

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS Y DISEÑO DE COLUMNAS DE SECCIÓN VARIABLE,
EN CONCRETO REFORZADO.

TESIS

PRESENTADA A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR:

IKE MARTHINN CHEW GUTIÉRREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

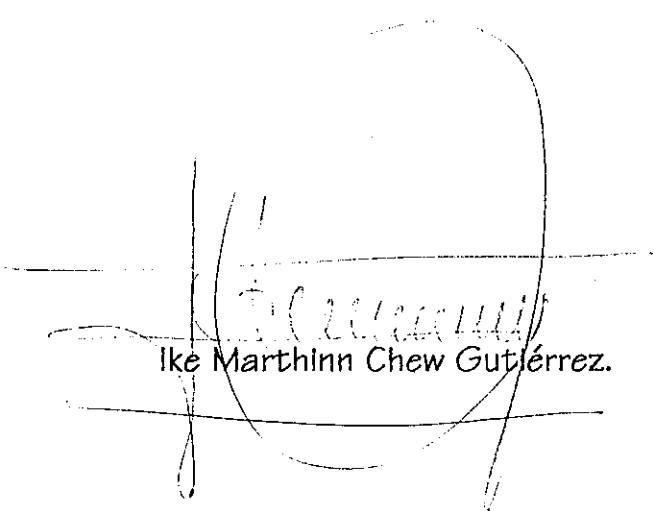
GUATEMALA, JULIO DE 1,999.

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de tesis titulado:

ANÁLISIS Y DISEÑO DE COLUMNAS DE SECCIÓN VARIABLE,
EN CONCRETO REFORZADO.

Tema que me fuera asignado por la Dirección de Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 28 de abril de 1,994.



Ike Marthinn Chew Gutiérrez.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

MIEMBROS DE JUNTA DIRECTIVA.

DECANO:	ING. HERBERT RENÉ MIRANDA BARRIOS
VOCAL PRIMERO:	ING. JOSÉ FRANCISCO GÓMEZ RIVERA
VOCAL SEGUNDO:	ING. CARLOS HUMBERTO PÉREZ RODRÍGUEZ
VOCAL TERCERO:	ING. JORGE BENJAMÍN GUTIÉRREZ QUINTANA
VOCAL CUARTO:	BR. MAURICIO GRAJEDA MARISCAL
VOCAL QUINTO:	BR. OSCAR STUARDO CHINCHILLA GUZMÁN
SECRETARIA:	ING. GILDA MARINA CASTELLANOS DE ILLESCAS

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN
GENERAL PRIVADO

DECANO:	ING. JULIO ISMAEL GONZÁLEZ PODSZUECK
EXAMINADOR:	ING. AUGUSTO RENÉ PÉREZ MENDEZ
EXAMINADOR:	ING. HUGO LEONEL MONTENEGRO FRANCO
EXAMINADOR:	ING. JUAN LUIS GUZMÁN ROMÁN
SECRETARIO:	ING. FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ LÓPEZ

Guatemala, 10 de mayo de 1999

Ing. Fernando Valenzuela
Coordinador Depto. de Estructuras
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad de San Carlos de Guatemala

Estimado Ingeniero Valenzuela:

Por este medio le informo que ya he revisado el trabajo de tesis titulado "ANÁLISIS Y DISEÑO DE COLUMNAS DE SECCIÓN VARIABLE, EN CONCRETO REFORZADO", desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil Ike Marthinn Chew Gutiérrez, bajo la asesoría del suscrito.

El trabajo se ha desarrollado haciendo las deducciones analíticas necesarias en esas piezas de sección variable y mostrando que los métodos más sencillos pueden ser aplicados para conocer las fuerzas y esfuerzos que le son aplicables. Este estudio contribuye al conocimiento de la ingeniería estructural, en el diseño de esta pieza tan importante.

Por lo anterior, el suscrito le da su aprobación y es corresponsable de su contenido; por ello, lo recomienda para su aprobación con el objeto de su graduación profesional.

Atentamente,



Ing. Juan Miguel Rubio Romero
Asesor



FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala,
Mayo 17 de 1,999.

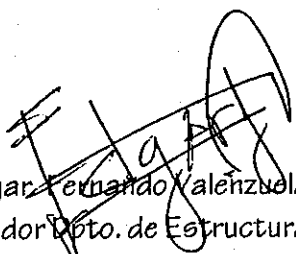
Ingeniero
Sidney A. Samuels Milson,
Director Escuela de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería.

Apreciado Ingeniero:

Habiendo revisado el trabajo de tesis titulado *Análisis y Diseño de Columnas de Sección Variable, en Concreto Reforzado*, apoyada en el dictámen favorable del asesor, Ingeniero Juan Miguel Rubio Romero, esta jefatura recomienda que se le de aprobación al trabajo desarrollado por el estudiante Ike Marthinn Chew Gutiérrez.

Sin otro particular, me suscribo de usted cordialmente.

ID Y ENSEÑAD A TODOS


Ing Edgar Fernando Valenzuela
Coordinador Dpto. de Estructuras.



FACULTAD DE INGENIERIA

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Juan Miguel Rubio Romero y del Jefe del Departamento de Estructuras Ing. Edgar Fernando Valenzuela Villanueva, del trabajo de tesis del estudiante Ike Marthinn Chew Gutiérrez, titulado ANALISIS Y DISEÑO DE COLUMNAS DE SECCION VARIABLE EN CONCRETO REFORZADO, da por este medio su aprobación a dicha tesis.

Ing. Sydney Alexander Samuels Milson



Guatemala, julio de 1,999



FACULTAD DE INGENIERIA

El Decano de la Facultad de Ingeniería, luego de conocer la autorización por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, Ing. Sydney Alexander Samuels Milson, al trabajo de tesis ANALISIS Y DISEÑO DE COLUMNAS DE SECCION VARIABLE EN CONCRETO REFORZADO, del estudiante Ike Marthinn Chew Gutiérrez, procede a la autorización para la impresión de la misma.

IMPRIMASE:

Ing. Herbert René Miranda Barrios

DECANO



Guatemala, julio de 1,999

AGRADECIMIENTOS:

- A Dios, que me dió la oportunidad de vivir.
- A mi madre, por el sacrificio y apoyo a lo largo de toda mi vida.
- A mi esposa por su entusiasmo y apoyo.
- Al Ingeniero Juan Miguel Rubio por el tiempo dedicado a mi carrera.
- A mis amigos y a las personas que de alguna manera influyeron para alcanzar mi meta.

ACTO QUE DEDICO A:

- MI MADRE: Olga Marina Gutiérrez Vargas.
- MI ABUELA: María Berthila Vargas.
- MI ESPOSA: Aída Elizabeth Paz de Chew.
- MIS HIJOS: Carlos Antonio Chew Paz.
Martín Alejandro Chew Paz.
Paula María Chew Paz.
- MIS HERMANAS: Karim Lucsett Chew Gutiérrez.
Dana Jannett Chew Gutiérrez.
María Berthila Gutiérrez.
- MIS FAMILIARES: Tíos, primos y sobrinos.
- MI FAMILIA POLÍTICA: Ligia, Doña Aída, Doña Raquel,
Chalie, Wendy, Jimena, tíos,
primos y sobrinos.
- MIS AMIGOS Y COMPAÑEROS: Manuel Morales, Fernando Valls,
Yinicio Cabrera y Enrique Velásquez.
-

ÍNDICE:

	Página.
Introducción.....	I
Objetivos.....	II
Capítulo 1.	
Generalidades:.....	1
Conceptos Importantes:	
1.1 Esbeltez.....	1
1.2 Sección Crítica.....	4
1.3 Columnas Cortas.....	4
1.4 Columnas Esbeltas.....	6
1.4.1. Método de Amplificación de Momentos.....	7
1.5 Falla Balanceada.....	8
1.6 Diagrama de Interacción.....	10
1.7 Ductilidad.....	14
1.8 Confinamiento.....	17
Capítulo 2.	
Condiciones de Sujeción.	
2.1 Apoyos.....	18
Capítulo 3.	
Aspectos Arquitectónicos.	
3.1 Corte Longitudinal.....	21
3.2 El Proceso Constructivo como limitante de la Forma.....	23
3.2.1 Presión de Concreto Fresco.....	23
3.3 Forma Óptima Variable.....	24
Capítulo 4.	
Comportamiento.	
4.1 Esbeltez.....	27
4.2 Análisis Estructural.....	32
4.2.1 Análisis de Marcos compuestos de miembros no Prismáticos (Método de la Analogía de la Columna).....	32
4.2.1.1 Generalidades.....	32

4.2.1.2 Rigidez y Factores de Transporte.....	33
4.2.1.3 Curvas para los factores de Rigidez y Transporte..	43
4.2.1.4 Rigidez de un miembro no prismático con el ex- tremo alejado articulado.....	45
4.2.1.5 Momentos de empotramiento inducidos en un mi- embro no prismático por el desplazamiento relati- vo de uno de sus extremos.....	46
4.2.1.6 Ejemplo.....	49
4.2.2 Deformación en Miembros de Sección Variable.....	53
4.2.3 Análisis de Marcos compuestos de miembros no Prismá- ticos (Método de Las Rigideces).....	64
4.2.3.1 Ejemplo.....	72

Capítulo 5.

Diseño.

5.1 Análisis de la Carga Crítica.....	77
5.2 Falla Balanceada.....	88
5.3 Refuerzo Longitudinal.....	93
5.4 Ejemplos de Refuerzo longitudinal.....	97
5.5 Refuerzo Transversal (estribos).....	105

Conclusiones	III
Recomendaciones.....	V
Bibliografía.....	VI

Apéndices.

Apéndice 1 Deformación de Miembros de Sección Variable.

Factores de Rigidez y Transporte.

Apéndice 2 Bordes Simétricos Rectos.

Apéndice 3 Bordes Asimétricos Rectos.

Apéndice 4 Bordes Asimétricos Curvos.

Apéndice 5 Bordes Simétricos Curvos.

Apéndice 6 Bordes Asimétricos Combinados Acartelamientos
Rectos.

Apéndice 7 Bordes Asimétricos Combinados Acartelamientos
Curvos.

Apéndice 8 Miembros simétricos, dobles Cartelas Rectas.

Apéndice 9 Miembros simétricos, dobles Cartelas Curvas.

Momentos de Empotramiento inducidos en un miembro no prismático debido al desplazamiento relativo de uno de sus extremos.

Apéndice 10 Miembros con reducción lineal en sus bordes.

Apéndice 11 Miembros con reducción parabólica en sus bordes.

Apéndice 12 Miembros acartelados simétricos rectos.

Apéndice 13 Miembros acartelados simétricos parabólicos.



INTRODUCCIÓN.

En el ambiente guatemalteco de la construcción no es muy usual el diseño de estructuras de concreto reforzado que contengan miembros de sección variable, esta forma de diseño es más usada en puentes y estructuras especiales, donde la arquitectura y la optimización del diseño juegan un papel importante. El presente documento va orientado al estudio de este tipo de miembros, concretamente al estudio de columnas. Desde el punto de vista funcional, estos elementos estructurales, sometidos a flexocompresión, pueden ser diseñados de manera óptima por medio de cambios en su sección transversal a lo largo de su eje longitudinal, aunque a veces se suelen llenar requisitos de arquitectura por sobre lo funcional. Para lograr mejores resultados en edificaciones de concreto, se deben combinar estos dos aspectos fundamentales.

El estudio que se efectuará a este tipo de miembros consistirá, primero, de un reconocimiento de los parámetros utilizados para el diseño de columnas tradicionales de sección constante, seguido de la implementación de métodos afines a su análisis estructural, finalizando con propuestas y consideraciones de diseño acoplándolo a los parámetros y normas del código de la ACI (American Concrete Institute).

Como medio auxiliar se utilizarán algunos programas de computadora, los cuales valuarán expresiones importantes que definen valores para: deformación, rigidez, factores de transporte, esbeltez, refuerzo, etc. Estos programas fueron elaborados en el lenguaje Basic debido a que éste es una de las herramientas más utilizadas por el estudiante universitario actualmente.



OBJETIVOS

GENERALES:

- Establecer métodos y herramientas a implementar en el análisis y diseño de columnas de concreto de sección variable.
- Dar un panorama general del comportamiento de este tipo de miembros.
- Darle al lector una herramienta de evaluación para estructuras ya existentes.
- Crear conceptos equivalentes a los tradicionales proporcionados por el código de la ACI.

ESPECÍFICOS:

- Evaluar las curvas de Rigidez y factores de transporte utilizados por la Portland Cement Assosiation y establecer la metodología para encontrar estos factores para cualquier tipo de variación en la sección transversal de la columna en cuestión.
- Dar a conocer métodos aplicables a la resolución de estructuras compuestas por elementos de sección variable.
- Encontrar las cantidades de refuerzo necesarias para propiciar estados de falla deseables en una columna de concreto reforzado de sección variable.
- Visualizar el comportamiento de estos elementos y utilizarlo conjuntamente con las normas de la ACI para crear normas más especializadas.
- Construir un archivo de programas de computadora que actúe como apoyo y medio auxiliar de diseño.



Capítulo 1.

Generalidades:

Para el estudio de la presente tesis es necesario el desarrollo de algunos conceptos básicos que son importantes, los cuales se describen a continuación de una forma breve:

1.1 Esbeltez.

Se dice que una columna es esbelta si las dimensiones de su sección transversal son pequeñas en comparación con su longitud. El grado de esbeltez se expresa en términos de la relación de esbeltez, klu/r , donde k es el factor de la longitud efectiva que depende de las condiciones de los extremos y de los contravientos que eviten su desplazamiento lateral, r es el radio de giro de la sección transversal de la columna y lu es el claro libre entre apoyos. La esbeltez afectará a una columna mientras más larga sea y su efecto se concreta a considerar un momento adicional que reduce su capacidad de carga, la longitud efectiva klu se usa como longitud modificada, esto para considerar restricciones en los extremos, provocadas por diferentes tipos de apoyos. El valor de k (factor de longitud efectiva), oscilará entre los valores de 0.5 a 2.0 (ver figura), dependiendo de sus apoyos.

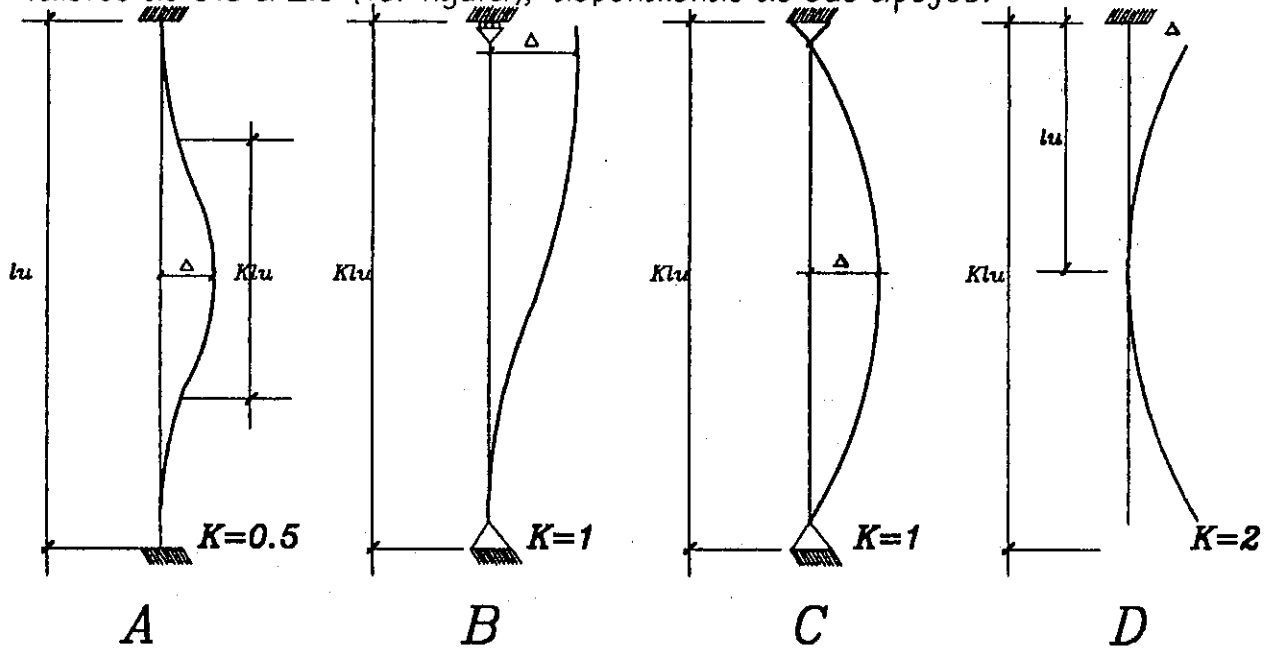


FIG 1.1.1
Valores del factor de longitud efectiva de la altura de columnas k para condiciones típicas según su condición de apoyo.

Para miembros que pertenecen a marcos estructurales, el factor de longitud efectiva oscilará entre los valores de 0.5 y 1, debido a la rigidez de los nudos estructurales (por no ser apoyos ideales).

La ACI establece tres clasificaciones de columnas atendiendo a su comportamiento estructural, éstas son: cortas, intermedias y largas. Para determinar los límites entre los tres grupos, se resumen algunos criterios para definir su comportamiento (numerales 1.3 y 1.4).

Se puede calcular el valor de k por medio de las ecuaciones siguientes sugeridas por el código de la ACI:

$$k = 0.7 + 0.05(\psi_a + \psi_b) < 1.0$$

$$k = 0.85 + 0.05 \psi_{\min} < 1.0 \quad \text{la menor de las dos.}$$

Para miembros a compresión con contravientos:

$$\text{si } \psi_m < 2: k = \frac{20 - \psi_m \sqrt{1 + \psi_m}}{20}$$

$$\text{si } \psi_m > 2: k = 0.9 \sqrt{1 + \psi_m}$$

Para miembros sin contravientos.

$$k = 2 + 0.3 c$$

donde: $\psi_a = \frac{E_i / I_u}{E_i / I_n}$ de las columnas que llegan a A.
de las vigas que llegan a B.

$\psi_b = \frac{E_i / I_u}{E_i / I_n}$ de las columnas que llegan a B.
de las vigas que llegan a B.

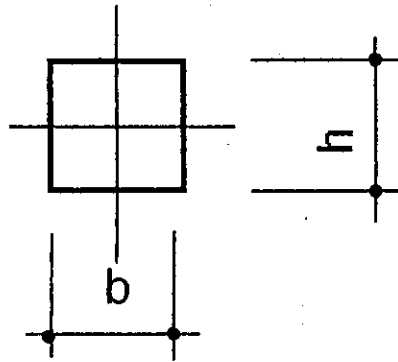
$\psi_c = \frac{E_i / I_u}{E_i / I_n}$ columnas que llegan a el extremo articulado.
vigas que llegan a el extremo articulado.

$$m = (\psi_a + \psi_b) / 2$$

$I_n =$ claro libre de las columnas.

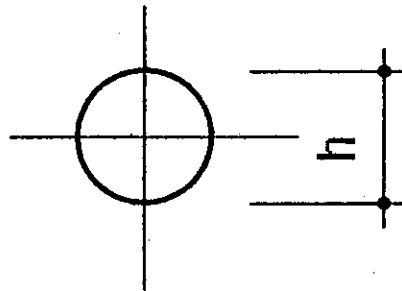
Atendiendo a las formas más usadas en la construcción el radio de giro puede calcularse de una forma más simplificada.

Para SECCIONES RECTANGULARES,



$$r = 0.3h \text{ o } r = 0.3b$$

SECCIONES REDONDAS



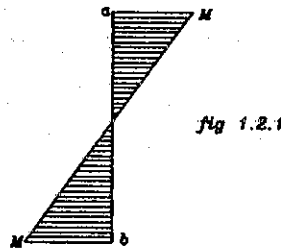
$$r = 0.25h$$

nota: La forma más general para calcular el radio de giro es por medio de la expresión siguiente:

$$r = \sqrt{I_g / A_g}$$

1.2 Sección Crítica.

Se define como sección crítica al área de concreto y de acero que conjuntamente trabajando esté expuesta a la mayor condición de carga-momento, de este modo habría que analizar su condición de apoyo, las cargas que actúan en ella y sus características para poder determinarla. Por ejemplo, para una sección rectangular dimensionada $b \times h$, con un momento en sus extremos empotrados (a y b) M y carga axial P , (ver figura 1.2.1).

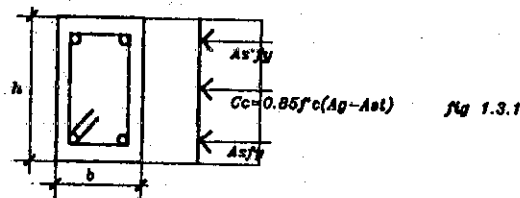


Esta columna llegará a su estado de falla más rápido, donde la excentricidad sea mayor, y obviamente donde el momento sea el máximo a lo largo de toda su longitud.

Puesto que en la columna el momento flexionante no es constante a lo largo del elemento, la excentricidad ira variando también, entonces, la sección crítica estaría localizada donde el momento flexionante fuera mayor. Para el ejemplo los extremos alcanzan el estado crítico, dadas las características expuestas en el diagrama.

1.3 Columnas Cortas.

En concreto reforzado se define a una columna corta como aquella que no posee excentricidad apreciable en la aplicación de su carga, es decir, la carga que actúa sobre ella puede considerarse como un bloque uniforme que actúa perpendicular a su sección transversal (ver figura). Siendo esta la característica básica de su clasificación.



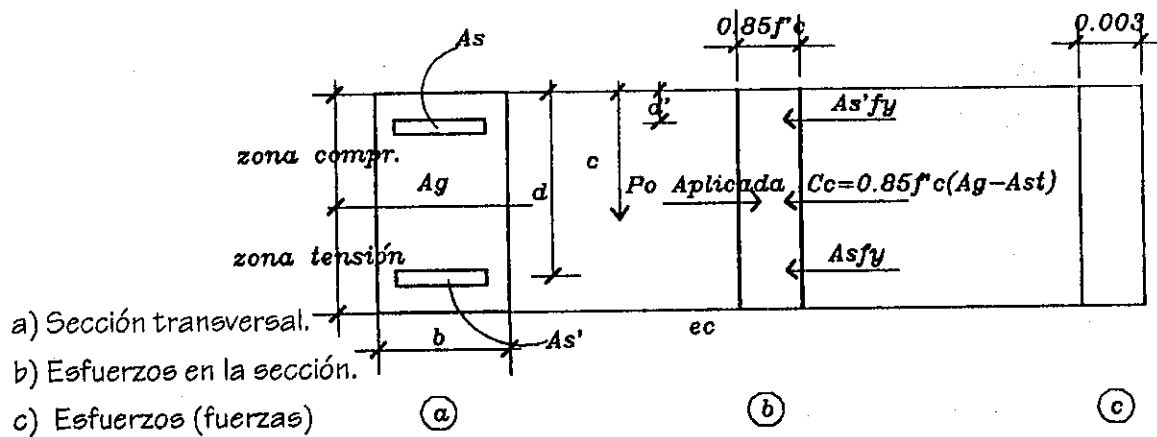
Otra limitante en el comportamiento de las columnas cortas es su relación de esbeltez. Se puede considerar a una columna corta cuando se cumple que:

$$klu/r < 21 \quad \text{donde} \quad k = \text{Factor de longitud efectiva.}$$

$$lu = \text{longitud libre entre apoyos.}$$

$$r = \text{radio de giro de la sección.}$$

Basándose en lo antes descrito, se considera la sección siguiente con refuerzo $A_{st} = A_s + A_s'$ en ambas cambras y un área de concreto $bh = A_g$, como lo indica la figura. Se tiene que:



Las fuerzas en el acero son $A_s'f_y + A_s f_y$ y en el concreto es $C_c = 0.85f'_c(A_g - A_{st})$, donde el valor $0.85f'_c$, se usa en los cálculos en lugar de f'_c , pues se ha encontrado que este valor es más real. Se puede expresar a P_o como la capacidad nominal de carga, y debería ser igual a la suma de todas las fuerzas que actúan en la sección.

$$P_o = A_s'f_y + A_s f_y + 0.85f'_c(A_g - A_{st})$$

$$\text{y} \quad P_o = f_y(A_s' + A_s) + 0.85f'_c(A_g - A_{st})$$

$$\text{sí} \quad A_{st} = A_s' + A_s$$

$$\text{entonces} \quad P_o = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

siempre y cuando la deformación unitaria del concreto no alcance el valor de 0.003 plg/plg (deformación unitaria máxima del concreto, cuando se alcanza f'_c).

En situaciones reales es difícil que se presente una excentricidad $e=0$, ya sea por antisimetría de cargas de cualquier tipo en los marcos estructurales, o por imperfecciones en el proceso de construcción, es razonable suponer una excentricidad mínima de 10% para columnas con estribos y del 5% para columnas con refuerzo del tipo de espiral, según el código de la ACI.

Para evitar complejidad en los cálculos la ACI establece dos factores que deben de aplicarse para obviar la excentricidad mínima:

Para columnas cortas con estribos	=0,80
Para columnas cortas con refuerzo en espiral	=0,85

Que son factores que reducen el valor de la carga P_o , para obtener un margen de seguridad.

1,4 Columnas Esbeltas (efectos del pandeo lateral),

Como ya se ha visto, cuando una columna físicamente pasa de ciertos límites (límites que relacionan su sección transversal con su longitud), en ella se desarrolla cierto esfuerzo adicional producido por un efecto llamado: efecto $P\Delta$, donde P es igual a la carga axial y Δ es la deflexión de la columna ya pandeada por la carga, así que el momento total en la columna debería ser $(Pue + Pu\Delta)$, donde e es igual a la excentricidad de aplicación de la carga, ordenando la expresión se tiene, $Pu(e + \Delta)$, obsérvese que Pu actúa con una excentricidad total $(e + \Delta)$, para producir un Momento mayor llamado M_b de modo que la relación M_b / M se llamará factor de amplificación (δ), puesto que debido a éste aumenta M .

El reglamento de la ACI indica que pueden despreciarse los efectos de esbeltez cuando no se cumplan las siguientes condiciones.

$kl < 34 - 12M_1 / M_2$	para marcos sin ladeo.
$kl < 22$	para marcos con ladeo.

$klu / r < 22$ para marcos con ladeo
donde, k es el factor de longitud efectiva ya tratado en la sección 1.1,

1.4.1 Método de Amplificación de Momentos.

El diseño de la columna se basará en el uso de un momento ya modificado por el factor de amplificación.

$$M_b = M_d$$

que puede dividirse en dos partes.

$$M_b = \delta_b M_{b0} + \delta_s M_s$$

donde, $\delta_b M_{b0}$ que son producidos por las cargas gravitacionales y $\delta_s M_s$ que son producidos por las cargas que ocasionan desplazamientos laterales.

Los factores de amplificación δ_b y δ_s dependen realmente de:

- De la rigidez del miembro.
- De la rigidez de los miembros que limiten el movimiento de sus apoyos,

entonces:

$$\delta_b = C_m / (1 - P_u / \phi P_c) > 1$$
$$\delta_s = 1 / (1 - P_u / \phi \sum P_c) > 1$$

en las que $P_c =$ Carga crítica = $\pi^2 EI / klu^2$

$klu =$ longitud efectiva (vista anteriormente en la sección 1.1)

$\sum P_u, \sum P_c =$ sumatoria de todas las columnas de un piso.

$l_u =$ longitud sin soporte en la columna.

$C_m =$ Factor de relación de un diagrama de momentos reales con un diagrama equivalente de momentos uniforme.

$$C_m = 0.6 + 0.4M_1/M_2 \geq 0.4 \text{ donde } M_1 \leq M_2$$

$M_1/M_2 > 0$ si no existe punto de inflexión a lo largo de la columna.

NOTA: Para otras condiciones se asume $C_m = 1$, cuando se demuestre que no existe momento en ninguno de los extremos de la columna.

1,5 Falla Balanceada:

Una columna puede estar sometida a varios estados de carga, esto depende de los valores que se combinen de carga axial y momento; básicamente la sección de concreto reforzado estará sometida a flexocompresión y su diagrama de deformaciones será de distribución lineal de la siguiente manera:

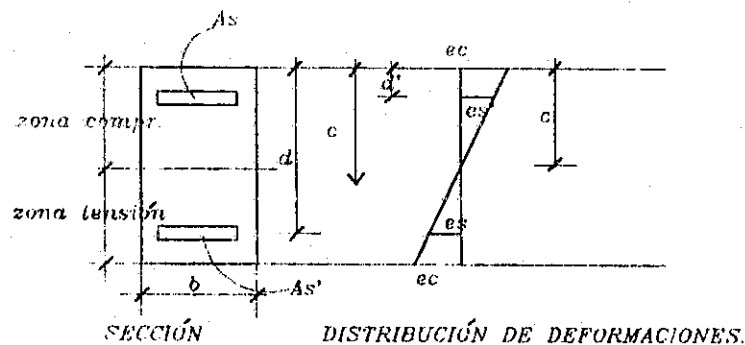


Fig 1.5.1

donde c es el valor de la profundidad de la zona de compresión ϵ_s' es la deformación unitaria del acero de compresión a lo largo de su eje. ϵ_s es la deformación unitaria del acero a tensión, en la dirección de su eje.

ϵ_c es la deformación unitaria del concreto en la zona de compresión.

Como ya se sabe ϵ_c no puede sobrepasar la cantidad de $0,003 \text{ cm/cm}$, que es la máxima deformación a la que puede someterse al concreto antes de que ocurra la falla.

Si se busca que la falla del concreto coincida con la del acero en un estado límite, el acero tendría que alcanzar su valor ϵ_y cuando

simultáneamente se alcanza ϵ_c en la cara de compresión, de la figura se tendrían los siguientes valores:

$$c/d = \epsilon_c / (\epsilon_c + \epsilon_y)$$

$$c = (\epsilon_c)d / (\epsilon_c + \epsilon_y) \text{ donde } \epsilon_c = 0,003$$

$$c = 0,003d / (0,003 + \epsilon_y)$$

$$c = 0,003d / (0,003 + f_y / E_s) \text{ donde } E_s = 2,1E6 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = d (6300 / (6300 + f_y))$$

que es la profundidad de la zona de compresión para la cual se alcanza la falla simultánea de los dos materiales (compresión del concreto en contraposición de la tensión del acero). De la figura se tiene:

$$C_b / (C_b - d') = \epsilon_c / \epsilon'_s$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_c (C_b - d') / C_b - \epsilon_c (1 - d' / C_b)$$

$$\epsilon'_s = \epsilon_c (1 - (d' / d)) ((6300 + f_y) / 6300)$$

Al multiplicar ambos lados por E (módulo de elasticidad), se obtendrá el valor de $f'_s b$ en el lado izquierdo de la igualdad, que es el esfuerzo del acero en el área a compresión del acero.

$$E_s \epsilon'_s = E_s c (1 - (d' / d)) ((6300 + f_y) / 6300)$$

donde $E_s \epsilon_c = 2,1E6 \text{ kg/cm}^2 (0,003 \text{ cm/cm})$

Este valor es igual a 6300, substituyendo en la expresión anterior:

$$f'_s b = 6300 (1 - ((d' / d)) ((6300 + f_y) / 6300))$$

que es el valor del esfuerzo del acero en tensión en circunstancias balanceadas.

1.6 Diagrama de interacción.

Como ya se ha visto, una columna puede estar sometida a dos estados de carga: Carga de Flexión o momento y Carga Axial; una sección en especial puede estar sometida a diferentes combinaciones de carga y momento para las cuales debería estar en disponibilidad de resistir. El diagrama de Interacción, es una curva que se obtiene al examinar diferentes estados de carga y momento para una situación definida, ver la siguiente figura.

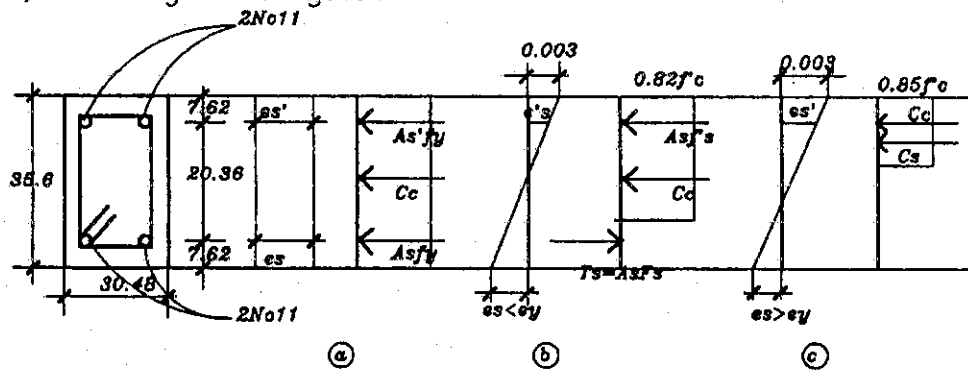


Fig 1.6.1

Vease los diagramas de esfuerzo de tres condiciones de carga en a) es un estado de carga axial que provocará una falla a compresión, en b) un estado de carga-momento que dará por resultado, en circunstancias extremas, una falla por compresión en el concreto, ya que la deformación máxima en el estado de falla llega antes al concreto que al acero, y en forma contraria obsérvese que en c) llega a fallar antes el acero a tensión provocando una falla por fluencia del acero en la cara a tensión.

A continuación se construye un diagrama de interacción para la sección de la figura anterior, asumiendo: $f'_c = 422 \text{ kg/cm}^2$.

$$f_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$$

$$D_v = \text{diámetro de la varilla} \quad D_v = 11 / 8 = 1.375 \text{ plg } (2.54) = 3.54 \text{ cm}$$

$$r = 1.746 \text{ cm}$$

$$A = \pi(1.746)^2 = 9.5723 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2(9.57 \text{ cm}^2) = 19.16 \text{ cm}^2$$

Para el estado de carga axial la $P_n \text{ max}$

Cuando todas las varillas trabajan a compresión se da que:

$$P_n \max = 0.80(0.85f'_c A_g + A_s t f_y)$$

$$P_n \max = 0.80(0.85(210)(1085 \text{ cm}^2) + 9.57(4)(4220))$$

$$P_n \max = 284171.28 \text{ kg}$$

$$d = 35.6 - 7.62 = 27.8$$

Para condiciones balanceadas se tiene:

$$C_b = (6115 / (6115 + f_y)) d = (6115 / (6115 + 4220)) 27.98 = 16.556 \text{ cm}$$

$$f_s' b = 6115 (1 - (d' / d) (6115 + f_y) / 6115)$$

$$f_s' b = 6115 (1 - (7.62 / 27.98) (6115 + 4220) / 6115) = 3300.39 \text{ kg / cm}^2$$

$$3300.39 \text{ kg / cm}^2 < f_y$$

$$a \text{ balanceado} = \beta C_b = 0.85(16.56) = 14.08 \text{ cm}$$

$$P_{\text{balanceado}} = P_b = 0.85 f'_c a b + A_s' f_y - A_s f_y$$

$$P_b = 0.85(420 \text{ kg / cm}^2)(14.08 \text{ cm})(30.48 \text{ cm})$$

$$+ 19.16 \text{ cm}^2 3399.19.16 \text{ cm}^2 4220 = 153,209.54 \text{ kg}$$

$$M_b = 0.85 f'_c a b (h / 2 - a / 2) + A_s' f_s' (h / 2 - d') + A_s f_y (d - h / 2)$$

$$M_b = 0.85(210)(14.08)(30.48)(17.814,08/2) + 19.16(3399.9)$$

$$(17.8 - 7.62) + 19.16(4220)(27.98 - 17.8)$$

$$M_b = 1648534.65 + 663146.37 + 823105.93$$

$$M_b = 3134786.95 \text{ kg.cm.} = 31347.86 \text{ kg.m.}$$

$$e(\text{balanceado}) = M_b / P_b = 3134786 / 153209.54 = 20.46 \text{ cm.}$$

$$P_b / P_o = 153209.54 / 284171.28 = 0.539$$

a plotear en gráfica los valores de $P_b = 153.209.54 \text{ kg}$ en las ordenadas y $M_b = 31347.86 \text{ kg.cm}$ en las abscisas del diagrama.

A continuación se aumentará el valor de c , con la idea de aumentar también la zona de compresión en la sección, provocando disminución en el valor de F_s . Se asume un valor arbitrario de $c = 26 \text{ cm}$ para provocar la falla por compresión en la columna. Se tiene ahora:

El límite de deformación unitaria para el acero sería:

$$y = 4220 / E \quad \text{donde } E = 2,1E6$$

de la figura 1,5,1b y la relación de triángulos, se obtienen las deformaciones unitarias en el acero.

$$\epsilon_s = 0,003(d - c) / c = 0,003(27,98 - 26) / 26 = 0,0002284 < \epsilon_y$$

$$\epsilon'_s = 0,003(c-d')/c = 0,003(26-7,62)/26 = 0,0021207 > \epsilon_y$$

$$f_s = \epsilon_s E_s = 0,00228461(2,1E6) = 479,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = \epsilon'_s E_s = 0,00212076(2,1E6) = 4453,0 \text{ kg/cm}^2 > f_y$$

$$C_s = A_s f'_s = 2(9,57)(4220) = 80855,20 \text{ kg}$$

$$T_s = A_s F_s = 2(9,57)(479,6) = 9177,64 \text{ kg}$$

$$a = \beta c = 0,85(26) = 22,10.$$

$$C_c = 0,85 f'_c b a = 0,85(420)(30,48)(22,10) = 240478,06 \text{ kg}$$

$$P_n = C_c + C_s - T = 240478,06 + 80855,20 - 9177,64 = 312155,62 \text{ kg}$$

$$M_n = C_c(h/2 - a/2) + C_s(h/2 - d') + T(d - h/2)$$

$$M_n = 240478,06(17,8 - 22,1/2) + 80855,2(17,8 - 7,62) + 9177,6(27,98 - 17,8)$$

$$M_n = 2431545,682 \text{ kg.cm}$$

$$M_n = 24315,45 \text{ kg.m}$$

$$e = M_n/P_n = 2431545,682/312155,62 = 7,789 \text{ cm}$$

$$e/h = 7,789/35,6 = 0,2188,$$

$$P_n/P_o = 24315,45 \text{ kg}/284171,28 \text{ kg} = 0,085$$

A plotear en la gráfica los valores de $P_n = 24315,45 \text{ kg}$ y $M_n = 2431545,682 \text{ kg.m}$

Ahora se asumirá un punto en la zona de tensión $c = 10,00 \text{ cm}$, para propiciar la falla en el acero.

$$\epsilon_s = 0,003(27,98 - 10)/10 = 0,005394$$

$$\epsilon'_s = 0,003(10 - 7,62)/10 = 0,000714 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_s = f_y = 4220$$

$$F_s = 0,000714(2,1E6) = 1499,4 \text{ kg/cm}^2$$

$$a = \beta c = 0,85(10) = 8,5 \text{ cm}$$

$$C_c = 0,85(420)(30,48)(8,5) = 92491,56 \text{ kg}$$

$$C_s = A_s f'_s = 2(9,57)(1499,4) = 28698,52 \text{ kg}$$

$$T_s = A_s F_s = 2(9,57)(4220) = 80855,20 \text{ kg}$$

$$P_n = 92491.57 - 28720.84 + 80855.20$$

$$P_n = -39357.2 \text{ kg}$$

$$P_n/P_o = 39357.2 / 284171.28 = 0.1384$$

$$M_n = 92491.57(17.8 - 8.5/2) + 28720.84(17.8 - 7.62) + 80855.20(27.98 - 17.8)$$

$$M_n = 1253260.63 + 292378.15 + 823105.93$$

$$M_n = 2368744.71 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$e = 2368744.71 / 39357.2 = 60.185$$

Se asume otro punto en la zona de tensión $c = 12 \text{ cm}$

$$\epsilon_s = 0.003(27.98 - 14) / 12 = 0.00399$$

$$f_s = f_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon'_s = 0.003(14 - 7.62) / 12 = 0.00109536$$

$$f'_s = 0.00109536(2.1E6) = 2299.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$a = \beta c = 0.85(12) = 10.2 \text{ cm}$$

$$C_c = 0.85(420)(30.48)(10.2) = 110989.87 \text{ kg}$$

$$C_s = A_s f'_s = 2(9.57)2299.5 = 44058.42 \text{ kg}$$

$$T_s = A_s F_s = 2(9.57)4220 = 80855.20 \text{ kg}$$

$$P_n = 110989.87 + 44058.42 - 80855.20 = 74193.09 \text{ kg}$$

$$P_n/P_o = 74193.09 / 284171.28 = 0.2610$$

$$M_n = 110989.87(17.8 - 5.1) + 44058.42(17.8 - 7.62) + 80855.20(27.98 - 17.8)$$

$$M_n = 1409571.34 + 448514.71 + 823105.93$$

$$M_n = 2681191.948 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$M_n = 26811.91 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

A plotearse en la gráfica los valores de $P_n = 74193.09 \text{ kg}$ y $M_n = 2681191.948 \text{ kg}\cdot\text{m}$,

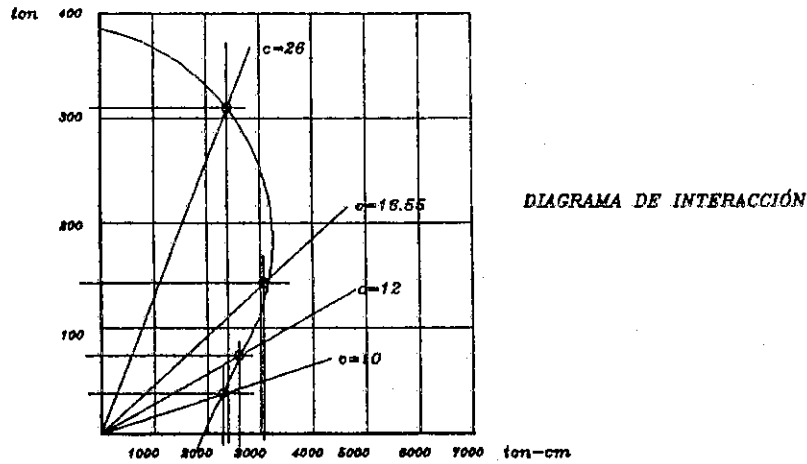


fig 1.6.1

1.7 Ductilidad.

Se define como ductilidad de un elemento de concreto reforzado, a la capacidad que tiene éste de deformarse; entre más se deforme una columna hacia el pandeo sin producir falla en sus componentes, ésta será más dúctil. Para poder medir la ductilidad es necesario hacer un análisis del giro que realiza la sección transversal para el estado de carga-momento al que esté sometida. Para una sección cualquiera se tendrán las condiciones siguientes:

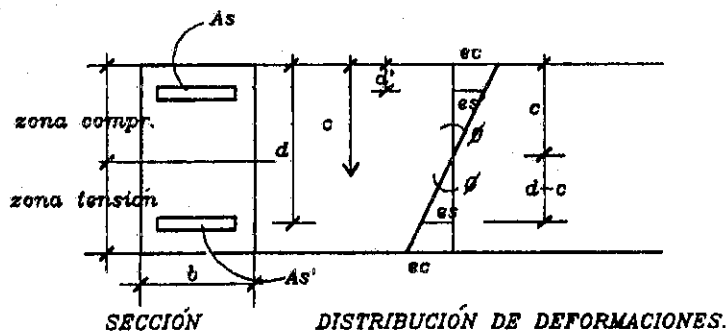


fig 1.7.1

El giro de la sección θ puede calcularse con una relación de triángulos, asumiendo linealidad en sus deformaciones, entonces se tendrá:

$$\theta = \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c}$$

$$\text{y } \epsilon'_s = \theta(c-d)$$

$$\epsilon_s = \theta(d-c)$$

entonces para una condición balanceada se tiene que:

$$\phi_b = c/C_b \quad \text{y} \quad C_b = (6115 / (6115 / (6115 + f_y)))$$

$$\phi_b = c / (6115 / (6115 / (6115 + f_y)))$$

como $c = 0,003$ = deformación unitaria máxima del concreto a la compresión, se tiene:

$$\phi_b = 0,003(6115 + f_y) / (6115d)$$

multiplicando ambos lados por 100 ambos lados, se obtiene.

$$100d \phi_b = 0,3(6115 + f_y)$$

donde $0,3(6115 + f_y)$, sería un valor constante que depende únicamente del valor f_y .

La ductilidad se define como la relación entre el giro último de la sección y el giro cuando el refuerzo que trabaja a tensión empieza a fluir, o sea que alcanza el esfuerzo f_y .

$$u = \phi / \phi_b = \text{Giro de la sección} / \text{Giro balanceado.}$$

Se puede decir que una columna es dúctil cuando u es mayor que 1, aunque según la ACI la ductilidad debe estar entre los valores 2 y 6 para zonas sísmicas.

Para efectos del presente análisis se graficará la variación del giro de la sección para diferentes estados de carga, esta gráfica se conoce usualmente como diagrama de ductilidad en cuyas ordenadas se grafica: $100(\phi_b)d$ y en las abcisas el valor de P_n/P_o .

Graficando los valores del ejemplo de la sección 1,6 se obtienen los siguientes resultados.

$$P_b / P_o = 153209.54 \text{ kg} / 284171.28 \text{ kg} = 0,5391$$

$$\phi_b = c / C_b = 0,003 / 16,56 = 0,0001811$$

$$100(\phi_b)d = 100(0,0001811)27,98 = 0,5067$$

----- para el estado de falla balanceada.

$$P_n / P_o = 24315.45 \text{ kg} / 284171.28 \text{ kg} = 0,0855$$

$$\phi_c = 0,003 / 26 = 0,0001153$$

$$100(\phi_c)d = 100(0,0001153)27,98 = 0,3226$$

-----para un punto en la zona de compresión.

$$P_n / P_o = 39357.2 \text{ kg} / 284171.28 \text{ kg} = 0,13849$$

$$\phi_t = 0,003 / 10 = 0,0003$$

$$100(\phi_t)d = 100(0,0003)27,98 = 0,8394$$

-----para un punto en la zona de tensión.

$$P_n / P_o = 74193.09 \text{ kg} / 284171.28 \text{ kg} = 0,26108$$

$$\phi_t = 0,003 / 12 = 0,00025$$

$$100(\phi_t)d = 100(0,00025)27,98 = 0,6995$$

-----para otro punto en zona de tensión.

Con los anteriores datos se obtiene la siguiente gráfica.

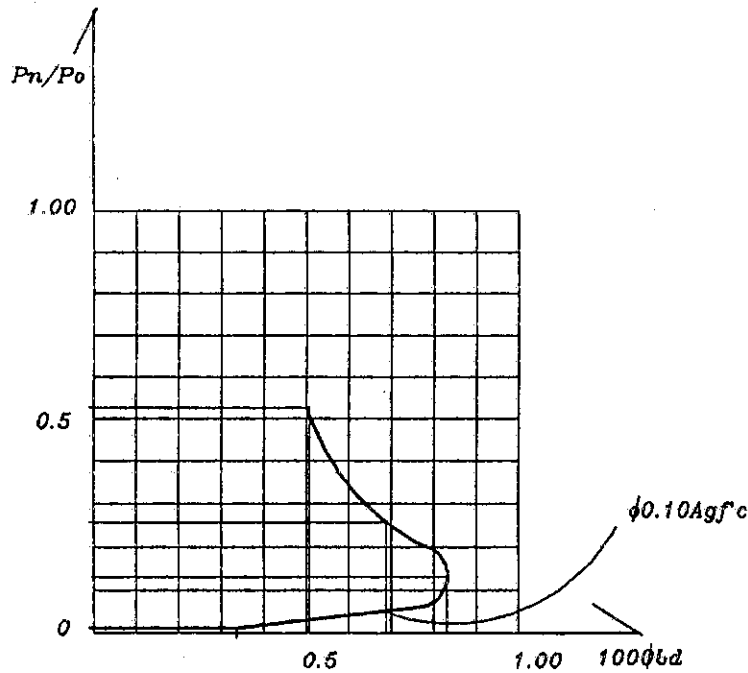


fig 1.7.2

El código de la ACI estipula que cuando P_n es mayor que $\phi 0,10 A_g F'_c$ la columna debe ductilizarse. Este límite está denotado en la gráfica y es indicativo que la columna es dúctil para valores inferiores, en caso contrario, debe ser ductilizada, agregando refuerzo de confinamiento (ver sección 1,8).

Para el caso anterior la relación P_n / P_o sería igual a:

$$P_n / P_o = 0,10 A_g f'_c / P_o = 0,70 (0,10) (1085) (210) / P_o$$

$$P_n / P_o = 15949,5 \text{ kg} / 284171,28 \text{ kg}$$

$$P_n / P_o = 0,05$$

1,8 Confinamiento.

Cuando una columna trabaja fuera de la zona de confinamiento (ver sección 1,7), ella es lo suficientemente dúctil para resistir las condiciones de carga a las que está sujeta, aunque la ACI estipula un mínimo de refuerzo por confinamiento.

Cuando una columna trabaja dentro de esta zona es necesario reforzarla para que adquiera más ductilidad, por medio de estribos o zunchos los cuales estarán espaciados un valor calculado en las zonas donde los giros sean más grandes a lo largo de la columna. Esta zona usualmente está localizada a $L/6$ de los apoyos, para columnas que pertenezcan a marcos estructurales.

Según el código de la ACI, el espaciamiento del refuerzo de confinamiento será el menor valor de: $L/6$, d (peralte) o 45cm.

El área de acero para cada zuncho debe calcularse con los valores de:

$0,12 f'_c / f_y$ ó $0,45 (A_g / A_n - 1) (f'_c / f_y)$ (la mayor de las dos)
para secciones redondas.

donde: A_n = Área del núcleo.

A_g = Área total de concreto.

f'_c = Esfuerzo último del concreto.

f_y = Esfuerzo último del acero.

y:

$0,125 h f'_c / f_y$ ó $0,35 h (A_g / A_n - 1) (f'_c / f_y)$ (la mayor de las dos)
para secciones cuadradas.



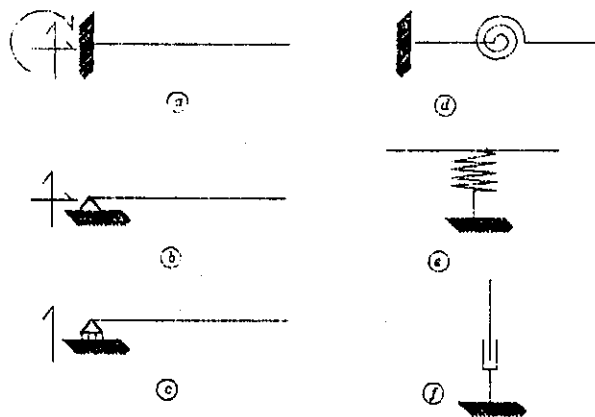
Capítulo 2.

Condiciones de sujeción:

Para analizar el comportamiento de una columna es necesario determinar bajo qué condiciones ésta trabaja, considerando factores tales como: los detalles de construcción en los apoyos, las condiciones de carga, la variación de su rigidez a lo largo de ésta, etc. Las condiciones en que una columna está sujeta al cuerpo de la estructura son elementos importantes para el diseño. A continuación se tratará algo de esto:

2.1 Apoyos.

En análisis estructural se utilizan varios tipos de apoyos ideales, tales como: a) empotramiento, b) articulación, c) Deslizantes, d) elásticos, e) semirígidos y f) plásticos; los más comúnmente usados son la articulación y el empotramiento en análisis de marcos estructurales de concreto. En condiciones reales, los apoyos de cada miembro estructural no presentan un comportamiento ideal, esto se refiere a que existe cierto grado de rigidez que evita o libera el giro del miembro, ésta es producida por otros elementos estructurales que llegan al nudo o apoyo y evitan el movimiento del mismo. Esta relación que existe entre apoyos y miembros gobierna la distribución del momento flexionante en la estructura, y es la base de algunos métodos de análisis de estructuras como son los de Cross y Kani.



Diferentes tipos de apoyos utilizados en el análisis estructural

FIGURA 2.1.1

En circunstancias de empotramiento ideal el apoyo es infinitamente rígido y no permite movimiento del elemento en ninguna dirección, limitándolo también del giro en cualquier sentido(ver figura 2.1.2).



FIGURA 2.1.2

El apoyo articulado libera el giro pero no proporciona traslación en ningún sentido(ver figura).

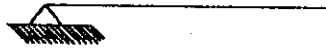


FIGURA 2.1.3

El apoyo simple consiste en liberar el giro en el apoyo y la capacidad de traslación en el sentido perpendicular a la carga.

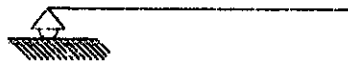


FIGURA 2.1.4

Para concreto reforzado la rigidez de un apoyo puede ser establecida atendiendo a los siguientes criterios:

a) Rigidez en los apoyos proporcionada por el armado.

La forma en que se colocan y se extienden las varillas de refuerzo en los nudos estructurales pueden o no, rigidizar la junta. Obsérvese los siguientes casos de un apoyo rígido y uno flexible.(ver figura 2.1.5).

b) Rigidez en los apoyos proporcionada por cartelas.

A veces se suele incrementar los peraltes de los miembros, esto para impedir deformaciones exageradas en las juntas estructurales, esta alternativa ofrece mayor eficiencia en el funcionamiento de la estructura.

c) Rigidez en los apoyos proporcionada por concentración de miembros.

Cuando un nudo estructural llegan varios elementos (vigas, columnas), éstos se rigidizan y evitan los giros en los nudos.

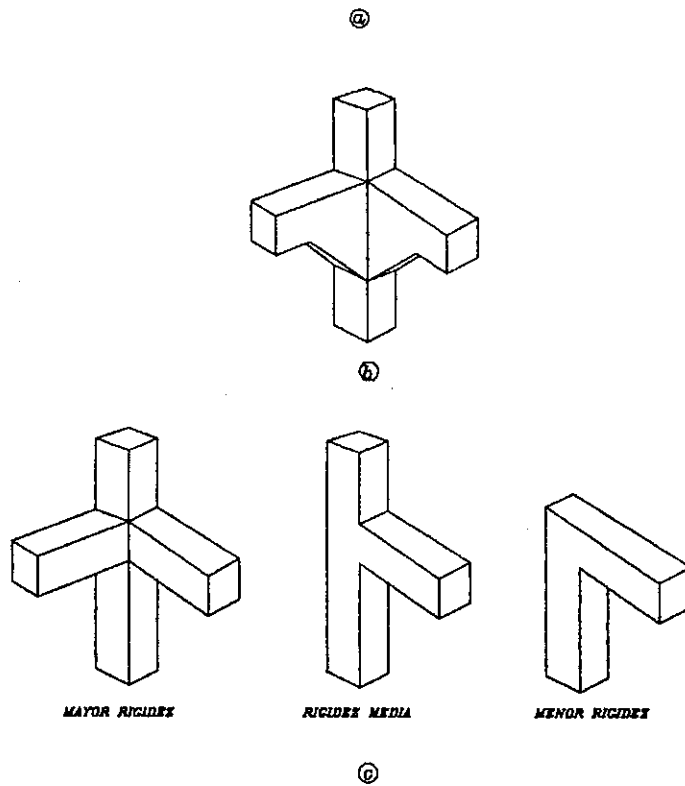
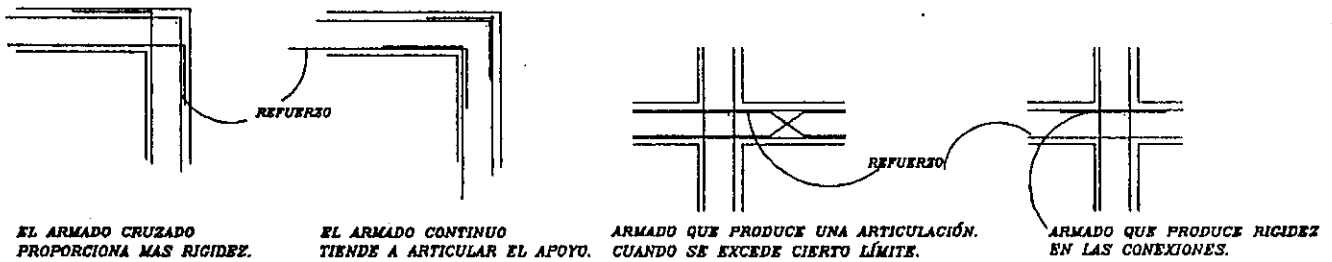


FIG 2.1.5



Capítulo 3.

Aspectos Arquitectónicos

El diseño de sistemas comprende una serie de etapas ordenadas que conducen hacia un mejor resultado dentro de un determinado grupo de circunstancias.

El procedimiento que se requiere para el desarrollo de cualquier obra de arquitectura se puede enumerar en los siguientes pasos.

- 1) Análisis de la obra como sistema.
- 2) Síntesis, selección de componentes, con el fin que satisfaga los objetivos perseguidos.
- 3) Apreciación del funcionamiento del sistema comparado con otros de características similares.
- 4) Retroalimentación, que es una evaluación al sistema de manera que se pueda mejorar.

Se puede definir como sistema a un conjunto de elementos formado para satisfacer objetivos específicos, éstos siempre sujetos a limitaciones y restricciones, consta de dos o más componentes interrelacionados y compatibles, cada uno de los cuales resulta indispensable para que el sistema funcione como se espera.

Cada componente puede ser una viga, una columna o una zapata que forman parte de otro sistema mayor, el cual debe ser depurado mediante los pasos anteriores.

Para los objetivos que persigue este trabajo de tesis el sistema en cuestión consiste en evaluar estructuras que contengan elementos de sección variable e incluso evaluar como sistema un simple elemento como una columna.

3,1 Corte longitudinal.

Una columna desde el punto de vista de la arquitectura, puede tomar infinidad de formas, las cuales definen el perfil o corte longitudinal. En

concreto armado la distribución del refuerzo longitudinal actúa como limitante de la forma que vaya a tomar el borde externo debido a que la varilla no puede ser doblada a capricho. El hecho de adaptar el refuerzo a la superficie de la columna produce alteración en los métodos constructivos, volviéndolos más engorrosos, producen complicaciones muy grandes en el trabajo constructivo y dificulta aún más los procedimientos de diseño.

Otro limitante importante es el encofrado que complicaría de alguna forma el proceso constructivo, aunque algunas veces, se suele prefabricar moldes especiales para cumplir con diseños de arquitectura, aunque esto represente algún costo adicional.

En la arquitectura de muchas edificaciones peculiares pueden encontrarse formas especiales tales como los perfiles mostrados en los dibujos siguientes:

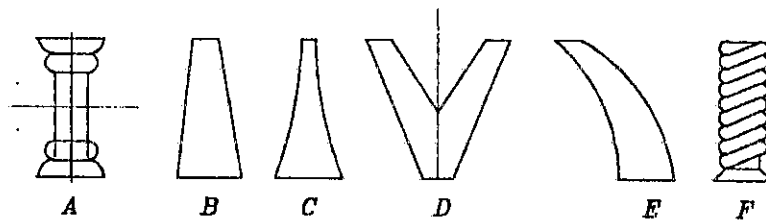


FIGURA 3.1.1

Obsérvese que en a y en f el borde del perfil varía de forma muy brusca, de modo que si el refuerzo se colocara conservando como constante el recubrimiento se daría origen a un problema muy complicado de diseño, por otro lado, es preferible que se coloque de forma recta, en sentido de su eje longitudinal, para que ésta trabaje de una manera más eficiente, y que el recubrimiento, que se vuelve variable, sólo actúe como un elemento decorativo.

En el caso de la figuras b, c, d y e, éstas poseen formas suaves en los bordes laterales del corte longitudinal que de alguna manera pueden ser aprovechados por el diseñador, para que el refuerzo se distribuya de esa misma forma, y sin cambios bruscos. El estudio de estos casos da origen a complicaciones en los métodos de análisis y diseño, aunque son casos más trabajables. El presente trabajo de tesis esta orientada a este tipo de casos.

3,2 El proceso constructivo como limitante de la forma.

Como ya se ha visto tanto la formaleta como el acero de refuerzo proporcionan algunas limitaciones en el proceso de diseño de una columna, aunque el problema del encofrado puede vencerse por medio del ingenio del constructor.

El proceso constructivo de una columna de concreto inicia con el diseño de encofrados y formaletas seguras para la fabricación de estos elementos estructurales, el Recommended Practice for Concrete Formwork ACI347 establece especificaciones y procedimientos básicos para el diseño y usos en encofrado para concreto. Cuando algún proyecto en particular o algún acabado especial imponen necesidades fuera de lo común, y sólo en tales casos, las ideas del diseñador sirven para la escogencia de un material para usarse en encofrados. El único factor que gobierna sobre el diseño de una formaleta para concreto es la Presión de Concreto Fresco. Para uso del lector se tratará algo de encofrados verticales, predominante en el diseño de formaletas para columnas.

3,2,1 Presión de Concreto Fresco para Encofrados Verticales.

Este valor se estima por medio de la fórmula:

$$P = 150 + 9000R/T$$

donde P=presión lateral lb/ pie²

R=rapidez de colado pies/ h

T= Temperatura del concreto °F o °C

Obsérvese la figura siguiente:

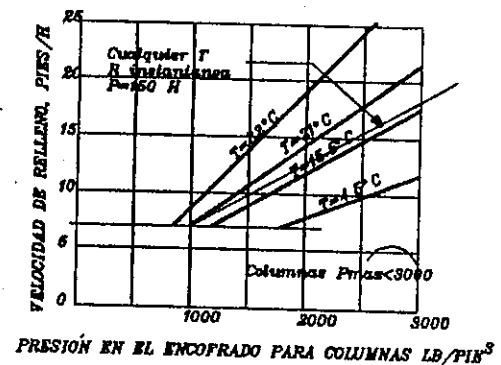


FIGURA 3.2.1.1

En el caso de columnas, la máxima presión, P_{max} , es el menor de los siguientes valores: 3000 lb/ pie^3

15000 kg/ m^2

ó $150h$

donde el valor h es la altura en pies por encima del punto de presión.

Las presiones calculadas que el concreto ejerce sobre el encofrado deben ser aumentadas cuando el peso de aquel es superior a 150 lb/ pie^2 , si se emplean cementos de fraguado más lento que el cemento Portland ordinario. En diseño seguro el concreto es un líquido de densidad w y $P_{max}=wh$ en todo el peralte de colado.

Para construcción de estructuras poco frecuentes, como losas plegadas, cascarones, arcos y elementos postensados insitu, o cuando se usan métodos de construcción fuera de lo común, se recurre a sistemas de encofrado o formaleta especiales, como el encofrado deslizante, en el que se va apoyando el concreto previamente terminado al avanzar hacia arriba.

3,3 Forma Óptima Variable.

Se define como forma óptima variable a la forma de la columna que se adapte exactamente a las condiciones de carga, que va estar afrontando y a las que su sección y refuerzo tengan capacidad de resistir en todos los puntos a lo largo de su eje longitudinal. En otras palabras su sección debe estar ajustada a los cambios de carga establecidos en el análisis estructural por medio del diagrama de Momentos.

En condiciones usuales la carga axial y momento sobre una columna no son constantes a lo largo de ésta, debido a cargas horizontales sobre ellas, produciendo flexión; la sección reforzada puede adaptarse también a la carga que se requiera en cada punto a lo largo columna, esto se puede lograr variando el A_g (Área de Concreto), optimizando así la funcionalidad del elemento.

Considérese un ejemplo sencillo: una columna de concreto reforzado tipo mastil, cuyo extremo inferior está empotrado y su extremo superior se encuentra libre. Al punto a se le aplica una carga horizontal P_1 y una carga vertical P_2 induciendo en la columna un Momento como se muestra en la figura 3.3.1.

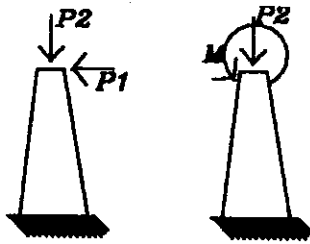
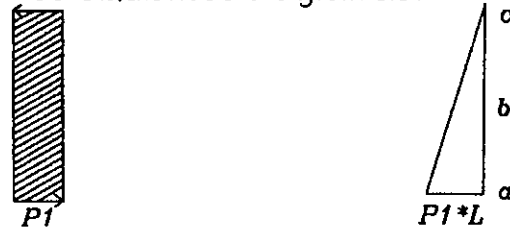


FIGURA 3.3.1

Apréciase que P_2 es la carga axial sobre la sección de la columna a lo largo de L , pero el momento flexionante que actúa sobre ella es variable a lo largo de toda su longitud.

Sí se grafican los diagramas de corte y momento a lo largo de la columna se tendrían los siguientes diagramas:



a) diagrama de Corte.

b) diagrama de Momento.

FIGURA 3.3.2

En la figura anterior obsérvese que el momento flector disminuye linealmente mientras la distancia al extremo empotrado aumenta (extremo b); de esta manera las condiciones de carga axial más momento, varían a lo largo de la columna.

Para una sección cualquiera, en el punto C de la columna de la fig 3.3.2b, se tiene:

$$M=0$$

Para la sección que corresponda al punto B de la columna también se tiene:

$$M=P_1L/ 2$$

Para la sección que corresponda al punto A de la columna se obtiene el momento máximo, de valor:

$$M=Pl$$

Es lógico pensar que para la sección de la columna de la figura 3.3. 2b en el punto c es necesaria menos sección o menos refuerzo que para el punto a, puesto que a menos momento flexionante se obtendrán valores de área de acero menores, o a menos momento flexionante se obtendrán áreas transversales de concreto en flexión menores. Esto es debido a que las condiciones de carga son menos críticas en c que en a. Lo antes dicho puede dar lugar al diseño de columnas funcionalmente óptimas si se diseñara de modo que su sección transversal fuera variando en relación a su estado de carga. Esto quiere decir que su área de concreto puede ir disminuyendo conforme el esfuerzo en el va disminuyendo también. Todo esto desenvoca a una estructura más liviana y más funcional.

Capítulo 4.
Comportamiento.

4.1 Esbeltez en Columnas de Sección Variable.

En definiciones de capítulos anteriores ya se vió que la relación de esbeltez se define como:

$$e = klu / r$$

El cociente de la longitud efectiva klu con el radio de giro, r para una columna prismática. Considérese entonces, una columna de sección variable, donde el área de su sección transversal guarda una relación lineal conforme se avanza en su longitud progresivamente, y convergen a un punto situado a una distancia L_1 del borde superior de la columna (figura 4.1.1a), con un largo de columna L_2 que guardan relación proporcional:

$$L_1 / L_2 = A_1 / A_2 \quad \text{ec 4.1.1}$$

donde A_1, A_2 son las áreas transversales de la columna.

Considérese entonces un diferencial de longitud dx tan pequeño, que las áreas de las caras superior e inferior pueden presumirse iguales según el sistema de referencia supuesto. Obsérvese la siguiente figura y el sentido del momento flector.

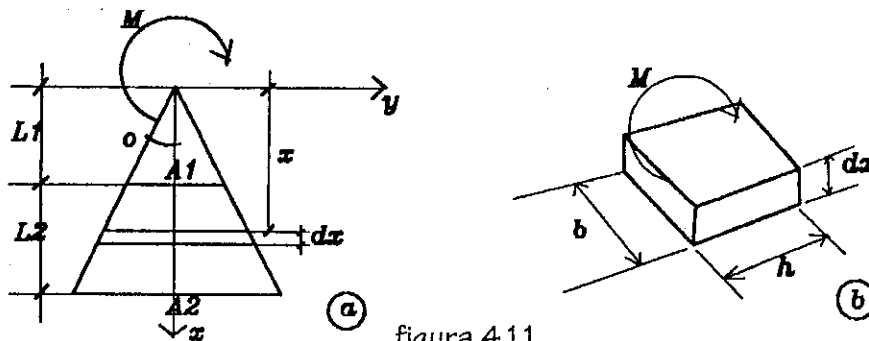


figura 4.1.1

En la figura anterior se puede apreciar que la relación de esbeltez del elemento diferencial es por definición:

$$de = kdx / r \quad (\text{ec 4.1.2})$$

donde $r = \sqrt{I/A}$ si $I = bh^3/12$ y $A = bh$.

substituyendo $r = \sqrt{bh^3/12/bh}$

simplificando $r = \sqrt{h^2/12}$

substituyendo este valor en la ec(4.1.2) $de = kdx/r$

se tiene: $de = \frac{kdx}{\sqrt{h/12}}$ ec(4.1.3)

considérese ahora el triángulo extraído de la figura(4.1.1a)

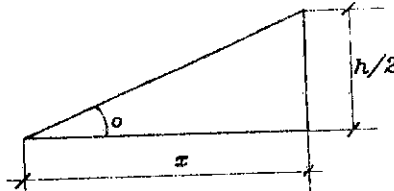


figura 4.1.2.

donde se cumple que: $\tan \theta = h/2 / x$ donde $h = 2x \tan \theta$ ec(4.1.4)

substituyendo(4.1.4) en la ecuación (4.1.3), se tiene:

$$de = kdx / \sqrt{(2x \tan \theta)^2 / 12}$$

$$x = L1 + L2$$

integrando la expresión: $e = \int_{x=L1}^{x=L1+L2} kdx / \sqrt{(2x \tan \theta)^2 / 12}$

debe observarse que k es una constante que depende de las condiciones de sujeción de la columna, por tanto, ésta puede salir de la integral :

$$x = L1 + L2$$

$$e = k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} dx / \sqrt{(2x \tan \theta)^2 / 12} \text{ ec(4.1.5)}$$

$$x = L1$$

para poder integrar la expresión (4.1.5) se substituye:

$$u = 2x \tan \theta \text{ ec(4.1.6)}$$

diferenciando : $du = 2 \tan \theta dx$ donde $dx = du / 2 \tan \theta$ ec(4.1.7)

substituyendo (4.1.6) y (4.1.7) en la expresión (4.1.5) se tiene lo siguiente:

$$x = L1 + L2$$

$$e = k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} du / 2 \tan \theta \sqrt{u / 12}$$

$$x = L1$$

simplificando : $x=L1+L2$

$$e=k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} du / 2 \tan \theta / u / \sqrt{12}$$

$x=L1+L2$

$$y \quad e=k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} \sqrt{12} du / u \tan \theta$$

queda :

$$e= k\sqrt{12} / (2 \tan \theta) \int_{x=L1}^{x=L1+L2} du / u \quad y \quad e= k\sqrt{3} / (\tan \theta) \int_{x=L1}^{x=L1+L2} du / u$$

que es una expresión integrable.

sabiendo que se puede aplicar la integral definida: $\int du / u = \ln|u|+c$

$$\text{se obtiene: } e= (k \sqrt{3}) / \tan \theta (\ln|u|+c) \Big|_{x=L1}^{x=L1+L2} \quad \text{ec(4.1.8)}$$

substituyendo $u=2x \tan \theta$ en ec(4.1.8)

$$\text{se tiene: } e=(k \sqrt{3}) / \tan \theta (\ln|2x \tan \theta|+c) \Big|_{x=L1}^{x=L1+L2}$$

$$\text{valuando: } e=k\sqrt{3} / \tan \theta (\ln|2(L1+L2) \tan \theta| - \ln|2L1 \tan \theta|+c) \quad \text{ec(4.1.9)}$$

para encontrar el valor de la constante se aplicará la condición de frontera.

$$e=0 \text{ cuando } L2=0$$

substituyendo en ec(4.1.9)

$$0=K\sqrt{3} / \tan \theta (\ln|2L1 \tan \theta| - \ln|2L1 \tan \theta|+c)$$

$$0= (K\sqrt{3} / \tan \theta)c$$

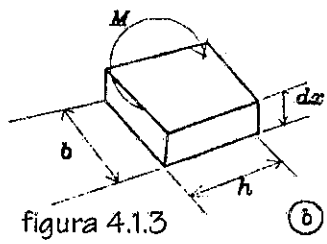
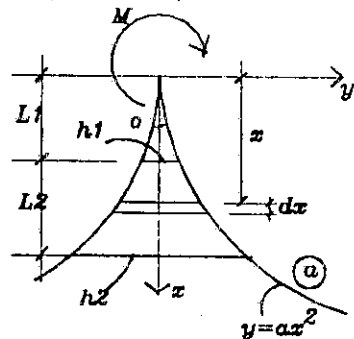
$$c=0$$

Entonces la esbeltez de una columna de sección variable en las condiciones supuestas estaría dada por la expresión siguiente:

$$e= (K\sqrt{3} / \tan \theta) (\ln|2(L1+L2) \tan \theta| - \ln|2L1 \tan \theta|) \quad \text{ec(4.1.10)}$$

La ecuación (4.1.10) es válida para columnas cuyos bordes son rectos y convergen hacia un punto. Si la columna fuera por ejemplo con bordes de forma parabólica, la manera de encontrar la relación de esbeltez, sería de forma similar, e integrando expresiones cada vez más complejas.

El planteo para bordes parabólicos sería de la siguiente forma:



$$de = kdx / r \quad (4.1.2)$$

$$de = kdx / \sqrt{h/12} \quad (4.1.3)$$

Para obtener h en función de x se cumple en la figura 4.1.3c :

$$h/2 = ax^2 \sim h = 2ax^2$$

Substituyendo en la ec(4.1.3):

$$de = kdx / \sqrt{(2ax^2) / 12} \qquad de = kdx / \sqrt{(ax^2) / 6}$$

integrando:

$$e = k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} dx / \sqrt{ax^2/12} = k \int_{x=L1}^{x=L1+L2} \sqrt{6} dx / \sqrt{ax^2} = k \sqrt{6} \int_{x=L1}^{x=L1+L2} dx / \sqrt{ax^2}$$

$$e = (k \sqrt{6}) / \sqrt{a} \int_{x=L1}^{x=L1+L2} dx / x = (k \sqrt{6}) / \sqrt{a} (\ln |L1+L2| - \ln |L1| + c)$$

aplicando las condiciones de frontera : $e=0 ; L2=0 ; c=0$

$$e = (k \sqrt{6}) / \sqrt{a} (\ln |L1+L2| - \ln |L1|) \quad ec(4.1.12)$$

obsérvese que la constante a depende del grado de la curva de contorno o borde del perfil y orientación de la columna.

Es de observarse que para cada caso especial existe una expresión de esbeltez diferente que se establece con el procedimiento ya utilizado, también tómesese en cuenta que las expresiones 4.1.10 y 4.1.12 fueron definidas para secciones cuadradas, pero de la misma manera se pueden obtener expresiones similares para columnas de sección redonda.

4.2 Análisis Estructural:

4.2.1 Análisis de Marcos compuestos por Miembros no Prismáticos por el Método de Distribución de Momentos (Método de Cross y Analogía de la Columna).

4.2.1.1 Generalidades.

Básicamente, la aplicación de distribución de momentos al análisis de un marco continuo, compuesto total o parcialmente de miembros no prismáticos, es exactamente la misma que si el marco estuviese compuesto totalmente de miembros prismáticos. Los cálculos detallados, previos a la distribución misma de momentos, si son completamente diferentes.

Como ya se sabe, en el método de distribución de momentos para elementos prismáticos, antes de entrar a la distribución de momentos, se determinan las rigideces de sus miembros, factores de distribución, momentos fijos; que son necesarios en el método, para determinar la distribución de momentos en los nudos de la estructura, este paso, cuando sus miembros no son prismáticos se complica un poco más, puesto que poseen más variables que limitan su comportamiento estructural y por lo tanto tienen un análisis un poco más complejo.

Los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte para miembros no prismáticos, se calculan por métodos y fórmulas diferentes de las que se aplican a miembros prismáticos.

También, el cambio en rigidez en un extremo del miembro no prismático, cuando el extremo opuesto se reduce de una condición fija a un apoyo articulado, no es igual que en el caso de un miembro prismático. Así mismo, cuando un extremo de un miembro no prismático se desplaza lateralmente con respecto al otro extremo, los momentos de empotramiento inducidos, deben determinarse en forma diferente que para un miembro prismático.

Los métodos y fórmulas necesarios para calcular estos datos, se desarrollarán en las secciones siguientes.

Es necesario saber qué tanto columnas y vigas son miembros estructurales, y que los conceptos de Factor de transporte, rigideces son variables dependientes de la geometría del miembro y no de la forma en que éste trabaje, siendo esto lo que distingue a un miembro del otro.

Los momentos fijos por otra parte dependen del estado de carga, longitud del miembro, no de la forma o tamaño de la sección del miembro y actúan también en una forma independiente en el análisis.

4.2.1.2 Rigidez y factores de transporte por la analogía de columna.

A continuación se pretende explicar cómo se aplica el método de la analogía de la columna para miembros no prismáticos, haciendo de nuevo la aclaración que una columna es un miembro estructural cualquiera y que para el método de Cross todos los elementos se conciben como miembros estructurales.



FIG 4.2.1.2.1

Supóngase que la rigidez K_a y el factor de transporte C_a van a calcularse para el miembro de la figura 4.2.1.2.1 por el uso de la analogía de la columna. Si se hace girar el extremo A 1rad, el momento desarrollado en A será, por definición, la rigidez absoluta K_a y el Momento desarrollado en B será $C_a K_a$. La viga deformada será como se muestra en la figura 4.2.1.2.2 (la rotación de A está exagerada).

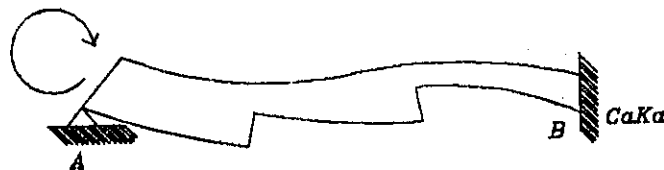


FIG 4.2.1.2.2

La columna análoga estará cargada con los esfuerzos de flexión de este miembro deformado si han de evaluarse la rigidez y factores de transporte. La dificultad estriba en que K_a y C_a no se conocen y por lo tanto, la intensidad de carga de la columna no puede determinarse. Sin embargo, puede substituirse una carga equivalente.

Puesto que en la figura 4.2.1.2.2 el extremo B es fijo, la suma algebraica de todas las deformaciones por flexión debe ser 1rad. Además, debido a que no hay movimiento vertical del extremo A, entonces, por el método de área de momentos, el primer momento de todas las deformaciones por flexión con respecto a A, debe ser cero. En consecuencia, la carga equivalente de la columna análoga será una concentración de 1rad colocada en el extremo A. Así pues, independientemente de la forma de la viga, siempre que se requieran rigideces y factores de transporte se coloca una concentración de 1rad sobre la columna análoga en el extremo correspondiente al extremo girado del miembro.

En este caso, no es necesario cortar la estructura real para hacerla determinada, puesto que la carga equivalente sobre la columna análoga puede determinarse completamente, como se ha explicado antes, sin este corte.

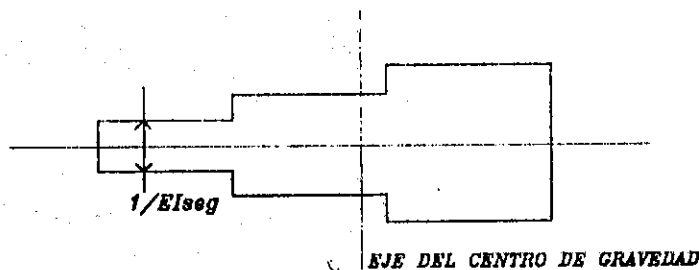


FIG 4.2.1.2.3

Si la columna análoga se proporciona como se muestra en la fig 4.2.1.2.3; esto es, si el ancho de cada segmento de la columna se toma como $1/EI_{seg}$, donde EI_{seg} es el momento de inercia del segmento correspondiente al miembro; y si se aplica una carga unitaria de 1rad en A, entonces

$$K_{ab} \text{ Abs} = f_a = 1/A + (1 \cdot e \cdot Ca) / I \quad \text{ec(4.2.1.2.1)}$$

donde :

f_a = Esfuerzo de fibra en la columna A.

A = Área de la columna análoga.

I = Momento de inercia del área elástica de la columna con respecto al eje del centro de gravedad de esa área.

e = Excentricidad de la carga unitaria.

La ecuación 4.2.1.2.1 puede simplificarse como:

$$f_a = 1 / (\Sigma(1/ E_{\text{seg}} \cdot L_{\text{seg}}))$$

$$+ (1 \cdot e \cdot Ca) / \Sigma[(1/ (E_{\text{seg}} \cdot L_{\text{seg}}^3) / 12) + (1/ E_{\text{seg}} \cdot L_{\text{seg}}) \cdot x_{\text{seg}}^2)] \quad \text{ec(4.2.1.2.2)}$$

Simplificando:

$$f_a = 1 / \Sigma[(1/EBd_{\text{seg}}/12)L_{\text{seg}}]$$

$$+ (1 \cdot e \cdot Ca) / \Sigma(((1/EBd_{\text{seg}}/12)L_{\text{seg}}^3) / 12 + ((1/EBd_{\text{seg}}^3/12)L_{\text{seg}}) \cdot x_{\text{seg}}^2) \quad \text{ec(4.2.1.2.3)}$$

En la ecuación anterior:

I_{seg} = Momento de inercia de la sección transversal del miembro real con respecto al eje del centro de gravedad de la sección transversal de la viga en el centro del segmento del miembro real.

L_{seg} = Longitud del segmento.

B = Ancho del miembro en el centro del segmento.

d_{seg} = Peralte del miembro en el centro del segmento.

x' = Distancia del eje del centro de gravedad de la columna análoga al centro de cada segmento.

La substitución en la ec. (4.2.1.2.3) dará el valor de la rigidez absoluta.

El uso del ancho de la columna análoga como $1/EI_{seg}$ resulta, pero los resultados obtenidos en los cálculos son muy incómodos, por eso es que se modifica multiplicando por $EB_{ref}/12$, lo que equivale a dividir la ec (4.2.1.2.3.) por $EB_{dref}/12$.

El resultado de la operación es:

$$f'_a = f_a / EB_{dref}^3 / 12 \quad \text{ec 4.2.1.2.4}$$

$$F'_a = 1 / \Sigma [(d_{ref}^3 / d_{seg}^3) \times L_{seg}] + \quad \text{ec 4.2.1.2.5}$$

$$(1 \times ex \ Ca) / \Sigma [((d_{ref} / d_{seg}) \times L_{seg}) (1/12) + ((d_{ref}^3 / d_{seg}^3) \times L_{seg}) \times d_{seg}^3]$$

En la ecuación anterior, d_{ref} significa un peralte particular (no necesariamente el real del miembro en cuestión) que se usa en el multiplicador $EB_{dref}/12$ para obtener el ancho modificado de la columna análoga. El valor de este multiplicador no tiene importancia, puesto que se cancela en el último paso, al calcular la rigidez absoluta. En consecuencia, puede usarse cualquier peralte como d_{ref} . El ancho modificado o relativo de cualquier segmento de la columna análoga será:

$$d_{ref}^3 / d_{seg}^3.$$

Es importante, que f'_a sea un número proporcional a la rigidez absoluta. Resulta, obvio que:

$$Abs \ K_a = f_a = f'_a \times EB_{dref}^3 / 12 \quad \text{ec 4.2.1.2.6}$$

El valor de la rigidez absoluta para un miembro es generalmente un número grande, incómodo para los cálculos. Resulta más conveniente usar una rigidez relativa, que es proporcional a la rigidez absoluta según la relación $12/E$ y la expresión para esta rigidez queda:

$$K_a \text{ Rel} = f'_a \times B \ d_{ref}^3. \quad \text{ec 4.2.1.2.7}$$

Los efectos del cambio de unidades en que vienen expresados los diferentes términos de la ecuación 4.2.1.2.5 pueden determinarse fácilmente substituyendo dimensiones en el primer término de la ecuación. Por ejemplo, si se toma la unidad de longitud como metros, con E expresada en ton/ m², la substitución de estas unidades resultará en:

$$\text{Unidades de } f_a = (\text{ton/ m}^2) \times (\text{m}^4) \times (1/ \text{m}) = \text{ton.m}$$

Si se usan ton/ cm² y cm, el resultado es:

$$\text{Unidades de } f_a = (\text{ton/ m}^2) \times (\text{cm}^4) \times (1/ \text{cm}) = \text{ton.cm}$$

Sin embargo, si E está expresado en ton/ cm², l está expresado cm⁴ y las demás dimensiones en metros, el resultado es:

$$\text{Unidades de } f_a = (\text{ton/ cm}^2) \times (\text{cm}^4) \times (1/ \text{m}) = (\text{ton.cm}^2)/ \text{m}$$

En este último caso, la respuesta obtenida de la columna análoga debe dividirse por 100 para tener las unidades en ton.cm y por 10000 para obtenerlas en ton.m.

El factor de transporte se calcula fácilmente por la columna análoga. La ecuación 4.2.1.2.1 expresada como:

$$K_a \text{ Abs} = f_a = (1/A) + ((1 \times e \times C_a) / l)$$

Substituyendo C_b en el lugar de C_a, se convierte en:

$$f_b = (1/ A) + ((1 \times e \times C_b) / l) \quad \text{ec (4,2,1,2,8)}$$

y el valor del factor de transporte C_a será,

$$C_a = f_b / f_a.$$

En la expresión anterior, f_a y f_b son los valores absolutos. En realidad, pueden usarse valores relativos y el valor de C_a seguirá.

La aplicación específica de la analogía de la columna en el cálculo de momentos de empotramiento, rigidez y factores de traslación o transporte pueden explicarse mejor por medio de un ejemplo.

Ejemplo:

Calcular los momentos de empotramiento, rigideces absoluta y relativa y los factores de transporte para la viga de la figura siguiente, que es de concreto reforzado y que tiene un ancho uniforme de 30 cm. Asumir $E=1440000 \text{ ton/m}^2$.

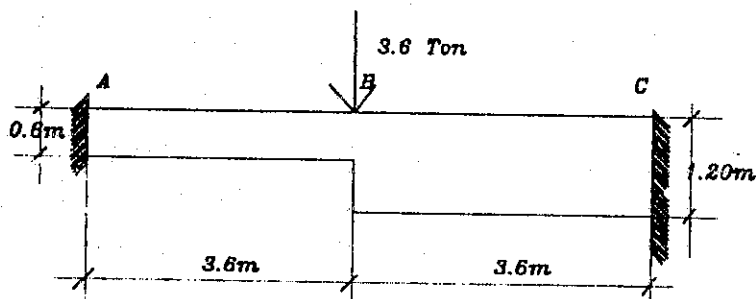


FIG 4.2.1.2.4

La viga se cortará, quitando los momentos en cada extremo. El diagrama de M se muestra en la figura siguiente como intensidad de carga sobre la sección transversal de la columna análoga. Los momentos que causan compresión sobre el lado superior de la viga se considerarán positivos. El peralte de 0,6m se usará como peralte de referencia.

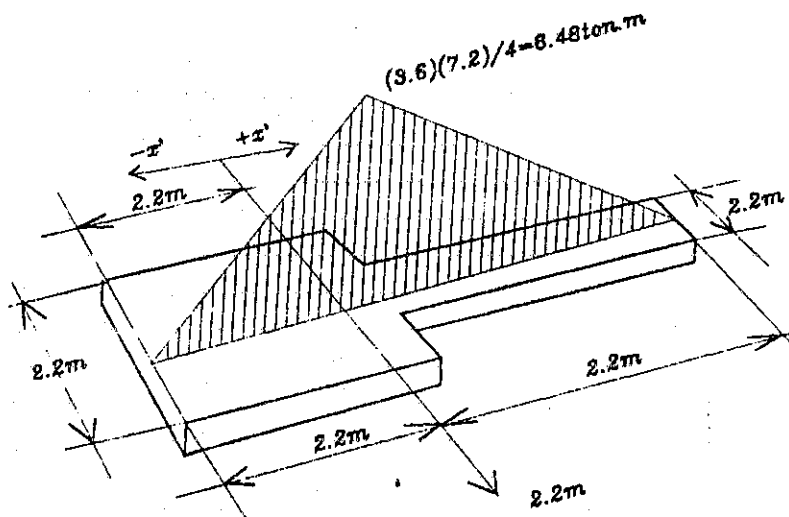


FIG 4.2.1.5

Los cálculos para localizar el eje del centro de gravedad y para calcular el momento de inercia del área elástica con respecto a este eje se muestra en la tabla siguiente:

segmento	L(m)	Ancho Rel	A	x(m)	Ax	x'(m)	l _{cg}	Ax'
AB	3,6	1	3,6	1,8	6,5	-0,4	3,89	0,57
BC	3,6	0,125	0,45	5,4	2,4	+3,2	0,48	4,60
Σ			4,05		8,9		4,37	5,17

$$X_0 = 0,891 / 0,405 = 2,2\text{m}$$

$$l_y = 4,37 + 5,17 = 9,55$$

La tabla siguiente se usará para calcular la carga elástica total y el momento de esta carga con respecto al eje y.

segmento	A	M(medio)	W	x'w	My
AB	3,6	3,24	11,66	0,20	2,35
BC	0,45	3,24	1,46	2,60	3,79
Σ	4,05		13,12	6,14	

Usando la información de la tabla anterior se tiene:

$$M_r = W/A + My / l_y(X) = (13,12 / 4,05) + (+6,14 / 9,55)(X) = +3,24 + 0,64x \text{ ton.cm.}$$

Este es el momento resistente para una columna con las cargas de servicio aplicadas.

$$M_a = +3,24 + 0,64(-2,2) = +3,24 - 4,73 = +1,82 \text{ ton-m.}$$

$$M_b = +3,24 + 0,64(+5,0) = +3,24 + 10,7 = +6,45 \text{ ton-m.}$$

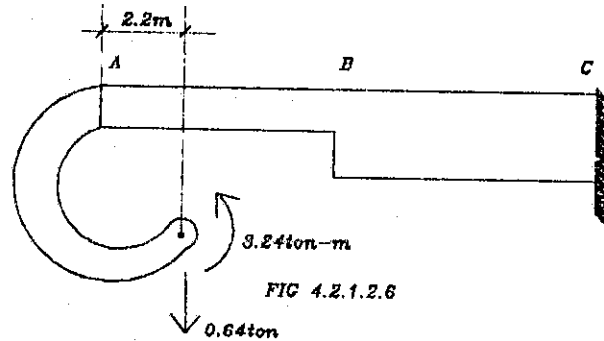
Es obvio que los esfuerzos en todas las fibras de la columna tendrán signo positivo. El signo del esfuerzo de la fibra de la columna M_r en B debe ser negativo de manera que, cuando se combina con $M(+6,48 \text{ ton-m})$ en B, el valor resultante para M será menor que M. Resulta aparente, que deben invertirse los signos y los valores correctos para los momentos son $M_a = -1,82$

ton-m y $M_c = -6,45$ ton-m. Estos signos concuerdan con la suposición original de que un momento que causa compresión en el lado superior de la viga se considera como positivo.

Con los signos correctos, la expresión para M_r es ahora:

$$M_r = -3,24 - 0,64x.$$

Obsérvese que las componentes de reacción redundante representadas en esta expresión actuarán como se muestra en la figura 4,2,1,2,6. Puede considerarse fijo cualquier extremo, con el brazo unido al extremo opuesto. Sin embargo, el extremo A se ha considerado como fijo, en el brazo conectado en C, el sentido del par de 3,24 ton-m habría sido en el sentido de las manecillas del reloj y la fuerza de 0,63 ton habría actuado hacia arriba.



Algo interesante es que si la viga original se hubiera cortado, suprimiendo el apoyo de la izquierda, el diagrama de M hubiese sido como se muestra en la figura 4.2.1.2.7(a) y las reacciones redundantes representadas en la ecuación de M_r habrían tenido los valores, y se habrían podido considerar como actuando según la figura 4.2.1.2.7(b) o la fig 4,2,1,2,7(c). Sin embargo, si se hubiera cortado la viga original todo apoyo en C, el diagrama de M sería como el de la fig 4,2,1,2,8(a) y las reacciones redundantes que actúan en el centro de gravedad de las áreas elásticas podría considerarse actuando como se muestra en la fig 4,2,1,2,8(b) o como en la fig 4,2,1,2,8(c).

Para determinar K_a y C_a se considera actuando hacia abajo en A una concentración de 1 rad sobre la columna análoga. Los valores relativos para los esfuerzos de fibras en la columna en A y C se calculan como sigue:

$$f'_a = (1/4,05) + ((-2,2)(-2,2)/9,55) = +0,753$$

$$f'_c = (1/4,05) + ((-2,2)(+5,0)/9,55) = -0,907$$

$$C_a = -0,907 / +0,753 = -1,20$$

El signo negativo indica que el signo del esfuerzo en la fibra superior de la viga en C, causado por el momento inducido en C será el opuesto del signo del esfuerzo en la fibra superior en A, causado por el momento desarrollado en A.

$$K_{aRel} = f'_a \times B_{dref} = 0,753 \times 0,3 \times 0,6 = 0,0488 \text{ m}^3$$

$$K_{aAbs} = f'_a \times E B_d / 12 = K_{aRel} \times (E/12)$$

$$= 0,0488 \times (1440000/12) = 5860 \text{ ton-m}$$

Para calcular K_c y C_c , se lleva la concentración de 1rad a C sobre la columna. Los cálculos necesarios son:

$$f'_c = (1/4,05) + ((5,0)(5,0)/9,55) = +2,86$$

$$f'_a = (1/4,05) + ((5,0)(-2,2)/9,55) = -0,967$$

$$C_c = -0,967 / +2,86 = -0,316$$

y

$$K_{cRel} = f'_c \times B_{dref} = 2,86 \times 0,3 \times 0,6 = 0,185 \text{ m}^3$$

$$K_{cAbs} = f'_c \times (E B_{dref}) / 12 = K_{cRel} \times (E/12)$$

$$= 0,185 \times (1440000/12) = 22275 \text{ ton-m}$$

Una comprobación valiosa en cálculos de esta especie, está dada por el hecho de que (según se ha demostrado en el ejemplo anterior):

$$C_a K_a = C_c K_c$$

En otras palabras, el momento inducido en C por una rotación de 1rad en A (siendo C fija) es igual al momento inducido en A por una rotación de 1 rad en C (con A fija).

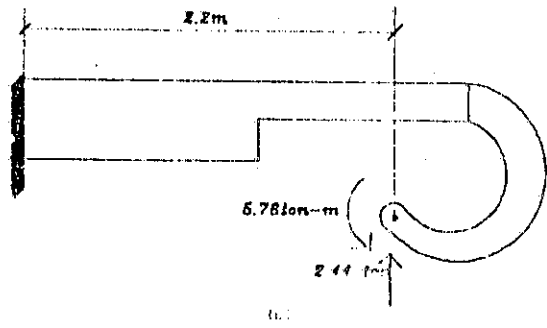
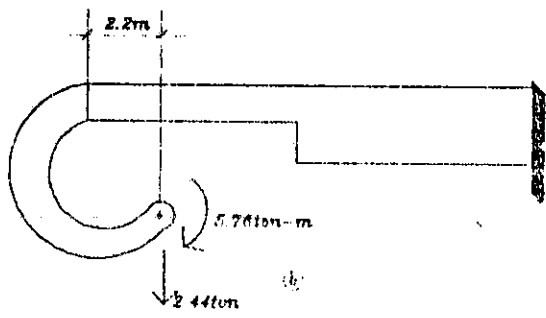
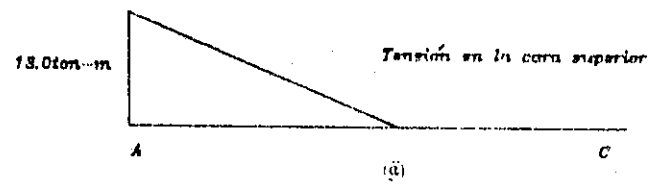
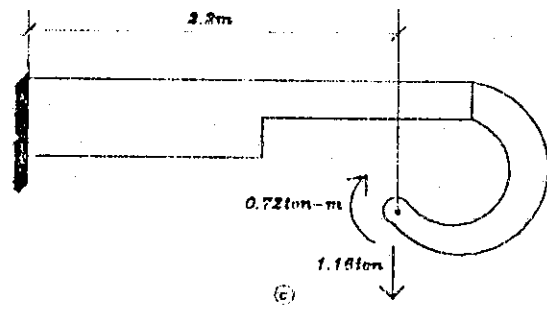
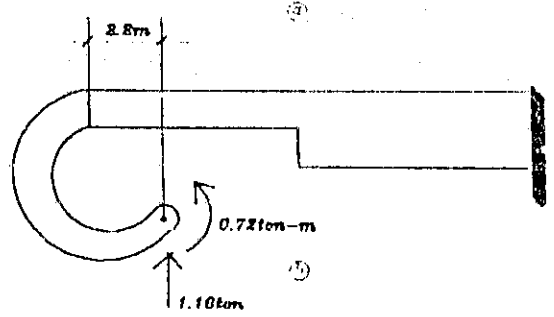
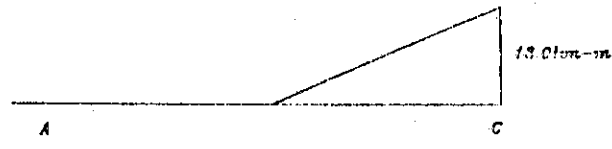


FIG. 4.5.1.2.5

FIG. 4.5.1.2.6

La verdad de lo anterior resulta también de la comparación de los cálculos para f'_c para una carga de 1rad en A, con los cálculos para f'_a para una carga de 1rad en C. En el problema anterior,

$$1,20 \times 0,0488 = 0,316 \times 0,185 \\ 0,0585 = 0,0585$$

esto quiere decir que los valores calculados son satisfactorios.

4,2,1,3 Curvas para los factores de rigidez y transporte.

Cuando es necesario calcular los factores de rigidez y transporte para miembros no prismáticos usando el método enunciado anteriormente, se aprecia que es una forma muy laboriosa. En el compendio que la Portland Cement Association ha hecho accesible información que elimina y acorta este proceso.

En este compendio, la dimensión de la sección transversal de la columna corresponde al claro del miembro sujeto a flexión y se denominará como la longitud de la columna análoga. Bajo estas condiciones la ec 4,2,1,2,5 indica que f'_a será inversamente proporcional a la longitud de la columna análoga. Entonces, si f'_a1 representa el esfuerzo de la columna análoga de longitud unitaria, entonces, se cumpliría lo siguiente:

$$f'_a1 = L f'_a \quad \text{o} \quad f' = f'_a1 / L$$

Esto quiere decir que si se sigue la base de longitud unitaria de la columna análoga, la longitud L de cualquier miembro puede eliminarse en el cálculo de la información.

Además de ésta simplificación existe una, adicional:

Se sabe que se puede tomar cualquier peralte de referencia d_{ref} . Con objeto de definirlo se toma el mínimo y se designará como d_{min} y la expresión 4,2,1,2,4 quedaría de la siguiente manera.

$$f'a = f_a/EBd_{ref}/12 \quad \text{se transforma en:} \quad f'=f'a1/ L = f_a/ EBd_{min}/12$$

entonces la rigidez absoluta quedaría como:

$$K_a \text{ Abs} = f_a = (f'a1/ L) \times (EBd_{min}/12)$$

observar que el valor de esta rigidez es directamente proporcional a d_{min} y B en el segundo paréntesis. Si se supone estos dos valores 1cm o 1m simultáneamente $f'a1$ podría aplicarse a cualquier tipo de elemento simplemente multiplicando por los valores efectivos de d_{min} y B . Este valor de $f'a1$ se identificará como k y la expresión de la rigidez absoluta se convierte en:

$$K_a \text{ Abs} = k_a E d_{min} / 12L$$

donde k_a = valor modificado de $f'a1$

que se podría escribir de otra manera:

$$K_a \text{ rel} = k_{admin} / L$$

El factor k puede considerarse como un número adimensional, relacionado con la rigideces absoluta y relativa de un miembro, según los datos anteriores.

En realidad hay que recordar que es el esfuerzo de la columna análoga, bajo una carga de 1rad cuando la columna análoga corresponde a un elemento en particular, que se puede nombrar como elemento de referencia. En este caso las unidades de k pueden considerarse m o cm y B , d_{min} y L deben considerarse como números sin dimensiones.

4,2,1,4 Rigidez de un miembro no prismático con el extremo lejano articulado.

Se sabe que la rigidez absoluta de un miembro prismático con el extremo fijo es $4EI/L$. Se sabe también que si el extremo alejado es articulado la rigidez es $3EI/L$ que es menor que la anterior. De lo anterior, se puede decir que para miembros que tengan los extremos terminales simplemente apoyados, la aplicación del método de distribución de momentos se vuelve más sencilla.

Notar que la rigidez del elemento prismático simplemente apoyado puede estar reducida por un factor de reducción. Para elementos no prismáticos este valor existe, sólo que es una cantidad variable. A continuación se derivará una expresión para encontrar este factor aplicado a elementos no prismáticos.

Considérese el miembro de la fig 4,2,1,4,1 y supóngase que se tiene fijo el extremo B, como se muestra en la figura.

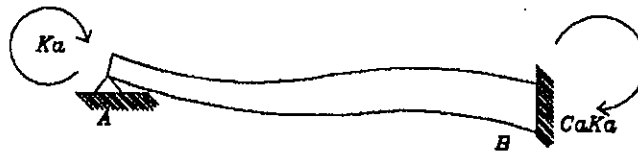


FIG 4.2.1.4.1

Se aplica un momento en A para causar una rotación en el extremo de 1rad. Este momento se designará por M_u , y será igual a K_a , la rigidez absoluta en A. Puesto que el factor de transporte de A a B es C_a , el momento inducido en B es $C_a K_a$. Estos momentos se muestran como externos al miembro fig 4,2,1,4,1. Sin embargo, el apoyo B no es fijo y así el momento inducido $C_a K_a$ en el extremo B debe de cancelarse. Esto se obtiene redistribuyendo los apoyos del miembro como se muestra en la fig 4,2,1,4,2, donde el apoyo B se reduce a un apoyo simple y el extremo A es fijo en su posición girada previamente de 1rad.

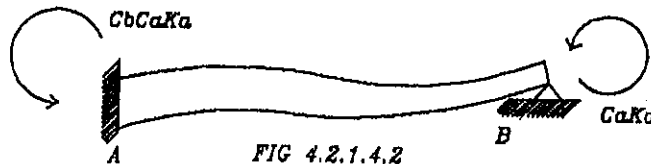


FIG 4.2.1.4.2

El momento aplicado en B en la fig 4,2,1,4,2 es $C_a K_a$, actuando en una dirección opuesta al $C_a K_a$ inducido en la fig 4,2,1,4,1. El momento inducido en A sería $C_b C_a K$, donde C_b es el factor de transporte de B a A. Si se agregan los momentos de las figuras 4,2,1,4,1 y 4,2,1,4,2, el resultado es como se muestra en la figura 4,2,1,4,3.

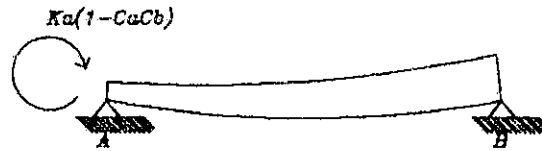


FIG 4.2.1.4.3

y la rigidez absoluta en A para el miembro AB con un apoyo simple en B es:

$$K_a(1-C_a C_b)$$

Es obvio que el valor en el extremo B con un apoyo simple en A sería:

$$K_b(1-C_a C_b)$$

El valor de $(1-C_a C_b)$ sería el factor de corrección, y puede ser aplicado tanto a la rigidez absoluta como a la relativa.

4,2,1,5 Momentos de empotramiento inducidos en un miembro no prismático por el desplazamiento relativo de los extremos del miembro.

Cuando un miembro prismático se desplaza lateralmente una distancia Δ con respecto de otro extremo, evitándose la rotación de los extremos del miembro, los momentos de empotramiento resultantes de este desplazamiento estarán dados por $6EI\Delta/L$. A continuación se desarrollará una expresión similar para miembros no prismáticos.

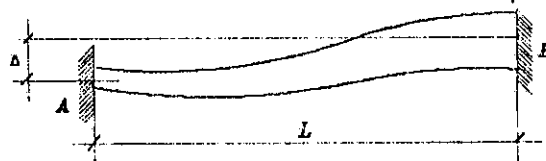


FIG 4.2.1.5.1

El miembro deformado de la figura resulta de la sobreposición de los efectos de tres acciones sucesivas. En forma similar al caso anterior, su posición inicial, los dos extremos del miembro se encuentran al mismo nivel. La primera acción es bajar al extremo A una distancia Δ con respecto a B, sin restricción en los extremos. Resulta entonces la fig 4,2,1,5,2. Ahora se aplica un momento externo suficiente para traer el extremo A a una pendiente de cero, en A. El ángulo que debe girar A para llegar allí sería Δ/L radianes y el momento necesario para efectuar esta rotación sería $K_a \Delta/L$, donde K_a es la rigidez absoluta del miembro AB. Cuando se aplica este momento en A, el extremo B se mantiene en la misma posición girada que tenía en la figura.

Esto resulta en un momento inducido en B igual a $C_a K_a \Delta/L$, donde C_a es el factor de transporte de A a B ver fig 4,2,1,5,3.

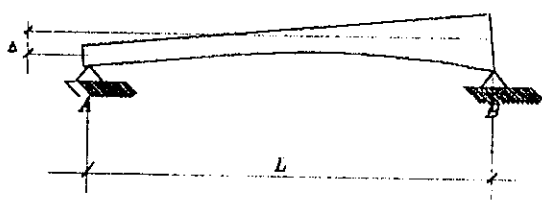


FIG 4.2.1.5.2

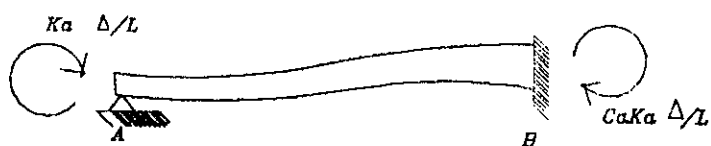


FIG 4.2.1.5.3

Considérese ahora que el miembro de la fig 4,2,1,5,3 se sujeta a un momento adicional externo en el extremo B, de magnitud suficiente para girar este extremo un ángulo Δ/L rad, para traerlo a la horizontal que se alcanzó en la fig 4,2,1,5,3. Los momentos externos desarrollados e inducidos por esta rotación del extremo B se muestran en la figura 4,2,1,5,4.

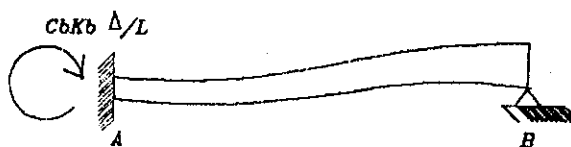
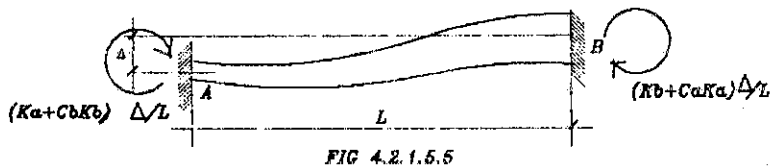


FIG 4.2.1.5.4

Si los momentos de las figuras 4,2,1,5,3 y 4,2,1,5,4 se superponen el resultado de la suma serían las expresiones deseadas para los momentos de empotramiento resultantes del desplazamiento Δ , obteniendo la fig 4,2,1,5,5.



Estas expresiones pueden simplificarse por el Teorema de Maxwell-Betti.

$$CaKa = CbKb$$

El teorema dice así: El momento inducido en A por una rotación unitaria de B es igual al momento inducido en B por una rotación unitaria en A.

Aplicando este teorema la expresión para el momento de empotramiento en A se reduce a:

$$Fa = (Ka + CbKb)\Delta / L = (Ka + CaKa)\Delta / L = Ka(1 + Ca) \Delta / L.$$

y la expresión para el momento en B sería.

$$Fb = (Kb + CaKa)\Delta / L = (Kb + CbKb)\Delta / L = Kb(1 + Cb) \Delta / L.$$

De todo lo dicho anteriormente, se deduce que para encontrar las rigideces, factores de distribución y transporte que dependen únicamente del dimensionamiento de los miembros, sin importar su ubicación en la estructura, se pueden utilizar las curvas de la Portland Cement Association, adaptándolas al caso de las columnas y resolver la estructura como miembros que interactúan unos con otros.

4,2,1,6 Ejemplo.

Para ilustrar todo lo anteriormente dicho, se realizará un ejemplo completo con miembros de sección variable tanto en vigas como en columnas.

Las dimensiones supuestas para un puente de concreto reforzado se muestra en la figura 4,2,1,6,1. Se requiere encontrar el valor máximo del momento M_{bc} para una franja de puente de 1m de ancho (normal al plano del papel) causada por una carga uniforme de 0,15 ton-m y dos concentraciones de 0,9 ton cada una, colocando todas las cargas de manera que arrojen el momento máximo requerido. Además, se indica (aproximadamente) que una concentración deberá colocarse a 4,5m de B en el claro AB y 4,5 m de B en el claro BC. Encontrar el valor máximo de M_{bc} .

nota : Incluir la corrección para movimiento lateral de la estructura.

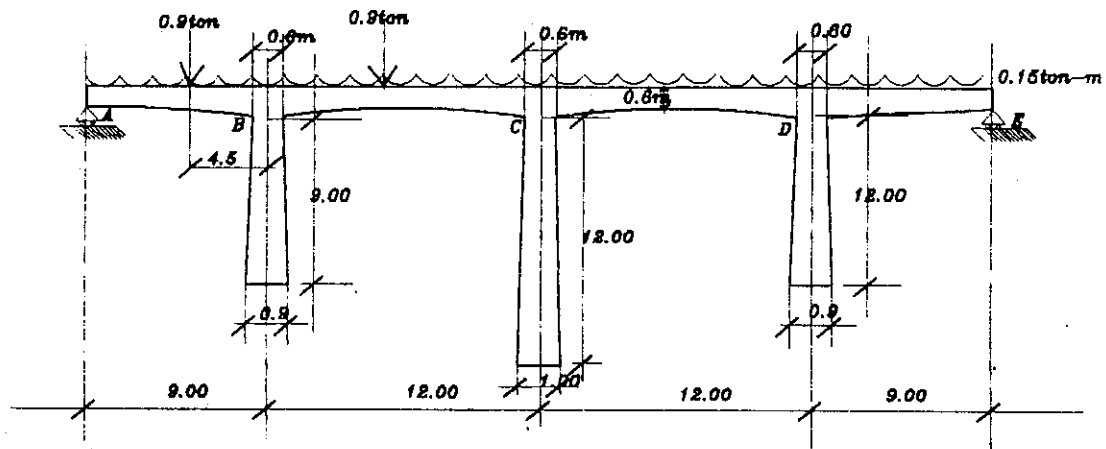


FIG 4.2.1.6.1

Momentos de Empotramiento:(por carga concentrada)

tramo AB.

$$v=4,5/ 9,0=0,5 , a=4,5/ 9,0=0,5 , d_{min}/ d_{max}=0,6m/1,2m=0,5$$

$$F_{ab} = 0,08 \times 0,9 \text{ton} \times 9,0 \text{m} = 0,648 \text{ ton-m.}$$

$$F_{ba} = 0,24 \times 0,9 \text{ton} \times 9,0 \text{m} = 1,944 \text{ ton-m.}$$

Momentos de Empotramiento:(por carga distribuida).

tramo AB.

$$F_{ab} = 0,064 \times 0,15 \text{ ton-m} \times (9\text{m})^2 = 0,77 \text{ ton-m.}$$

$$F_{ba} = 0,13 \quad = 1,579 \text{ ton-m.}$$

Momentos de empotramiento:(por carga concentrada).

Tramo BC.

$$v=4,5/12=0,375, a=4,5/12=0,375, d_{min}/d_{max}=0,6m/1,2m=0,5$$

$$F_{bc}=0,20 \times 0,9 \text{ ton} \times 9,0 \text{ m} = 1,62 \text{ ton-m.}$$

$$F_{cb}=0,09 \times 0,9 \text{ ton} \times 9,0 \text{ m} = 0,729 \text{ ton-m.}$$

Momentos de empotramiento:(por carga distribuida).

$$F_{bc} = 0,102 \times 0,15 \text{ ton} \times (9,0 \text{ m})^2 = 1,239 \text{ ton-m.}$$

$$F_{cb} = 0,102 \times 0,15 \text{ ton} \times (9,0 \text{ m})^2 = 1,239 \text{ ton-m.}$$

Factores de Rigidez y Transporte.(extremo acartelado).

$$C_{ba} = C_{de} = 0,43 \quad k=9$$

$$K_{ba \text{ rel}} = k B d_{\min}^3 / L = (9 \times 1 \text{ m} \times (0,6)^3) / 9 = 0,216 = K_{de}.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} C_{ab} K_{ab} &= C_{ba} K_{ba} \\ 0,82(0,1140) &= 0,43(0,216) \\ 0,093 &= 0,092 \end{aligned}$$

Notar que los valores anteriores son muy aproximados, y que pueden presumirse iguales.

Factores de Rigidez y Transporte.

$$C_{bc} = C_{cb} = C_{cd} = C_{dc} \quad K=12 \quad C=0,69.$$

$$K_{bc \text{ rel}} = 12 \times 1,00 \text{ m} \times (0,6)^3 / 12 = 0,216.$$

$$K_{cb \text{ rel}} = 12 \times 1,00 \text{ m} \times (0,6)^3 / 12 = 0,216.$$

Miembros de BF, DH.(columnas).

$$a = 1, \quad d_{min}/d_{max} = 0,6/0,9 = 0,6666$$

$$C_{bf}=C_{dh}=0,70 \quad k=5,5$$

$$K_{bf \text{ rel}}=k_{Bd} \min / L = (5,5 \times 1 \text{ m} \times (0,6)^3) / 9 = 0,132 = K_{dh} \quad \text{para el extremo reducido.}$$

$$C_{fb}=C_{hd}=0,37 \quad K=10,10.$$

$$K_{fb \text{ rel}}=k_{Bd} \min / L = (10,10 \times 1,00 \text{ m} \times (0,6)^3) / 9 = 0,2424 = K_{hd} \quad \text{extremo inferior.}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} C_{bf}K_{bf} &= C_{fb}K_{fb} \\ 0,70(0,132) &= 0,37(0,2424) \\ 0,09 &= 0,09 \end{aligned}$$

Miembros CG.

$$a=1, \quad d_{\min} / d_{\max} = 0,6 / 1,00 = 0,6$$

Extremo reducido.

$$C_{cg}=0,75 \quad k=6,00$$

$$K_{cg \text{ rel}} = (6,00 \times 1,00 \times 0,6^3) / 12 = 0,10$$

Extremo inferior.

$$C_{gc}=0,34 \quad k=11,90$$

$$K_{gc \text{ rel}} = (11,90 \times 1,00 \times 0,6^3) / 12 = 0,214$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} C_{gc}K_{gc} &= C_{cg}K_{cg} \\ 0,34(0,214) &= 0,75(0,10) \\ 0,07 &= 0,07 \end{aligned}$$

Según se demostró previamente para marcos con miembros prismáticos, el proceso de balanceo se acortará considerablemente si las rigideces relativas K_{ba} y K_{de} se reducen a manera de corregir para la condición de apoyos simples en A y E. La corrección se efectúa fácilmente por medio de la fórmula que se derivó por último.

$$\begin{aligned} K_{ba \text{ Rel revisada}} &= K_{ba \text{ Rel}}(1 - C_{ab}C_{ba}) \\ &= 0,216(1 - 0,82 \times 0,43) \\ &= 0,1398 \end{aligned}$$

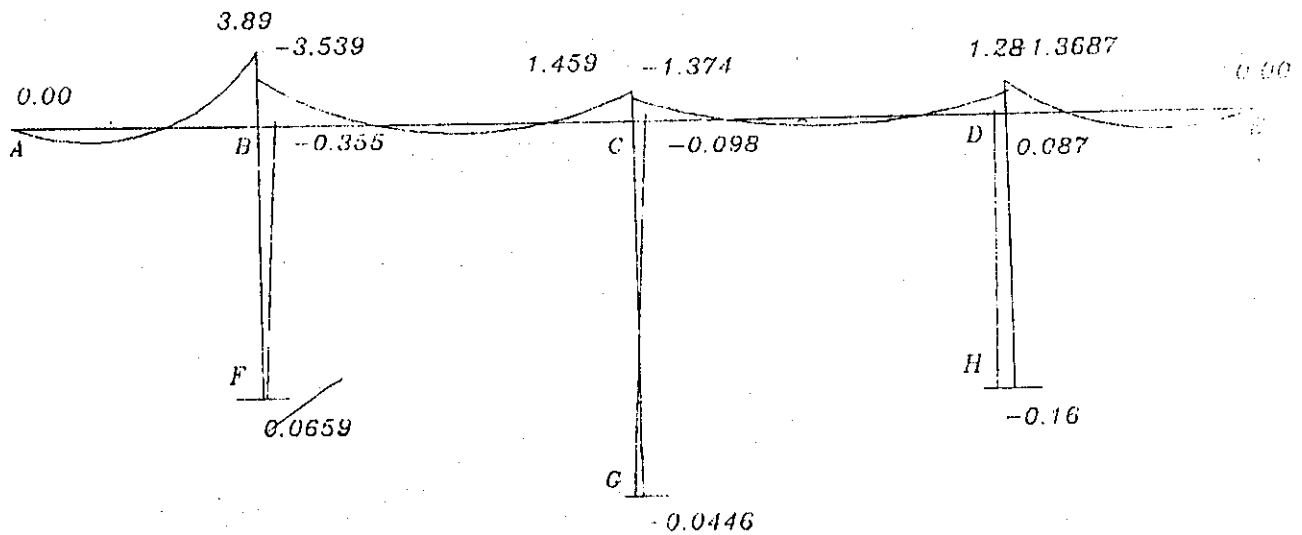


DIAGRAMA 4.2.1.6.1

Verifíquese la manera en que se incluyen los cambios de sección en cualquier elemento estructural. Apréciase la distribución del momento flexionante.

4.2,2 Deformación en Elementos de Sección Variable.

Para el estudio de las deformaciones en esta clase de elementos se hace necesario recordar algo sobre la deducción de la fórmula de flexión.

Esta deducción se basa en las siguientes suposiciones:

1. Las secciones planas del elemento en flexión, inicialmente planas, permanecen planas.
2. El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
3. El módulo elástico es igual a tensión que a la compresión (concreto).
4. El elemento es inicialmente recto, antes de cargarse.
5. Su sección será variable a lo largo de su longitud, bajo ciertas restricciones que se enumeran con más detalle en la sección 4.2.3

Se asume que las deformaciones elásticas junto con la ley de Hooke determinan la forma de la distribución de esfuerzos, y mediante las condiciones de equilibrio se establece la relación entre los esfuerzos y las cargas.

Los esfuerzos normales producidos por el momento flexionante se llaman esfuerzos por flexión y las relaciones entre estos esfuerzos, el momento flexionante y se expresan mediante la fórmula de flexión.

Considérese pues la sección de un elemento de sección variable sometido a la flexión:

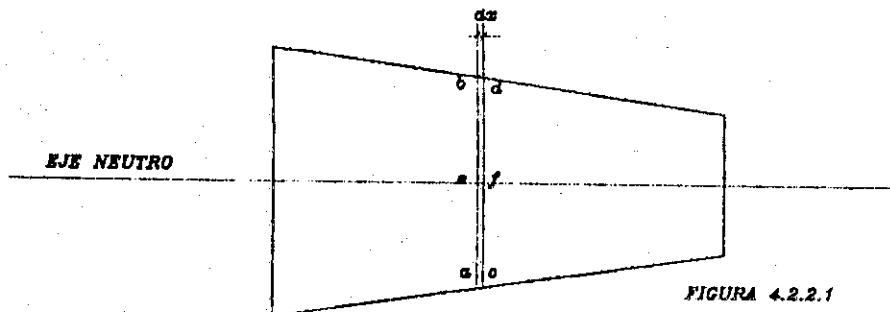


FIGURA 4.2.2.1

La figura 4,2,2,1 muestra dos secciones adyacentes ab, y cd separadas una distancia dx. Debido a que dx es una distancia muy pequeña, la variación entre el área de las secciones transversales es despreciable, por lo tanto el giro de una con otra convergen a un mismo punto, a este pequeño giro se le llamará $d\theta$. Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas.

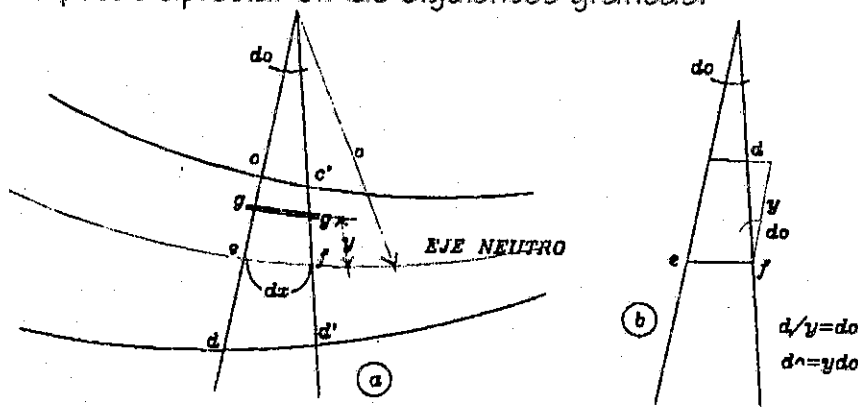


FIGURA 4.2.2.2

De acuerdo con la hipótesis 1, las secciones permanecen planas y sin distorsión, como se aprecia en la figura la fibra cc' se acorta la misma distancia que la fibra $d'd$ sólo que una a compresión y la otra a tensión, respectivamente.

Como ya se sabe todas las fibras pertenecientes al plano ef, no están sometidas a ningún esfuerzo y por eso su longitud es invariable.

donde se substituye $\sigma = E\epsilon$ y se obtiene $\int E\epsilon y dA = 0$

Haciendo $\sum y = 0$, $V = V_r$ donde $V_r = \int \tau xy dA$

donde $V_r =$ fuerza de corte resistente.

Haciendo $\sum z = 0$, donde $\int \tau xy dA = 0$

Haciendo $\sum y = 0$, donde $\int Z(\sigma x dA) = 0$

se substituye $\sigma_x = E\epsilon$ resulta $\int E\epsilon y dA = 0$

Haciendo $\sum M_z = 0$, requiere que el momento flexionante sea equilibrado por el momento resistente, es decir $M = M_r$ M_r es $\int y(\sigma x dA)$, por tanto $M = \int y(\sigma x dA)$ substituyendo $\sigma_x = E\epsilon$ resulta $M = E \int y^2 dA$.

Dado que la fórmula fué deducida para un elemento diferencial y para dos secciones, que por su separación dx se presumen iguales, también se puede sacar de la integral E , puesto que seguirían siendo valores constantes.

$$M = E \int y^2 dA$$

y como el valor de $\int y^2 dA$ es el momento de inercia del área con respecto a el eje neutro, se tiene:

$$M = EI / \rho \quad ; \quad 1/\rho = M / EI$$

describiendo que el momento resistente de un elemento a Flexión es proporcional a su sección, (fórmula de flexión). Puesto que la curvatura es el recíproco del radio de curvatura.

$$E / \rho = M / I = \sigma / y \text{ ecuación A}$$

de donde el esfuerzo por flexión es igual a:

$$\sigma = My / I$$

Estas dos ecuaciones $1/\rho = M / EI$ fórmula de flexión.

$$\sigma = My / I \text{ fórmula del esfuerzo a flexión.}$$

que ayudarán para encontrar más tarde las deformaciones en un miembro que trabaje a flexión de sección variable.

Para encontrar la forma de la elástica en una viga de sección variable es necesario enfocar un método que sea lo suficientemente manejable.

Un método muy útil y sencillo para determinar la pendiente y deflexión en elementos que trabajan a flexión, es el método del área de momentos, en el que intervienen el área del diagrama de momentos y el momento que produce dicha área.

El método es indicado para la determinación de la pendiente o de la deflexión en puntos determinados con respecto de otros. Como en su utilización se ha de tener en cuenta la forma y relaciones geométricas en la elástica no se pierde el significado físico de lo que se está calculando.

La figura siguiente representa un elemento a flexión (viga) simplemente apoyado con una carga aleatoria, su deformación exagerada y el diagrama de momentos.

Al igual que en la deducción de la fórmula de deflexión, dos secciones planas adyacentes, distantes una longitud dx sobre un elemento inicialmente recto giran un ángulo $d\theta$, una, respecto a la otra, ya se tenía la ecuación,

$$1/\rho = M/EI$$

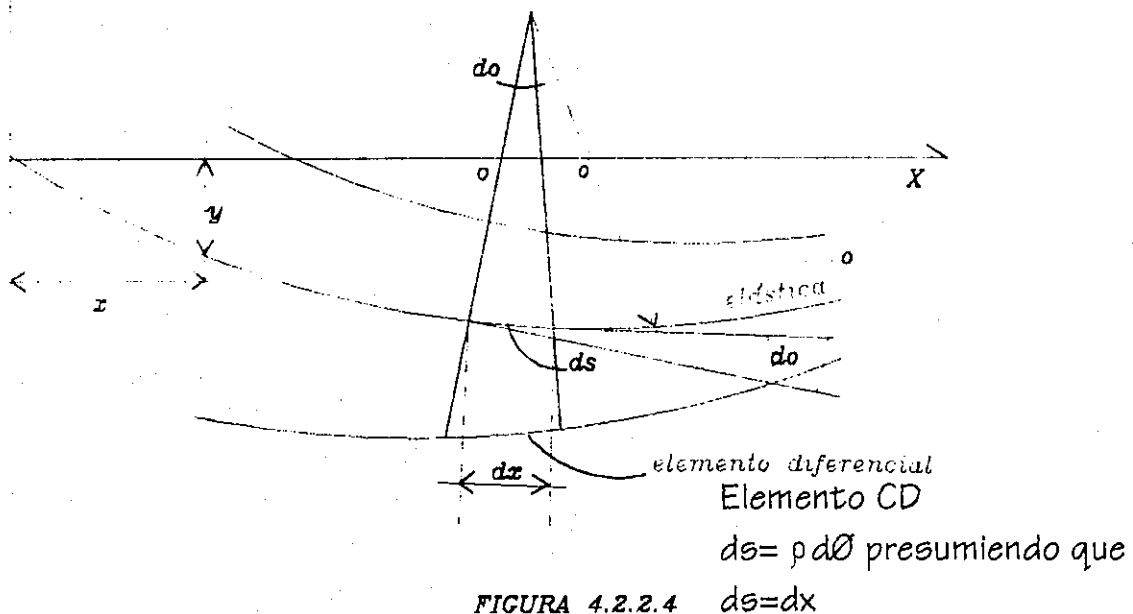


FIGURA 4.2.2.4 $ds = dx$

Diagrama de Momentos

como $ds = \rho d\theta$, $1/\rho = M/EI = d\theta/ds$ decimos

o bien $d\theta = (M/EI) ds$

y si $ds = dx$ $d\theta = (M/EI) dx$

obsérvese que esto es válido para elementos de sección variable, puesto que las secciones c y d que están separadas una distancia dx tan pequeña que no guardan diferencia una con la otra.

De la ecuación anterior se tiene:

$$\theta_{ab} = \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_b} (M/EI) dx$$

obsérvese que la distancia de B de la elástica medida perpendicular a la posición inicial de la viga es la suma de todos los segmentos dt que pueden ser considerados como un arco de radio x y ángulo $d\theta$

$$dt = x d\theta$$

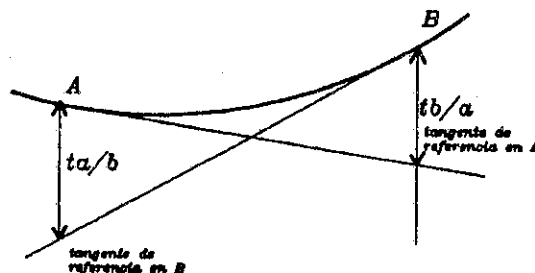
de donde $t_{B/A} = \int dt = \int x d\theta$

substituyendo este valor en la ecuación $d\theta = M/EI dx$

$$\text{se tiene : } t_{B/A} = \int_{x_a}^{x_b} x(M dx) / EI$$

obsérvese que EI permanece dentro de la integral, puesto que este término es un parámetro que varía conforme la longitud.

La longitud $t_{B/A}$ llamada a la desviación de B con respecto de una tangente trazada en A, la figura siguiente aclara la diferencia que existe entre $t_{B/A}$ y $t_{A/B}$.



Habiendo encontrado las ecuaciones. a) $\theta_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} (M/EI) dx$

$$b) t_{b/a} = \int_{x_a}^{x_b} (xM/EI) dx$$

Como ya se ha visto la inercia de la sección I no es constante en todo lo largo del elemento, y no se podría obtener un θ_{ab} o un $t_{b/a}$ sin tener los datos específicos de la manera en que la sección va variando a lo largo de su eje longitudinal.

En resumen:

Teorema 1: $\theta_{ab} = 1/EI(\text{área})_{ab}$ (para secciones constantes)

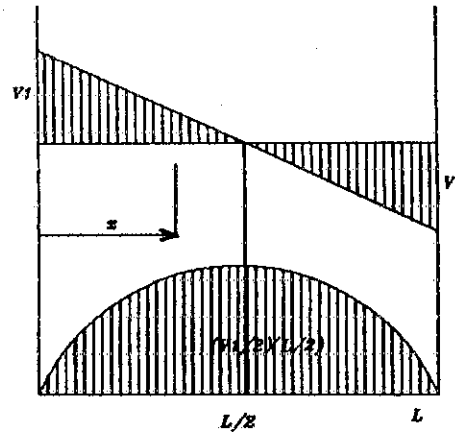
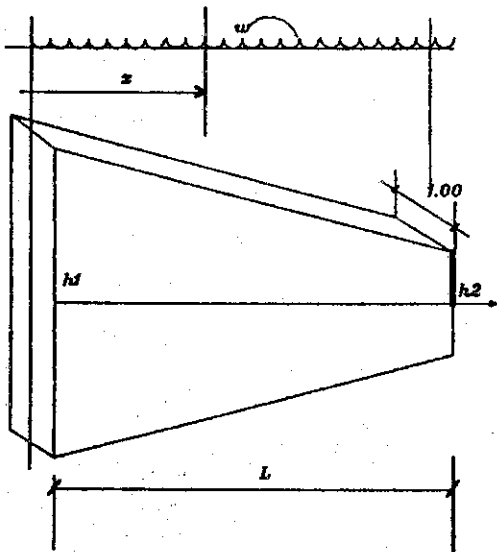
La desviación angular, o ángulo entre tangentes trazadas a la elástica entre dos puntos, es igual al producto de $1/EI$ por el área del diagrama de momentos flexionantes entre estos dos.

Teorema 2: $t_{b/a} = 1/EI(\text{área})_{ba} \cdot X_b$ (para secciones constantes)

La desviación tangencial de un punto B con respecto a la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A, en dirección perpendicular a la inicial de el elemento es igual al producto $1/EI$ por el momento con respecto a B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B, donde EI es la rigidez a la flexión, la cual es variable a lo largo de todo el elemento sometido a esfuerzos de flexión.

Estos dos teoremas son muy útiles en el análisis de la rigidez de miembros de sección variable, tema analizado más adelante.

Para aplicar todo lo antes descrito se ejemplificará el caso de una viga simplemente apoyada cuyo ancho unitario y peralte variable que se describe en la siguiente figura. La idea de analizar una viga y no una columna es la de observar un caso con más variantes, debido a que el momento que produce flexión en el elemento es variable a lo largo de ésta, al igual que I .



Se sabe de Análisis Estructural que:

$$E \frac{dy}{dx} = \int M dx / I + C1$$

Ecuación general de la pendiente.

$$E y = \iint M dx / I + C1x + C2$$

Ecuación que describe la elástica.

Se sabe también que la función que determina el Momento (M) en función de x o M(x), es igual a:

$$M(x) = \frac{wx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

Y la función que define a I(x) o inercia que depende de x se puede establecer como:

$$I(x) = \frac{(-mx+h1)^3}{12} \quad \text{donde } m = \frac{h2-h1}{L}$$

Substituyendo estas dos funciones en la ecuación general de la pendiente se obtiene:

$$E \frac{dy}{dx} = \int \frac{12wx - wx^2}{2 \cdot 2} \frac{(-mx+h)^3}{(-mx+h1)^3} + C1$$

$$E \frac{dy}{dx} = 6 \int \frac{wx(1-x)dx}{(-mx+h1)^3} + C1$$

$$\int \ln(-mx+h) dx + C_1x + C_2$$

integ 5

solución integ1: $\int \frac{dx}{(-mx+h)^2} = \frac{-1}{(-m)(-mx+h)}$

solución integ2: $\int \frac{dx}{(-mx+h)} = \frac{\ln(-mx+h)}{-m}$

solución integ3: = integ1

solución integ4: = integ2

solución integ5: $\int \ln(-mx+h) dx = (-mx+h)(\ln(-mx+h)-1)$

Substituyendo las soluciones de las Integrales se tiene:

$$E. y = \frac{wl}{6} \left(\frac{h}{-m} \left(\frac{-1}{-2(-mh+h)} + \frac{\ln(-mx+h)}{-m} \right) - \frac{w}{-m^3} \left(\frac{-h^2}{2} \frac{-1}{(-mx+h)} + \frac{2h \ln(-mx+h)}{-m} + \frac{(-mx+h)(\ln(-mx+h)-1)}{-m} \right) \right) + C_1x + C_2 \quad EC 2$$

Para encontrar los valores de las Constantes C1 y C2, se aplicarán las condiciones de frontera siguientes:

$x=0 \quad y=0$

$$0 = \frac{wl}{-m^2} \left(\frac{h}{-2} \left(\frac{-1}{(-mh)} + \frac{\ln(h)}{-m} \right) - \frac{w}{-m^3} \left(\frac{-h^2}{2} \frac{-1}{(-mx+h)} + \frac{2h \ln(h)}{-m} + \frac{(h)(\ln(h)-1)}{-m} \right) \right) + C_2$$

$$-C_2 = \frac{wl}{-m^2} \left(\frac{h}{-2} \left(\frac{-1}{(-mh)} + \frac{\ln(h)}{-m} \right) - \frac{w}{-m^3} \left(\frac{-h^2}{2} \frac{-1}{(-mx+h)} + \frac{2h \ln(h)}{-m} + \frac{(h)(\ln(h)-1)}{-m} \right) \right)$$

para $x=l \quad y=0$

$$0 = \frac{wl}{-m^2} \left(\frac{h}{-2} \left(\frac{-1}{(-m(-mL+h))} + \frac{\ln(-mL+h)}{-m} \right) - \frac{w}{-m^3} \left(\frac{-h^2}{2} \frac{-1}{(-mL+h)} + \frac{2h \ln(-mL+h)}{-m} + \frac{(-mL+h)(\ln(-mL+h)-1)}{-m} \right) \right) + C_1L + C_2$$

$$-C_1 = \frac{wl}{-m^2} \left(\frac{h}{-2} \left(\frac{-1}{(-m(-mL+h))} + \frac{\ln(-mL+h)}{-m} \right) - \frac{w}{-m^3} \left(\frac{-h^2}{2} \frac{-1}{(-mL+h)} + \frac{2h \ln(-mL+h)}{-m} + \frac{(-mL+h)(\ln(-mL+h)-1)}{-m} \right) \right) + C_2$$

L

Como se puede apreciar los valores de C_1 y C_2 son descritos de una manera compleja, para ahorrar trabajo se describen los dos programas de computadora que aparecen en el apéndice 1 de esta tesis.

El primero encuentra los valores de C_1 y C_2 para las condiciones de apoyo y carga del elemento estudiado, y el segundo determina los valores de Pendiente O y su ubicación a lo largo del eje x , además de determinar el valor exacto de la deflexión, que por cierto ya no está ubicado a $L/2$ como en el caso de secciones constantes.

Nótese que para elementos de otras características: forma, carga y apoyos deben plantearse otras expresiones de forma similar.

4.2.3 Análisis Estructural de Marcos compuestos por Miembros de sección variable.

En la sección anterior se pudo apreciar la forma de encontrar los Momentos y cargas a las que se somete la estructura del ejemplo por medio del método de la columna análoga. Este método se apoya en el Análisis de distribución de momentos de Cross. Desde luego es lógico pensar que la manera de resolver el problema puede afrontarse con otro método de análisis estructural más generalizado. Con ánimo de escudriñar y encontrar más herramientas de análisis se tratará de enfocar el problema por medio del método de Rígideces.

Para apreciar algunos conceptos importantes se resolverá el marco del ejemplo asumiendo que contiene únicamente miembros de sección constante. Se diagramará de la manera siguiente:

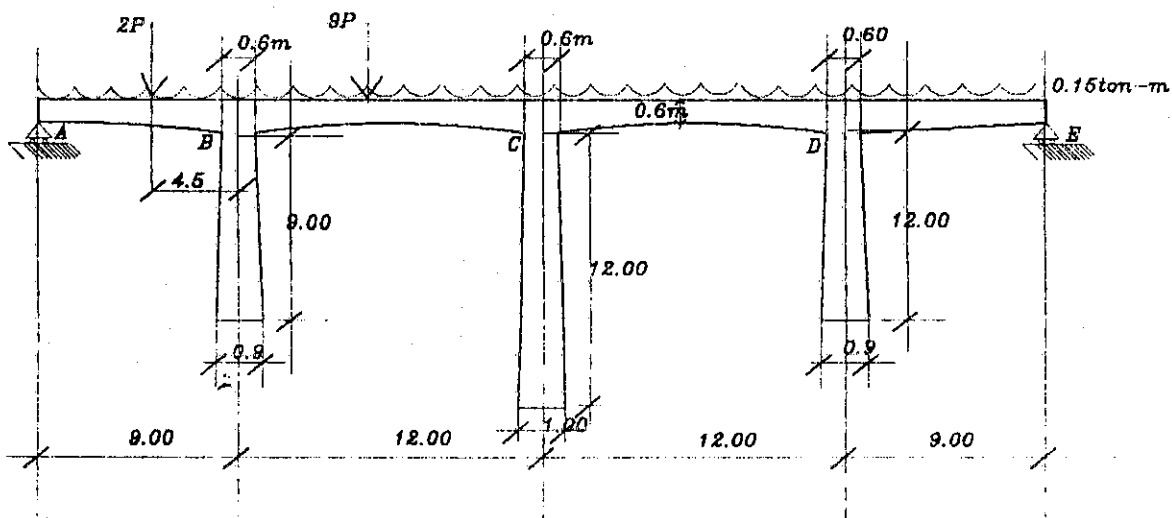


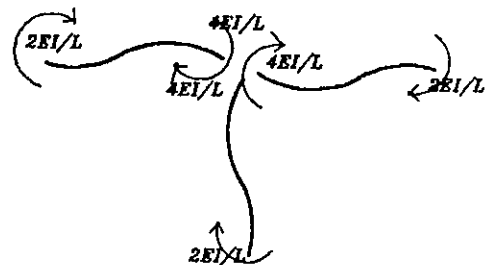
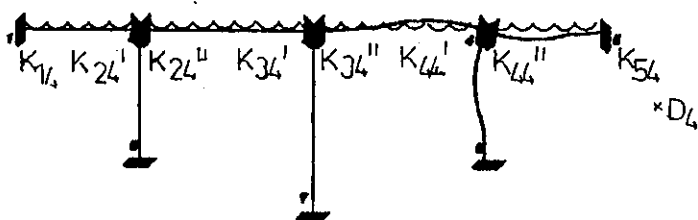
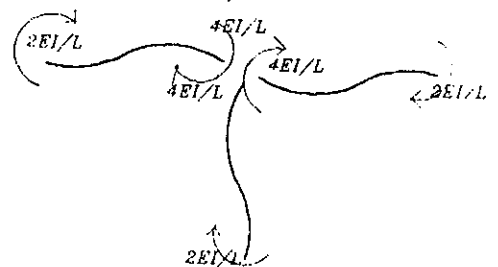
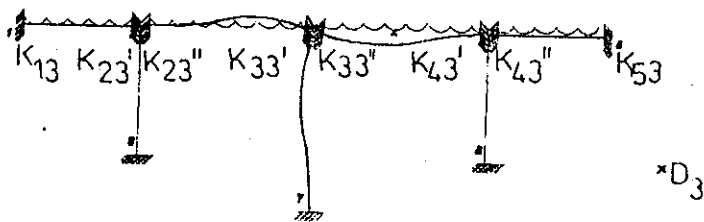
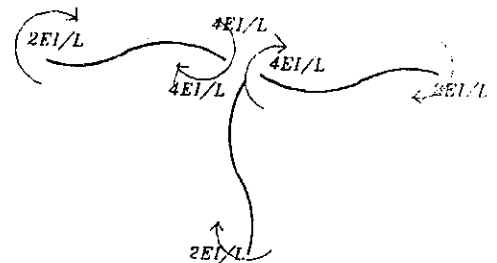
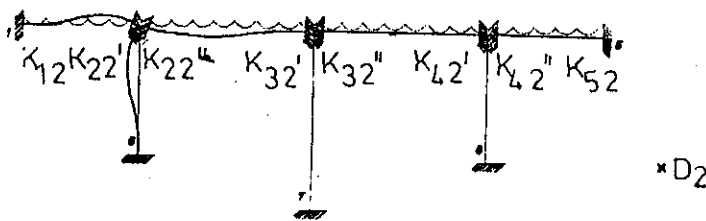
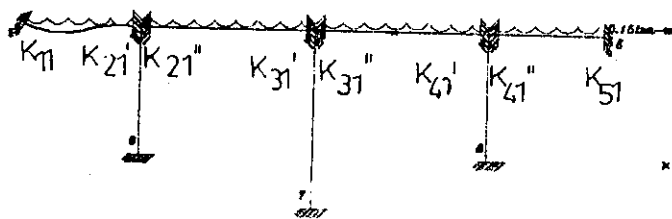
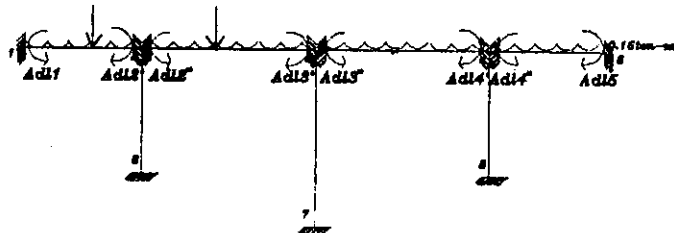
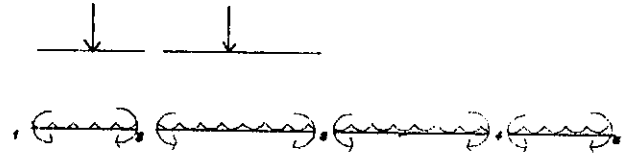
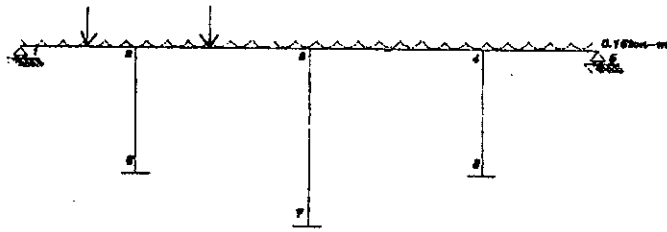
FIG 4.2.3.1

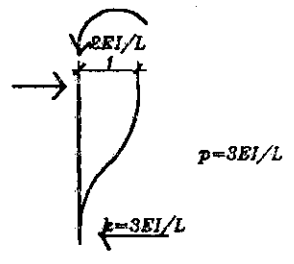
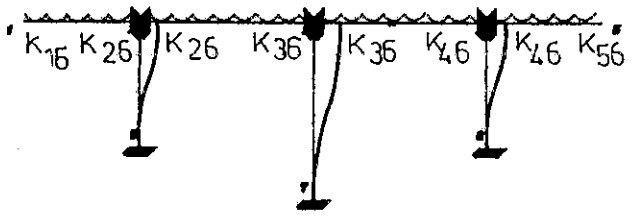
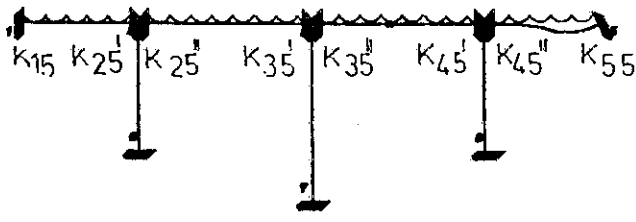
Indeterminación Cinemática=6
debido a 5 giros +
1 desplazamiento lateral.

Adl=matriz de Momentos Fijos.

Recordando que el Momento inducido en el extremo opuesto de un miembro empotrado por un giro unitario se da de la siguiente manera:

Aplicando el principio de superposición se tendrán las condiciones siguientes :



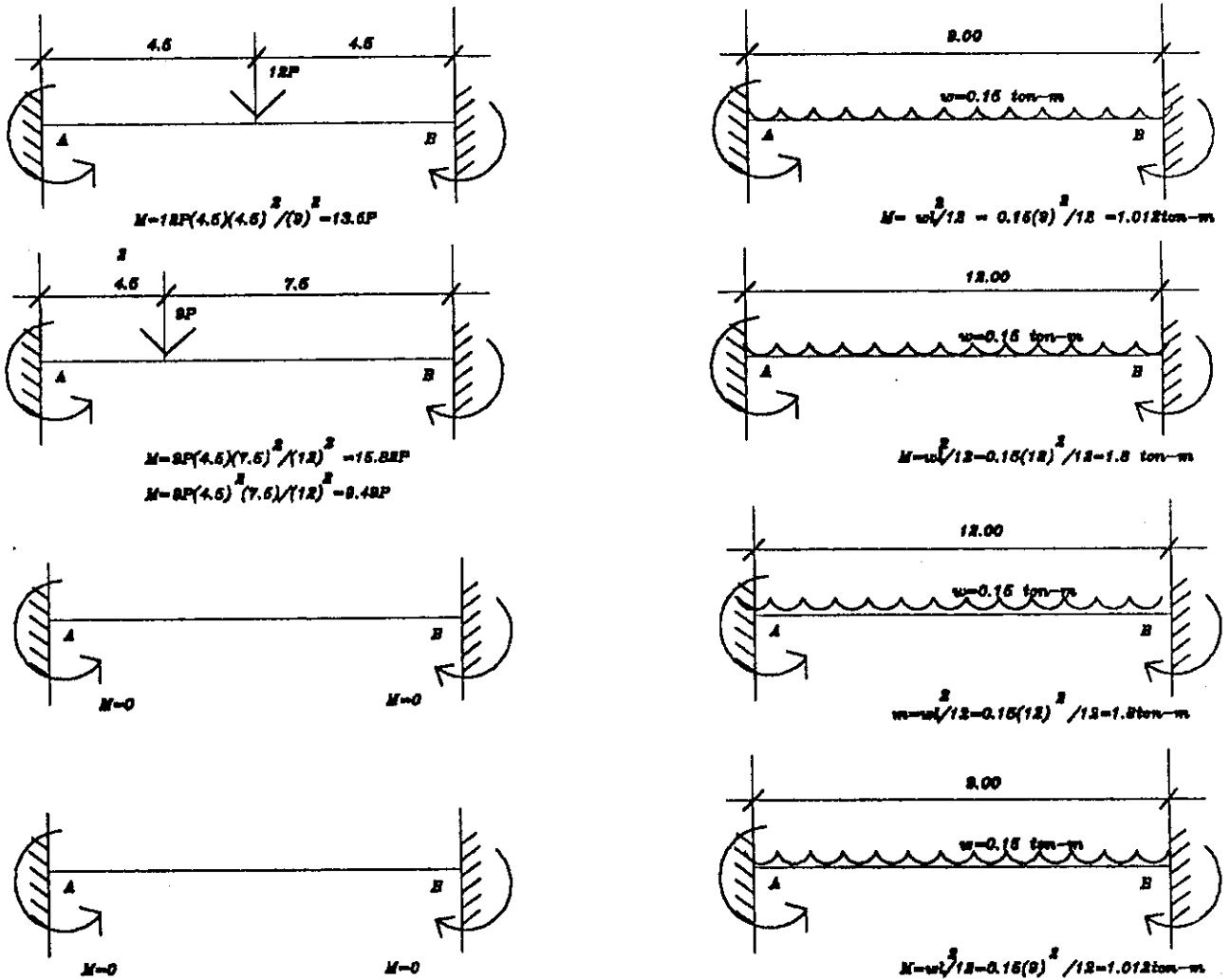


Del Método de Rigideces se tiene : $Ad=Adl + KD$

Las matrices irán de la siguiente forma :

$$\begin{array}{c} Ad1 \\ Ad2 \\ Ad3 \\ Ad4 \\ Ad5 \\ Ad6 \end{array} = \begin{array}{c} Adl1 \\ Adl2 \\ Adl3 \\ Adl4 \\ Adl5 \\ Adl6 \end{array} + \begin{array}{c} K11 K12 K13 K14 K15 K16 \\ K21 K22 K23 K24 K25 K26 \\ K31 K32 K33 K34 K35 K36 \\ K41 K42 K43 K44 K45 K46 \\ K51 K52 K53 K54 K55 K56 \\ K61 K62 K63 K64 K65 K66 \end{array} * \begin{array}{c} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{array}$$

Cuyos Momento fijos o Acciones Adl se encuentran de la siguiente manera:



substituyendo los valores en las matrices :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -13.5P-1.012 \\ 13.5P+1.012-15.82P-1.8 \\ 9.49P+1.8-1.8 \\ 1.8-1.012 \\ 1.012 \\ 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 4EI/9 \\ 2EI/9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2EI/9 \\ 8EI/9+4EI/12 \\ 2EI/12 \\ 0 \\ 0 \\ -6EI/9 \end{array} \begin{array}{c} 2EI/9 \\ 2EI/12 \\ 16EI/12 \\ 2EI/12 \\ 8EI/9+4EI/12 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2EI/12 \\ 2EI/9 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2EI/12 \\ -6EI/9 \\ 0 \\ 24EI/9+12EI/12 \end{array} \left| \begin{array}{c} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{array} \right|
 \end{array}$$

de la ecuación principal :

$$Ad = AdI + K \cdot D \quad \text{despejando } D \text{ se tiene : } D = K^{-1} (Ad - AdI)$$

Siendo D (las deformaciones) la incógnita.

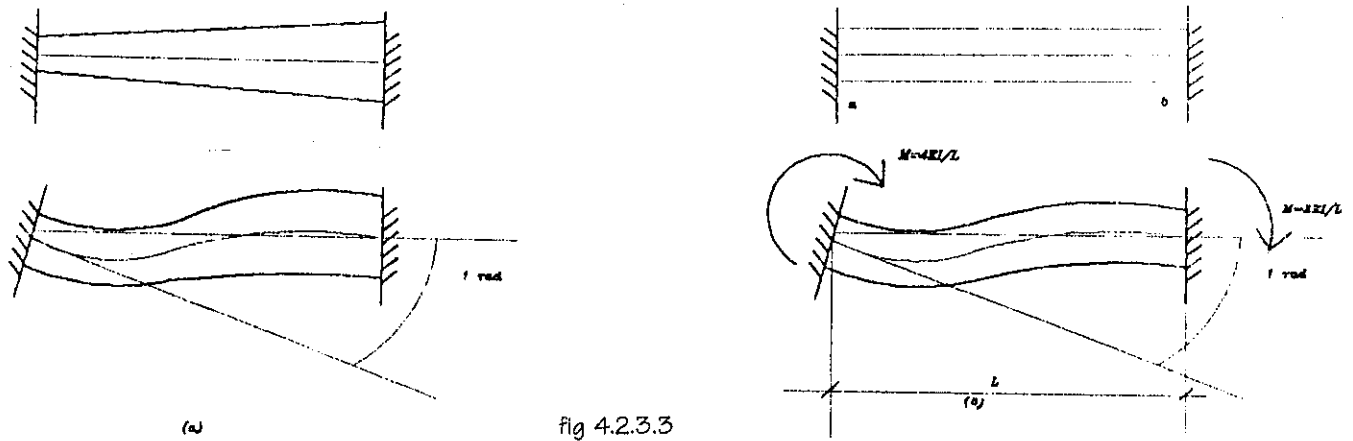
Cabe la observación de que los contenidos de las matrices Ad y AdI son valores que dependen del estado de carga de la estructura, más no de la forma de los miembros o características físicas de ellos. Entonces pues, queda únicamente la matriz de rigideces, la cual si contiene valores que dependen de la forma de los elementos estructurales, por contener el valor I, el cual se mantiene constante en el caso supuesto. En realidad todos los elementos son no prismáticos, debido que su sección va variando a lo largo de la longitud de cada miembro.

Para encontrar los valores de rigidez que rigen la distribución del Momento Flexionante entre los extremos de un miembro de sección variable se aplicarán los mismos principios del análisis estructural que son utilizados para miembros de sección constante, bajo las siguientes premisas :

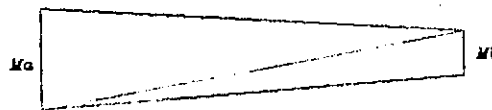
- Dos secciones consecutivas, permanecerán paralelas una a la otra, y serán perpendiculares al eje neutro del elemento.

- El elemento en cuestión tendrá un ancho definido igual a la unidad.
- El elemento en análisis será de sección cuadrada, donde h_1 = altura o peralte inicial, h_2 =altura o peralte final donde $h_1 > h_2$.
- El módulo de elasticidad E permanece constante.
- L es igual a la longitud de desarrollo del elemento.

Considérese ahora un miembro de sección no prismática y ancho unitario, tal como se observa en la figura 4,2,3,3(a).



El momento transmitido que se define como el que se produce en el extremo empotrado de un miembro por la acción de otro momento aplicado en el otro extremo (articulado), como en la figura 4,2,3,3(b), si se aplica un momento en A, el elemento se deformará como se indica, y se producirá un momento de empotramiento M_b . El diagrama de Momentos se trazará como sigue :



Aunque el Momento en A es negativo, dada la curvatura de la elástica en A, es conveniente considerarlo positivo como se ha dibujado; de esta manera, la solución que se obtenga dará no sólo un valor, sino también su signo (negativo) correcto. La desviación de A con respecto a la tangente trazada por B es nula debido al empotramiento perfecto en B. Por tanto:

$EI\theta_{a/b} = (\text{ÁREA})_{ab} \times \underline{\text{En caso de secciones constantes.}}$

$$\theta_{a/b} = 1/EI \int (\text{Área})_{ab} \times x = 0 = (1/2)MaL(2L/3) + (1/2)MbL(L/3)$$

despejando el valor de Ma , se tiene: $Ma = -(1/2)Mb$
 obsérvese que EI desaparece.

El resultado demuestra que un momento aplicado en la articulación B transmite al empotramiento A un momento de valor igual a un medio de aquel y de signo o sentido contrario, este valor no es necesariamente igual para un elemento de sección variable.



Un segundo concepto se deriva de introducir un Momento en el extremo apoyado para producir un giro unitario en este extremo, permaneciendo el otro empotrado.

La pendiente en A se obtiene por el teorema del área de momentos y se expresa en función del diagrama de la figura 4,2,3,4.

$$EI\theta_{ab} = (\text{Area } ab)$$

$$\theta_{ab} = Mdx/EI$$

$$1\text{rad} = 1/E \int Mdx/$$

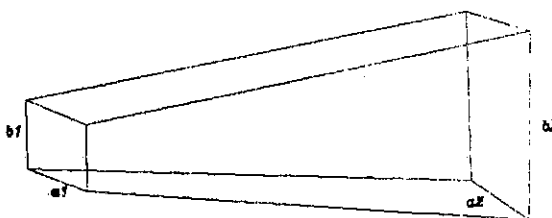


FIG 4.2.3.6

Nota: Es de hacer notar que la ecuación anterior es la forma más general del giro en un elemento estructural, y que en el caso de incluir alguna variación en la forma de su sección la inercia I sería la única variable afectada.

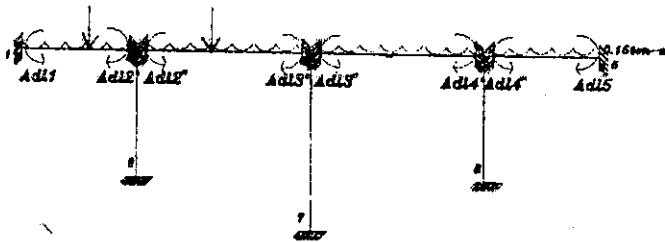
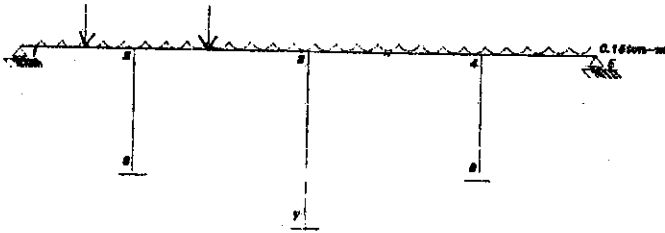
Las dos ecuaciones anteriores son complementarias, ambas forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas M_a y M_b , valores que definen índices de proporcionalidad y de rigidez en el caso de secciones variables. Estos índices son los mismos que establece la Portland Cement Association ya mencionados en la sección 5.2.1.3. Estas gráficas (apéndice 10) son resultado de laboriosos cálculos y valuación de expresiones auxiliadas de programas de computadora (apéndice del 2 al 9), que se incluyen en el presente trabajo para que sirvan de herramienta al lector.

Otro caso muy frecuente en análisis estructural, es la de un miembro que sufre el desplazamiento relativo de uno de sus extremos previamente empotrado; en el presente trabajo de tesis se determinaron expresiones para calcular los momentos inducidos por esta situación. En los apéndices del 11 al 14 se encuentra toda la información al respecto.

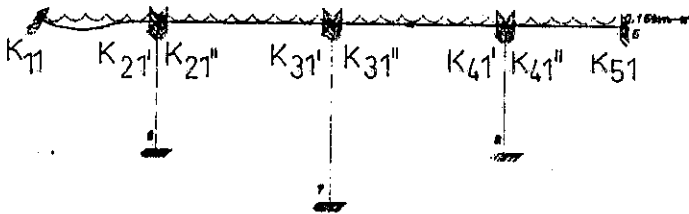
4.2.3.1 Ejemplo

Con los resultados y datos obtenidos en las gráficas o cuadros de la sección anterior se puede construir una nueva matriz de rigideces que tome en cuenta los cambios de sección en los miembros de la estructura. El planteamiento es de la siguiente manera:

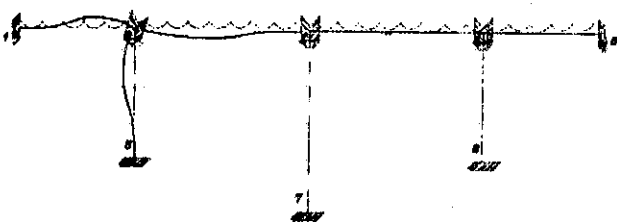
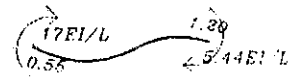
Recordando:



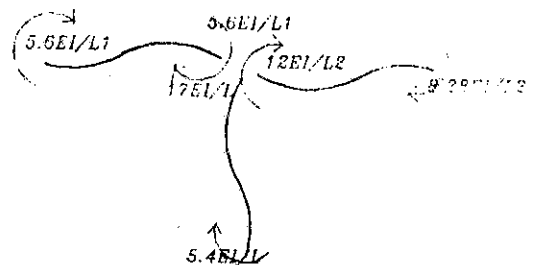
Ad_i = Matriz de momentos fijos
condición idéntica a la anterior
matriz, puesto que depende úni-
camente de las condiciones de
carga de la estructura.

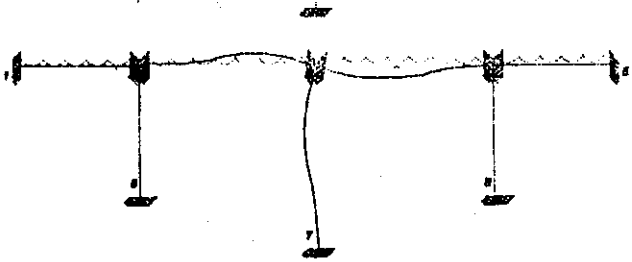


* D1

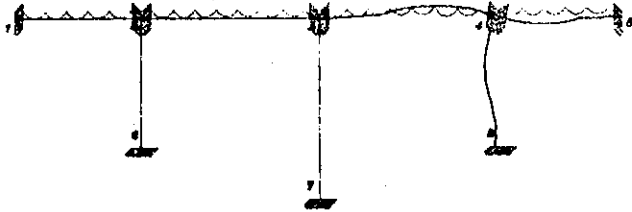
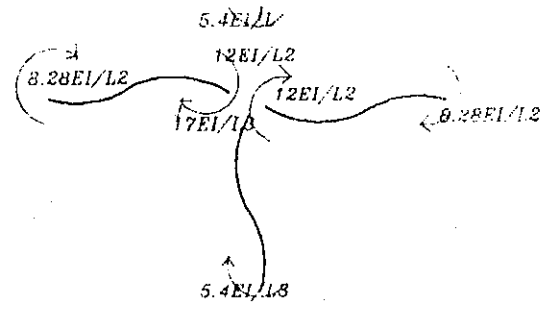


* D2

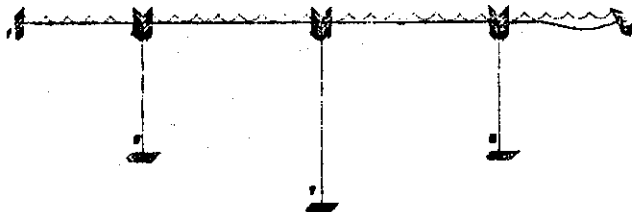
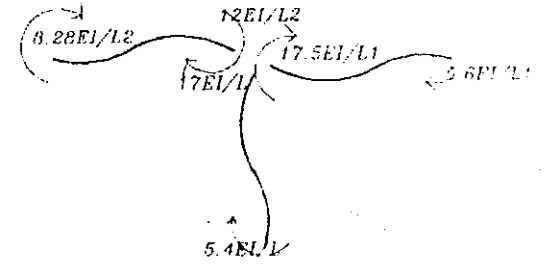




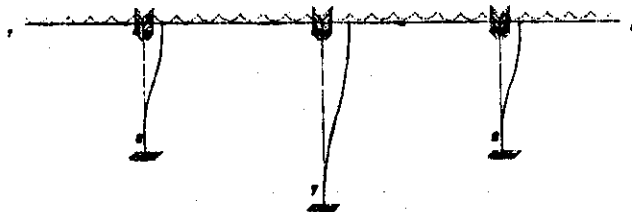
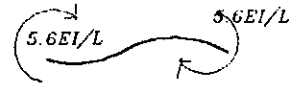
*D3



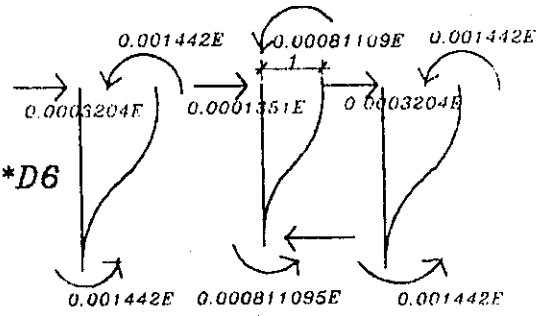
*D4



*D5



*D6



$\frac{17EI}{9}$	$\frac{5.44EI}{9}$	0	0	0	0
$\frac{5.6EI}{9}$	$\frac{5.6EI+12EI+17EI}{9 \quad 12 \quad 9}$	$\frac{8.28EI}{12}$	0	0	0.001442E
0	$\frac{8.28EI}{12}$	$\frac{12EI+12EI+17EI}{12 \quad 12 \quad 12}$	$\frac{8.28EI}{12}$	0	0.0008119E
0	0	$\frac{8.28EI}{12}$	$\frac{12EI+17EI+17.5EI}{12 \quad 9 \quad 9}$	$\frac{5.6EI}{9}$	0.0014E
0	0	0	$\frac{5.44EI}{9}$	$\frac{17EI}{9}$	0
0	0.001442E	0.00081109E	0.00142E	0	0.00032E +0.00032E +0.000135E

Suponiendo que $I=(0.60)^3=0.018m^4$

$17/9$	$5.44/9$	0	0	0	0
$5.6/9$	$\frac{5.6+12+17}{9 \quad 12 \quad 9}$	$8.28/12$	0	0	0.081011
0	$8.28/12$	$\frac{12+12+17}{12 \quad 12 \quad 12}$	8.28	0	0.04506
0	0	$8.28/12$	$\frac{12+17+17.5}{12 \quad 9 \quad 9}$	5.6	0.081011
0	0	0	$5.44/9$	$17/9$	0
0	0.081011	0.04506	0.0810	0	0.0178 +0.0178 +0.0075055

Obsérvese que la matriz sigue siendo simétrica:

Ad-Adl

k

2.0245		1.88	0.604	0	0	0	0
0.962		0.622	3.544	0.69	0	0	0.081011
-0.71	EI	0	0.69	3.4166	0.69	0	0.04506
-0.7888		0	0	0.69	4.833	0.622	0.081011
-1.012		0	0	0	0.6044	1.88	0
0		0	0.081011	0.04506	0.0810	0	0.0431055

-1

$$d = K (Ad-Adl)$$

K ⁻¹	0.567	-0.1080	0.0205	-0.00645	0.0021	0.1937
	-0.1080	0.3266	-0.0621	0.019496	-0.0064	-0.5854
	0.0205	-0.0621	0.3159	-0.0448	0.0148	-0.1292
	-0.00645	0.0194	-0.0448	0.2298	-0.0760	-0.4218
	0.0020	-0.00626	0.0144	-0.0739	0.55863	0.1356
	0.1937	-0.5854	-0.1292	-0.4217	0.1395	25.227

θ_1	=	1.03507
θ_2		0.1304
θ_3		-0.222
θ_4		-0.0666
θ_5		-0.5168
Δ		0.112366

$$M_{12} = -2.0245 + \frac{17}{9}(1.03507) + \frac{5.44}{9}(0.1304) = 0.009319$$

$$M_{21} = 2.0245 + \frac{5.6}{9}(0.1304) + \frac{5.6}{9}(1.03507) = 2.7496$$

$$M_{23} = -1.1865 - 1.8 + \frac{12}{9}(0.1304) + \frac{8.28}{12}(-0.222) = -2.9658$$

$$M_{32} = 0.71175 + 1.8 + \frac{12(-0.222)}{12} + \frac{8.28(0.1304)}{12} = 2.3795$$

$$M_{34} = -1.8 + \frac{12(-0.222)}{12} + \frac{8.28(-0.0666)}{12} = -2.0679$$

$$M_{43} = 1.8 + \frac{12(-0.0666)}{12} + \frac{8.28(-0.222)}{12} = 1.58$$

$$M_{45} = -1.012 + \frac{17.5(-0.0666)}{9} + \frac{5.6(-0.5168)}{9} = -1.463064$$

$$M_{54} = +1.012 + \frac{17(-0.5188)}{9} + \frac{5.4(-0.0666)}{9} = -0.00417$$

$$M_{26} = 0 + 0 + \frac{17(0.1304)}{9} + 0.001442(0.112366) = 0.2553$$

$$M_{62} = 0 + 0 + \frac{5.4(0.1304)}{9} + 0.080111(0.112366) = 0.0872$$

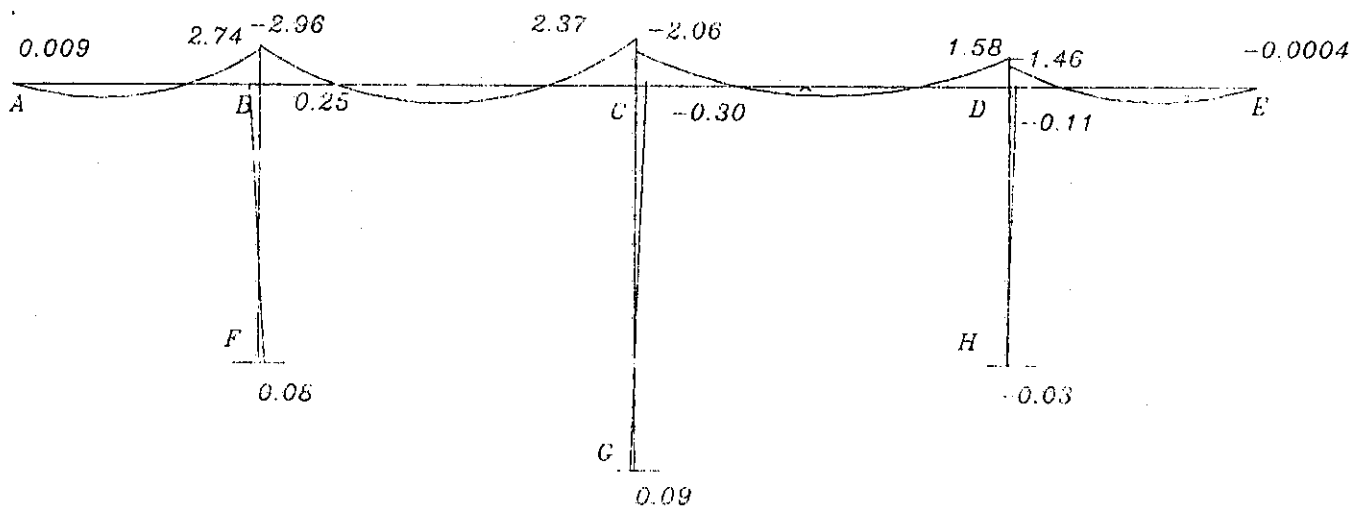
$$M_{37} = 0 + \frac{17(-0.222)}{12} + 0 + \frac{0.00081109(0.112366)}{0.018} = -0.3094$$

$$M_{73} = 0 + \frac{5.4(-0.222)}{12} + 0 + 0.04506(0.112366) = -0.0949$$

$$M_{48} = \frac{17(-0.0666)}{9} + 0.080111(0.112366) = -0.116922$$

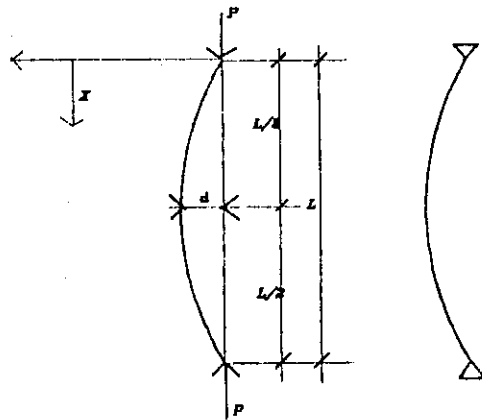
$$M_{84} = +0 + \frac{5.4(-0.0666)}{9} + 0.080111(0.112366) = -0.03099$$

El diagrama de Momentos sería:



5.1 Carga Crítica:

La carga crítica de Euler para una columna se define como la carga crítica que produce el pandeo, no dependiendo de la resistencia del material sino de sus dimensiones. Esto es aplicable cuando el esfuerzo producido está por debajo del límite de proporcionalidad.



La figura muestra la línea del eje de la columna en equilibrio bajo la acción de una carga crítica P. Se supone que la columna tiene los extremos articulados, de manera que no puede tener desplazamientos laterales. La deflexión lateral d es lo suficientemente pequeña para que no exista diferencia apreciable entre la longitud inicial y su proyección sobre un eje vertical. En estas condiciones se puede aplicar la ecuación diferencial que utilizó Euler para su análisis.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = P(-y) = -Py$$

Para una columna de sección constante los valores de EI son constantes, de manera que la expresión anterior se puede escribir de la forma:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

Otra forma de escribir la expresión es $y' = -Py$

Para resolver la ecuación diferencial se hace la siguiente substitución:

$$p = y'(x) \quad y' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

queda una expresión de la forma $F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$

o $p \frac{dp}{dy} = -Py$ o $-Cy$ donde P es constante.

separando variables: $p \frac{dp}{dy} = -Cy$

e integrando $\int p \, dp = -C \int y \, dy$

multiplicando por 2 $(\int p^2 / 2 = -Cy^2 / 2 + C_1) * 2$

se obtiene $\int p^2 = -Cy^2 + C_1$

y $\int (y'(x))^2 = -Py^2 + C_1$

o $\int \frac{dy}{dx}^2 = -Py^2 + C_1$

también $\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = -Py^2$

o $2 \frac{dy}{dx} = -2Py^2$

$\frac{dy}{dx} = -Py^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2Py^2}{2} + C$

$\frac{dy}{dx} = P(\partial^2 - y^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \sqrt{\partial + y}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\partial + y}} = \int \sqrt{\frac{P}{EI}} dx$$

$$\text{sen}^{-1} \frac{y}{\partial} = x \sqrt{\frac{P}{EI}} + C_2$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$y=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$C_2=0$$

$$\text{sen}^{-1} \frac{y}{\partial} = x \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

o sea que

$$y = \partial \text{sen} \left(x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

Esto quiere decir que la forma de la elástica es sinusoidal. Haciendo $y=0$ para $x=L$ en esta última ecuación se obtiene:

$$\text{sen} \left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = 0$$

esto implica que

$$\left(L \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = n\pi \quad \text{para } n=1,2,3,4,\dots$$

depejando P se tiene:

$$P = n^2 \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

El valor $n=0$ no tiene ningún sentido lógico, ya que P sería igual a 0 para los demás valores de n , la columna se pandea de la forma indicada en la figura, de estas posibles soluciones la más importante es la de (a). Las otras soluciones ocurren con cargas mayores, pero sólo si la columna tiene sujeciones laterales en el punto medio o en los tercios del largo respectivamente, que obliguen a la columna a tomar su forma. De manera que la carga crítica para una columna articulada en sus extremos se define como:

$$P = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

Para definir la carga crítica para una columna de sección variable se partirá de la ecuación diferencial de Euler, definida con anterioridad.

Se sabe que: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{Ef(x)}$ para sección variable

Esto da origen a una ecuación diferencial compleja, para ello se simplificará el problema resolviendola para una situación conocida. De manera que se supondrá que los bordes de la columna son lineales y que la inercia $f(x)$ se expresa como sigue:

$$I = \frac{(mx+h^2)^2}{12}$$

Se resuelve que para un punto definido para $x=L/2$, haciendo las substituciones:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Py}{E(m(L/2)+h^2)^3} \quad \text{donde } m = \frac{h_1-h_2}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12Py}{E((h_1-h_2)(L)+h_2)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12Py}{E((h_1-h_2)+2h_2)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12Py}{E((h_1-h_2+2h_2)^3)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12Py}{E(h_1-h_2)^3} \quad \text{donde } \frac{12}{E\left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^3} = \text{Constante} = C_1$$

Substituyendo $\frac{d^2 y}{dx^2} = -C_1 y$

sean $p = y'(x)$ $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$

se puede resolver de la forma:

$$p \frac{dp}{dy} = -c_1 y$$

$$\int p dp = -c_1 \int y dy$$

$$p = -c_1 y + c$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{-12p}{E\left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^3}\right) y^2 + c$$

para $\frac{dy}{dx} = 0$ se da que $y = \partial$

$$\emptyset = \frac{-12P}{E (h_{prom})^3} \partial^2 + c$$

$$c = + \frac{12P}{E (h_{prom})^3} \partial^2$$

Substituyendo en cuadro principal da:

$$\emptyset = \frac{-12P}{E (h_{prom})} \partial^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-12P}{E \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^3} (y^2 + \partial^2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{12P}{E \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^3} (\partial^2 - y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{12P}}{\sqrt{E (h_{prom})}} \sqrt{(\partial^2 - y^2)}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\partial^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{12P}}{\sqrt{E h_{prom}}} \int dx$$

$$\text{Sen}^{-1} \frac{y}{\partial} = \frac{\sqrt{12P}}{\sqrt{E h_{prom}}} (x) + c_1$$

$$y = \partial \text{sen} \left(x \sqrt{\frac{12P}{E h_{prom}^3}} \right)$$

$$y = \delta \operatorname{sen} \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{12P}{E h \operatorname{prom}^3}} \right)$$

$$\theta = \operatorname{sen} \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{12P}{E h \operatorname{prom}^3}} \right)$$

Que equivale a decir:

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{12P}{E h \operatorname{prom}^3}} = h\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$P = \frac{2n\pi^2 E h \operatorname{prom}^3}{L^2}$$

$$P_c = \left(\frac{2n}{L} \right)^2 \pi^2 E h \operatorname{prom}^3$$

Si se integra para un punto definido

eje $x = L/4$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{12 P y}{E \left(m \frac{L}{4} + h^2 \right)^3}$$

$$y = 0 \quad x = 0 \quad x = L$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$m = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{P}{EI} + c$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{12 P y}{E \left(\frac{h_1 - 3h_2}{4} \right)^3}$$

para $\frac{dy}{dx} = 0$

$$x = 0 \quad \partial = \emptyset \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\partial}{L}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Py}{E(h^2)^3}$$

$$c1 = \frac{12Py}{E(h^2)^3}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{-12P}{E(h^2)^3}\right)y^2 + c$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2\partial}{L}$$

$$y = \emptyset$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-12P}{E(h^2)^3} y^2 + \left(\frac{2\partial}{L}\right)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-12P}{E(h^2)^3} y^2 + \left(\frac{2\partial}{L}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12P}{E(h^2)^3} (-y)^2 + \frac{4\partial^2}{L^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{12P}{E(h^2)^3} (-y)^2 + \frac{4\partial^2}{L^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12Py}{E(h^2)^3} + \frac{2\partial^2}{L}$$

qprox

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\partial}{L}$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{-12Py}{E(h^2)} + \frac{2\partial}{L}}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{-12Py^2}{Eh^2} + \frac{2\partial}{L}}} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2\partial}{L} - \frac{12Py^2}{Eh^2}}} = \int dx$$

$$c_1 = \frac{2\partial}{L} \quad c_2 = \frac{12P}{Eh^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - c_2 y}} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{c_1}^2 - (\sqrt{c_2})^2 y^2}} = \int dx$$

$$u = \sqrt{c_2} y$$

$$du = \sqrt{c_2} dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_2}} \int \frac{du}{\sqrt{c_1^2 - u^2}} = \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_2}} \left(\text{sen}^{-1} \frac{(\sqrt{c_2} y)}{\sqrt{c_1}} \right) + c = x$$

$$\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = x\sqrt{c_2}$$

$$y \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1} \text{sen } x\sqrt{c_2}$$

Haciendo $y = 0$

$$\emptyset = \frac{\sqrt{-12P}}{\sqrt{Eh^2}} \text{sen } x \sqrt{\frac{2\partial}{L}}$$

$$y \frac{12P}{Eh^3} = \frac{2\partial}{L} \text{sen } x \frac{12P}{Eh^2}$$

Haciendo $y = 0$

$$\emptyset = \sqrt{\frac{2\partial}{L}} \text{sen } \sqrt{\frac{12P}{Eh^2}}$$

$$\emptyset = \text{sen } x \sqrt{\frac{12P}{Eh^2}} \text{ es } \frac{P}{EI} \quad \text{donde } I = \frac{1}{12} (h^2)^3$$

Para $X = L$

Se tiene

$$\frac{d^2 y}{dx} = \frac{12Py}{E(mx+h^2)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx} = \frac{12Py}{E((h_1-h_2)L+h^2)^3}$$

Haciendo

$$p = y(x)' y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{pdp}{dy}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-12Py^2}{E(h_1)} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12 Py}{E(h1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = c = \frac{(-2\partial)^2}{L} = \frac{4\partial^2}{L^2}$$

substituyendo:

$$x=L \quad y=0 \quad \frac{dy}{dx} \approx \frac{-2\partial}{L} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{412 P (-y^2)}{E(h1)} + \frac{4\partial^2}{L^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{12 P (-y^2)}{E(h1)^3} + \frac{(2\partial)^2}{L^2}}$$

$$\frac{dy}{\frac{-12 P (y^2)}{E(h1)^3} + \frac{(2\partial)^2}{L^2}} = dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{2\partial^2}{L} \frac{-12 P (y^2)}{E(h1)^3}}}$$

$$C1 = \frac{2\partial}{L}$$

$$C2 = \frac{12P}{E(h^3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = dx \quad \text{haciendo } C2 = \sqrt{C2^2}$$

$$u = \sqrt{C2} y \quad du = \sqrt{C2} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C1 - C2y^2}}{\sqrt{C1 - \sqrt{C2} y^2}} = dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{C2}} \int \frac{du}{\sqrt{C1^2 - C2^2}} = \int dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{C2}} \frac{\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{C2} y}{C1}}{C1} = x$$

$$\frac{\text{sen}^{-1} \frac{\sqrt{C2} y}{C1}}{C1} = x \sqrt{C2}$$

$$\frac{\sqrt{C2} y}{C1} = \text{sen}(x \sqrt{C2})$$

$$y = \frac{C1 \operatorname{sen}(x\sqrt{C2})}{\sqrt{C2}}$$

$$y = \frac{\frac{2\theta}{L} \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{12P}{Eh^3}}}{\sqrt{\frac{12P}{Eh^3}}}$$

haciendo $y=0$

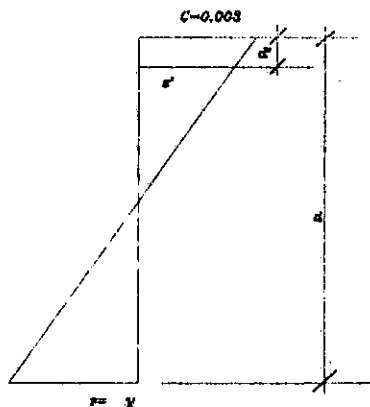
$$0 = \operatorname{sen}\left(x \sqrt{\frac{12P}{Eh^3}}\right)$$

Es evidente que la carga crítica la determina la menor sección a lo largo de la columna.

5.2 Falla balanceada:

Como ya se vió en el capítulo 1 la falla balanceada en una columna se da en el momento cuando el acero a tensión fluye, al mismo tiempo que el concreto falla en la cara a compresión.

Esto es la deformación unitaria máxima del concreto $c=0.003$ cm/cm se alcanza al mismo tiempo en que ϵ_s (deformación unitaria del acero) es igual que ϵ_y (deformación unitaria máxima del acero, momento donde el acero empieza a fluir). Véase el siguiente diagrama de deformaciones.



C es igual al largo de la zona de compresión y C_b el valor particular de C , donde se alcanza la condición balanceada. Por relación de triángulos se da que:

$$\frac{C_b}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_y}$$

que desencadena la expresión:

$$F_{sb} = E_s \epsilon_s = 6115 \cdot 1 - \left(\frac{d}{d'} \left(\frac{6115 + f_y}{6115} \right) \right)$$

fórmula del acero a compresión. Que ya se estableció en el Capítulo 1.

También se vió que la Carga Normal (P_n) y el Momento Nominal (M_n) se expresan de la forma:

$$P_n = 0.85f_c a b + A_s f_s - A_s' f_s' \quad y$$

$$M_n = P_n e = C_c (h/2 - a/2) + C_s (h/2 - d) + T (d - h/2)$$

y que para condiciones balanceadas se establece:

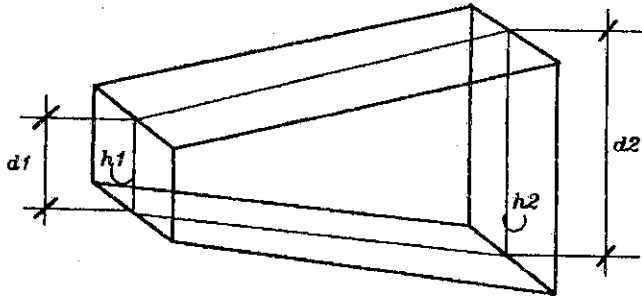
$$P_b = 0.85f_c a b + A_s f_s b - A_s' f_s' b \quad \text{ec 5.2.1}$$

$$M_b = P_b e_b = 0.85f_c a b b \left(\frac{h}{2} - \frac{a_b}{2} \right) + A_s f_s b (h/2 - d) + A_s' f_s' b (d - h/2) \quad \text{ec 5.2.2}$$

$$\text{donde } C_b = \frac{6115}{6115+f_y} * d \quad y \quad a_b = B C_b = \frac{6115}{6115+f_y} * B * d \quad \text{ec 5.2.3}$$

En una columna cuya sección transversal varía, d es un valor que cambia dependiendo de la forma que tengan los bordes de ella. Los bordes pueden ser definidos como funciones que dependan únicamente de la longitud recorrida.

En caso de que los bordes externos de una columna cuadrada (bordes rectos) se incrementan a lo largo de la longitud en forma lineal, la función que define a (d) o peralte efectivo, tendría que ser lineal también. Por consecuencia la expresión que define P_n sería de forma lineal, en la figura 5.2.2 se puede apreciar la manera en que se define el peralte d , en función de x (eje longitudinal).



$$m = \frac{h_2 - h_1}{L} \text{ (pendiente del borde)}$$

$$h = mx + h_1$$

$$d = mx + h_1$$

$$d = F(x)$$

Debido a que P_n se puede expresar en función de (d) haciendo la substitución de 5.2.3 en 5.2.1, la nueva expresión de P_n en función de d es lineal, la nueva expresión sería de la forma:

$$P_n = 0.85 f' c \beta \frac{6115}{6115 + f_y} * (d)(b) + A_s f_s b - A_s' f_s$$

$P_n = f(d)$ y de primer grado.

Hay que hacer la observación que A_s y A_s' permanecen constantes debido a que las áreas de acero son las mismas a lo largo de la columna.

Por a parte la Ecuación 5.2.3 al igual que 5.2.2 se puede definir también en función de d , dado que A, b y h son valores relacionados con d . El resultado de hacer esta substitución vuelve la expresión 5.2.3 en una función de segundo grado.

Debido a que P_n varía en forma lineal y a que M_n lo hace en forma cuadrática la línea que define la falla balanceada en el diagrama de interacción (P, M) es una curva, modificándose así la zona de tensión.

Para apreciar mejor lo anteriormente dicho se procederá a construir diagramas consecutivos de interacción bajo las siguientes condiciones:

1. A_g = constante haciendo variar A_s obteniendo curvas o diagramas de interacción para diferentes valores de ρ .

2. A_s = constante haciendo variar A_g obteniendo curvas para diferentes valores de ρ .

Para construir los diagramas para ambas condiciones servirán los dos siguientes programas de computadora. Uno de ellos determina P_b y M_b (balanceados) para cualquier sección y el otro P_n y M_n para secciones en flexocompresión.

P_n y M_n

```
10 CLS : CLEAR
20 PRINT "Diagrama de Interaccion"
30 INPUT "fc=kg/cm2"; FC
40 INPUT "fy=kg/cm2"; FY
50 INPUT "base de la columna b="; B
60 INPUT "d cms="; D
65 INPUT "Area de acero a tension cm2="; A
70 INPUT "rec cms="; REC
80 INPUT "E kg/cms2="; E
81 CBAL = (6115 / (6115 + FY)) * D: PRINT "Cbal = "; CBAL
90 INPUT "Casumido cms="; C
100 FI = .003 / C: ESP = FI * (C - REC): ES = FI * (D - C)
110 FPS = ESP * E: FS = ES * E: AB = .85 * C: H = D + REC
120 IF FPS > FY THEN FPS = FY
125 PRINT "ESF TENSION="; FPS
130 IF FS > FY THEN FS = FY
135 PRINT "ESF COMP="; FS
140 CS = A * FPS * (10 ^ -3)
150 TS = A * FS * (10 ^ -3)
160 CC = .85 * FC * AB * B * (10 ^ -3)
170 PN = CC + CS - TS
180 MN = CC * ((H / 2) - (AB / 2)) + (CS * ((H / 2) - REC)) + (TS * (D - (H / 2)))
185 PRINT "Comp Acero="; CS; "ton"
186 PRINT "Tension Acero="; TS; "ton"
187 PRINT "Compresion Concreto="; CC; "ton"
190 PRINT "Pn="; PN; "TON"
200 PRINT "Mn="; MN; "TON-CM"
205 PRINT "excent="; (MN / PN); "cms"
206 PRINT "e/h="; ((MN / PN) / H)
208 INPUT "Desea intentarlo con otro C (S/N)"; L$
209 IF L$ = "S" THEN GOTO 90
210 END
```

Pb y Mb

```
10 CLS : CLEAR
20 PRINT "FALLA BALANCEADA"
30 INPUT "fc=kg/cm2"; FC
40 INPUT "fy=kg/cm2"; FY
50 INPUT "base de la columna b="; B
60 INPUT "d cms="; D
65 INPUT "Area de acero a tension cm2="; A
70 INPUT "rec cms="; REC
80 INPUT "E kg/cms2="; E
81 CBAL = (6115 / (6115 + FY)) * D: PRINT "Cbal ="; CBAL: FSB = 6115 * (1 - ((REC / D) * ((6115
+ FY) / 6115)))
82 PRINT "Fsb="; FSB
90 C = CBAL
100 FI = .003 / C: ESP = FI * (C - REC): ES = FI * (D - C)
110 FPS = ESP * E: FS = ES * E: AB = .85 * C: H = D + REC
120 IF FSB > FY THEN FSB = FY
125 PRINT "ESF TENSION="; FSB
130 FS = 4220
135 PRINT "ESF COMP="; FS
140 CS = A * FS * (10 ^ -3)
150 TS = A * FSB * (10 ^ -3)
160 CC = .85 * FC * AB * B * (10 ^ -3)
170 PN = CC + CS - TS
180 MN = CC * ((H / 2) - (AB / 2)) + (CS * ((H / 2) - REC)) + (TS * (D - (H / 2)))
185 PRINT "Comp Acero="; CS; "ton"
186 PRINT "Tension Acero="; TS; "ton"
187 PRINT "Compresion Concreto="; CC; "ton"
190 PRINT "Pb="; PN; "TON"
200 PRINT "Mb="; MN; "TON-CM"
205 PRINT "excent="; (MN / PN); "cms"
206 PRINT "e/h="; ((MN / PN) / H)
208 INPUT "Desea otra (S/N)"; L$
209 IF L$ = "S" THEN GOTO 30
210 END
```

5.3 Refuerzo Longitudinal

Como ya se vió en el capítulo uno, el estado de falla en columnas de concreto reforzado puede presentarse por las siguientes condiciones:

- Por el aplastamiento del concreto y la fluencia del acero debido a una carga axial perpendicular y céntrica a la sección transversal,(esta condición es predominante para las columnas cortas).
- Por la fluencia inicial del acero en la cara a tensión o por el aplastamiento inicial del concreto en la cara a compresión, debido a cargas axiales excéntricas a su sección transversal(comportamiento que predomina en columnas intermedias).
- Por la pérdida de estabilidad lateral de la estructura o pandeo que produce efectos de valores adicionales a los ya enunciados en la condición 2.

Como se ha visto con anterioridad la ACI establece los siguientes parámetros para clasificar su comportamiento:

Se considera como corta una columna si se cumple que:

$$\frac{Kl_u}{r} < 22 \text{ sin contravientos.}$$

$$\frac{Kl_u}{r} < 34 - \frac{M_1}{M_2} \text{ donde } M_1 \text{ y } M_2 \text{ son los momentos en los extremos opuestos del a compresión.}$$

Se considera como intermedia si se cumple que:

$$\frac{Kl_u}{r} > 22 \text{ sin contravientos.}$$

$$\frac{Kl_u}{r} > 34 - \frac{M_1}{M_2}$$

$$\frac{Kl_u}{r} < 100$$

Se considera como larga si:

$$\frac{Kl_u}{r} \geq 100$$

La expresión Kl_u/r es la relación de esbeltez para una columna de sección constante a lo largo de su eje longitudinal.

La idea expuesta en la sección 4.1 referente a encontrar una expresión que defina en forma matemática un equivalente de la esbeltez para un miembro de sección variable está enfocada a utilizar los mismos límites que evalúa el código de la ACI para su clasificación.

Entonces se tiene:

Se considera como corta una columna si se cumple que:

$$\int \frac{Kdx}{r} < 22 \text{ sin contravientos.}$$

$$\int \frac{Kdx}{r} < 34 - \frac{M1}{M2} \text{ donde } M1 \text{ y } M2 \text{ son los momentos en los extremos opuestos del miembro a compresión.}$$

Se considera como intermedia si se cumple que:

$$\int \frac{Kdx}{r} > 22 \text{ sin contravientos.}$$

$$\int \frac{Kdx}{r} > 34 - \frac{M1}{M2}$$

$$\int \frac{Kdx}{r} < 100$$

Se considera como larga si:

$$\int \frac{Kdx}{r} \geq 100$$

Para proseguir con el análisis es necesario considerar los siguientes parámetros:

1. La distribución de las deformaciones debido a la flexión en la sección transversal de la columna se da de forma lineal.
2. No existe deslizamiento entre el acero y el concreto, (Esto es, la deformación en el acero y en el concreto es la misma).
3. Para el propósito de los cálculos de la resistencia, la deformación máxima permisible del concreto en la falla es de 0.003 plg/plg o cm/cm.
4. La resistencia en la tensión del concreto es despreciable, es decir, igual a cero.
5. El refuerzo longitudinal permanece constante a lo largo de la columna, no sucediendo así con el área gruesa A_g de concreto que podría o no variar a lo largo de la longitud.

Para el diseño de columnas no esbeltas de sección constante, en las que el comportamiento está controlado por la falla del material, se pueden utilizar los siguientes pasos:

- 1 Calcular la carga axial externa factorizada P_u y el Momento factorizado M_u .
Con esto se encontrará la excentricidad $e = M_u / P_u$
- 2 Suponer la sección transversal y el tipo de refuerzo vertical que se usará. (Al seleccionar los tamaños de las varillas se deben evitar dimensiones fraccionales).
- 3 Suponer una relación de refuerzo entre 1 y 4% y obtener un área de refuerzo.

- 4 Calcular P_{nb} (Carga nominal balanceada) para la sección supuesta, asumir: b, d, h, d', ρ, ρ' y el tipo de refuerzo lateral, y determinar el tipo de falla, sea por fluencia inicial del acero, o por el aplastamiento inicial del concreto.
- 5 Revisar si la sección supuesta es adecuada, (si la sección no puede soportar a la carga factorizada, o si es demasiado grande y por lo tanto no es económica), modificar la sección transversal y/o el refuerzo y repetir los pasos 4 y 5.
- 6 Diseñar el refuerzo lateral.

Este procedimiento es aplicable a miembros de sección variable a lo largo de la longitud, aunque, para efectos de este análisis se tomarán en cuenta las siguientes consideraciones que complementan los pasos anteriores:

Consideración 1:

Debido a que en una columna de sección variable existen n diferentes áreas transversales, los pasos 2, 3, 4, 5 del procedimiento anterior deben revisarse para que las diferentes secciones cumplan siempre con las reglamentaciones de diseño de la ACI.

Consideración 2:

El momento flexionante producido por la condición de carga de la columna siempre debe de ser contrarrestado por el momento resistente a todo lo largo del elemento.

Consideración 3:

Es deseable que en el estado de falla la columna se presente por fluencia inicial del acero y no por aplastamiento del concreto (falla dúctil).

5.4 Ejemplos (Refuerzo Longitudinal y diagramas M y P).

Para apreciar mejor lo antes expuesto considérense los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Construir el diagrama de interacción P vrs M para una columna de sección constante de 40 por 40cms, ensayando áreas de acero de 10,20,30...70cms, utilizando los programas anteriores. Utilizar los valores de $f_c=210\text{kg/cm}^2$, $f_y=4220\text{kg/cm}^2$, $E=2100000\text{kg/cm}^2$,

Para el programa de falla balanceada se obtuvieron los siguientes datos de salida:

para un:	A_s	P_b	M_b	e/h
	10cm ²	190.76 Ton	1207.40Ton-cm	0.4411
	20cm ²	190.76 Ton	5684.40Ton-cm	0.595
	30cm ²	190.76 Ton	6159.99Ton-cm	0.64
	40cm ²	190.76 Ton	8638.40Ton-cm	0.9056
	50cm ²	190.76 Ton	10115.40Ton-cm	1.06

Con la idea de encontrar puntos de diferentes valores de w que tengan la misma relación de e/h , servirá de apoyo el programa 2, los datos de salida haciendo variar A_s son:

buscando para un valor constante de $e/h=0.212$

$A_s=70\text{cms}^2$

$c=30$ $e/h=0.65$

$c=10$ $e/h=1.58$

$c=40$ $e/h=0.24$

$c=42.5$ $e/h=0.211$

$A_s=60\text{cms}^2$

$c=42$ $e/h=0.23$

$c=43$ $e/h=0.22$

$c=45$ $e/h=0.19$

$c=44$ $e/h=0.2103$

$$A_s = 50 \text{ cms}^2$$

$$c = 40 \quad e/h = 0.26$$

$$c = 45 \quad e/h = 0.189$$

$$c = 43.5 \quad e/h = 0.208$$

$$c = 43 \quad e/h = 0.215$$

$$A_s = 40 \text{ cms}^2$$

$$c = 42 \quad e/h = 0.218$$

$$c = 42.5 \quad e/h = 0.211$$

$$A_s = 30 \text{ cms}^2$$

$$c = 42 \quad e/h = 0.20466$$

$$c = 41.5 \quad e/h = 0.211$$

$$A_s = 20 \text{ cms}^2$$

$$c = 41 \quad e/h = 0.200$$

$$c = 40 \quad e/h = 0.212$$

$$A_s = 10 \text{ cms}^2$$

$$c = 39 \quad e/h = 0.2003$$

$$c = 38 \quad e/h = 0.2117$$

Todos estos datos determinan puntos en la zona de compresión para todas las relaciones de w . Ver parte superior del diagrama 5.4.1.

Buscando puntos para un valor de $e/h = 1.021$

$$A_s = 70 \text{ cms}^2$$

$$c = 30 \quad e/h = 0.6787$$

$$c = 29 \quad e/h = 0.74$$

$$c = 26.9 \quad e/h = 1.018$$

$$c = 26.85 \quad e/h = 1.027$$

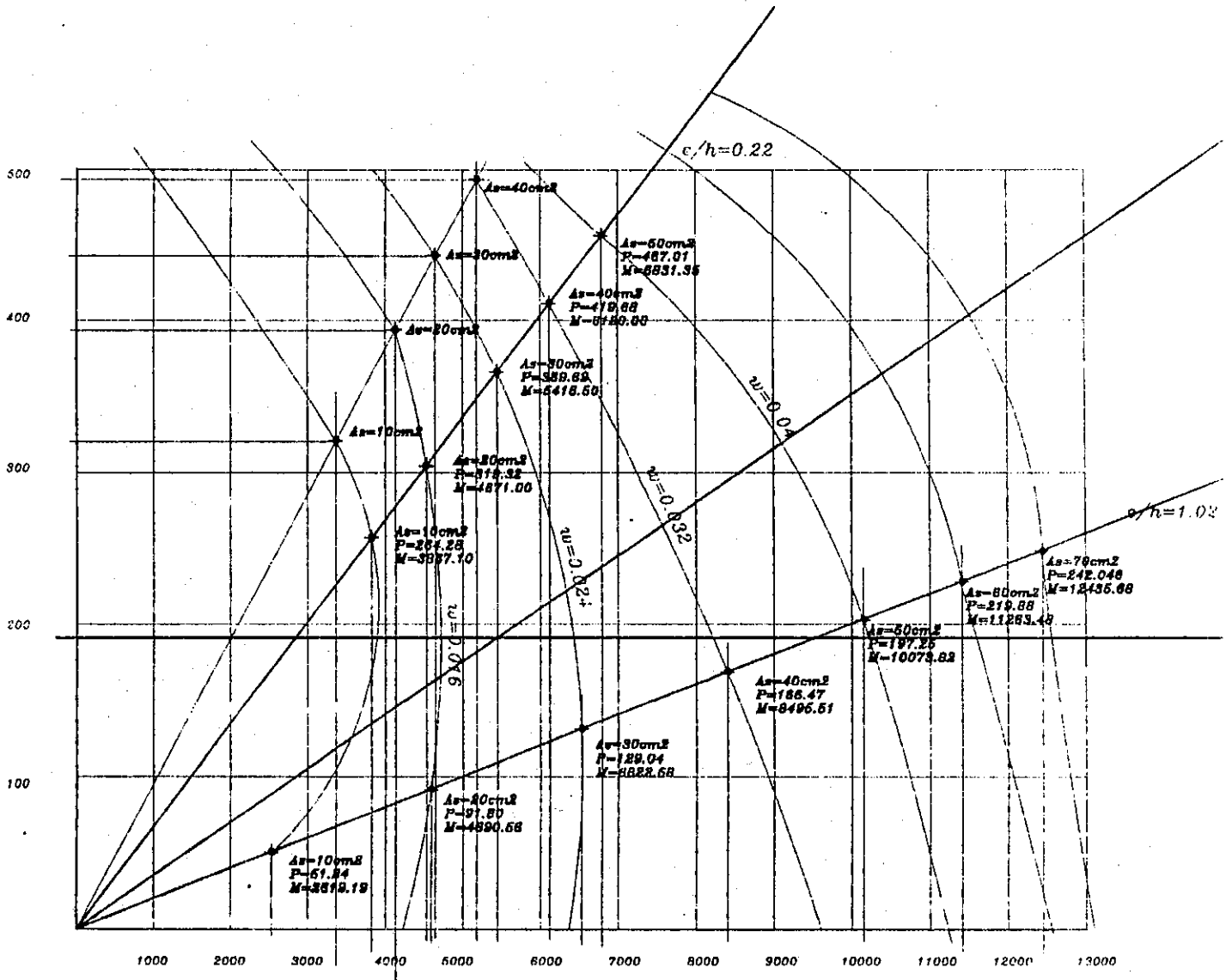
$$A_s = 60 \text{ cms}^2$$

$$c = 25 \quad e/h = 1.222$$

$$c = 26.5 \quad e/h = 0.98$$

$$c = 26.35 \quad e/h = 1.015$$

$$c = 26.30 \quad e/h = 1.024$$



SECCIÓN CONSTANTE
 ÁREAS DE ACERO VARIABLES.

Diag 5.4.1.

$$A_s = 50 \text{ cm}^2$$

$$c = 26 \quad e/h = 0.95$$

$$c = 25.5 \quad e/h = 1.0395$$

$$c = 25.25 \quad e/h = 1.05$$

$$c = 25.6 \quad e/h = 1.021$$

$$A_s = 40 \text{ cm}^2$$

$$c = 22 \quad e/h = 1.03$$

$$c = 22.2 \quad e/h = 1.0206$$

$$A_s = 30 \text{ cm}^2$$

$$c = 19 \quad e/h = 1.009$$

$$c = 18.75 \quad e/h = 1.0206$$

$$A_s = 20 \text{ cm}^2$$

$$c = 15 \quad e/h = 1.017$$

$$c = 14.95 \quad e/h = 1.0218$$

$$A_s = 10 \text{ cm}^2$$

$$c = 10 \quad e/h = 1.04$$

$$c = 10.15 \quad e/h = 1.022$$

Con estos datos se determinan puntos en la zona de tensión para todas las relaciones de w . Ver parte inferior del diagrama 5.4.1.

Ejemplo 2

Construir el diagrama de interacción P vs M para una columna de sección variable con un perfil inicialmente cuadrado de 30 por 30 cm, ensayando áreas consecutivas de concreto de 40 por 40, 50 por 50, 70 por 70 cm, y un área de acero constante de 23.22 cm², utilizando los programas anteriores. Utilizar los valores de $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$.

El objetivo es encontrar puntos de diferentes curvas que correspondan a diferentes valores de w , que tengan la misma relación de e/h , con la idea de observar su comportamiento. Como apoyo servirán los programas 1 y 2, para determinar sus gráficas:

Para el programa de falla balanceada se obtuvieron los siguientes datos de salida:

Ag	As	Pb	Mb	e/h
30 30	23.22cm ²	24.592 Ton	1765.98Ton-cm	2.393
40 40	23.22cm ²	105.68 Ton	3688.57ton-cm	0.8725
45 45	23.22cm ²	147.39 Ton	4859.779ton-cm	0.7327
50 50	23.22cm ²	190.75Ton	6174.584Ton-cm	0.6474
60 60	23.22cm ²	282.75Ton	9158.27Ton-cm	0.5398
70 70	23.22cm ²	Ton	Ton-cm	

Buscando para un valor constante de $e=10.06$ en la zona de compresión, los datos de salida fueron:

Ag=50X50

c=30 e=7.99

c=42 e=9.69

c=41.5 e=10.003

c=41.4 e=10.06

Ag=60X60

c=50 e=11.63

c=40 e=19.13

c=52.5 e=10.20

c=52.755 e=10.067

Ag=30X30

c=38 e=0.26

c=19 e=9.89

c=18.8 e=10.19

c=18.9 e=10.04

Ag=20X20

c=12 e=3.88

c=10.5 e=7.65

c=10.16 e=10.02

Buscando para un valor constante de $e=50.02$ en la zona de tensión, los datos de salida fueron:

$A_g=60 \times 60$

$c=18 \quad e=51.49$

$c=18.5 \quad e=50.12$

$c=18.55 \quad e=49.99$

$c=18.54 \quad e=50.02 \quad P_n=157.89 \text{ Ton} \quad M_n=7898.16 \text{ Ton-cm}$

$A_g=50 \times 50$

$c=20 \quad e=52$

$c=21 \quad e=50.64$

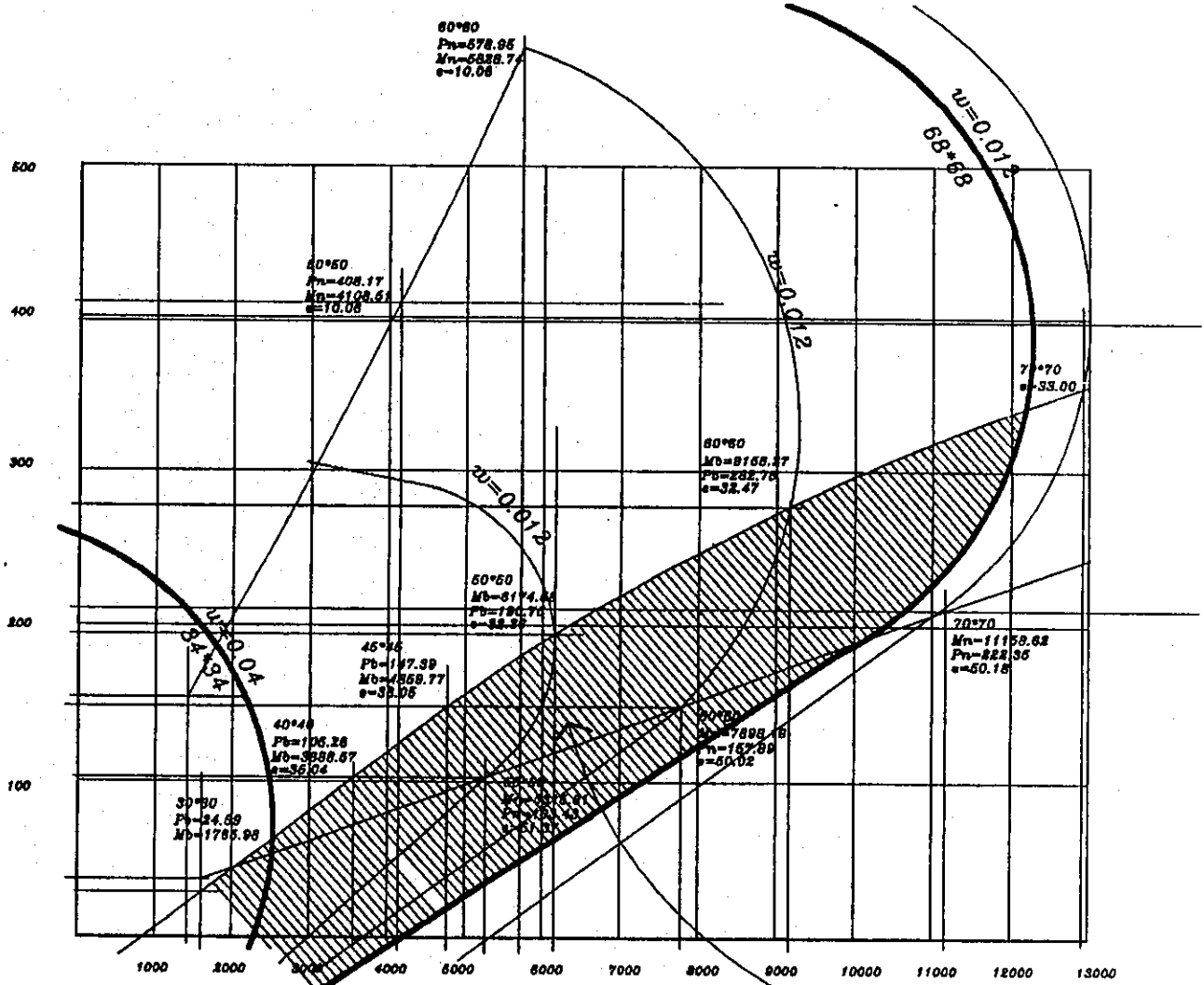
$c=21.5 \quad e=49.53$

$c=21.25 \quad e=50.18 \quad P_n=222.35 \text{ Ton} \quad M_n=11158.62 \text{ Ton-cm}$

Algunas consideraciones de diseño dicen que la cuantía (ρ) en columnas debe variar entre 0.01 y 0.08 o el 1% y 8% según la ACI, aunque se recomienda un valor del 4% máximo para evitar el congestionamiento de refuerzo. Para que estas consideraciones sean tomadas en cuenta, en este análisis la relación de A_s/A_g que define a ρ toma diferentes valores, debido a que A_g es cambiante. Esto restringe la zona de tensión y define límites de cuantías de acero que no se deben sobrepasar en el diseño de la sección (obsérvese la región sombreada del diagrama de interacción). Esta zona define rangos de (P, M) o excentricidades límites para una sección rectangular variable. Debido a que la carga y momento factorizada no son constantes a lo largo de una columna, se hace necesario revisar la resistencia de ella (parámetro variable, establecido por el diagrama) en cada punto. En otras palabras la sección correspondiente a cualquier punto x a lo largo de la columna debe resistir la combinación de carga y momento factorizado, para lo cual es deseable que en su estado de falla se propicie la falla del acero a tensión.

En el diagrama del ejemplo se puede apreciar que conforme la sección transversal de la columna aumenta su capacidad resistiva aumenta, siempre y cuando se tomen las consideraciones de diseño ya descritas. Esto establece que en regiones donde el momento flector es grande la sección transversal es mayor.

Por ejemplo la columna para la cual se construyó el diagrama del ejemplo, con un refuerzo longitudinal de 46.44 cm^2 establece un rango 34×34 a 68×68 en sus dimensionales sin sobrepasar las cuantías del 1% y 4% respectivamente, estableciendo valores tope de carga-momentos de 110 ton, 2,500 ton.cm para la más pequeña y de 375 ton, 13,000 ton.cm para la más grande; esto propone que si la columna se clasifica como corta presenta estos valores límites para $x = 0$ y $x = l$ respectivamente, de manera que el máximo diagrama de momentos que se puede dar en la columna es de la manera siguiente:



SECCIÓN VARIABLE
AREAS DE ACERO CONSTANTES.
fig 5.4.2

ZONA DONDE SE PROPICIA LA FALLA A TENSION.

Recordar que para el diseño del refuerzo estas cargas deben ser últimas, también recordar que el refuerzo longitudinal se mantiene constante a lo largo de todo el elemento. Vale la pena hacer notar que los diagramas producidos por diferentes estados de carga en una estructura pueden tomar diferentes formas y/o valores límites; esto sugiere, que la sección diseñada puede ajustarse a sus condiciones de carga, dando como resultado peraltes grandes donde el momento flector es grande y peraltes pequeños donde el momento es pequeño.

Debido a todo lo antes dicho para que una columna funcione satisfactoriamente se debe mantener vigente que el momento resistivo sea siempre mayor que el momento actuante.

Como ya se vió en el capítulo 4, si la relación de esbeltez $\frac{Kl_u}{r}$ (sección constante)

o $K \int \frac{dx}{r}$ (secciones variables) excede los límites para las columnas cortas, el

miembro a compresión, se pandeará antes de alcanzar el estado límite de falla del material. Debido a esto se genera un momento adicional $P_u \Delta$ que reduce la capacidad total de carga. El momento total ($P_u e + P_u \Delta$) se puede diseñar para un momento M_c mayor o amplificado, como una columna no esbelta. Para esto se supone que la carga P_u actúa con excentricidad $(e + \Delta)$ para producir un momento M_c . A la relación M_c/M_2 se le denomina el factor de amplificación utilizado en el método de amplificación de momento. El método para encontrar la relación de esbeltez ya descrito en la sección 4.1 es aplicable para secciones variables ya que Y_a, Y_b, Y_{mn} dependen únicamente de la rigidez transmitida de los miembros que llegan a los nudos, valores que se pueden encontrar con las gráficas y estudios de rigidez del capítulo 4.

Este método determina los valores de longitud efectiva, todo esto para la clasificación del elemento. Si la columna es identificada como esbelta y se da que:

$$K \int \frac{dx}{r} < 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} \text{ marcos contraventeados.}$$

$$K \int \frac{dx}{r} < 22$$

marcos sin contravientos.

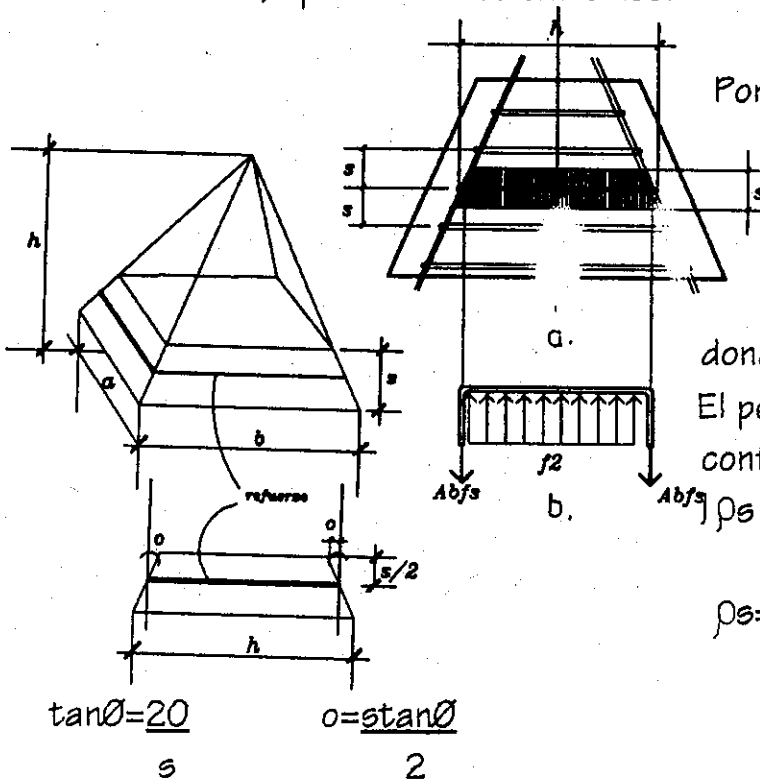
Mc se puede determinar por el método de amplificación de momentos.

$$M_c = \underbrace{\delta_b}_{\text{factores de amplificación.}} \underbrace{M_{2b}}_{\text{cargas por gravedad, mayor de los momentos factorizados}} + \underbrace{\delta_s}_{\text{cargas que produzcan desplazamiento lateral apreciable}} M_{2s}$$

En la práctica la gran mayoría de columnas pertenecen a este rango, siendo este método el más usado. Para columnas largas se recomienda un análisis de segundo orden para valores de $K \int \frac{dx}{r}$ mayores a 100.

5.5 Diseño del Refuerzo Transversal (estribos por confinamiento).

Se iniciará el análisis con el fragmento de columna de la figura 5.5.1a. Las fuerzas resultantes internas son las descritas en la fig 5.5.1b por la aplicación de una fuerza axial P, aplicada en los extremos.



Por equilibrio de fuerzas se tiene:

$$2Abfs = f_2 h s$$

$$f_2 = \frac{2Abfs}{h s}$$

donde $f_2 = a$ la presión interior del núcleo

El porcentaje volumétrico de refuerzo de confinamiento es:

$$\rho_s = \frac{\text{Volumen de acero por revolución}}{\text{Volumen del núcleo por revolución}}$$

$$\rho_s = \frac{4hAs}{\text{Vol del núcleo por revolución}} \quad \text{ec 5.5.1}$$

$$\rho_s = \frac{4hAs}{\text{Vol del núcleo por revolución}}$$

$$\tan \theta = \frac{20}{s}$$

$$o = s \tan \theta$$

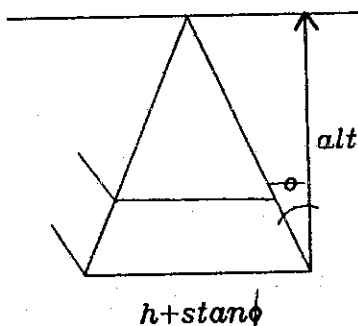
$$A_{\text{ashurada}} = \frac{\left(\frac{h - 2s \tan \theta + h + 2s \tan \theta}{2} \right) s}{2}$$

$$A = \frac{2hs}{2} = hs \qquad \text{Vol} = \frac{\left(\frac{h + 2s \tan \theta}{2} \right) \left(\frac{h + 2s \tan \theta}{2} \right) \text{alt}}{3} - \frac{\left(\frac{h - 2s \tan \theta}{2} \right) \left(\frac{h - 2s \tan \theta}{2} \right) \text{alt}}{3}$$

$$\text{Vol} = \frac{(h + s \tan \theta)^2 \text{alt}}{3} - \frac{(h - s \tan \theta)^2 \text{alt}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{h + s \tan \theta}{2} = \frac{h + s \tan \theta}{2 \text{alt}}$$

$$\text{alt} = \frac{h + s \tan \theta}{2 \tan \theta}$$



$$\frac{h + s \tan \theta}{2 \text{alt}} = \tan \theta$$

$$\frac{h + s \tan \theta}{2 \tan \theta} = \text{alt}$$

$$\text{Vol} = \frac{h + s \tan \theta}{3} \left(\frac{h + s \tan \theta}{2 \tan \theta} \right)^2 - \frac{(h - s \tan \theta)^2 (h - s \tan \theta)}{3 (2 \tan \theta)}$$

$$3(2) \tan \theta \text{Vol} = (h + s \tan \theta)^2 (h + s \tan \theta) - (h - s \tan \theta)^2 (h - s \tan \theta)$$

$$= (h + s \tan \theta)^3 - (h - s \tan \theta)^3$$

$$= h^3 + 3h^2 s \tan \theta + 3h (s \tan \theta)^2 + (s \tan \theta)^3 - (h^3 - 3h^2 s \tan \theta + 3h (s \tan \theta)^2 - (s \tan \theta)^3)$$

$$= h^3 + 3h^2 s \tan \theta + 3h (s \tan \theta)^2 + (s \tan \theta)^3 - h^3 + 3h^2 s \tan \theta - 3h (s \tan \theta)^2 + (s \tan \theta)^3$$

$$6 \tan \theta \text{Vol} = 6h^2 s \tan \theta + 2(s \tan \theta)^3$$

$$\text{Vol} = \frac{6h^2 s \tan \theta + 2(s \tan \theta)^3}{6 \tan \theta}$$

$$\text{Vol} = h^2 s + \frac{s^3 \tan^2 \theta}{3}$$

para ángulos pequeños $\tan \theta \rightarrow \theta$

Para secciones constantes se da que:

$\text{Vol} = h^2 s$ substituyendo en ec 5.5.1 se tiene:

$$\rho_s = \frac{4hA_s}{h^2 s} = \frac{4A_s}{hs} \quad \text{para secciones constantes}$$

$$\rho_s = \frac{4hA_s}{h^2 s + \frac{hs^3 \tan^2 \theta}{3h}}$$

$$\rho_s = \frac{4hA_s}{s(h + \frac{hs^2 \tan^2 \theta}{3h})} = \frac{2(2) A_s}{sh(1 + \frac{s^2 \tan^2 \theta}{3h^2})}$$

$$= \frac{2f_2}{fs(1 + \frac{s^2 \tan^2 \theta}{3h^2})}$$

$$f_2 = \frac{\rho_s fs(1 + \frac{s^2 \tan^2 \theta}{3h^2})}{2}$$

La contribución de la presión lateral de confinamiento será:

según la ACI $4.1 f_2 A_n = 4.1 \frac{\rho_s fs(1 + \frac{s^2 \tan^2 \theta}{3h^2})}{2} A_n$

Además se tiene que:

Contribución del Recubrimiento=Contribución del confinamiento.

$$0.85 f_c (A_c - A_n) = 2.05 s f_s \frac{(1 + s^2 \tan^2 \theta)}{3h^2} A_n$$

$$s = \frac{0.85 f_c (A_c - A_n)}{f_s A_n (2.05) (1 + s^2 \tan^2 \theta)}$$

$$s = \frac{0.425 f_c (A_c - 1)}{f_y (A_n)} \left(\frac{1}{\frac{(1 + s^2 \tan^2 \theta)}{3h^2}} \right) \text{ ec 5.5.2}$$

$$\frac{1}{\frac{(1 + s^2 \tan^2 \theta)}{3h^2}} \text{ que es un factor de reducción}$$

Debido a que $s = A_s / s.h.$ substituyendo en 5.5.2

$$A_s = \frac{0.425 s.h. f_c (A_c - 1)}{f_y (A_n)} \left(\frac{1}{\frac{(1 + s^2 \tan^2 \theta)}{3h^2}} \right) \text{ ec 5.5.3}$$

Debido a que los estribos necesariamente son del mismo diámetro transversal $A_s = \text{constante}$ y que los valores de A_c y A_n y h son variables a lo largo de la columna, el espaciamiento s variará. La ecuación 5.5.2 establece los valores de s necesarios para los valores predeterminados ya descritos.

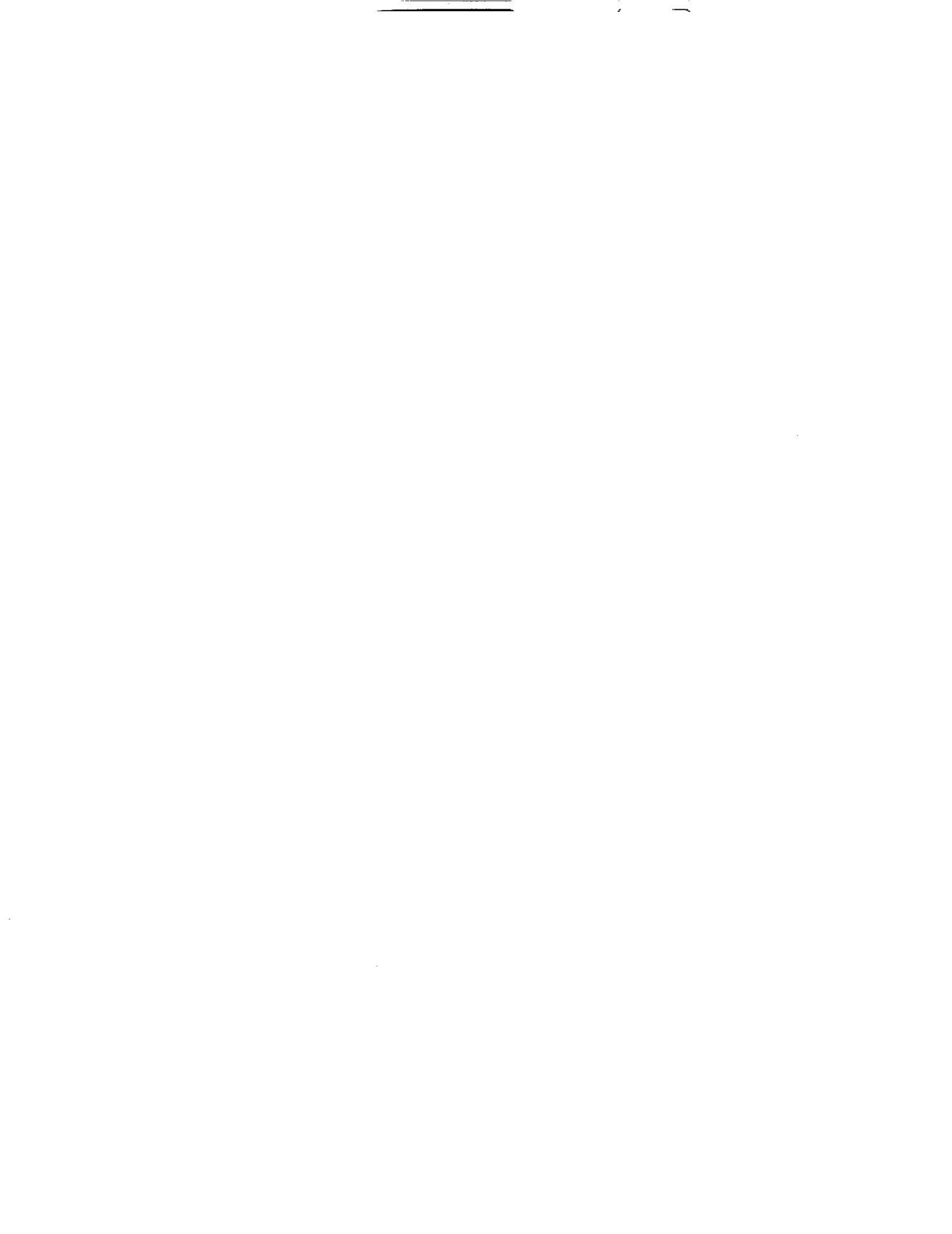
CONCLUSIONES.

- Los métodos convencionales de análisis pueden ser utilizados para evaluar estructuras compuestas por miembros de sección variable, siempre y cuando se examinen la rigidez y los factores de transporte de momento de sus miembros previamente .
- En un miembro de sección variable, cuyos extremos llamados a y b, se establece que un momento inducido en a por una rotación unitaria en el extremo contrario b,(siendo a fijo) es igual al momento inducido en b por una rotación unitaria en el extremo contrario en a,(siendo b fijo). Esto de forma idéntica que para miembros de sección constante.
- Las deformaciones en miembros de sección variable pueden calcularse por los mismos principios que rigen para miembros de sección constante. Estas deformaciones son proporcionales a la inercia de la sección transversal, siendo éste otro factor determinante en el cálculo de pendientes en la elástica y deflexiones.
- En el presente documento se examinó el caso de un puente compuesto por elementos de concreto de sección variable, éste se resolvió por dos métodos diferentes de análisis, los cuales arrojaron resultados muy similares.
- Se propone que la esbeltez de una columna de sección variable puede calcularse por medio de la integración de la expresión $de = kv/r$ (ec 4,1,2). Éste es un parámetro que puede ser utilizado para su clasificación.
- A través del presente trabajo se determinó que para elementos simétricos y asimétricos al eje neutro, se obtienen iguales factores de rigidez y transporte, siendo de primer orden los valores de los peraltes en los extremos y la forma en que se desarrollan los bordes. Demostrado en la sección 4.2.3.1.1 al 4.

- La metodología expuesta en esta tesis puede implementarse para otras variadas formas. La serie de curvas planteadas para un tipo determinado de bordes puede encontrarse para otras variaciones, la forma es la misma que se utilizó en la segunda parte del capítulo 4.
- Para evaluar el funcionamiento de una columna de sección variable es necesario examinar la combinación de Momento y sección resistiva, y verificar que éstas cumplan con las normas impuestas por la ACI.
- El momento flexionante producido por el estado de carga de la columna siempre debe de ser contrarrestado por el momento resistente a lo largo de todo el elemento.
- Debido al cambio de sección en este tipo de elementos los consecutivos diagramas de interacción P vrs M se distorsionan, de manera que se deforman las zonas donde domina la tensión y la compresión.
- El espaciamiento de zunchos o estribos, para una columna de sección variable se calcula de igual forma a lo estipulado por la ACI pero, afectado por un factor adicional de forma determinado por la expresión del capítulo 5.

RECOMENDACIONES:

- *Antes de calcular el armado de un miembro(columna) de sección variable se recomienda encontrar sus constantes elásticas.*
- *Considerando las condiciones anteriores, cuando se calculen columnas de concreto de sección variable, el diseñador deberá contar con diagramas de interacción P/M para sus deferentes secciones, por lo tanto, a menos que cuente con otras ayudas especiales se recomienda construir gráficas como las aquí desarrolladas.*
- *Es recomendable que los arquitectos diseñadores conozcan los límites prácticos al diseñar secciones variables en piezas de estructuras para lograr diseños realizables y que no caigan en modificaciones posteriores.*
- *Se recomienda al diseñador no utilizar formas muy abruptas en los bordes para evitar concentraciones de esfuerzo.*
- *Se recomienda utilizar recubrimientos constantes por sobre el refuerzo de la columna.*
- *Para evitar complejidad en cálculos se recomienda utilizar espaciamiento constante de estribos, y reducirlo en zonas donde sea necesario.*



BIBLIOGRAFÍA

- Comité ACI 318, Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI 318-83) y comentarios. Editorial Limusa. 2da Edición. México 1990.
- Kinney J. Esterling. Análisis de Estructuras Indeterminadas. Compañía Editorial Continental, S.A. México 1968.
- Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C. Diseño de Estructuras de Concreto conforme el Reglamento ACI 318-83. Editorial Limusa. 3ra Edición. México 1990. Tomos del 1 al 3.
- Rodolfo Luthe García. Análisis Estructural, Editorial Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México 1971.
- Dennis G. Zill. Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamericana. México. mayo 1988.
- Edward G. Nawy. Concreto Reforzado. Prentice Hall. Editorial Iberoamericana, México 1990.
- Edwards/Penney. Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones. Prentice Hall. Editorial Iberoamericana. México 1987.
- Gere-Timoshenko, Mecánica de Materiales, Grupo Editorial Iberoamericana, México. 1986.



APÉNDICE 1.

Deformación en elementos de sección variable.

```
10 CLS : CLEAR
15 PRINT " ENCUENTRA CONSTANTES DE ECUACIONES PENDIENTE Y FLECHA MAX"
16 PRINT " PARA UN ELEMENTO DE SECCION VARIABLE Y SIMPLEMENTE APOYADO"
17 PRINT "          CARGA DISTRIBUIDA"
20 INPUT "W="; W; INPUT "L"; L; INPUT "H1"; H1; INPUT "H2"; H2: M = (H1 - H2) / L: H = H1
30 A = (L / (-M ^ 2)) * (((H / -2) * ((-1 / (-M * H))) + (LN(H) / -M)))
40 B = ((-H ^ 2) * -1) / (2 * (-M) * (H))
50 C = (2 * H * LOG(H)) / (-M)
60 D = (H * (LOG(H) - 1)) / M
70 C2 = W * (A) - ((W / -M ^ 3) * (B + C - D)): C2 = -C2: PRINT "C2="; C2
75 CON = -(M * L) + H
80 A = (L / (-M ^ 2)) * (((H / -2) * ((-1 / (-M * CON))) + (LOG(CON) / -M)))
90 B = ((-H ^ 2) * -1) / (-2 * (M) * CON)
100 C = (2 * H * LOG(CON)) / (-M)
110 D = (CON * (LOG(CON) - 1)) / M
120 C3 = W * (A) - ((W / (-M ^ 3)) * (B + C - D)): C1 = -1 * (C3 + C2) / L: PRINT "C1="; C1
130 END
```

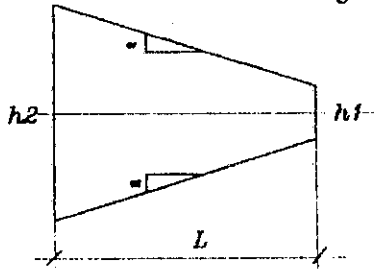
```
10 CLS : CLEAR
11 PRINT "          DEFINE LA FUNCION"
12 PRINT " Y ENCUENTRA DEFORMACION MAX Y SU UBICACION A LO LARGO DEL
ELEMENTO"
20 INPUT "W"; W
30 INPUT "H1="; H1; INPUT "H2"; H2; INPUT "L"; L: M = (H1 - H2) / L: INPUT "X"; X: CONS = (-
M * X) + H1: H = H1
40 A = W * L * (1 / (-M ^ 2)) * ((H / (-2 * CONS ^ 2)) + (1 / CONS))
50 B = W * (1 / (-M ^ 3)) * (((-H ^ 2) / (2 * (CONS ^ 2))) + ((2 * H) / CONS) + LOG(CONS))
60 INPUT "C1="; C1
65 INPUT "C2="; C2
100 RES = (A - B + C1) * 6 / 2.1E+10: PRINT "RES"; RES
110 INPUT "Xdef"; X: CO = -M * X + H: A = (-H / (-M * CO * -2)): B = LOG(CO) / -M: C = A * H: D
= B * 2 * H: E = ((1 / M) * CO * (LOG(CO) - 1))
120 Y = (((W * L) / (-M ^ 2)) * A + B) - ((W / -M ^ 3) * (C + D - E)) + (C1 * X) + C2
130 PRINT "Y="; (Y * 6) / (21000000000)
140 END
```

APÉNDICE 2.

Factores de Rigidez y Transporte.

BORDES RECTOS:

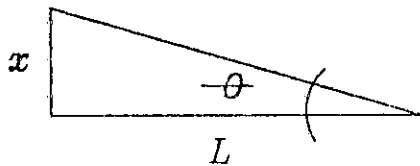
Para encontrar la relación que existe entre dos áreas consecutivas de un elemento cuadrado se evaluará la siguiente figura :



$$\tan\theta = a/b$$

$$a = \tan\theta b$$

$$\theta = \text{atn}(a/b)$$



$$\tan\theta_2 = x/L$$

$$x = L \tan\theta$$

$$\theta_2 = \text{atn}(A/B)$$

Es válido decir que para un ancho unitario las inercias de dos secciones consecutivas separadas una distancia L serán :

$$I_1 = (1/12)(b_1)^3 \quad \text{y} \quad I_2 = (1/12)(b_2)^3$$

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{E} \int \frac{M dx}{1/12 b^3}$$

Para secciones cuadradas

$$1 \text{ rad} = \frac{12}{E} \int \frac{M dx}{b^3}$$

Donde b es una función lineal de la forma $y = mx + a$

De la siguiente manera se puede expresar b en función de x.

$$\text{con } m = \frac{b_2 - b_1}{L} = \frac{b_2 - b_1}{L} \quad \text{y con condiciones de frontera : } \begin{array}{ll} x=0 & b=b_1 \\ x=L & b=b_2 \end{array}$$

y substituyendolo en $y=mx+b$ se obtiene: $y=\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1$

$$b=\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1$$

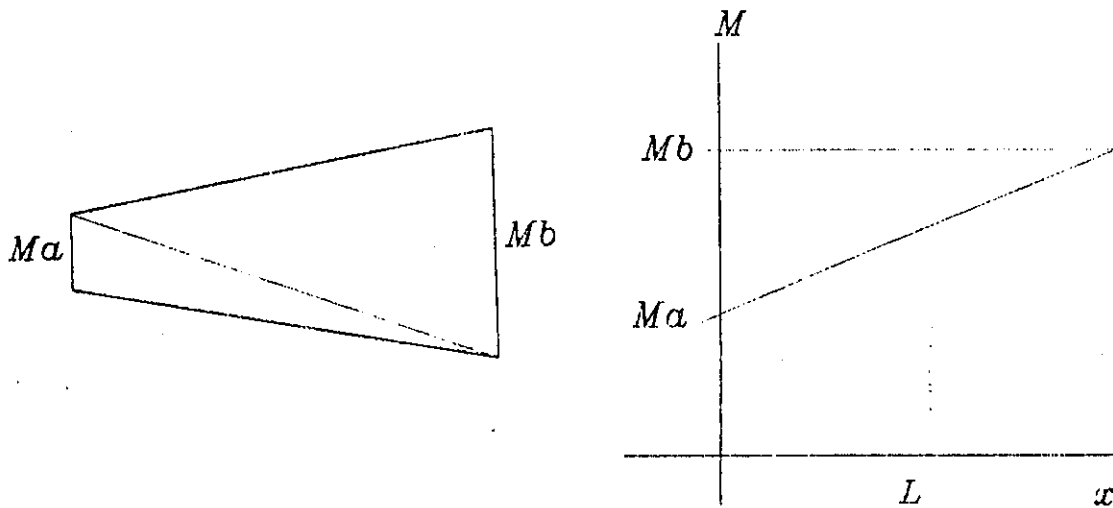
Colocando estos valores en la ecuación de giro :

$$1\text{rad} = \frac{12}{E} \frac{Mdx}{\left(\frac{b_2-b_1}{L}x + b_1\right)^3}$$

Si $C_1=(b_2-b_1)/L$ y $C_2=b_1$ que son valores conocidos, se tiene entonces:

$$1\text{rad} = \frac{12}{E} \frac{Mdx}{(C_1x + C_2)^3}$$

Se asume que el diagrama de Momentos sobre el elemento se construye de forma lineal, como se muestra en la figura :



También se da que $m=\frac{Mb-Ma}{L}$

y la ecuación del momento en función de x sería $M(x)=\frac{Mb-Ma}{L}x + Ma$

en la ecuación de giro ahora se tiene:

$$1\text{rad} = \frac{12}{E} \int \frac{(Mb-Ma)x + Ma \, dx}{(C1x + C2)^3}$$

separándola en dos integrales:

$$1 = \frac{12}{E} \left(\frac{Mb-Ma}{L} \int \frac{x \, dx}{(C1x+C2)^3} + Ma \int \frac{1 \, dx}{(C1x+C2)^3} \right)$$

Para resolver la expresión sean: $\text{integ1} = \int \frac{x \, dx}{(C1x+C2)^3}$ e $\text{integ2} = \int \frac{dx}{(C1x+C2)^3}$

Solución de integ 1

$$\int \frac{x \, dx}{(C1x+C2)^3}$$

sea

$$u = C1x + C2$$

$$du = C1 \, dx$$

$$= \frac{1}{C1^2} \int \left(\frac{u}{u^3} - \frac{C2}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{1}{C1^2} \left(\frac{+C2}{2u} - \frac{1}{u} \right)$$

$$= \frac{1}{C1} \int \frac{(u-C2)/C1 \, du}{u^3}$$

$$= \frac{1}{C1^2} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{C2}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{1}{C1^2} \left(\frac{+C2}{2(C1x+C2)^2} - \frac{1}{C1x+C2} \right)$$

$$= \frac{1}{C1} \int \frac{u-C2 \, du}{C1 u^3}$$

$$= \frac{1}{C1^2} \left(\frac{-1}{u} + \frac{C2}{2u^2} \right)$$

$$= \frac{C2}{2C1(C1x+C2)} - \frac{1}{C1(C1x+C2)}$$

Solución de integ 2

$$\int \frac{dx}{(C1x+C2)^3}$$

sea

$$u = C1x + C2$$

$$du = C1 \, dx$$

$$= \frac{1}{C1} \int \frac{du}{u^3}$$

$$= \frac{1}{C1} \frac{u^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{1}{-2C1(C1x+C2)}$$

$$= \frac{1}{C1} \int u^{-3} \, du$$

$$= \frac{1}{C1} \frac{(C1x+C2)^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2C1(C1x+C2)}$$

Substituyendo los valores de integ1 e integ2 en la ecuación principal se obtiene:

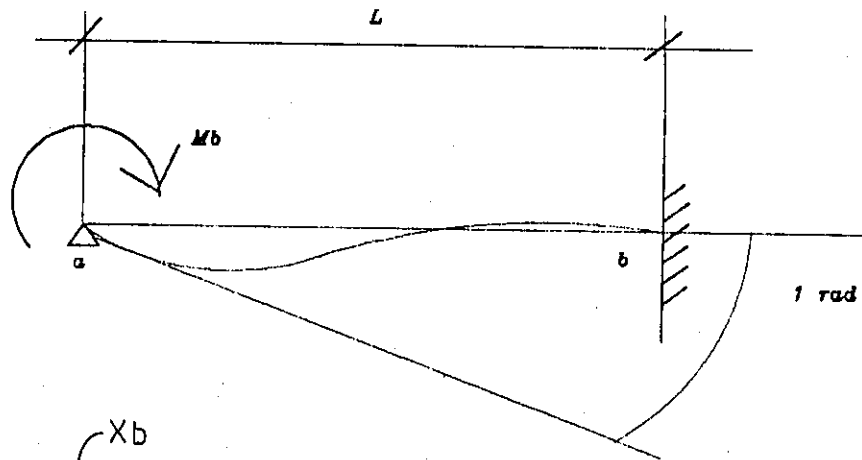
$$1 = \frac{12}{E} \left(\frac{M_b - M_a}{L} \left(\frac{C_2}{2C_1^2(C_1x + C_2)^2} - \frac{1}{C_1^2(C_1x + C_2)} \right) \right) \Big|_0^L - \frac{M_a}{2C_1(C_1x + C_2)} \Big|_0^L$$

$$1 = \frac{12}{E} \frac{M_b - M_a}{L} \left(\left(\frac{C_2}{2C_1^2(C_1L + C_2)^2} - \frac{1}{C_1^2(C_1L + C_2)} \right) - \left(\frac{C_2}{2C_1^2C_2^2} - \frac{1}{C_1^2C_2} \right) \right)$$

$$- \left(\frac{M_a}{2C_1(C_1L + C_2)^2} - \frac{M_a}{2C_1C_2^2} \right)$$

Ésta se llamará ecuación 1, resultado de la primera condición de giro unitario.

Ahora se aplicará la condición de desviación angular :
de los teoremas anteriores:



$$\theta_a/b = \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x(Mdx)}{I}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ y } h = 2x \tan \theta + h_1$$

$$t b/a = O = \frac{1}{E} \int_{x_b}^{x_a} \frac{x(M dx)}{1}$$

$$t b/a = O = \frac{1}{E} \int \frac{x(M dx)}{(2x \tan \theta + h_1)^3}$$

$$O = \frac{12}{L} \int \frac{\left(\frac{(M_b - M_a)x + M_a}{L} \right) x dx}{(2x \tan \theta + h_1)^3}$$

$$O = \frac{12}{L} \int \frac{(M_b - M_a)x^2 dx}{(2x \tan \theta + h_1)^3} + \int \frac{M_a x dx}{(2x \tan \theta + h_1)^3}$$

$$O = \frac{12}{L} \int \frac{M_b x^2 dx}{L (2x \tan \theta + h_1)^3} \quad \text{Integ1} \quad + \quad \int \frac{M_a x^2 dx}{L (2x \tan \theta + h_1)^3} \quad \text{Integ2} \quad + \quad \int \frac{M_a x dx}{(2x \tan \theta + h_1)^3} \quad \text{Integ3}$$

Resolviendo cada integral por separado:

Solución Integ 1

$$= \int \frac{M_b x^2 dx}{L (2x \tan \theta + h_1)^3} = \frac{M_b}{L} \int \frac{x^2 dx}{(2x \tan \theta + h_1)^3}$$

sea:

$$u = 2x \tan \theta + h_1$$

$$du = 2 \tan \theta dx$$

$$x = (u - h_1) / 2 \tan \theta$$

$$= \frac{M_b}{L} \int \frac{\left(\frac{u - h_1}{2 \tan \theta} \right)^2 \frac{du}{2 \tan \theta}}{u^3} = \frac{M_b}{L} \int \frac{(u - h_1)^2 du}{u^3 (2 \tan \theta)^3} = \frac{M_b}{L} \int \frac{u^2 - 2uh_1 + h_1^2}{u^3 (2 \tan \theta)^3} du$$

$$= \frac{M_b}{L} \int \left(\frac{1}{u (2 \tan \theta)^3} - \frac{2h_1}{u^2 (2 \tan \theta)^3} + \frac{h_1^2}{u^3 (2 \tan \theta)^3} \right) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Mb}{L(2\tan\theta)^3} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2h1}{u^2} + \frac{h1^2}{u^3} \right) du \\
&= \frac{Mb}{L(2\tan\theta)^3} \left(\int \frac{du}{u} - 2h1 \int \frac{du}{u^2} + h1^2 \int \frac{du}{u^3} \right) \\
&= \frac{Mb}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln(2x\tan\theta+h1) \Big|_0^L + \frac{2h1}{2x\tan\theta+h1} \Big|_0^L - \frac{h1^2}{2(2x\tan\theta+h1)^2} \Big|_0^L \right)
\end{aligned}$$

Solución Integ 2

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{Max \, dx}{L(2x\tan\theta+h1)} \quad \text{cuya solución es idéntica a la Integral 1.} \\
&= \frac{Ma}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln(2x\tan\theta+h1) \Big|_0^L + \frac{2h1}{2x\tan\theta+h1} \Big|_0^L - \frac{h1^2}{2(2x\tan\theta+h1)^2} \Big|_0^L \right)
\end{aligned}$$

Solución Integ 3

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{Max \, dx}{(2x\tan\theta+h1)^3} \quad \begin{array}{l} \text{sea:} \\ u=2x\tan\theta+h1 \\ du=2\tan\theta dx \\ x=(u-h1)/2\tan\theta \end{array} \quad = Ma \int \frac{x \, dx}{u^3} \\
&= Ma \int \frac{\frac{u-h1}{2\tan\theta} \frac{du}{2\tan\theta}}{u^3} = Ma \int \frac{u-h1}{u^3 (2\tan\theta)^2} = \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \int \frac{u-h1}{u^3} du \\
&= \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\int \frac{u}{u^3} du - \int \frac{h1}{u^3} du \right) \\
&= \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\int \frac{1}{u^2} du - h1 \int \frac{1}{u^3} du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\frac{-1}{u} + \frac{h1}{2u} \right) = \frac{Ma}{(2\tan\theta)} \left(\frac{h1}{2u^2} - \frac{1}{u} \right) \\
&= \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\frac{h1}{2(2x\tan\theta+h1)} - \frac{1}{(2x\tan\theta+h1)} \right) \Bigg|_0^L \\
&= \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\left(\frac{h1}{2(2L\tan\theta+h1)} - \frac{h1}{2(h1)^2} \right) - \left(\frac{1}{2(2L\tan\theta+h1)} - \frac{1}{h1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Uniendo las Integrales

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{Mb}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln|2x\tan\theta+h1| \Bigg|_0^L + \frac{2h1}{2x\tan\theta+h1} \Bigg|_0^L - \frac{h1^2}{2(2x\tan\theta+h1)^2} \Bigg|_0^L \right) \\
&- \frac{Ma}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln|2x\tan\theta+h1| \Bigg|_0^L + \frac{2h1}{2x\tan\theta+h1} \Bigg|_0^L - \frac{h1^2}{2(2x\tan\theta+h1)^2} \Bigg|_0^L \right) \\
&+ \frac{Ma}{(2\tan\theta)^2} \left(\frac{h1}{2(2x\tan\theta+h1)^2} - \frac{1}{(2x\tan\theta+h1)} \right) \Bigg|_0^L \\
0 &= \frac{Mb}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln|2L\tan\theta+h1| - \ln|0+h1| + \frac{2h1}{2L\tan\theta+h1} \right. \\
&- \frac{2h1}{h1} - \frac{h1^2}{2(2L\tan\theta+h1)^2} + \frac{h1^2}{2h1^2} \left. \right) \\
&- \frac{Ma}{L(2\tan\theta)^3} \left(\ln|2L\tan\theta+h1| - \ln|0+h1| + \frac{2h1}{2L\tan\theta+h1} - 2 \right. \\
&- \left. \frac{h1^2}{2(2L\tan\theta+h1)^2} + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{Ma}{(L \tan \theta)^2} \left(\left(\frac{h_1}{2(2L \tan \theta + h_1)} - \frac{h_1}{2h_1^2} \right) - \left(\frac{1}{2L \tan \theta + h_1} - \frac{1}{h_1} \right) \right)$$

$$\theta = \frac{\ln \left| \frac{2L \tan \theta + h_1}{h_1} \right| - \ln \left| \frac{h_1}{2(2L \tan \theta + h_1)} - \frac{h_1^2}{2(2L \tan \theta + h_1)^2} - 1.50 \right|}{L(2 \tan \theta)^3}$$

$$(M_b - M_a) + Ma \left(\frac{\frac{h_1}{2(2L \tan \theta + h_1)} - \frac{1}{2h_1} - \frac{1}{2L \tan \theta + h_1} + \frac{1}{h_1}}{(2 \tan \theta)^2} \right)$$

sean los valores :

$$c_1 = 2L \tan \theta$$

$$h_1 = h_1$$

$$c_2 = 2 \tan \theta$$

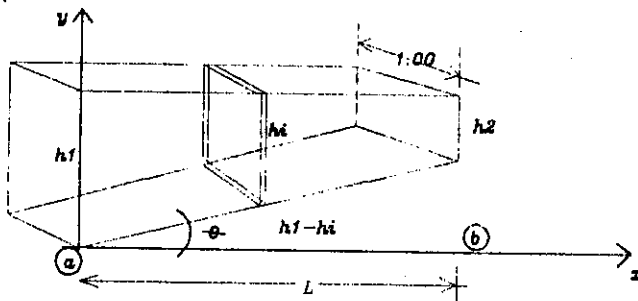
APÉNDICE 3

Factores de Rigidez y Transporte.

Bordes Asimétricos Rectos.

Considérese un caso muy parecido al anterior, sólo que con un borde lateral completamente perpendicular a la sección y el opuesto disminuyendo en cartela desde el punto a al punto b como lo indica la siguiente figura:

En el caso de una cartela:



$$\tan \theta = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{h_1 - h_2}{x}$$

$$h_1 = -(x \tan \theta - h_1)$$

$$h_1 = h_1 - x \tan \theta$$

Nota: Obsérvese el parecido al caso anterior.

Para el teorema de la desviación t_b/a es igual a:

$$t_{b/a} = \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x M dx}{I}$$

Sea:

$$I = \frac{1}{12} (h_1 - x \tan \theta)^3$$

$$\tan \theta = h_1$$

$$t_{b/a} = \frac{12}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x M dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3}$$

$$t_{b/a} = \frac{12}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{x \left(\left(\frac{M_b - M_a}{L} \right) x + M_a \right) dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3}$$

$$t_{b/a} = \frac{12}{E} \left(\int \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} \right) x \cdot x}{(h_1 - x \tan \theta)^3} + \int \frac{M_a x dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3} \right)$$

$$t_{b/a} = \frac{12}{E} \left(\int \frac{M_b x^2 dx}{L (h_1 - x \tan \theta)^3} - \int \frac{M_a x^2 dx}{L (h_1 - x \tan \theta)^3} + \int \frac{M_a x dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3} \right)$$

Solución integ 1

$$= \frac{M_b}{L} \int \frac{x^2 dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3}$$

$$u = h_1 - x \tan \theta$$

$$du = -\tan \theta dx$$

$$-x = \frac{u - h_1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta$$

$$x = \frac{h_1 - u}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta$$

$$= \frac{M_b}{L} \int \frac{\left(\frac{h_1 - u}{\tan \theta} \right)^2 - \frac{du}{\tan \theta}}{u^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Mb}{L} \int \frac{(h_1 - u)^2 du}{u^3 \tan^3 \theta} = \frac{-Mb}{L} \int \frac{(h_1^2 - 2h_1u + u^2) du}{u^3 \tan^3 \theta} \\
&= \frac{-Mb}{L} \left(\int \frac{h_1^2}{u^3 \tan^3 \theta} du - 2 \int \frac{h_1}{u^2 \tan^3 \theta} du + \int \frac{1}{u \tan^3 \theta} du \right) \\
&= \frac{-Mb}{L} \left(\frac{h_1^2}{\tan^3 \theta} \int \frac{du}{u^3} - \frac{2h_1}{\tan^3 \theta} \int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{\tan^3 \theta} \int \frac{du}{u} \right) \\
&= \frac{-Mb}{L \tan^3 \theta} \left(h_1^2 \int \frac{du}{u^3} - 2h_1 \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u} \right) \\
&= \frac{-Mb}{L \tan^3 \theta} \left(-h_1^2 / 2u^2 \Big|_0^L + 2h_1 / u \Big|_0^L + \ln |u| \Big|_0^L \right) \\
&= \frac{-Mb}{L \tan^3 \theta} \left(-h_1^2 / 2(h_1 - x \tan \theta)^2 \Big|_0^L + 2h_1 / (h_1 - x \tan \theta) \Big|_0^L + \ln |h_1 - x \tan \theta| \Big|_0^L \right)
\end{aligned}$$

SOL ----

$$= \frac{-Mb}{\tan^3 \theta} \left(\frac{-h_1^2}{2(h_1 - L \tan \theta)^2} + \frac{h_1^2}{2h_1^2} + \frac{2h_1}{(h_1 - L \tan \theta)} - \frac{2h_1}{h_1} + \ln |h_1 - L \tan \theta| - \ln |h_1| \right)$$

Solución integ 2

$$\int \frac{M a x dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3} = M a \int \frac{x dx}{(h_1 - x \tan \theta)^3}$$

$$u = h_1 - x \tan \theta$$

$$du = -\tan \theta dx$$

$$dx = -du / \tan \theta$$

$$-x = \frac{u - h_1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta$$

$$x = \frac{h_1 - u}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta$$

$$= -Ma \int \frac{\frac{h_1 - u}{\tan \theta} \frac{du}{\tan \theta}}{(h_1 - x \tan \theta)^3} = \frac{-Ma}{\tan \theta} \int \frac{h_1 - u}{u^3} du$$

$$= \frac{-Ma}{\tan^2 \theta} \int \frac{h_1}{u^3} du - \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= \frac{-Ma}{\tan^2 \theta} \left(\frac{h_1}{2u^2} \Big|_0^L + \frac{1}{u} \Big|_0^L \right)$$

$$= \frac{-Ma}{\tan^2 \theta} \left(\frac{h_1}{2(h_1 - x \tan \theta)^2} \Big|_0^L + \frac{1}{(h_1 - x \tan \theta)} \Big|_0^L \right)$$

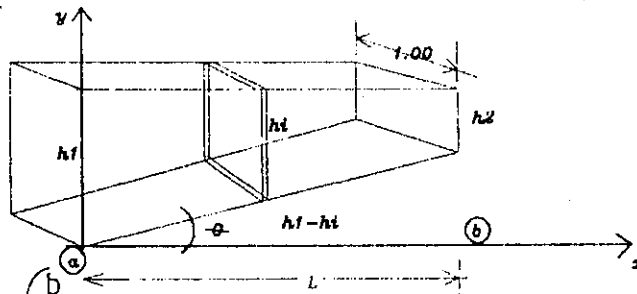
SOL-----

$$= \frac{-Ma}{\tan^2 \theta} \left(\frac{h_1}{2(h_1 - L \tan \theta)^2} + \frac{h_1}{2h_1^2} + \frac{1}{(h_1 - L \tan \theta)} - \frac{1}{h_1} \right)$$

$$\theta = \frac{(-Mb + Ma)}{L \tan^3 \theta} \left(-\frac{h_1^2}{2(h_1 - L \tan \theta)} + \frac{1}{2h_1} + \frac{2h_1}{(h_1 - L \tan \theta)} - 2 + \ln |h_1 - L \tan \theta| - \ln |h_1| \right)$$

$$\frac{-Ma}{\tan^2 \theta} \left(-\frac{h_1}{2(h_1 - L \tan \theta)^2} + \frac{h_1}{2h_1^2} + \frac{1}{(h_1 - L \tan \theta)} - \frac{1}{h_1} \right)$$

Para la condición de giro angular se tiene que :



$$\theta_{ab} = \int_a^b \frac{M dx}{EI}$$

$$\theta_{ab} = \int_a^b \frac{\left(\frac{Mb-Ma}{L} x + Ma \right) dx}{EI}$$

$$\theta_{ab} = \frac{12}{E} \int \left(\frac{\left(\frac{Mb-Ma}{L} x \right)}{(h1-x \tan \theta)^3} + \frac{Ma}{(h1-x \tan \theta)^3} \right) dx$$

$$\theta_{ab} = \frac{12}{E} \int \frac{\left(\frac{Mb-Ma}{L} x \right) + \frac{Ma}{(h1-x \tan \theta)^3} dx}{(h1-x \tan \theta)^3}$$

$$\theta_{ab} = \frac{12}{E} \int \frac{Mb \, dx}{L(h1-x \tan \theta)^3} - \int \frac{Ma \, dx}{L(h1-x \tan \theta)^3} + \int \frac{Ma \, dx}{(h1-x \tan \theta)^3}$$

Integ 1 Integ 2 Integ 3

Solución Integ 1 :

$$\int \frac{Mb \, dx}{L(h1-x \tan \theta)^3}$$

$$u = h1 - x \tan \theta$$

$$du = -\tan \theta \, dx$$

$$x = (h1 - u) / \tan \theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Mb}{L} \int \frac{h1-u}{\tan\theta u^3} dx = \frac{Mb}{L} \int \frac{h1-u}{u^3 \tan\theta} dx = \frac{Mb}{L \tan\theta} \int \frac{h1-u}{u^3} \frac{du}{-\tan\theta} \\
&= \frac{Mb}{-L \tan^2\theta} \int \left(\frac{h1}{u^3} - \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{Mb}{-L \tan^2\theta} h1 \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{Mb}{-L \tan^2\theta} \left(\frac{h1}{2u^2} \right) \Big|_0^L + \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_0^L = \frac{Mb}{-L \tan^2\theta} \left(\frac{-h1}{2(h1-x \tan\theta)} \right) \Big|_0^L + \left(\frac{1}{(h1-x \tan\theta)} \right) \Big|_0^L
\end{aligned}$$

SOL:

$$= \frac{Mb}{-L \tan^2\theta} \left(\frac{-h1}{2(h1-L \tan\theta)^2} + \frac{h1}{2h1^2} + \frac{1}{(h1-L \tan\theta)} - \frac{1}{h1} \right)$$

Solución Integ 2 igual a Integ 1

SOL:

$$= \frac{Ma}{-L \tan^2\theta} \left(\frac{-h1}{2(h1-L \tan\theta)^2} + \frac{h1}{2h1^2} + \frac{1}{(h1-L \tan\theta)} - \frac{1}{h1} \right)$$

Solución Integ 3

$$Ma \int \frac{dx}{(h1-x \tan\theta)^3}$$

$$\begin{aligned}
u &= h1 - x \tan\theta \\
du &= -\tan\theta dx \\
x &= (h1-u)/\tan\theta
\end{aligned}$$

$$= Ma \int \frac{du}{\frac{-\tan\theta}{u^3} \cdot \frac{1}{-\tan\theta}} = Ma \int \frac{du}{-\tan\theta u^3} = \frac{Ma}{-\tan\theta} \int \frac{du}{u^3} = \frac{Ma}{\tan\theta} \left(\frac{1}{2u^2} \right) \Big|_0^L$$

SOL

$$= \frac{Ma}{\tan\theta 2(h1-x \tan\theta)^2} - \frac{Ma}{\tan\theta 2(h1)^2}$$

Substituyendo en la ecuación principal:

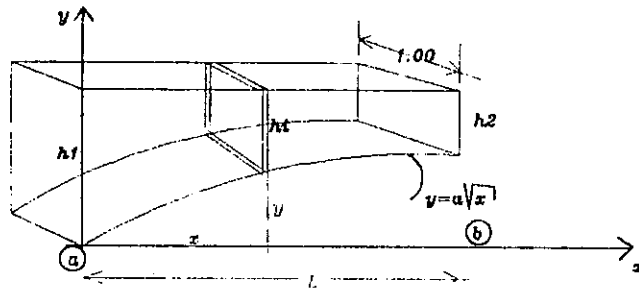
SOL GENERAL:

$$1\text{rad} = \frac{12}{E} \left(\frac{-Mb + Ma}{L \tan \theta} \right) \left(\frac{-h1}{2(h1 - L \tan \theta)^2} + \frac{h1}{2h1^2} + \frac{1}{(h1 - L \tan \theta)} - \frac{1}{h1} \right) + \frac{Ma}{2 \tan \theta} \left(\frac{1}{(h1 - L \tan \theta)^2} - \frac{1}{h1^2} \right)$$

APÉNDICE 4.

Factores de Rigidez y Transporte.

Bordes Asimétricos Parabólicos



Condición 1:

$$\theta_{ab} = \int_a^b \frac{M dx}{EI} = \frac{1}{E} \int_a^b \frac{M dx}{I}$$

$$h_i = h1 - y$$

$$h_i = h1 - ax^2$$

$$I = \frac{1}{12} (h_i)^3$$

$$I = \frac{1}{12} (h1 - ax)^3 \text{ ó } \frac{1}{12} (h1 - a/x)^3$$

$$a = \frac{h2 - h1}{-\sqrt{x^2}}$$

$$a = \frac{h1 - h2}{-\sqrt{x^2}}$$

$$\delta_{ab} = \frac{1}{E} \int_a^b \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{12 (h1 - a\sqrt{x})^3} dx$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \int_a^b \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{(h1 - a\sqrt{x})^3} dx$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \int_0^L \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x}{(h1 - a\sqrt{x})^3} dx + \frac{Ma}{(h1 - a\sqrt{x})^3} dx$$

$$h2 = h1 - a\sqrt{x}$$

$$-a = \frac{h2 - h1}{\sqrt{x}}$$

$$a = \frac{h1 - h2}{\sqrt{x}}$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \int_0^L \frac{(Mb - Ma)}{L (h1 - a\sqrt{x})^3} dx + \frac{Ma}{(h1 - a\sqrt{x})^3} dx$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \int_0^L \frac{Mb x dx}{L (h1 - a\sqrt{x})^3} - \int_0^L \frac{Ma x dx}{L (h1 - a\sqrt{x})^3} + \int_0^L \frac{Ma dx}{(h1 - a\sqrt{x})^3}$$

Integ1 Integ2 Integ3

integ 1

$$\int_0^L \frac{Mb x dx}{L(h1 - a\sqrt{x})} = \frac{Mb}{L} \int \frac{x dx}{(h1 - a\sqrt{x})}$$

$u = h1 - a\sqrt{x}$
 $x = \frac{(h1 - u)^2}{a^2}$
 $x = \frac{(h1 - u)^2}{a^2}$

$$\left(\frac{u - h1}{-a}\right)^2 = x = \frac{(h1 - u)^2 a^2 - a^2(h - u)^2}{a^4} = dx = \frac{2(u - h1) du}{a^2}$$

$$= \frac{dx (h - u)^2}{(a)^2} = x = -2(h - u) \frac{a^2 du}{a^4} = dx$$

$$= \frac{Mb}{L} \int \frac{\left(\frac{u - h1}{a}\right)^2}{u^3} dx = \frac{Mb}{L} \int \frac{\left(\frac{u - h1}{a}\right)^2 \frac{2(u - h1) du}{a^2}}{u^3}$$

$$= \frac{Mb}{L} \int \frac{\frac{2(u - h1)^3}{a^4}}{\frac{u^3}{1}} du = \frac{Mb}{L} \int \frac{2(u - h1)^3 du}{a^4 u^3} = \frac{2Mb}{a^4 L} \int \frac{(u - h1)^3 du}{u^3}$$

$$= \frac{2Mb}{a^4 * L} \int \frac{u^3 - 3u^2 h + 3uh^2 - h^3}{u^3} du = \frac{2Mb}{a^4 L} \int \left(1 - \frac{3h}{u} + \frac{3h^2}{u^2} - \frac{h^3}{u^3}\right) du$$

$$= \frac{2Mb}{a^4 L} \left(u \Big|_0^L - 3h \ln |u| \Big|_0^L - 3h^2 / u \Big|_0^L + \frac{1h^3}{2u^2} \Big|_0^L \right)$$

$$= \frac{2Mb}{a^4 * L} (h1 - a\sqrt{x}) \Big|_0^L - 3h \ln |h1 - a\sqrt{x}| \Big|_0^L - \frac{3h^2}{(h1 - a\sqrt{x})} \Big|_0^L$$

$$= + \frac{h^3}{2(h1 - a/x)^2} \Big|_0^L$$

$$= \frac{2Mb}{a^4 * L} \left((h1 - a\sqrt{L}) - (h1) - 3h \ln |h1 - a\sqrt{L}| + 3h1 \ln |h1| - \frac{3h^2}{(h1 - a\sqrt{L})} + 3h1 + \frac{h1^3}{2(h1 - a\sqrt{L})^2} - \frac{h1}{2} \right)$$

Integ2

$$Ma \int_0^L \frac{dx}{(h1 - a\sqrt{x})^3}$$

$$u = h1 - a\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{u - h1}{-a} \right)^2 = x$$

$$x = \left(\frac{h1 - u}{a} \right)^2$$

$$dx = \frac{(h1 - u)^2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot du}{a^2} = \frac{2(h1 - u)^2 \cdot (-1) \cdot du}{a^2}$$

$$dx = \frac{2(h1 - u) \cdot (-1) \cdot du}{a^2}$$

$$dx = \frac{2(u - h1) \cdot du}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
&= Ma \int_0^L \frac{2(u-h1) du}{\frac{a^2}{u^3}} = Ma \int_0^L \frac{2(u-h1) du}{u^3 a^2} = \frac{Ma}{a^2} \int_0^L \frac{2(u-h1) du}{u^3} \\
&= \frac{2Ma}{a^2} \int_0^L \left(\frac{u}{u^3} - \frac{h1}{u^3} \right) du = \frac{2Ma}{a^2} \int_0^L \left(\frac{1}{u^2} - \frac{h1}{u^3} \right) du \\
&= \frac{2Ma}{a^2} \left(-1/u + \frac{h1}{2u^2} \right) \Big|_0^L = \frac{2Ma}{a^2} \left(-1/h1 + \frac{h1}{2(h1-a/x)^2} \right) \Big|_0^L \\
&= \frac{2Ma}{a^2} \left(-1/h1 + \frac{1}{h1} + \frac{h1}{2(h1-a/x)^2} - \frac{1}{2h1} \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación original.

La ecuación:

$$\varnothing_{ab} = \frac{12}{E} \left(\int_0^L \frac{Mbx dx}{L(h1-a\sqrt{x})^3} - \int_0^L \frac{Max dx}{L(h1-a\sqrt{x})^3} + \int_0^L \frac{Madx}{(h1-a\sqrt{x})^3} \right)$$

se puede expresar como:

$$E = \int_0^L \frac{x dx}{L(h1-a\sqrt{x})^3} (Mb-Ma) + \int_0^L \frac{Madx}{L(h1-a\sqrt{x})^3}$$

$$E = \frac{2}{a^2 L} \left((h_1 - a\sqrt{L}) - h - 3h \ln(h_1 - a\sqrt{L}) + 3h \ln|h_1| - \frac{3h^2}{h_1 - a\sqrt{L}} + 3h_1 + \frac{h_1^3}{2(h_1 - a\sqrt{L})} - \frac{h_1}{2} (M_b - M_a) \right. \\ \left. + M_a \frac{2}{a} \left(\frac{-1}{h_1 - a\sqrt{x}} + \frac{1}{h_1} + \frac{h_1}{2(h_1 - a\sqrt{x})} - \frac{1}{2h_1} \right) \right)$$

Para la segunda condición se tiene que:

$$t_{a/b} = 1 \left(\frac{x M dx}{E I} = \frac{1}{E} \int x \left(\frac{(M_b - M_a)x + M_a}{L} \right) \frac{dx}{1(h_1 - a\sqrt{x})^3} \right)$$

$$0 = \frac{12}{E} \int \left(\frac{\left(\frac{(M_b - M_a)x^2}{L} \right)}{(h_1 - a\sqrt{x})^3} + \frac{M_a x}{(h_1 - a\sqrt{x})^3} \right) dx$$

$$0 = \frac{12}{E} \int \left(\frac{(M_b - M_a)x^2}{L(h_1 - a\sqrt{x})^3} + \frac{M_a x}{(h_1 - a\sqrt{x})^3} \right) dx$$

$$0 = \int \frac{M_b x^2 dx}{L(h_1 - a\sqrt{x})^3} + \int \frac{M_a x dx}{L(h_1 - a\sqrt{x})^3} + \int \frac{M_a}{(h_1 - a\sqrt{x})^3} dx$$

Integ 1 Integ 2 Integ 3

Solución Integ 1:

$$\int \frac{M_b x^2 dx}{L(h_1 - a\sqrt{x})^3} = \frac{M_b}{L} \int \frac{x^2 dx}{(h_1 - a\sqrt{x})^3}$$

$$u = (h_1 - a\sqrt{x}) \quad dx = \frac{2(u-h_1)du}{a^2}$$

$$x = \left(\frac{h_1 - u}{a} \right)^2$$

$$x = \frac{(h_1 - u)^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Mb}{L} \int \frac{(h-u)^4 \cdot 2(h-u)}{a^4 a^2 u^3} du = -\frac{2Mb}{L} \int \frac{(h-u)^5}{a^6 u^3} du \\
&= -\frac{2Mb}{L a^6} \int \frac{(h-u)^5}{u^3} du \quad \text{recordar: } (h-u)^5 = (h-u)^3 (h-u)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad h^5 - 5h^4 u + 10h^3 u^2 - 10h^2 u^3 + 5h u^4 - u^5 \\
&= -\frac{2Mb}{L a^6} \int \frac{(h^5 - 5h^4 u + 10h^3 u^2 - 10h^2 u^3 + 5h u^4 - u^5) du}{u^3} \\
&= -\frac{2Mb}{L a^6} \int \left(\frac{h^5}{u^3} - \frac{5h^4}{u^2} + \frac{10h^3}{u} - 10h^2 u + 5h u - u^2 \right) du \\
&= -\frac{2Mb}{L a^6} \left(\frac{-h^5}{2u^2} + \frac{5h^4}{u} + 10h^3 \ln(u) - 10h^2 u + \frac{5hu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \\
&= -\frac{2Mb}{L a^6} \left(\frac{-h^5}{2(h1-a\sqrt{x})^2} + \frac{h^3}{2} + \frac{5h^4}{(h1-a\sqrt{x})} - 5h^3 + 10h^3 \ln(h1-a\sqrt{x}) - 10h^3 \ln(h1) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - 10h^2 \ln(h1-a\sqrt{x}) + 10h^3 + \frac{5h \ln(h1-a\sqrt{x})^2}{2} - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h1-a\sqrt{x})^3}{3} + \frac{h1^3}{3} \right)
\end{aligned}$$

Solución Integ 2: igual a la solución de la integral 1.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2Ma}{L a^6} \left(\frac{-h^5}{2(h1-a\sqrt{x})^2} + \frac{h^3}{2} + \frac{5h^4}{(h1-a\sqrt{x})} - 5h^3 + 10h^3 \ln(h1-a\sqrt{x}) - 10h^3 \ln(h1) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - 10h^2 \ln(h1-a\sqrt{x}) + 10h^3 + \frac{5h \ln(h1-a\sqrt{x})^2}{2} - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h1-a\sqrt{x})^3}{3} + \frac{h1^3}{3} \right)
\end{aligned}$$

Ecuación de la cual se obtiene la proporción entre M_a y M_b para el elemento considerado.

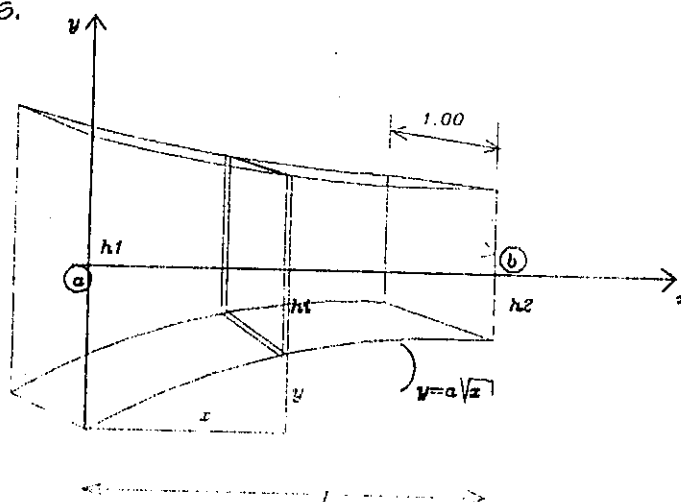
A continuación considérese un elemento estructural con bordes parabólicos a ambos lados del eje neutro, caso muy parecido al anterior.

APÉNDICE 5.

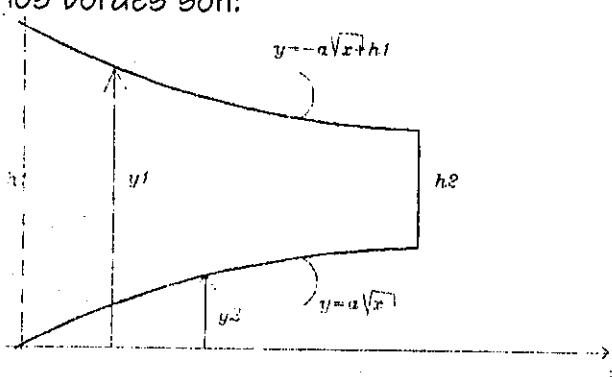
Factores de Rigidez y Transporte.

Elementos con bordes simétricos curvos.

Considérese el elemento de la figura:



Y las funciones que definen los bordes son:



Para la condición de giro se tiene que:

$$\theta_{a/b} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{M_b - M_a x + M_a}{\frac{1}{12} (h_1 - 2a\sqrt{x})^3} dx = \frac{12}{E} \int_0^L \frac{M_b - M_a x + M_a}{(h_1 - 2a\sqrt{x})^3} dx$$

Solución Integ 1:

$$\int \frac{x^2 dx}{(h1 - 2a\sqrt{x})^3} =$$

$$u = h1 - 2a\sqrt{x} \quad dx = \frac{-2(h1 - u) du}{4a^2}$$

$$x = \left(\frac{u - h1}{-2a} \right)^2$$

$$x = \left(\frac{h1 - u}{2a} \right)^2$$

$$= \int \frac{\frac{(h1 - u)^4}{2a} - \frac{2(h1 - u) du}{4a^2}}{u^3} = -2 \int \frac{(h1 - u)^5}{64a^6 u^3} du = \frac{-2}{64a^6} \int \frac{(h1 - u)^5}{u^3} du$$

$$= \frac{-1}{32a^6} \int \frac{(h^5 - 5h^4 u + 10h^3 u^2 - 10h^2 u^3 + 5hu^4 - u^5)}{u^3} du$$

$$= \frac{-1}{32a} \left(\frac{-h^5}{2u^2} + \frac{5h^3}{u} + 10h \ln^3 |u| - 10h^2 u + \frac{5hu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{-1}{32a^6} \left(\frac{-h^5}{2(h1 - a\sqrt{x})^2} + \frac{h^3}{2} - \frac{5h^4}{h1 - a\sqrt{x}} - 5h^3 + 10h^3 \ln (h1 - a\sqrt{x}) \right.$$

$$\left. - 10h^3 \ln |h1| - 10h^2 (h - a\sqrt{x}) + 10h^3 + 5h^2 (h1 - a\sqrt{x}) \right.$$

$$\left. - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h1 - a\sqrt{x})^3}{3} + \frac{h1^3}{3} \right)$$

Solución Integ 2:

$$\int \frac{x \, dx}{(h1 - 2a\sqrt{x})^3} =$$

$$u = h1 - 2a\sqrt{x} \quad dx = \frac{-2(h1 - u) \, du}{4a^2}$$

$$x = \left(\frac{u - h1}{-2a}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{h - u}{2a}\right)^2$$

$$= \int \frac{\left(\frac{(h - u)^2}{4a^2}\right) - \frac{2(h1 - u) \, du}{4a^2}}{u^3} = -2 \int \frac{\frac{(h - u)^3}{16a^4}}{u^3} \, du = \frac{-2}{16a^4} \int \frac{(h - u)^3}{u^3} \, du$$

$$= \frac{-1}{8a^4} \int \left(\frac{h^3}{u^3} - \frac{3h^2}{u^2} + \frac{3h}{u} - 1 \right) \, du$$

SOLUCIÓN:

$$= \frac{-1}{8a^4} \left(\frac{-h^3}{2(h1 - 2a\sqrt{L})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{h1 - 2a\sqrt{L}} - 3h + 3h \ln|h1 - 2a\sqrt{L}| - 3h \ln|h1 - (h1 - 2a\sqrt{L})| + h1 \right)$$

Substituyendo los valores de las integrales en la ecuación principal:

$$O = (Mb - Ma) \frac{-1}{32a^4} \left(\frac{-h^5}{2(h1 - a\sqrt{L})^2} + \frac{h^3}{2} - \frac{5h^4}{h1 - a\sqrt{L}} - 5h^3 + 10h \ln(h1 - a\sqrt{L}) \right.$$

$$\left. - 10h \ln|h1 - 10h^2(h - a\sqrt{L}) + 10h^3 + 5h(h1 - a\sqrt{L})^2 \right.$$

$$\left. - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h1 - a\sqrt{L})^3}{3} + \frac{h1^3}{3} \right)$$

$$+ Ma \left(\frac{-1}{8a^4} \right) \left(\frac{-h^3}{2h1 - 2a\sqrt{L}^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{h1 - 2a\sqrt{L}} - 3h + 3h \ln|h1 - a\sqrt{L}| - 2a\sqrt{L} - 3h \ln|h1 - (h1 - 2a\sqrt{L})| + h1 \right)$$

Donde se puede apreciar la similitud de estas ecuaciones con las obtenidas en elementos simétricos. Es de hacer notar que la única diferencia entre un caso y el otro es que el valor $2a\sqrt{x}$ que varía a $a\sqrt{x}$. Esto no constituye ninguna diferencia puesto que los resultados dependen únicamente de $h1$, $h2$, y L .

Por tanto:

Condición de giro 1:

$$\frac{E}{12} = \frac{2}{a^4 L} \left((h_1 - a\sqrt{L}) - h - 3h \ln(h - a\sqrt{L}) + 3h_1 \ln|h_1| - 3h^2 / (h - a\sqrt{L}) \right. \\ \left. + 3h_1 + \frac{h_1^3}{2(h_1 - a\sqrt{L})^2} - \frac{h_1}{2} \right) (M_b - M_a)$$

$$\frac{M_a(2)}{a^2} \left(-1 / (h_1 - a\sqrt{L}) + \frac{1}{h_1} + \frac{h_1}{2(h_1 - a\sqrt{L})^2} - \frac{1}{2h_1} \right)$$

Condición de desplazamiento relativo.

En este caso $a = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{x}}$

$$\delta = \frac{-2}{La^6} \left(\frac{-h^5}{2(h_1 - a\sqrt{L})^2} + \frac{-h^3}{2} + \frac{5h^4}{(h - a\sqrt{L})} - 5h^3 + 10h \ln(h_1 - a\sqrt{L}) \right.$$

$$\left. - 10h^3 \ln|h_1| - 10h^2 (h - a\sqrt{L}) + 10h^3 + 5h(h - a\sqrt{L})^2 \right.$$

$$\left. \frac{-5h^3(h_1 - a\sqrt{L})^2}{2} - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h - a\sqrt{L})^3}{3} \right) (M_b - M_a) + \frac{h_1^3}{3} (M_b - M_a)$$

$$\frac{+M_a}{a^4} \left(\frac{-h^3}{2(h - a\sqrt{L})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{(h - a\sqrt{L})} - 3h + 3h \ln(h - a\sqrt{L}) - 3h \ln(h) - (h - a\sqrt{L}) + h \right)$$

Condición de giro 2:

$$\frac{E}{12} = \frac{-1}{8a^4} \left(\frac{-h^3}{2(h_1 - a\sqrt{L})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h}{2(h_1 - a\sqrt{L})} - 3h + 3h \ln|h_1| - 2a\sqrt{L} \right.$$

$$\left. - 3h \ln|h_1| - (h_1 - 2a\sqrt{L}) + h_1 \right) (M_b - M_a)$$

$$\frac{-2M_a}{4a^2} \left(\frac{h_1}{2(h_1 - 2a\sqrt{L})^2} + \frac{1}{2h_1} + \frac{1}{h_1 - 2a\sqrt{L}} - \frac{1}{h_1} \right)$$

Condición de desplazamiento relativo.

En este caso $a = \frac{h_2 - h_1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{-1}{32a^6 L} \left(\frac{-h^5}{2(h-a\sqrt{L})^2} + \frac{h^3}{2} + \frac{5h^4}{h_1 - a\sqrt{L}} - 5h^3 + 10h^3 \ln |h_1 - a\sqrt{L}| \right. \\ & \left. - 10h^3 \ln |h| - 10h^2 (h - a\sqrt{L}) + 10h^3 + 5h(h - a\sqrt{L})^2 \right. \\ & \left. \frac{-5h^3}{2} - \frac{(h_1 - a\sqrt{L})^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right) (M_b - M_a) \\ + M_a & \left(\frac{1}{8a^4} \right) \left(\frac{-h^3}{2(h-a\sqrt{L})^2} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{(h-a\sqrt{L})} - 3h + 3h \ln(h-a\sqrt{L}) - 3h \ln(h) - (h-a\sqrt{L}) + h \right) \\ + M_a & \left(\frac{1}{8a^4} \right) \left(\frac{-h^3}{2(h-a\sqrt{L})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{(h-a\sqrt{L})} - 3h + 3h \ln(h-a\sqrt{L}) - 3h \ln(h) - (h-a\sqrt{L}) + h \right) \end{aligned}$$

Estas expresiones determinan la proporción en que se transmite un Momento Inducido de un extremo a otro de un miembro y también establecen el valor de la rigidez de cada extremo atendiendo al giro unitario inducido. Debido a que existen numerosos casos para los cuales se obtienen valores diferentes de proporción y rigidez, se puede ahorrar complicadas operaciones con la ayuda de los siguientes programas de computadora. El objeto de estos programas es determinar curvas y gráficos que visualicen los cambios de rigidez y proporcionalidad para toda la gama de formas que constituyen los miembros de sección variable en las condiciones ya tratadas.

El siguiente programa en BASIC determina el valor de proporcionalidad y Rigidez para miembros de sección variable cuadrada y bordes rectos.

```

5 REM LINEAL
10 CLEAR : CLS : PRINT "LINEAL"
20 INPUT "Hmin H2="; H2
25 INPUT "H1/H2 o hmin/hmax "; FACTOR
30 H1 = H2 / FACTOR
40 INPUT "L="; L
50 C0 = (H1 - H2) / L
60 C1 = L * C0
70 C2 = C0 ^ 2
    
```

```

80 C3 = C0 ^ 3
90 A = (H1 ^ 2) / (2 * ((H1 - C1) ^ 2))
100 B = .5
110 C = (2 * H1) / (H1 - C1)
120 D = LOG(H1 - C1): PRINT "A="; A
130 E = LOG(H1): PRINT "C="; C
140 F = H1 / (2 * ((H1 - C1) ^ 2))
150 G = 1 / (2 * H1)
160 H = 1 / (H1 - C1)
170 I = 1 / H1
180 X = -A + B + C - 2 + D - E
190 Y = -F + G + H - I
200 X = X / (L * C3): PRINT "X="; X
210 Y = Y / C2: PRINT "Y="; Y
220 PROP = (X - Y) / (X)
230 PRINT "MB="; PROP; "MA"
231 PRINT "hmin/hmax="; (H2 / H1)
232 PRINT "hmax="; H1
233 PRINT "a="; 1
235 INPUT "DESEA PROBAR OTRO FACTOR(S/N)"; L$
236 IF L$ = "s" OR L$ = "S" THEN GOTO 25
240 C1 = (H1 - H2) / L
250 C2 = C1 * L
260 A = H1 / (2 * ((H1 - C2) ^ 2))
270 B = 1 / (2 * H1)
280 C = 1 / (H1 - C2)
290 D = 1 / H1
300 F = 1 / ((H1 - C2) ^ 2)
310 G = 1 / (H1 ^ 2)
320 H = (-A + B + C - D) / (L * (C1 ^ 2))
330 I = (F - G) / (2 * C1)
340 INPUT "PROP="; PROP
350 J = (1 / (12 * H))
360 K = (1 - ((PROP * (H + I)) / H))
370 MB = -J / K
380 PRINT "MB="; MB; "E"
390 PRINT "MA="; MB * PROP; "E": MA = PROP * MB
400 RIGB = (MB * L) / ((1 / 12) * (H2 ^ 3))
410 RIGA = (MA * L) / ((1 / 12) * (H1 ^ 3))
420 PRINT "KB="; RIGB
430 PRINT "KA="; RIGA
440 PRINT "H"; H
450 PRINT "I="; I
460 END

```

```

10 CLS : CLEAR : PRINT "BORDES PARABOLICOS"
30 REM BORDES PARABOLICOS
20 INPUT "H1="; H
30 INPUT "H2="; H2
35 INPUT "L="; L
40 DEFDBL R: R = SQR(L): PRINT R: DEFDBL O: O = (H - H2) / (R): PRINT "A="; O
60 C1 = (H - (O * (L ^ .5))): PRINT "C1="; C1
70 A = (H ^ 5) / (2 * (C1 ^ 2))

```

```

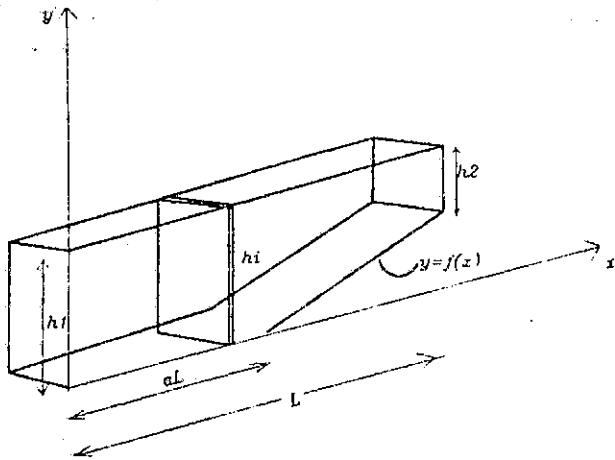
80 B = (H ^ 3) / 2
90 C = (5 * (H ^ 4)) / C1: PRINT "C="; C
100 D = 5 * (H ^ 3)
110 E = 10 * (H ^ 3) * LOG(C1)
120 F = 10 * (H ^ 3) * LOG(H)
130 G = 10 * (H ^ 2) * C1
140 Z = 10 * (H ^ 3)
150 I = (5 * H * (C1 ^ 2)) / 2
160 J = (5 * (H ^ 3)) / 2
170 K = (C1 ^ 3) / 3
180 X = (H ^ 3) / 3
190 A2 = (H ^ 3) / (2 * (C1 ^ 2))
200 B2 = (H / 2)
210 O3 = (3 * (H ^ 2)) / C1
220 D2 = 3 * H
230 E2 = 3 * H * LOG(C1)
240 F2 = 3 * H * LOG(H)
250 G2 = C1
260 H2 = H
270 C2 = -A + B + C - D + E - F - G + Z + I - J - K + X: PRINT "C2="; C2
280 C3 = -A2 + B2 + O3 - D2 + E2 - F2 - C1 + H
290 C4 = -2 / (L * (O ^ 6)): PRINT "C4="; C4: INPUT L$
300 C5 = C4 * C2: PRINT C2: INPUT L$
310 C6 = (2 * C3) / (O ^ 4): PRINT "C5="; C5; "C6="; C6
320 PROP = C5 / (C5 + C6)
330 PRINT "Ma="; PROP; "Mb"
340 A = C1
350 B = H
360 C = 3 * H * LOG(C1)
370 D = 3 * H * LOG(H)
380 E = (3 * (H ^ 2)) / C1
390 F = 3 * H
400 G = (H ^ 3) / (2 * (C1 ^ 2))
410 Z = (H / 2)
420 I = (1 / C1)
430 J = (1 / H)
440 K = H / (2 * (C1 ^ 2))
450 K1 = 1 / (2 * H)
460 C2 = 2 / ((O ^ 4) * L)
470 C3 = 2 / (O ^ 2)
480 C4 = A - B - C + D - E + F + G - Z
490 C5 = -I + J + K - K1
500 C6 = C2 * C4
510 C7 = C3 * C5
520 MA = 1 / (12 * ((C6 * PROP) - C6 + C7))
530 MB = MA * PROP
540 PRINT "MA="; MA; " E"
550 PRINT "MB="; MB; " E"
560 RIGB = (MB * L) / ((1 / 12) * (H2 ^ 3))
570 RIGA = (MA * L) / ((1 / 12) * (H2 ^ 3))
580 PRINT "Ka="; RIGA
590 PRINT "Kb="; RIGB
600 END

```

APÉNDICE 6.

Factores de Rigidez y Transporte.

Miembros asimétricos combinados (Cartelas Rectas).

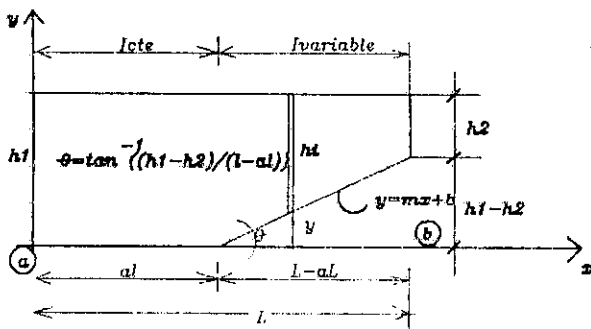


Condición 1

$$\theta_{ab} = \int_a^b \frac{M dx}{EI}$$

Ecuación General

$$\theta_{ab} = \frac{1}{E} \int_a^b \frac{M dx}{I}$$



Dado que la variación del MDM es lineal:

$$\theta_{ab} = \frac{1}{E} \int_a^b \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{I} dx$$

Entonces:

$$\theta_{ab} = \frac{1}{E} \int_{x=0}^{x=L} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{I} dx$$

$$\theta_{ab} = \frac{1}{E} \int_{x=0}^{x=aL} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{1} dx + \int_{x=aL}^{x=L} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{1} dx$$

$$\theta_{ab} = \frac{1}{EI} \int_{x=0}^{x=aL} \left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma dx + \frac{1}{EI} \int_{x=aL}^{x=L} \left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma dx + \frac{1}{12} \left(h1 - \left(\frac{h1 - h2}{L(1-a)} \right) x - \left(\frac{a(h1 - h2)}{1-a} \right) \right)^3$$

Si $C1 = \frac{h1 - h2}{L(1-a)}$ y $C2 = \frac{a(h1 - h2)}{(1-a)}$

$$\theta_{ab} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \right) \left. \frac{x^2}{2} + Ma x \right|_0^{aL} + \frac{12}{EI} \int_{x=aL}^{x=L} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{(h1 - C1x + C2)^3} dx$$

integ 1

haciendo $C3 = h1 + C2$

Resolviendo la integ 1:

$$\theta_{ab} = \frac{12}{E} \int_{x=aL}^{x=L} \frac{\frac{Mb - Ma}{L} x + Ma}{(-C1x + C3)^3} dx = \int \frac{\frac{Mb - Ma}{L} x dx}{(-C1x + C3)^3} + Ma \int \frac{dx}{(-C1x + C3)^3}$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \frac{Mb - Ma}{L} \int_{-C1x + C3}^3 \frac{x dx}{(-C1x + C3)^3} + Ma \int_{-C1x + C3}^3 \frac{dx}{(-C1x + C3)^3}$$

si $u = -C1x + C3$
 $du = -C1 dx$
 $x = (u - C1) / -C1$
 $x = (C3 - u) / C1$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \frac{Mb - Ma}{-LC1} \int \frac{C3 - u}{u^3} dx - \frac{Ma}{C1} \int \frac{dx}{u^3}$$

$$\delta_{ab} = \frac{12}{E} \frac{Mb - Ma}{-LC1^2} \left(\frac{C3}{2u^2} + \frac{1}{u} \right) \Bigg|_{x=al}^{x=l} + \left(\frac{Ma}{2C1 u^2} \right) \Bigg|_{x=al}^{x=l}$$

Substituyendo en la ecuación principal:

$$\delta_{ab} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \right) \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{al} + Ma x \Bigg|_0^{al} + \frac{12}{E} \left(\frac{Mb - Ma}{-LC1} \right) \left(\frac{C3}{2(-C1x + C3)^2} + \frac{1}{(-C1x + C3)} \right) \Bigg|_{al}^l + \frac{Ma}{2C1(-C1x + C3)^2} \Bigg|_{al}^l$$

$$\delta_{ab} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma(al)^2 + Ma(al)}{2l} \right) + \frac{12}{E} \left(\frac{Mb - Ma}{-LC1^2} \right) \left(\frac{-C3}{2(-C1x + C3)} + \frac{1}{(-C1x + C3)} + \frac{C3}{2(-C1al + C3)^2} - \frac{1}{(-C1al + C3)} \right)$$

$$\left(\frac{+ Ma}{2C1(-C1l + C3)^2} - \frac{- Ma}{2C1(-C1al + C3)^2} \right)$$

Para la condición 2 se tiene:

$$t_{a/b} = \frac{1}{E} \int \frac{xM}{I} dx$$

$$t_{a/b} = \frac{1}{EI} \int_0^{al} x \left(\frac{Mb-Ma}{L} x + Ma \right) dx + \frac{1}{E} \int_{al}^l \frac{x \left(\frac{Mb-Ma}{L} x + Ma \right)}{\frac{1}{12} \left(h_1 - \frac{h_1-h_2}{L(1-a)} x - \frac{a(h_1-h_2)}{x-a} \right)^3} dx$$

para simplificar más la expresión :

$$C1 = \frac{h_1-h_2}{l(1-a)}$$

$$C2 = \frac{a(h_1-h_2)}{1-a}$$

$$t_{a/b} = \frac{1}{EI} \frac{Mb-Ma}{L} \int_0^{al} x^2 dx + Ma \int_0^{al} x dx + \frac{1}{E} \int_{al}^l \frac{\frac{Mb-Ma}{L} x^2 + Max dx}{\frac{1}{12} (h_1 - (C1x - C2))^3} dx$$

$$\text{y } C3 = h_1 + C2$$

$$0 = \frac{1}{EI} \frac{Mb-Ma}{L} \int_0^{al} x^2 dx + Ma \int_0^{al} x dx + \frac{1}{E} \int_{al}^l \frac{\frac{Mb-Ma}{L} x^2 + Max dx}{\frac{1}{12} (-C1x - C2)^3} dx + \frac{1}{E} \int_{al}^l \frac{Max dx}{\frac{1}{12} (-C1x - C2)^3}$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb-Ma}{L} \frac{(al)^3}{3} + \frac{Ma}{2} (al)^2 \right) + \frac{12}{L} \int_{al}^l \frac{(Mb-Ma)x dx}{(-C1x - C2)^3} + \int_{al}^l \frac{Max dx}{(-C1x - C2)^3}$$

integ 1
integ 2'

Solución inteq 1

$$\int \frac{(Mb-Ma)x \, dx}{(-C1x-C2)^3} = \frac{12(Mb-Ma)}{L} \int_{al}^1 \frac{x \, dx}{(-C1x-C2)^3} \quad \begin{array}{l} \text{haciendo:} \\ u = -C1x + C3 \quad x = u - C1 \\ du = -C1 \, dx \quad -C1 \end{array}$$

$$= \frac{12(Mb-Ma)}{L} \int_{al}^1 \frac{\left(\frac{u-C3}{-C1}\right)^2 \frac{du}{-C1}}{u^3} = \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1^3} \int \frac{(u-C3) \, du}{u^3}$$

$$= \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1} \int_{al}^1 \frac{u^2 - 2uC3 + C3^2}{u^3} \, du = \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1^3} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2C3}{u^2} + \frac{C3^2}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1^3} \left(\ln|u| + \frac{2C3}{u} - \frac{C3^2}{2u^2} \right) \Big|_{al}^1$$

$$= \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1^3} \left(\ln|-C1x+C3| + \frac{2C3}{-C1x+C3} - \frac{C3^2}{2(-C1x+C3)^2} \right) \Big|_{al}^1$$

SOLUCIÓN:

$$= \frac{12(Mb-Ma)}{-LC1^3} \left(\ln|-C1L+C3| - \ln|-C1aL+C3| + \frac{2C3}{-C1L+C3} - \frac{2C3}{-C1aL+C3} - \frac{C3^2}{2(-C1L+C3)^2} + \frac{C3^2}{(-C1aL+C3)^2} \right)$$

Solución Integ 2 :

$$\frac{12Ma dx}{(-C1x-C2)} = 12Ma \int_a^l \frac{dx}{(-C1x-C2)} \quad \text{haciendo:}$$

$$u = -C1x + C3 \quad x = \frac{u-C3}{-C1}$$

$$du = -C1 dx \quad -C1$$

$$= 12(Ma) \int_a^l \frac{\left(\frac{u-C3}{-C1}\right) \left(\frac{du}{-C1}\right)}{u^3} = 12(Ma) \int_a^l \frac{(u-C3) du}{C1^2 u^3} = 12(Ma) \int_a^l \frac{(u-C3) du}{C1 u^3} =$$

$$= \frac{12Ma}{C1^2} \left(\frac{-1}{u} + \frac{C3}{2u^2} \right) \Big|_a^l = \frac{12Ma}{C1^2} \left(\frac{-1}{-C1x+C3} + \frac{+C3}{2(-C1x+C3)^2} \right) \Big|_a^l$$

SOLUCIÓN:

$$= \frac{12Ma}{C1^2} \left(\frac{-1}{-C1L+C3} + \frac{+1}{-C1(aL)+C3} + \frac{+C3}{2(-C1L+C3)^2} - \frac{-C3}{2(-C1aL+C3)^2} \right)$$

Sustituyendo 1 y 2 en la ecuación principal:

$$\emptyset = \frac{1}{l} \left(\frac{Mb - Ma}{L} + \frac{al^3}{3} + \frac{Ma(a^2)}{2} \right)$$

$$\frac{+12(Mb - Ma)}{-C1^3} \left(\ln |-C1L + C3| - \ln |-C1aL + C3| + \frac{+2C3}{-C1L+C3} - \frac{-2C3}{-C1aL + C3} - \frac{-C3^2}{2(-C1L+C3)^2} + \frac{+C3^2}{2(-C1aL+C3)^2} \right)$$

$$\frac{+12Ma}{C1^2} \left(\frac{-1}{-C1L+C3} + \frac{+1}{-C1aL+C3} + \frac{+C3}{2(-C1L+C3)^2} - \frac{-C3}{2(-C1aL+C3)^2} \right)$$

El siguiente programa determina los valores de proporcionalidad y rigidez para miembros compuestos (combinación de sección constante y variable), para las expresiones obtenidas en el presente apéndice.

```

10 CLS : CLEAR : PRINT "COMP-LINEALI"
20 INPUT "a"; A
30 INPUT "h1="; H1
40 INPUT "h2="; H2
50 INPUT "L="; L
55 PRINT "hmin/hmaz="; (H2 / H1)
60 C1 = (H1 - H2) / (L * (1 - A)); C2 = (A * (H1 - H2)) / (1 - A)
70 C3 = H1 + C2
80 N1 = ((A * L) ^ 3) / 3; N2 = ((A * L) ^ 2) / 2
90 N3 = LOG((-C1 * L) + C3); N4 = LOG((-C1 * A * L) + C3)
100 N5 = (2 * C3) / ((-C1 * L) + C3); N6 = (2 * C3) / ((-C1 * A * L) + C3)
110 N7 = (C3 ^ 2) / (2 * (((-C1 * L) + C3) ^ 2))
120 N8 = (C3 ^ 2) / (2 * ((-C1 * A * L + C3) ^ 2))
130 N9 = 1 / ((-C1 * L) + C3); N10 = (1 / ((-C1 * A * L) + C3))
140 N11 = C3 / (2 * (((-C1 * L) + C3) ^ 2))
150 N12 = C3 / (2 * (((-C1 * L * A) + C3) ^ 2))
151 I = (1 / 12) * (H1 ^ 3)
155 N14 = -N9 + N10 + N11 - N12; INT2 = (1 / (C1 ^ 2)) * N14
160 N13 = N3 - N4 + N5 - N6 - N7 + N8
170 N15 = N1 / (I * L)
180 N16 = N2 / I
190 N17 = (12 * N13) / (L * (C1 ^ 3)); INT1 = (1 / (C1 ^ 3)) * (N13); PRINT "INT1="; INT1; PRINT
"INT2="; INT2
200 N18 = (12 * N14) / (C1 ^ 2)
210 PROP = (N15 - N17) / (N15 - N16 - N17 - N18)
220 PRINT "MA="; PROP; "MB"
230 PRINT "MB="; -1 / PROP; "MA"
240 N1 = ((A * L) ^ 2) / (2 * L)
250 N2 = A * L
260 C1 = (H1 - H2) / (L * (1 - A))
270 C2 = (A * (H1 - H2)) / (1 - A)
280 C3 = H1 + C2
290 N3 = C3 / (2 * ((-C1 * L + C3) ^ 2))
300 N4 = 1 / (-C1 * L + C3)
310 N5 = C3 / ((2 * ((-C1 * A * L + C3) ^ 2)))
320 N6 = 1 / (-C1 * A * L + C3)
330 N7 = 1 / ((2 * C1) * ((-C1 * L + C3) ^ 2))
340 N8 = 1 / ((2 * C1) * ((-C1 * A * L + C3) ^ 2))
350 I = (1 / 12) * (H1 ^ 3)
360 N10 = N1 / I
370 N11 = N2 / I
380 N12 = (-N3 + N4 + N5 - N6); N13 = N7 - N8; N13 = N7 - N8
390 N14 = N10 - ((12 * N12) / (L * (C1 ^ 2))) - (12 * N13) - N11

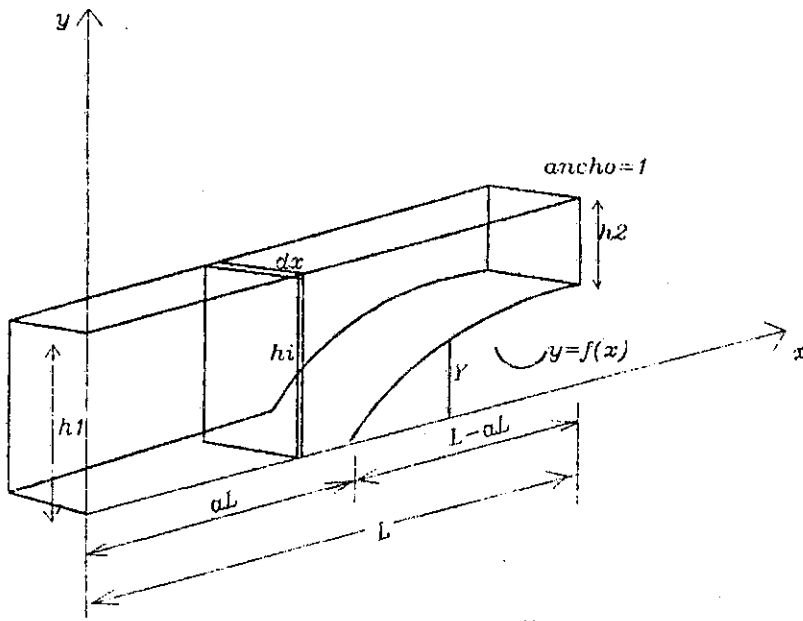
```

```
400 PROP = 1 / PROP
410 N15 = ((N10 - ((12 * N12) / (L * (C1 ^ 2)))) * PROP) - (N14)
420 MA = 1 / N15
430 PRINT "MA="; MA; "E": MB = PROP * MA
440 PRINT "Mb="; MB; "E"
450 RIGA = (MA * L) / ((-1 / 12) * (H2 ^ 3))
460 PRINT "Ka="; RIGA
470 RIGB = (MB * L) / ((-1 / 12) * (H2 ^ 3))
480 PRINT "Kb="; RIGB
```

APÉNDICE 7.

Factores de Rigidez y Transporte.

Miembros asimétricos combinados (Cartelas Curvas).



$$y = o \sqrt{x - aL}$$

$$h_i = h_1 - y$$

$$h_i = h_1 - (o \sqrt{x - aL})$$

$$h_i = h_1 - o \sqrt{x - aL}$$

$$I = \frac{1}{12} (h_i)^3$$

$$I = \frac{1}{12} (h_1 - o \sqrt{x - aL})^3$$

$$I = \frac{1}{12} (h_1 - o \sqrt{x - aL})^3$$

$$t_{a/b} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{xM dx}{I}$$

$$\theta = \frac{1}{E} \int_0^{aL} \frac{xM dx}{I} + \int_{aL}^L \frac{xM dx}{I}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \int_0^{aL} x^2 dx + Ma \int_0^{aL} x dx \right) + \frac{1}{E} \int_{aL}^L \frac{x \left(\frac{Mb - Ma}{L} x + Ma \right)}{1/12 (h1 - o\sqrt{x - aL})^3} dx$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \frac{(aL)^3}{3} + \frac{Ma (aL)^2}{2} \right) + \frac{12}{E} \int_{aL}^L \left(\frac{(Mb - Ma)}{L} x + Ma \right) \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{x - aL})^3}$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \frac{(aL)^3}{3} + \frac{Ma (aL)^2}{2} \right) + \frac{12}{E} \int_{aL}^L \frac{Mb - Ma x^2}{L(h1 - o\sqrt{x - aL})^2} + \frac{Max}{(h1 - o\sqrt{x - aL})^3} dx$$

$$\theta = \frac{Mb - Ma}{1L} \frac{(aL)^3}{3} + \frac{Ma (aL)^2}{2l} + \frac{12}{E} \left(\frac{Mb - Ma}{L} \int_{aL}^L \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{x - aL})^3} \right)$$

$$+ Ma \int_{aL}^L \frac{x}{(h1 - o\sqrt{x - aL})^3} dx$$

Integ 2

Integ 1

Solución Integ 1:

$$\int_{aL}^L \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{x-aL})^3}$$

$$u = h1 - o\sqrt{x-aL} \quad x = \left(\frac{h-u}{o}\right)^2 + aL$$

$$x = \left(\frac{u-h1}{o}\right)^2 + aL \quad x^2 = \left(\frac{h-u}{o}\right)^4 + 2\left(\frac{h1-u}{o}\right)^2 aL + aL^2$$

$$x = \left(\frac{h-u}{o}\right)^2 + aL \quad dx = \left(\frac{2u-2h1}{o^2}\right) du$$

$$\int_{aL}^L \frac{\left(\frac{h-u}{o}\right)^4 + 2\left(\frac{h1-u}{o}\right)^2 aL + (aL)^2 \left(\frac{2u-2h1}{o^2}\right)}{u^3} du$$

$$\begin{aligned} (h-u)^4 &= (h-u)^2 (h-u)^2 = (h^2 - 2hu + u^2)(h^2 - 2hu + u^2) \\ &= h^4 - 2h^3u + h^2u^2 - 2h^3u + 4h^2u^2 - 2hu^3 \\ &\quad + u^2h^2 - 2hu^3 + u^4 \\ &= h^4 - 4h^3u + 5h^2u^2 + h^2u^2 - 4hu^3 + u^4 \\ &= h^4 - 4h^3u + 6h^2u^2 - 4hu^3 + u^4 \end{aligned}$$

$$\int_{aL}^L \frac{\left(\frac{h^4 - 4h^3u + 6h^2u^2 - 4hu^3 + u^4}{o^4}\right) + \frac{2(h1^2 - 2hu + u^2) aL}{o^2} + \frac{(aL)^2}{1} \left(\frac{2u-2h1}{o^2}\right) du}{u^3}$$

$$\int_{aL}^L \frac{\left(\frac{h^4}{o^4} - \frac{4h^3u}{o^4} + \frac{6h^2u^2}{o^4} - \frac{4hu^3}{o^4} + \frac{u^4}{o^4} + \frac{2aLh1^2}{o^2} - \frac{4hu aL}{o^2} + \frac{2u^2 aL}{o^2} + (aL)^2\right) \left(\frac{2u-2h1}{o^2}\right) du}{u^3}$$

$$\int_{aL}^L \left(\frac{2uh^4}{u^3o^6} - \frac{8h^3u^2}{u^3o^6} + \frac{12h^2}{o^6} - \frac{8hu^4}{u^3o^6} + \frac{2u^5}{u^3o^6} + \frac{4aLh^2u}{u^3o^4} - \frac{4hu^3aL}{u^3o^4} + \frac{4u^3aL}{o^3} + \frac{2u(aL)^2}{u^3o^2} \right. \\ \left. - \frac{2h^5}{u^3o^6} + \frac{4h^4u}{u^3o^6} - \frac{6h^3u^2}{u^3o^6} + \frac{8h^2u^3}{u^3o^6} + \frac{2u^4h}{u^3o^6} - \frac{4haL}{uo} + \frac{2h^3uaL}{u^3o^4} - \frac{4hu^2aL}{u^3o^4} - \frac{2h(aL)^2}{u^3o^2} \right) du$$

$$= \int_{aL}^L \left(\frac{2h^4}{u^2o^6} - \frac{8h^3}{uo^6} + \frac{12h^2}{o^6} - \frac{8hu}{o^6} + \frac{2u^2}{o^6} + \frac{4aLh^2}{u^2o^4} - \frac{8haL}{uo^4} + \frac{4aL}{o^4} + \frac{2(aL)^2}{u^2o^2} - \frac{2h^5}{u^3o^6} + \frac{4h^4}{u^2o^6} - \frac{12h^3}{uo^6} \right. \\ \left. + \frac{8h^2}{o^6} + \frac{2uh}{o^6} - \frac{4h^3aL}{u^3o^4} + \frac{2h^2aL}{u^2o^4} - \frac{4haL}{uo^4} - \frac{2h(aL)^2}{u^3o^2} \right) du$$

$$= \left. \frac{-2h^4}{o^6u} \right|_{aL}^L - \left. \frac{8h^3 \ln |u|}{o^6} \right|_{aL}^L + \left. \frac{12h^2u}{o^6} \right|_{aL}^L - \left. \frac{4hu^2}{o^6} \right|_{aL}^L - \left. \frac{4aLh^2}{o^4u} \right|_{aL}^L - \left. \frac{8haL \ln |u|}{o^4} \right|_{aL}^L + \left. \frac{4aL}{o^4} u \right|_{aL}^L$$

$$- \left. \frac{2(aL)}{uo^2} \right|_{aL}^L + \left. \frac{2h^5}{2u^2o^6} \right|_{aL}^L - \left. \frac{8h^4}{uo^6} \right|_{aL}^L - \left. \frac{12h \ln |u|}{o^6} \right|_{aL}^L + \left. \frac{8h^2u}{o^6} \right|_{aL}^L + \left. \frac{uh^2}{o^6} \right|_{aL}^L + \left. \frac{4h^3aL}{2o^4u^2} \right|_{aL}^L$$

$$- \left. \frac{8h^2aL}{o^4u} \right|_{aL}^L - \left. \frac{4haL \ln |u|}{o^4} \right|_{aL}^L + \left. \frac{2h(aL)^2}{2u^2o^2} \right|_{aL}^L + \left. \frac{2u^3}{3o^6} \right|_{aL}^L$$

Solución :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2h^4}{o^6(h1-o\sqrt{L-aL})} + \frac{2h^3}{o^6} - \frac{8h^3 \ln(h1-o\sqrt{L-aL})}{o} + \frac{8h^3 \ln|h1|}{o^6} + \frac{12h^2(h1-o\sqrt{L-aL})}{o^6} \\
 &\quad - \frac{12h^3}{o^6} - \frac{4h(h1-o\sqrt{L-aL})^2}{o^6} + \frac{4h^3}{o^6} - \frac{4aLh^2}{o^4(h1-o\sqrt{L-aL})} + \frac{4aLh}{o^4} - \frac{8haL \ln|h1-o\sqrt{L-aL}|}{o^4} \\
 &\quad + \frac{8haL \ln|h1|}{o^4} + \frac{4aL(h1-o\sqrt{L-aL})}{o^4} - \frac{4aLh}{o^4} - \frac{2(aL)^2}{(h1-o\sqrt{L-aL})o^2} + \frac{2(aL)^2}{ho^2} + \frac{2h^5}{2(h1-o\sqrt{L-aL})^2o^6} \\
 &\quad - \frac{2h^5}{2h^2o^6} - \frac{8h^4}{(h1-o\sqrt{L-aL})o^6} + \frac{8h^3}{o^6} - \frac{12h^3 \ln(h1-o\sqrt{L-aL})}{o^6} + \frac{12h \ln|h1|}{o^6} + \frac{8h^2(h1-o\sqrt{L-aL})}{o^6} \\
 &\quad - \frac{8h^3}{o^6} - \frac{(h1-o\sqrt{L-aL})^2 h}{o^6} + \frac{h^3}{o^6} + \frac{2h^3 aL}{o^4(h1-o\sqrt{L-aL})^2} - \frac{2haL}{o^4} - \frac{8h^2 aL}{o^4(h1-o\sqrt{L-aL})} \\
 &\quad + \frac{8h^2 aL}{o^4 h} - \frac{4haL \ln(h1-o\sqrt{L-aL})}{o^4} + \frac{4haL \ln|h1|}{o^4} + \frac{2h(aL)^2}{2(h1-o\sqrt{L-aL})o^2} - \frac{2(aL)^2}{2ho^2} \\
 &\quad + \frac{2(h1-o\sqrt{L-aL})^3}{3o^6} - \frac{2h^3}{3o^6}
 \end{aligned}$$

Sea: $C = h1 - o\sqrt{L-aL}$

Factorizando la Solución :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{o^6} \left(\frac{-2h^4}{(h1-o\sqrt{L-aL})} + 2h^3 - 8h^3 \ln|C| + 8h^3 \ln|h1| + 12h^2 C - 12h^3 - 4hC^2 + 4h^3 + \frac{h^5}{C^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2h^5}{2h^2 C} - \frac{8h^4}{C} + 8h^3 - 12h^3 \ln|C| + 12h^3 \ln|h1| + 8h^2 |C| - 8h^3 - C^2 h + h^3 + \frac{2C^3}{3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2h^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{+1}{o^4} \left(\frac{-4aLh^2}{C} + 4aLh - 8haL \ln|C| + 8haL \ln|h| + 4aLC - 4aLh + \frac{+2h^3 aL}{C} - 2haL \right. \\ \left. \frac{8h^2 aL}{C} - \frac{8h^2 aL}{h} - 4haL \ln|C| + 4haL \ln|h| \right)$$

$$\frac{+1}{o^2} \left(\frac{-2(aL)^2}{C} + \frac{2(aL)^2}{h} + \frac{2h(aL)^2}{2C^2} - \frac{2(aL)^2}{2h} \right)$$

Solución Integ 2 :

$$\int_{aL}^L \frac{x \, dx}{(h1 - o\sqrt{x-aL})^3}$$

$$u = h1 - o\sqrt{x-aL} \quad x = \left(\frac{h-u}{o} \right)^2 + aL$$

$$x = \left(\frac{u-h1}{o} \right)^2 + aL$$

$$x = \left(\frac{h-u}{o} \right)^2 + aL \quad x = \frac{h-u}{o} + 2 \frac{h1-u}{o} + aL$$

$$dx = \left(\frac{2u-2h1}{o^2} \right) du$$

$$= \int_{aL}^L \frac{\left(\frac{h^2}{o^2} - \frac{2hu}{o} + \frac{u^2}{o^2} + aL \right) \left(\frac{2u-2h1}{o^2} \right) du}{u^3}$$

$$= \int_{aL}^L \left(\frac{2h^2}{o^4 u^2} - \frac{4h}{o^4 u} + \frac{2}{o^4} + \frac{2aL}{o^2 u^2} - \frac{2h^3}{o^4 u^3} + \frac{4h^2}{u^2 o^4} - \frac{2h}{o^4 u} - \frac{2haL}{o^2 u^3} \right) du$$

$$= \frac{2h^2}{o^4} \int \frac{du}{u^2} - \frac{4h}{o^4} \int \frac{du}{u} + \frac{2}{o^4} \int du + \frac{2aL}{o^2} \int \frac{du}{u^2} - \frac{2h^3}{o^2} \int \frac{du}{u^3} + \frac{4h^2}{o^4} \int \frac{du}{u^2} - \frac{2h}{o^4} \int \frac{du}{u} - \frac{2haL}{o^2} \int \frac{du}{u^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2h^2}{o^4 u} \left| \frac{-4h \ln|u|}{o^4} \right| \left| \frac{+2u}{o^4} \right| \left| \frac{-2al}{o^2 u} \right| \left| \frac{+2h^3}{2o^4 u^2} \right| \left| \frac{-4h^2}{o^4 u} \right| \left| \frac{-2h \ln|u|}{o^4} \right| \left| \frac{+2hal}{2o^2 u^2} \right| \left| \frac{-2h^2}{o^4 (h-o\sqrt{x-a})} \right| \\
&\quad \left| \frac{-4h \ln(h-o\sqrt{x-a})}{o^4} \right| \left| \frac{+2(h-o\sqrt{x-a})}{o^4} \right| \left| \frac{-2al}{o^2 (h-o\sqrt{x-a})} \right| \left| \frac{+2h^3}{2o^4 (h-o\sqrt{x-a})^2} \right| \left| \frac{-4h}{o (h-o\sqrt{x-a})} \right| \\
&\quad \left| \frac{-2h \ln(h-o\sqrt{x-a})}{o^4} \right| \left| \frac{+2hL}{2o^2 (h-o\sqrt{x-a})^2} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2h^2}{o^4 (h-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+2h^2}{o^4 h} \quad \frac{-4h \ln|h1-o\sqrt{L-a}|}{o^4} \quad \frac{+4h \ln|h1|}{o^4} \quad \frac{+2(h-o\sqrt{L-a})}{o^4} \quad \frac{-2h}{u^4} \\
&\quad \frac{-2al}{o^2 (h1-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+2al}{o^2 h} \quad \frac{+2h^3}{2o^4 (h1-o\sqrt{L-a})^2} \quad \frac{-2h^3}{2o^4 h^2} \quad \frac{-4h^2}{o (h1-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+4h^2}{o^4 h} \\
&\quad \frac{-2h \ln|h1|}{o^4} \quad \frac{+2hal}{2o^2 (h-o\sqrt{L-a})^2} \quad \frac{-2hal}{2o^2 h^2}
\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2h}{o^4 (h-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+2h}{o^4 h} \quad \frac{-4h \ln|h1-o\sqrt{L-a}|}{o^4} \quad \frac{+4h \ln|h1|}{o^4} \quad \frac{+2(h-o\sqrt{L-a})}{u^4} \quad \frac{-2h}{o^4} \\
&\quad \frac{-2al}{o^2 (h1-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+2al}{o^2 h} \quad \frac{+h^3}{o^4 (h1-o\sqrt{L-a})^2} \quad \frac{-2h}{2o^4 h} \quad \frac{-4h^2}{o^4 (h1-o\sqrt{L-a})} \quad \frac{+4h}{o^4} \\
&\quad \frac{-2h \ln|h1-o\sqrt{L-a}|}{o^4} \quad \frac{-2h \ln|h1|}{o^4} \quad \frac{+2hal}{2o^2 (h-o\sqrt{L-a})^2} \quad \frac{-2hal}{2o^2 h}
\end{aligned}$$

Para la condición de giro unitario :

$$\theta_{ab} = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M dx}{I}$$

$$1 \text{ rad } E = \int_0^L \frac{M dx}{I}$$

$$E = \int_0^{al} \frac{M dx}{I} + \int_{al}^l \frac{M dx}{I}$$

$$E = \int_0^{al} \frac{\left(\frac{Mb-Ma}{L} \right) x + Ma}{I} dx + \int_{al}^l \frac{\left(\frac{Mb-Ma}{L} \right) x + Ma}{I} dx$$

$$E = \frac{1}{I} \int_0^{al} \frac{(Mb-Ma) x dx}{L} + \int_0^{al} \frac{Ma dx}{I} + \int_{al}^l \frac{(Mb-Ma) x dx}{L (h1-o\sqrt{x-al})^3} + \int_{al}^l \frac{Ma dx}{(h1-o\sqrt{x-al})^3}$$

$$E = \frac{1}{I} \left(\frac{(Mb-Ma) (aL)^2}{L \cdot 2} + Ma (aL) \right) + \frac{12(Mb-Ma)}{L} \int_0^l \frac{x dx}{(h1-o\sqrt{x-al})^3} + \frac{12Ma}{L} \int_0^l \frac{dx}{(h1-o\sqrt{x-al})^3}$$

0 integ 1 0 integ 2

La Integ 1 ya resuelta anteriormente :

$$= \frac{-2h^2}{o^4 (h-o\sqrt{L-al})} + \frac{2h}{o^4 h} - \frac{4h \ln|h1-o\sqrt{L-al}|}{o^4} + \frac{4h \ln|h1|}{o^4} + \frac{2(h-o\sqrt{L-al})}{u^4} - \frac{2h}{o^4}$$

$$\frac{-2aL}{o^2(h1-o\sqrt{L-aL})} \quad \frac{+2aL}{o^2h} \quad \frac{+h^3}{o^4(h1-o\sqrt{L-aL})^2} \quad \frac{-2h}{2o^4h} \quad \frac{-4h}{o^4(h1-o\sqrt{L-aL})} \quad \frac{+4h}{o^4}$$

$$\frac{-2h\ln|h1-o\sqrt{L-aL}|}{o^4} \quad \frac{-2h\ln|h1|}{o^4} \quad \frac{+2haL}{2o^2(h-o\sqrt{L-aL})^2} \quad \frac{-2aL}{2o^2h}$$

solución integ 2:

$$\int_{aL}^L \frac{dx}{(h1-o\sqrt{x-aL})^3}$$

$$u = h1 - o\sqrt{x-aL} \quad x = \left(\frac{h-u}{o}\right)^2 + aL$$

$$x = \left(\frac{u-h1}{o}\right)^2 + aL \quad x = \frac{h-u}{o} + 2\frac{h1-u}{o}aL + aL$$

$$x = \left(\frac{h-u}{o}\right)^2 + aL$$

$$dx = \frac{2u-2h1}{o^2} du$$

$$= \int \frac{\frac{2u-2h}{o^2} du}{u^3} = \int \frac{2u-2h}{o^2 u^3} du = \int \frac{2udu}{u} - \int \frac{2hdu}{u}$$

$$= \frac{-2}{o^2 u} \Big|_{aL}^L + \frac{+2h}{o^2 u^2} \Big|_{aL}^L = \frac{-2}{o^2(h1-o\sqrt{x-aL})} \Big|_{aL}^L + \frac{+1h}{o^2(h1-o\sqrt{x-aL})^2} \Big|_{aL}^L$$

$$= \frac{1}{o^2} \left(\frac{-2}{(h1-o\sqrt{L-aL})} + \frac{+2}{h} + \frac{+h}{(h1-o\sqrt{L-aL})^2} - \frac{-h}{h^2} \right)$$

$$= \frac{1}{o^2} \left(\frac{-2}{(h1-o\sqrt{L-aL})} + \frac{+2}{h} + \frac{+h}{(h1-o\sqrt{L-aL})^2} - \frac{-1}{h} \right)$$

El siguiente programa determina los valores de proporcionalidad y rigidez para miembros compuestos (combinación de sección constante y variable), para las expresiones obtenidas en el presente apéndice.

```

10 CLS : CLEAR
15 REM MIEMBROS ASIMETRICOS PARABOLICOS
20 INPUT "H1="; H1
30 INPUT "H2="; H2
40 INPUT "A="; A
50 INPUT "L="; L: DEFDBL C
60 I = (1 / 12) * (H1 ^ 3)
70 O = (H1 - H2) / (SQR(L - A * L)): PRINT "O="; O
80 C1 = (H1 - O * SQR(L - A * L)): PRINT "C1="; C1: INPUT ""; L$
90 C2 = CDBL((2 * (H1 ^ 4)) / C1): C3 = CDBL((2 * H1 ^ 3)): C4 = CDBL(8 * (H1 ^ 3) * LOG(C1))
95 C5 = CDBL(8 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)): C6 = CDBL(12 * (H1 ^ 2) * C1)
100 C7 = CDBL(12 * (H1 ^ 3)): C8 = CDBL(4 * H1 * (C1 ^ 2))
105 C9 = CDBL(4 * (H1 ^ 3)): C10 = CDBL((H1 ^ 5) / (C1 ^ 2))
110 C11 = CDBL(H1 ^ 3): C12 = CDBL(8 * (H1 ^ 4) / C1)
115 C13 = CDBL(8 * (H1 ^ 3)): C14 = CDBL(12 * (H1 ^ 3) * LOG(C1))
120 C15 = CDBL(12 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)): C16 = CDBL(8 * (H1 ^ 2) * C1): C17 = CDBL(8 * (H1 ^
3))
130 C18 = CDBL((C1 ^ 2) * H1): C19 = CDBL(H1 ^ 3)
135 C20 = CDBL((2 * (C1 ^ 3)) / 3): C21 = CDBL((2 * (H1 ^ 3)) / 3)
140 C22 = CDBL(-C2 + C3 - C4 + C5 + C6 - C7 - C8 + C9 + C10 - C11 - C12 + C13 - C14 + C15 + C16
-C17 - C18 + C19 + C20 - C21)
150 C22 = CDBL((1 / (O ^ 6)) * C22): PRINT "C22="; C22
160 C23 = (4 * A * L * (H1 ^ 2)) / C1: C24 = 4 * A * L * H1: C25 = 8 * H1 * A * L * LOG(C1)
170 C26 = 8 * H1 * A * L * LOG(H1): C27 = 4 * A * L * C1: C28 = 4 * A * L * H1
180 C29 = (2 * (H1 ^ 3) * A * L) / (C1 ^ 2): C30 = 2 * H1 * A * L: C31 = (8 * (H1 ^ 2) * A * L) / C1
190 C32 = (8 * (H1 ^ 2) * A * L) / (H1): C33 = 4 * H1 * A * L * LOG(C1): C34 = 4 * H1 * A * L *
LOG(H1)
200 C35 = -C23 + C24 - C25 + C26 + C27 - C28 + C29 - C30 - C31 + C32 - C33 + C34
210 C35 = (1 / (O ^ 4)) * C35: PRINT "C35="; C35
220 C36 = 2 * ((A * L) ^ 2) / C1: C37 = 2 * ((A * L) ^ 2) / H1: C38 = (2 * H1 * ((A * L) ^ 2)) / (2 * (C1
^ 2))
230 C39 = (2 * ((A * L) ^ 2)) / (2 * H1)
240 C40 = -C36 + C37 + C38 - C39
250 C40 = C40 / (O ^ 2): PRINT "C40="; C40
260 C41 = C22 + C35 + C40: PRINT "Ira integral="; C41
270 C42 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * (C1)): C43 = (2 * H1) / (O ^ 4): C44 = (4 * H1 * LOG(C1)) / (O ^
4)
280 C45 = (4 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4): C46 = (2 * C1) / (O ^ 4): C47 = (2 * H1) / (O ^ 4)
290 C48 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * C1): C49 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * H1): C50 = (H1 ^ 3) / ((O ^ 4) *
(C1 ^ 2)): C51 = H1 / (O ^ 4)
300 C52 = (4 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * C1): C53 = (4 * H1) / (O ^ 4): C54 = (2 * H1 * LOG(C1)) / (O ^ 4)
310 C55 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4): C56 = (2 * H1 * A * L) / (2 * (O ^ 2) * (C1 ^ 2)): C57 = (2 * A
* L) / (2 * (O ^ 2) * (H1))

```

```

320 C58 = -C42 + C43 - C44 + C45 + C46 - C47 - C48 + C49 + C50 - C51 - C52 + C53 - C54 + C55 +
C56 - C57
330 PRINT "2a integral="; C58
340 C59 = 2 / C1: C60 = 2 / H1: C61 = H1 / (C1 ^ 2): C62 = 1 / H1
350 C63 = (-C59 + C60 + C61 - C62) / (O ^ 2)
360 PRINT "3ra integral="; C63
370 C64 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * (C1)): C65 = (2 * H1) / (O ^ 4): C66 = (4 * H1 * LOG(C1)) / (O ^
4)
380 C67 = (4 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4): C68 = (2 * C1) / (O ^ 4): C69 = (2 * H1) / (O ^ 4)
390 C70 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * (C1)): C71 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * H1)
400 C72 = (H1 ^ 3) / ((O ^ 4) * (C1 ^ 2)): C73 = H1 / (O ^ 4)
410 C74 = (4 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * C1): C75 = (4 * H1) / (O ^ 4): C76 = (2 * H1 * LOG(C1)) / (O ^ 4)
420 C77 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4): C78 = (2 * H1 * A * L) / (2 * (O ^ 2) * (C1 ^ 2)): C79 = (2 * A
* L) / (2 * (O ^ 2) * H1)
430 C81 = -C64 + C65 - C66 + C67 + C68 - C69 - C70 + C71 + C72 - C73 - C74 + C75 - C76 + C77 +
C78 - C79
440 PRINT "4ta integral="; C81
450 C82 = ((A * L) ^ 3) / (I * L * 3): C83 = ((A * L) ^ 2) / (2 * I): C84 = (12 * C41) / L: C85 = 12 * C58
460 PROP = (C82 + C84) / (C82 - C83 + C84 - C85)
470 PRINT "MA="; PROP; " MB"
480 PRINT "MB="; (1 / PROP); " MA"
490 C87 = ((A * L) ^ 2) / (2 * I * L): C88 = (A * L) / I: C89 = (12 * C81) / L: C90 = 12 * C63
500 MB = 1 / (C87 - PROP * C87 + PROP * C88 + C89 - C89 * PROP + C90 * PROP)
510 PRINT "MB="; MB: MA = MB * PROP
520 PRINT "MA="; MB * PROP
530 RIGB = (MB * L) / ((1 / 12) * (H2 ^ 3)): RIGA = (MA * L) / ((1 / 12) * (H2 ^ 3))
540 PRINT "KB="; RIGB
550 PRINT "KA="; RIGA

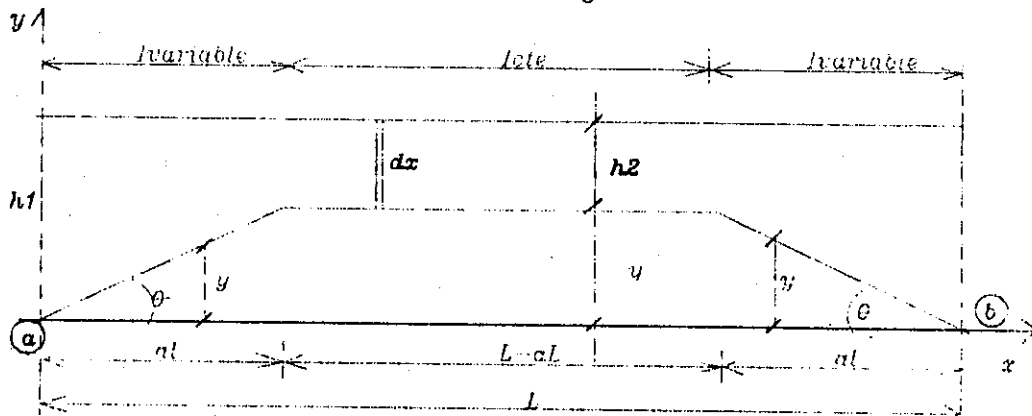
```

APÉNDICE 8.

Factores de Rigidez y Transporte

Miembros Simétricos Acartelados Rectos.

Para el caso del elemento acartelado de la figura :



variación de y

Tramo 1

$$y = mx$$

$$m = \tan \theta$$

$$m = \frac{h_1 - h_2}{a}$$

$$a$$

$$y = \frac{h_1 - h_2}{a} x$$

$$a$$

variación de y

Tramo 2

$$y = h_1 - h_2$$

variación de y

Tramo 3

$$y = -mx + b$$

$$\tan \theta = \frac{h_1 - h_2}{a}$$

$$a$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{h_1 - h_2}{a}$$

$$a$$

$$\tan \theta = b/L$$

$$b = L \tan \theta$$

$$y = -\frac{h_1 - h_2}{a} x + L \tan \theta$$

$$a$$

Inercia 1

$$h_i = h_1 - y$$

$$I = \frac{1}{12} h_i^3$$

$$12$$

$$I = \frac{1}{12} h_1^3 - \left(\frac{h_1 - h_2}{a} x \right)^3$$

Inercia 2

$$h_i = h_1 - y$$

$$I = \frac{1}{12} h_i^3$$

$$12$$

$$I = \frac{1}{12} h_2^3$$

Inercia 3

$$h_i = h_1 - y$$

$$I = \frac{1}{12} h_i^3$$

$$12$$

$$I = \frac{1}{12} \left(h_1 + \left(\frac{h_1 - h_2}{a} \right) x - L \tan \theta \right)^3$$

$$I = \frac{1}{12} \left(h_1 + \left(\frac{h_1 - h_2}{a} \right) x - \frac{(h_1 - h_2)}{a} \right)^3$$

Para la condición 1 se tiene :

$$0 = 1 \int_0^L \frac{x M dx}{EI}$$

$$0 = 1 \int_0^a \frac{x M dx}{EI} + 1 \int_a^{l-a} \frac{x M dx}{EI} + 1 \int_{l-a}^l \frac{x M dx}{EI}$$

$$0 = \int_0^a \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} x^2 + M_a x \right) dx}{\frac{1}{12} \left(h_1 - \left(\frac{h_1 - h_2}{a} \right) x \right)^3} + \int_a^{l-a} \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} x^2 + M_a x \right) dx}{\frac{1}{12} h_2^3} + \int_{l-a}^l \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} x^2 + M_a x \right) dx}{\frac{1}{12} \left(h_1 - \left(\frac{h_1 - h_2}{a} \right) x - \frac{(h_1 - h_2)}{a} \right)^3}$$

Para simplificar la expresión se asume:

$$C_1 = \frac{h_1 - h_2}{aL}$$

$$C_2 = C_1$$

$$C_3 = -(h_1 + (C_1 \cdot L))$$

$$0 = \int_0^a \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} \right) x^2 + M_a x}{\frac{1}{12} (h_1 - C_1 x)^3} dx + \int_a^{l-a} \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} \right) x^2 + M_a x}{\frac{1}{12} h_2^3} dx + \int_{l-a}^l \frac{\left(\frac{M_b - M_a}{L} \right) x^2 + M_a x}{\frac{1}{12} (C_2 x - C_3)^3} dx$$

$$0 = \frac{(M_b - M_a)}{L} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(h_1 - C_1 x)^3} + M_a \int_0^a \frac{x dx}{(h_1 - C_1 x)^3} + \frac{M_b - M_a}{L} \int_a^{l-a} \frac{x^2 dx}{h_2^3} + M_a \int_a^{l-a} \frac{x dx}{h_2^3} + \frac{(M_b - M_a)}{L} \int_{l-a}^l \frac{x^2 dx}{(C_2 x - C_3)^3} + M_a \int_{l-a}^l \frac{x dx}{(C_2 x - C_3)^3}$$

integ 1
integ 2
integ 3
integ 4
integ 5

$$+ M_a \int_{l-a}^l \frac{x dx}{(C_2 x - C_3)^3}$$

integ 6

Solución Integ 1:

$$O = \int_0^a \frac{x \, dx}{(h1-C1x)} \quad \text{haciendo: } \begin{array}{l} u = h1-C1x \\ du = -C1 \, dx \\ -x = \frac{u-h1}{C1} \\ x = \frac{h1-u}{C1} \end{array}$$

$$= \int_0^a \frac{\left(\frac{h-u}{C1}\right) \left(\frac{-du}{C1}\right)}{u^3} = \int_0^a \frac{(h1-u)^2 - du}{C1^3 u^3} = \frac{-1}{C1} \int_0^a \frac{(h1-u)^2}{u^3} du$$

$$= \frac{-1}{C1} \int_0^a \frac{h^2 - 2hu + u^2}{u^3} du = \frac{-1}{C1} \int_0^a \left(\frac{h^3}{u^3} - \frac{2h}{u^2} + \frac{1}{u} \right) du = \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h^2}{2u^2} + \frac{2h}{u} + \ln|u| \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h^2}{2(h1-C1x)^2} + \frac{2h}{h1-C1x} + \ln|h1-C1x| \right) \Big|_0^a$$

Solución:

$$= \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h}{2(h1-C1a)} + \frac{h1}{2h1} + \frac{2h}{h1-C1(a)} - 2h + \ln|h1-C1(a)| - \ln|h1| \right)$$

Solución Integ 2:

$$= \int_0^a \frac{x \, dx}{(h1-C1x)^3} \quad \text{haciendo: } \begin{array}{l} u = h1-C1x \\ du = -C1 \, dx \\ -x = \frac{u-h1}{C1} \\ x = \frac{h1-u}{C1} \end{array}$$

$$= \int_0^a \frac{\left(\frac{h-u}{C1}\right) \left(\frac{-du}{C1}\right)}{u^3} = \int_0^a \frac{(h1-u) - du}{C1^2 u^3} = \frac{-1}{C1} \int_0^a \frac{(h1-u)}{u^3} du$$

$$= \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h+1}{2u} + \frac{1}{u} \right) \Big|_0^{al} = \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h}{2(h-C1x)} + \frac{1}{(h1-C1x)} \right) \Big|_0^{al}$$

Solución :

$$= \frac{-1}{C1} \left(\frac{-h1}{2(h-C1(al))^2} + \frac{h1}{2h1^2} + \frac{1}{h1-C1(al)} - \frac{-1}{h1} \right)$$

Solución Integ 3 :

$$\int_{aL}^{L-aL} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{aL}^{L-aL} = \left(\frac{(L-aL)^3}{3} - \frac{(aL)^3}{3} \right)$$

Solución Integ 4 :

$$\int_{aL}^{L-aL} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{aL}^{L-aL} = \left(\frac{(L-aL)^2}{2} - \frac{(aL)^2}{2} \right)$$

Solución Integ 5 :

$$\int_{L-aL}^L \frac{x^2 dx}{(C2x - C3)^3} \quad \begin{array}{l} u = C2 - C3 \\ du = C2 dx \\ dx = du / C2 \end{array} \quad x = \frac{u + C3}{C2}$$

$$= \int_{L-aL}^L \frac{\frac{u+C3}{C2} \frac{du}{C2}}{u^3} = \int_{L-aL}^L \frac{(u+C3)^2}{C2^3 u^3} du = \frac{1}{C2^3} \int_{L-aL}^L \frac{u^2 + 2uC3 + C3^2}{u^3} du$$

$$= \frac{1}{C_2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{1}{u} + \frac{2C_3}{u^2} + \frac{C_3^2}{u^3} \right) du = \frac{1}{C_2} \left(\ln |u| - \frac{2C_3}{u} - \frac{C_3^2}{2u^2} \right) \Bigg|_{L-aL}^L$$

$$= \frac{1}{C_2^3} \left(\ln |C_2x - C_3| - \frac{2C_3}{(C_2x - C_3)} - \frac{C_3^2}{2(C_2x - C_3)^2} \right) \Bigg|_{L-aL}^L$$

Solución :

$$= \frac{1}{C_2} \left(\ln |C_2 - C_3| - \ln |C_2(L-aL) - C_3| - \frac{2C_3}{C_2L - C_3} + \frac{2C_3}{C_2(L-aL) - C_3} - \frac{C_3^2}{2(C_2L - C_3)^2} + \frac{C_3^2}{2(C_2(L-aL) - C_3)^2} \right)$$

Solución Integ 6 :

$$\int_{L-aL}^L \frac{x \, dx}{(C_2x - C_3)} \quad \begin{array}{l} u = C_2x - C_3 \\ du = C_2 dx \\ dx = du / C_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{u + C_3}{C_2} \end{array}$$

$$= \int_{L-aL}^L \frac{\left(\frac{u + C_3}{C_2} \right) \left(\frac{du}{C_2} \right)}{u^3} = \int_{L-aL}^L \frac{(u + C_3) du}{C_2^2 u^3} = \frac{1}{C_2^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{1}{u^2} + \frac{C_3}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{1}{C2^2} \left(\frac{-1}{C2L - C3} + \frac{1}{C2(L-aL)-C3} - \frac{C3}{2(C2L-C3)^2} + \frac{C3}{2(C2(L-aL)-C3)^2} \right)$$

Substituyendo en la Integral principal:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \frac{Mb - Ma}{L} \left(\frac{-1}{C1^3} \left(\frac{-h1^2}{2(h1-C1aL)^2} + \frac{+h1^2}{2h1^2} + \frac{+2h1}{h1-C1(aL)} - \frac{-2h1}{h1} + \ln |h1-C1(aL)| - \ln |h1| \right) \right. \\ &+ Ma \left(\frac{-1}{C1^2} \left(\frac{-h1}{2(h1-C1(aL))^2} + \frac{+h1}{2h1^2} + \frac{+1}{h1 - C1(aL)} - \frac{-1}{h1} \right) \right) \\ &+ \frac{Mb - Ma}{L (h2)^3} \left(\frac{(L - aL)^3}{3} - \frac{(aL)^3}{3} \right) \\ &+ \frac{Ma}{h2} \left(\frac{(L - aL)^2}{2} - \frac{(aL)^2}{2} \right) \\ &+ \frac{Mb - Ma}{L} \left(\frac{1}{C2^3} \left(\ln |C2L - C3| - \ln |C2(L - aL) - C3| - \frac{2C3}{C2L - C3} + \frac{2C3}{C2(L - aL) - C3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{C3^3}{2(C2L - C3)^2} + \frac{C1^2}{2(C2(L - aL) - C3)^2} \right) \right) \\ &+ Ma \left(\frac{1}{C2^2} \left(\frac{-1}{C2L - C3} + \frac{+1}{C2(L - aL) - C3} - \frac{-C3}{2(C2L - C3)^2} + \frac{+C3}{2(C2(L - aL) - C3)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Para la condición 2:

$$\emptyset \text{ a/b} = \int_a^b \frac{Mdx}{EI} = \int_0^L \frac{Mdx}{EI}$$

$$E = \int_0^{aL} \frac{M dx}{I} + \int_{aL}^{L-aL} \frac{M dx}{I} + \int_{L-aL}^L \frac{M dx}{I}$$

$$E = \int_0^{aL} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{\frac{1}{12} (h_1 - \frac{h_1 - h_2}{aL} x)^3} dx + \int_{aL}^{L-aL} \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{\frac{1}{12} (h_2)^2} dx + \int_{L-aL}^L \frac{\left(\frac{Mb - Ma}{L}\right) x + Ma}{\frac{1}{12} (h_1 + \frac{h_1 - h_2}{aL} x - \frac{h_1 - h_2}{aL})^3} dx$$

Si $C_1 = \frac{h_1 - h_2}{aL}$ y $C_2 = +C_1$ $C_3 = -h_1 + C_1L$

$$E = \int_0^{aL} \frac{\frac{Mb - Ma}{L} x + Ma}{\frac{1}{12} (h_1 - C_1)^3} dx + \int_{aL}^{L-aL} \frac{\frac{Mb - Ma}{L} x + Ma}{\frac{1}{12} (h_2)^3} dx + \int_{L-aL}^L \frac{\frac{Mb - Ma}{L} x + Ma}{\frac{1}{12} (C_2 x - C_3)^3} dx$$

$$\frac{E}{12} = \frac{Mb - Ma}{L} \int_0^{aL} \frac{x dx}{(h_1 - C_1 x)^3} + Ma \int_0^{aL} \frac{dx}{(h_1 - C_1 x)^3} + \frac{Mb - Ma}{L(h_2)^2} \int_{aL}^{L-aL} x dx + \frac{Ma}{(h_2)^3} \int_{aL}^{L-aL} dx$$

$$\frac{Mb - Ma}{L} \int_{L-aL}^L \frac{x dx}{(C_2 x - C_3)^3} + Ma \int_{L-aL}^L \frac{dx}{(C_2 x - C_3)^3}$$

De los resultados anteriores se sabe que:

$$1 \quad \int_0^{aL} \frac{x dx}{(h_1 - C_1 x)^3} = -\frac{1}{C_1^2} \left(-\frac{h_1}{2(h_1 - C_1(aL))^2} + \frac{h_1}{2h_1^2} + \frac{1}{h_1 - C_1(aL)} - \frac{1}{h_1} \right)$$

$$2 \quad \int_0^{aL} \frac{dx}{(h_1 - C_1 x)^3} \quad \begin{array}{l} u = h_1 - C_1 x \\ du = -C_1 dx \\ dx = du / -C_1 \end{array}$$

$$= \int_0^{aL} \frac{-du}{C_1 u^3} = -\frac{1}{C_1} \int_0^{aL} \frac{du}{u^3} = \frac{+1}{C_1} \frac{1}{2u^2} \Big|_0^{aL} = \frac{1}{C_1^2 (h_1 - C_1 x)^2} \Big|_0^{aL}$$

Solución:

$$= \left(\frac{1}{2C_1(h_1 - C_1 aL)^2} - \frac{1}{2C_1 h_1^2} \right)$$

$$3 \quad \int_{aL}^{L-aL} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{aL}^{L-aL} = \frac{(L-aL)^2}{2} - \frac{(aL)^2}{2}$$

$$\frac{+Mb - Ma}{L} \left(\frac{1}{C2} \right) \left(\frac{-1}{C2L-C3} - \frac{+1}{C2(L-aL)-C3} - \frac{+C3}{2(C2L-C3)^2} - \frac{+C3}{(2C2(L-aL)-C3)^2} \right)$$

$$+Ma \left(\frac{-1}{C2} \right) \left(\frac{1}{2(C2L-C3)^2} - \frac{-1}{2(C2(L-aL)-C3)} \right)$$

Que es la segunda ecuación con los mismas dos incógnitas Ma y Mb. Los demás datos son constantes.

El siguiente programa determina los valores de proporcionalidad y rigidez para miembros compuestos (Acartelados Rectos), para las expresiones obtenidas en el presente apéndice.

```

10 CLS : CLEAR
12 REM MIEMBROS ACARTELADOS RECTOS
15 INPUT "a="; a
20 INPUT "H2="; H2
22 INPUT "FACTOR="; FACTOR
30 H1 = FACTOR * H2: PRINT "h1="; H1: PRINT "h2/h1="; (H2 / H1)
40 INPUT "L="; L
50 C1 = ((H1 - H2) / (a * L)): C2 = C1: C3 = -H1 + (C1 * L)
55 PRINT "PENDIENTE DE LA CARTELA"; C1
60 N1 = (H1 ^ 2) / (2 * ((H1 - C1 * a * L) ^ 2))
70 N2 = 1 / 2
80 N3 = (2 * H1) / (H1 - C1 * a * L)
90 N4 = 2
100 N5 = LOG(H1 - (C1 * a * L))
110 N6 = LOG(H1): ANTI1 = (-1 * (-N1 + N2 + N3 - N4 + N5 - N6)) / (C1 ^ 3)
115 PRINT "1RA INTEG="; ANTI1: PRINT N1; N2; N3; N4; N5; N6
120 N7 = H1 / (2 * ((H1 - (C1 * a * L) ^ 2))
130 N8 = 1 / (2 * H1)
140 N9 = 1 / (H1 - C1 * a * L)
150 N10 = 1 / H1: ANTI2 = (-1 * (-N7 + N8 + N9 - N10)) / (C1 ^ 2)
151 PRINT "2DA INTEG="; ANTI2: PRINT N7; N8; N9; N10
160 N11 = ((L - a * L) ^ 3) / 3
170 N12 = ((a * L) ^ 3) / 3
180 N13 = ((L - a * L) ^ 2) / 2
190 N14 = ((a * L) ^ 2) / 2
200 N15 = (LOG((C2 * L) - C3))
210 N16 = (LOG((C2 * (L - a * L)) - C3))
220 N17 = (2 * C3) / (C2 * L - C3)
230 N18 = (2 * C3) / (C2 * (L - a * L) - C3)
240 N19 = (C3 ^ 2) / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
250 N20 = (C3 ^ 2) / (2 * ((C2 * (L - a * L) - C3) ^ 2))

```



```

260 N21 = 1 / (C2 * L - C3)
270 N22 = 1 / (C2 * (L - a * L) - C3)
280 N23 = C3 / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
290 N24 = C3 / (2 * ((C2 * (L - a * L) - C3) ^ 2))
300 T1 = -N1 + N2 + N3 - N4 + N5 - N6
310 T2 = -N7 + N8 + N9 - N10
320 T3 = N11 - N12
330 T4 = N13 - N14
340 T5 = N15 - N16 - N17 + N18 - N19 + N20
350 T6 = -N21 + N22 - N23 + N24
360 A1 = -1 / (L * (C1 ^ 3)); A2 = -1 / (C1 ^ 2); A3 = 1 / (L * (H2 ^ 3)); A4 = 1 / (H2 ^ 3)
362 A5 = 1 / (L * (C2 ^ 3)); A6 = 1 / (C2 ^ 2)
370 T1 = T1 * A1; T2 = T2 * A2; T3 = T3 * A3; T4 = T4 * A4; T5 = T5 * A5; T6 = T6 * A6
372 PRINT "5TA INTEG="; T5; PRINT "6TA INTEG="; T6
380 PROP = (T1 + T3 + T5) / (T1 - T2 + T3 - T4 + T5 - T6)
385 PROP = 1 / PROP
390 PRINT "PROP="; PROP; PROP = 1 / PROP
410 J1 = H1 / (2 * ((H1 - C1 * a * L) ^ 2))
420 J2 = 1 / (2 * (H1))
430 J3 = 1 / (H1 - C1 * a * L)
440 J4 = 1 / H1
450 J5 = 1 / (2 * C1 * ((H1 - C1 * a * L) ^ 2)); J51 = 1 / (2 * C1 * (H1 ^ 2))
460 J6 = ((L - a * L) ^ 2) / 2; J7 = ((a * L) ^ 2) / 2
470 J8 = (L - a * L); J9 = a * L
480 J10 = 1 / (C2 * L - C3)
490 J11 = 1 / (C2 * (L - a * L) - C3)
500 J12 = C3 / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
510 J13 = N24
520 J14 = 1 / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
530 J15 = 1 / (2 * ((C2 * (L - a * L) - C3) ^ 2))
550 T1 = -J1 + J2 + J3 - J4
560 T2 = J5 - J51; T3 = J6 - J7; T4 = J8 - J9
570 T5 = -J10 + J11 - J12 + J13; T6 = J14 - J15
580 T1 = (-T1 / (C1 ^ 2)); T2 = T2; T3 = T3; T4 = T4; T5 = T5 / (C2 ^ 2); T6 = (-T6) / C2
582 PRINT "Ira="; T1; T2; T3; T4; T5; T6
590 T1 = T1 / L; T3 = T3 / (L * (H2 ^ 3)); T4 = T4 / (H2 ^ 3); T5 = T5 / L
600 MA = 1 / (12 * (T1 * PROP - T1 + T2 + PROP * T3 - T3 + T4 + T5 * PROP - T5 + T6))
610 MB = PROP * MA
620 PRINT "Mb="; MB; "E"
630 PRINT "Ma="; MA; "E"
631 KB = (MA * L * 12) / (H1 ^ 3); PRINT "Kb="; KB
632 KA = (MB * L * 12) / (H2 ^ 3); PRINT "Ka="; KA
633 PRINT "L="; L; PRINT "H2="; H2; PRINT "H2^3="; (H2 ^ 3)
640 INPUT "Desea aumentar el factor (s/n)="; S$
645 IF S$ = "S" THEN GOTO 22
650 INPUT "Desea introducir otro valor de -a- (s/n)"; M$
660 IF M$ = "S" THEN GOTO 10
670 END

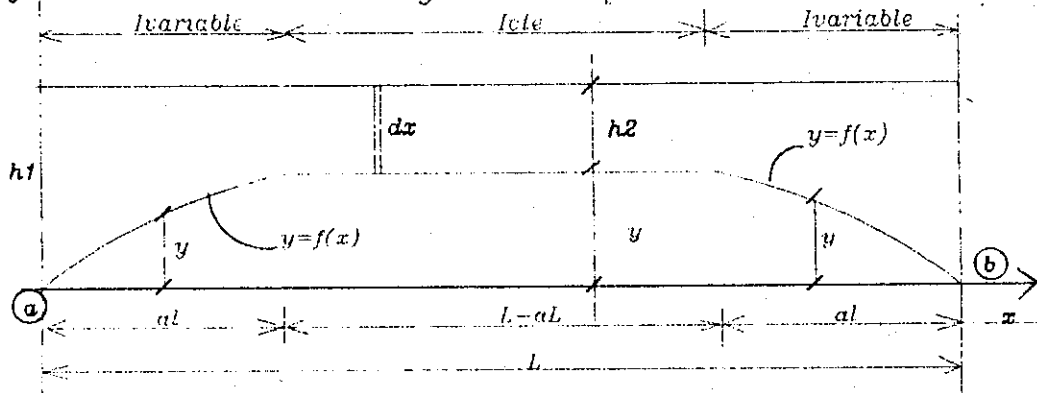
```

APÉNDICE 9.

Factores de Rigidez y Transporte.

Cartelas Parabólicas :

Para el elemento de la figura se da que :



Para 1er Tramo

$$y = o\sqrt{x}$$

$$o = y/\sqrt{x}$$

$$o = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{aL}}$$

Ecuación de Borde

$$h_i = h_1 - y$$

$$I = \frac{(h_i)^3}{12}$$

$$I = \frac{(h_1 - o\sqrt{x})^3}{12}$$

Ecuación de Inercia

Para 2do tramo

$$y = h_2 - h_1$$

Ecuación de Borde

$$h_i = h_1 - y$$

$$h_i = h_2$$

$$I = \frac{(h_i)^3}{12}$$

$$I = \frac{(h_2)^3}{12}$$

$$I = \frac{(h_2)^3}{12}$$

Ecuación de Inercia

Para 3er tramo

$$y = o\sqrt{L-x}$$

$$o = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{L-a}}$$

Ecuación de Borde

$$h_i = h_1 - y$$

$$I = \frac{(h_i)^3}{12}$$

$$I = \frac{(h_1 - o\sqrt{L-x})^3}{12}$$

Ecuación de Inercia

Para la condición de desplazamiento relativo, se tiene :

$$0 = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{x M dx}{I}$$

$$0 = \frac{1}{E} \int_0^{aL} \frac{(Mb - Ma x^2 + Max) dx}{\frac{(h1 - o\sqrt{x})^3}{12}} + \frac{1}{E} \int_{aL}^{L-aL} \frac{(Mb - Ma x^2 + Max) dx}{\frac{(h2)^3}{12}} + \frac{1}{E} \int_{L-aL}^L \frac{(Mb - Ma x^2 + Max) dx}{\frac{(h1 - o\sqrt{L-x})^3}{12}}$$

$$0 = \underbrace{Mb - Ma}_{L} \int_0^{aL} \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{x})^3} + \underbrace{Ma}_{L} \int_0^{aL} \frac{x dx}{(h1 - o\sqrt{x})^3} + \underbrace{Mb - Ma}_{aL} \int_{aL}^{L-aL} \frac{x^2 dx}{(h2)^3} + \underbrace{Ma}_{aL} \int_{aL}^{L-aL} \frac{x dx}{(h2)^3} + \underbrace{Mb - Ma}_{aL} \int_{L-aL}^L \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3}$$

integ1 integ2 integ3 integ4 integ5

$$+ \underbrace{Ma}_{L-aL} \int_{L-aL}^L \frac{x dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3}$$

integ6

Solución Integ1 :

$$\int \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3} \quad \text{substituyendo: } x = \left(\frac{u-h}{-o}\right)^2 \quad dx = \frac{o^2 2(h-u)}{o^4}$$

$$u = h - o\sqrt{x} \quad x = \left(\frac{h-u}{o}\right)^2 \quad dx = \frac{-2(h1-u) du}{o^2}$$

$$= \int_0^{aL} \frac{\left(\frac{h1-u}{o}\right)^4 \frac{-2(h1-u) du}{o^2}}{u} = \int_0^{aL} \frac{-2(h-u)^5 du}{o^6 u^3} = \frac{-2}{o^6} \int_0^{aL} \frac{(h-u)^5 du}{u^3}$$

$$(h-u)^5 = h^5 - 5h^4 u + 10h^3 u^2 - 10h^2 u^3 + 5hu^4 - u^5$$

de resultados anteriores se tiene:

$$= \frac{-2}{o^6} \left(\frac{-h^5}{2u^2} + \frac{5h^4}{u} + 10h^3 \ln|u| - 10h^2 u + \frac{5hu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^{aL}$$

$$= \frac{-2}{o^6} \left(\frac{-h^5}{2(h-o\sqrt{x})^2(h-o\sqrt{x})} + \frac{5h^4}{(h-o\sqrt{x})} + 10h^3 \ln|(h-o\sqrt{x})| - 10h^2(h-o\sqrt{x}) + \frac{5h(h-o\sqrt{x})^2}{2} - \frac{(h-o\sqrt{x})^3}{3} \right) \Big|_0^{aL}$$

$$= \frac{-2}{o^6} \left(\frac{-h^5}{2(h-o\sqrt{x})(h-o\sqrt{x})} + \frac{5h}{(h-o\sqrt{x})} + 10h^3 \ln|(h-o\sqrt{x})| - 10h^2(h-o\sqrt{x}) + \frac{5h(h-o\sqrt{x})^2}{2} - \frac{(h-o\sqrt{x})^3}{3} \right) \Big|_0^{aL}$$

$$= \frac{-2}{o^6} \left(\frac{-h^5}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h^5}{2h^2} + \frac{5h^4}{(h-o\sqrt{aL})} - \frac{5h^4}{h} + 10h^3 \ln|(h-o\sqrt{aL})| - 10h^3 \ln|h| \right. \\ \left. - 10h^2(h-o\sqrt{aL}) + 10h^2(h) + \frac{5h(h-o\sqrt{aL})^2}{2} - \frac{5h(h)^2}{2} - \frac{(h-o\sqrt{aL})^3}{3} + \frac{(h)^3}{3} \right)$$

Solución integ2:

$$\int \frac{x \, dx}{(h1-o\sqrt{x})^3}$$

substituyendo:

$$x = \left(\frac{u-h}{-o} \right)^2$$

$$dx = \frac{o \cdot 2(h-u)}{o}$$

$$u = h - o\sqrt{x}$$

$$x = \left(\frac{h-u}{o} \right)^2$$

$$dx = \frac{-2(h1-u)du}{o^2}$$

$$= \int_0^{aL} \frac{\left(\frac{h(1-u)}{o}\right)^2 - 2\frac{h(1-u)}{o^2} du}{u^3} = \int_0^{aL} \frac{-2(h-u)^3 du}{o^4 u^3} = \frac{-2}{o^4} \int_0^{aL} \frac{(h-u)^3 du}{u^3}$$

$$= \frac{-2}{o^4} \int_0^{aL} \frac{(h^3 - 3h^2 u + 3hu^2 - u^3) du}{u^3} = \frac{-2}{o^4} \int_0^{aL} \left(\frac{h^3}{u^3} - \frac{3h^2}{u^2} + \frac{3h}{u} - 1 \right) du$$

$$= \frac{-2}{o^4} \left(\frac{h^3}{2u^2} + \frac{3h^2}{u} + 3h \ln|u| - u \right) \Big|_0^{aL}$$

$$= \frac{-2}{o^4} \left(\frac{h^3}{2(h-o\sqrt{x})^2} + \frac{3h^2}{(h-o\sqrt{x})} + 3h \ln|h-o\sqrt{x}| - (h-o\sqrt{x}) \right) \Big|_0^{aL}$$

Solución:

$$= \frac{-2}{o^4} \left(\frac{h^3}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{(h-o\sqrt{aL})} - 3h + 3h \ln|h-o\sqrt{aL}| - 3h \ln|h| - (h-o\sqrt{aL}) + h \right) \Big|_0^{aL}$$

Solución Integ3:

$$\int_{aL}^{L-aL} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{aL}^{L-aL} = \frac{(L-aL)^3}{3} - \frac{(aL)^3}{3}$$

Solución Integ4:

$$\int_{aL}^{L-aL} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{aL}^{L-aL} = \frac{(L-aL)^2}{2} - \frac{(aL)^2}{2}$$

Solución integ5:

$$\int \frac{x^2 dx}{(h-0\sqrt{L-x})^3}$$

substituyendo: $x = \left(\frac{u-h}{0}\right)^2 - L$ $dx = \left(\frac{-(h-u)^2}{0}\right)'$

$u = h-0\sqrt{L-x}$ $-x = \left(\frac{h-u}{0}\right)^2 - L$ $dx = \frac{-2(h-u)(-1)0^2}{0^4}$

$x = L - \left(\frac{h-u}{0}\right)^2$ $dx = \frac{2(h-u)du}{0^2}$

$$\int_{L-aL}^L \frac{\left(L - \left(\frac{h-u}{0}\right)^2\right)^2 \frac{2(h-u)}{0^2} du}{u^3} = \int_{L-aL}^L \frac{\left(L - \left(\frac{h-u}{0}\right)^2\right)^2 (h-u) du}{u^3 0^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} (h-u)^2 (h-u)^2 &= (h^2 - 2hu + u^2)(h^2 - 2hu + u^2) \\ h^4 - 2h^3u + h^2u^2 - 2h^3u + 4h^2u^2 - 2hu^3 + u^2h^2 - 2hu^3 + u^4 \end{aligned}$$

$$2 \int_{L-aL}^L \frac{\left(L - 2L\left(\frac{h-u}{0}\right)^2 + \left(\frac{h-u}{0}\right)^4\right) (h-u) du}{u^3 0^2} = 2 \int_{L-aL}^L \frac{\left(hL^2 - 2hL\left(\frac{h-u}{0}\right)^2 + h\left(\frac{h-u}{0}\right)^4 - uL + 2uL\left(\frac{h-u}{0}\right)^2 - u\left(\frac{h-u}{0}\right)^4\right) du}{u^3 0^2}$$

$$= \int_a^L \left[\frac{hL^2 - 2hL}{o^2} (h^2 - 2hu + u^2) + \frac{h}{o^4} (h^4 - 4h^3u + 6h^2u^2 - 4hu^3 + u^4) - \frac{uL^2 + 2uL}{o^2} (h^2 - 2hu + u^2) - \frac{u(h^4 - 4h^3u + 6h^2u^2 - 4hu^3 + u^4)}{u^3 o^2} \right] du$$

L-aL

$$2 \int_a^L \left(\frac{hL^2}{o} - \frac{2hL^3}{o^2} + \frac{4h^2uL}{o^2} - \frac{2hLu^2}{o^2} + \frac{h^5}{o^4} - \frac{4h^4u}{o^4} + \frac{6h^3u^2}{o^4} - \frac{4h^2u^3}{o^4} + \frac{hu^4}{o^4} - \frac{uL^2}{o} \right) + \frac{2uLh^2}{o^2} - \frac{4hu^2L}{o^2} + \frac{2u^3L}{o^2} - \frac{uh^4}{o^4} + \frac{4h^3u^2}{o^4} - \frac{6h^2u^3}{o^4} + \frac{4hu^4}{o^4} - \frac{u^5}{o^5} du$$

L-aL

$$= \int_a^L \left(\frac{2(-2h^3L + 4h^2uL - 2hLu^2 + 2uLh^2 - 4hu^2L + 2u^3L)}{u^3 o^2} \right) du$$

$$\int_a^L \frac{2 \left(\frac{h^5}{u^3} - \frac{4h^4u}{u^3} + \frac{6h^3u^2}{u^3} - \frac{4h^2u^3}{u^3} + \frac{hu^4}{u^3} - \frac{uh^4}{u^3} + \frac{4h^3u^2}{u^3} - \frac{6h^2u^3}{u^3} + \frac{4hu^4}{u^3} - \frac{u^5}{u^3} \right)}{u o} du + \frac{2}{o^2} \int_a^L \left(\frac{hL^2}{u^3} - \frac{uL^2}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{2}{o^6} \left(\frac{hL^3}{u^2} - \frac{4h^2L}{u} - 2hL \ln(u) - \frac{2Lh^2}{u} - 4h \ln(u) L + 2Lu \right) +$$

$$\frac{2}{o^6} \left(-\frac{h^5}{2u^2} + \frac{4h^4}{u} + 6h^3 \ln(u) - 4h^2u + \frac{hu^2}{2} + \frac{h^4}{u} + 4h^3 \ln(u) - 6h^2u + \frac{4hu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right)$$

$$\frac{2}{o^2} \left(-\frac{hL^2}{2u^2} + \frac{L^2}{u} \right) \Bigg|_{L-aL}^L$$

$$= \frac{2}{o^4} \left(hL - \frac{h^3L}{(h1-o\sqrt{a}L)^2} - 4hL + \frac{4h^2L}{(h1-o\sqrt{a}L)} - 2hL \ln(h) + 2hL \ln(h1-o\sqrt{a}L) \right)$$

$$- 2hL + \frac{2h^2L}{(h1-o\sqrt{a}L)} - 4h \ln(h)L + 4h \ln(h1-o\sqrt{a}L)L + 2Lh - 2L(h-o\sqrt{a}L)$$

$$+ \frac{2}{o^6} \left(\frac{-h^3}{2} \frac{+h^5}{2(h-o\sqrt{a}L)^2} + 4h \frac{-4h^4}{(h-o\sqrt{a}L)} + 6h^3 \ln(h) - 6h^3 \ln(h-o\sqrt{a}L) - 4h^3 \right)$$

$$+ 4h^2(h-o\sqrt{a}L) + \frac{h^3}{2} - h(h-o\sqrt{a}L)^2 + h^3 \frac{-h^4}{(h-o\sqrt{a}L)} + 4h^3 \ln(h) - 4h^3 \ln(h-o\sqrt{a}L)$$

$$- 6h^3 + 6h^2(h-o\sqrt{a}L) + \frac{4h^3}{2} - \frac{4h(h-o\sqrt{a}L)^2}{2} - \frac{h^3}{3} + \frac{(h-o\sqrt{a}L)^3}{3}$$

$$+ \frac{2}{o^2} \left(\frac{L^2}{2h} + \frac{hL^2}{2(h-o\sqrt{a}L)^2} + \frac{L}{h} - \frac{L^2}{(h-o\sqrt{a}L)} \right)$$

Solución integ6:

$$\int_{L-aL}^L \frac{x dx}{(h1-o\sqrt{L-x})^3}$$

Substituyendo $u = h1-o\sqrt{L-x}$
 $x = L - \left(\frac{h1-u}{o} \right)^2$

$$dx = \frac{2(h-u) du}{o^2}$$

$$= \int_{L-aL}^L \left(\frac{\left(\frac{h-u}{o}\right)^2}{u^3} \cdot \frac{(h-u)}{o^2} \right) du = \frac{2}{o^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{(h-u)^2}{u^3} \right) (h-u) du$$

$$= \frac{2}{o^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{hL - h\left(\frac{h-u}{o}\right) - uL + u\left(\frac{h-u}{o}\right)}{u^3} \right) du = \frac{2}{o^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{hL - \frac{h-u}{o^2} (h-u)^2 - uL + \frac{u^2}{o^2} (h-u)^2}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{2}{o^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{hL - \left(\frac{h}{o^2}\right) (h^2 - 2hu + u^2) - uL + \left(\frac{u}{o^2}\right) (h^2 - 2hu + u^2)}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{2}{o^2} \int_{L-aL}^L \left(\frac{hL - \frac{h^3}{o^2} + \frac{2h^2u}{o^2} - \frac{u^2h}{o^2} - uL + \frac{uh^2}{o^2} - \frac{2hu^2}{u^2} + \frac{u^3}{o^2}}{u^3} \right) du$$

$$= \frac{2}{o^2} \left(\frac{-hL}{u^3} - \frac{h^3}{o^2 u^3} + \frac{2h^2}{u^2 o^2} - \frac{h}{u o^2} - \frac{L}{u^2} + \frac{h^2}{u^2 o^2} - \frac{2h}{u o^2} + \frac{1}{o^2} \right) du$$

$$= \frac{2}{o^2} \left(\frac{-hL}{2u^2} + \frac{h^3}{o^2 2u^2} - \frac{2h^2}{u o^2} - \frac{h \ln |u|}{u^2} + \frac{L}{u} - \frac{h^2}{o^2 u} - \frac{2h}{o^2} \ln |u| + \frac{u}{o^2} \right) \Bigg|_{L-aL}^L$$

$$= \frac{2}{o^2} \left(\frac{-L}{2h} + \frac{hL}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2o^2} - \frac{h^3}{2o^2(h-o\sqrt{aL})^2} - \frac{2h}{o^2} + \frac{2h^2}{(h-o\sqrt{aL})^2} - \frac{h \ln |h|}{o^2} \right)$$

$$+ \frac{h \ln (h-o\sqrt{aL})}{o^2} + \frac{L}{h} - \frac{L}{(h-o\sqrt{aL})} - \frac{h}{o^2} + \frac{h}{o^2(h-o\sqrt{aL})} - \frac{2h}{o^2} \ln |h| + \frac{2h \ln |(h-o\sqrt{aL})|}{o^2}$$

$$\left(\frac{h}{o^2} - \frac{(h-o\sqrt{aL})}{o^2} \right)$$

Substituyendo todos estos valores en la ecuación principal:

$$= \frac{M_b - M_a}{L} \left(\frac{-2}{o^6} \right) \left(\frac{-h^5}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h^5}{2h^2} + \frac{5h^4}{h(o\sqrt{aL})} - 5h^3 + 10h^3 \ln |h-o\sqrt{aL}| - 10h^3 \ln |h| \right)$$

$$- 10h^2(h-o\sqrt{aL}) + 10h^2 h + \frac{5h(h-o\sqrt{aL})^2}{2} - \frac{5h(h)^2}{2} - \frac{(h-o\sqrt{aL})^3}{3} + \frac{h^3}{3}$$

$$+ M_a \left(\frac{2}{o^4} \right) \left((h-o\sqrt{L}) - h - 3h \ln |h-o\sqrt{L}| + 3h \ln |h| - \frac{3h^3}{h-o\sqrt{L}} + \frac{3h^2}{h} + \frac{h^3}{2(h-o\sqrt{L})^2} - \frac{h^3}{2h^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Mb - Ma}{L(h2)^2} \left(\frac{(L - aL)^3}{3} - \frac{(aL)^3}{3} \right) + \frac{Ma}{h2} \left(\frac{(L - aL)^2}{2} - \frac{(aL)^2}{2} \right) \\
& + \frac{Mb - Ma}{L} \left(\frac{-2}{o^6} \right) \left(\frac{-C1^5}{2(C1 + o\sqrt{L})^2} - \frac{+C1^5}{2(C1 + o\sqrt{L} - aL)^2} - \frac{+5C1^4}{(C1 + o\sqrt{L})} - \frac{-5C1^4}{(C1 + o\sqrt{L} - aL)} \right. \\
& \quad \left. + 10C1^3 \ln |C1 + o\sqrt{L}| - 10C1^3 \ln |C1 + o\sqrt{L} - aL| - 10C1^2(C1 - o\sqrt{L}) + 10C1^2(C1 - o\sqrt{L} - aL) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{C1 - o\sqrt{L}}{2} - \frac{+5C1(C1 + o\sqrt{L})^2}{2} - \frac{-5C1(C1 + o\sqrt{L} + aL)^2}{2} - \frac{(C1 + o\sqrt{L})^3}{3} + \frac{(C1 + o\sqrt{L} + aL)^3}{3} \right) \right) \\
& + Ma \left(\frac{2}{o^4} \right) \left((C1 - o\sqrt{L}) + (C1 - o\sqrt{L} + aL) - 3C1 \ln |C1 - o\sqrt{L}| + 3C1 \ln |C1 - o\sqrt{L} + aL| \right. \\
& \quad \left. \frac{-3C1^2}{C1 - o\sqrt{L}} - \frac{+3C1^2}{C1 - o\sqrt{L} + aL} - \frac{+C1^3}{2(C1 - o\sqrt{L})^2} - \frac{-C1^3}{2(C1 - o\sqrt{L} - aL)^2} \right)
\end{aligned}$$

Para la segunda condición de giro unitario.

$$\begin{aligned}
1 \text{ rad} &= \frac{1}{E} \int_a^b \frac{M dx}{I} \\
1 \text{ rad} &= \frac{1}{E} \int_0^{al} \frac{Mb - Ma x + Ma}{L} \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{x})^3} + \frac{1}{E} \int_{al}^{l-al} \frac{Mb - Ma x + Ma}{L} \frac{dx}{h2^3} + \frac{1}{E} \int_{l-al}^l \frac{Mb - Ma x + Ma}{L} \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3} \\
E 1 \text{ rad} &= \frac{(Mb - Ma)}{12} \int_0^{al} \frac{L x dx}{(h1 - o\sqrt{x})^3} + Ma \int_0^{al} \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{x})^3} + \frac{Mb - Ma}{L h2^3} \int_{al}^{l-al} x dx + \frac{Ma}{h2^3} \int_{al}^{l-al} dx + \frac{Mb - Ma}{L} \int_{l-al}^l \frac{x dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3} \\
& \quad + Ma \int_{l-al}^l \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3}
\end{aligned}$$

Integ1
Integ2
Integ3
Integ4
Integ5

Solución integ1

$$\int_0^a \frac{x dx}{(h - \sqrt{x})^3} \quad \text{substituyendo} \quad u = (h - \sqrt{x}) \quad x = \left(\frac{h-u}{0}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{u-h}{-0}\right)^2 \quad dx = \frac{-2(h-u)du}{02}$$

de resultados ya se obtuvo:

$$= \frac{-2}{0^4} \left(\frac{-h^3}{2(h-\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{(h-\sqrt{aL})} - 3h + 3h \ln|(h-\sqrt{aL})| - 3h \ln|h| - (h-\sqrt{aL}) + h \right)$$

Solución integ2

substituyendo:

$$\int_0^a \frac{dx}{(h - \sqrt{x})^3} \quad u-h = \sqrt{x} \quad dx = \frac{2(u-h)dx}{02}$$

$$\frac{u-h}{0} = \sqrt{x}$$

$$\int_0^a \frac{2(u-h)du}{02 u^3} = \frac{2}{02} \int_0^a \frac{(u-h)du}{u^3} = \frac{2}{02} \int_0^a \frac{1}{u^2} - \frac{h}{u^3} du = \frac{2}{02} \left(\frac{-1}{u} + \frac{h}{2u^2} \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{2}{02} \left(\frac{-1}{h-\sqrt{aL}} + \frac{h}{2(h-\sqrt{aL})^2} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{02} \left(\frac{-1}{h-\sqrt{aL}} + \frac{1}{h} + \frac{h}{2(h-\sqrt{aL})^2} - \frac{h}{2h^2} \right)$$

Solución Integral 3:

$$\int_a^{l-a} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^{l-a} = \frac{(l-a)^2 - (a)^2}{2}$$

Solución Integral 4:

$$\int_a^{l-a} dx = x \Big|_a^{l-a} = (l-a) - a$$

Solución Integral 5:

$$\int_{L-aL}^L \frac{x \, dx}{(h1 - o\sqrt{L-x})^3}$$

Substituyendo $u=h1-o\sqrt{L-x}$
 $x=L-\left(\frac{h1-u}{o}\right)^2$

$$dx = \frac{2(h-u) \, du}{o^2}$$

de resultados anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{2(-L + \frac{hL}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2o^2} - \frac{h}{2o^2(h-o\sqrt{aL})^2} - \frac{2h}{o^2} + \frac{2h}{(h-o\sqrt{aL})o^2} - \frac{h \ln |h|}{o^2}}{o^2} \\ &+ \frac{h \ln (h-o\sqrt{aL})}{o^2} + \frac{L}{h} - \frac{L}{(h-o\sqrt{aL})} - \frac{h}{o^2} + \frac{h}{o^2(h-o\sqrt{aL})} - \frac{2h}{o^2} \ln |h| + \frac{2h \ln |(h-o\sqrt{aL})}{o^2} \\ &\frac{h}{o^2} - \frac{h-o\sqrt{aL}}{o^2} \end{aligned}$$

Solución Integ6:

$$\int_{l-a1}^1 \frac{dx}{(h1-o\sqrt{l-x})^3}$$

Substituyendo: $u=h1-o\sqrt{l-x}$
 $x=l-\frac{(h-u)^2}{o^2}$

$$dx = \frac{2(h-u) \, du}{o^2}$$

$$\int_{l-a1}^1 \frac{2(h-u) \, du}{o^2 u^3} = \frac{2}{o^2} \int_{l-a1}^1 \frac{(h-u) \, du}{u^3} = \frac{2}{o^2} \int_{l-a1}^1 \left(\frac{h}{u^3} - \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{2}{o^2} \left(\frac{-h}{2u^2} + \frac{1}{u} \right) \Big|_{l-a1}^1 =$$

$$\frac{2}{o^2} \left(\frac{-h}{2(h-o\sqrt{l-x})^2} + \frac{1}{(h-o\sqrt{l-x})} \right) \Big|_{l-a1}^1$$

$$\frac{2}{o^2} \left(\frac{-h}{2h^2} + \frac{h}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{1}{h} - \frac{1}{(h-o\sqrt{aL})} \right)$$

Substituyendo estos valores en la ecuación principal:

$$E = (M_b - M_a) \frac{-2}{o^4} \left(\frac{-h^3}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{(h-o\sqrt{aL})} - 3h + 3h \ln|(h-o\sqrt{aL})| - 3h \ln|h| - (h-o\sqrt{aL}) + h \right) \\ + M_a \frac{2}{o^2} \left(\frac{-1}{h-o\sqrt{aL}} + \frac{1}{h} + \frac{h}{2(h-o\sqrt{aL})^2} - \frac{h}{2h^2} \right) \\ + \frac{(M_b - M_a)}{Lh^2} \left(\frac{(1-aL)^2(aL)^2}{2} + \frac{Ma((1-aL)-aL)}{h^2} \right) \\ (M_b - M_a) \frac{2}{o^2} \left(\frac{-L}{2h} + \frac{hL}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{h}{2o^2} - \frac{h^3}{2o^2(h-o\sqrt{aL})^2} - \frac{2h}{o^2} + \frac{2h^2}{(h-o\sqrt{aL})o^2} - \frac{h \ln|h|}{o^2} \right. \\ \left. + \frac{h \ln(h-o\sqrt{aL})}{o^2} + \frac{L}{h^2} - \frac{L}{h^2(h-o\sqrt{aL})} - \frac{h}{o^2} + \frac{h}{o(h-o\sqrt{aL})} - \frac{2h \ln|h|}{o^2} + \frac{2h \ln|(h-o\sqrt{aL})}{o^2} \right. \\ \left. + \frac{h - (h-o\sqrt{aL})}{o^2} \right) \\ (M_a) \frac{2}{o^2} \left(\frac{-h}{2h^2} + \frac{h}{2(h-o\sqrt{aL})^2} + \frac{1}{h} - \frac{1}{(h-o\sqrt{aL})} \right)$$

El siguiente programa determina los valores de proporcionalidad y rigidez para miembros compuestos (Acartelamientos Parabólicos), para las expresiones obtenidas en el presente apéndice.

```

10 CLS : CLEAR
15 REM MIEMBROS ACARTELADOS CURVOS
20 INPUT "H1="; H1
30 INPUT "H2="; H2
40 INPUT "L="; L
50 INPUT "a="; A
55 O = (H1 - H2) / (SQR(A * L)); PRINT "O="; O: DEFDBL C: DEFDBL N: O2 = (H1 - H2) / (SQR(A * L))
60 C1 = (H1 ^ 5) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
70 C2 = (H1 ^ 3) / 2
80 C3 = (5 * (H1 ^ 4)) / (H1 - O * SQR(A * L))
90 C4 = 5 * (H1 ^ 3)

```

```

100 C5 = 10 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O * SQR(A * L))
110 C6 = 10 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)
120 C7 = 10 * (H1 ^ 2) * (H1 - O * SQR(A * L))
130 C8 = 10 * (H1 ^ 2) * H1
140 C9 = (5 * H1 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2)) / 2
150 C10 = (5 * H1 * (H1 ^ 2)) / 2
160 C11 = ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 3) / 3
170 C12 = (H1 ^ 3) / 3
180 C13 = (H1 ^ 3) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
190 C14 = H1 / 2
200 C15 = (3 * (H1 ^ 2)) / (H1 - O * SQR(A * L))
210 C16 = 3 * H1
220 C17 = (3 * H1 * LOG(H1 - O * SQR(A * L)))
230 C18 = (3 * H1 * LOG(H1))
240 C19 = (H1 - O * SQR(A * L))
250 C20 = H1
260 C21 = ((L - A * L) ^ 3) / 3: C22 = ((A * L) ^ 3) / 3
270 C23 = ((L - A * L) ^ 2) / 2: C24 = ((A * L) ^ 2) / 2
280 C25 = (H1 * L)
290 C26 = ((H1 ^ 3) * L) / ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2)
300 C27 = (4 * H1 * L)
310 C28 = (4 * (H1 ^ 2) * L) / (H1 - O2 * SQR(A * L))
320 C29 = 2 * H1 * L * LOG(H1)
330 C30 = 2 * H1 * L * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L))
340 C31 = 2 * L * H1
350 C32 = (2 * L * (H1 ^ 2)) / (H1 - O2 * SQR(A * L))
360 C33 = 4 * H1 * LOG(H1) * L
370 C34 = 4 * H1 * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)) * L
380 C35 = 2 * L * H1
390 C36 = 2 * L * (H1 - O2 * SQR(A * L))
400 C37 = L / (2 * H1)
405 C38 = (H1 * L) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
410 C39 = (H1) / (2 * (O ^ 2))
420 C40 = (H1 ^ 3) / (2 * (O ^ 2) * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
425 C41 = (2 * H1) / (O ^ 2)
430 C42 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((H1 - O * SQR(A * L)) * (O ^ 2))
435 C43 = (H1 * (LOG(H1))) / (O ^ 2)
440 C44 = (H1 / (O ^ 2)) * (LOG(H1 - O * SQR(A * L)))
445 C45 = L / H1
450 C46 = L / (H1 - O * SQR(A * L))
455 C47 = H1 / (O ^ 2)
460 C48 = (H1 ^ 2) / ((O ^ 2) * (H1 - O * SQR(A * L)))
465 C49 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 2)
470 C50 = (2 * H1 * (LOG(H1 - O * SQR(A * L)))) / (O ^ 2)
475 C51 = H1 / (O ^ 2): C52 = (H1 - O * SQR(A * L)) / (O ^ 2)
480 N1 = -C1 + C2 + C3 - C4 + C5 - C6 - C7 + C8 + C9 - C10 - C11 + C12
490 N2 = -C13 + C14 + C15 - C16 + C17 - C18 - C19 + C20
500 N3 = C21 - C22: N4 = C23 - C24
510 N5 = C25 - C26 - C27 + C28 - C29 + C30 - C31 + C32 - C33 + C34 + C35 - C36
511 PRINT "N25-N36="; C25, C26, C27, C28, C29, C30, C31, C32, C33, C34, C35, C36: PRINT
"N5="; N5: INPUT " "; L$
520 N6 = -C37 + C38 + C39 - C40 - C41 + C42 - C43 + C44 + C45 - C46 - C47 + C48 - C49 + C50 +
C51 - C52
522 C53 = (H1 ^ 3) / 2: C54 = (H1 ^ 5) / (2 * ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2)): C55 = (4 * H1 ^ 3): C56 =
(4 * (H1 ^ 4)) / (H1 - O2 * SQR(A * L))

```

```

524 C57 = 6 * (H1 ^ 3) * LOG(H1); C58 = 6 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)); C59 = 4 * (H1
^ 2) * H1
525 C60 = 4 * (H1 ^ 2) * (H1 - O2 * SQR(A * L))
526 C61 = (H1 ^ 3) / 2; C62 = (H1 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2)) / 2
528 C63 = (H1 ^ 3); C64 = (H1 ^ 4) / (H1 - (O2 * SQR(A * L))); C65 = 4 * (H1 ^ 3) * LOG(H1); C66 =
4 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L))
530 C67 = 6 * (H1 ^ 3); C68 = 6 * (H1 ^ 2) * (H1 - (O2 * SQR(A * L))); C69 = 4 * (H1 ^ 3) / 2
531 C70 = 4 * H1 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2) / 2
532 C71 = (H1 ^ 3) / 3; C72 = ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 3) / 3
534 C73 = (L ^ 2) / (2 * H1); C74 = (H1 * (L ^ 2)) / (2 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2))
536 C75 = (L ^ 2) / (H1); C76 = (L ^ 2) / (H1 - (O2 * SQR(A * L)))
537 N7 = -C53 + C54 + C55 - C56 + C57 - C58 - C59 + C60 + C61 - C62 + C63 - C64 + C65 - C66 -
C67 + C68 + C69 - C70 - C71 + C72
538 R1 = -2 / (O ^ 6)
539 N8 = -C73 + C74 + C75 - C76; PRINT "N8="; N8
540 R2 = -2 / (O ^ 4)
550 R3 = 1; R4 = 1; O2 = (H1 - H2) / (SQR(A * L))
560 R5 = 2 / (O2 ^ 4)
570 R6 = 2 / (O2 ^ 2)
571 R7 = 2 / (O2 ^ 6)
572 R8 = 2 / (O2 ^ 2)
580 N1 = N1 * R1; N2 = N2 * R2; N3 = N3 * R3; N4 = N4 * R4; N5 = N5 * R5; N6 = N6 * R6; N7 =
N7 * R7; N8 = N8 * R8
590
600 PRINT "N5,N7,N8="; N5; N7; N8; N5 = N5 + N7 + N8
610 PRINT "N1="; N1; X1 = N1 / L
620 PRINT "N2="; N2; X2 = N2
630 PRINT "N3="; N3; X3 = N3 / (L * (H2 ^ 3))
640 PRINT "N4="; N4; X4 = N4 / (H2 ^ 3)
650 PRINT "N5="; N5; X5 = N5 / L
660 PRINT "N6="; N6; X6 = N6
670 PRINT "N7="; N7
680 PRINT "N8="; N8; H1
690 PROP = (X1 - X2 + X3 - X4 + X5 - X6) / (X1 + X3 + X5)
700 PRINT "Ma="; PROP; "Mb"
710 PRINT "Mb="; (1 / PROP); "Ma"
720 REM *****CALCULANDO RIGIDECES*****
730 J1 = N2
740 CONS = (H1 - O * SQR(A * L)); CONS2 = (H1 - O2 * SQR(A * L)); PRINT "CONS,CONS2";
CONS; CONS2
750 J2 = (2 / (O ^ 2)) * (-1 / CONS) + (1 / H1) + (H1 / (2 * (CONS ^ 2))) - (1 / (2 * H1))
760 J3 = (((L - (A * L)) ^ 2) / 2) - (((A * L) ^ 2) / 2)
770 J4 = (L - (A * L)) - (A * L)
780 GOSUB 1020; J5 = P6
785 J5 = P6
790 J6 = (2 / (O2 ^ 2)) * ((-1 / (2 * H1)) + (H1 / (2 * (CONS2 ^ 2))) + (1 / H1) - (1 / CONS2))
800 PRINT "J1="; J1; Y1 = J1 / L
810 PRINT "J2="; J2; Y2 = J2
820 PRINT "J3="; J3; Y3 = J3 / (L * (H2 ^ 3))
830 PRINT "J4="; J4; Y4 = J4 / (H2 ^ 3)
840 PRINT "J5="; J5; Y5 = J5 / L
850 PRINT "J6="; J6; Y6 = J6
860 MA = 1 / (12 * (Y1 * PROP - Y1 + Y2 + Y3 * PROP - Y3 + Y4 + Y5 * PROP - Y5 + Y6))
970 PRINT "MB="; MA; "E"
980 PRINT "MA="; (PROP * MA); "E": MB = PROP * MA

```



```

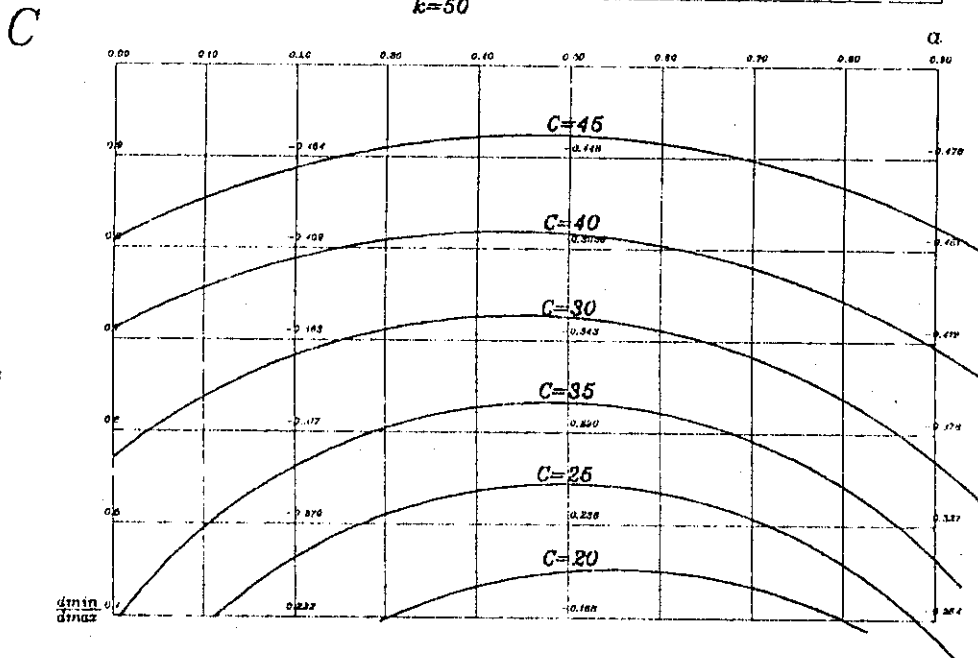
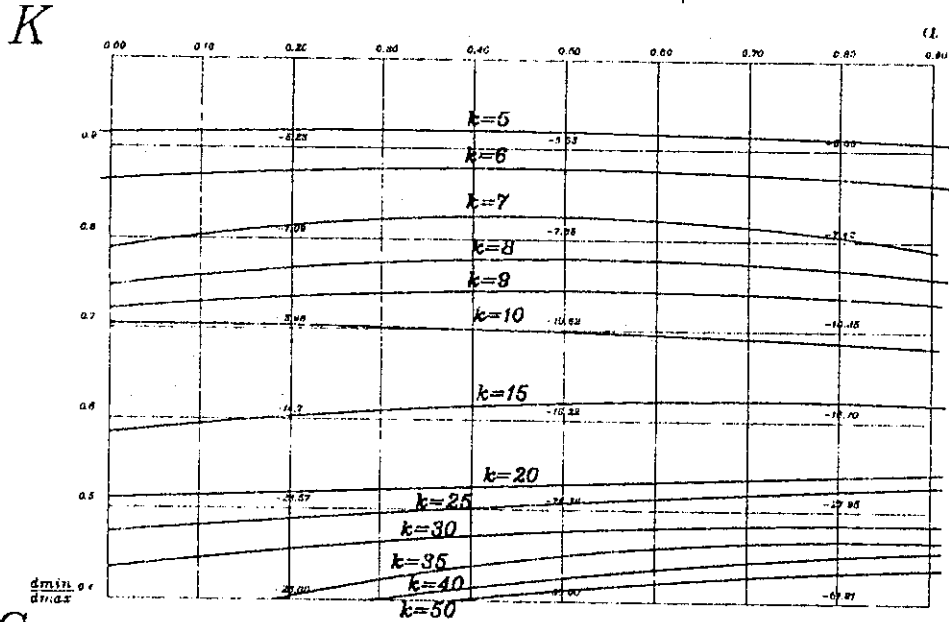
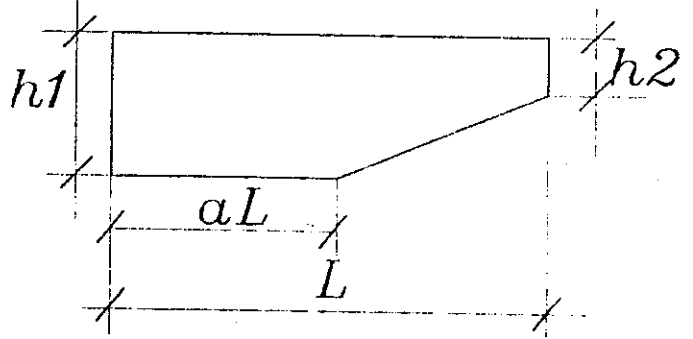
990 KB = (MA * L * 12) / (H2 ^ 3): PRINT "Ka="; KB
1000 KA = (MB * L * 12) / (H2 ^ 3): PRINT "Kb="; KA
1010 END
1015 REM *****RECALCULA TERCER SEGMENTO *****
1020 C37 = L / (2 * H1)
1025 C38 = (H1 * L) / (2 * ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2))
1030 C39 = (H1) / (2 * (O2 ^ 2))
1035 C40 = (H1 ^ 3) / (2 * (O2 ^ 2) * ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2))
1040 C41 = (2 * H1) / (O2 ^ 2)
1045 C42 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((H1 - O2 * SQR(A * L)) * (O2 ^ 2))
1050 C43 = (H1 * (LOG(H1))) / (O2 ^ 2)
1055 C44 = (H1 / (O2 ^ 2)) * (LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)))
1060 C45 = L / H1
1065 C46 = L / (H1 - O2 * SQR(A * L))
1070 C47 = H1 / (O2 ^ 2)
1075 C48 = (H1 ^ 2) / ((O2 ^ 2) * (H1 - O2 * SQR(A * L)))
1080 C49 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O2 ^ 2)
1085 C50 = (2 * H1 * (LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)))) / (O2 ^ 2)
1090 C51 = H1 / (O2 ^ 2): C52 = (H1 - O2 * SQR(A * L)) / (O2 ^ 2)
2000 P6 = -C37 + C38 + C39 - C40 - C41 + C42 - C43 + C44 + C45 - C46 - C47 + C48 - C49 + C50 +
C51 - C52
2010 R6 = 2 / (O2 ^ 2): P6 = R6 * P6
2020 RETURN
2030 END

```

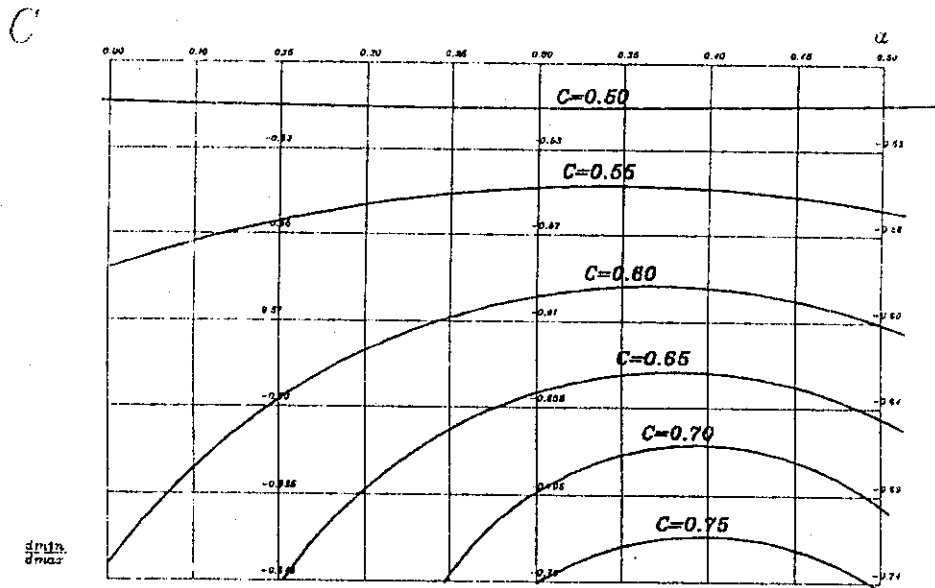
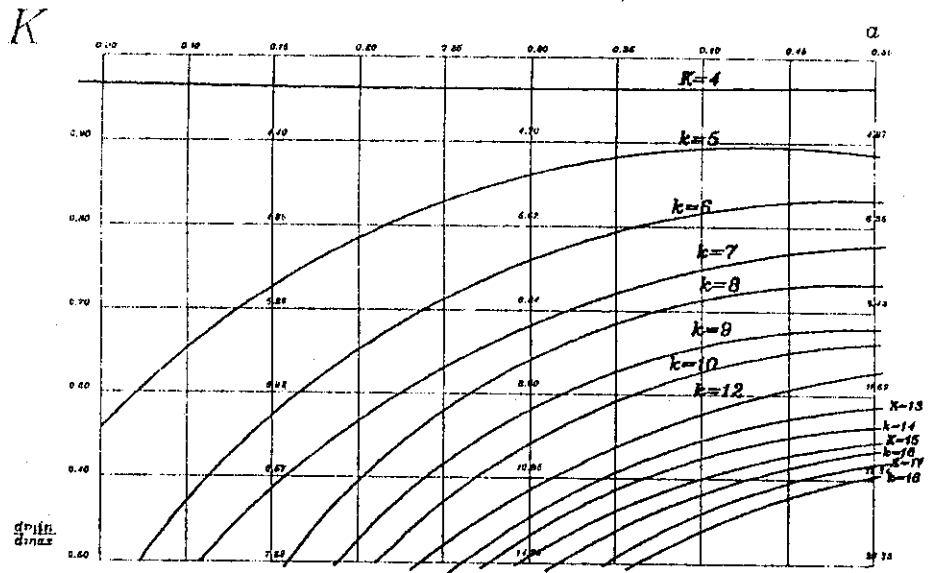
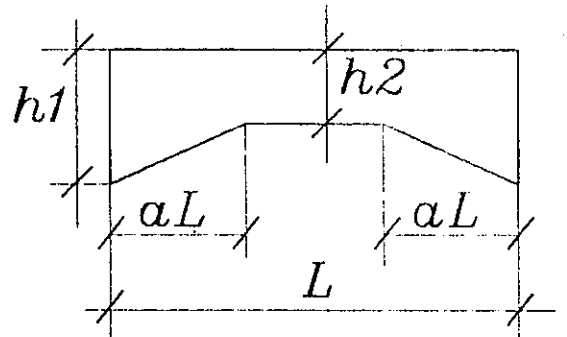
APÉNDICE 10.

Con la información de los apéndices del 1 al 9 se obtienen los juegos de Curvas de Rigidez y Transporte, éstas se muestran a continuación :

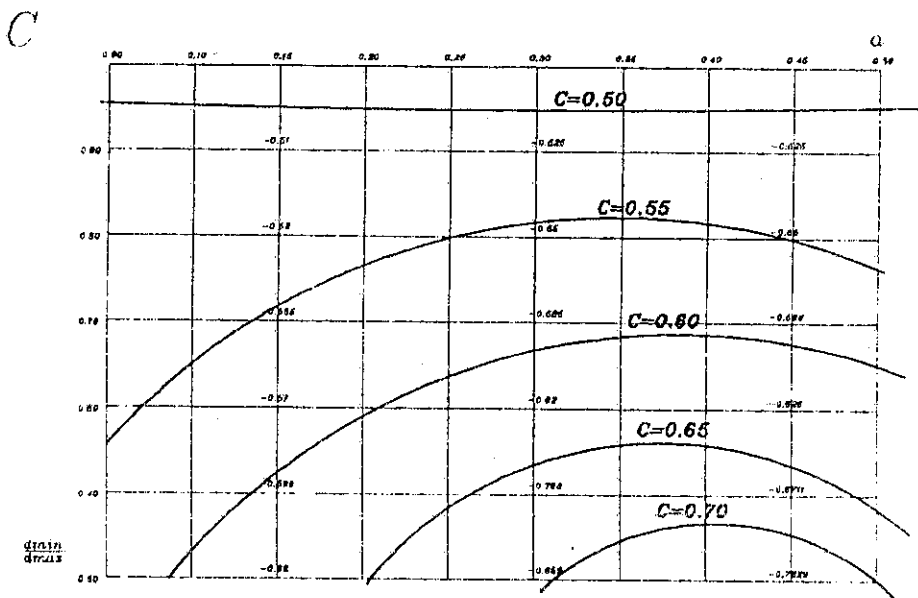
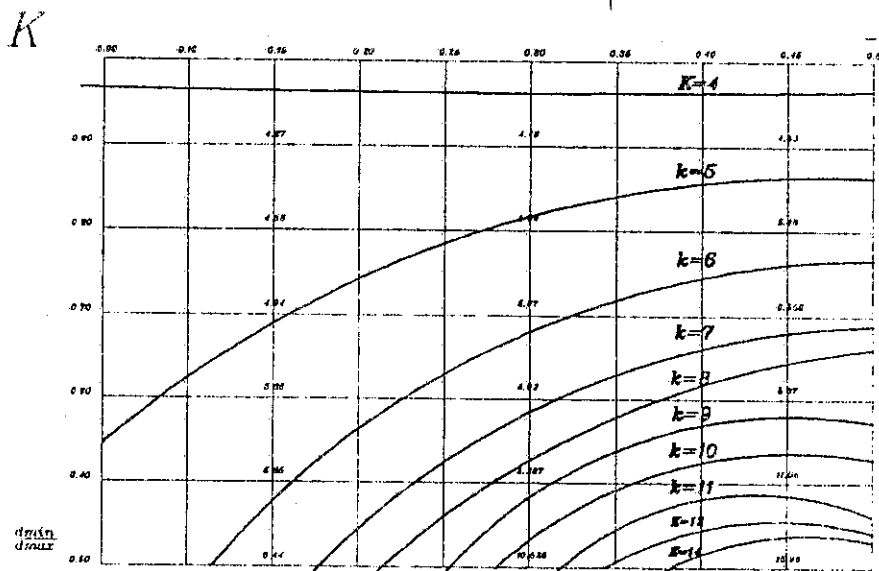
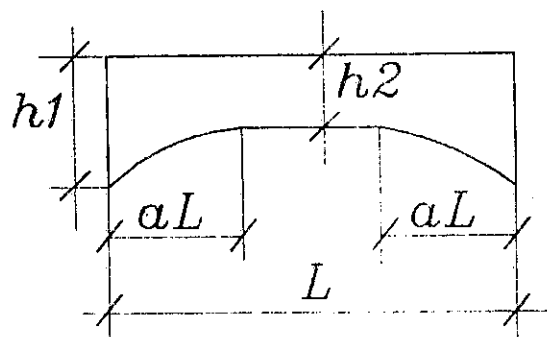
Miembros Asimétricos Rectos.



Miembros simétricos, dobles Cartelas Rectas.



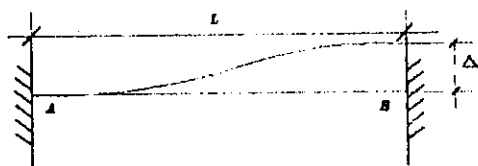
Miembros simétricos, dobles Cartelas Curvas.



APÉNDICE 11

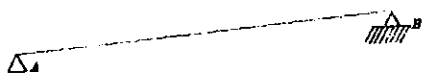
Momentos de empotramiento inducidos en un miembro no prismático por el desplazamiento relativo de los extremos del miembro.

Del Análisis Estructural se sabe que si un elemento doblemente empotrado se ve forzado a un desplazamiento Δ , el Momento Inducido en ambos extremos es de la forma :



$$EI\theta/a = \frac{1}{2}LMa\frac{L}{3} - \frac{1}{2}L Mb\frac{2L}{3}$$

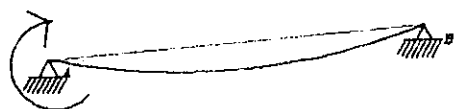
Como $M_a = M_b$



$$2EI\Delta = \frac{MaL}{3} - \frac{Mb \cdot 2L}{3}$$

+

$$6EI\Delta = MaL - 2MaL$$



$$6EI\Delta = -1MaL$$

+

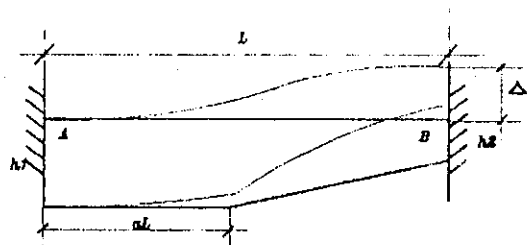
L

$$Ma = \frac{-6EI\Delta}{L}$$

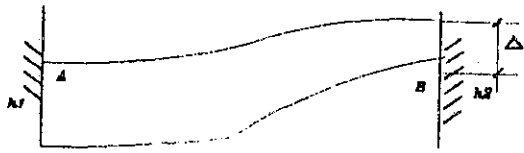
Para este análisis se aplicarán los mismos principios para encontrar un equivalente de este Momento para secciones variables.

Miembros con reducción lineal en sus bordes (asimétricos):

Se sabe que :



$$\Delta = \frac{\int x(Mdx)}{EI}$$



$$\Delta = \int_0^a \frac{x(Mdx)}{EI} + \int_a^L \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$E\Delta = \int_0^a \frac{(2Max^2 - Max)}{L} dx + \int_a^L \frac{(2Max^2 - Max)}{L} dx$$

$$E\Delta = Ma \int_0^a \frac{2x^2 - x}{L} dx + 12Ma \int_a^L \frac{2x^2 - x}{(-C1x + C3)^3} dx$$

$$E\Delta = \frac{Ma}{L} \left(\int_0^a 2x^2 dx - \int_0^a x dx \right) + 12Ma \int_a^L \frac{2x^2 dx}{(-C1x + C3)^3} - \int_a^L \frac{xdx}{(-C1x + C3)^3}$$

Integ 1

como: $\int_a^L \frac{x^2 dx}{(-C1x + C3)^3} = \frac{1}{C1^3} \left(\frac{-1}{-C1L + C3} + \frac{1}{-C1a + C3} + \frac{C3}{2(-Ca + C3)^2} - \frac{C3^2}{2(-C1a + C3)^2} \right)$

Integ 2

y $\int_a^L \frac{x^2 dx}{(-C1x + C3)^3} = \frac{1}{-C1^3} \left(\ln(-C1L + C3) - \ln(-C1a + C3) + \frac{2C3}{-C1L + C3} - \frac{2C3}{-C1a + C3} - \frac{C3^2}{2(-C1L + C3)^2} + \frac{C3^2}{2(-C1a + C3)^2} \right)$

El resultado completo será :

$$E\Delta = \frac{Ma}{1} \left(\frac{1}{L} \frac{2x^3}{3} \Big|_0^a - \frac{x^2}{2} \Big|_0^a \right) + 12 \frac{Ma}{L} \left(\text{Integ 1} - \text{Integ 2} \right)$$

o:

$$E\Delta = \frac{Ma}{1} \frac{1}{L} \left(\frac{2(a)^3}{3} - \frac{(aL)^2}{2} \right) + 12 \frac{Ma}{L} \left(\frac{2}{L} \left(\frac{1}{-C1^3} \ln(-C1L+C3) - \ln(-C1a+C3) \right. \right. \\ \left. \left. \frac{+2C3}{-C1L+C3} - \frac{-2C3}{-C1a+C3} \right) \right. \\ \left. \frac{-C3^2}{2(-C1L+C3)} + \frac{C3^2}{2(-C1a+C3)} \right) \\ \frac{-1}{C1^2} \left(\frac{-1}{-C1L+C3} + \frac{1}{-C1aL+C3} \right. \\ \left. \frac{+C3}{2(-C1L+C3)^2} - \frac{C3}{2(-C1aL+C3)^2} \right)$$

Existen diferentes tipos de miembros para los cuales esta ecuación es válida, el siguiente programa calcula el valor de Ma inducido:

```

10 CLS : CLEAR : PRINT "DEFL RECTO"
15 REM DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE UN APOYO
16 REM MIEMBROS ASIMETRICOS RECTOS
20 INPUT "a"; A
30 INPUT "h1="; H1
40 INPUT "h2="; H2
50 INPUT "L="; L
55 PRINT "hmin/hmaz="; (H2 / H1)
60 C1 = (H1 - H2) / (L * (1 - A)); C2 = (A * (H1 - H2)) / (1 - A)
70 C3 = H1 + C2
80 N1 = ((A * L) ^ 3) / 3; N2 = ((A * L) ^ 2) / 2
90 N3 = LOG((-C1 * L) + C3); N4 = LOG((-C1 * A * L) + C3)
100 N5 = (2 * C3) / ((-C1 * L) + C3); N6 = (2 * C3) / ((-C1 * A * L) + C3)
110 N7 = (C3 ^ 2) / (2 * (((-C1 * L) + C3) ^ 2))
120 N8 = (C3 ^ 2) / (2 * (((-C1 * A * L) + C3) ^ 2))
130 N9 = 1 / ((-C1 * L) + C3); N10 = (1 / ((-C1 * A * L) + C3))
140 N11 = C3 / (2 * (((-C1 * L) + C3) ^ 2))
150 N12 = C3 / (2 * (((-C1 * L * A) + C3) ^ 2))

```



```

151 I=(1 / 12) * (H1 ^ 3)
155 N14 = -N9 + N10 + N11 - N12: INT2 = (1 / -(C1 ^ 2)) * N14
160 N13 = N3 - N4 + N5 - N6 - N7 + N8
190 INT1 = (1 / -(C1 ^ 3)) * (N13): PRINT "INT1="; INT1: PRINT "INT2="; INT2
260 C1 = (H1 - H2) / (L * (1 - A))
270 C2 = (A * (H1 - H2)) / (1 - A)
280 C3 = H1 + C2
350 I = (1 / 12) * (H1 ^ 3)
490 TERM2 = 12 * (((2 / L) * INT1) + INT2)
500 TERM3 = (1 / I) * (((1 / L) * (2 * ((A * L) ^ 3) / 3)) - (((A * L) ^ 2) / 2))
510 VAR1 = TERM2 + TERM3: PRINT "TERM2="; TERM2; TERM3; ",TERM3"
520 PRINT "PARA DEFLEXION Ma=Mb="; 1 / VAR1; "E"
530 END

```

APÉNDICE 12

Borde Curvo(asimétricos):

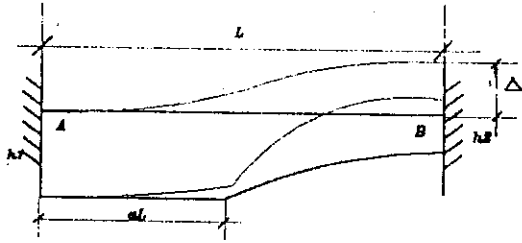


FIG 4.2.3.2.2.1

$$\Delta = \int_0^L \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$\Delta = \int_0^a \frac{x(Mdx)}{EI} + \int_a^L \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$E\Delta = \int_0^a \left(\frac{2Ma x^2 - Max}{L} \right) dx + \int_a^L \left(\frac{2Ma x^2 - Max}{L} \right) dx$$

$$E\Delta = Ma \int_0^a \left(\frac{2x^2 - x}{L} \right) dx + 12Ma \int_a^L \left(\frac{2x^2 - x}{L} \right) \frac{dx}{(h1 - o\sqrt{x-a})^3}$$

$$E\Delta = \frac{Ma}{L} \left(\frac{1}{3} \frac{2x^3}{L} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a + 12Ma \left(\frac{2}{L} \int_a^L \frac{x^2 dx}{(h1 - o\sqrt{x-a})^3} - \int_a^L \frac{x dx}{(h1 - o\sqrt{x-a})^3} \right)$$

integ 1
integ 2

De resultados anteriores ya se tiene:

$$\text{Integ1} = \frac{1}{o^6} \left(\frac{2h^4}{c} + 2h^3 - 8h^3 \ln(c) + 8h^3 \ln(h) + 12h^2 C - 12h^3 - 4hc^2 + 4h^3 + \frac{2h^5}{2c^2} - \frac{2h^5}{2h^2} - \frac{8h^4}{4} \right.$$

$$\left. + 8h^3 - 12h^3 \ln(c) + 12h^3 \ln(h) + 8h^2(C) - 8h^3 - c^2 h + h^3 + \frac{2h^3}{3} - \frac{2h^3}{3} \right)$$

$$+ \frac{1}{o^4} \left(\frac{4alh^2}{c} + 4alh - 8hal \ln(c) + 8hal \ln(h) + 4alC - 4alh + \frac{2h^3 al}{c^2} - \frac{2hal}{c} - \frac{8h^2 al}{c} \right.$$

$$\left. \frac{8h^2 al}{h} - 4hal \ln(c) + 4hal \ln(h) \right)$$

$$+ \frac{1}{o^2} \left(\frac{2(al)^2}{c} + \frac{2(al)^2}{h} + \frac{2h(al)^2}{2c} - \frac{2(al)^2}{2h} \right)$$

$$\text{Integ2} = \frac{-2h^2}{o^4(h1-o\sqrt{l-al})} + \frac{2h}{o^4} - \frac{4h \ln(h1-o\sqrt{l-al})}{o^4} + \frac{4h \ln(h)}{o^4} + \frac{2(h1-o\sqrt{l-al})}{o^4} - \frac{2h}{o^4}$$

$$\frac{-2al}{o^2(h1-o\sqrt{l-al})} + \frac{2al}{o^2h} + \frac{2h^3}{2o^4(h1-o\sqrt{l-al})^2} + \frac{2h}{2o^4} - \frac{4h^2}{o^4(h1-o\sqrt{l-al})} + \frac{4h}{o^4}$$

$$\frac{-2h \ln(h1-o\sqrt{l-al})}{o^4} + \frac{2h \ln(h)}{o^4} + \frac{2hal}{2o^2(h1-o\sqrt{l-al})^2} - \frac{2alh}{2o^2(h1-o\sqrt{l-al})^2} - \frac{2al}{2o^2h}$$

Donde $C = h1 - o\sqrt{l-al}$

El programa siguiente encuentra el valor de Mb para cualquier variación del miembro ya estudiado:

```

10 CLS : CLEAR : PRINT "RECTO-PARABOLICO"
15 REM DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE UN APOYO
16 REM MIEMBROS ASIMETRICOS CURVOS
20 INPUT "H1="; H1
30 INPUT "H2="; H2
40 INPUT "A="; A
50 INPUT "L="; L: DEFDBL C
60 I = (1 / 12) * (H1 ^ 3)
70 O = (H1 - H2) / (SQR(L - A * L)): PRINT "O="; O
80 C1 = (H1 - O * SQR(L - A * L)): PRINT "C1="; C1: INPUT ""; L3
90 C2 = CDBL((2 * (H1 ^ 4)) / C1): C3 = CDBL((2 * H1 ^ 3)): C4 = CDBL(8 * (H1 ^ 3) * LOG(C1))
95 C5 = CDBL(8 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)): C6 = CDBL(12 * (H1 ^ 2) * C1)
100 C7 = CDBL(12 * (H1 ^ 3)): C8 = CDBL(4 * H1 * (C1 ^ 2)): C9 = CDBL(4 * (H1 ^ 3)): C10 =
CDBL((H1 ^ 5) / (C1 ^ 2))
110 C11 = CDBL(H1 ^ 3): C12 = CDBL(8 * (H1 ^ 4) / C1): C13 = CDBL(8 * (H1 ^ 3)): C14 =
CDBL(12 * (H1 ^ 3) * LOG(C1))

```

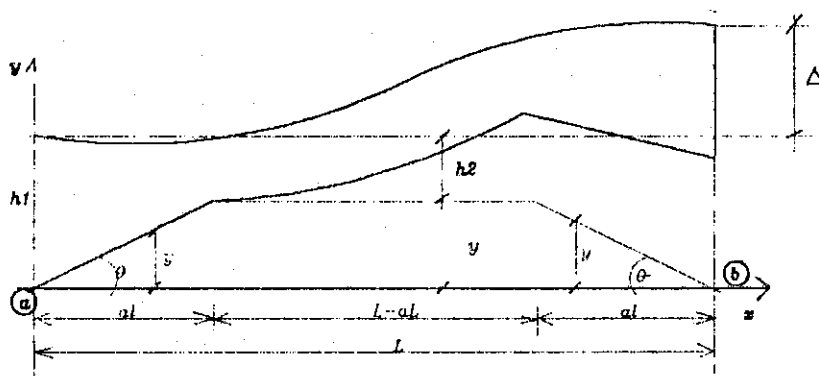
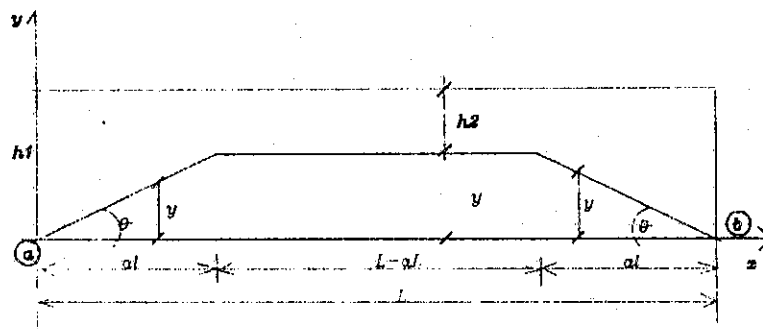
```

120 C15 = CDBL(12 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)); C16 = CDBL(8 * (H1 ^ 2) * C1); C17 = CDBL(8 * (H1 ^
3))
130 C18 = CDBL((C1 ^ 2) * H1); C19 = CDBL(H1 ^ 3); C20 = CDBL((2 * (C1 ^ 3)) / 3); C21 =
CDBL((2 * (H1 ^ 3)) / 3)
140 C22 = CDBL(-C2 + C3 - C4 + C5 + C6 - C7 - C8 + C9 + C10 - C11 - C12 + C13 - C14 + C15 + C16
- C17 - C18 + C19 + C20 - C21)
150 C22 = CDBL((1 / (O ^ 6)) * C22); PRINT "C22="; C22
160 C23 = (4 * A * L * (H1 ^ 2)) / C1; C24 = 4 * A * L * H1; C25 = 8 * H1 * A * L * LOG(C1)
170 C26 = 8 * H1 * A * L * LOG(H1); C27 = 4 * A * L * C1; C28 = 4 * A * L * H1
180 C29 = (2 * (H1 ^ 3) * A * L) / (C1 ^ 2); C30 = 2 * H1 * A * L; C31 = (8 * (H1 ^ 2) * A * L) / C1
190 C32 = (8 * (H1 ^ 2) * A * L) / (H1); C33 = 4 * H1 * A * L * LOG(C1); C34 = 4 * H1 * A * L *
LOG(H1)
200 C35 = -C23 + C24 - C25 + C26 + C27 - C28 + C29 - C30 - C31 + C32 - C33 + C34
210 C35 = (1 / (O ^ 4)) * C35
220 C36 = 2 * ((A * L) ^ 2) / C1; C37 = 2 * ((A * L) ^ 2) / H1; C38 = (2 * H1 * ((A * L) ^ 2)) / (2 * (C1
^ 2))
230 C39 = (2 * ((A * L) ^ 2)) / (2 * H1)
240 C40 = -C36 + C37 + C38 - C39
250 C40 = C40 / (O ^ 2)
260 C41 = C22 + C35 + C40; PRINT "1ra integral="; C41
270 C42 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * (C1)); C43 = (2 * H1) / (O ^ 4); C44 = (4 * H1 * LOG(C1)) / (O ^
4)
280 C45 = (4 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4); C46 = (2 * C1) / (O ^ 4); C47 = (2 * H1) / (O ^ 4)
290 C48 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * C1); C49 = (2 * A * L) / ((O ^ 2) * H1); C50 = (H1 ^ 3) / ((O ^ 4) *
(C1 ^ 2)); C51 = H1 / (O ^ 4)
300 C52 = (4 * (H1 ^ 2)) / ((O ^ 4) * C1); C53 = (4 * H1) / (O ^ 4); C54 = (2 * H1 * LOG(C1)) / (O ^ 4)
310 C55 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 4); C56 = (2 * H1 * A * L) / (2 * (O ^ 2) * (C1 ^ 2)); C57 = (2 * A
* L) / (2 * (O ^ 2) * (H1))
320 C58 = -C42 + C43 - C44 + C45 + C46 - C47 - C48 + C49 + C50 - C51 - C52 + C53 - C54 + C55 +
C56 - C57
330 PRINT "2a integral="; C58
340 C82 = ((2 * (A * L) ^ 3)) / 3; C83 = ((A * L) ^ 2) / 2; C82 = C82 / L; C82 = C82 - C83
350 C83 = C82 / I
360 C84 = (24 * C22) / L; C85 = (12 * C58)
370 CONS = 1 / (C83 + C84 - C85)
380 PRINT "PARA DEFLEXION Ma=Mb="; CONS; "E"
560 END

```

APÉNDICE 13.

Cartelas Rectas:



$$\Delta = \int_0^L \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$\Delta = \int_0^{a1} \frac{x(Mdx)}{EI} + \int_{a1}^{L-a1} \frac{x(Mdx)}{EI} + \int_{L-a1}^L \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$\Delta E = \int_0^a \left(\frac{2Ma x^2}{L} - Max \right) dx + \int_a^{L-a} \left(\frac{2Max^2}{L} - Max \right) dx + \int_{L-a}^L \left(\frac{2Max^2}{L} - Max \right) dx$$

$$\int_0^a \frac{1}{12} \left(\frac{h1 - (h1-h2)x}{a} \right)^3 dx + \int_a^{L-a} \frac{1}{12} (h2)^3 dx + \int_{L-a}^L \frac{1}{12} \left(\frac{h1 + (h1-h2)x - (h1-h2)}{a} \right)^3 dx$$

Sean: $c1 = \frac{(h1-h2)}{al}$ y $c2 = c1$ $c3 = (-h1 + (c1xL))$

$$\Delta E = 12Ma \left(\int_0^{al} \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(h1 - (c1x))^3} + \int_{al}^{1-al} \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(h2)^3} + \int_{1-al}^1 \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(c2x - c3)^3} \right)$$

$$\Delta E = 12Ma \left(\frac{-2}{L} \int_0^{al} \frac{x^2 dx}{(h1 - c1x)^3} - \int_0^{al} \frac{x dx}{(h1 - c1x)^3} + \frac{2}{L} \int_{al}^{1-al} \frac{x^2 dx}{(h2)^3} - \int_{al}^{1-al} \frac{x}{(h2)^3} \right. \\ \left. + \frac{2}{L} \int_{1-al}^1 \frac{x dx}{(c2x - c3)^3} - \int_{1-al}^1 \frac{x dx}{(c2x - c3)^3} \right)$$

Como estas integrales ya fueron resueltas con anterioridad se tiene:

$$\Delta E = 12Ma \left(\frac{-2}{L} \left(\frac{-1}{c1^3} \left(\frac{-h1^2}{2(h1 - c1al)^2} + \frac{+h1^2}{2(h1)^2} + \frac{+2h1}{h1 - c1(al)} - \frac{-2h1}{h1} = \ln(h1 - c1al) - \ln|h1| \right) \right) \right) \\ - \left(\frac{-1}{c1^2} \left(\frac{-h1}{2(h1 - c1(al))^2} + \frac{+h1}{2h1^2} + \frac{+1}{h1 - c1(al)} - \frac{-1}{h1} \right) \right) \\ + \left(\frac{2}{L(h2)^3} \left(\frac{(1-al)^3}{3} - \frac{(-al)^3}{3} \right) \right) \\ - \left(\frac{1}{(h2)^3} \left(\frac{(1-al)^2}{2} - \frac{(al)^2}{2} \right) \right)$$

$$\left(\frac{+2}{L} \left(\frac{1}{c2^3} \right) \left(\ln |c2| - c2| - \ln |c2(1-a)| - c3| - \frac{2c3}{c2| - c3} + \frac{2c3}{c2(1-a)| - c3} \right) \right. \\ \left. \left(\frac{-c3^3}{2(c2| - c3)^2} + \frac{c3^2}{2(c2(1-a)| - c3)^2} \right) \right) \\ \left(- \frac{1}{c2^2} \right) \left(- \frac{1}{c2| - c3} + \frac{1}{c2(1-a)| - c3} - \frac{c3}{2(c2 - c3)^2} + \frac{c3}{(2(c2(1-a)| - c3)^3)} \right)$$

El programa siguiente encuentra el valor de Mb para cualquier variación del miembro estudiado :

```

10 CLS : CLEAR
15 INPUT "a="; a
20 INPUT "H2="; H2
22 INPUT "FACTOR="; FACTOR
30 H1 = FACTOR * H2: PRINT "h1="; H1: PRINT "h2/h1="; (H2 / H1)
40 INPUT "L="; L
50 C1 = ((H1 - H2) / (a * L)); C2 = C1: C3 = -H1 + (C1 * L)
55 PRINT "PENDIENTE DE LA CARTELA"; C1
60 N1 = (H1 ^ 2) / (2 * ((H1 - C1 * a * L) ^ 2))
70 N2 = 1 / 2
80 N3 = (2 * H1) / (H1 - C1 * a * L)
90 N4 = 2
100 N5 = LOG(H1 - (C1 * a * L))
110 N6 = LOG(H1): ANT1 = (2 * (-N1 + N2 + N3 - N4 + N5 - N6)) / (C1 ^ 3)
115 PRINT "1RA INTEG="; ANT1: PRINT N1; N2; N3; N4; N5; N6
120 N7 = H1 / (2 * ((H1 - (C1 * a * L) ^ 2))
130 N8 = 1 / (2 * H1)
140 N9 = 1 / (H1 - C1 * a * L)
150 N10 = 1 / H1: ANT2 = (-1 * (-N7 + N8 + N9 - N10)) / (C1 ^ 2)
155 PRINT "2DA INTEG="; ANT2: PRINT N7; N8; N9; N10
160 N11 = ((L - a * L) ^ 3) / 3
170 N12 = ((a * L) ^ 3) / 3
180 N13 = ((L - a * L) ^ 2) / 2
190 N14 = ((a * L) ^ 2) / 2
200 N15 = (LOG((C2 * L) - C3))
210 N16 = (LOG((C2 * (L - a * L)) - C3))
220 N17 = (2 * C3) / (C2 * L - C3)
230 N18 = (2 * C3) / (C2 * (L - a * L) - C3)
240 N19 = (C3 ^ 2) / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
250 N20 = (C3 ^ 2) / (2 * ((C2 * (L - a * L) - C3) ^ 2))

```

```

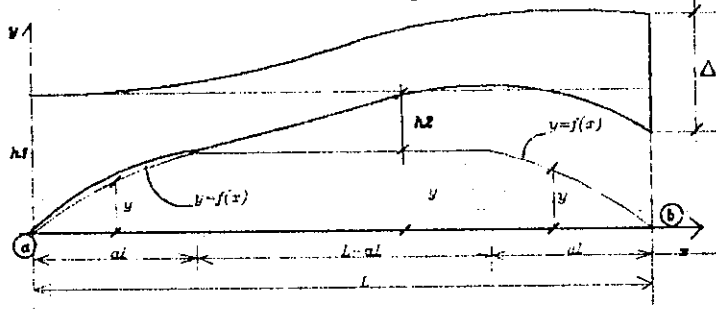
260 N21 = 1 / (C2 * L - C3)
270 N22 = 1 / (C2 * (L - a * L) - C3)
280 N23 = C3 / (2 * ((C2 * L - C3) ^ 2))
290 N24 = C3 / (2 * ((C2 * (L - a * L) - C3) ^ 2))
300 T1 = -N1 + N2 + N3 - N4 + N5 - N6: PRINT "T1= "; T1
310 T2 = -N7 + N8 + N9 - N10
320 T3 = N11 - N12
330 T4 = N13 - N14
340 T5 = N15 - N16 - N17 + N18 - N19 + N20
350 T6 = -N21 + N22 - N23 + N24
360 A1 = 2 / (L * (C1 ^ 3)): A2 = -1 / (C1 ^ 2): A3 = 2 / (L * (H2 ^ 3))
365 A4 = 1 / (H2 ^ 3): A5 = 2 / (L * (C2 ^ 3)): A6 = 1 / (C2 ^ 2)
370 T1 = T1 * A1: T2 = T2 * A2: T3 = T3 * A3: T4 = T4 * A4
375 T5 = T5 * A5: T6 = T6 * A6: PRINT "5TA INTEG="; T5: PRINT "6TA INTEG="; T6
380 TG = T1 + T2 - T3 + T4 + T5 - T6: PRINT "TG="; TG
385 PRINT "t1="; T1; T2; T3; T4; T5; T6
390 PRINT "Para deflexion Ma=Mb="; (1 / (12 * TG)); "E"
400 END

```

APÉNDICE 14.

Cartelas Parabólicas

Para el elemento siguiente:



$$\Delta = \int_0^l \frac{x(Mdx)}{EI}$$

$$\Delta = \int_0^{a1} \frac{x M dx}{EI} + \int_{a1}^{l-a1} \frac{x M dx}{EI} + \int_{l-a1}^l \frac{x M dx}{EI}$$

$$\Delta E = \int_0^{a1} \frac{\frac{2Ma x^2}{L} - Max dx}{\frac{1}{12(h1 - \sqrt{x})^3}} + \int_{a1}^{l-a1} \frac{\frac{2Ma x^2}{L} - Max dx}{\frac{1}{12(h2)^3}} + \int_{l-a1}^l \frac{\frac{2Ma x^2}{L} - Max dx}{\frac{1}{12(h1 - \sqrt{l-x})^3}}$$

desde: $U = \frac{h1 - h2}{\sqrt{a1}}$

$$\Delta E = 12Ma \int_0^a \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{x})^3} + \int_a^{1-a} \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(h_2)^3} + \int_{1-a}^1 \frac{\left(\frac{2x^2}{L} - x\right) dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{1-x})^3}$$

$$\Delta E = 12Ma \frac{2}{L} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{x})^3} + \int_0^a \frac{x dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{x})^3} + \frac{2}{L} \int_a^{1-a} \frac{x^2 dx}{h_2^3} - \int_a^{1-a} \frac{x dx}{h_2^3} + \frac{2}{L} \int_{1-a}^1 \frac{x^2 dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{1-x})^3} - \int_{1-a}^1 \frac{x dx}{(h_1 - \sigma\sqrt{1-x})^3}$$

Todas estas integrales ya han sido resueltas con anterioridad:

Solución:

$$\Delta E = 12Ma \left(\frac{2}{L} \left(\frac{-2}{\sigma^6} \frac{-h^5}{2(h_1 - \sigma\sqrt{a})} + \frac{h}{2h^2} \frac{+5h}{h - \sigma\sqrt{a}} - \frac{5h}{h} + 10h^3 \ln|h - \sigma\sqrt{a}| - 10h^3 \ln|h| \right) \right. \\ \left. - 10h^2(h_1 - \sigma\sqrt{a}) + 10h^2(h) + \frac{5h(h - \sigma\sqrt{a})^2}{2} - \frac{5h^3}{2} - \frac{(h_1 - \sigma\sqrt{a})^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right) \\ - \left(\frac{-2}{\sigma} \left(\frac{-h^3}{2(h - \sigma\sqrt{a})^2} + \frac{h}{2} \frac{+3h^3}{h - \sigma\sqrt{a}} - 3h + 3h \ln(h - \sigma\sqrt{a}) - (3h \ln|h|) \right) \right. \\ \left. - (h - \sigma\sqrt{a}) + h \right)$$

$$+ \left(\frac{2}{L}\right) \left(\frac{1}{h^2}\right) \left(\frac{(L-a)^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$- \frac{1}{h^2} \left(\frac{(L-a)^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$+ \frac{2}{L} \left(\frac{2}{o^4}\right) \left(hl - \frac{h^3 l}{(h-o\sqrt{a})^2} - 4hl + \frac{4h^2 l}{(h-o\sqrt{a})} - 2hl \ln(h) + 2hl \ln(h-o\sqrt{a}) \right)$$

$$\left(\frac{2}{o^6}\right) \left(\frac{-2Lh + 2Lh^2}{h-o\sqrt{a}} - 4h \ln(h)L + 4h \ln(h-o\sqrt{a})L + 2Lh - 2l(h-o\sqrt{a}) \right)$$

$$\left(\frac{2}{o^6}\right) \left(\frac{-h^3}{2} + \frac{h^5}{2(h-o\sqrt{a})^2} + 4h^3 - \frac{4h^4}{h-o\sqrt{a}} + 6h^3 \ln(h) - 6h^3 \ln(h-o\sqrt{a}) \right)$$

$$-4h^3 + 4h^2(h-o\sqrt{a}) + \frac{h^3}{2} - \frac{h(h-o\sqrt{a})^2}{2} + h^3 - \frac{h^4}{(h-o\sqrt{a})}$$

$$+4h^3 \ln(h) - 4h^2 \ln(h-o\sqrt{a}) - 6h^3 + 6h^2(h-o\sqrt{a})$$

$$\left(\frac{+4h^3 - 4h(h-o\sqrt{a})}{2} - \frac{h^3}{3} + \frac{(h-o\sqrt{a})^3}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{o^2}\right) \left(-\frac{l^2}{2h} + \frac{hl^2}{2(h-o\sqrt{a})^2} + \frac{l}{h} - \frac{l}{(h-o\sqrt{a})}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{o^2}\right) \left(-\frac{l}{2h} + \frac{hl}{2(h-o\sqrt{a})^2} + \frac{h}{2o^2} - \frac{h^3}{2o^2(h-o\sqrt{a})^2} - \frac{2h}{o^2} + \frac{2h^2}{(h-o\sqrt{a})o^2} - \frac{h \ln|h|}{o^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h}{o^2} \ln(h - o\sqrt{al}) + \frac{1}{h} - \frac{1}{(h - o\sqrt{al})} - \frac{h}{o^2} + \frac{h^2}{o^2(h - o\sqrt{al})} - \frac{2h \ln |h|}{o^2} \\
 & \left. + \frac{2h \ln |h - o\sqrt{al}|}{o^2} \right)
 \end{aligned}$$

El programa siguiente encuentra el valor de Mb para cualquier variación del miembro estudiado :

```

10 CLS : CLEAR
20 INPUT "H1="; H1
30 INPUT "H2="; H2
40 INPUT "L="; L
50 INPUT "a="; A
55 O = (H1 - H2) / (SQR(A * L)); PRINT "O="; O; DEFDBL C; DEFDBL N; O2 = (H1 - H2) / (SQR(A
* L))
60 C1 = (H1 ^ 5) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
70 C2 = (H1 ^ 3) / 2
80 C3 = (5 * (H1 ^ 4)) / (H1 - O * SQR(A * L))
90 C4 = 5 * (H1 ^ 3)
100 C5 = 10 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O * SQR(A * L))
110 C6 = 10 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)
120 C7 = 10 * (H1 ^ 2) * (H1 - O * SQR(A * L))
130 C8 = 10 * (H1 ^ 2) * H1
140 C9 = (5 * H1 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2)) / 2
150 C10 = (5 * H1 * (H1 ^ 2)) / 2
160 C11 = ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 3) / 3
170 C12 = (H1 ^ 3) / 3
180 C13 = (H1 ^ 3) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
190 C14 = H1 / 2
200 C15 = (3 * (H1 ^ 2)) / (H1 - O * SQR(A * L))
210 C16 = 3 * H1
220 C17 = (3 * H1 * LOG(H1 - O * SQR(A * L)))
230 C18 = (3 * H1 * LOG(H1))
240 C19 = (H1 - O * SQR(A * L))
250 C20 = H1
260 C21 = ((L - A * L) ^ 3) / 3; C22 = ((A * L) ^ 3) / 3
270 C23 = ((L - A * L) ^ 2) / 2; C24 = ((A * L) ^ 2) / 2
280 C25 = (H1 * L)
290 C26 = ((H1 ^ 3) * L) / ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2)
300 C27 = (4 * H1 * L)
310 C28 = (4 * (H1 ^ 2) * L) / (H1 - O2 * SQR(A * L))
320 C29 = 2 * H1 * L * LOG(H1)

```

```

330 C30 = 2 * H1 * L * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L))
340 C31 = 2 * L * H1
350 C32 = (2 * L * (H1 ^ 2)) / (H1 - O2 * SQR(A * L))
360 C33 = 4 * H1 * LOG(H1) * L
370 C34 = 4 * H1 * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)) * L
380 C35 = 2 * L * H1
390 C36 = 2 * L * (H1 - O2 * SQR(A * L))
400 C37 = L / (2 * H1)
405 C38 = (H1 * L) / (2 * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
410 C39 = (H1) / (2 * (O ^ 2))
420 C40 = (H1 ^ 3) / (2 * (O ^ 2) * ((H1 - O * SQR(A * L)) ^ 2))
425 C41 = (2 * H1) / (O ^ 2)
430 C42 = (2 * (H1 ^ 2)) / ((H1 - O * SQR(A * L)) * (O ^ 2))
435 C43 = (H1 * (LOG(H1))) / (O ^ 2)
440 C44 = (H1 / (O ^ 2)) * (LOG(H1 - O * SQR(A * L)))
445 C45 = L / H1
450 C46 = L / (H1 - O * SQR(A * L))
455 C47 = H1 / (O ^ 2)
460 C48 = (H1 ^ 2) / ((O ^ 2) * (H1 - O * SQR(A * L)))
465 C49 = (2 * H1 * LOG(H1)) / (O ^ 2)
470 C50 = (2 * H1 * (LOG(H1 - O * SQR(A * L)))) / (O ^ 2)
475 C51 = H1 / (O ^ 2); C52 = (H1 - O * SQR(A * L)) / (O ^ 2)
480 N1 = -C1 + C2 + C3 - C4 + C5 - C6 - C7 + C8 + C9 - C10 - C11 + C12
490 N2 = -C13 + C14 + C15 - C16 + C17 - C18 - C19 + C20
500 N3 = C21 - C22; N4 = C23 - C24
510 N5 = C25 - C26 - C27 + C28 - C29 + C30 - C31 + C32 - C33 + C34 + C35 - C36
515 PRINT "N25-N36="; C25, C26, C27, C28, C29, C30, C31, C32, C33, C34, C35, C36: PRINT
"N5="; N5: INPUT " "; L$
518 N6 = -C37 + C38 + C39 - C40 - C41 + C42 - C43 + C44 + C45 - C46 - C47 + C48 - C49 + C50 +
C51 - C52
520 C53 = (H1 ^ 3) / 2; C54 = (H1 ^ 5) / (2 * ((H1 - O2 * SQR(A * L)) ^ 2))
521 C55 = (4 * H1 ^ 3); C56 = (4 * (H1 ^ 4)) / (H1 - O2 * SQR(A * L))
522 C57 = 6 * (H1 ^ 3) * LOG(H1)
523 C58 = 6 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L)); C59 = 4 * (H1 ^ 2) * H1; C60 = 4 * (H1 ^ 2) *
(H1 - O2 * SQR(A * L))
524 C61 = (H1 ^ 3) / 2; C62 = (H1 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2)) / 2
526 C63 = (H1 ^ 3); C64 = (H1 ^ 4) / (H1 - (O2 * SQR(A * L))); C65 = 4 * (H1 ^ 3) * LOG(H1); C66 =
4 * (H1 ^ 3) * LOG(H1 - O2 * SQR(A * L))
528 C67 = 6 * (H1 ^ 3); C68 = 6 * (H1 ^ 2) * (H1 - (O2 * SQR(A * L)))
529 C69 = 4 * (H1 ^ 3) / 2; C70 = 4 * H1 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2) / 2
530 C71 = (H1 ^ 3) / 3; C72 = ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 3) / 3
532 C73 = (L ^ 2) / (2 * H1); C74 = (H1 * (L ^ 2)) / (2 * ((H1 - (O2 * SQR(A * L))) ^ 2))
534 C75 = (L ^ 2) / (H1); C76 = (L ^ 2) / (H1 - (O2 * SQR(A * L)))
536 N7 = -C53 + C54 + C55 - C56 + C57 - C58 - C59 + C60 + C61 - C62 + C63 - C64 + C65 - C66 -
C67 + C68 + C69 - C70 - C71 + C72
538 R1 = -2 / (O ^ 6)
539 N8 = -C73 + C74 + C75 - C76: PRINT "N8="; N8
540 R2 = -2 / (O ^ 4)
550 R3 = (1 / (H2 ^ 3)); R4 = (1 / (H2 ^ 3)); O2 = (H1 - H2) / (SQR(A * L))
560 R5 = 2 / (O2 ^ 4)
570 R6 = 2 / (O2 ^ 2)
571 R7 = 2 / (O2 ^ 6)
572 R8 = 2 / (O2 ^ 2)
580
590 CALC = ((2 / L) * R1 * N1) - R2 * N2 + (2 / L) * R3 * N3 - R4 * N4 + ((2 / L) * (R5 * N5)) + (R7 *
N7) - (R8 * N8) - (R6 * N6)
600 CALC = 1 / (12 * CALC)
610 PRINT "PARA DEFLEXION Ma=Mb="; CALC; "E"
620 FND

```

1. Introduction

2. Methodology

3. Results

4. Discussion

5. Conclusion