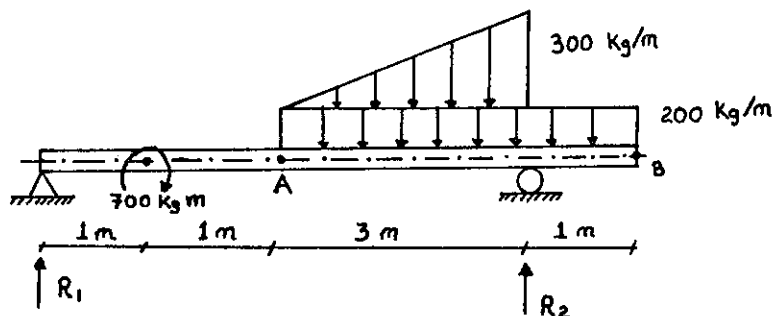


- 4.- Plantear la ecuación en función de  $X$ , analizando la sumatoria de momentos de lado izquierdo ( $M = \Sigma M$  izquierdo), a partir de un  $\Delta x$  antes de llegar al extremo de la viga. Los momentos a favor de las manecillas del reloj son positivos y en sentido contrario negativos.
- 5.- Realizar la doble integración de la ecuación planteada.
6. Determinar las constantes ( $C_1$  y  $C_2$ ) de acuerdo a las condiciones de frontera.
- 7.- Sustituir los valores de las constantes en la ecuación de la tangente y flecha, para obtener el valor de éstas en cualquier punto de la viga.

Para la ecuación general de la elástica, se utilizan paréntesis angulares ( $\langle \rangle$ ) en los momentos. Si dentro del paréntesis angular se obtiene un número negativo, su valor será cero. Esto se justifica en el hecho de que la ecuación general de momentos se escribe teniendo en cuenta la definición de  $M = \Sigma M$  izquierda, lo que significa que solo han de tenerse en cuenta las fuerzas aplicadas en la parte de la viga a la izquierda de la sección. Un valor negativo en un término entre paréntesis angulares indica que la carga está situada a la derecha de la sección, por lo que no hay que considerarla para la determinación del momento. Un valor cero del paréntesis indica que empieza una carga distribuida o la existencia de una carga concentrada.

#### 4.5.1 Ejemplo

Determinar la ecuación de la elástica, tangente y la deflexión en A y B.



$$\Sigma MR_1 = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

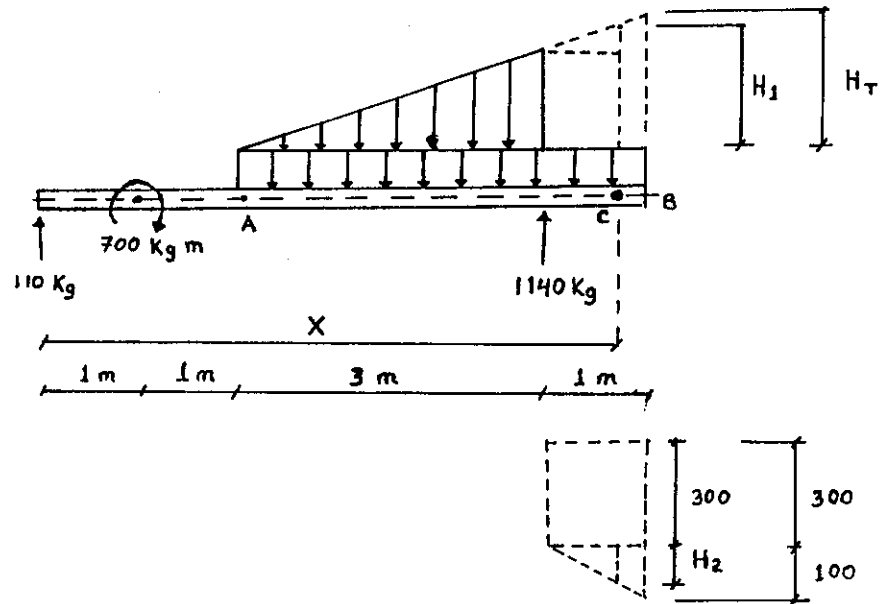
$$700 + 1/2(3)(300)((2 + 3(3)/3) + 4(200)(2+2) - R_2(5) = 0$$

$$R_2 = 1140 \text{ Kg.}$$

$$\Sigma MR_2 = 0 (+\curvearrowright)$$

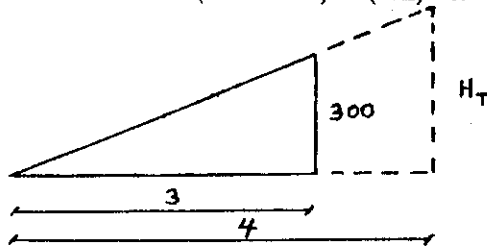
$$1(200)(1/2) - 3(200)(3/2) - 1/2(3)(300)(3/3) + R_1(5) + 700 = 0$$

$$R_1 = 110 \text{ Kg}$$

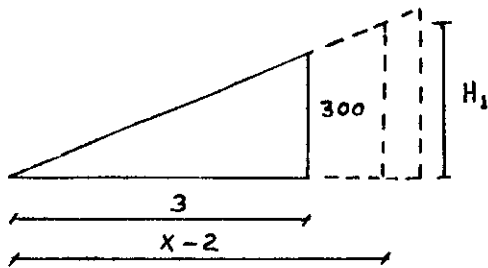


$$(EI) \frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma \text{Mizquierda/c} +$$

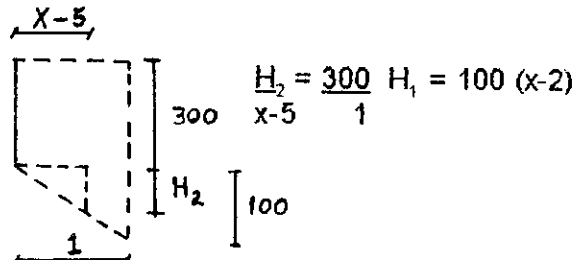
$$(EI) \frac{d^2y}{dx^2} = 110 \langle x \rangle + 700 \langle x - 1 \rangle^0 - \frac{1}{2} \langle x - 2 \rangle (H_1) \frac{\langle x - 2 \rangle}{3} - \langle x - 2 \rangle (200) \frac{\langle x - 2 \rangle}{2} + 1140 \langle x - 5 \rangle + \langle x - 5 \rangle (300) \frac{\langle x - 5 \rangle}{2} + \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle (H_2) \frac{\langle x - 5 \rangle}{3}$$



$$\frac{H_T}{4} = \frac{300}{3} \Rightarrow H_T = 400 \text{ kg/m}$$



$$\frac{H_1}{(x-2)} = \frac{300}{3} \Rightarrow H_1 = 100 (x-2)$$



$$\frac{H_2}{x-5} = \frac{300}{1} \Rightarrow H_2 = 300 (x-5)$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = 110 \langle x \rangle + 700 \langle x - 1 \rangle^0 - \frac{1}{2} (x-2) (100 \langle x - 2 \rangle) / 3 - \langle x - 2 \rangle (200) \frac{\langle x - 2 \rangle}{2} + 1140 \langle x - 5 \rangle + \langle x - 5 \rangle (300) \frac{\langle x - 5 \rangle}{2} + \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle (300 \langle x - 5 \rangle) \frac{\langle x - 5 \rangle}{3}$$



$$(EI)dy^2/dx^2 = 110\langle x \rangle + 700 \langle x - 1 \rangle^0 - (100/3)\langle x - 2 \rangle^3 - 100\langle x - 2 \rangle^2 + 1140 \langle x - 5 \rangle + 150 \langle x - 5 \rangle^2 + (50/3)\langle x - 5 \rangle^3$$

Ecuación de la tangente

$$EI(dy/dx) = 55\langle x \rangle^2 + 700 \langle x - 1 \rangle - (25/3) \langle x - 2 \rangle^4 - (100/3)\langle x - 2 \rangle^3 + 570 \langle x - 5 \rangle^2 + 50 \langle x - 5 \rangle^3 + (25/6) \langle x - 5 \rangle^4 + C_1$$

Ecuación de la flecha (elástica)

$$EIY = (55/3)\langle x \rangle^3 + 350\langle x - 1 \rangle^2 - (5/3)\langle x - 2 \rangle^5 - (25/3)\langle x - 2 \rangle^4 + 190\langle x - 3 \rangle^3 + (50/4)\langle x - 5 \rangle^4 + (25/24)\langle x - 5 \rangle^5 + C_1X + C_2$$

Condiciones de frontera

Para  $X = 0, Y = 0$

al sustituir en la ecuación de la flecha

$$0 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

para  $X = 5, Y = 0$

al sustituir en la ecuación de la flecha

$$0 = (55/3)\langle 5 \rangle^3 + 350\langle 5 - 1 \rangle^2 - (5/3)\langle 5 - 2 \rangle^5 - (25/3)\langle 5 - 2 \rangle^4 + 190\langle 5 - 5 \rangle^3 + (50/4)\langle 5 - 5 \rangle^4 + (25/24)\langle 5 - 5 \rangle^5 + C_1 \langle 5 \rangle$$

$$0 = 1771.7 + 5C_1 \Rightarrow C_1 = -354.30$$

La ecuación final de la flecha (elástica)

$$EIY = (55/3)\langle x \rangle^3 - 350\langle x - 1 \rangle^2 - (5/3)\langle x - 2 \rangle^5 - (25/3)\langle x - 2 \rangle^4 + 190\langle x - 5 \rangle^3 + (50/4)\langle x - 5 \rangle^4 + (25/24)\langle x - 5 \rangle^5 - 354.30\langle x \rangle$$

Deflexión en A

Si  $x = 2$  de la ecuación final de la elástica

$$EIY = (55/3)\langle 2 \rangle^3 - 350\langle 2 - 2 \rangle^2 - (5/3)\langle 2 - 2 \rangle^5 - (25/3)\langle 2 - 2 \rangle^4 + 190\langle 2 - 5 \rangle^3 + (50/4)\langle 2 - 5 \rangle^4 + (25/24)\langle 2 - 5 \rangle^5 - 354.3\langle 2 \rangle$$

$$Y = -911.90/(EI)$$

Deflexión en B

Si  $x = 6$  de la ecuación final de la elástica

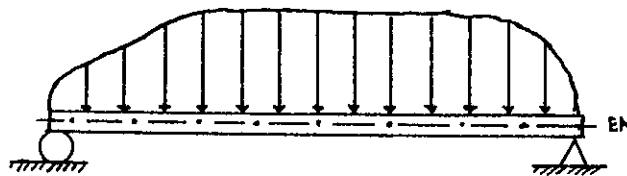
$$EIY = (55/3)\langle 6 \rangle^3 - 350\langle 6-1 \rangle^2 - (5/3)\langle 6-2 \rangle^5 - (25/3)\langle 6-2 \rangle^4 + 190\langle 6-5 \rangle^3 + (50/4)\langle 6-5 \rangle^4 + (25/24)\langle 6-5 \rangle^5 - 354.30\langle 6 \rangle$$

$$Y = -10552.30/(EI)$$

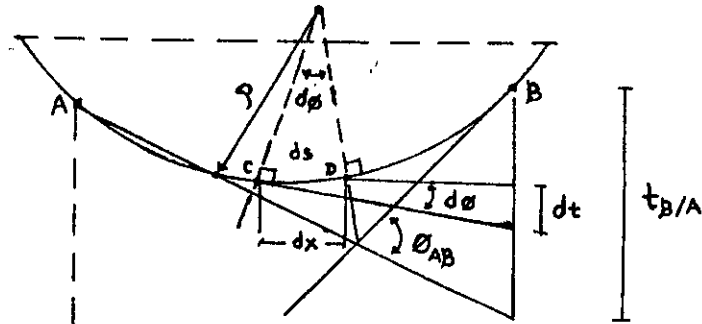
#### 4.6 Método área de Momento

El método de área de momento a diferencia del de doble integración proporciona la pendiente y la deflexión en un punto específico.

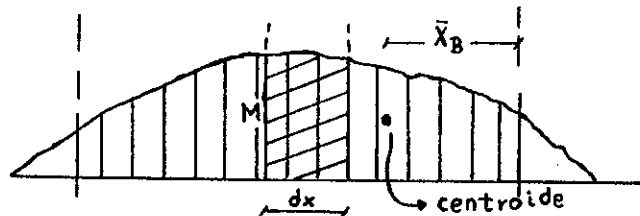
En la Figura 32a se tiene una viga estáticamente determinada, con una carga aplicada, la cual ocasiona una deflexión del eje neutro (Figura 32b) y un diagrama de momentos (Figura 32c)



(a) Viga que soporta cualquier tipo de carga



(b) Deformación de la viga



(c) Diagrama de Momento en los puntos analizados A, B

Figura 32

Si se analizan dos secciones (C, D) planas adyacentes, las cuales están separadas una longitud  $dx$  sobre una viga recta inicialmente, ambas secciones giran un ángulo  $d\theta$  una respecto a la otra.

El arco  $ds$  tiene un valor igual a  $\rho d\theta$ , y  $\rho$  es el radio de curvatura de la elástica en ese punto.

$$\text{si } 1/\rho = (M)/EI$$

y  $ds = \rho d\theta$ , entonces

$$(1)/\rho = (M)/(EI) = d\theta/ds$$

al despejar  $d\theta$  se obtiene que

$$d\theta = [(M)/(EI)] ds$$

puede considerarse que por ser  $ds$  muy pequeño su proyección será igual a  $dx$ , por lo que

$$d\theta = [M/(EI)]dx$$

Dos tangentes trazadas a la elástica en C y D (Figura 32b) forman el mismo ángulo  $d\theta$  que el que forman las secciones OC y OD (Figura 32b), por lo que la desviación angular, o ángulo entre las tangentes a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B, es igual a la suma de estos pequeños ángulos.

$$\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = 1/(EI) \int_{x_A}^{x_B} M dx$$

La distancia del punto B (Figura. 32b) de la elástica, medida perpendicularmente a la posición inicial de la viga, hasta la tangente trazada a la curva por otro punto cualquiera A, es la suma de los segmentos  $dt$  interceptados por las tangentes sucesivas trazadas a la elástica en los puntos sucesivos. Cada segmento  $dt$  puede considerarse como un arco de radio  $X$  y ángulo  $d\theta$

$$dt = x d\theta$$

de lo cual se obtiene que

$$t_{B/A} = \int dt = \int x d\theta$$

si  $d\theta = 1/EI \int_{x_A}^{x_B} (M dx)$  entonces

$$t_{B/A} = (1/EI) \int_{x_A}^{x_B} x (Mdx)$$

$t_{B/A}$  es igual a la desviación de B con respecto a una tangente trazada por A (desviación tangencial de B respecto de A). El subíndice indica que va desde B hasta la tangente trazada en A.

La  $t_{A/B} = t_{B/A}$  Figura 33

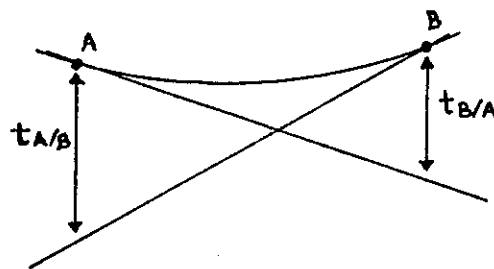


Figura 33  
Desviación tangencial de un punto respecto de otro

### Teorema del Método de área de Momento

Del diagrama de momentos de la figura 32c.  $Mdx$  es el área del elemento diferencial ashurado situado a distancia  $x$  de la ordenada que pasa por B. Si  $\int Mdx$  es la suma de tales elementos, entonces

$$(1/EI) \int_{x_A}^{x_B} Mdx = \theta_{AB} = (1/EI) (\text{AREA})_{AB}$$

esta expresión es enunciada en el Teorema I

**Teorema I:** La desviación angular, o ángulo entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B, es igual al producto de  $1/EI$  por el área del diagrama de momentos flexionantes entre estos puntos.

de la ecuación  $(1/EI) \int_{x_A}^{x_B} xMdx$

$xMdx$  es el Momento del área del elemento ashurado (de la Figura 32c) con respecto a la ordenada en B del área de la porción del diagrama de momentos flexionantes comprendida entre A y B. Con lo cual la expresión algebraica del Teorema II es:

$$t_{B/A} = (1/EI)(\text{ÁREA})_{AB} \bar{X}_B$$

El  $EI$  es la rigidez a la flexión, se debe considerar que  $EI$  permanezca constante en toda la longitud de la viga. En los dos teoremas,  $(\text{ÁREA})_{AB}$  representa el área del diagrama de momentos entre las ordenadas correspondientes a los puntos A y B,  $\bar{X}_B$  es el brazo de momento de esta área con respecto a B. Cuando el área del diagrama de momentos se compone de partes positivas y negativas, la expresión  $(\text{ÁREA})_{AB} \bar{X}_B$  representa el momento del ÁREA de todas estas partes. El momento del área se toma siempre con respecto a la ordenada del punto cuya desviación se quiere obtener, por lo que conviene ponerle a  $X$  el subíndice correspondiente

La desviación tangencial de un punto cualquiera es positiva si el punto queda por encima de la tangente con respecto a la cual se toma esta desviación, y negativa si queda por debajo de dicha tangente (Figura 34).

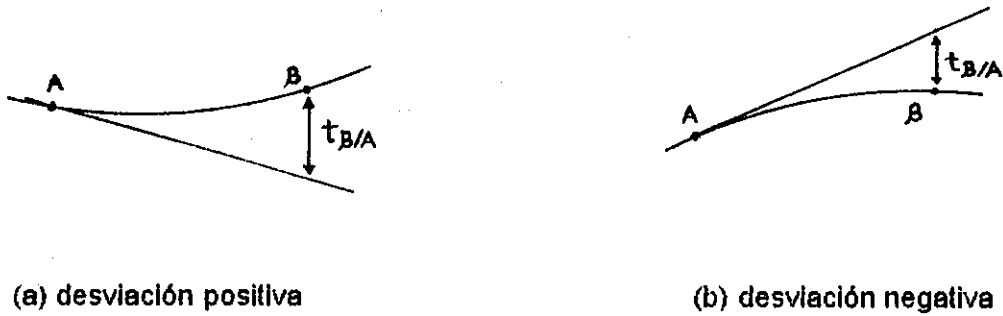


Figura 34 desviación tangencial

Un valor positivo de la variación de pendiente  $\phi_{AB}$  indica que la tangente en el punto situado a la derecha, B, se obtiene girando en sentido contrario al del reloj la tangente trazada en el punto más a la izquierda, A; es decir, que para pasar de la tangente en A a la tangente B se gira en sentido contrario al del reloj, y viceversa para los valores negativos de  $\phi_{AB}$  (Fig. 35)



(a)  $\phi_{AB}$  en sentido contrario al reloj (positiva)

(b)  $\phi_{AB}$  en sentido del reloj (negativa)

Figura 35 variación de pendiente o variación angular

El diagrama de momentos por partes consiste en analizar el efecto de cada carga por separado, el cual se basa en dos principios fundamentales:

1.- El momento flexionante producido en una determinada sección por un sistema de cargas es igual a la suma de los momentos flexionantes producidos en la misma sección por cada carga actuando por separado, es decir

$$M = \sum_{\text{izquierda}} = \sum_{\text{derecha}}$$

Los momentos a la izquierda o derecha son el efecto que ocasiona las cargas en su respectivo lado.

2.- El efecto en el momento flexionante de cualquier carga es de la forma general:

$$y = Kx^n$$

donde k es el valor del momento y  $X^n$  es el grado de la ecuación  $n = 0, 1, 2$  y  $3$ ; para par concentrado, carga puntual, carga distribuida rectangular y triangular respectivamente.

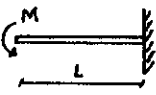

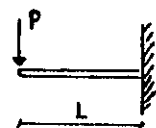
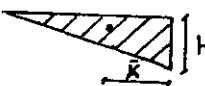
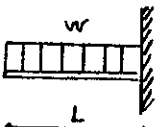

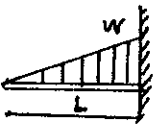

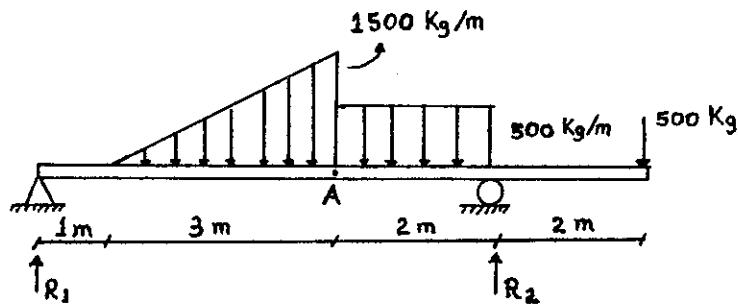
CARGA	Momento respecto del empotramiento	Grado de la ecuación de momento	Diagrama respecto del empotramiento	Área	$\bar{x}$
	M	0		bh	b/2
	PL	1°		bh/2	b/3
	$wL^2/2$	2°		$(bh)/3$	b/4
	$WL^2/3$	3°		$(bh)/4$	b/5

Tabla # 2 Distinto tipo de carga, sus Momentos de área y centroide

donde  $b = L$  y  $h$  es el valor del momento

### 4.6.1 Ejemplo

Por el método de área de momento determinar la deflexión en punto A.



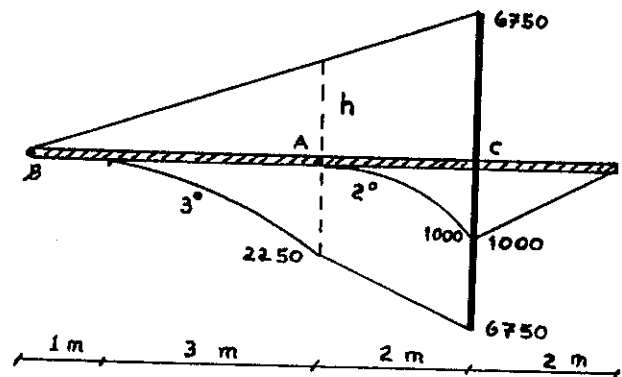
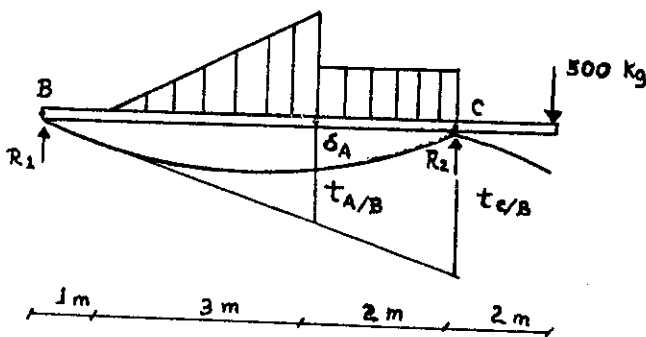
$EI = \text{constante}$

$$\sum MR_1 = 0 \quad (\uparrow \curvearrowright)$$

$$2/3(1500)(1+6/3) + 2(500)(4+1) + 500(8) = R_2(6) \Rightarrow R_2 = 2625 \text{ Kg}$$

$$\sum MR_2 = 0 \quad (\downarrow \curvearrowright)$$

$$-500(2) + 2(500) + 3/2(1500)(2+1) = R_1(6) \Rightarrow R_1 = 1125 \text{ Kg}$$



$$EI t_{A/B} = \Sigma (\text{ÁREA})_{AB} \bar{X}_A$$

$$EI t_{A/B} = 1/2(4)(4500)(4/4) - 4/4(2250)(4/5)$$

$$t_{A/B} = 7200/EI$$

$$EI t_{C/B} = \Sigma (\text{ÁREA})_{CB} \bar{X}_C$$

$$h = 4(6750/6) \Rightarrow h = 4500$$

$$EI t_{C/B} = 6/2 (6750)(6/3) - [4/4(2250)(2 + 4/5) + 2/3(1000)(2/4) + (2)(1000)(1) + 2/2(4500)(2/3)]$$

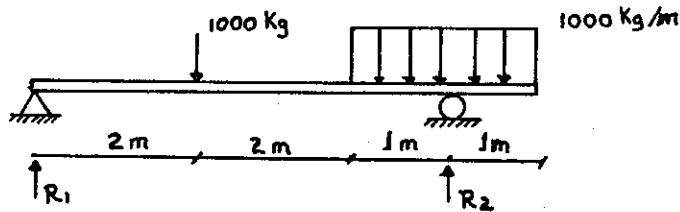
$$t_{C/B} = 28866.7/EI$$

por relación

$$(\delta_A + t_{A/B})/4 = t_{C/B}/6 \Rightarrow \delta_A = (2 t_{C/B})/6 = t_{A/B} \Rightarrow \delta_A = 2422.2/EI$$

#### 4.6.2 Ejemplo

Por el método de área de Momento, determinar el valor de la deflexión Máxima.

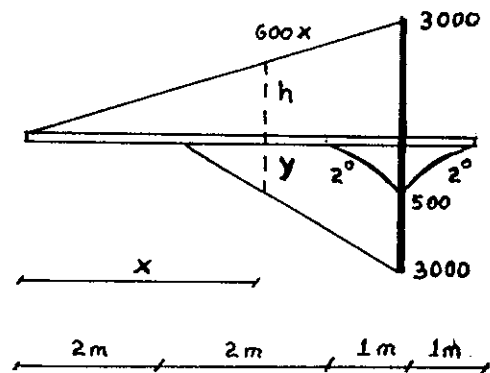
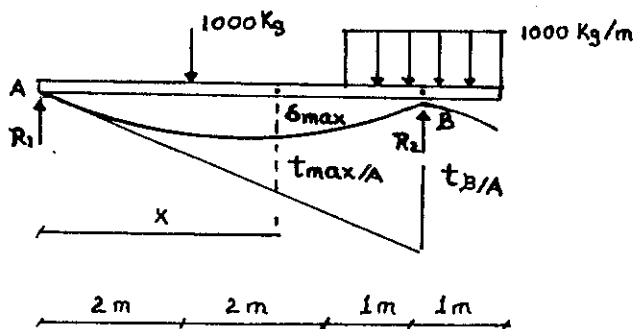


$$\Sigma M_{R1} = 0 \quad (+)$$

$$1000(2) + 1000(2)(5) = R_2 (5) \Rightarrow R_2 = 2400 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_{R2} = 0 \quad (+)$$

$$1000(3) = R_1 (5) \Rightarrow R_1 = 600 \text{ Kg}$$



$$h/x = 3000/5 \Rightarrow h = 600x$$

$$y/(x-2) = 3000/3 \Rightarrow y = 1000(x-2)$$

$$EI t_{B/A} = \Sigma (\text{AREA})_{AB} \bar{x}_B$$

$$EI t_{B/A} = 5(3000)/2 (5/3) - [3/2(3000)(1) + 1/3(500)(1/4)]$$



$$t_{B/A} = (7958.3) / EI$$

$$EI t_{\max/c} = \Sigma(\text{ÁREA})_{\max/A} (\bar{X}_{\max})$$

$$EI t_{\max/c} = X/2(600x) (x/3) - ((x - 2)/2) ((1000)(x - 2)) ((x - 2) / 3)$$

$$t_{\max/c} = [100 X^3 - 500/3(x - 2)^3] / EI$$

$$(\delta_{\max} + t_{\max/A})/x = (t_{B/A})/5 \Rightarrow \delta_{\max} = x/5 t_{B/A} - t_{\max/A}$$

$$\delta_{\max} = x/5 (7958.3)/EI - [100x^3 - 500/3 (x - 2)^3] / EI$$

$$EI \delta_{\max} = x/5 (7958.3) - [100x^3 - 500/3 (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)]$$

$$EI \delta_{\max} = ((7958.3)/5)X - 100X^3 + (500/3)X^3 - 1000X^2 + 2000X - 4000/3 \quad ((Ec. 1))$$

$$\text{Tag } \emptyset = d\delta / dx$$

$$EI d\delta_{\max} / dx = 7958.3/5 - 300X^2 + 500X^2 - 2000X + 2000$$

$$EI d\delta_{\max} / dx = 200X^2 - 2000X + 3591.7$$

$$X_{\max} = \text{Tag } \emptyset = d\delta_{\max} / dx = 0$$

$$200X^2 - 500X + 3591.7 = 0$$

$$X = [(-2000) \pm [(2000)^2 - 4(200)(3591.7)]^{1/2}] / 2 (200)$$

$$X = 2.35 \text{ m}$$

De ecuación 1  $\delta_{\max}$

$$\delta_{\max} = (2449.8) / EI$$

## CAPÍTULO 5

### 5.1 Vigas estáticamente indeterminadas

En las vigas estáticamente indeterminadas no son suficientes las ecuaciones de equilibrio estático para determinar las reacciones que son incógnitas. Para resolver estas vigas es necesario añadir en las ecuaciones de la estática otras relaciones que se basan en la deflexiones y obtener ecuaciones de compatibilidad para completar las ecuaciones de equilibrio. El número de reacciones excedentes respecto al de la ecuación de equilibrio es llamado grado de indeterminación estática. La reacción excedente respecto al de la ecuación es llamado grado de indeterminación estática.

### 5.2 Método de superposición

Es método es llamado método de las fuerzas, forma parte de la aplicación del principio de superposición, el cual es aplicado a estructuras que experimentan pequeñas deformaciones y se componen de materiales linealmente elásticos.

El método reduce un sistema estáticamente indeterminado a uno determinado, eliminando reacciones redundantes para mantener el equilibrio estático. Estas reacciones son consideradas como cargas aplicadas exteriormente y sus magnitudes se ajustan para que satisfagan las condiciones de deformación prescritas en sus puntos de aplicación.

Las redundantes se visualizan como cargas que actúan sobre la estructura liberada y se calculan los desplazamientos correspondientes. Con el principio de superposición (se utilizan las deflexiones y pendientes en este método) se sabe que los desplazamientos finales debido a las cargas reales y a las redundantes deben ser iguales a la suma de tales desplazamientos, calculados separadamente. En los apoyos redundantes los desplazamientos serán cero o tendrán cantidades conocidas, por lo que se puede formular ecuaciones de superposiciones redundantes, después de lo cual se determinan las demás reacciones mediante equilibrio estático.

Este método es aplicado tomando como base el resultado de la pendiente y deflexión para los casos siguientes:

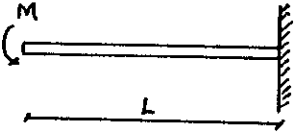
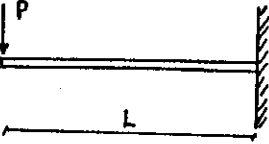
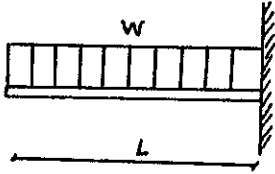
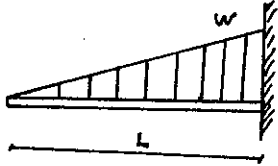
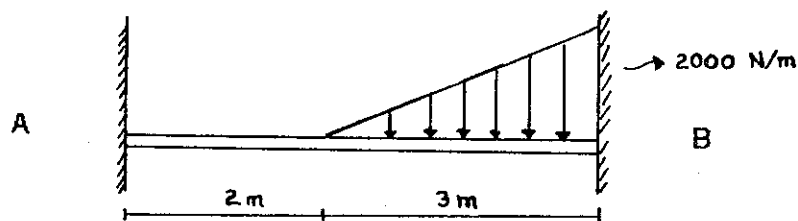
CARGA	GRADO	EI $\theta$	EI $\delta$
	0	$\frac{ML}{1}$	$\frac{ML^2}{2}$
	1	$\frac{ML}{2}$	$\frac{ML^2}{3}$
	2	$\frac{ML}{3}$	$\frac{ML^2}{4}$
	3	$\frac{ML}{4}$	$\frac{ML^2}{5}$

Tabla # 3 Pendiente y deflexión en los extremos

Este método parte de superponer los efectos por separado de cada carga, y relacionar tanto las deflexiones de cada una de aquellas, como la pendiente que provocan.

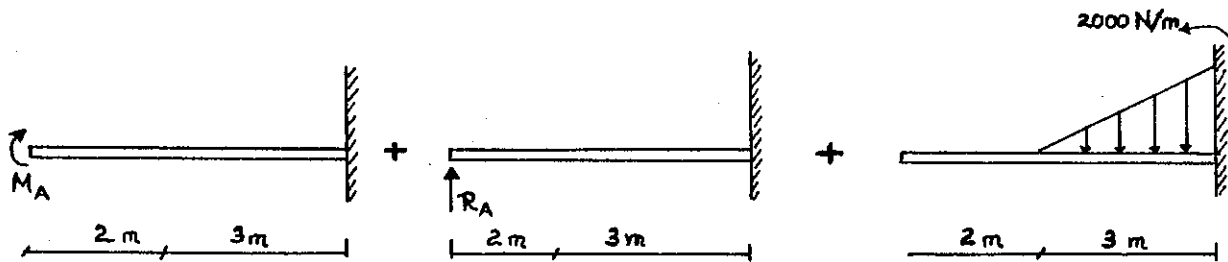
### 5.2.1. Ejemplo

Determinar las reacciones y los momentos para la viga doblemente empotrada.

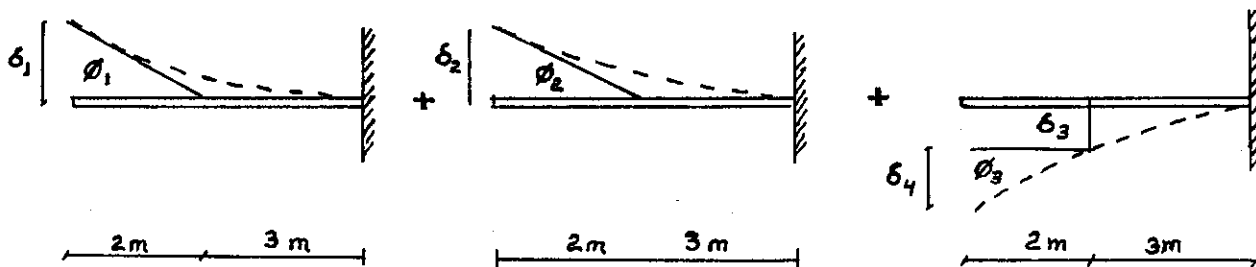


Se toma como redundante el momento en A ( $M_A$ ) y la reacción A ( $R_A$ ) debido al empotramiento en el extremo A.

Aplicando el principio de superposición a la viga y considerando las redundantes se tiene:



Cada estado de carga ocasiona las pendientes deflexiones siguientes:



La deflexión en A tiene que ser igual a cero

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0$$

de la figura 40 se obtiene el valor de cada deflexión

Al sustituir el valor de cada deflexión se tiene

$$(M_A(5)^2)/2 + (R_A(5)(5)^2)/3 - (3/2) (2000)(3)^2/5 - 2(3/2)(2000)3/4 = 0$$

$$(25/2)M_A + R_A(125/3) - 9900 = 0$$

$$R_A = 237.6 - 0.3M_A \text{ Ec.1}$$

La pendiente en A debe ser igual a cero

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0$$

de la figura 40 se tiene el valor de las pendientes

Al sustituir el valor de la pendiente se tiene

$$M_A(5) + R_A(5)(5)/2 - (3/2)(2000)3/4 = 0$$

$$M_A 5 + R_A 25/2 - 2250 = 0$$

$$R_A = 180 - 0.4M_A \text{ Ec.2}$$

Igualando Ec.1 = Ec.2

$$237.6 - 0.3M_A = 180 - 0.4M_A \Rightarrow M_A = -576 \text{ N.m.}$$

De Ec. 1

$$R_A = 410.4 \text{ N}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \uparrow +$$

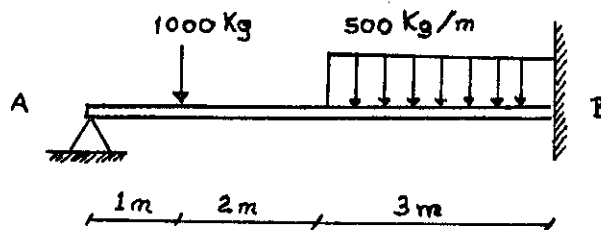
$$R_B = -410.4 + (3/2)(2000) \Rightarrow R_B = 25869.6 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowleft -$$

$$M_B = -576 + 410.4(5) - (3/2)(2000) \Rightarrow M_B = -1524$$

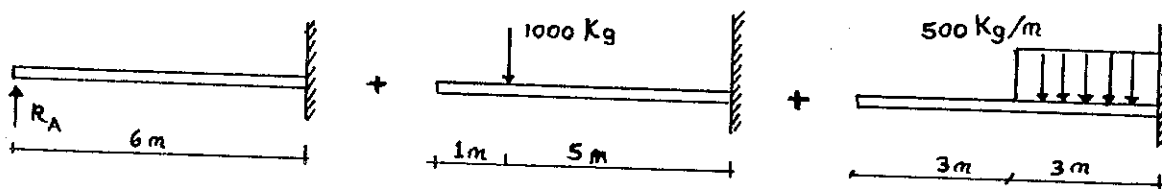
### 5.2.2 Ejemplo

Determinar el valor de las reacciones y el momento en el empotramiento de la Viga.

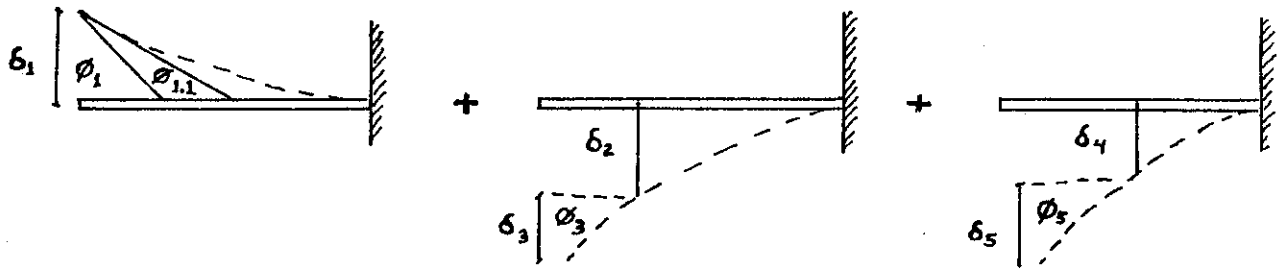


Se toma como redundante la reacción A ( $R_A$ ) en el extremo A de la viga.

Aplicando el principio de superposición y considerando a la redundante se tiene:



Cada estado de carga ocasiona las deflexiones y pendientes siguientes:



La deflexión en A es igual a cero

$$\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 0$$

$$\delta_1 - \delta_2 - 1 \phi_3 - \delta_4 - 3 \phi_5 = 0$$

De la figura 40 se obtiene el valor de las deflexiones y pendientes.

$$\begin{aligned} (R_A(6)^2)/3 - 1000(5)(5)^2/3 - 1(1000)(5)(5)/2 - 500(3)1.5(3)/4 \\ - 3(500(3)(1.5)^3/3 = 0 \end{aligned}$$

$$72 R_A = (125000)/3 + 12500 + 5062.5 + 6750$$

$$R_A = 916.4 \text{ Kg.}$$

$$\Sigma F_y = 0 \uparrow +$$

$$R_B = 1000 + 500(3) - R_A \Rightarrow R_B = 1583.6$$

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright$$

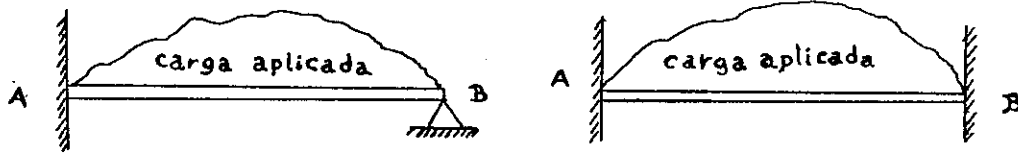
$$M_B - 1583.6(6) + 1000(1) + 3(500)(4.5) = 0$$

$$M_B = 1751.6 \text{ Kg. m } \curvearrowright$$

### 5.3 Método de área de momento

El método de área de momento resulta más práctico que el de superposición, porque no es necesario recordar el valor de las deflexiones y pendientes, únicamente se refiere a empotrar en un extremo de la viga, obtener los diagrama de momentos y con estos obtener la desviación tangencial de un punto respecto de otro ( $t_{AB} = (\Sigma \text{AREA DE MOMENTO}_{AB} X_A)/EI$ ) y la desviación angular de los mismos puntos ( $\phi = \text{AREA DE MOMENTO}/EI$ ); al igualar ambas se determinan las incógnitas

Cuando se resuelven las incógnitas es importante tener en cuenta que, para los elementos estáticamente indeterminados tanto la pendiente como la desviación entre los extremos es cero, es decir que



(a) Empotrada y apoyada

(b) Doblemente empotrada

Fig. 36 Vigas estáticamente indeterminadas

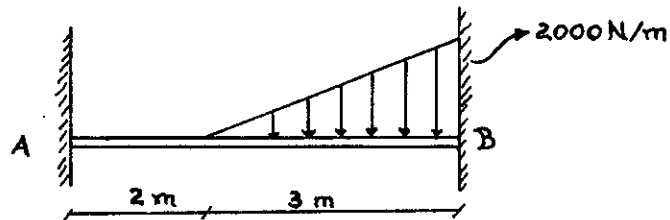
para ambos casos se tiene que

$$EI \theta_{AB} = \Sigma \text{AREA}_{AB} = 0 = \Sigma \text{AREA}_{BA}$$

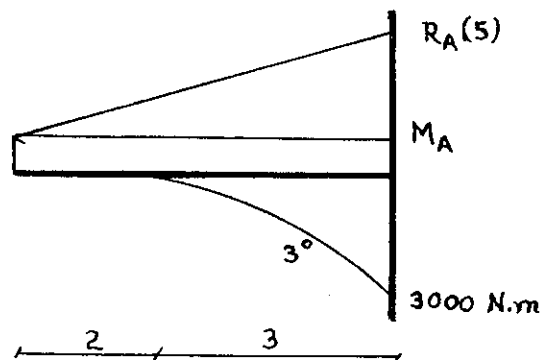
$$EI t_{A/B} = \Sigma \text{AREA}_{AB} \bar{X}_A = 0 = \Sigma \text{AREA}_{BA} \bar{X}_B$$

### 5.3.1 Ejemplo

Determinar el valor de las reacciones y de los momentos para la Viga doblemente empotrada



Empotrando en B el diagrama de Momentos es



$$EI t_{A/B} = \Sigma \text{AREA}_{AB} \bar{X}_A = 0$$

$$(5/2)R_A 5(10/3) + M_A 5(2.5) - (3/4)(3000)(2 + 12/5) = 0$$

$$(250/6)R_A = -12.5M_A + 9900$$

$$R_A = (-75 M_A + 59400)/250 \quad \text{Ec.1}$$

$$(5/2)(R_A 5) + 5(M_A) - (3/4)(3000) = 0$$

$$(25/2)R_A = -5M_A + 2250$$

$$R_A = (-10M_A + 4500)/25 \quad \text{Ec.2}$$

$$\text{Ec.1} = \text{Ec.2}$$

$$(-75 M_A + 59400)/250 = (-10M_A + 4500)/25$$

$$-75M_A + 59400 = -100M_A + 45000$$

$$M_A = -576 \text{ N.M.} \quad \curvearrowright$$

De Ecuación 1

$$R_A = (-10(-576) + 4500)/25 =$$

$$R_A = 410.4 \text{ N}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \uparrow +$$

$$R_B = 3/2(2000) - 410.4 \Rightarrow R_B = 2589.6$$

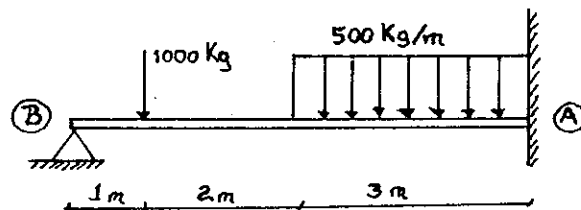
$$\Sigma M_B = 0 \quad \curvearrowright +$$

$$-576 + M_B - 3/2(2000)(3/3) + 410.4(5) = 0$$

$$M_B = 1524 \text{ N.m.}$$

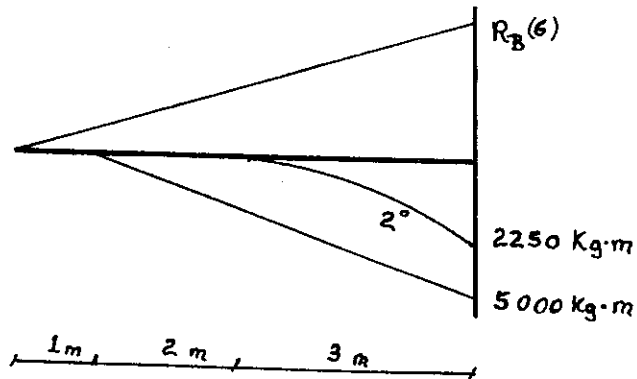
### 5.3.2 Ejemplo

Determinar el valor de las reacciones y el momento en el empotramiento de la viga.





Empotrando en A el diagrama de Momentos es



$$EI t_{B/A} = \Sigma \text{ÁREA}_{BA} \bar{X}_B = 0$$

$$(6/2)(R_B \cdot 6)(12/3) - (5/2)5000(1 + (10/3)) - (3/3)(2250)(3 + 9/4) = 0$$

$$72R_B - (162500)/3 - (47250)/4 = 0$$

$$R_B = 916.4 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_Y = 0 \uparrow +$$

$$R_A + 916.4 - 1000 - 500(3) = 0 \Rightarrow R_A = 1583.6 \text{ Kg.}$$

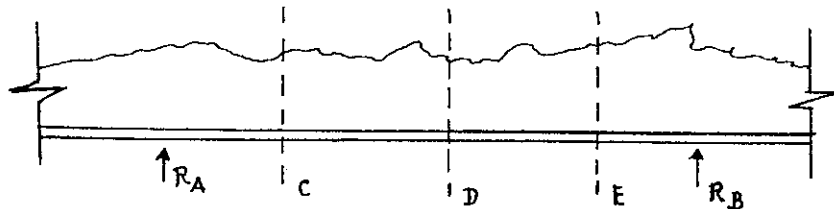
$$\Sigma M_B = 0 \curvearrowright$$

$$1000(1) + 500(3)(3 + 1.5) + M_A - 1583.6(6) = 0$$

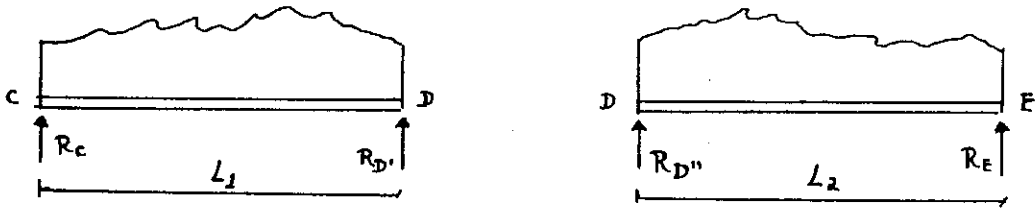
$$M_B = + 1751.6 \text{ Kg. m}$$

### 5.3 Ecuación de los tres momentos

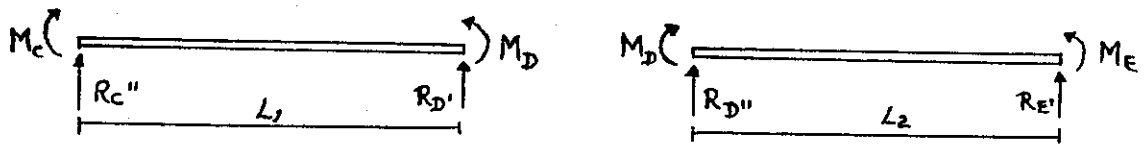
El método de la ecuación de los tres Momentos es utilizado cuando trabajan con vigas continuas, es decir, que se tienen más de tres apoyos y más de dos claros. Puede definirse claro a la distancia entre apoyos, el número de reacciones será el mismo de los apoyos y el grado de indeterminación estática será el número de apoyos menos dos.



(a) Viga continua con distinto tipo de carga



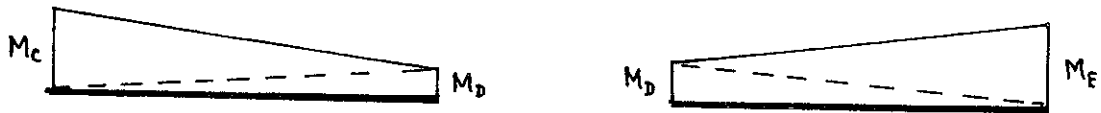
(b) Tramos cargados después del corte CDE



(c) Cargas debido a los Momentos de continuidad  $M_c > M_d < M_e$



(d) Diagrama de Momentos debido a la carga en (b)



(e) Diagrama de Momentos debido a la carga en (c)

Figura 37 Análisis de una viga con la aplicación de una carga de acuerdo a los cortes en un claro A - B.

A la Viga de la figura a sometida bajo una carga determinada, se realizan tres cortes ( C, D, E ) en el claro A - B. El corte genera dos tramos ( Fig. 37 b), actuando tres reacciones cortantes y tres momentos de continuidad ( Fig. 37 c), lo que tendrá como efecto un diagrama de Momentos flexionante, de acuerdo a los estados de carga en la figura 37 b y c.

### Los Momentos y las Reacciones

Los Momentos flexionantes  $M_C$ ,  $M_D$ , y  $M_E$  son positivos en el sentido del reloj a la izquierda del tramo y contrario al sentido del reloj a la derecha del tramo ( + ), éstos serán negativos en sentido contrario a lo anterior. Las verdaderas reacciones son la suma de la reacción para cada tramo, es decir,

$$R_C = R_C \quad R_D = R_{D'} + R_{D''} \quad R_E = R_E$$

estas reacciones se obtienen luego de obtener el valor y sentido de los Momentos.

Las reacciones de la figura 37 b, no son las verdaderas, se calculan por equilibrio estático y únicamente se utilizan para determinar el diagrama de Momentos flexionantes para cada tramo por separado aplicando el método de área de Momento. Los diagramas de Momento sirven para dar solución a la ecuación de los tres momentos.

Para el tramo CDE se tiene la elástica de la Viga (Fig. 38), la cual se exagera, para observar las relaciones geométricas que se van a utilizar para determinar la ecuación general de tres momentos.

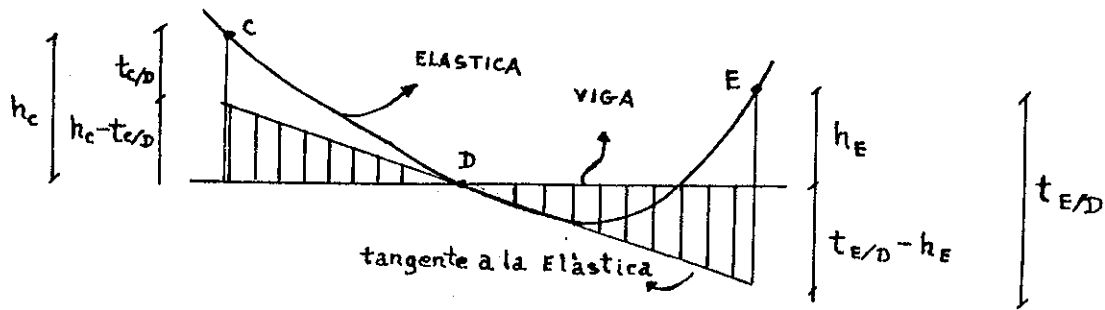


Figura 38 Elástica de la Viga en el tramo CDE

La tangente trazada en D determina la desviación tangencial  $t_{C/D}$  y  $t_{E/D}$  de los puntos C y E. Las alturas  $h_C$  y  $h_E$ , están referidas al estado inicial (sin carga) de la Viga. Los triángulos ashurados son de base  $L_1$  y  $L_2$  y de altura  $(h_C - t_{C/D})$  y  $(t_{E/D} - h_E)$ .

Si se relacionan los triángulos ashurados se tiene

$$(h_C - t_{C/D})/L_1 = (t_{E/D} - h_E)/L_2$$

$$((h_c)/L_1) + ((h_e)/L_2) = ((t_{ED})/L_2) + ((t_{CD})/L_1) \text{ Ec.1}$$

Las desviaciones tangenciales son

$$IE t_{CD} = \Sigma \text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C$$

$$IE t_{ED} = \Sigma \text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E$$

$$t_{CD} = (1/EI) [ \text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C + (1/2) M_C L_1 (1/3) L_1 + (1/2) M_D L_1 (2/3) L_1 ] \text{ Ec.2}$$

$$t_{ED} = (1/EI) [ \text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E + (1/2) M_D L_2 (2/3) L_2 + (1/2) M_E L_2 (1/3) L_2 ] \text{ Ec.3}$$

Al sustituir Ec.2 y Ec.3 en Ec.1

$$(h_c/L_1) + (h_e/L_2) = (1/EI) \{ [\text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C + (1/2) M_C L_1 (1/3) L_1 + (1/2) M_D L_1 (2/3) L_1] / L_1 + [\text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E + (1/2) M_D L_2 (2/3) L_2 + (1/2) M_E L_2 (1/3) L_2] / L_2 \}$$

Simplificando:

$$6EI(h_c/L_1) + (h_e/L_2)L_1L_2 = (6 \text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C)/L_1 + M_C L_1 + 2M_D L_1 + (6 \text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E)/L_2 + 2M_D L_2 + M_E L_2$$

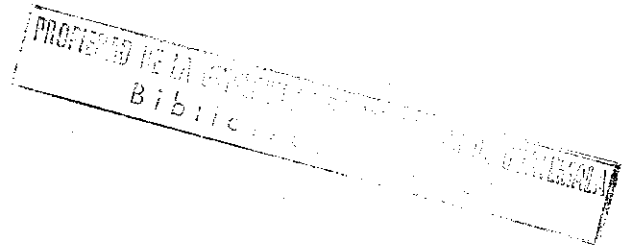
$$6EI(h_c/L_1) + (h_e/L_2)L_1L_2 = (6 \text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C)/L_1 + M_C L_1 + 2M_D(L_1 + L_2) + (6 \text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E)/L_2$$

Si los puntos C, D y E están al mismo nivel en la viga deformada, las alturas  $h_c$  y  $h_e$  se anulan por lo que la ecuación queda:

$$-(6 \text{ÁREA}_{CD} \bar{X}_C)/L_1 - (6 \text{ÁREA}_{ED} \bar{X}_E)/L_2 = M_C L_1 + 2M_D(L_1 + L_2) + M_E L_2$$

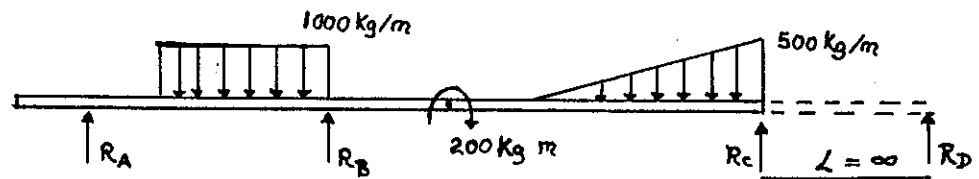
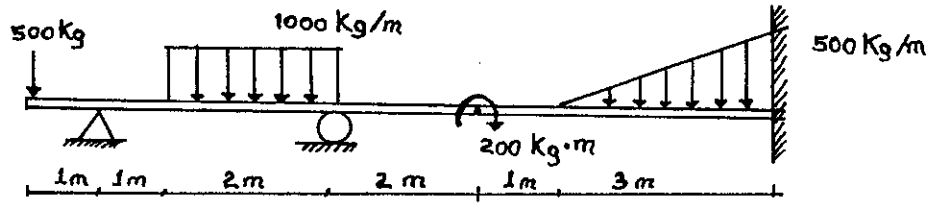
que es la ecuación de los tres momentos. Las relaciones geométricas utilizadas dan el nombre de Momentos de continuidad, pues el tramo CD y ED tienen a D en común y la tangente elástica del tramo CD en el punto D, coincide con la tangente a la elástica del tramo DE trazada por D. Estas condiciones de igual ordenada e igual pendiente son las condiciones de continuidad de la curva elástica en un punto.

En una viga continua los tres puntos para encontrar los momentos de continuidad que se eligen son tres apoyos, que se suponen rígidos y situados a la misma altura y con la aplicación de la ecuación de los tres momentos se determinan los momentos de continuidad. Para determinar las ordenadas de la elástica, se consideran dos apoyos y el otro punto es donde se quiere hallar la ordenada, previamente deben encontrarse los valores de los momentos en los tres puntos.



### 5.4.1. Ejemplo

Determinar los momentos y reacciones en los apoyos de la viga.



Signos (+) (-)

$$M_A = -500 \text{ kg m}$$

$$\text{Número de aplicaciones} = \text{Número de claros} - 1 = 3 - 1 = 2$$

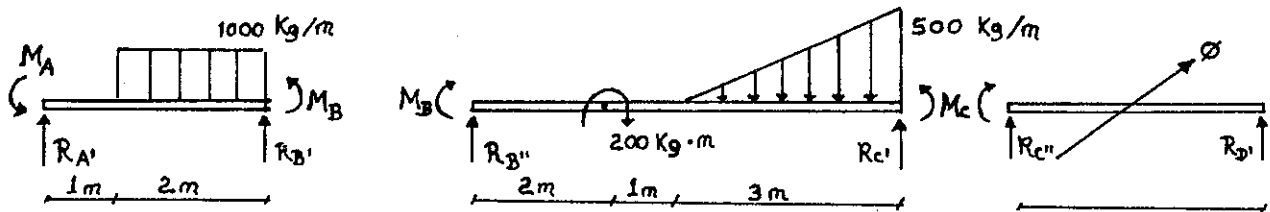
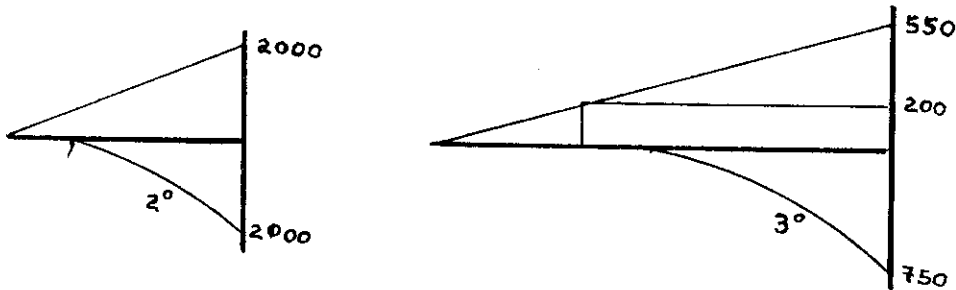


Diagrama de Momentos



1era. Aplicación tramos A - B - C

$$M_A(3) + 2M_B(3 + 6) + M_C(6) = -(6/3) [(3/2)(2000)(6/3) - (2/3)(2000)(1 + (6/4))] - (6/6) [(6/2)(550)(2) + 200(4)(2) - (3/4)(750)(3/5)]$$

$$-1500 + 18M_B + 6M_C = -9895.83$$

$$M_B = (-6M_C - 8395.83)/18 \quad \text{Ec.1}$$

2da. Aplicación tramo BCD

$$M_B(6) + 2M_C(6 + 0) + M_D L = -(6/6) [(1/2)(6)(550)(12/3) + 200(4)(2+2) - (3/4)(750)(3 + (12/5))]$$

$$6M_B + 12M_C = -6762.5$$

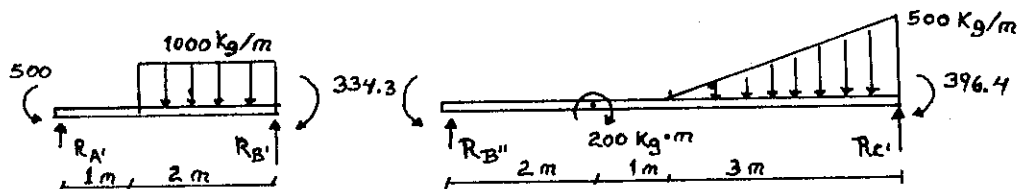
$$M_B = (-6762.5 - 12M_C)/6$$

Iguando Ec.1 y Ec.2

$$(-6M_C - 8395.8)/3(6) = (-6762.5 - 12M_C)/6$$

$$-6M_C + 12(3)M_C = -6762.5(3) + 8395.8$$

$$M_C = -396.4 \text{ kg.m.} \quad M_B = -334.3 \text{ kg.m.}$$



TRAMO AB

$$\Sigma M_A = 0 \quad (+)$$

$$-R_B(3) + 1000(2)(2) + 334.3 - 500 = 0 \Rightarrow R_B = 1278.1 \text{ kg.}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad (+)$$

$$-R_A(3) + 1000(2)(1) - 334.3 + 500 = 0 \Rightarrow R_A = 721.9 \text{ kg.}$$

TRAMO BC

$$\Sigma M_B = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

$$-R_C(6) + 200 + 500(3)(1/2)(3 + (6/3)) - (334.6) + 396.3 = 0 \Rightarrow R_C = 668.6 \text{ kg.}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

$$-R_B(6) + (3/2)(500)(3/3) - 200 - 396.3 + 334.6 = 0 \Rightarrow R_B = 81.4 \text{ kg}$$

$$R_A = 500 \text{ kg}$$

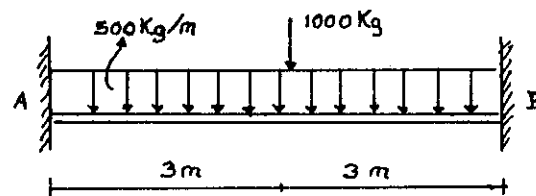
$$R_A = R_{A'} + R_{A''} = 1221.9 \text{ kg}$$

$$R_B = R_{B'} + R_{B''} = 1359.50 \text{ kg}$$

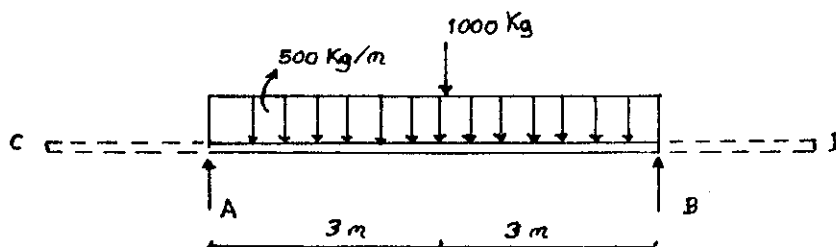
$$R_C = R_{C'} = 668.6 \text{ kg}$$

5.4.2. Ejemplo

Determinar los Momentos y Reacciones de la siguiente Viga:



Signos (+) (-) ; Número de aplicaciones = 3 - 1 = 2



TRAMOS

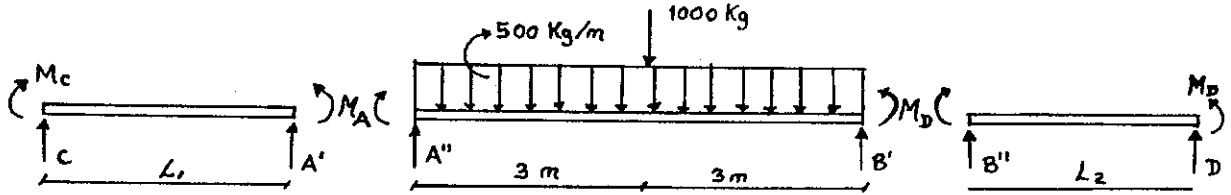
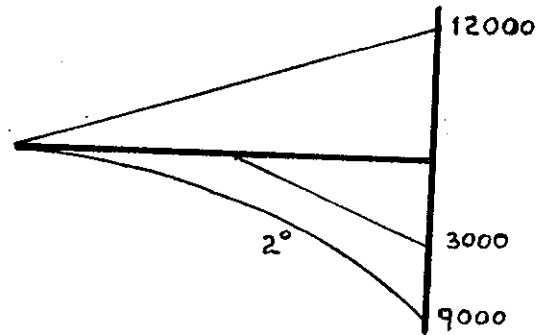


DIAGRAMA DE MOMENTOS



1era. Aplicación TRAMO CAB

$$M_C L_1 + 2M_A(6 + 0) + M_B 6 = -6/L_1 \sum A_{CA} \bar{X}_C - 6L_2 \sum A_{AB} \bar{X}_B$$

$$12M_A + 6M_B = -6/6 [(6/2)12000(6/3) - (3/2)(3000)(3/3) - (6/3)(9000)(6/4)]$$

$$12M_A + 6M_B = -40500 \Rightarrow M_B = (-40500 - 12M_A)/6 \text{ Ec. 1}$$

2da. Aplicación TRAMOS ABD

$$M_A 6 + 2M_B(6 + 0) + M_D L_2 = -6/6 \sum A_{AB} \bar{X}_A - 6L_2 \sum A_{BD} \bar{X}_D$$

$$6M_A + 12M_B = - [(6/2)(12000)(12/3) - (3/2)(3000)(3 + 6/3) - (6/3) 9000 (18/4)]$$

$$6M_A + 12M_B = -40500 \Rightarrow M_B = (-40500 - 6M_A)/12 \text{ Ec.2}$$

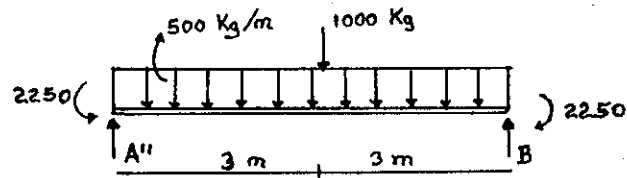
$$\text{Ec. 1} = \text{Ec. 2}$$

$$(-40500 - 12M_A)/6 = (-40500 - 6M_A)/6(2)$$



$$(-40500 - 12M_A)2 = -40500 - 6MA \Rightarrow MA = -2250 \text{ Kg m}$$

$$MB = -2250 \text{ Kg m}$$



$$\Sigma M_{A''} = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

$$-B'(6) + 1000(3) + 500(6)(3) - 2250 + 2250 = 0 \Rightarrow B' = 2000 \text{ Kg}$$

$$A'' = 2000 \text{ Kg}$$

$$A = A'' + A' \Rightarrow A = 2000 \text{ Kg.} \quad B = B' + B'' \Rightarrow B = 2000 \text{ Kg}$$

## CAPÍTULO 6

### Columnas

#### 6.1 Tipos de columnas

Una columna es un elemento estructural sometido a compresión, lo bastante delgado de su longitud, la cual puede fallar por flexión o pandeo.

Puede establecerse que un elemento es una columna si su longitud es más de diez veces su dimensión transversal menor. Las columnas pueden dividirse en largas, intermedias y cortas, las columnas largas se rompen por pandeo o flexión lateral; las intermedias, por una combinación de aplastamiento y pandeo y las columnas cortas, por aplastamiento. Cuando aumenta la longitud de una columna disminuye la importancia y efectos del esfuerzo directo de compresión y aumenta correlativamente los de esfuerzo de flexión.

#### 6.2 Estabilidad y equilibrio

Las columnas son inoperantes cuando se produce en ellas una deflexión lateral excesiva. Esto puede demostrarse al tomar una varilla de acero delgada y efectuarle presión contra el suelo en dirección axial, si la carga se encuentra centrada no habrán deflexiones, mientras esta se mantenga en un valor relativamente bajo. Al ir aumentando la carga, llegará un momento en el que la varilla se deflexionará súbitamente, esto es lo que se conoce como pandeo.

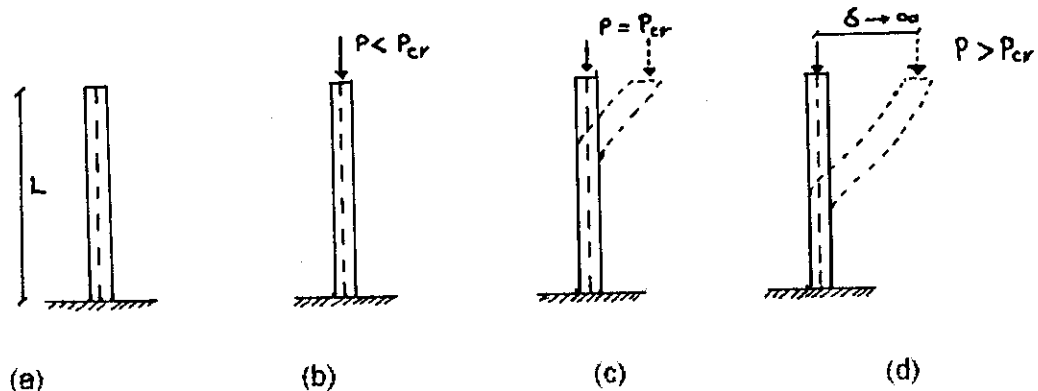


Figura 39 barra sometida a diferentes cargas de  $P_{cr} = P_{crítica}$

Si se tiene una barra como la mostrada en la figura 40.a, empotrada en uno de sus extremos, la cual se somete a una carga axial de compresión relativamente pequeña, la cual inicialmente se encuentra en un estado de equilibrio estable. Cuando se aplica una carga transversal se provoca una pequeña flexión a la barra, ésta recuperará su forma inicial de equilibrio (Fig. 40.b). Si la carga  $P = P_{cr}$  se encontrara en un estado de equilibrio indiferente es decir, al ser desviada ligeramente de su posición rectilínea inicial y después de liberada permaneciera también en equilibrio de la posición desviada (Fig. 40.c). Si la carga  $P$  llega a ser mayor que la,  $p-p-r$ , entonces la forma rectilínea de equilibrio resultara inestable, esto se debe a que la carga aplicada tendrá como efecto una forma curvilínea estable (Fig. 40.d).

Una columna puede encontrarse en un estado estable, indiferente e inestable. Cuando una esfera se encuentra en una superficie cóncava hacia arriba tiene un estado de equilibrio estable, si se le desvía ligeramente de esta posición y se suelta después, entonces volverá a ocupar su posición inicial (Fig. 41.a). Cuando la esfera se encuentra sobre una superficie horizontal tiene un estado de equilibrio indiferente pues al desviarla de esta posición no volverá a ella aunque su movimiento cese (Fig. 41.b). En el momento en que se encuentre la esfera sobre una superficie convexa tiene un estado de equilibrio inestable y al ser desviada de su posición inicial, seguirá desplazándose (Fig. 41.c).

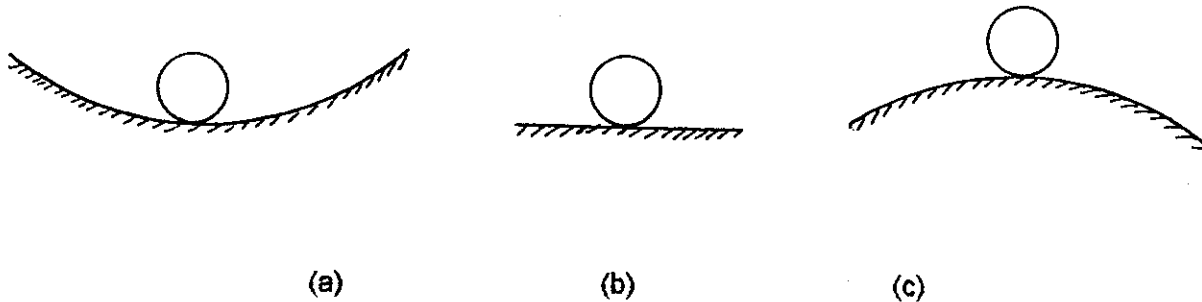


Figura 41

Si a una columna se le aplica una carga mayor de la crítica, ésta se inutiliza. Esto como consecuencia hace que trabaje a compresión y flexión, mientras que la fuerza sea menor que la crítica, las flechas serán pequeñas y crecerán rápidamente al acercarse al valor de la carga crítica. Si se conoce la carga crítica es necesario establecer la carga admisible sobre la columna.

### 6.3 Carga de pandeo de Euler con diferentes restricciones en sus extremos

La deducción de la fórmula de Euler y su aplicación tiene la limitante que es válida hasta que alcanzan los esfuerzos el límite de proporcionalidad. Esto se basa en que en los tiempos de Euler no se habían establecido los esfuerzos, ni el límite de proporcionalidad, por lo que el no tuvo en cuenta un límite superior de la carga crítica.

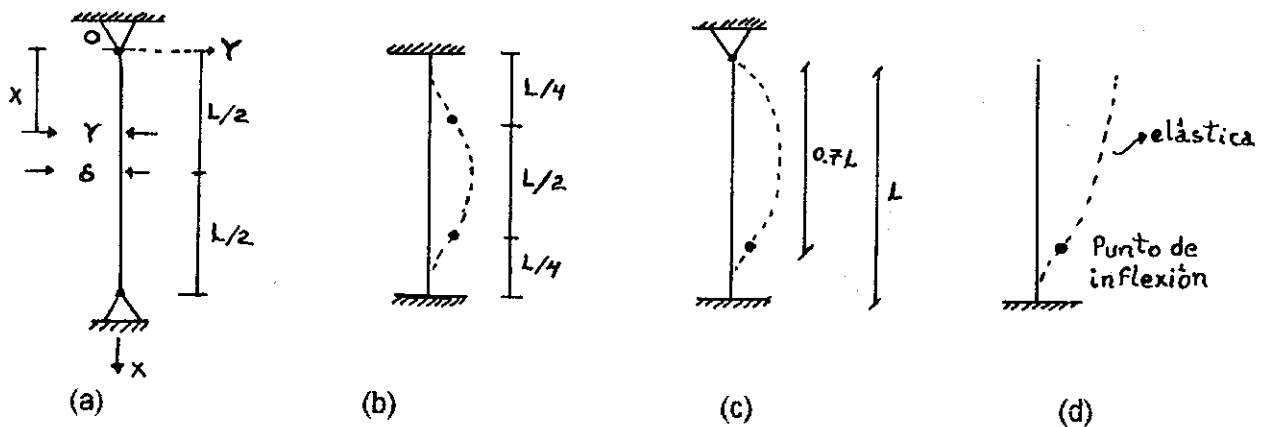


Figura 42 columnas con diferente apoyo

La Figura 42 · tendrá la forma indicada luego de la aplicación de una carga P en sus extremos, por lo que no tiene desplazamientos laterales. La deflexión máxima  $\delta$  es lo suficientemente pequeña para que no exista diferencia apreciable entre la longitud inicial de la columna y su proyección sobre un eje vertical; lo que permite considerar la pendiente  $dy/dx$  pequeña y puede aplicarse la ecuación diferencial de la elástica de una viga.

$$EI(d^2y/dx^2) = M = -Py$$

El momento M es positivo al pandear la columna en el sentido indicado, por lo que la Y debe ir precedida del signo menos y sería positiva si se pandea en el otro sentido.

La ecuación:

$$EI (d^2y / dx^2) = -Py$$

puede escribirse también de la forma

$$EI (d/dx) (dy/dx) = -Py$$

que al multiplicar por  $2dy$  se obtienen diferenciales exactas, y resolviendo por integración se tiene

$$EI(dy/dx)^2 = -Py^2 + C_1$$

de la figura .a, puede deducirse que  $(dy/dx) = 0$ , entonces  $y = \delta$ , por lo que

$$EI (0)^2 = -Py^2 + C_1$$

$$Py^2 = C_1 = P\delta^2$$

al sustituir el valor de  $C_1$  en

$$EI (dy/dx)^2 = -Py^2 + C_1$$

se tiene

$$EI (dy/dx)^2 = -Py^2 + P\delta^2$$

$$EI (dy/dx)^2 = p(\delta^2 - Y^2)$$

$$(dy/dx) = (P/EI)^{1/2} (\delta^2 - y^2)^{1/2}$$

$$(dy/(\delta^2 - y^2)^{1/2}) = (P/EI)^{1/2} dx$$

al integrar, la última ecuación

$$\text{SEN}^{-1}(y/\delta) = X(P/EI)^{1/2} + C_2$$

C2 se obtiene de las condiciones de la firugra a donde  $y = 0$  para  $X = 0$

$$\text{SEN}^{-1}(0/\delta) = 0 (P/EI)^{1/2} + C_2$$

por lo que  $C_2 = 0$  al sustituir, se tiene

$$\text{SEN}^{-1}(y/\delta) = X (P/EI)^{1/2} \sigma y = \delta \text{SEN} (X(P/EI)^{1/2})$$

lo cual indica que la forma de la elástica es senoidal. Al hacer  $y = 0$  y  $x = L$ , en esta última ecuación se obtiene

$$\text{SEN}(L (P/EI)^{1/2}) = 0$$

o bien

$$L (P/EI)^{1/2} = n \pi \Rightarrow P = (n^2 \pi^2 EI)/L^2$$

donde  $n$  es el valor de la sujeción y  $P$  la carga crítica.

El valor de  $n$  se determina en base a las condiciones de apoyo de las columnas y la relación que tiene con la longitud efectiva ( $L_e$ ).

Por lo que la ecuación de Euler obtenida

$$P_{cr} = (n^2 \pi^2 EI)/L^2$$

será sustituida por la fórmula

$$P_{cr} = N(\pi^2 EI)/L^2$$

esto se logra previamente estableciendo el valor de  $N$  de acuerdo a la longitud efectiva.

#### 6.4 Longitud efectiva de columnas

La fórmula de Euler para determinar la carga crítica es

$$P_{cr} = (n^2 EI \pi^2)/L^2$$

donde  $n$  es un coeficiente que depende de las condiciones de apoyo. El valor de  $n$  puede determinarse a partir de la longitud efectiva, teniendo como punto de partida una fórmula general.

$$P_{cr} = (EI \pi^2)/L_e^2$$

La longitud efectiva ( $L_e$ ), es la longitud entre los puntos de inflexión en la curva de deflexión. Si se analiza la figura siguiente.

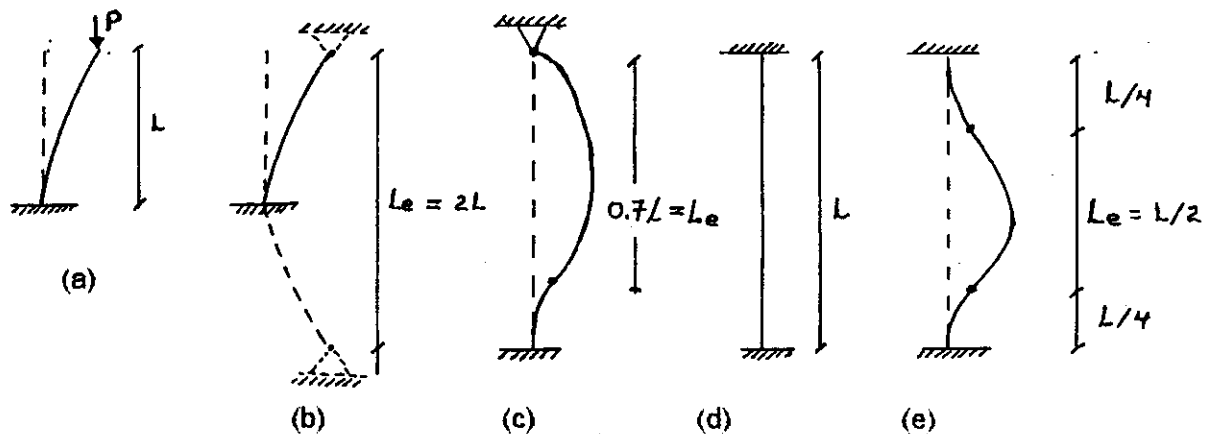


Figura 40 longitud efectiva para columnas

donde (a) es empotrada en un extremo y libre en el otro, (b) es articulada en ambos extremos, (c) es empotrada en un extremo y articulada en el otro y (e) es empotrada en ambos extremos.

Relacionando la longitud efectiva con la longitud  $L$ , se obtienen los valores de  $L_e$  para luego poder determinar  $N$ .

Fig.	CONDICIÓN DE APOYO	LONGITUD EFECTIVA $L_e$	COEFICIENTE $N$
a	Un extremo empotrado y libre	$2L$	$1/4$
b	Dos extremos articulados	$L$	$1$
c	Un empotrado y un articulado	$0.7L$	$2$
d	Dos extremos empotrados	$0.5L$	$4$

Tabla # 4 Coeficiente  $N$  para columnas

El valor de  $n$  se obtiene al sustituir el valor de la longitud efectiva en

$$P_{cr} = (\pi^2 EI) / L_e^2 = (n^2 EI) / L^2$$

Para cualquier valor de  $L_e = nL$ , donde  $n$  es igual a 1, 2, 0.7 y 0.5. Luego la fórmula general de Euler queda finalmente como

$$P_{cr} = (N \pi^2 EI) / L^2$$

el valor de  $N$  cambia de acuerdo a las condiciones de apoyo.

Por ejemplo para una columna empotrada en un extremo y el otro libre

$$P_{cr} = (\pi^2 EI) / L^2 = (EI) / (2L)$$

$$P_{cr} = (\pi^2 EI) / 4L$$

donde  $N = 1/4$ . De la misma forma se obtiene el valor de  $N$  para los demás casos. Por lo que basta con saber las condiciones de apoyo y buscar en la tabla el valor de  $N$  y aplicarlo en la fórmula.

$$P_{cr} = (N \pi^2 EI) / L^2$$

### 6.5 Limitaciones de la fórmula de Euler

El mayor problema de una columna es que siempre tiende a pandearse, lo cual se origina en la dirección donde es más flexible. La columna es más flexible donde tiene un menor momento de inercia, es por ello que la tendencia al pandeo tiene lugar con respecto al eje principal del momento de inercia mínimo de la sección recta. Esto último depende de la sección, especialmente cuando es rectangular, pues si la sección es circular no ocasiona problema porque la inercia circular es la misma en cualquier dirección.

La fórmula de Euler demuestra que la carga crítica que produce el pandeo no depende de la resistencia del material, sino de sus dimensiones y del módulo elástico. Esto puede determinarse con dos barras de idénticas dimensiones, una de acero de alta resistencia y otra de acero suave, ambas pandearán bajo la misma carga crítica, ya que aunque sus resistencias son diferentes tiene el mismo módulo de elasticidad, es por ello que al aumentar la inercia de una columna, se incrementa la resistencia al pandeo.

Para poder aplicar la fórmula de Euler, el esfuerzo que se produzca en el pandeo no debe exceder al límite de proporcionalidad. Este esfuerzo puede determinarse al sustituir en la fórmula el momento de inercia  $I$  por  $Ar^2$ , donde  $A$  es el área de la sección recta y  $r$  el radio de giro mínimo, entonces

$$\sigma = P/A = E \pi^2 I / (L/r)^2$$

El valor  $P/A$  es el esfuerzo medio en la columna cargada con su carga crítica y se llama esfuerzo crítico. Su límite superior es el esfuerzo en el límite de proporcionalidad. La relación  $L/r$  se llama esbeltez de la columna. Como una columna cargada axialmente tiende a pandearse respecto del eje con el momento de inercia mínimo, para hallar la esbeltez de una columna se divide la longitud equivalente entre el radio de giro mínimo de la sección recta.

La esbeltez mínima, que fija el límite inferior de aplicación de la fórmula de Euler, se obtiene de la ecuación

$$P/A = (E \pi^2) / (L/r)^2$$

sustituyendo el límite de proporcionalidad y el módulo elástico del material a utilizar en la columna.

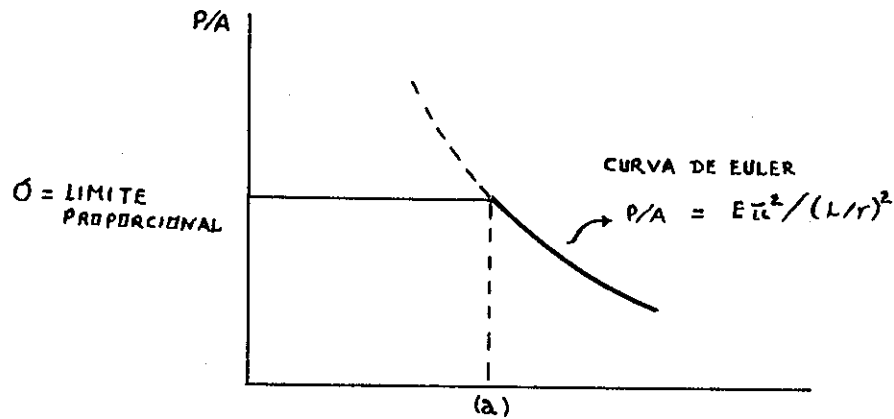


Figura 43 Esfuerzo admisible, línea continua.  
La parte punteada de la curva de Euler no es aplicable

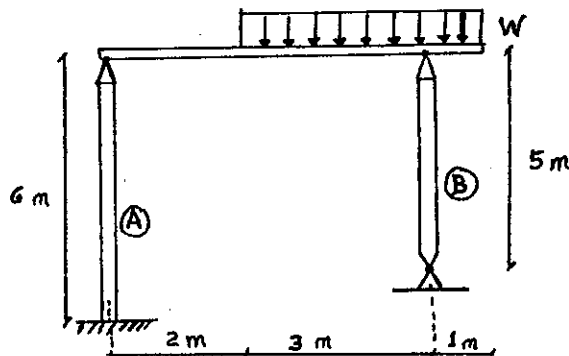
En la Figura se muestra el límite proporcional ( $\sigma$ ) en el cual la carga de Euler al pasar la línea punteada excedería al límite, por lo que para  $L/r < d$  la fórmula de Euler no es aplicable, y hay que considerar como esfuerzo crítico el límite de proporcionalidad. En la curva de Euler se muestra que en una columna disminuye rápidamente el esfuerzo crítico cuando aumenta la esbeltez.

La fórmula de Euler proporciona la carga crítica y no la carga de trabajo. Es por ello necesario dividir la carga crítica entre el correspondiente factor de seguridad, que depende del material.

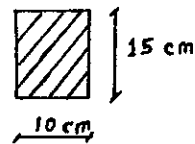


### 6.6.1 Ejemplo

Determinar el valor de  $w$  permisible para evitar pandeo en la columna.

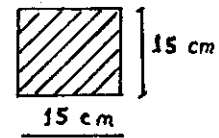


SECCIÓN A



$$E = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}$$

SECCIÓN B



Columna A

$$P_{cr} = (IN\pi^2E)/L^2$$

$$I = \frac{15}{12} (10)^3 = 1250 \text{ cm}^4$$

$$P_{crA} = [1250(2)(\pi^2)(1.2 \cdot 10^5)/(600)^2]$$

$$P_{crA} = 8224.7 \text{ Kg.}$$

$$\Sigma F_y = 0 \uparrow +$$

$$R_A + R_B - 4W = 0$$

$$R_A = 4W - R_B$$

$$R_A = 4W - \frac{16W}{5}$$

$$R_A = \frac{4W}{5}$$

$P_{cr} = \text{Reacciones (R)}$

$$R_A = \frac{4W}{5}$$

$$8224.7 = \frac{4W}{5}$$

$$W = 10280.9 \text{ Kg.}$$

$$W = 6245.6 \text{ Kg.}$$

$$6245.5 \text{ Kg} = 4W \Rightarrow W = 1561.4 \text{ Kg/m}$$

Columna B

$$I = \frac{15}{12} (15)^3 = 4218.7 \text{ cm}^4$$

$$P_{crB} = [4218.7(1)(\pi^2)(1.2 \cdot 10^5)/(500)^2]$$

$$P_{crB} = 19985.7 \text{ Kg.}$$

$$\Sigma MA = 0 \quad (+)$$

$$-R_B \cdot 5 + 4W(2 + 2) = 0$$

$$R_B = \frac{16W}{5}$$

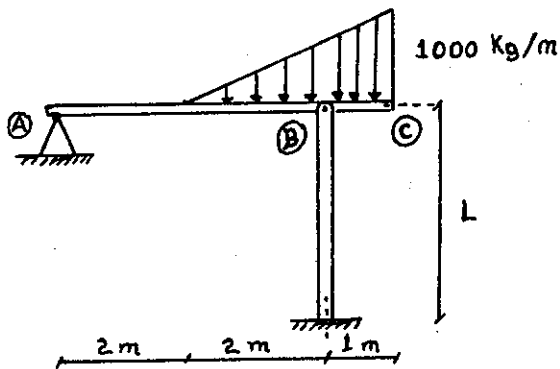
$$R_B = \frac{16W}{5}$$

$$19985.7 = \frac{16W}{5}$$

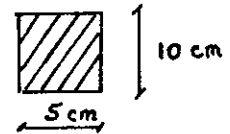
$$W = 6245.6 \text{ Kg.}$$

### 6.6.2 Ejemplo

¿Cuál es el valor máximo de L en el elemento BD para que no ocurra pandeo?



SECCIÓN BD



$$E = 1.8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Sigma MA = 0 \quad (+\curvearrowright)$$

$$-4R_B + \frac{3}{2} (1000)(2+2) = 0$$

$$R_B = 1500 \text{ Kg.}$$

$$P_{cr} = N(\pi^2 EI)/L^2$$

$$P_{cr} = R_B = 1500 \text{ Kg.}$$

$$L = [N(\pi^2 EI)/P_{cr}]^{1/2}$$

$$I = 104.2 \text{ cm}^4$$

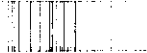
$$L = [2(\pi^2 (1.8 \cdot 10^5)(104.2)/1500)]^{1/2}$$

$$L = 496.7 \text{ cm}$$

$$L = 496.7 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ mts}}{100 \text{ cm}}$$

⇒

$$L = 4.97 \text{ mts.}$$



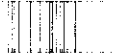
## **CONCLUSIONES**

- 1.- A través del curso de Resistencia de Materiales II se adquieren los conceptos básicos que permiten tener un criterio amplio y una visión clara respecto del análisis y diseño de elementos estructurales.
- 2.- Los elementos tienen un comportamiento distinto bajo la aplicación de carga, esto tiene relación con el material del cual están compuestos, lo que provoca que cada uno tenga capacidad de resistencia diferente, por lo que es necesario un estudio detallado de sus propiedades.
- 3.- Las cargas verticales sobre las vigas provocan esfuerzos de flexión y corte, teniendo mayor importancia determinar los esfuerzos máximos, considerando que con éstos se toman los criterios de diseño.
- 4.- Uno de los elementos de gran importancia son las columnas, a través de éstas, se transmiten las cargas al suelo, teniéndose que determinar su carga crítica para evitar que se produzca la falla por pandeo.
- 5.- La flexión es la concavidad que toman las vigas dependiendo de la dirección de la carga y la deflexión es la distancia que se desplaza el eje neutro respecto de su posición inicial, cuando no se tenía ninguna carga aplicada.



## **RECOMENDACIONES**

- 1.- Debido a la importancia del curso de Resistencia de Materiales II, es necesario que el estudiante se encargue de complementar la parte teórica, la cual no puede impartirse totalmente en clase, con ello contribuirá a una mejor preparación en cuanto a los conceptos que necesitará para ser un buen profesional.
- 2.- El catedrático debe programar visitas, especialmente donde existan fallas en las estructuras, lo que permitirá una mejor comprensión de la importancia que tienen el diseño en base a criterios. Así mismo debe mostrar los diferentes apoyos de los elementos, de los cuales únicamente se tiene idealizaciones para su determinación en el curso.
- 3.- En el laboratorio deben ensayarse elementos estructurales de diferente material, para que pueda verse el comportamiento de cada uno de éstos y cómo se origina la falla mediante el incremento de la carga.



## REFERENCIAS

<p>Esfuerzo Normal <math>\sigma_N = P/A</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Ferdinand Beer y Russel Johnston Página 4</p>
<p>Esfuerzo cortante en Vigas <math>\tau = (VQ)/B</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Gere - Timoshenko Página 245</p>
<p>Esfuerzo de flexión <math>\sigma_f = (My)/I</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Gere-Timoshenko Página 229</p>
<p>Esfuerzo de torsión <math>t_t = (Tr)/I_b</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Gere Timoshenko Página 245</p>
<p>Esfuerzo combinado <math>\sigma = \sigma_N \pm \sigma_f</math></p>	<p>Mecánica de Sólidos Egor Popov Página 309</p>
<p>Esfuerzo tangencial <math>\sigma_t = (Pr)/A</math> Esfuerzo Longitudinal <math>\sigma_l = (Pr)/2I</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Gere-Timoshenko Página 330</p>
<p>Esfuerzos Principales <math>\sigma_{\max/\min} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (t_{xy})^2]^{1/2}</math></p>	<p>Mecánica de Sólidos Egor Popov Página 347</p>
<p>Esfuerzo cortante Máximo y Mínimo <math>t_{\max/\min} = + [((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + (t_{xy})^2]^{1/2}</math></p>	<p>Mecánica de Sólidos Egor Popov Página 347</p>
<p>Ecuación para determina pendiente y deflexión <math>EI \frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma M(x)</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Ferdinand Beer y Russel Johnston Página 397</p>
<p>Ecuación de los tres Momentos <math>M_c L_1 + 2M_b (L_1 + L_2) + M_e L_2 =</math> <math>\frac{-6}{L_1} (\text{AREA}_{CD} X_c) - \frac{6}{L_2} (\text{AREA}_{ED} X_e)</math></p>	<p>Mecánica de Materiales Egor Popov Página 530</p>





## BIBLIOGRAFÍA

S. TIMOSHENKO Y H. YOUNG

Elementos de Resistencia de Materiales,  
4ta. edición, Editorial Utthea. México, 1991

FERDINAND SINGER

Resistencia de Materiales, 3ra. edición,  
Editorial Harla. México, 1982

EGOR POPOV

Mecánica de Materiales. 1ra. reimpresión  
Editorial Limusa. México, 1989

FERNANDIND P. BEER Y RUSSEL

Resistencia de Materiales 4ta. edición  
Editorial Harla. México 1990

E.J. HEARN

Resistencia de Materiales  
Editorial Interamericana. México 1984

DIAZ SAGASTUME, JORGE  
ZAPATA A. SERGIO

Resistencia de Materiales, 2da. edición,  
Editorial Limusa. México 1987

FERDINAND BEER Y  
RUSSEL JOHNSTON

Mecánica de Materiales  
Editorial McGraw-Hill  
Interamericana, 1992

