



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Civil

GUÍA PRÁCTICA PARA EL CURSO: RESISTENCIA DE MATERIALES 1

Marco Antonio García Díaz
Asesorado por Ing. Herbert René Miranda Barrios

Guatemala, mayo de 2004

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

GUÍA PRÁCTICA PARA EL CURSO: RESISTENCIA DE MATERIALES 1

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A JUNTA DIRECTIVA DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

MARCO ANTONIO GARCÍA DÍAZ

ASESORADO POR ING. HERBERT RENÉ MIRANDA BARRIOS

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

GUATEMALA, MAYO DE 2004

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO: Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
VOCAL I: Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL II: Lic. Amahán Sánchez Alvarez
VOCAL III: Ing. Julio David Galicia Celada
VOCAL IV: Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V: Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIO: Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO: Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
EXAMINADOR: Ing. Manuel Alfredo Arrivillaga Ochaeta
EXAMINADOR: Ing. Julio Roberto Luna Aroche
EXAMINADOR: Ing. Selvin Enrique Estrada Barrera
SECRETARIO: Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

GUÍA PRÁCTICA PARA EL CURSO: RESISTENCIA DE MATERIALES 1

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil con fecha 11 de noviembre de 2003.

Marco Antonio García Díaz

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	V
LISTA DE SÍMBOLOS.....	IX
GLOSARIO.....	XIII
RESUMEN.....	XVII
OBJETIVOS.....	XIX
INTRODUCCIÓN.....	XXI
1. NOCIONES FUNDAMENTALES	
1.1 Introducción a la mecánica de materiales y estática de cuerpos sólidos.....	1
1.2 Análisis dimensional.....	3
1.3 Construcción de diagramas de cuerpo libre.....	8
2. ESFUERZO SIMPLE	
2.1 Introducción.....	9
2.2 Análisis de fuerzas internas.....	9
2.3 Tipos de esfuerzos y sus ecuaciones características.....	10
2.3.1 Esfuerzo normal (tensión y compresión).....	12
2.3.1.1 Restricciones de la fórmula.....	14
2.3.2 Esfuerzo de aplastamiento.....	16
2.3.3 Esfuerzo de corte.....	17
2.4 Estado de esfuerzos.....	20
2.4.1 Propiedades de los esfuerzos de corte.....	21
2.5 Concentración de esfuerzos.....	22
2.6 Esfuerzos y cargas permisibles.....	25
2.6.1 Factor de seguridad.....	26
2.7 Problemas resueltos del capítulo dos.....	27
2.7.1 Problema resuelto número uno.....	28
2.7.2 Problema resuelto número dos.....	30
2.7.3 Problema resuelto número tres.....	31
3. DEFORMACIÓN SIMPLE	
3.1 Introducción.....	35
3.2 Diagrama esfuerzo-deformación.....	36

3.3	Elasticidad lineal: Ley de Hooke.....	43
3.3.1	Ley de Hooke en cortante.....	45
3.4	Energía de deformación.....	47
3.5	Relación de Poisson: estados de deformación biaxial y triaxial.....	49
3.6	Deflexiones de miembros cargados axialmente.....	52
3.7	Esfuerzos y deformaciones de origen térmico.....	55
3.8	Estructuras estáticamente indeterminadas.....	58
3.9	Problemas resueltos del capítulo tres.....	59
3.9.1	Problema resuelto número cuatro.....	59
3.9.2	Problema resuelto número cinco.....	63
3.9.3	Problema resuelto número seis.....	67
3.9.4	Problema resuelto número siete.....	69
4.	TORSIÓN	
4.1	Torsión de barras circulares y sus aplicaciones.....	73
4.1.1	Deducción de las fórmulas utilizadas en torsión.....	75
4.1.2	Diagrama de momentos torsionantes.....	82
4.2	Transmisión de potencia mediante ejes.....	84
4.3	Problemas resueltos del capítulo cuatro.....	87
4.3.1	Problema resuelto número ocho.....	87
4.3.2	Problema resuelto número nueve.....	89
5.	VIGAS	
5.1	Tipos de vigas.....	91
5.1.1	Tipos de cargas en vigas.....	92
5.1.2	Cálculo de reacciones por tipos de apoyos.....	94
5.2	Fuerza cortante y momento flexionante.....	96
5.3	Construcción de diagramas: fuerza cortante y momento flexionante.....	96
5.3.1	Relación entre carga, fuerza cortante y momento flexionante.....	97
5.3.2	Método de ecuaciones.....	104
5.3.3	Método de áreas o semigráfico.....	108
5.3.4	Trazo de la curva elástica y su interpretación.....	109
5.4	Problemas resueltos del capítulo cinco.....	111
5.4.1	Problema resuelto número diez.....	111
5.4.2	Problema resuelto número once.....	122
5.4.3	Problema resuelto número doce.....	131

6.	ESFUERZO EN VIGAS	
6.1	Introducción.....	135
6.2	Deducción de la fórmula de la flexión.....	136
6.3	Esfuerzo cortante en vigas.....	144
6.3.1	Cálculo de la inercia total de sección de una viga.....	146
6.3.2	Cálculo del primer momento del área “Q”.....	150
6.3.3	Flujo de corte.....	155
6.4	Espaciamiento de remaches, tornillos u otro medio de unión.....	156
6.5	Diseño de viga por flexión y por cortante.....	157
6.6	Problemas resueltos del capítulo seis.....	161
6.6.1	Problema resuelto número trece.....	161
	CONCLUSIONES.....	167
	RECOMENDACIONES.....	169
	BIBLIOGRAFÍA.....	171
	APÉNDICES.....	173

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1	Comparación de esfuerzos y su importancia.....	10
2	Uniformidad del esfuerzo normal.....	12
3	Restricciones de la fórmula $\sigma = P/A$	14
4	Restricciones de la fórmula $\sigma = P/A$	15
5	Restricciones de la fórmula $\sigma = P/A$	15
6	Esfuerzo de aplastamiento.....	16
7	Esfuerzo cortante simple en perno.....	17
8	Esfuerzo cortante simple.....	18
9	Esfuerzo cortante doble.....	19
10	Estado de esfuerzos.....	20
11	Propiedades de los esfuerzos de corte.....	21
12	Principio de Saint-Venant.....	22
13	Concentración de esfuerzos por carga puntual.....	24
14	Concentración de esfuerzos por discontinuidad.....	24
15	Problema resuelto número uno.....	28
16	Diagrama de fuerzas; problema resuelto número uno.....	29
17	Problema resuelto número dos.....	30
18	Problema resuelto número tres.....	31
19	Esfuerzo de aplastamiento; problema resuelto número tres.....	32
20	Deformación por carga axial.....	35
21	Zonas elástica y plástica del diagrama esfuerzo-deformación.....	37
22	Variación del diagrama según composición y temperatura.....	38
23	Diagrama esfuerzo-deformación unitaria convencional y real.....	39
24	Comparación de gráficas de diversos materiales.....	45
25	Ley de Hooke en cortante.....	46
26	Módulo de resiliencia (u_r).....	47
27	Módulo de tenacidad (u_t).....	48
28	Relación de Poisson.....	49
29	Estado de esfuerzos biaxial y triaxial.....	51
30	Deformación (δ).....	54

31	Problema resuelto número cuatro.....	59
32	Diagrama de cuerpo libre; problema resuelto número cuatro.....	60
33	Diagrama de deformaciones; problema resuelto número cuatro....	61
34	Problema resuelto número cinco.....	63
35	Diagrama de cuerpo libre; problema resuelto número cinco.....	64
36	Diagrama de deformaciones; problema resuelto número cinco.....	65
37	Problema resuelto número seis.....	67
38	Problema resuelto número siete.....	69
39	Torsión.....	74
40	Deducción de las fórmulas de torsión.....	75
41	Diagrama de cuerpo libre de eje a torsión.....	77
42	Diagrama de momentos torsionantes.....	82
43	Problema resuelto número ocho.....	87
44	Diagrama de torsión; problema resuelto número ocho.....	88
45	Problema resuelto número nueve.....	89
46	Tipos de vigas según soporte.....	91
47	Tipos de cargas en vigas.....	92
48	Convención de signos de fuerza cortante y momento flexionante...	97
49	Deducción de las relaciones entre carga, cortante y momento.....	99
50	Signo de la pendiente y pendiente nula.....	102
51	Signo de concavidad.....	103
52	Viga para el análisis del método de ecuaciones.....	104
53	Interpretación de la concavidad en curva elástica.....	110
54	Problema resuelto número diez.....	111
55	Cortes en viga, problema resuelto número diez.....	113
56	Corte a-a; problema resuelto número diez.....	114
57	Corte b-b; problema resuelto número diez.....	117
58	Corte c-c; problema resuelto número diez.....	119
59	Diagramas; problema resuelto número diez.....	121
60	Problema resuelto número once.....	122
61	Corte a-a; problema resuelto número once.....	123
62	Corte b-b; problema resuelto número once.....	125
63	Corte c-c; problema resuelto número once.....	127
64	Corte d-d; problema resuelto número once.....	128
65	Diagramas; problema resuelto número once.....	130

66	Problema resuelto número doce.....	131
67	Fuerza cortante; problema resuelto número doce.....	132
68	Áreas de cortante; problema resuelto número doce.....	133
69	Momento flexionante; problema resuelto número doce.....	134
70	Deducción de la fórmula de la flexión (deformaciones).....	137
71	Deducción de la fórmula de la flexión (equilibrio).....	140
72	Perfiles comerciales en vigas.....	143
73	Cálculo de eje neutro (E.N.) e inercia (I) de viga perfil I.....	148
74	Cálculo del primer momento de área a distintos niveles.....	152
75	Cálculo de Q al nivel 1.....	153
76	Perfiles de vigas compuestas.....	156
77	Problema resuelto número trece.....	161
78	Diagramas; problema resuelto número trece.....	162
79	Distancia "C"; problema resuelto número trece.....	163
80	Cálculo de $Q_{E.N.}$; problema resuelto número trece.....	164
81	Q a nivel del pegamento; problema resuelto número trece.....	165
82	Q a nivel de los clavo; problema resuelto número trece.....	166

TABLAS

I	Magnitudes físicas más utilizadas en Resistencia de Materiales....	6
II	Áreas y centroides de figuras geométricas más utilizadas en vigas	93
III	Apoyos y reacciones.....	94
IV	Relación entre diagramas de carga, cortante (V) y momento (M)...	98
V	Tabla resumen; problema resuelto número diez.....	121
VI	Tabla de resumen; problema resuelto número once.....	129
VII	Cálculo del módulo de resistencia S.....	142
VIII	Cálculo de eje neutro e inercia de rotación	149
IX	Factores de conversión.....	191
X	Propiedades de algunos materiales.....	192
XI	Propiedades de algunos materiales.....	193
XII	Coeficientes de dilatación térmica.....	194

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
m	Metro
m²	Metro cuadrado
Pulg, In	Pulgada
P, ft	Pie
s	Segundo
Kg	Kilogramo
Kgf	Kilogramo-fuerza
Lb	Libra
Lbf	librafuerza
N	Newton
Pa	Pascales
Psf	Libra sobre pie cuadrado
Psi	Libra sobre pulgada cuadrada
Kip	Kilolibra sobre pulgada cuadrada
F	Fuerza, carga
A	Área
dA	Diferencial de área
A_c	Área de carga
A_v	Área de fuerza cortante
V	Fuerza cortante, fuerza de corte
dV	Diferencial de fuerza cortante
P	Carga, potencia
dP	Diferencial de fuerza o carga
M	Momento flexionante, momento
dM	Diferencial de momento flexionante
M_{máx}	Momento flexionante máximo
Σ	Sumatoria
ΣM	Sumatoria de momentos
ΣF_v	Sumatoria de fuerzas verticales
W	Carga distribuida, Watts
C	Compresión, carga, distancia máxima desde eje neutro
R	Reacción

σ	Esfuerzo normal o axial
σ_z	Esfuerzo normal en dirección del eje z
σ_x	Esfuerzo normal en dirección del eje x
σ_y	Esfuerzo normal en dirección del eje y
τ	Esfuerzo de corte
τ_{perm}	Esfuerzo de corte permisible o admisible
$\tau_{m\acute{a}x}$	Esfuerzo de corte máximo
\emptyset	Diámetro
\emptyset_M	Diámetro mayor
\emptyset_m	Diámetro menor
E	Módulo de elasticidad
G	Módulo de elasticidad en cortante
ϵ	Deformación unitaria
ϵ_x	Deformación unitaria en dirección del eje x
ϵ_y	Deformación unitaria en dirección del eje y
ϵ_z	Deformación unitaria en dirección del eje z
δ	Deformación
δ_T	Deformación térmica
δ_M	Deformación mecánica
L	Longitud
γ	Deformación unitaria en cortante
tan	Función trigonométrica tangente
u_r	Módulo de resiliencia
u_t	Módulo de tenacidad
ν	Módulo de Poisson
Δ	Cambio
ΔT	Cambio de temperatura
ΔV	Cambio de volumen
α	Coefficiente de dilatación térmica
Y	Deflexión, distancia vertical
X	Distancia horizontal
dx	Diferencial de distancia horizontal
θ	Ángulo
dθ	Diferencial de ángulo
ρ	Distancia radial
T	Momento torsionante, tensión
\int	Integral

R	Radio
ω	Velocidad angular
rad	Radianes
hp	Caballos de fuerza
cv	Caballos de vapor
Hz	Hertz
F	Frecuencia angular
rpm	Revoluciones o vueltas por minuto
\bar{x}	Centroide
B	Base
H	Altura
E.N.	Eje neutro
\hat{Y}	Distancia centroidal
I	Momento de inercia
I_o	Momento de inercia de una figura con respecto a su eje neutro
D	Distancia desde eje neutro al centroide de una figura
Q	Primer momento de área o momento estático
Q_{E.N.}	Momento estático a nivel del eje neutro
Q_{máx}	Momento estático máximo
\leq	Menor o igual que
C.E.	Curva elástica
S	Longitud de arco, módulo de resistencia
B	Ancho de la sección transversal de la viga
q	Flujo de corte
E	Espaciamiento de clavos
K	Factor de magnificación de esfuerzos

GLOSARIO

Alabeo	Curvarse. Cuando la sección de una superficie de revolución no queda toda en un solo plano.
Arbitraria	Facultad que se tiene de poder elegir o determinarse.
Arista	Intersección de dos planos.
Centroide	Punto donde actúa la gravedad en un cuerpo.
Cielorraso	Techo completamente liso, sin defectos ni protuberancias.
Compatibilidad	Que puede existir con otro o entenderse con él.
Constante	Cantidad que guarda un valor fijo, sin cambios.
Corte o Sección	Presenta la intersección de una superficie con un plano.
Decreciente	Que va disminuyendo en su valor.
Deflexión	Desplazamiento vertical medido desde un punto o eje de referencia.
Diferencial	Elemento infinitamente pequeño de una variable.
Dilatación	Acción de aumentar el volumen de un cuerpo, ensancharlo o extenderlo.
Dimensional	Relativo a las dimensiones, medida de una magnitud.
Dirección	Ángulo respecto a un elemento de referencia; sentido.
Estabilidad	Calidad de estable, firme, constante o permanente.

Estática	Parte de la mecánica que estudia el equilibrio de los cuerpos.
Estructura	Elemento que sirve para transmitir y soportar cargas.
Factor	Cantidad adimensional que multiplica a otras cantidades.
Fricción	Resistencia o roce en un mecanismo.
Inercia	Propiedad que poseen los cuerpos de permanecer en reposo o en movimiento, y resistirse a cambiar su estado.
Magnitud	Tamaño o cantidad.
Mecánica	Parte de la física que estudia el movimiento y equilibrio de los cuerpos.
Módulo	Unidad de medida; medida comparativa.
Normal	Perpendicular.
Pendiente	Inclinación.
Permisible	Lo que se puede permitir.
Perno	Clavo grueso con cabeza redonda por un extremo y un tornillo por el otro, que se asegura con una tuerca.
Plano	Superficie.
Probeta	Trozo de un material destinado a ensayos.
Proporcional	Que aumenta o disminuye respecto a otra cantidad y guarda siempre la misma relación.
Proyección	Representación de un cuerpo sobre un plano, hecha según ciertas reglas geométricas.

Puntual	Relativo a un punto; exacto.
Redundante	Dícese de lo que resulta en beneficio o daño de otro elemento.
Remache	Clavo con la punta machacada para darle mayor fuerza.
Tangente	Que toca un punto de la curva; función trigonométrica.
Tramo	Distancia contigua a otra y separadas por un límite.
Uniaxial	En un solo eje.
Uniforme	Que tiene igual forma; semejante.

RESUMEN

En el presente trabajo de graduación, se presentan todos y cada uno de los temas que se tratan en el curso Resistencia de Materiales 1, impartido en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

En consecuencia, en la presente tesis, se describen los temas relacionados con la mecánica y resistencia de materiales, es decir, las propiedades que sustentan la base fundamental para poder trabajar y diseñar una estructura, con la utilización del material más adecuado, según su comportamiento y sus propiedades de acuerdo a las condiciones de carga que se presenten.

Se consideran también elementos importantes, en este estudio, el esfuerzo, la deformación, las gráficas para evaluar las propiedades de un material, condiciones de cargas, temas como torsión, concentración y estados de esfuerzos y finalmente diseño de vigas, en donde se aplican los conceptos tratados en el curso.

Se propone además una serie de problemas resueltos, en donde se aplican los conceptos descritos y cierto material de apoyo, que consiste en hojas con descripción teórica, que pueden tomarse como un resumen de los temas más importantes desarrollados; dicho material servirá tanto para la enseñanza como para el correcto aprendizaje de la materia.

OBJETIVOS

- **General**

Elaborar una guía para el curso Resistencia de Materiales 1, y proporcionar una fuente de consulta de fácil acceso.

- **Específicos**

1. Presentar, de manera ordenada y clara, los conceptos y el marco teórico que servirán como base al estudiante para el conocimiento de los distintos temas tratados en el curso.
2. Recopilar una serie de problemas claves en la aplicación de conceptos.
3. Presentar al estudiante problemas resueltos, con explicación teórica, para reforzar los conocimientos adquiridos.
4. Auxiliar al catedrático del curso, a través de una propuesta de hojas de trabajo y material auxiliar con contenido, tanto teórico como práctico, para un mejor entendimiento de los distintos conceptos y temas tratados.
5. Motivar al estudiante para el estudio y profundización en los temas del curso, debido a la importancia que tiene el mismo en distintas carreras de ingeniería.

INTRODUCCIÓN

En la carrera de ingeniería, se ha observado la necesidad de contar con información de una manera accesible y económicamente viable, además del contenido de los textos que ayuden a reforzar lo aprendido en la cátedra, para ampliar los conocimientos en determinado tema de interés. Es por eso que es necesario realizar el presente trabajo de graduación como una propuesta de teoría, problemas tipo seleccionados y aplicaciones de los distintos temas del curso Resistencia de Materiales 1, para que al estudiante y profesor del mismo pueda encontrar una guía que le proporcione los elementos fundamentales para aprender y desarrollar de una manera correcta el contenido del curso, el cual es fundamental en Ingeniería, para el diseño de estructuras y máquinas; además proporciona las bases para otros estudios en cursos posteriores en todas y cada una de las carreras. En el presente trabajo, se estudia entonces la mecánica de cuerpos deformables, es decir, la mecánica y resistencia de materiales, la cual estudia las relaciones que existen entre las cargas aplicadas a un cuerpo y los esfuerzos y deformaciones producidas por dichas cargas. Estos conceptos se traducen en la base de conocimientos para el diseño de estructuras, es decir, concebirlas de tal manera que satisfaga las condiciones estructurales mínimas para resistir cargas, y que no presenten deformaciones excesivas que hagan colapsar el elemento, sin descuidar además de este criterio de seguridad un criterio también fundamental para el diseño: La economía.

Lo anterior es presentado procurando usar un lenguaje sencillo y haciendo énfasis en algunas recomendaciones, que faciliten tanto la enseñanza como el aprendizaje del estudio de resistencia de materiales.

1. NOCIONES FUNDAMENTALES

1.1 Introducción a la mecánica de materiales y estática de cuerpos sólidos

El origen de la mecánica de materiales data del siglo XVII, cuando Galileo llevó a cabo experimentos para estudiar los efectos de las cargas en vigas hechas de diversos materiales, con el propósito de tener un entendimiento apropiado de tales efectos, se establecieron descripciones experimentales precisas de las propiedades mecánicas de los materiales. Los métodos utilizados para esto fueron mejorados en el siglo XVIII en Francia, por personalidades como Saint-Venant, Poisson, Lamé y Navier. Debido a que sus investigaciones se basaron en aplicaciones de la mecánica a los cuerpos materiales, llamaron a este estudio “Resistencia de Materiales”, sin embargo, en algunos casos se puede utilizar invariablemente “Mecánica de cuerpos deformables” o simplemente “Mecánica de materiales”.

En ciertos textos, se especifica como diferencia conceptual que la mecánica estudia los cuerpos y las fuerzas aplicadas en cuerpos indeformables, y la resistencia de materiales considera los cuerpos con sus deformaciones, las cuales tienen gran interés en el análisis y diseño estructural, para lo cual se establecen las relaciones entre las cargas externas y los efectos en el interior de los sólidos. En el presente trabajo, se considera la aplicación de cualquiera de los términos como correcta.

La resistencia de materiales es entonces una materia que trata del comportamiento de los cuerpos sólidos, estudia la relación entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo deformable y la intensidad de las fuerzas internas que actúan dentro de él; así se estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a varios tipos de carga, considerando sus deformaciones.

La importancia del estudio de esta materia radica en que proporciona los elementos fundamentales, para determinar la capacidad de carga de diversos tipos de componentes en estructuras utilizadas en ingeniería. Se debe mencionar que una estructura es aquel elemento diseñado para soportar o transmitir cualquier tipo de carga, para el cual se diseñe, por lo que abarca piezas metálicas, pernos, vigas, etc., y cualquier elemento que tenga relación con resistir cargas.

En el diseño de cualquier estructura, es necesario usar los principios de la estática, para determinar las fuerzas que actúan sobre y dentro de los diversos miembros. El tamaño de los miembros, sus deflexiones y su estabilidad depende no sólo de cargas internas y externas, sino también del tipo de material del que están hechos, por lo tanto, una definición precisa y una comprensión básica del comportamiento del material será de vital importancia para desarrollar los principios necesarios que se utilizan.

La teoría de la resistencia de materiales tiene como objeto establecer los criterios que permitan determinar el material más conveniente, la forma y las dimensiones más adecuadas, que hay que dar a los elementos de una construcción o una máquina para que puedan resistir o transmitir la acción de fuerzas exteriores y cumplir adecuadamente con la función para la que fue diseñada.

En resumen, al estudiar Mecánica de Materiales, se consideran varios aspectos: forma y dimensiones del material, fuerzas externas aplicadas, fuerzas internas, rigidez de la estructura, que no es otra cosa que una medida de la deformación del material, y una técnica muy importante, que también se aplica; es la del método de las secciones, que consiste en hacer una sección imaginaria o corte, a través de la región donde van a determinarse las cargas internas.

1.2 Análisis dimensional

En todo el mundo, se ha establecido por consenso general el sistema de medidas denominado Sistema Internacional de Unidades, que se simboliza como SI, aunque no es utilizado en todos los países, como en Estados Unidos y en países de habla inglesa.

En la actualidad, se está teniendo un período de transición al sistema internacional (SI), sin embargo, muchos componentes comerciales en ingeniería aún están en el sistema inglés.

En Guatemala, por ser un país de América Latina, se debe utilizar el SI en su totalidad, aunque se tienen influencias que hacen considerar tanto el sistema inglés, el SI y el sistema gravitacional, también llamado Sistema Técnico (ST); por eso se debe manejar de una manera correcta todos y cada uno de ellos.

Para estudiar los distintos sistemas en forma correcta, se deben tomar en cuenta algunas consideraciones, las cuales se especifican a continuación:

- Sistema Internacional SI

En el sistema internacional, las unidades fundamentales son: en longitud, el metro (m), el área en metros cuadrados (m^2), en masa el kilogramo (Kg), el tiempo en segundos (s), la aceleración en metros sobre segundos al cuadrado (m/s^2), y la fuerza, que es el producto de masa por gravedad en Newtons (N). La aceleración de la gravedad es de $9.81 m/s^2$. También se utilizan unidades de esfuerzo, que es fuerza por unidad de área, en este caso, Newton sobre metro cuadrado (N/m^2), pero recibe el nombre especial de Pascal (Pa).

- Sistema Técnico ST

El sistema técnico es también llamado sistema gravitacional, pues se hace la corrección al sistema internacional, al tomar en cuenta la aceleración de la gravedad que es de $9.81 m/seg^2$. La masa estará dada en Kilogramos (Kg), la longitud en metros (m), el área en metros cuadrados (m^2), el tiempo en segundos (s), la aceleración, al igual que en el SI en metros sobre segundos al cuadrado (m/s^2), y la fuerza en Kilogramos fuerza (Kgf). Se debe tener cuidado al utilizar este sistema, pues es muy importante la relación existente entre kilogramos masa y kilogramos fuerza, ya que son iguales en magnitud, pero no en concepto, pues una representa unidades de masa y la otra de fuerza, como su nombre lo indica, aunque a veces se utiliza, como en la presente tesis, kilogramos (Kg) para nombrar tanto masa como fuerza, sin distinción alguna.

Para comprender de mejor manera lo anterior, se debe considerar el ejemplo siguiente:

Se necesita encontrar el peso (fuerza) en Newtons y en Kilogramos fuerza de un cuerpo que tiene una masa de 500 Kg. El peso en Kilogramos fuerza es el mismo valor que su masa, es decir, 500 Kg, pues tienen el mismo valor, y el peso en Newtons se encuentra multiplicando la masa por la aceleración de la gravedad en este sistema, que es de 9.81 m/s^2 . Lo anterior es posible hacerlo sabiendo que un Kilogramo fuerza equivale a 9.81 Newtons. Lo mismo sucede en el sistema inglés entre las unidades de libras masa y libras fuerza, pues tienen el mismo valor numérico, pero representan conceptos diferentes y se utiliza invariablemente, para ambas la abreviatura de libras (lb).

La dimensional de esfuerzo que se utiliza para este sistema es el Kilogramo fuerza sobre metro cuadrado (Kgf/m^2), aunque en ingeniería es más frecuente utilizar Kilogramos fuerza sobre centímetro cuadrado (Kgf/cm^2), pues representa cantidades mas significativas que las anteriores.

- Sistema inglés

El sistema inglés y el gravitacional inglés tienen las siguientes unidades fundamentales: longitud en pies (P), que en algunos textos se presenta como el vocablo inglés *feet* (ft), aunque también se utiliza la pulgada (Plg) como unidad de longitud, que puede expresarse además por el vocablo *Inch* (In); área en pies cuadrados o en pulgadas cuadradas, masa en slugs o en libras masa (lb), fuerza en libras fuerza o en poundals y el tiempo en segundos (s). La aceleración de la gravedad para este sistema es de 32.2 pies/s^2 y la conversión entre libras fuerza y Poundals, establece que una libra fuerza es 32.2 Poundals.

En Mecánica de Materiales, se utiliza muy frecuentemente las unidades de esfuerzo o presión, que es fuerza por unidad de área, estableciendo unidades adaptadas del habla inglesa y se emplea para las dimensionales de área, tanto pies como pulgadas cuadradas, sabiendo que un pie lineal equivale a 12 pulgadas lineales. Por lo tanto, las dimensionales de esfuerzo son libras fuerza sobre pie cuadrado (lbf/ft^2), que recibe el nombre especial de psf, de su traducción del inglés *pound square feet*, y libras fuerza sobre pulgada cuadrada (lbf/in^2), que serán psi, de su traducción *pound square inches*. Además, se utiliza la dimensional de fuerza kip, del vocablo inglés *Kilopound*, que significa Kilolibra, es decir, mil libras fuerza y, por lo tanto, las dimensionales de esfuerzo ksf (*Kilopound square feet*), que es Kilolibra sobre pie cuadrado (Kip/ft^2) y ksi (*Kilopound square inches*), Kilolibra sobre pulgada cuadrada (Kip/in^2).

Para comprender de una manera rápida y sencilla lo anterior, se propone la tabla siguiente:

Tabla I. **Magnitudes físicas más utilizadas en Resistencia de Materiales**

TABLA DE MAGNITUDES FISICAS MAS UTILIZADAS EN RESISTENCIA DE MATERIALES						
<u>SISTEMA INTERNACIONAL SI</u>				<u>SISTEMA INGLÉS</u>		
<u>Magnitud Física</u>	Unidad	Símbolo	También se utiliza:	Unidad	Símbolo	También se utiliza:
Longitud	metro	m	Centímetro (cm)	pies	P o ft	Pulgada (plg o in)
Área	metro cuadrado	m ²		Pie cuadrado	P ² o ft ²	Pulgada cuadrada (plg ² o in ²)
Masa	Kilogramo	Kg		libras	lb	Slug
Fuerza	Newton	N	Kilogramo fuerza (Kgf o Kg)	Poundal		Libras fuerza (lbf o lb) o Kip (1000 lbf)
Esfuerzo- Presión	Pascal	Pa (N/m ²)	Kilogramo sobre centímetro cuadrado (Kg/cm ²)	Libras sobre pie cuadrado	psf (lb/ft ²)	Libras sobre pulgada cuadrada psi (lb/in ²)
Momento	Newton metro	N-m	Kilogramo metro (Kg-m)	Libra pie	lb-P o lb-ft	Libra pulgada (lb-plg o lb-in)

1.3 Construcción de diagramas de cuerpo libre

En el curso de Mecánica Analítica, se dedica la mayor parte del tiempo a determinar las reacciones externas ejercidas sobre una estructura o un cuerpo con determinada carga, con el objeto de mantener el cuerpo en equilibrio estático. Así pues, las reacciones externas son aquellas fuerzas que un cuerpo hace sobre otro generalmente, a través de algún dispositivo de conexión o restricción, como los apoyos, empotramientos, rodillos, etc. Dichos apoyos producen reacciones externas que juegan un papel fundamental para encontrar las fuerzas internas en los elementos de una máquina o estructura utilizada. Para poder encontrar esas reacciones, es necesario valerse de un medio indispensable en la teoría de resistencia de materiales; el diagrama de cuerpo libre, en donde se dibuja un esquema de la pieza o estructura que se estudia con todas y cada una de las fuerzas aplicadas sobre ella, para que, valiéndose de las ecuaciones de la estática, se pueda encontrar de una manera eficaz las reacciones o fuerzas externas aplicadas sobre el cuerpo, y que son vitales para saber las fuerzas internas sobre él.

Se debe recordar que el principal objetivo de la Resistencia o Mecánica de Materiales es saber si la estructura es capaz de soportar los máximos efectos internos producidos por cualquier combinación de cargas o fuerzas externas. Las ecuaciones de equilibrio para encontrar las reacciones son las siguientes:

$$\Sigma \text{Fuerzas Verticales} = 0 \quad \Sigma \text{Fuerzas horizontales} = 0 \quad \Sigma \text{Momentos} = 0$$

Esto es muy importante, pues se sabe que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier porción del cuerpo también debe estarlo.

2. ESFUERZO SIMPLE

2.1 Introducción

Como se mencionó anteriormente, los conceptos fundamentales en Resistencia de Materiales son el de esfuerzo y deformación, pues son básicos para entender y visualizar el comportamiento de determinado cuerpo bajo distintas condiciones externas de carga. A continuación, se desarrolla el concepto y particularidades de esfuerzo, que es un elemento que tiene gran importancia en el estudio que se realiza y que representa una medida de la fuerza interna provocada por una carga externa.

2.2 Análisis de fuerzas internas

Un elemento que ayuda a visualizar las fuerzas internas, que se deben a fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo es el método de las secciones, que consiste en hacer un corte imaginario de cierta parte del cuerpo que se analiza a través de un plano. Cabe destacar que se les llama fuerzas internas, debido a que son las reacciones internas que una parte del cuerpo le debe hacer a otra parte del mismo para mantener todo en equilibrio estático.

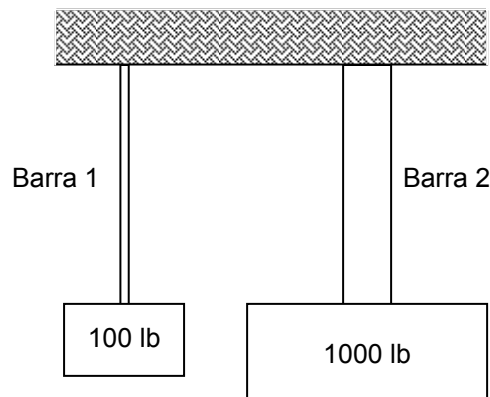
2.3 Tipos de esfuerzos y sus ecuaciones características

El esfuerzo es un concepto básico para designar la intensidad de una fuerza interna producida por cargas externas, que sirve para seleccionar adecuadamente el material y las dimensiones más apropiadas para el diseño de una pieza estructural. Se puede definir como la relación que existe entre la fuerza aplicada sobre un elemento y el área por considerar del mismo. Si se hace trabajar el esfuerzo sobre un área perpendicular a la fuerza aplicada, entonces se obtendrá un esfuerzo normal o axial representado por la letra griega Sigma (σ); y esfuerzo de corte o tangencial representado por la letra griega Tau (τ), cuando su aplicación es en un área paralela a la fuerza en acción. La ecuación característica del esfuerzo será entonces:

$$\text{Esfuerzo} = \text{Fuerza} / \text{Área} (\sigma \text{ ó } \tau = F/A)$$

Un ejemplo muy común, utilizado en la introducción al concepto de esfuerzo, consiste en imaginar el sistema ilustrado en la figura siguiente:

Figura 1. Comparación de esfuerzos y su importancia



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 4

En la figura anterior, sólo se sabe que las cargas mostradas son las máximas que pueden resistir las barras. Entonces, alguien que aún no ha estudiado Resistencia de Materiales podría decir que la barra 2, que es de igual longitud pero de diferente sección y diferente material que la barra 1, es la más resistente de las dos, sin embargo, debido a que no se conoce el material del que están fabricadas las barras, no se puede afirmar cuál resiste más. Por supuesto que la barra 2 está soportando una carga 10 veces mayor que la barra 1, pero no se pueden comparar las resistencias sin establecer una base común de referencia; en este caso, es necesario conocer la sección transversal de las barras. Para el efecto, se supone que la barra 1 tiene una sección transversal de 1 pulgada cuadrada y la barra 2 tiene una sección de 20 pulgadas cuadradas. Si se les quiere comparar, se calcula el esfuerzo que hay en cada una de ellas:

$$\sigma = P/A$$

$$\text{Barra 1: } \sigma = 100/1 = 100 \text{ lbf/plg}^2 = 100 \text{ psi}$$

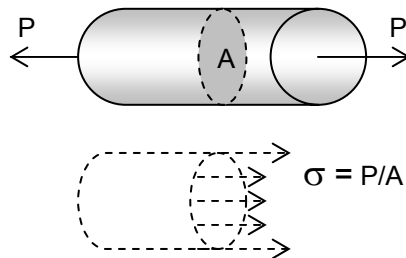
$$\text{Barra 2: } \sigma = 1000/20 = 50 \text{ lbf/plg}^2 = 50 \text{ psi}$$

Si se considera al esfuerzo como lo que resisten las fibras internas de los materiales a diferentes cargas externas, y que en este caso las cargas externas son máximas, se puede establecer que las fibras internas del material de la barra 1 resisten el doble que de la barra 2; por lo tanto, es mucho más resistente el material del que está fabricada la barra 1. Un concepto importante es que el esfuerzo tiene una relación inversamente proporcional a la sección transversal de las barras, es decir, a menor área, mayor será el esfuerzo interno en un material y viceversa, por ejemplo si ya se sabe cuánto esfuerzo es el límite de determinado material, se puede decidir cuánto resistirá cada una de las fibras internas del mismo, aumentando o disminuyendo su área transversal.

2.3.1 Esfuerzo normal (tensión y compresión)

Se define como esfuerzo la relación entre una fuerza sobre un área aplicada, si para el efecto se considera una fuerza normal o perpendicular al área, este se convierte en esfuerzo normal. Para ilustrarlo de una mejor manera se propone la figura siguiente que corresponde a un sólido con forma cilíndrica:

Figura 2. **Uniformidad del esfuerzo normal**



Adaptado de Gere y Timoshenko. Mecánica de Materiales. Pág. 4

Si se analiza por el método de las secciones, cualquier área perpendicular a la fuerza P , se muestra un esfuerzo interno normal en la barra, que es uniforme en la sección transversal (es decir, perpendicular al largo de la pieza) y que tiene un valor equivalente a $\sigma = P/A$. Por lo tanto, se debe tomar en cuenta también el sentido de la fuerza aplicada P , esto debido a que si la fuerza hace que el cilindro se estire o tense, como en el caso de la figura, se le llama esfuerzo de tensión (o tracción) y si se invierte el sentido de la fuerza haciendo que el cilindro se comprima, se le llama esfuerzo de compresión.

Cuando se requiere una convención de signos para los esfuerzos normales, es común tomar los esfuerzos de tensión como positivos y los de compresión negativos; dichos esfuerzos tienen las dimensionales de esfuerzo o presión, según el sistema en el que se trabaje, ya sea internacional (Pascuales), o el sistema inglés (Psi o Psf), según sea el caso.

Es conveniente mencionar que la ecuación de esfuerzo normal se presenta en una forma tan simple, al tomar en cuenta diversas suposiciones que se cumplen respecto al material y la forma de aplicar la fuerza, pues el análisis exigirá que el cuerpo experimente una deformación y estado de esfuerzos uniforme. Las suposiciones que se deben tomar en cuenta son:

- La carga P debe ser aplicada a lo largo del eje centroidal de la sección transversal.
- El material debe ser homogéneo, es decir, que debe tener las mismas propiedades tanto físicas como mecánicas en todo su volumen.
- El material debe ser isótropo, es decir, que debe tener las mismas propiedades en todas las direcciones.

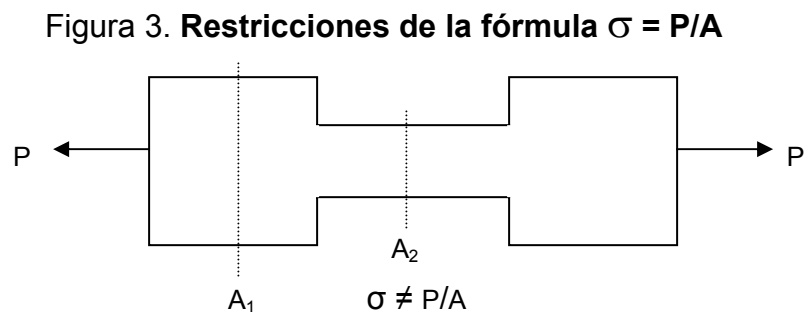
En ingeniería, se pueden considerar muchos materiales como homogéneos e isótropos, como es el caso del acero. Cuando se emplean materiales con estas dos características, se simplifica mucho el proceso de análisis, pero se debe tener mucho cuidado al emplear materiales no homogéneos y/o anisótropos, como en el caso de la madera, que debido a la existencia de nudos, contenidos de humedad y otras imperfecciones, no puede simplificarse su análisis.

De acuerdo con lo anterior, el esfuerzo normal de la ecuación $\sigma = P/A$ es en realidad un esfuerzo promedio, porque aunque sea equivalente considerar esa simplificación, no puede evitarse que exista algún factor que impida al esfuerzo ser totalmente uniforme en todos los puntos de análisis. La fuerza P considerada debe ser la fuerza interna en el elemento, y se debe tener cuidado en no confundirla con fuerzas externas, por lo que se emplean diagramas de cuerpo libre y condiciones de equilibrio, para poder determinar dicha fuerza interna en la sección o corte imaginario, que se está analizando por medio del método de las secciones.

2.3.1.1 Restricciones de la fórmula

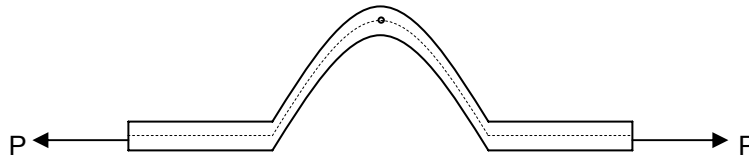
Para poder utilizar la fórmula de esfuerzo ($\sigma = P/A$), la cual representa un esfuerzo promedio en el elemento donde se aplica la carga, se deben considerar ciertas limitaciones que condicionan su uso, las cuales son:

- Cuando existe un cambio brusco de la sección transversal en un elemento, en donde la diferencia de las áreas y de las cargas sobre dichas áreas hacen que la fórmula no sea válida.



- Cuando la carga no es axial, es decir, que no pasa por el eje geométrico del elemento.

Figura 4. Restricciones de la fórmula $\sigma = P/A$

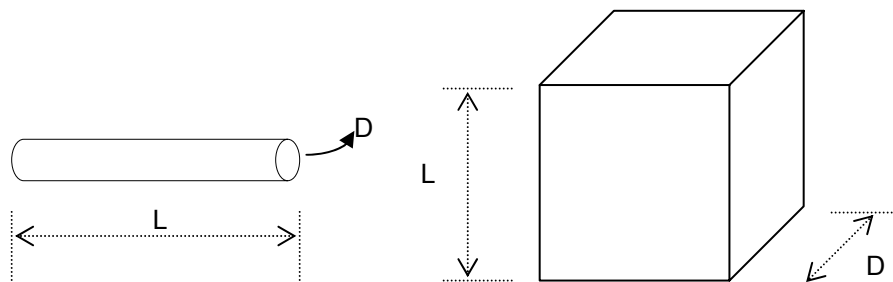


- Cuando existe inestabilidad elástica, en donde juega un papel muy importante la relación de las dimensiones transversales de un elemento, pues si dicha relación no se encuentra dentro de ciertos límites, se produce pandeo en la estructura y la fórmula de esfuerzo ya no es válida para esta condición. Dicha relación es para la figura siguiente:

$$L/D \leq 10, \sigma = P/A \qquad L/D > 10, \sigma \neq P/A$$

D = menor dimensión transversal

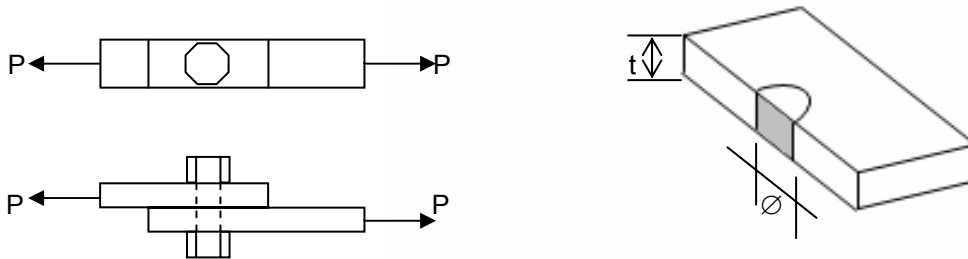
Figura 5. Restricciones de la fórmula $\sigma = P/A$



2.3.2 Esfuerzo de aplastamiento

Este tipo de esfuerzo ocurre cuando un cuerpo es soportado por otro, y es el esfuerzo de compresión desarrollado entre dos cuerpos en su superficie de contacto, que es característico en esta variante de esfuerzo normal. Un caso muy común en el que se presenta esfuerzo de aplastamiento es en la interacción entre una columna, su zapata y el terreno que los soporta, pues entre cada uno de estos elementos existe una superficie de contacto que genera el esfuerzo y cuya magnitud puede determinarse como $\sigma = P/A$. Esto es, si las cargas se aplican a través del centroide de la sección transversal, pues para casos de cargas excéntricas, el esfuerzo ya no es uniforme y no se puede aplicar esta fórmula. Los esfuerzos de aplastamiento también ocurren sobre superficies curvas, como entre el perno y la placa mostrados:

Figura 6. Esfuerzo de aplastamiento



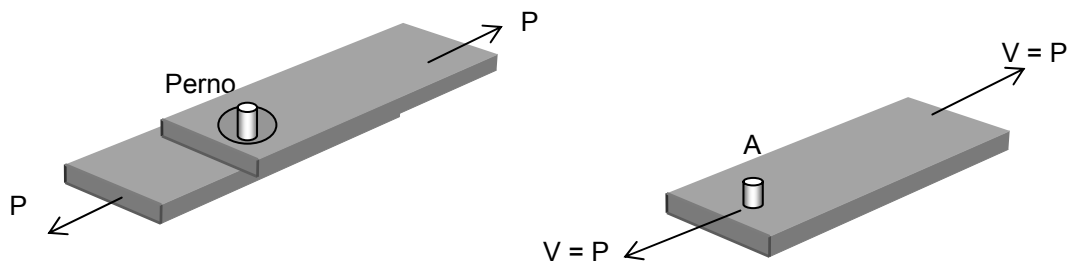
La distribución real del esfuerzo por el contacto de superficies curvas es muy compleja, por lo que el esfuerzo de aplastamiento se toma como la carga transmitida por el perno, dividida entre el área proyectada del agujero, es decir, un rectángulo que tiene por base el diámetro del perno y por altura el espesor de la placa, como se muestra mediante el área sombreada en la figura anterior.

$$\sigma = P/A = P/\delta t$$

2.3.3 Esfuerzo de corte

El esfuerzo de corte o esfuerzo cortante considera un área paralela o tangencial a la dirección de la fuerza aplicada, y aparece siempre que las fuerzas aplicadas obliguen a una sección del material que va a desplazarse o deslizarse sobre la sección adyacente; es por eso que sirve de mucho visualizar que la pieza esta fallando, para poder encontrar la o las áreas, pues en ocasiones y a diferencia del esfuerzo normal aparece no sólo una, sino “n” áreas por considerar en la ecuación, como por ejemplo, en el esfuerzo cortante doble que se explica más adelante. En realidad, la distribución de esfuerzo cortante sobre un área no es uniforme en ningún caso, y el resultado de la ecuación $\tau = V/A$ (en donde se utiliza V para la fuerza cortante, en vez de P que representa fuerza axial) es solamente un promedio de esfuerzo cortante. Se puede ilustrar el esfuerzo cortante simple, que tiene sólo un área por considerar, con la figura siguiente de dos placas unidas por un perno en donde la sección de falla es el área transversal de dicho perno.

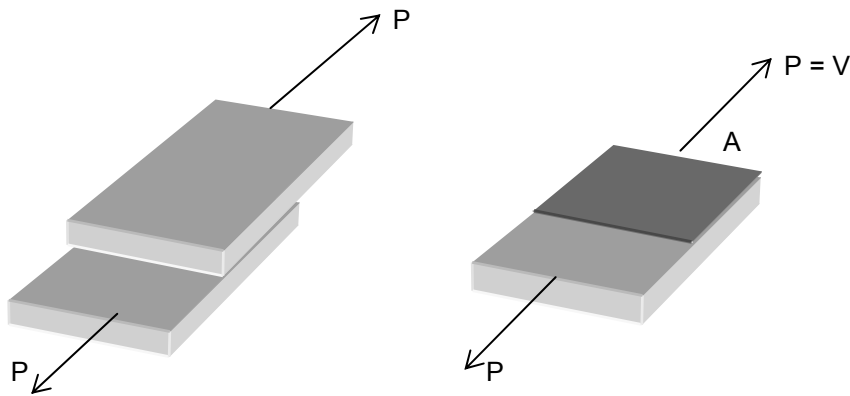
Figura 7. **Esfuerzo cortante simple en perno**



Adaptado de Hibbeler. Mecánica de Materiales. Pág. 36

Además se puede ejemplificar también el esfuerzo cortante simple con la figura 8, la cual representa dos placas unidas con pegamento, con diferente área de falla que la figura 7. Esto sirve para explicar la importancia de visualizar la posible sección que debe desplazarse adyacente a otra, que es el área que se va a considerar en la fórmula $\tau = V/A$. Aunque en este caso se considera un esfuerzo cortante, proveniente de una carga aplicada directamente, podría generarse también de forma indirecta por la acción de flexión o torsión, como se verá más adelante.

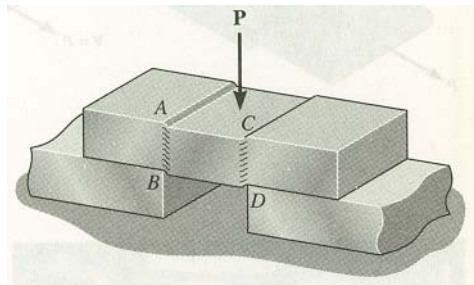
Figura 8. **Esfuerzo cortante simple**



Adaptado de Hibbeler. Mecánica de Materiales. Pág. 36

Ahora se estudia la figura 9, en donde los soportes se consideran rígidos (sin deformación) y la carga P es lo suficientemente grande para que el material se deforme y falle como se indica.

Figura 9. **Esfuerzo cortante doble**



Fuente: Hibbeler. Mecánica de materiales. Pág. 35

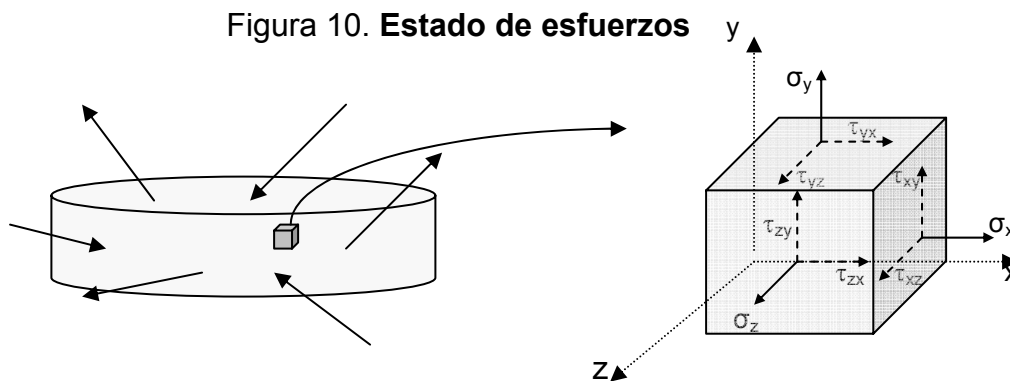
Al visualizar la falla del elemento en la anterior, es evidente que el área de falla es paralela a la fuerza aplicada, por lo que es un esfuerzo cortante, pero en la ecuación característica del esfuerzo se hace la modificación en cuanto al número de áreas consideradas, que en este caso son dos, por lo que la ecuación de esfuerzo tangencial ($\sigma = P/A$) se convierte en una de esfuerzo cortante ($\tau = V/2A$), donde A es el área transversal de la pieza que falló y se toma dos veces por el número de áreas, que se deslizan sobre otra adyacente a ella. A este tipo de esfuerzo cortante se le llama cortante doble.

2.4 Estado de esfuerzos

El esfuerzo en un punto de un material ya se definió como fuerza por unidad de área. Sin embargo, esta definición es algo ambigua, debido a que depende de qué área se considere en dicho punto. Para facilitar el análisis del estado de esfuerzos, que es la combinación de esfuerzos en un punto cualquiera, se debe considerar primero que los esfuerzos pueden ser:

- Esfuerzos uniaxiales
- Esfuerzos biaxiales
- Esfuerzos triaxiales

Cuando para el análisis se considera un punto situado en cualquier porción de un cuerpo sometido a diversas fuerzas, como se muestra en la figura 10, se puede separar un elemento de volumen cúbico, que representa el estado general de esfuerzo que actúa en el punto considerado del cuerpo, así:



Adaptado de Byars y Snyder. Págs. 14 y 15

En este caso, se presenta un estado de esfuerzos triaxial acompañado por esfuerzos de corte en cada una de las caras del cubo.

La notación de los subíndices para cada esfuerzo representa, en el primero de ellos, la cara del cubo donde se aplica, y en el segundo subíndice, la dirección paralela al eje ya establecido, por ejemplo:

σ_x = Esfuerzo normal en la cara “x”

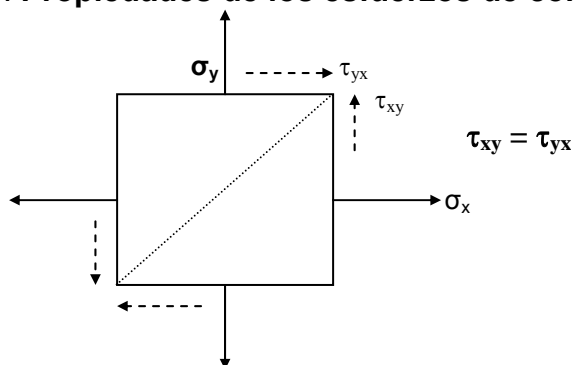
τ_{xy} = Esfuerzo de corte en la cara “x” y paralelo al eje “y”

Los esfuerzos de corte que se dibujan en el estado de esfuerzos (figura 10) son únicamente los esfuerzos positivos, ya que en las caras ocultas del cubo se presentan también dichos esfuerzos, cuya notación se escribe regularmente como esfuerzos de corte “primos”, como por ejemplo, el esfuerzo de corte ubicado en la cara “y” negativa, con dirección “x” negativa es τ'_{yx} (esfuerzo de corte primo “yx”).

2.4.1 Propiedades de los esfuerzos de corte

Entre las propiedades importantes de los esfuerzos de corte en los distintos planos presentados, es que todos y cada uno de ellos tienen la misma magnitud, es decir, son iguales. Además, se puede establecer que concurren en una diagonal, tal como se muestra en la figura siguiente para un estado de esfuerzos biaxial:

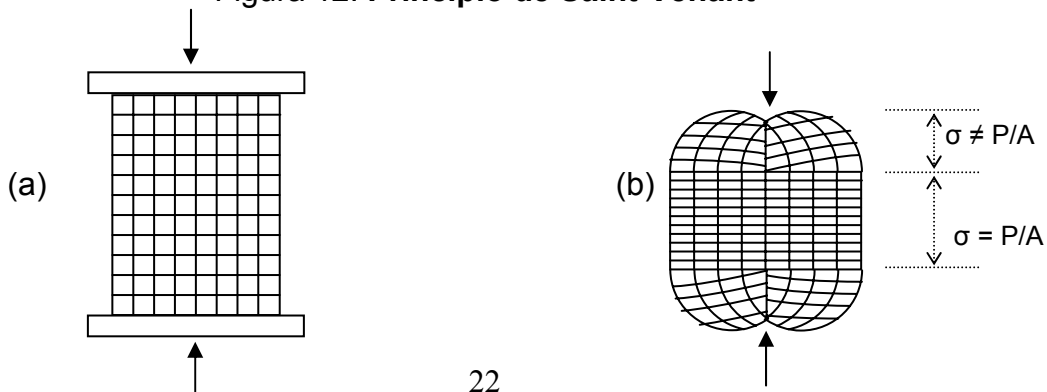
Figura 11. Propiedades de los esfuerzos de corte



2.5 Concentración de esfuerzos

La fórmula básica para calcular cualquier esfuerzo se basa principalmente en la hipótesis de que la distribución de las fuerzas es uniforme en la sección transversal de una estructura. Sin embargo, en las barras o piezas donde se aplican las fuerzas que poseen agujeros y otros cambios físicos en su geometría, así como también en el caso de la existencia de una carga concentrada que se aplica sobre un elemento, sin prever las condiciones óptimas de transmisión de dichas fuerzas, como por ejemplo, el uso de planchas rigidizantes u otro tipo de anclajes, se presentan altos esfuerzos en regiones muy pequeñas de la barra, que se conocen como concentraciones de esfuerzo. Para ilustrar dichas concentraciones, se utiliza el enunciado conocido como principio de Saint-Venant, el cual se aplica a cuerpos elástico lineales de todo tipo. Para entenderlo, se debe imaginar una barra rectangular como la mostrada en la figura 12, la cual tiene dibujadas líneas reticuladas para exagerar el efecto de la fuerza puntual aplicada. El esfuerzo en dicha barra sería constante, si se colocaran en los extremos de la barra planchas rigidizantes, como las dibujadas en el inciso (a) de la figura, y el único efecto que se tendría es el de la disminución del largo y el aumento del ancho en la sección transversal, según sea el caso de tensión o compresión. Por otro lado, si no se colocan dichas planchas la fuerza puntual tendrá un efecto como el dibujado en el inciso (b) de la figura para el caso de compresión, es decir, que no presentaría esfuerzos constantes.

Figura 12. Principio de Saint-Venant

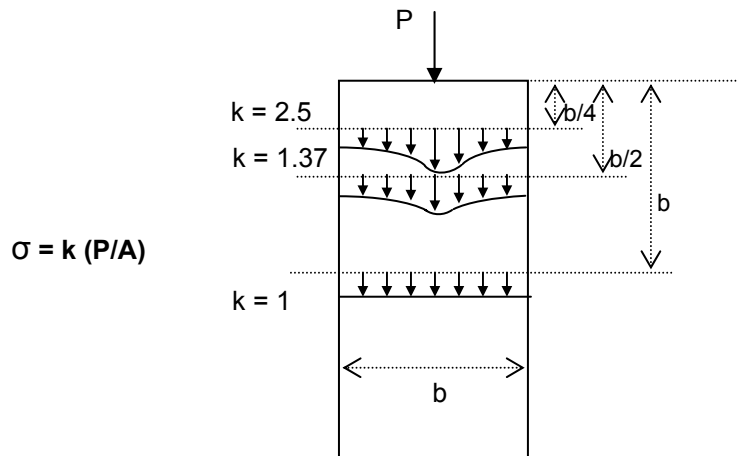


Para la condición de la figura 12, inciso (b), en donde se presenta una concentración de esfuerzos en el punto de aplicación de la carga, cabe destacar que dicha concentración obedece a una disipación del esfuerzo a lo largo de la barra, es decir, que éste va disminuyendo en su magnitud, hasta llegar a ser constante a una distancia igual al ancho b del elemento, a partir de donde el esfuerzo ya se puede encontrar a través de la fórmula $\sigma = P/A$. En vista de que los efectos de las concentraciones de esfuerzos son localizados, se puede utilizar las fórmulas estándares de los esfuerzos en secciones transversales a una distancia suficientemente alejada de la fuente de concentración. Además, las fórmulas aplicables a miembros enteros dan resultados satisfactorios, aun cuando las concentraciones de esfuerzos están presentes; esto reside en que las concentraciones de esfuerzos localizados tienen poco efecto sobre el comportamiento de conjunto de un miembro.

Sin embargo, en ocasiones, es importante encontrar la magnitud del esfuerzo a diversas distancias desde la fuente de aplicación de la concentración, como es el caso de una carga puntual concentrada que actúa sobre un área pequeña de un elemento. Para el efecto, se considera un factor de magnificación de esfuerzos, que se denota por k , el cual tiene un valor obviamente mayor en los extremos y que irá disminuyendo en su magnitud, conforme los esfuerzos se disipan, que es menor en regiones cada vez más alejadas del punto de aplicación de la fuerza P , hasta llegar a ser constante a una distancia igual al ancho b del elemento. El valor del esfuerzo se encuentra aplicando este factor de magnificación al esfuerzo promedio ya encontrado, es decir, $\sigma = k (P/A)$.

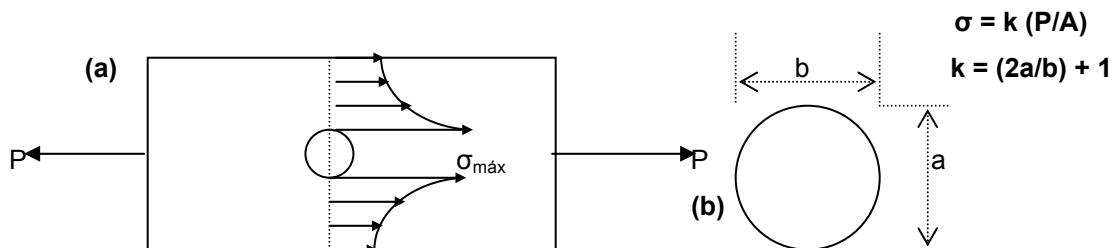
La distribución del esfuerzo concentrado debido a una carga puntual va disminuyendo, hasta llegar a ser constante, como se ilustra en la figura siguiente:

Figura 13. **Concentración de esfuerzos por carga puntual**



Por otro lado, se puede ilustrar, además, el factor de magnificación para esfuerzos concentrados causados por discontinuidades en la forma de una barra, como es el caso de agujeros, ranuras u otros defectos que se presenten. Dicho factor k está íntimamente relacionado a la forma de dicho agujero, y el valor del esfuerzo máximo se presenta en los bordes del mismo, y disminuye hasta llegar a ser constante en los extremos de la barra, como se ilustra en la figura 14 (a). Para encontrar el factor se utiliza la fórmula $k = (2a/b) + 1$, son a y b las dimensiones del agujero, como en la figura 14, inciso (b):

Figura 14. **Concentración de esfuerzos por discontinuidad**



2.6 Esfuerzos y cargas permisibles

Como se ha mencionado, la resistencia de materiales es fundamental para diseñar piezas o estructuras que van a soportar o a transmitir cargas. El diseño de dichas estructuras es lograr encontrar las características y dimensiones óptimas que satisfagan dos criterios fundamentales: seguridad y economía. Antes de continuar, se debe tener muy claro que, aunque comúnmente se piense que son sinónimos, el término falla y fractura son distintos. En el estudio de resistencia de materiales, se dice que ocurre una falla cuando el elemento ya no puede realizar satisfactoriamente la función para la que fue diseñado, ya sea porque se deformó demasiado o por diversas causas, incluso hasta llegar a su fractura, que es el rompimiento del material.

Para garantizar el criterio de seguridad, es necesario escoger un esfuerzo límite que sea menor al esfuerzo que pueda soportar plenamente el elemento; dicho esfuerzo es llamado esfuerzo permisible, admisible o de trabajo, que en realidad es el esfuerzo con el cual se diseña la estructura. Esto se hace con el objetivo de dejar previsto cierto margen de error, para que el elemento no falle cuando este trabajando o por la incertidumbre en el cálculo de las características del elemento estructural, como podría ser que la carga, a la cual se diseña el elemento se incremente por razones imprevistas, como las que pudieran aparecer en el ensamblaje de la pieza, vibraciones o cargas externas accidentales, etc., que aumentarán la carga en el elemento y, por lo tanto, se disminuiría su capacidad de soporte.

Otra forma para trabajar con el criterio de seguridad es utilizar el criterio de carga permisible, que está íntimamente relacionado con el concepto de esfuerzo permisible, pues su definición proviene de la misma ecuación de esfuerzo, así:

$$\sigma_{\text{permisible}} = \text{Carga}_{\text{permisible}} / \text{Área}$$

por lo que despeja:

$$\text{Carga}_{\text{permisible}} = (\sigma_{\text{permisible}})(\text{Área})$$

Cualquiera de los dos conceptos es adecuado para su uso, aunque se utiliza más el concepto de esfuerzo permisible, pues es común e independiente del área o cantidad de material que se necesite.

2.6.1 Factor de seguridad

El factor de seguridad se aplica para cumplir con el criterio de seguridad al momento de diseñar la estructura, y tiene por objeto disminuir en cierta medida el esfuerzo último o esfuerzo total al que falla el elemento para trabajar con un esfuerzo menor, es decir, con el esfuerzo permisible o de trabajo.

Este factor se determina por medio de ensayos experimentales del material y se selecciona con base en la experiencia del diseñador, tomando muy en cuenta probabilidades de cargas accidentales, imperfecciones del material, etc., y no es otra cosa que la razón que existe entre la resistencia verdadera del material o esfuerzo último, y la resistencia requerida o esfuerzo permisible. Regularmente el factor de seguridad se especifica en códigos, según el material que se está trabajando y la condición de cargas y, por lo tanto, de esfuerzos a la que se está diseñando el elemento.

$$\text{Factor de Seguridad (F.S.)} = \text{Esfuerzo Último} / \text{Esfuerzo Permissible}$$

Comúnmente se sabe el esfuerzo último o resistencia de falla de un material, por lo que se despeja de la ecuación anterior el esfuerzo permisible:

$$\text{Esfuerzo Permissible} = \text{Esfuerzo Último} / F. S.$$

Se emplea un factor que es obviamente mayor que 1, debido a que el esfuerzo permisible es menor, y para encontrar el esfuerzo de diseño del elemento; por ejemplo, se tiene que en el diseño de edificios se utiliza un factor de seguridad respecto al acero en tensión de 1.67, por lo que un acero dulce con esfuerzo último de 36 ksi (Kilolibra/plg²) tiene un esfuerzo de trabajo de 21.6 ksi.

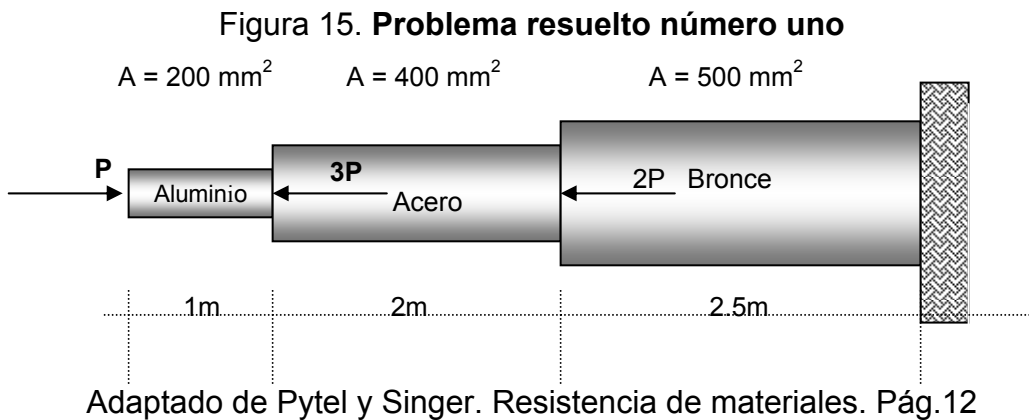
Es importante recordar que el esfuerzo y el área del elemento están inversamente relacionados, por lo que no se puede utilizar un factor de seguridad demasiado grande, pues disminuiría considerablemente el esfuerzo último, y el esfuerzo de trabajo sería muy pequeño, creando áreas de estructuras muy grandes y pesadas, por lo que se sobrediseña el elemento. Regularmente se considera un límite mayor para el factor de seguridad en 10.

2.7 Problemas resueltos del capítulo dos

A continuación, se presentan algunos problemas tipo en donde se aplica el concepto de esfuerzo, tanto normal como de corte. Se debe considerar muy importante el sistema de dimensionales en el que se está trabajando, ya que todas las propiedades físicas y mecánicas de los elementos deben coincidir en un mismo sistema.

2.7.1 Problema resuelto número uno

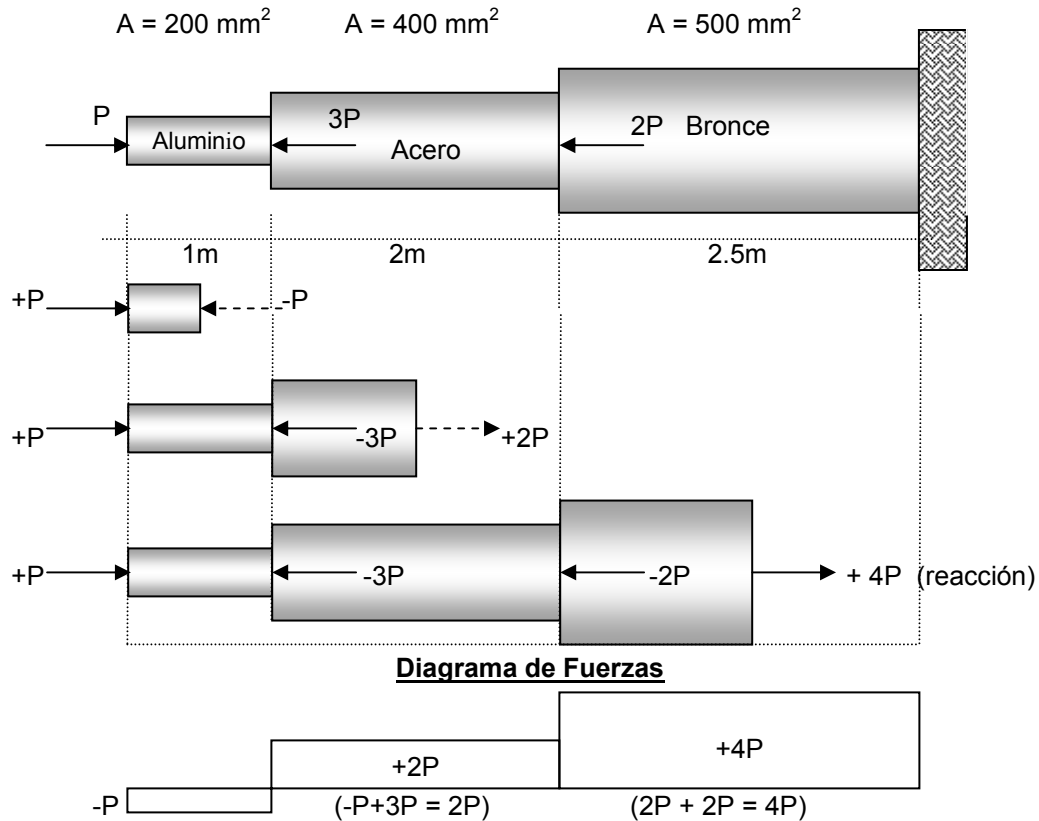
Un tubo de acero se encuentra rígidamente sujeto por un perno de aluminio y otro de bronce. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados en la figura. Calcule el máximo valor de P que no exceda un esfuerzo de 80 MPa en el aluminio, 150 Mpa en el acero, o de 100 Mpa en el bronce.



La información que se proporciona es de la geometría del tubo de acero y de los pernos, así como un esfuerzo límite para cada uno de los materiales. Los esfuerzos aplicados son axiales, por lo que se parte de la fórmula de esfuerzo axial ($\sigma = P/A$), para cada uno de los materiales, en donde P representa la fuerza interna real en cada material y A es el área perpendicular a dicha fuerza, la cual es dato del problema. Así entonces se debe encontrar la fuerza interna aplicada en cada elemento, y se hace a través de un diagrama de cuerpo libre de cada uno de ellos, realizando cortes imaginarios en cada material y encontrando las fuerzas redundantes necesarias para mantener las condiciones de equilibrio estático. Dicha fuerza corresponde a la fuerza interna en cada elemento. La técnica requiere iniciar con el análisis de la primera pieza a la izquierda (en el presente caso es el extremo libre) y para el efecto principia siempre con la fuerza situada a la izquierda de dicho material.

También se puede elaborar un diagrama de fuerzas, en donde la fuerza interna se encuentra con la sumatoria algebraica de las fuerzas externas aplicadas, que es el valor que muestra el diagrama, como se ve a continuación.

Figura 16. **Diagrama de fuerzas; problema resuelto número uno**



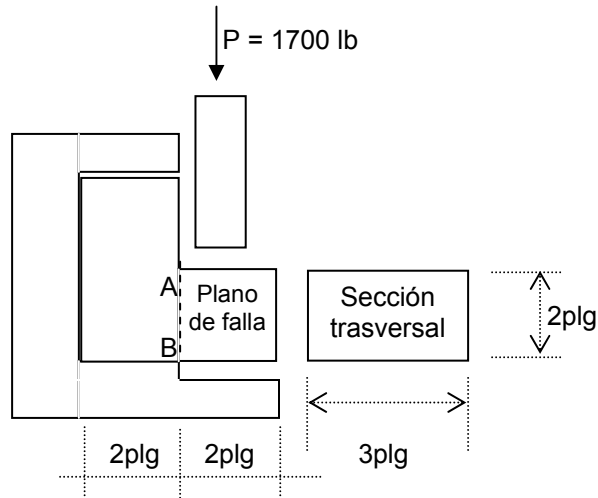
Se aplica la fórmula $P = \sigma A$, donde P es la fuerza interna y se despeja según sea la condición de esfuerzo último, tomando el valor máximo de P .

- Aluminio
 $P = (80 \text{ E6 Pa}) (200 \text{ E-6 m})$, $P = 16000 \text{ Newtons}$
- Acero
 $2P = (150 \text{ E6 Pa}) (400 \text{ E-6 m})$, **$P = 60000 \text{ Newtons (Valor máximo)}$**
- Bronce
 $4P = (100 \text{ E6 Pa}) (500 \text{ E-6 m})$, $P = 50000 \text{ Newtons}$

2.7.2 Problema resuelto número dos

Un bloque de madera se ensaya a cortante directo usando el marco de carga y la probeta de prueba, que se muestran en la figura 17. Si la carga aplicada es $P = 1700 \text{ lb}$ y la probeta tiene las dimensiones mostradas, ¿cuál es el esfuerzo cortante en la madera?

Figura 17. Problema resuelto número dos



Adaptado de Gere y Timoshenko. Mecánica de materiales. Pág. 53

La forma más sencilla de resolver este tipo de problemas es imaginar el lugar o el plano en el que falla el espécimen, en este caso, es en el plano de falla identificado como A-B, y cuya área de falla es paralela a la fuerza aplicada, por lo que el esfuerzo cortante es simple y se puede encontrar con la fórmula $\tau = V/A$, entonces se procede así:

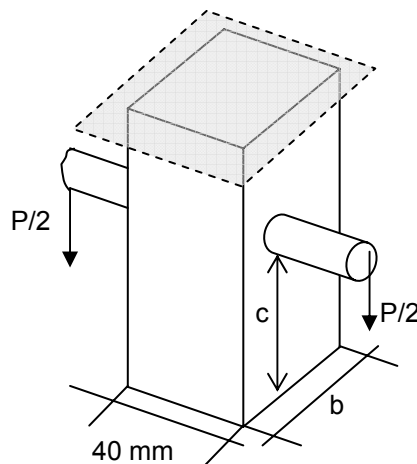
$$\tau = V/A = 1700 \text{ lb} / (2 \text{ plg})(3 \text{ plg}) = 283.33 \text{ lb/plg}^2 = 283.33 \text{ psi}$$

Por lo que el esfuerzo cortante en la madera tiene un valor de **283.33 psi**, para las condiciones que se muestran.

2.7.3 Problema resuelto número tres

Una carga P es soportada, como se muestra en la figura 18, por un pasador de acero insertado en un elemento corto de madera que cuelga del cielorraso. La resistencia última de la madera es 60 Mpa a tensión y 7.5 Mpa a cortante; la resistencia última del acero, a cortante, es 150 Mpa. Si el diámetro del pasador es $\varnothing = 15$ mm y la magnitud de la fuerza es $P = 16$ KN, halle: (a) El factor de seguridad del pasador, (b) el esfuerzo de aplastamiento de la madera, (c) los valores de las dimensiones b y c , si el factor de seguridad para la madera debe ser el mismo encontrado en (a) para el pasador.

Figura 18. Problema resuelto número tres



a) Recordando la definición de factor de seguridad ($F.S. = \sigma_{\text{último}} / \sigma_{\text{permisible}}$), se debe encontrar el esfuerzo de corte al que está trabajando el pasador; este es el $\sigma_{\text{permisible}}$ en la fórmula, que en este caso, será un esfuerzo cortante doble, el cual actúa en dos áreas de falla ($A = \pi \varnothing^2 / 4$).

Entonces:

$$\tau = V/2A = (16 \text{ E3}) / 2(\pi\phi^2/4)$$

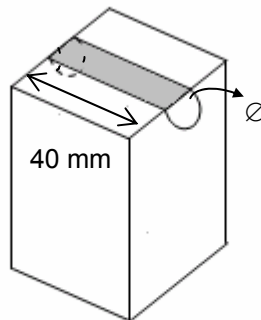
$$\tau = (16 \text{ E3}) / 2[\pi (15\text{E-3})^2/4] = 45.27 \text{ E6 Pa} = 45.27 \text{ Mpa}$$

Por lo que el factor de seguridad del pasador será:

$$\text{F.S.} = \sigma_{\text{último}}/\sigma_{\text{permisible}} = 150 \text{ E6} / 45.27 \text{ E6} = \mathbf{3.31 \text{ (adimensional)}}$$

b) El esfuerzo de aplastamiento en superficies curvas está definido como el cociente de la fuerza aplicada en la superficie curva (en este caso el pasador de acero) y el resultado de multiplicar el ancho de dicha superficie por el espesor de la placa, es decir, que se toma el área del rectángulo proyectado de la superficie de contacto, el cual se muestra en la figura siguiente:

Figura 19. **Esfuerzo de aplastamiento; problema resuelto número tres**



$$\sigma = P/\phi t$$

$$\sigma = (16\text{E3}) / [(15 \text{ E-3}) (40 \text{ E-3})]$$

$$\sigma = \mathbf{26.67 \text{ Mpa}}$$

c) Para encontrar las dimensiones b y c , se debe utilizar algún elemento que relacione cada una de ellas con datos conocidos. En el caso de la dimensión b , se puede observar que el área formada por ella y los 40 mm que se muestran, corresponde a un área perpendicular a la fuerza aplicada en el pasador de acero.

Así pues, se puede utilizar la fórmula de esfuerzo normal para relacionar la fuerza P y el área formada por el rectángulo de estas dimensiones, si se conoce el valor de esfuerzo al que se trabaja, el cual estará dado mediante la aplicación de un factor de seguridad que tiene un valor de 3.31 al esfuerzo último a tensión de la madera, el cual es dato del problema. Sin embargo, se debe considerar que el área real perpendicular a la fuerza P está formada por los 40 mm y por la distancia b menos el diámetro del pasador ($b - 15$ mm), pues dicho elemento no forma parte del área normal y del esfuerzo que se da en la madera. De acuerdo con lo anterior, se procede a calcular el esfuerzo por tensión permisible a la que trabaja la madera, así:

$$\sigma_{\text{permisible}} = \sigma_{\text{último}} / F.S.$$

$$\sigma_p = 60 \text{ E6} / 3.31 = 18.13 \text{ E6} = 18.13 \text{ Mpa}$$

Y cuando se aplica la fórmula de esfuerzo, considerando el área real del elemento, se despeja la dimensión b , así:

$$\sigma = P/A$$

$$18.13 \text{ E6} = (16 \text{ E3}) / [(40 \text{ E-3})(b - 0.015)]$$

$$b - 0.015 = (16 \text{ E3}) / [(40 \text{ E-3})(18.13 \text{ E6})]$$

$$b = 0.022 + 0.015$$

$$\mathbf{b = 0.037 \text{ m} = 37 \text{ mm}}$$

Ahora bien, para encontrar la dimensión c , se visualiza la falla por cortante que tendría la madera. Se encuentra que ésta actúa a cortante doble (pues son dos los planos de falla), en donde las áreas son iguales y paralelas a la fuerza aplicada P y están formadas por un rectángulo de base igual a 40 mm y que tienen por altura la dimensión c .

El esfuerzo cortante que se utiliza es el esfuerzo permisible o de trabajo, y se encuentra aplicando al esfuerzo último (7.5 Mpa); el factor de seguridad ya encontrado (F.S. = 3.31). De acuerdo a lo anterior se procede así:

$$\sigma_{\text{permisible}} = \sigma_{\text{último}} / F.S.$$

$$\tau_p = 7.5 \text{ E6} / 3.31 = 2.27 \text{ E6} = 2.27 \text{ Mpa}$$

Y ahora se procede a aplicar la fórmula de esfuerzo cortante doble y se despeja la dimensión c :

$$\tau = V/2A$$

$$2.27 \text{ E6} = 16 \text{ E3} / (2c (40 \text{ E-3}))$$

$$c = (16 \text{ E3}) / [2 (40\text{E-3}) (2.27 \text{ E6})]$$

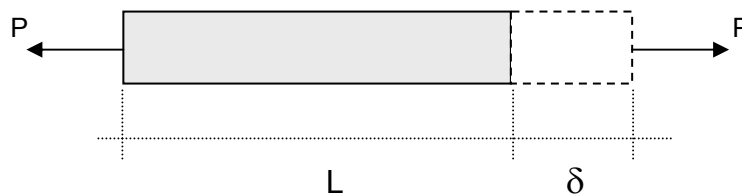
$$c = 0.0881 \text{ m} = 88.1 \text{ mm}$$

3. DEFORMACIÓN SIMPLE

3.1 Introducción

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta tiende a cambiarlo de forma y a producirle deformaciones, las cuales son de gran importancia para el estudio de la resistencia de materiales, pues se debe tener muy en cuenta, tanto el esfuerzo que se presenta en una estructura, como el efecto que presentan sobre ella las cargas aplicadas al cambiarle su forma inicial. Dichas deformaciones son imposibles de evitar, pero se consideran ciertos límites para que la estructura no deje de prestar el servicio para el que fue diseñada. Para ilustrar la deformación, que se denota con la letra griega delta (δ), se considera el cambio de longitud que presenta una barra para una carga axial. Dicha deformación se ilustra en la figura siguiente, en la cual la longitud inicial de la barra será L , así:

Figura 20. Deformación por carga axial



Este tipo de deformación, la cual es producida por una carga, es llamada deformación mecánica. Más adelante también se estudiarán deformaciones producidas por cambios de temperatura, llamadas deformaciones térmicas, y por deformaciones mecánicas relacionadas con los esfuerzos de corte.

Así como se ha dicho de la importancia de conocer el esfuerzo en un material y no la fuerza aplicada, así es importante prestar atención a un concepto llamado deformación unitaria, en vez de conocer la deformación total del elemento. Dicha deformación unitaria, que se presenta como la letra griega épsilon (ϵ), se define como el cambio lineal de longitud por unidad de longitud del elemento, que es equivalente a la razón entre la deformación total del elemento y su longitud inicial.

$$\epsilon = \delta / L$$

Se puede ver entonces que la deformación unitaria es adimensional, pues tiene unidades de longitud sobre longitud, por lo que el valor numérico de la deformación unitaria en cierto material es el mismo, sin importar el sistema de unidades que se esté utilizando.

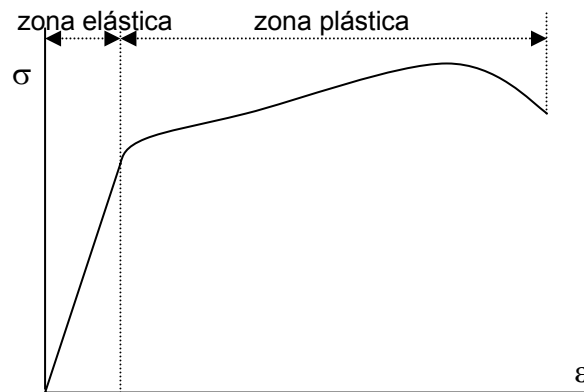
3.2 Diagrama esfuerzo-deformación

Para el estudio de las propiedades mecánicas de los materiales, se acostumbra a construir gráficas que representen el comportamiento de dicho material bajo diversas cargas en similares condiciones de aplicación. La gráfica más representativa de estas condiciones para el estudio de Resistencia de Materiales es el diagrama esfuerzo-deformación unitaria, el cual una vez que se logre conocer la interpretación de los puntos más importantes, será de mucha utilidad para conocer las propiedades mecánicas de determinado material y su tipo de comportamiento, para poder compararlo con otros materiales. En consecuencia, al dibujar el gráfico esfuerzo-deformación se observan los resultados de un ensayo normado, en el cual se utiliza el eje de las ordenadas (eje y) para representar el valor del esfuerzo normal (σ) y en el eje de las abscisas (eje x) el valor de su respectiva deformación unitaria (ϵ), para cada condición de carga.

En el diagrama esfuerzo-deformación de la figura 21, se presentan dos tipos de deformaciones:

- Deformación elástica: parte de la curva que se localiza en la denominada zona elástica y es aquella deformación que se elimina al dejar de esforzar el material.
- Deformación plástica: es la parte de la curva donde se produce una deformación permanente, es decir, que se conserva la deformación, al esforzar el material y se denomina zona plástica. Principia en el punto donde finaliza la zona elástica y termina al presentarse la ruptura de la pieza analizada.

Figura 21. **Zonas elástica y plástica del diagrama esfuerzo-deformación**



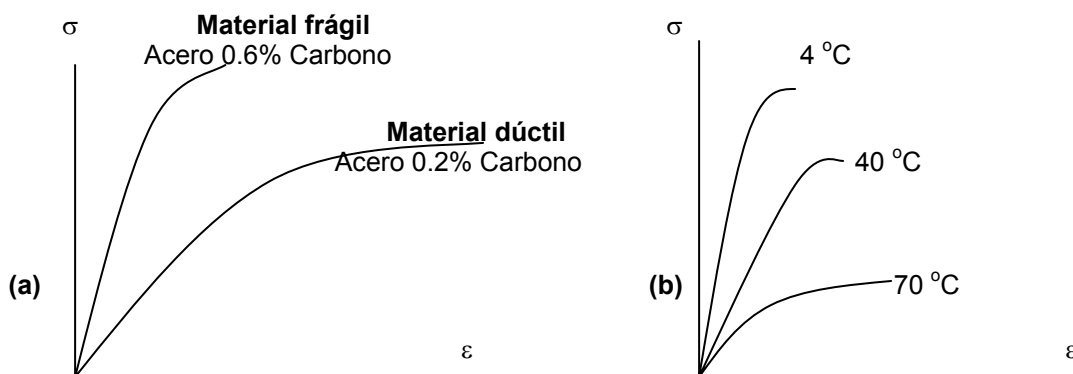
Adaptado de Hibbeler. Mecánica de Materiales. Pág. 95

Numéricamente hablando, cada material tiene su propia gráfica, aunque según su comportamiento se podrían separar en dos grandes grupos:

- **Materiales dúctiles:** éstos son capaces de resistir grandes deformaciones unitarias, antes de su ruptura. Como ejemplo se puede citar el acero estructural o acero dulce (de bajo contenido de carbono), que es el comúnmente utilizado en la construcción de viviendas.
- **Materiales Frágiles:** son los que se fracturan con muy pequeña o casi ninguna aplicación de fuerzas, por ejemplo, el vidrio o el concreto.

Se puede afirmar que los materiales, según su composición y la temperatura a la que es desarrollado el ensayo, exhiben diferentes comportamientos, tanto frágiles como dúctiles. Por ejemplo, el comportamiento del acero varía según la composición del mismo; el acero común tiene un contenido de carbono de 0.2%, y si este contenido sube, aumenta su resistencia, pero su comportamiento se vuelve más frágil. Esto se muestra en la figura 22, inciso (a). Así también la temperatura es importante, pues si ésta baja, el material será más resistente y frágil, como se observa en el inciso (b).

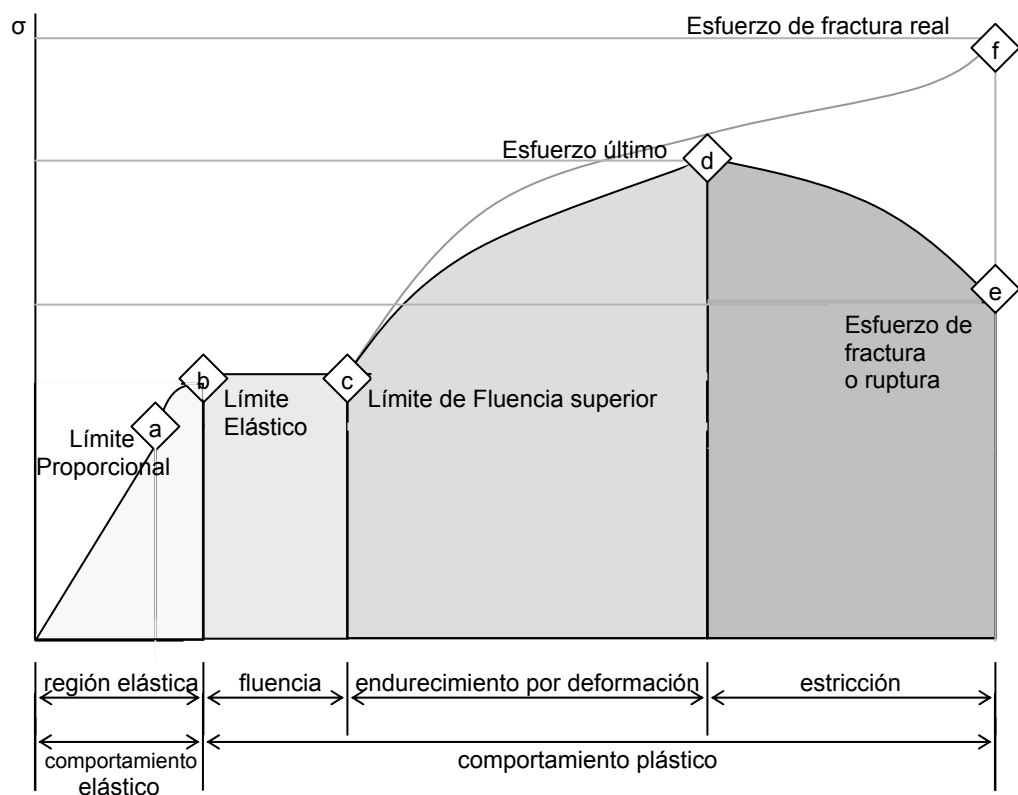
Figura 22. **Variación del diagrama según composición y temperatura**



Adaptado de Fitzgerald. Mecánica de Materiales. Pág. 19

Ahora se estudiarán a fondo las características de la curva esfuerzo-deformación unitaria, a través del análisis de la gráfica siguiente, la cual representa una ilustración típica de un material dúctil sometido a esfuerzos de tensión.

Figura 23. **Diagrama esfuerzo-deformación unitaria convencional y real**



Adaptado de Hibbeler. Mecánica de Materiales. Pág. 88

Como se vio anteriormente, en la gráfica aparecen las dos regiones que tiene el material, según su comportamiento; primero cuando presenta un comportamiento elástico y luego cuando su deformación ya no es reversible, es decir, un comportamiento plástico.

Es importante tener presente que se pueden diseñar estructuras en el rango de ambas zonas: la elástica y la plástica. Por ejemplo, una aplicación muy útil es en la industria automotriz, que toma en cuenta estos conceptos para el comportamiento de los materiales en casos de impactos o choques, caso muy frecuente es cuando colisionan levemente dos automóviles, y al observar los puntos de contacto no se presentan deformaciones, sin embargo, sí las hubo. Esto es debido a que los esfuerzos surgidos en el momento de la colisión no sobrepasan la zona elástica.

Se puede encontrar en la figura 23, además de las dos regiones anteriormente descritas, cuatro áreas que fueron sombreadas con distintas tonalidades; su significado se describe a continuación, así como los puntos importantes dentro de ellas, los cuales son mencionados en las definiciones siguientes:

- **Región elástica:** como ya se mencionó, es cuando su deformación puede ser reversible. Puede verse que la mayoría de esta región es una línea recta; esto quiere decir que el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria. Esta propiedad se desarrolla, más adelante, de una mejor manera al explicar la ley de Hooke, cuyo principio fundamental se basa en la relación que hace un material linealmente elástico. Aquí se pueden encontrar dos puntos de interés: el límite proporcional (punto a), que es cuando se deja de cumplir dicha relación lineal y el límite elástico (punto b), que es cuando las deformaciones del material dejan de ser reversibles. Después de este punto, las deformaciones comienzan a ser mayores.

- **Fluencia:** como se puede observar, esta región consta de una línea horizontal; la interpretación de esto es que el esfuerzo permanece aproximadamente constante -casi sin ningún incremento de carga- mientras se presenta una deformación en el material, que se está ensayando, la cual es una deformación permanente, es decir, una deformación plástica. Regularmente la fluencia no aparece en materiales frágiles, y cuando un material fluye se dice que es perfectamente plástico; incluso se podría afirmar que la fluencia es sinónimo de plasticidad perfecta. Los puntos de interés aquí son los límites de fluencia, tanto inferior (que aproximadamente coincide con el límite elástico), como el superior (punto c), que es el punto donde se termina esta propiedad y se da un incremento en la carga aplicada, para que la curva suba. Prácticamente la fluencia se produce por una alteración de las partículas internas del material, al alcanzar un determinado esfuerzo, luego de esto, dichas partículas internas se reorganizan y vuelven a oponer mayor resistencia a la carga que se les aplica.
- **Endurecimiento por deformación:** después que el material es sometido a grandes deformaciones en la fluencia, éste empieza a endurecerse; esto significa que debido a las deformaciones que actúan sobre él hacen que exista cambio en la estructura cristalina del elemento que lo hace más resistente. Se debe recordar que resistencia es la capacidad que se tiene para resistir cargas, y ésta aumenta, como puede verse por el valor de esfuerzo que va aumentando hasta llegar a un punto máximo de esfuerzo que es llamado esfuerzo último (punto d), que es la máxima resistencia del material. Cabe destacar que durante todo este proceso de tensión el área transversal de la probeta va disminuyendo, y es por eso que se presenta una porción de curva alterna que simula el comportamiento real, la cual sí considera dicha disminución en la superficie.

Cabe destacar la relación inversa entre el área y el esfuerzo; es por eso que los puntos de la gráfica real están a mayor altura que la gráfica que considera una sección constante de la probeta de ensayo. Dicha gráfica alterna comienza a separarse desde el límite de fluencia, pues es hasta ese punto donde la disminución en el área comienza a tener valores por considerar.

- **Estricción:** después de haber alcanzado un punto máximo llamado esfuerzo último, la curva sufre una pequeña disminución en los valores de esfuerzo; esto es debido a que la probeta tiene menor sección transversal y el área más pequeña resiste únicamente valores decrecientes en el esfuerzo, hasta que llega a romperse (punto e).

Debido a que la probeta constantemente disminuye su área transversal, existe un punto en donde la contracción lateral se hace visible; esta contracción, llamada también cuello o garganta, se puede presentar en cualquier punto de la altura de la probeta. Para la gráfica esfuerzo-deformación que considera el área real de la probeta, el esfuerzo subirá en su valor hasta llegar a un punto en donde el material finalmente se fractura (punto f).

Aunque se puede observar, que tanto el diagrama convencional como el diagrama real son diferentes, regularmente en ingeniería se utiliza la región de deformación elástica, ya que no se desea que cuando una estructura es diseñada tenga deformaciones considerables e irreversibles, sin embargo, el diagrama convencional es mucho más práctico, puesto que no considera el cambio de sección transversal de elemento y se facilita su elaboración.

3.3 Elasticidad lineal: Ley de Hooke

En este tema, se estudia la parte elástica del diagrama esfuerzo deformación, es decir, en donde la gráfica presenta una línea recta, que evidencia la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria de un material, la cual establece que el aumento de esfuerzo causa un aumento en la deformación y viceversa. Este hecho fue descubierto en el año de 1676 por el científico inglés Robert Hooke, por lo que se le denomina ley de Hooke: “El esfuerzo es proporcional a la deformación”. En el año 1807, Thomas Young se valió de esta ley e introdujo la expresión matemática que la demuestra; esto lo hizo al encontrar la pendiente de la recta en el diagrama, representada por la letra E, que no es otra cosa que la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria, así:

$$E = \sigma/\epsilon$$

Que se puede escribir de la siguiente forma, al despejar el esfuerzo en la ecuación:

$$\sigma = E\epsilon$$

De esta forma, es más fácil visualizar la ley de Hooke, pues se encuentra que el esfuerzo y la deformación tienen una relación directamente proporcional, como se afirma anteriormente.

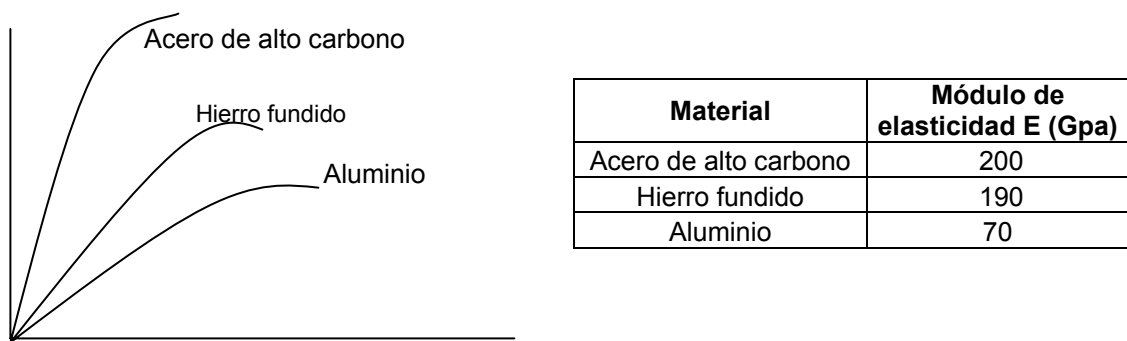
Dicha pendiente E -la cual tiene dimensional de esfuerzo, pues la deformación unitaria es adimensional- introdujo una constante de proporcionalidad conocida anteriormente como “Módulo de Young”, pero que actualmente se conoce como “Módulo de elasticidad”, la cual representa una medida de la rigidez de un material. Por ejemplo, con este valor del módulo se puede tener una idea de cuán deformable puede ser un material, es decir, que se puede estimar su rigidez; así el acero comercial tiene un módulo de elasticidad en el sistema internacional de 200 Gpa (200 E9 Pascales) y el bronce, que es un material sumamente maleable, posee un módulo de 80 Gpa (80 E9 Pascales), la cual lógicamente al compararlos se nota que es menor que el módulo del acero, lo que implica que es más fácil deformarlo.

Con la idea de que el módulo de elasticidad es la pendiente de la recta en el diagrama, se observa que cuanto mayor sea la pendiente, más costará deformar el material y la gráfica tiende a ser vertical, es decir, que tiende hacia el eje de las ordenadas (eje y); en cambio si la pendiente es pequeña, la gráfica tiende a inclinarse más hacia el eje de las abscisas (eje x).

Anteriormente se mencionó el comportamiento del acero, según su contenido de carbono y de otros materiales según la temperatura a la que es efectuado el ensayo, por ejemplo, si se busca un acero de alto carbono (1%), se obtiene un material más resistente y con menos tendencia a la deformación (material frágil), es decir, un material cuya gráfica tiende casi a la vertical y su módulo de elasticidad presenta valores altos, lo cual se deduce debido a que la pendiente de su gráfica es grande, como se puede comprobar en la figura 22 de la página 38.

Las propiedades de los materiales se pueden evaluar en la figura siguiente, recordando que cuanto más inclinada sea la gráfica, mayor será el módulo y representa un material más rígido. Por lo tanto, a continuación se muestra una comparación entre gráficas de diversos materiales.

Figura 24. **Comparación de gráficas de diversos materiales**



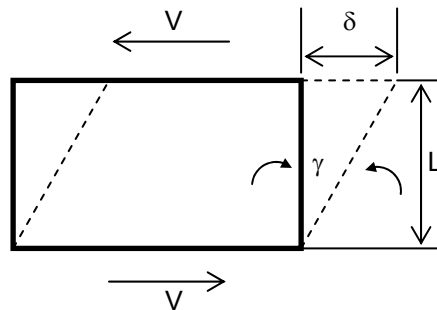
Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 30

3.3.1 Ley de Hooke en Cortante

Las propiedades de un material que trabaja a esfuerzo cortante también pueden determinarse mediante ensayos de cortante directo o con ensayos de torsión, además, se puede realizar una gráfica similar a la de esfuerzo deformación unitaria, sólo que en este caso será esfuerzo cortante (τ) en el eje de las ordenadas y deformación unitaria en cortante (γ) en las abscisas. A esta deformación unitaria en cortante se le conoce también como distorsión.

La distorsión es el efecto que tienen sobre un cuerpo los esfuerzos cortantes, y a diferencia de los esfuerzos normales que producen un alargamiento o acortamiento en sus dimensiones; este tipo de esfuerzo produce un cambio de forma de rectángulo a paralelogramo, tal como se observa:

Figura 25. **Ley de Hooke en cortante**



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de materiales. Pág. 32

Al aplicarle las fuerzas cortantes, cambia de forma el elemento y establece un ángulo de distorsión γ similar a un triángulo rectángulo; este ángulo es tan pequeño que puede considerarse su tangente igual al valor del ángulo ($\tan \gamma = \gamma$), por lo que la función queda:

$$\tan \gamma = \delta/L$$

$$\gamma = \delta/L, \text{ que es el equivalente en esfuerzo normal a } \epsilon = \delta/L$$

Al graficar esta distorsión γ contra el esfuerzo de corte τ , el diagrama es muy similar en su forma al de esfuerzo-deformación unitaria para carga axial. Entonces, al considerar esto, también se puede estudiar la ley de Hooke en cortante, en donde la distorsión es proporcional al esfuerzo cortante, por lo que se tiene la siguiente ecuación en la cual la letra G es el módulo de elasticidad en cortante, conocido también como módulo de rigidez:

$$\tau = G\gamma$$

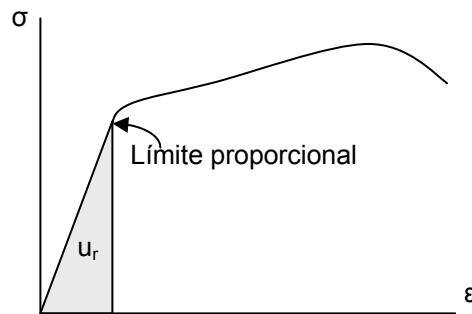
3.4 Energía de deformación

Cuando un material es deformado por una carga externa, éste tiende a almacenar energía en todo su volumen. La energía de deformación es importante para identificar dos propiedades en un material que se usan para especificar la capacidad en el mismo de absorber energía; dichas propiedades son las siguientes:

3.4.1 Módulo de resiliencia

Representa físicamente la capacidad de un material de absorber energía, sin ningún daño permanente en él; su magnitud es igual al área triangular formada en el diagrama de esfuerzo-deformación unitaria hasta el límite proporcional, así:

Figura 26. **Módulo de resiliencia (u_r)**



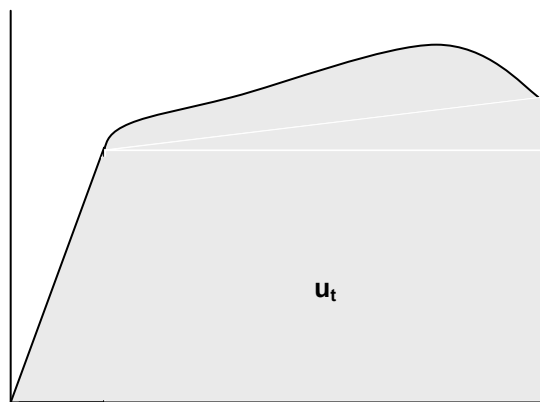
Adaptado de Hibbeler. Mecánica de materiales. Pág. 97

3.4.2 Módulo de tenacidad

Su valor indica la densidad de energía (energía por unidad de volumen) de deformación unitaria del material precisamente, antes de que se rompa. Esta cantidad está representada por el área total bajo la curva del diagrama esfuerzo-deformación unitaria.

La importancia del módulo de tenacidad radica en comparar su valor para determinar la tenacidad de un material en particular. Esta consideración es importante, cuando se diseñan miembros que puedan sobrecargarse accidentalmente, ya que los materiales con un módulo de tenacidad alto se distorsionarían mucho debido a una sobrecarga; sin embargo, estos materiales son preferibles en vez de aquellos que tienen un módulo de tenacidad bajo, pues pueden fracturarse de una manera repentina, sin indicio alguno de una falla próxima.

Figura 27. **Módulo de tenacidad (u_t)**

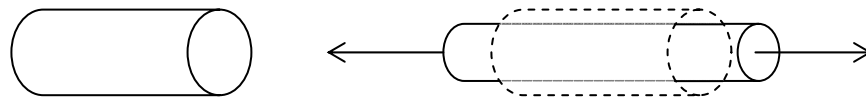


Adaptado de Hibbeler. Mecánica de materiales. Pág. 97

3.5 Relación de Poisson: estados de deformación biaxial y triaxial

Además de tener en un cuerpo o elemento estructural deformaciones longitudinales al esforzarlo, en realidad existen también deformaciones laterales que acompañan a las anteriores. Esto se ilustra con la figura siguiente, en donde se somete una barra a tensión y se muestra el acortamiento en su sección transversal, acompañado de un alargamiento en su longitud.

Figura 28. **Relación de Poisson**



Adaptado de Gere y Timoshenko. Mecánica de Materiales Pág. 23

La contracción lateral se puede visualizar fácilmente, al tener una tira de hule y estirla; en forma semejante, se podría someter cualquier cuerpo a compresión y se obtendría un aumento en su sección transversal; esto se cumple si se está trabajando con un material homogéneo (de la misma naturaleza en su totalidad) e isotrópico (condición de esfuerzos iguales en cualquier dirección).

Fue el científico francés S. D. Poisson, quien descubrió que en el rango de comportamiento elástico de un material, la deformación unitaria lateral en cualquier punto de una barra es proporcional a la deformación unitaria axial en el mismo punto, es decir, que la razón de estas dos deformaciones unitarias es constante; dicha constante es llamada “Módulo de Poisson” y es representada por la letra griega ν (ν), el cual tiene cierto valor que es único para cada material.

Se ilustra el módulo de Poisson de la manera siguiente:

$$\nu = - \epsilon_{\text{lateral}} / \epsilon_{\text{longitudinal}}$$

Regularmente se despeja ϵ longitudinal y se expresa así:

$$\epsilon_{\text{lateral}} = - \nu \epsilon_{\text{longitudinal}}$$

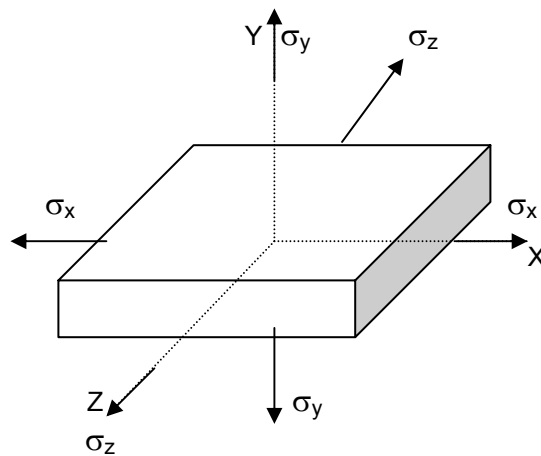
Al buscar una interpretación al valor numérico del módulo de Poisson, se observa que en las deformaciones laterales y longitudinales que se presentan en un cuerpo sometido a esfuerzo, la mayor de las dos es la longitudinal, por lo que el módulo de Poisson será siempre un valor decimal que varía desde una condición perfecta, en donde no exista deformación lateral ($\nu = 0$) hasta un máximo valor en donde aproximadamente se ensanche la mitad de lo que se deforma longitudinalmente ($\nu = 0.5$). Así, los valores del módulo varían entre 0.25 y 0.35 para algunos metales y otros materiales, hasta el hule que se acerca al valor máximo de 0.5. En realidad, se puede decir que este valor indica qué porcentaje de la deformación longitudinal se manifiesta en las deformaciones laterales.

El signo negativo observado en las ecuaciones anteriores se utiliza debido a que un alargamiento longitudinal (deformación positiva) produce una contracción lateral (deformación negativa) y viceversa. En consecuencia, se utiliza únicamente para indicar que está actuando a compresión y no debe utilizarse matemáticamente.

Para este caso, al elemento de la figura 28 (pág. 49) se le aplica carga sólo en un sentido, por lo que se dice que tiene un estado de deformación uniaxial (en un solo eje), pero presenta deformaciones en los tres ejes posibles (x,y,z), y que pueden calcularse por medio de la fórmula anterior. Sin embargo, no siempre sucede de esta manera, pues en ocasiones se presentan esfuerzos únicamente en dos o tres de los ejes posibles, lo que resulta en estados de deformación biaxial o triaxial, respectivamente.

El estado de deformación biaxial o triaxial produce un cambio en todos los sentidos de la estructura que se está esforzando. Para ilustrarlo, se considera la figura siguiente:

Figura 29. Estado de esfuerzos biaxial y triaxial



Para poder calcular la deformación en cualquier sentido, la relación de Poisson se puede generalizar más, por lo que para el efecto se utilizan las fórmulas siguientes, recordando que la deformación unitaria puede escribirse como $\varepsilon = \sigma/E$.

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E$$

$$\varepsilon_y = -\nu \sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E$$

$$\varepsilon_z = -\nu \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E + \sigma_z/E$$

Como se puede observar, la deformación unitaria en el eje que se busca es la sumatoria de la deformación longitudinal en el mismo, con las deformaciones laterales en los otros dos ejes, considerando la convención de signos para la tensión (positiva) y la compresión (negativa), además del módulo de Poisson.

3.6 Deflexiones de miembros cargados axialmente

Al cargar una estructura de forma axial, ésta sufre deformación en la dirección en que se aplica la carga. Dicha deformación es posible calcularla considerando la homogeneidad del material, su isotropía, la carga aplicada directamente en el centroide de la pieza, y también es condición importante que exista un comportamiento totalmente elástico, como por ejemplo, el comportamiento de un resorte. Se hace la analogía de cualquier estructura con un resorte, pues es fácil imaginar el comportamiento del mismo, ya sea en tensión cuando se produce un alargamiento o en compresión cuando se acorta.

El alargamiento o deformación, que se denota con la letra griega delta minúscula (δ), es posible calcularlo haciendo una relación entre el concepto de deformación unitaria ($\varepsilon = \delta/L$) y la pendiente de la recta en el diagrama esfuerzo-deformación, que no es más que el módulo de elasticidad ($E = \sigma/\varepsilon$) y que es la expresión donde se demuestra la ley de Hooke. Dicha relación se hace porque comúnmente, cuando se encuentra un elemento cargado, se conocen sus características físicas: longitud, tipo de material, área transversal, etc., además de la condición de carga a la que se aplica el objeto.

Para emplear los datos anteriormente descritos, se hace un arreglo entre las fórmulas de deformación unitaria y la del módulo de elasticidad, despejando de esta última la deformación unitaria, así:

$$E = \sigma/\varepsilon, \text{ despejando } \varepsilon = \sigma/E$$

Y ahora se procede a igualar las dos expresiones: $\varepsilon = \delta/L$ y $\varepsilon = \sigma/E$

$$\varepsilon = \varepsilon$$

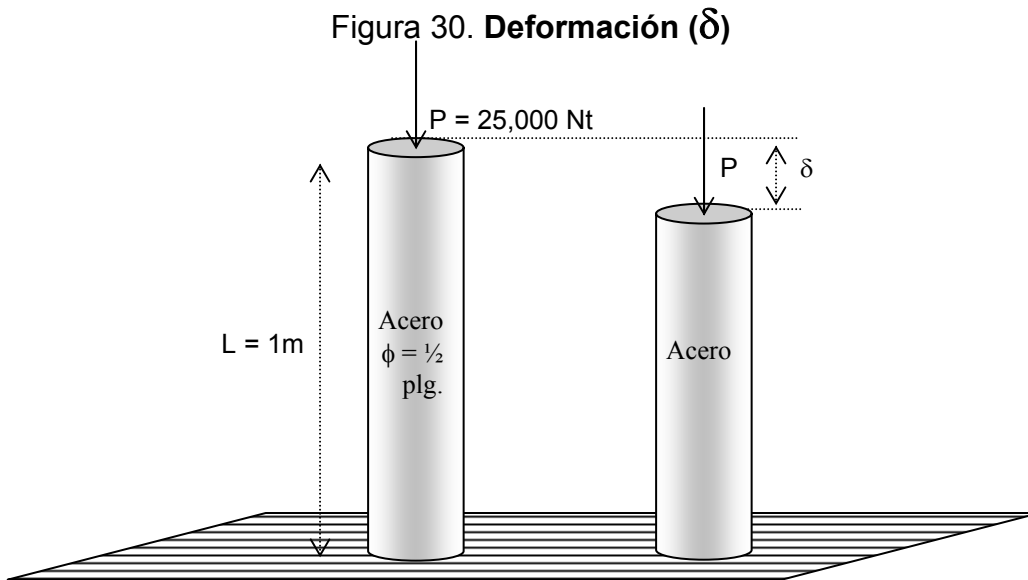
$$\delta/L = \sigma/E \quad (\text{se sustituye } \sigma = P/A)$$

$$\delta/L = P/AE$$

$$\delta = PL/AE$$

El resultado del anterior proceso algebraico da la fórmula para obtener una deformación, que queda definida como el producto de la fuerza axial (interna) por la longitud inicial dividida dentro del producto del área transversal por módulo de elasticidad del material en el que se trabaja.

Para ejemplificar lo anterior, se puede imaginar que se tiene una barra prismática de acero comercial ($E = 20 \text{ Gpa}$) a compresión, como se muestra en la figura 30, la cual tiene una longitud inicial de 1 metro, área transversal de 1.22 cm^2 ($1.22 \times 10^{-4} \text{ metros}$), que equivale a una barra de media pulgada de diámetro, en donde se aplica una carga de 25,000 Newtons. Para averiguar cuánto se ha deformado dicha barra, se utiliza la fórmula descrita anteriormente.



$$\delta = PL/AE$$

$$\delta = (25,000 \times 1) / (1.22\text{E-}4 \times 20\text{E}9), \quad \delta = 0.0102 \text{ m}$$

Y de esa forma se encuentra la deformación total de la barra de acero para las condiciones anteriormente descritas, la cual es de 0.0102 metros, es decir, 1.02 milímetros.

3.7 Esfuerzos y deformaciones de origen térmico

Hasta ahora se han desarrollado deformaciones que se dan en las estructuras debido a cargas externas, pero ésta no es el único motivo de esfuerzos y deformaciones en una estructura. Además de dichas cargas, se pueden citar los cambios de temperatura como origen de esfuerzos y deformaciones térmicas, los cuales producen contracción, si se tiene descenso en la temperatura (se enfría), y una dilatación o expansión si se aumenta la temperatura (se calienta). Esto se puede ejemplificar en un hecho bastante común, que es cuando se tiene algún mueble de madera en casa, y desciende la temperatura (generalmente por las noches), y el objeto produce ruido; el motivo de este fenómeno es la contracción que está sufriendo la estructura, debido a los esfuerzos de origen térmico.

En la mayoría de los materiales estructurales, se tiene la propiedad que considera las deformaciones unitarias como proporcionales al cambio de temperatura, lo que se puede escribir de la forma siguiente:

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

Donde ε_T representa la deformación unitaria de origen térmico en el material, ΔT representa el cambio de temperatura y α es un valor numérico, que representa una propiedad del material llamada coeficiente de dilatación térmica. Ahora se escribe la ecuación despejando el coeficiente térmico:

$$\alpha = \varepsilon_T / \Delta T$$

Se debe recordar que la deformación unitaria es una cantidad adimensional, por lo que el coeficiente tiene dimensionales iguales al inverso del cambio de temperatura, ya sea en el recíproco de grados Kelvin ($1/^\circ\text{K}$), Celsius ($1/^\circ\text{C}$) o Fahrenheit ($1/^\circ\text{F}$), según el sistema de medidas utilizado.

El coeficiente de dilatación térmica es obtenido a través de datos experimentales, y en cualquier sistema tiene el mismo valor, pues el cambio de temperatura es numéricamente el mismo. Para asignar una convención de signos a estas deformaciones, se considera que si el material se contrae será una deformación negativa y si éste se expande, será positiva.

Las deformaciones unitarias térmicas suelen ser reversibles, pues se asume que trabajan en una región elástica y retoman su forma original, cuando la temperatura vuelve a su valor inicial.

Si se quiere obtener la deformación total que sufre una estructura en un cambio de temperatura, solamente se debe multiplicar el valor de la deformación unitaria por su longitud inicial, así:

$$\varepsilon = \delta/L$$

despejando la deformación total se tiene

$$\delta = \varepsilon L$$

y sustituyendo ε por $\alpha(\Delta T)$

$$\delta = \alpha(\Delta T)L$$

Por eso una deformación total térmica queda definida como el producto del coeficiente de dilatación térmica (α); el cambio de temperatura (ΔT) como valor absoluto pues el signo de la deformación depende de si es una dilatación (+) o una contracción (-) y la longitud o dimensión inicial del elemento (L). Dichas deformaciones térmicas pueden calcularse fácilmente cuando la estructura no presenta ninguna restricción al movimiento libre, como cuando un objeto descansa sobre una superficie sin fricción o cuelga en el espacio, sin embargo, a veces existen restricciones que impiden el movimiento libre de los cuerpos, los cuales generan esfuerzos de origen térmico, aunque el cambio de temperatura es uniforme. Dichos esfuerzos de origen térmico regularmente son perjudiciales y en el diseño de ingeniería se tratan de evitar, como por ejemplo, la mayoría de puentes o fundiciones grandes de concreto grandes se diseñan con juntas, las cuales son pequeños espacios que se dejan para que el concreto, en este caso, se deforme libremente y se permite el movimiento térmico sin ocasionar esfuerzos por cambios de temperatura.

Para resolver problemas que involucren ciertas restricciones en los elementos y también un cambio de temperatura, se propone el siguiente procedimiento:

- Considerar la estructura totalmente descargada y sin restricciones, que impidan su libre desplazamiento térmico y representarlo en un esquema.
- Ahora se aplican fuerzas desconocidas que hagan que la estructura vuelva a su condición inicial de restricción de movimientos.
- Las relaciones geométricas del esquema y las ecuaciones de equilibrio estático darán las suficientes herramientas, para resolver el sistema y encontrar el valor de las fuerzas desconocidas, que son las que ocasionan el esfuerzo térmico.

3.8 Estructuras estáticamente indeterminadas

Hasta el momento, se han estudiado estructuras en las que por medio de las ecuaciones de equilibrio se pueden determinar las reacciones y fuerzas internas que actúan sobre ellas; a estas estructuras se les llama estáticamente determinadas. Generalmente no todas las estructuras son así de sencillas; en ocasiones, existen casos en que las tres ecuaciones de equilibrio no son suficientes para poder determinar dichas reacciones en la estructura, y es cuando se hace uso de una ecuación adicional necesaria para resolver el problema y que se plantea al utilizar la geometría de las deformaciones de cualquier tipo, sean térmicas o mecánicas, que existen en la estructura en el momento de cargarla. Dicha ecuación recibe el nombre de "ecuación de compatibilidad de deformaciones", y se plantea tomando ciertas condiciones para los desplazamientos, visualizando o ejerciendo una exageración en las mismas, lo cual se logra haciendo un esquema de las deformaciones, identificando la posición inicial (antes de que se produzcan las deformaciones) y final de la estructura (es decir, ya con las deformaciones), que es el procedimiento para evaluar y deducir la condición de geometría que se va a utilizar, como por ejemplo, la relación de triángulos, la comparación de espacios de deformación, etcétera. Para relacionar dichas ecuaciones de equilibrio, en donde aparecen como componentes de las mismas sus fuerzas, se utiliza la fórmula de deformación total ($\delta = PL/AE$) y regularmente se conoce la geometría de la estructura, así como el tipo de material, por lo que finalmente queda de incógnita únicamente la carga axial P , que es la misma carga axial en las ecuaciones de equilibrio estático. Una mejor manera de ilustrar el procedimiento anterior es a través de los problemas resueltos que se presentan a continuación.

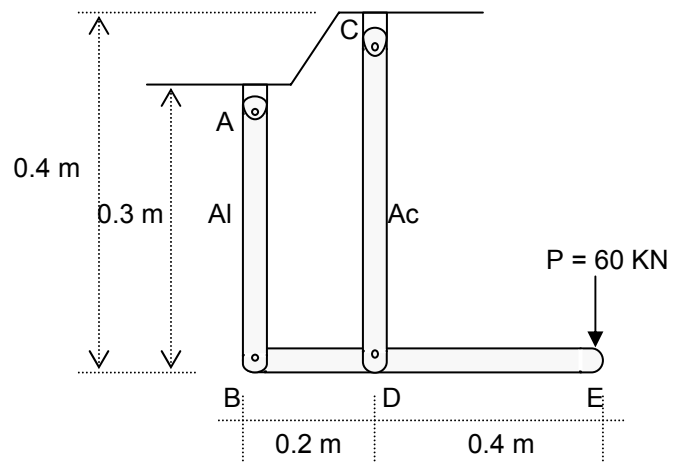
3.9 Problemas resueltos del capítulo tres

3.9.1 Problema resuelto número cuatro

La barra rígida BDE está soportada por dos barras articuladas AB y CD. La barra articulada AB está hecha de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$) y tiene una sección transversal de 500 mm^2 ; la barra articulada CD es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$) con un área de la sección de 600 mm^2 . La fuerza $P = 60 \text{ KN}$, hallar:

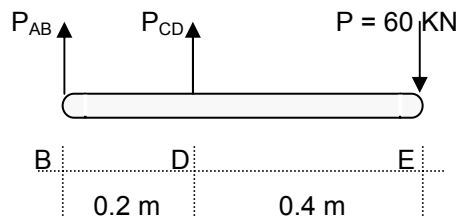
- a) La deflexión de B b) La deflexión de D c) La deflexión de E

Figura 31. Problema resuelto número cuatro



Entonces, de acuerdo con el procedimiento, se realizan dos análisis; primero, con el fin de obtener una ecuación de equilibrio estático se hace un diagrama de cuerpo libre del elemento que interesa, en el cual se identifican las fuerzas que intervienen en la estructura, y luego se dibujan por medio de un diagrama las posibles deformaciones del elemento, con el objetivo de relacionar las variables de deformación.

Figura 32. **Diagrama de cuerpo libre; problema resuelto número cuatro**



Análisis por estática:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \quad 0.2 P_{CD} &= 60 (0.6) \\ P_{CD} &= 180 \text{ KN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 \quad P_{AB} + P_{CD} &= 60 \\ P_{AB} &= -120 \text{ KN} \end{aligned}$$

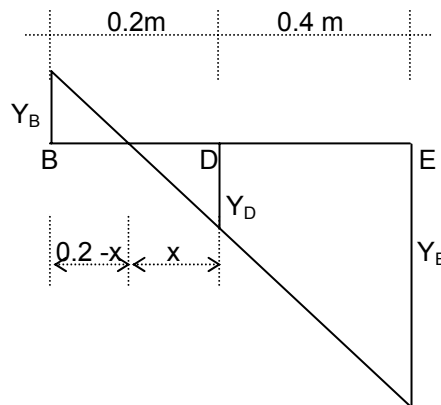
Se debe interpretar el signo negativo de la fuerza en el aluminio (P_{AB}), como el correcto sentido de la misma, es decir, que la fuerza que se supone hacia arriba, al hacer la sumatoria de momentos, en realidad se dirige hacia abajo, por lo que la barra AB (aluminio) está sometida a esfuerzos de tensión y no de compresión, como se había supuesto. En cambio, la barra CD (acero) sí está actuando a esfuerzos de compresión, pues el sentido de la fuerza es correcto.

Análisis por deformaciones:

De acuerdo con el sentido de cada una de las fuerzas, así será la deformación, pues dicho sentido equivale a saber si la barra en estudio está actuando a esfuerzos de tensión, que corresponde a un alargamiento en la barra o a esfuerzos de compresión, que hace que la barra disminuya en su longitud. Dichas deformaciones son equivalentes a las deflexiones en las barras de aluminio y acero, las cuales se representan por la letra “Y”.

Considerando lo anterior, a continuación se plantea un esquema en el cual se exageran las deformaciones, y éste se utiliza para plantear relaciones de triángulos que sean auxiliares para encontrar la deflexión que se busca, así:

Figura 33. **Diagrama de deformaciones; problema resuelto número cuatro**



De esta manera, las deformaciones en cada una de las barras son:

$$Y_B = \delta_{Al} = PL/AE|_{Al}$$

$$Y_B = [(120 \text{ E}3) (0.3)] / [(500 \text{ E}-6) (70 \text{ E}9)]$$

$$Y_B = 0.00102 \text{ m} = 1.02 \text{ mm}$$

$$Y_D = \delta_{AC} = PL/AE|_{AC}$$

$$Y_D = [(180 \text{ E}3) (0.4)] / [(600 \text{ E-}6)(200 \text{ E}9)]$$

$$Y_D = 0.0006 \text{ m} = 0.6 \text{ mm}$$

Luego de encontrar las deformaciones y por lo tanto las deflexiones en cada uno de los materiales, se debe determinar aún la deflexión en el punto E. Se puede observar que dicha deflexión es más difícil encontrarla, pero se utiliza la relación de triángulos que se genera entre las deflexiones de los otros dos puntos, sus distancias horizontales y la deflexión que se está buscando, tal como se muestra en la figura 33, entonces:

- 1era. relación de triángulos:

$$Y_E / (0.4 + x) = Y_D / x$$

$$Y_E = (0.4 + x) (Y_D) / x$$

(2 incógnitas: Y_E, x)

- 2da. relación de triángulos:

$$Y_B / (0.2 - x) = Y_D / x$$

$$x = 0.2 Y_D / (Y_B + Y_D)$$

$$x = 0.074 \text{ metros}$$

Por lo que la deflexión en el punto E es:

$$Y_E = (0.4 + 0.074) (0.0006) / 0.074$$

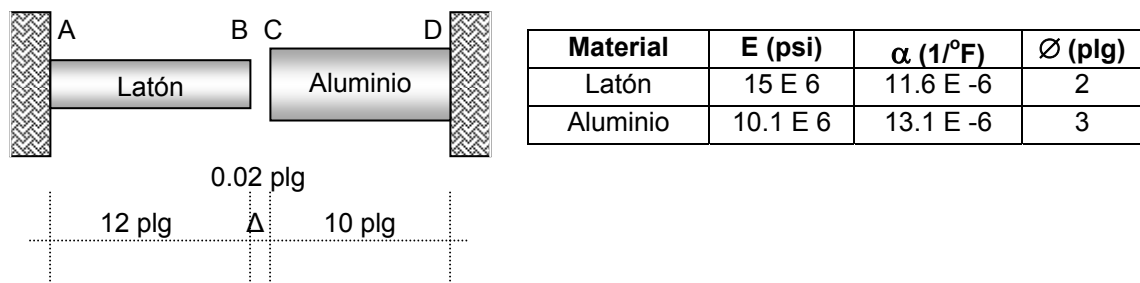
$$Y_E = 0.003843 \text{ m} = 3.84 \text{ mm}$$

3.9.2 Problema resuelto número cinco

La barra AB es de latón y la barra CD es de aluminio. Considerando los datos de cada material que se muestran a continuación, y que a 60 °F existe una separación de 0.02 pulgadas entre los extremos de las barras, hallar:

- La temperatura a la cual el esfuerzo en la barra AB será de -20 ksi.
- La correspondiente deformación de la barra AB.

Figura 34. Problema resuelto número cinco



Regularmente en los problemas donde se tiene como condición un espacio por “salvar”, como es el caso de las 0.02 pulgadas del presente ejemplo, se debe de realizar una sumatoria de deformaciones, considerando una convención de signos para las deformaciones, y luego se debe igualar dicha sumatoria al espacio que se tiene como condicionante del problema.

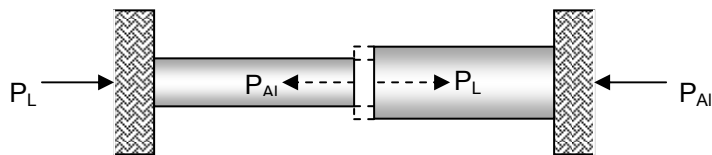
a) Para este inciso, se debe obtener la temperatura a la cual el esfuerzo es negativo en AB, es decir, un esfuerzo de compresión en el latón. Para que exista un esfuerzo de compresión, se tendría que aumentar la temperatura para que ambos materiales se expandan, entonces se crea un esfuerzo de origen térmico que hace que el latón se contraiga.

Para su resolución, se procede a analizar el problema desde dos puntos de vista: primero por estática y luego por deformaciones; para el primer caso, se utilizará un diagrama de cuerpo libre, y para el segundo, un análisis por deformaciones, con su diagrama respectivo. Estos dos análisis se relacionan entre sí y así se puede encontrar el cambio de temperatura, para que se presente el esfuerzo de compresión dado.

Análisis por estática:

En el momento de subir la temperatura, ésta hace que los dos materiales se expandan y choquen, entonces un material ejerce fuerza sobre el otro; estas fuerzas no existían originalmente. Si se considera el diagrama de cuerpo libre del elemento y se busca la condición de fuerzas, para que éste vuelva a su condición inicial, se tendrá el esquema siguiente:

Figura 35. **Diagrama de cuerpo libre; problema resuelto número cinco**



$$\begin{aligned} \sum F_{\text{horizontales}} &= 0 & 2P_{Ai} - 2P_L &= 0 \\ P_{Ai} &= P_L \end{aligned}$$

Además, según la condición que se proporciona para el latón de un esfuerzo de compresión de 20 ksi, se utiliza la definición de esfuerzo normal ($\sigma = P/A$), para encontrar la fuerza axial aplicada en el latón, además de considerar el área transversal circular que posee un diámetro de 2 pulgadas.

Según los datos del problema y lo descrito en el párrafo anterior, se procede de la manera siguiente:

$$P = \sigma A = (20000) (\pi \phi^2 / 4) = (20000) (\pi 2^2 / 4)$$

$$P = 20000\pi$$

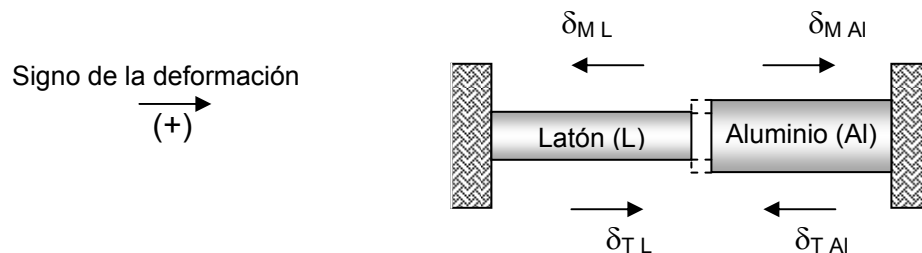
$$P = 62831.85 \text{ lb}$$

Este valor es la fuerza axial correspondiente para ambos materiales.

Análisis por deformaciones:

Si se considera que la distancia de 0.02 pulgadas será igual a la sumatoria de deformaciones, tanto térmicas como mecánicas, las cuales se esquematizan en la siguiente figura, en donde se imagina que aumenta la temperatura y las barras se juntan (esquematizado como δ_T) y generan un esfuerzo mecánico de compresión (esfuerzo de origen térmico), el cual cambia la dirección de la deformación en ambas barras, es decir, una deformación mecánica (δ_M), se tiene:

Figura 36. Diagrama de deformaciones; problema resuelto número cinco



$$\sum_{\text{deformaciones}} = \Delta$$

$$\delta_{M \text{ Al}} + \delta_{T \text{ L}} - \delta_{T \text{ Al}} - \delta_{M \text{ L}} = 0.02$$

La ecuación anterior es conocida como ecuación de compatibilidad de deformación. Si se sustituyen las deformaciones mecánicas por sus fórmulas respectivas (PL/AE) y las deformaciones térmicas por $\alpha L \Delta T$, con los datos de cada material, quedará la siguiente expresión:

$$PL/AE|_{Al} + \alpha L \Delta T|_L - \alpha L \Delta T|_{Al} - PL/AE|_L = 0.02$$

Y se despeja como incógnita el cambio de temperatura (ΔT), por lo que la ecuación queda de la manera siguiente:

$$\Delta T = \frac{0.02 - PL/AE|_{Al} + PL/AE|_L}{\alpha L|_L - \alpha L|_{Al}}$$

A esta ecuación se ingresan los datos de cada una de las barras, siendo el cociente P/A de 20 ksi; se hace la salvedad que éste es positivo, pues el signo del esfuerzo ya se tomó en cuenta al evaluar el sentido de la deformación, y al final se obtiene:

$$\Delta T = 165.80 \text{ }^\circ\text{F}$$

Pero como este valor representa un cambio de temperatura y recordando que $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}$, se le suma la temperatura inicial que es de 60 °F, para obtener el resultado que se pide en el problema, y es la temperatura final para que la barra de latón soporte un esfuerzo de compresión (-) de 20 ksi, así:

$$T = 165.80 + 60$$

$$T = 225.8 \text{ }^\circ\text{F}$$

b) Para evaluar la deformación total del latón, se considera tanto la deformación térmica que hace al elemento expandirse, como la deformación mecánica generada por el esfuerzo de origen térmico que se presenta, la cual hace que el material se contraiga, entonces:

$$\delta_{\text{Total}} = \delta_T - \delta_M$$

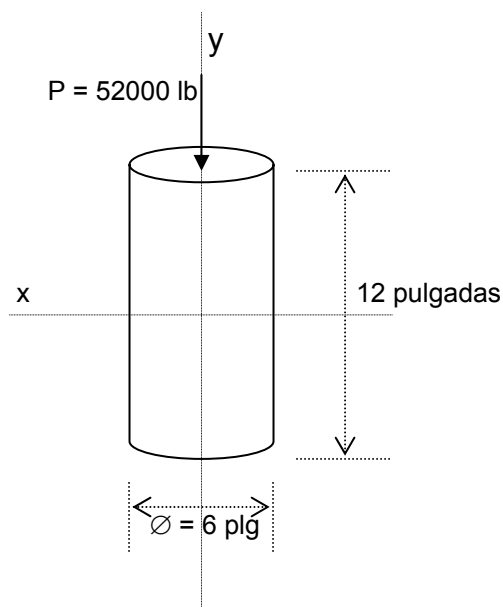
$$\delta_{\text{Total}} = \alpha L \Delta T|_L - PL/AE|_L$$

$$\delta_{\text{Total}} = 7.07 \text{ E-3 pulgadas}$$

3.9.3 Problema resuelto número seis

Al probar a compresión el cilindro de concreto mostrado la figura 37, el diámetro original de 6 pulgadas se incrementó en 0.0004 plg y la longitud original de 12 plg se redujo en 0.0065 plg bajo la acción de la carga de compresión $P = 52000 \text{ lb}$. Calcular el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν .

Figura 37. Problema resuelto número seis



Para resolver el problema, se calcula el esfuerzo en el eje “y” (σ_y), pues es el único que existe, así:

$$\sigma_y = P/A = 52000 / [(\pi/4) (6^2)]$$

$$\sigma_y = 1839.12 \text{ psi (lb/plg}^2\text{)}$$

Según las condiciones del problema, se pueden calcular las deformaciones unitarias para cada eje, recordando que $\epsilon = \delta/L_0$, así:

$$\epsilon_x = 0.0004 / 6 = 6.66 \text{ E-5}$$

$$\epsilon_y = 0.0065 / 12 = 5.417 \text{ E-4}$$

Se aplica la relación de Poisson para el eje y, pues es donde existe una condición de esfuerzo que no es nula, entonces:

$$\epsilon_y = -\nu \overset{0}{\sigma_x/E} + \sigma_y/E - \nu \overset{0}{\sigma_z/E}$$

y se despeja el módulo de elasticidad E:

$$E = \sigma_y/\epsilon_y$$

$$E = 1839.12 / 5.417 \text{ E-4}$$

$$\mathbf{E = 3.395 \text{ E6 psi} = \mathbf{3395 \text{ ksi}}$$

Ahora se aplica la relación de Poisson para el eje “x”; son nulos los esfuerzos tanto en “x” como en “z”, y se despeja de la ecuación el módulo de Poisson (ν), así:

$$\epsilon_x = \overset{0}{\sigma_x/E} - \nu \sigma_y/E - \nu \overset{0}{\sigma_z/E}$$

$$\epsilon_x = \nu \sigma_y/E$$

(el signo negativo es porque disminuye su dimensión en x)

$$\nu = (\epsilon_x)(E)/\sigma_y$$

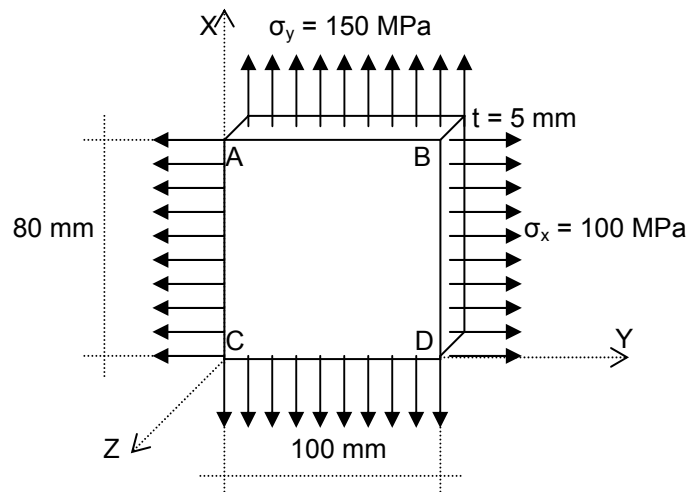
$$\nu = (6.66 \text{ E-5})(3.395 \text{ E6})/(1839.12)$$

$$\mathbf{\nu = 0.123}$$

3.9.4 Problema resuelto número siete

En la figura 38, se muestra una placa de acero no reforzada, con espesor $t = 5 \text{ mm}$. Las fuerzas que actúan producen esfuerzos normales $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$ y $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$. Para un valor de módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$ y un módulo de Poisson $\nu = 0.4$, hallar: a) la variación de la arista AC; b) la variación de la arista AB; c) la variación en el espesor de la placa; d) la variación en el cambio de volumen.

Figura 38. Problema resuelto número siete



Se considera la relación de Poisson, en donde el valor del esfuerzo en el eje zeta es nulo ($\sigma_z = 0$), no así los esfuerzos en los otros dos ejes ($\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$). Con esto, se procede a encontrar la deformación unitaria para cada eje, recordando que si se desea hallar la variación en alguna longitud, se debe encontrar el valor $\delta = \epsilon L_0$, lo cual es pedido para algunos incisos. Entonces se procede a calcular la deformación unitaria para todos los ejes, y dicho valor simplemente se multiplica por alguna distancia requerida sobre el eje correspondiente, para encontrar la respectiva deformación.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E \\ \epsilon_y &= -\nu \sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E \\ \epsilon_z &= -\nu \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E + \sigma_z/E\end{aligned}$$

Y se define como factor común el módulo de elasticidad E, entonces queda la relación de Poisson de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= 1/E (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= 1/E (-\nu \sigma_x + \sigma_y) \\ \epsilon_z &= 1/E (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y)\end{aligned}$$

Se sustituyen los datos en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= (1/200 \text{ E9}) [(100 \text{ E6} - 0.4 (150 \text{ E6}))] = 0.0002 \\ \epsilon_y &= (1/200 \text{ E9}) [-0.4 (100 \text{ E6}) + (150 \text{ E6})] = 0.00055 \\ \epsilon_z &= (1/200 \text{ E9}) [-0.4 (100 \text{ E6}) - 0.4 (150 \text{ E6})] = -0.0005\end{aligned}$$

a) La variación de la arista AC se encuentra multiplicando la longitud inicial de dicha arista por la deformación unitaria en su eje (eje y), así:

$$\begin{aligned}\delta_{AC} &= (80) (0.00055) = 0.044 \text{ mm (aumenta su longitud en 0.044 mm)} \\ \text{Longitud final (AC)} &= 80 + 0.044 = 80.044 \text{ mm}\end{aligned}$$

b) La variación de la arista AB se encuentra multiplicando su longitud inicial por el valor de la deformación unitaria en el eje x.

$$\delta_{AB} = (100) (0.0002) = 0.02 \text{ mm (aumenta su longitud en 0.02 mm)}$$

$$\text{Longitud final (AB)} = 100.02 \text{ mm}$$

c) Para encontrar la variación y nueva dimensión del espesor de la placa (eje z), se procede así:

$$\delta_t = (5) (-0.0005) = -0.0025 \text{ mm (disminuye su el espesor en 0.0025 mm)}$$

$$\text{Nuevo espesor } t = 5 - 0.0025 = 4.9975 \text{ mm}$$

d) La variación en el cambio de volumen (ΔV) se encuentra restando el volumen final de la placa, es decir, que con las nuevas dimensiones después de aplicar las fuerzas y el volumen inicial, antes de provocar algún esfuerzo.

$$\text{Volumen inicial} = bht = 80(100)(5) = 40,000 \text{ mm}^3$$

$$\text{Volumen final} = 80.044 (100.02)(4.9975) = 40,010 \text{ mm}^3$$

$$\Delta V = 40010 - 40000$$

$$\Delta V = 10 \text{ mm}^3$$

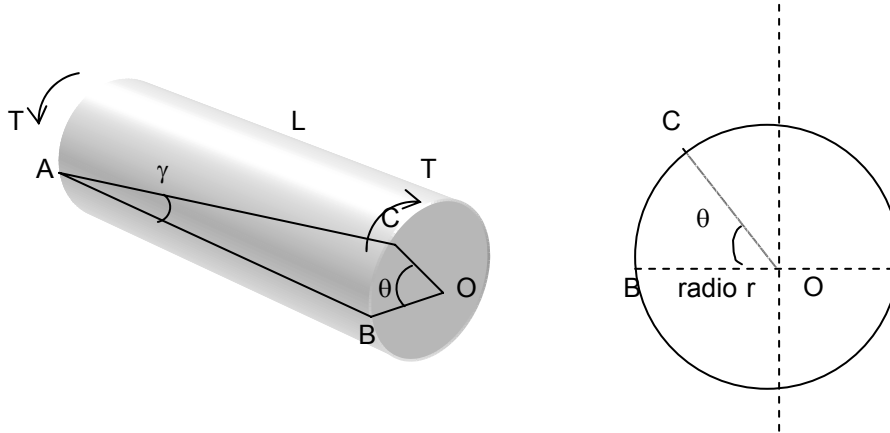
4. TORSIÓN

4.1 Torsión de barras circulares y sus aplicaciones

La torsión se refiere al comportamiento que presenta una barra recta, al ser cargada por uno o varios momentos o pares torsores que tienden a producir una rotación a lo largo del eje longitudinal de la barra. Dicha barra es llamada árbol, que es todo elemento mecánico destinado a transmitir un par torsor. Puede tener diversas formas, pero la de mayor interés es el árbol de sección circular (sólida o tubular), que recibe el nombre especial de eje o flecha y que es un elemento indispensable en el funcionamiento de distintos tipos de maquinaria, en donde las cargas de torsión son regularmente aplicadas por poleas o distintos tipos de engranes. Para entender de una mejor manera el concepto de momento torsor, simplemente debe imaginarse que gira un desarmador; en este caso, la mano le aplica un momento torsionante al mango, el cual hace girar el tornillo en el que se está trabajando. Otro ejemplo de la aplicación de un par torsor es el de exprimir un trapo húmedo con las dos manos, tomándolo de los extremos y girando cada mano en sentido contrario.

Ahora se explican los elementos fundamentales de la Torsión, a través de la figura siguiente:

Figura 39. Torsión



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 61

En la figura, se puede distinguir una flecha sólida (de sección llena) de longitud L y sometida a un par torsor T . Se traza una generatriz AB en la superficie del cilindro, la cual está recta y paralela al eje. Después de aplicar el par torsor, el radio OB se traslada hacia OC , y se gira cierto ángulo θ . A dicho ángulo se le llama ángulo de torsión y es el motivo que la línea recta AB que se había trazado se transforme en una curva helicoidal AC , que presenta respecto a la anterior un ángulo γ , el cual es llamado ángulo de distorsión. Para una mejor comprensión, se puede afirmar que el ángulo de torsión es el que se forma entre las líneas de radio inicial y radio final; y el ángulo de distorsión es el formado por las líneas trazadas en la superficie, a lo largo del elemento sometido a torsión, antes y después de aplicar el par torsor.

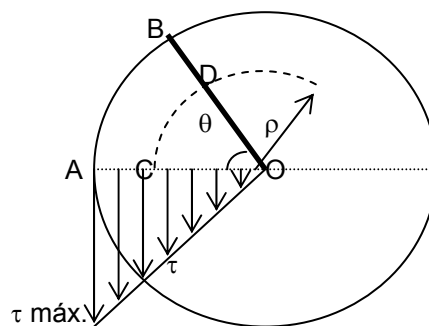
4.1.1 Deducción de las fórmulas utilizadas en torsión

Para deducir las fórmulas utilizadas en torsión, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

- Las secciones circulares permanecen circulares después de la torsión
- Las secciones planas permanecen planas y no se alabean después de la torsión.
- La proyección sobre una sección transversal de una línea radial de una sección permanece radial después de la torsión.
- El árbol está sometido a un par torsor, que actúan en planos perpendiculares a su eje.
- Los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad, es decir, obedecen la ley de Hooke.(6-61)

En torsión, es la primera vez que los esfuerzos no son uniformes en la sección del elemento, pues allí el esfuerzo cortante que se presenta tiene un comportamiento lineal, es decir, que varía linealmente con relación al radio. Para demostrar esto y deducir la fórmula de la torsión, se utiliza la figura 40.

Figura 40. Deducción de las fórmulas de torsión



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 61

En la figura anterior, se puede observar gran cantidad de esfuerzos de corte torsionante desde el origen (el centro) hasta el extremo de la superficie, donde ρ alcanza el valor máximo del radio, y donde se tiene el máximo valor de corte torsionante.

Siguiendo con la deducción de la fórmula, se considera una fibra cualquiera a una distancia ρ del centro del eje y que tiene el mismo ángulo de torsión que el radio, según las consideraciones hechas y en la cual se presenta una deformación tangencial (δ_t), igual a la longitud del arco CD, según la fórmula de longitud de arco ($S = r\theta$), se tiene:

$$\delta \text{ tangencial } (\delta_t) = \rho\theta$$

La longitud de arco para dicha fibra considerando el ángulo de distorsión y el radio correspondiente que ahora es la longitud del eje, queda de la manera siguiente:

$$\delta_t = L\gamma$$

despejando el ángulo de distorsión γ y sustituyendo $\delta_t = \rho\theta$:

$$\gamma = \delta_t / L$$

$$\gamma = \rho\theta / L$$

Ahora se recuerda la aplicación de la ley de Hooke a esfuerzos de corte, en donde se obtuvo la siguiente relación:

$$\tau = G\gamma$$

Donde G es el módulo de elasticidad al cortante o módulo de rigidez y γ es la distorsión.

Considerando las últimas dos ecuaciones, se tiene:

$$\tau = G\gamma = G(\rho\theta/L)$$

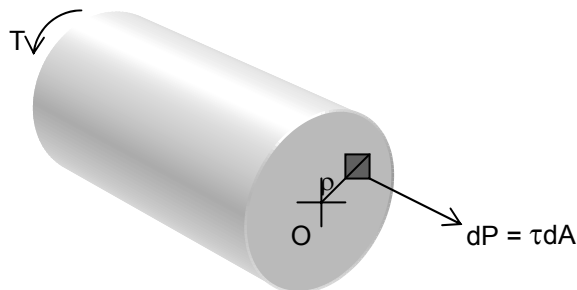
y se expresa de la forma siguiente:

$$\tau = (G\theta/L)\rho$$

En la anterior ecuación, los términos del paréntesis no dependen de la posición de la fibra que se esté considerando; además se nota la relación lineal que existe entre el esfuerzo de corte (τ) y la distancia radial (ρ) por considerar en la fibra. Esta ecuación es llamada ecuación de compatibilidad.

Siguiendo el procedimiento para la deducción de las fórmulas de torsión, se procede a realizar un corte perpendicular a su eje y se traza el diagrama de cuerpo libre de la sección, el cual se presenta en la siguiente figura:

Figura 41. **Diagrama de cuerpo libre de eje a torsión**



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 63

Al considerar un elemento diferencial de área dA , se debe recordar que $\tau = P/A$, por lo que $\tau = dP/dA$, luego se despeja el diferencial de fuerza:

$$dP = \tau dA$$

Este diferencial es perpendicular, debido que representa una fuerza resistente al momento torsionante T , y debe tener esa dirección respecto al radio para producir la máxima resistencia a la torsión.

Como la porción de eje está en equilibrio estático, se hace $\sum M = 0$, en donde se observa que:

$$T = \int \rho \, dP = \int \rho (\tau \, dA)$$

Ahora se combina esta última ecuación con la ecuación de compatibilidad encontrada anteriormente, la cual es:

$$\tau = (G\theta/L)\rho$$

Se observa que el término $G\theta/L$ es constante, así que se saca de la integral, por lo que el momento torsor T es:

$$T = (G\theta/L) \int \rho^2 \, dA$$

La integral $\int \rho^2 \, dA$ es la definición del momento polar de inercia, el cual se denota por J y es el momento de inercia referido a un eje perpendicular al plano del área, por lo que finalmente la fórmula de torsión queda así:

$$T = G\theta J/L$$

Esta ecuación se utiliza para deducir la fórmula de esfuerzo de corte, en función del momento torsor, el radio y el momento de inercia, por lo que se arregla de la manera siguiente:

$$G\theta/L = T/J$$

Y ahora se recuerda la ecuación de compatibilidad, en donde el término $G\theta/L$ es igual a τ/ρ , por lo que sustituye y despeja el esfuerzo de corte τ , que está en relación con el radio ρ :

$$\tau = T\rho/J$$

Además, en torsión regularmente se tiene de incógnita el ángulo de torsión θ , dado en radianes, por lo cual se despeja en la ecuación:

$$\theta = TL/JG$$

Esta fórmula es análoga con la de deformación ($\delta = PL/AE$), que es una observación, que se podría considerar para memorizarla fácilmente.

Se recuerda que para las fórmulas anteriores las dimensionales de cada elemento deben estar en el mismo sistema de medida, y que el ángulo de torsión en la fórmula estará en radianes

En cuanto al momento polar de inercia, como regularmente se utilizan ejes de sección llena, se hace la deducción de la fórmula, tanto en función del radio como del diámetro de la flecha.

Se recuerda que el momento de inercia es $\int \rho^2 dA$, pero puede encontrarse para cuando se utiliza el radio r en su totalidad, es decir, $\rho = r$ y se considera la fórmula del área de un círculo, por lo que se tiene:

$$A = \pi r^2$$

Y se encuentra el diferencial de área, derivando los dos lados de la ecuación con respecto de r:

$$dA = 2\pi r dr$$

luego se sustituye este valor en la integral, sustituyendo ρ por r, y cuyos límites son desde que $r = 0$ hasta que $r = r$:

$$J = \int r^2 (2\pi r) dr = 2\pi \int r^3 dr$$

Resolviendo la integral y valuando para los límites r y 0, queda el momento polar de inercia de la manera siguiente:

$$J = 2\pi r^4 / 4 = \pi r^4 / 2$$

En donde, se puede sustituir el radio como la mitad del diámetro \emptyset , ya que con frecuencia se trabaja con este dato; entonces sabiendo que $r = \emptyset / 2$, sustituyendo y resolviendo, se tiene el momento polar J para una sección llena:

$$J = \pi (\emptyset / 2)^4 / 32$$

$$\mathbf{J = \pi \emptyset^4 / 32}$$

Si se trabaja con una flecha tubular, el momento de inercia es:

$$\mathbf{J = \pi (\emptyset_M^4 - \emptyset_m^4) / 32}$$

Siendo la notación para el diámetro mayor y el diámetro menor \emptyset_M y \emptyset_m , respectivamente.

Una observación muy importante es que, en la ecuación general de esfuerzos de corte para torsión ($\tau = T\rho/J$), el esfuerzo máximo ($\tau_{\text{máx.}}$) se da cuando la distancia radial ρ tiene el valor del radio de la sección circular, es decir, $\rho = r$. Tomando en cuenta lo anterior y que $r = \varnothing/2$, donde \varnothing es el diámetro, se sustituye en la ecuación general de esfuerzos de corte la expresión $\rho = r = \varnothing/2$ y también el momento polar de inercia de una sección llena ($J = \pi\varnothing^4/32$), por lo que operando resulta finalmente:

$$\tau_{\text{máx.}} = 16T / \pi\varnothing^3$$

Al trabajar problemas de torsión, comúnmente se encuentra que la flecha está sometida a diversos pares torsores en toda su longitud. En estos casos, regularmente el diseño de una flecha depende de la restricción en la cantidad de rotación, que ésta pueda tener, es decir, del ángulo de rotación de un extremo de la flecha con respecto a otra. Como se había mencionado, podría darse el caso en que además de estar sometida a diversos pares torsores, la flecha cambie de dimensión en su sección transversal o de material, por lo que el ángulo de torsión de un extremo respecto a otro queda definido como la suma algebraica de todos los ángulos en la longitud de la flecha, es decir:

$$\theta = \sum TL/JG$$

En la cual T representa el momento torsor interno para cada tramo, L es la longitud del mismo, J está en función de la sección trasversal y G es el módulo de elasticidad cortante del material con el que se fabrica la pieza.

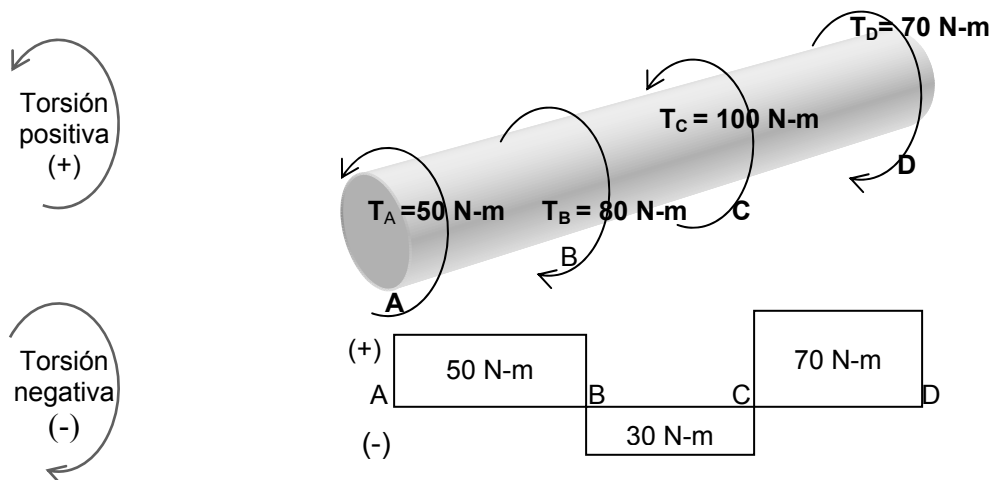
Para resolver problemas que en algunos libros de texto se presentan como “estáticamente indeterminados, cargados con pares de torsión”, se debe considerar que, cuando los dos extremos de un árbol sometido a momentos están fijos o empotrados, el ángulo de torsión de un extremo respecto al otro es igual a 0.

4.1.2 Diagrama de momentos torsionantes

Regularmente en donde se encuentra un poco de dificultad para resolver los problemas anteriormente descritos, es que en la sumatoria para el ángulo de torsión no se toma el momento torsor interno del tramo. Una solución práctica a este problema es el de introducir un diagrama de momentos torsionantes, que no es mas que la representación gráfica del momento torsor interno con respecto a la longitud del elemento.

Para elaborar dicho diagrama, solamente se tiene que considerar una convención de signos arbitraria, que depende de la dirección de los momentos torsores. Sin embargo, se propone la siguiente convención en la que se ilustra el trazo del diagrama de momentos torsionantes internos con la figura siguiente:

Figura 42. Diagrama de momentos torsionantes



En la figura anterior, existen cuatro momentos torsionantes aplicados a lo largo del eje ABCD. Si se estudia la convención de signos, se distinguen como momentos positivos T_A (50 N-m) y T_C (100 N-m) y como negativos los momentos T_B (80 N-m) y T_D (70 N-m). Tal como se observa, existe un equilibrio en la aplicación de dichos momentos, por lo que la sumatoria de momentos con respecto al eje de la figura debe de ser 0; de acuerdo con esto, debe existir también equilibrio en los momentos de torsión internos.

Para trazar el diagrama de momentos torsionantes, se comienza en el punto A, donde se aplica un momento de +50 N-m, por lo que el diagrama será positivo; al llegar al punto B está aplicado un momento de -80 N-m, se suma algebraicamente quedando un valor de -30 N-m, que es el momento interno del tramo BC y que también es trazado en el diagrama. Continúa a lo largo del eje hasta llegar al punto C, donde se aplica un momento de +100 N-m, por lo que se suma algebraicamente al valor de -30 N-m que se traía en el diagrama, y queda +70 N-m; finalmente se llega al punto D, donde existe un momento torsor de -70 N-m, el cual hace que el diagrama de momentos torsionantes finalmente llegue a 0. Esto indica que en el eje existe equilibrio interno y además se puede observar en el diagrama los valores internos de momentos para los tramos AB, BC y CD, los cuales son +50, -30 y +70 N-m respectivamente. Así también, se debe tener cuidado en el signo de cada momento, ya que es muy importante para cualquier aplicación, por ejemplo, para el ángulo de torsión en la longitud del sólido.

4.2 Transmisión de potencia mediante ejes

Una de las aplicaciones más importantes en torsión es el de transmitir potencia generada por un motor, a través de un eje o flecha (árbol de sección circular). Esto es usado, por ejemplo, para transmitir de un dispositivo o máquina a otra, como es el caso del eje impulsor de un carro, el eje de la hélice de un barco, etcétera. Cuando se utilizan para este fin, los ejes quedan sometidos a un par torsor, que está en función de la potencia generada y de la velocidad angular a la que gira. Entonces se define la relación entre estas variables de la manera siguiente:

$$P = T \omega$$

En donde el par torsor tiene dimensionales de momento y la velocidad angular ω está dada en radianes por segundo (rad/seg).

La potencia se define como la cantidad de trabajo desarrollada por unidad de tiempo, que en el sistema internacional SI tiene dimensionales de Watts (W). Un Watt se define como un Newton-metro (Joule) sobre la unidad de tiempo, que es el segundo. En el sistema inglés y en otros sistemas, no existe dimensional específica para la potencia, por lo que regularmente se trabaja en el SI, y se tiene el par torsor T y la velocidad angular ω en las dimensionales de ese sistema (Joule,rad/seg); sin embargo, se podrían considerar otras dimensionales de potencia tomando en cuenta las siguientes conversiones:

$$1 \text{ Caballo de fuerza (hp)} = 745.7 \text{ Watts}$$

$$1 \text{ Caballo de vapor (cv)} = 736 \text{ Watts} = 0.986 \text{ Caballos de fuerza}$$

Para trabajar en el sistema inglés, se podría hacer con las dimensionales de pies, libras y segundos. Resulta así que la potencia está en pie-libra/seg y se considera también la conversión siguiente:

$$1 \text{ Caballo de fuerza (hp)} = 550 \text{ pie-libra/seg}$$

Para la maquinaria, regularmente se conoce la frecuencia de rotación del eje (f), que es el número de vueltas o revoluciones que da por unidad de tiempo y está expresada en Hertz (Hz), la cual es un nombre especial para cuando se tiene dimensionales inversas de segundo (1/seg), como en este caso, por ser las revoluciones una cantidad adimensional. Se recuerda que una revolución tiene el valor de 2π radianes, entonces la velocidad angular dada en rad/seg se podría encontrar multiplicando la frecuencia (1/seg) por una vuelta (2π rad) y fácilmente se tiene rad/seg, que son las dimensionales de velocidad angular ω . Debido a lo anterior, se podría decir que:

$$\omega = 2\pi f$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación que relaciona la potencia con velocidad angular y torsión:

$$P = 2\pi f T$$

Cabe destacar que existe otra cantidad comúnmente usada en describir el comportamiento de un eje, que es revoluciones por minuto, denotada por rpm, para lo cual se considera la siguiente relación para poder encontrar la frecuencia:

$$f = \text{rpm}/60$$

Frecuentemente cuando se trabaja potencia, un problema muy común que se presenta es el de diseñar el eje, es decir, hallar las dimensiones y el material del mismo y se tiene como datos de “entrada” o conocidos la potencia que desarrolla un motor P , la frecuencia de rotación f y el esfuerzo cortante permisible para el material (τ_{perm}). Con los primeros dos datos, se encuentra el par torsor generado (T) y para encontrar el radio (r) del eje circular, se considera la siguiente relación:

$$J/r = T/\tau_{perm}$$

Ahora se expresa en función del diámetro \varnothing , recordando que $r = \varnothing/2$:

$$2J/\varnothing = T/\tau_{perm}$$

y sustituyendo el valor de $J = \pi \varnothing^4 / 32$:

$$\pi \varnothing^3 / 16 = T / \tau_{perm}$$

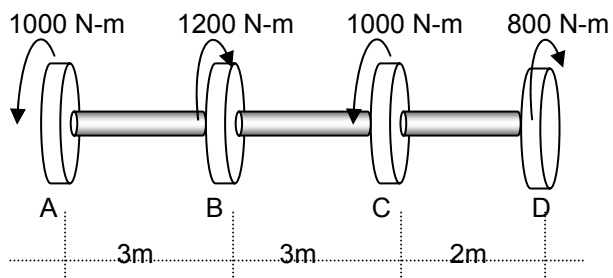
Para esto se puede obtener un valor del diámetro del eje.

4.3 Problemas resueltos del capítulo cuatro

4.3.1 Problema resuelto número ocho

Un árbol de acero de diámetro constante e igual a 60 mm está cargado mediante pares aplicados a engranes montados sobre él, según se muestra en la figura. Usando un módulo $G = 83 \text{ GPa}$, se debe calcular el ángulo de torsión del engrane D, respecto al engrane A, así como el esfuerzo cortante máximo al que se somete dicho árbol.

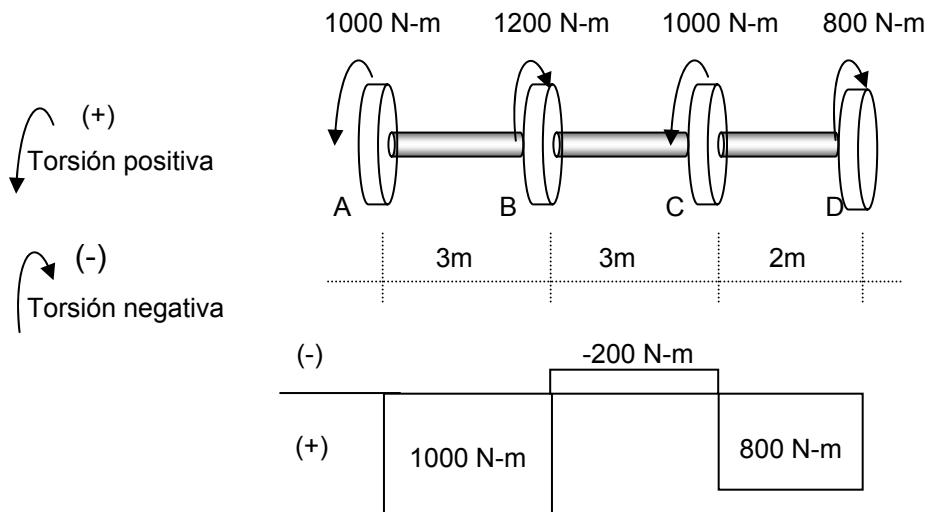
Figura 43. Problema resuelto número ocho



Para calcular el ángulo de torsión, se debe aplicar la fórmula $\theta = \sum(TL/JG)$, pero se debe encontrar primero la torsión interna aplicada en el árbol, y no se debe confundir con los momentos externos que se presentan.

Para encontrar de un manera adecuada el momento torsionante interno para cada longitud, se procede a realizar el diagrama de momentos torsionantes:

Figura 44. Diagrama de torsión; problema resuelto número ocho



Los valores del diagrama es la magnitud del momento torsionante interno para cada tramo, por lo que:

$$\theta = \sum (TL/JG)$$

$$\theta = (1/JG) [+1000 (3) - 200 (3) + 800 (2)]$$

siendo $G = 83 \text{ E}9 \text{ Pa}$ y $J = (\pi \phi^4) / 32$

$$J = [\pi (0.060)^4] / 32 = 1.27 \text{ E-}6 \text{ m}^4$$

$$\theta = 1/(JG) (4000)$$

$$\theta = (9.49 \text{ E-}6)(4000)$$

$$\theta = 0.038 \text{ Rad}$$

$$\theta = 0.038 (180/\pi) = 2.17^\circ$$

$$\theta = 2^\circ 10' 27''$$

Y para encontrar el esfuerzo cortante máximo, el cual se ubica a una distancia $\rho =$ radio del círculo, simplemente se aplica la fórmula $\tau_{\text{máx.}} = 16T/\pi\phi^3$; T es el mayor valor del diagrama de momentos torsionantes, es decir, 1000 N-m, así:

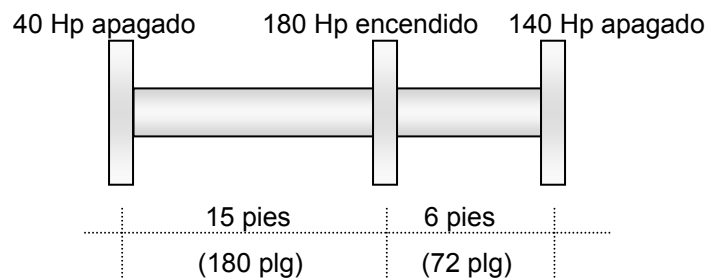
$$\tau_{\text{máx.}} = 16T/\pi\phi^3 = [16(1000)] / [\pi(0.060)^3]$$

$$\tau_{\text{máx.}} = 23.58 \text{ MPa}$$

4.3.2 Problema resuelto número nueve

Un motor transmite 180 HP a la polea motriz B. Suponiendo que en A se toman 40 HP y en C se toman 140 HP, diseñar la flecha para un esfuerzo cortante admisible de 8000 PSI y un ángulo de torsión admisible de 3° . La velocidad es de 630 rpm (revoluciones por minuto).

Figura 45. Problema resuelto número nueve



Para este problema de diseño, se hace la salvedad que se trabajará en el sistema inglés, considerando las recomendaciones que se hicieron en el apartado de potencia en torsión, para el diseño de flechas (pág. 86), así como también la conversión 1Hp = 550 lb-pie/seg.

Se procede a calcular $\pi\phi^3/16 = T/\tau_{perm}$; T es el mayor valor de momento torsionante en el árbol, que en este caso es el que corresponde a una potencia de 140 Hp, entonces:

$$140 (550) = 77000 \text{ pie-lb/seg (12)} = 924000 \text{ plg-lb/seg}$$

$$\phi^3 = 16T / \pi\tau_{perm}$$

$$\phi^3 = 16 (924000) / 8000\pi$$

$$\phi^3 = 588.24$$

$$\phi = 8.38 \text{ pulgadas} = 9 \text{ pulgadas}$$

Ahora se procede a encontrar el material del que estará fabricada la flecha, condición íntimamente relacionada con el módulo G. Se debe tener cuidado con la condición de que el ángulo de torsión no sobrepase un valor de $\theta = 3^\circ$, por lo que se aplica la definición para encontrar el ángulo de torsión y se despeja de la fórmula el valor de G; las torsiones son los valores correspondientes para el sistema inglés de 40 y 140 Hp, además de encontrar el momento de inercia para un diámetro de 4 pulgadas, así:

$$J = \pi\phi^4/32 = 644.12 \text{ plg}^4$$

$$T_1 = -40 \text{ Hp} = -22000 \text{ pie-lb/seg (12)} = -264000 \text{ plg-lb/seg}$$

$$T_2 = +140 \text{ Hp} = +77000 \text{ pie-lb/seg (12)} = +924000 \text{ plg-lb/seg}$$

$$\theta = 3^\circ (\pi/180) = 0.05236 \text{ radianes}$$

$$\theta = \sum (TL/JG)$$

$$G = (1/J\theta) [(924000) (72) - (264000) (180)]$$

$$G = (1/J\theta) (19008 \text{ E3})$$

$$G = (0.02965)(19008 \text{ E3})$$

$$\mathbf{G = 563,598 \text{ psi}}$$

5. VIGAS

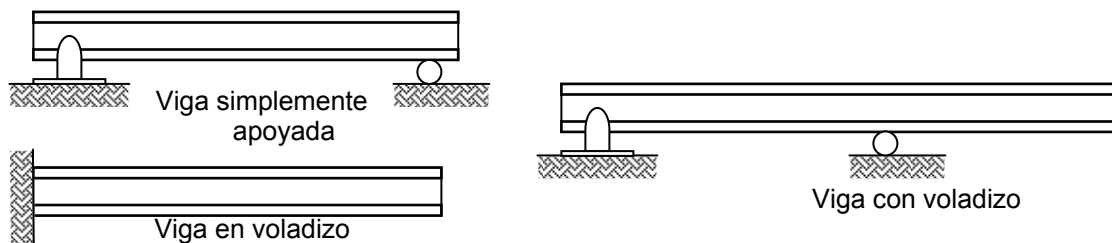
5.1 Tipos de vigas

Las estructuras comúnmente se clasifican de acuerdo con los tipos de cargas que soportan, por ejemplo: estructuras cargadas axialmente, estructuras sometidas a torsión, etcétera. Éstas regularmente son cargas que se dirigen a lo largo del eje longitudinal. En esta ocasión, se estudian las vigas, que son elementos con carga transversal, es decir, carga perpendicular a su eje longitudinal y que regularmente tienen secciones transversales constantes, además de ser relativamente largas en relación con su sección. Se clasifican según diferentes criterios así:

- **Por el modo en que están soportadas**

Se pueden clasificar, según se ilustra en la figura 46, como una viga simplemente apoyada, que es cuando se soporta por un pasador en un extremo y un rodillo en el otro; viga en voladizo, la cual está empotrada en un extremo y libre en el otro, y viga con voladizo, que tiene uno o ambos extremos libres situados más allá de los soportes.

Figura 46. **Tipos de vigas, según el soporte**



Adaptado de Hibbeler. Mecánica de materiales. Pág. 256

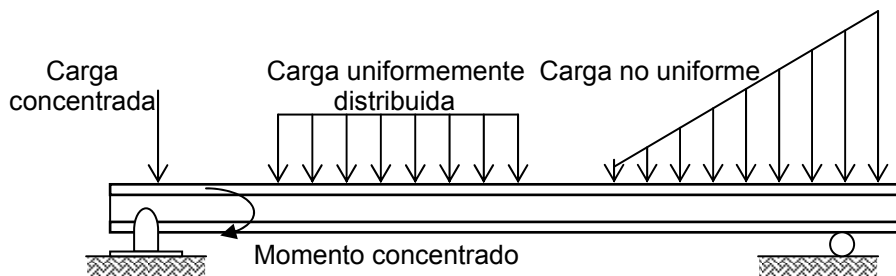
- **Por su determinación**

Además se puede estudiar las vigas como estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas; esto depende de si las tres ecuaciones de equilibrio estático ($\Sigma F_{\text{verticales}}$, $\Sigma F_{\text{horizontales}}$, $\Sigma M_{\text{momentos}}$) son suficientes o no para determinar sus reacciones. En la presente tesis, se consideran únicamente las primeras debido a que las vigas estáticamente indeterminadas requieren un mayor estudio, porque el valor de sus reacciones se encuentra combinando las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones auxiliares basadas en deformaciones.

5.1.1 Tipos de cargas en vigas

Ahora se clasifican los diversos tipos de cargas que se puede tener en una viga, con auxilio de la figura 47. Cuando una carga se aplica sobre un área muy pequeña, puede idealizarse como una carga puntual o carga concentrada, la cual es una carga única y tiene dimensionales de fuerza. También puede considerarse una carga que se reparte sobre el eje de la viga, es decir, en su longitud y se le llama carga distribuida, la cual se expresa en dimensionales de fuerza por unidad de longitud (N/m, Kg/cm, Lb/pie). Dicha carga puede distribuirse de una manera uniforme, si tiene un valor constante en cierto tramo, o no uniforme si varía con relación a la longitud de la viga. Además se pueden tener momentos concentrados.

Figura 47. Tipos de cargas en vigas



Cabe destacar que es de gran importancia idealizar las cargas uniformes o no uniformes, las cuales están representadas con figuras geométricas conocidas, como cargas puntuales que tienen la misma magnitud que su área y que están aplicadas en el centroide de dicha área. Para esto, es de mucha importancia recordar las fórmulas, tanto del área de una figura como de su centroide, por lo que se incluye la tabla siguiente:

Tabla II. **Áreas y centroides de figuras geométricas más utilizadas en vigas**



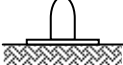

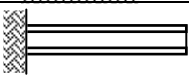

Tabla de áreas y centroides de figuras geométricas más utilizadas en vigas			
FIGURA	ESQUEMA	ÁREA (A)	CENTROIDE \bar{X}
Rectángulo		$b h$	$b/2$
Triángulo		$b h / 2$	$b/3$
Parábola		$b h / 3$ ó $2b h / 3$	$3 b / 4$

5.1.2 Cálculo de reacciones por tipos de apoyos

El encontrar el valor de las reacciones en una viga es el primer paso que se debe realizar para su análisis, y para hacerlo, se emplean las ecuaciones de la estática, y se esquematizan las reacciones que deben tener los apoyos, según su tipo y tomando en cuenta las diversas condiciones de carga que presenta la viga. Para el cálculo de reacciones, se propone considerar los pasos y recomendaciones siguientes:

- De acuerdo al tipo de apoyo, deben esquematizarse las posibles reacciones que tendrá la viga según la tabla III, para las condiciones de carga que se presentan y dibujar su diagrama de cuerpo libre. La forma de conocer la reacción que presenta el apoyo es preguntarse en qué sentido y dirección impide movimiento. Así el rodillo impide el movimiento vertical de la viga, por lo que presenta una reacción en ese sentido. El pasador o articulación impiden su movimiento horizontal y vertical, pero no su rotación, por lo que presenta 2 reacciones, una vertical y la otra horizontal. El empotramiento impide el movimiento en todo sentido, así como su rotación, y presenta reacción vertical, horizontal y un momento.

Tabla III. **Apoyos y reacciones**

TABLA DE APOYOS Y REACCIONES			
Apoyo	Esquema	Movimiento que impide	Reacciones
Rodillo			Vertical
Articulación			Horizontal Vertical
Empotramiento			Horizontal Vertical Momento

- Utilizando las ecuaciones de la estática, se busca un punto en donde la sumatoria de momentos sea cero, por ejemplo, en un rodillo o articulación y se hace la sumatoria respetando determinada convención de signos. Se debe tener mucho cuidado, tanto en el sentido del momento y su signo, así como en la magnitud de la fuerza de una carga distribuida, pues ésta equivale al valor numérico del área de carga, aplicada en el centroide de dicha área. Recordar que regularmente se tienen cargas distribuidas rectangulares y triangulares, por lo que se deben considerar las fórmulas para hallar el área de estas figuras, así como para su centroide.
- Si la sumatoria de momentos no es suficiente, se considera la sumatoria de fuerzas verticales, para así obtener una nueva ecuación que permita resolver el sistema, hasta encontrar el valor de las reacciones que se está buscando.
- Generalmente se aconseja comprobar si el valor de las reacciones está correcto; se hace una sumatoria de fuerzas verticales, las cual deben de anularse los valores de las cargas con los de las reacciones, para que la estructura esté en equilibrio.

Para entender de una mejor manera lo anterior, se puede revisar el problema propuesto al final de este capítulo y así comprobar los distintos pasos que se llevan a cabo para encontrar las reacciones. Es de mucha importancia el hallar el valor correcto de las mismas, pues es el primer paso para trazar diagramas que interesan en el diseño de vigas.

5.2 Fuerza cortante y momento flexionante

Como ya se mencionó anteriormente, las cargas por considerar en el estudio de vigas son transversales, es decir, perpendiculares al eje longitudinal de la viga. Los efectos internos que tienen estas cargas de diferentes tipos son los que se estudiarán a continuación, es decir, los esfuerzos internos generados, que son necesarios para mantener el equilibrio. Dichos esfuerzos no son los mismos en toda la longitud de la estructura, sino varían según la sección transversal que se analice, es decir, que difieren de un punto a otro a lo largo del eje de la viga. De esta manera, la fuerza transversal interna necesaria para mantener el equilibrio es llamada fuerza cortante, representada comúnmente con V y los esfuerzos cortantes generados por dicha fuerza son representados por τ , pues son esfuerzos de corte. Además, la resistencia interna necesaria para mantener el equilibrio en lo que respecta a la rotación de la viga se le llama momento flexionante, representada por M y sus esfuerzos correspondientes, se denominan esfuerzos flexionantes representados por σ .

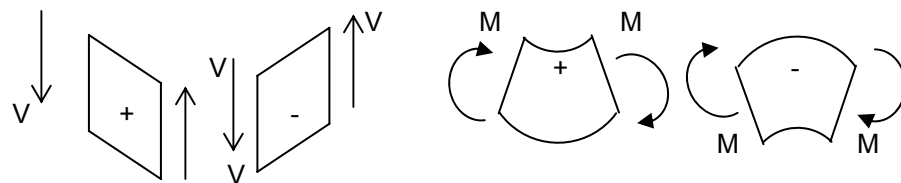
5.3 Construcción de diagramas: fuerza cortante y momento flexionante

Un diagrama de fuerza cortante o uno de momento flexionante, elaborado respectivamente para cada una de sus condiciones es una representación gráfica de estas variables, respecto a una distancia x medida desde el extremo izquierdo de la viga. Dibujado en un sistema de ejes coordenados que tiene por abcisa (eje x), la distancia a lo largo del eje longitudinal de la viga medida desde el extremo izquierdo de la misma y por ordenada (eje y) tiene el valor del cortante o momento flexionante, como corresponda al diagrama que se trabaje. Regularmente se grafican debajo del diagrama de la viga cargada, pues esto es una guía y facilita su elaboración e interpretación.

5.3.1 Relación entre carga, fuerza cortante y momento flexionante

Para facilitar la elaboración de los diagramas de cortante (V) y de momento (M), se puede estudiar la relación que tienen éstos, con la condición de carga en la viga, así como la existente entre ellos. Para comprender estas relaciones, se debe establecer una convención de signos, tanto para cargas como para cortantes y momentos, la cual es completamente arbitraria, pero aquí se establece la más utilizada en ingeniería. Así se tiene que las cargas que actúan sobre una viga son positivas, si su dirección es hacia arriba, y negativas hacia abajo. En algunos casos, existen momentos concentrados en la viga, los cuales son negativos si actúan en el sentido horario y positivos si hacen lo contrario. Para el caso de la fuerza cortante, la forma más sencilla de obtener el signo es colocarse en la fibra que se está analizando y observar las cargas a la izquierda de la sección de análisis, si éstas van hacia abajo, el cortante es negativo y viceversa. Para el signo del momento flexionante basta observar el efecto que este produce en la viga, ya que si al exagerar la deformación ésta tiene una concavidad hacia arriba, el momento flexionante es positivo, y negativo si presenta concavidad hacia abajo, lo cual coincide con la definición de signos descrita anteriormente. Para entenderlo de una mejor manera, se debe estudiar la figura 48, en donde se exageran las deformaciones de un elemento de la viga causadas por cortante y momento.

Figura 48. Convención de signos de fuerza cortante y momento flexionante

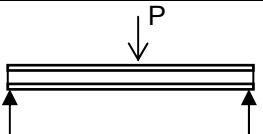
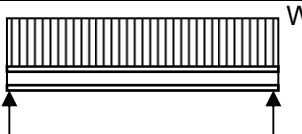
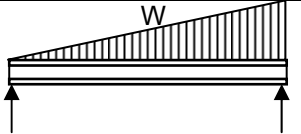
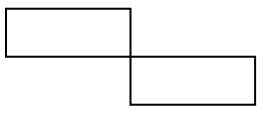
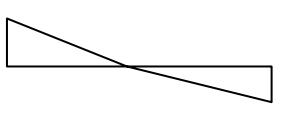
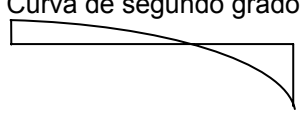
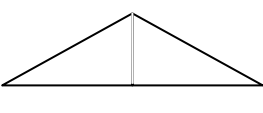
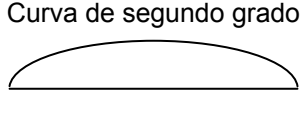
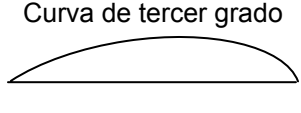


Adaptado de Gere y Timoshenko. Mecánica de materiales. Pág. 274

Se puede interpretar en la figura anterior que, para fuerza cortante, si la porción izquierda tiene dirección hacia arriba el cortante es positivo y viceversa, tal como se mencionó. Ahora para interpretar los momentos es conveniente observar la concavidad del segmento de viga que se está analizando, y en la que si al aplicarse produce una concavidad hacia arriba, a partir del eje neutro hacia arriba está en compresión y del eje neutro hacia abajo en tensión, como se estudiará más adelante.

Después de haber analizado la convención de signos, se puede mencionar que los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante pueden trazarse mucho más rápido, cuando se conoce la forma general de la curva para casos particulares de carga. Para explicar esto, se utiliza la tabla IV, destacando que regularmente se tendrá alguno de los casos ilustrados o una combinación de los mismos.

Tabla IV. **Relación entre diagramas de carga, cortante (V) y momento (M)**

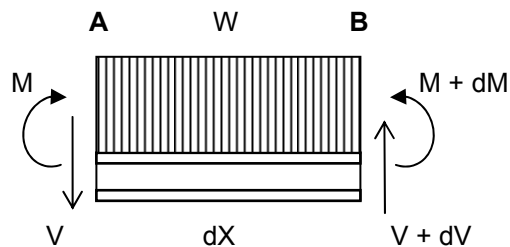
Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante en vigas			
	Carga puntual	Carga uniforme	Carga no uniforme
Diagrama de cargas			
Diagrama de cortante			
Diagrama de momentos		Curva de segundo grado 	Curva de tercer grado 

Adaptado de Hibbeler. Mecánica de materiales. Pág. 82

En la tabla anterior, se observa que si se tiene como condición de carga una fuerza puntual o concentrada, el diagrama de fuerza cortante será constante hasta y desde el punto donde se aplica dicha fuerza, es decir, que en este punto cambia su valor; y el diagrama de momento flexionante es una línea recta representada en un diagrama triangular. Si se tiene en la viga un diagrama de fuerzas uniformemente distribuido (constante), el diagrama de fuerza cortante será de forma triangular (ecuación de primer grado) y el de momento será una curva parabólica (ecuación de segundo grado). Y si se tiene un diagrama de carga no uniforme, en este caso triangular, en el diagrama de cortante se grafica una parábola y en el diagrama de momentos se obtiene una curva, cuya ecuación es de grado tres. Lo anterior pareciera complicado pero es muy simple pues cada situación es repetitiva en sus mismas condiciones de carga, que es un aspecto que facilita hacer los diagramas.

Una conclusión de lo anterior es demostrar la relación entre los diagramas por medio de un elemento diferencial extraído de una viga con carga uniforme, el cual se presenta a continuación en la figura 49:

Figura 49. **Deducción de las relaciones entre carga, cortante y momento**



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de materiales. Pág. 102

La figura anterior, como ya se dijo, representa un elemento diferencial con una carga distribuida, donde se observan dos puntos al principio y final del elemento (A y B), separados por un diferencial de distancia dx . En el punto inicial A, se aplica una fuerza cortante V y un momento flexionante M , ambos negativos y en el punto B está la fuerza cortante V más un diferencial de cortante dV , es decir, $V + dV$, y lo mismo ocurre para el momento flexionante M , que aplicado en el segundo punto será $M + dM$.

Ahora se consideran las ecuaciones de equilibrio estático; se hace una sumatoria de fuerzas verticales y se recuerda que la fuerza equivalente de una carga distribuida es el área de dicha carga, en este caso $W(dx)$, que está aplicada en su centroide.

$$\sum F_{\text{verticales}} = 0 \quad (V + dV) - V - W(dX) = 0$$

lo cual se reduce a:

$$dV/dX = W$$

La interpretación de la expresión anterior lleva a afirmar que la carga es la primera derivada de la fuerza cortante. Recordando el concepto de primera derivada, que no es otro que la pendiente de la recta tangente a la curva; en este caso, si se quiere encontrar la pendiente o el signo de la pendiente en la curva, que se tiene como representación de fuerza cortante, simplemente se debe observar el diagrama de cargas. Ahora se escribe la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$dV = W dX$$

La misma se integra tomando como límites de integración como V1 en el punto A (inicial) y V2 en el punto B (final), así:

$$\int dV = \int W dX$$

La integral de lado izquierdo valuando para los límites V2 y V1 se convierte en la expresión V2 – V1 y, en el lado derecho, se debe recordar que el término W dX representa el área de un elemento diferencial del diagrama de cargas comprendido entre A y B, de donde se obtiene:

$$\mathbf{V2 - V1 = \text{Área de carga}}$$

Esta expresión servirá más adelante para poner en práctica uno de los dos métodos para trazar diagramas de fuerza cortante y el momento flexionante, a partir de una condición de carga.

Ahora, regresando a la figura 49, se hace una sumatoria de momentos respecto al punto B, así:

$$\sum M_B = 0 \quad M + V dX + W (dX) (dX/2) - (M + dM) = 0$$

Observando en la expresión anterior que el tercer sumando contiene el cuadrado de un diferencial, el cual es un diferencial de segundo orden, que se puede despreciar frente a los de primer orden, en donde la ecuación finalmente toma la siguiente forma:

$$dM/dX = V$$

Esta ecuación establece que la primera derivada de la ecuación de momento flexionante da el valor de la fuerza cortante.

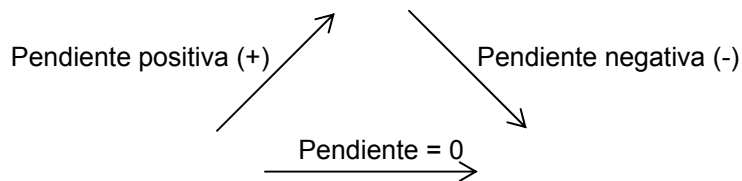
Integrando la anterior expresión para M_2 en el punto B y M_1 en el punto A, se obtiene:

$$M_2 - M_1 = \text{Área de fuerza cortante}$$

Para este caso, se debe recordar que al derivar una ecuación de grado n , resulta una de grado $n-1$. Entonces se puede interpretar que, cuando un diagrama de momentos presenta una curva, cuya ecuación es de tercer grado (ver tercera columna de tabla IV), se deriva para buscar su pendiente, es decir, el diagrama de fuerza cortante; ésta disminuye un grado y se convierte entonces en una curva parabólica de segundo grado. Luego, se deriva una vez más y se llega hasta la condición de carga, el cual es un diagrama triangular en dirección negativa y que puede representarse con una ecuación de primer grado.

Si se quisieran interpretar los diagramas con el criterio de la derivada, como pendiente de la recta tangente a la curva, se debe establecer que si se necesita conocer el signo de la pendiente de una gráfica, basta con observar el signo para el tramo o sección en la gráfica anterior. Antes de continuar, se puede observar la figura 50, con el objetivo de recordar el signo de la pendiente.

Figura 50. **Signo de la pendiente y pendiente nula**



Así pues, si se observa la tercera columna de la tabla IV (Pág. 98), se puede establecer que el diagrama de cargas es una figura triangular de signo negativo (hacia abajo), por lo que el diagrama de fuerza cortante debe ser una curva de segundo grado con pendiente tangente a la curva de signo negativo; entonces se obtiene el diagrama de fuerza cortante. Para dar una idea de la forma del diagrama de momentos, se puede ver que el signo del diagrama de fuerza cortante varía de positivo, pasando por el eje, es decir, con un valor de cortante igual a cero y luego es negativo. Interpretando lo anterior, se debe dibujar en el diagrama de momentos una curva de grado 3, con pendiente tangente a la curva primero positiva, luego con pendiente 0, que es donde se presenta un valor máximo para el valor de momento flexionante y después pasar a una pendiente negativa, hasta cerrar el diagrama. Se recuerda que a este procedimiento ya se estudió en cursos anteriores con el nombre de criterio de primera derivada.

Siguiendo con lo anterior, hay que recordar que la segunda derivada proporciona la concavidad de la curva, de acuerdo con la figura siguiente:

Figura 51. **Signo de concavidad**

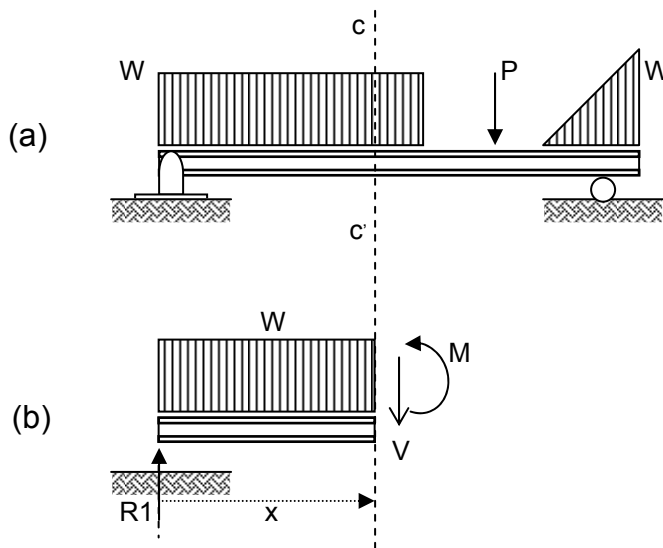


Entonces, si se quiere saber el signo de la concavidad de un diagrama, regularmente el de momentos, basta con conocer el signo del diagrama de cargas, como por ejemplo en los diagramas que se está analizando de la tabla IV, la concavidad del la gráfica de momentos es negativa, pues la condición de carga así lo indica, ya que se dirige hacia abajo.

5.3.2 Método de ecuaciones

El método de ecuaciones es una herramienta fundamental para la correcta interpretación y elaboración de los diagramas, tanto de fuerza cortante como de momento flexionante. Para explicarlo, se considera la figura 52 que representa una viga cargada y su diagrama de cuerpo libre obtenido al hacer un corte cualquiera c-c' a una distancia "x", que es medida desde su extremo izquierdo; esto es con el objeto de encontrar las fuerzas internas en la fibra donde se realizó el corte.

Figura 52. **Viga para análisis del método de ecuaciones**



Al hacer el diagrama de cuerpo libre del extremo izquierdo de la viga desde el corte, surge una fuerza interna \$V\$, que se supone hacia abajo y un momento \$M\$, tal como se ilustra en el inciso (b) de la figura 52. Para cumplir con la estática, se hace sumatoria de fuerzas verticales, de la manera siguiente:

$$\sum F_{\text{verticales}} = 0 \qquad R1 - W(x) - V = 0$$

despejando \$V\$:
$$V = R1 - W(x)$$

Por lo que se establece que el valor interno de la fuerza cortante a una distancia x , medida desde el extremo izquierdo de la viga y para cualquier condición de carga queda así:

$$V = \Sigma \text{ fuerzas a la izquierda}$$

Considerando siempre la convención de signos establecida anteriormente, la cual indica como positiva las cargas que actúan hacia arriba.

De igual manera, se realiza ahora la sumatoria de momentos respecto a la fibra en c , que se analiza, tomando en cuenta que el momento concentrado M no necesita “brazo” para actuar, y que V no hace ningún momento, además de que la fuerza de la carga distribuida está aplicada en el centroide ($x/2$) del área rectangular, y queda de la manera siguiente:

$$\Sigma M_{\text{momentos } c} = 0 \qquad M + W(x)(x/2) - R1(x) = 0$$

$$\text{despejando } M: \qquad M = R1(x) - W(x)(x/2)$$

Por lo que puede concluirse que el valor del momento flexionante en la fibra de análisis tiene un valor igual a la sumatoria de momentos a la izquierda de dicha fibra o posición. Se recuerda la convención de signos que se estableció anteriormente, según el efecto y la concavidad que cada carga hace sobre la viga, sin embargo, es mas fácil memorizar que si una fuerza es hacia arriba, el signo es positivo y viceversa, como se puede apreciar en la ecuación anterior. El valor del momento flexionante es entonces:

$$M = \Sigma \text{ momentos a la izquierda}$$

El método de ecuaciones es más fácil entenderlo, al realizar un ejemplo de una viga con determinada condición de carga; además se propone tomar en cuenta y seguir algunas de las recomendaciones que están a continuación:

- El correcto valor de las reacciones es fundamental para hacer de una manera adecuada todos los diagramas, y siempre se debe comprobar su valor con una sumatoria de fuerzas verticales.
- El método de ecuaciones consiste fundamentalmente en hacer diferentes cortes a una distancia “ x ”, desde el extremo izquierdo de la viga. Se debe realizar tantos cortes como cambios en la condición de carga transversal ocurran, y al ubicarse en cada uno de ellos se observa todas las cargas y los momentos que éstas producen y que están ubicados a la izquierda de nuestra sección de análisis; luego se aplican las definiciones establecidas anteriormente para el valor de la fuerza cortante y del momento flexionante en dicha posición, teniendo cuidado con la convención de signos ya asignada. Este procedimiento concluirá con una expresión o ecuación que estará en función de la distancia “ x ” y que es la ecuación del diagrama para cada intervalo. Para saber el valor en el diagrama que está buscando, simplemente se valúan los límites del intervalo para el análisis que se hizo.
- Para no confundir la convención de signos, se propone una forma aun más simplificada que la establecida anteriormente, que consiste en que el signo de la fuerza cortante y del momento depende de la dirección en la cual se dirija la carga, así pues, si la carga es hacia arriba, tanto el cortante como el momento serán positivos y viceversa, claro está que será así cuando se analicen cargas a la izquierda de un corte determinado.

- Se debe poner especial atención cuando en nuestra longitud de análisis aparezcan condiciones especiales de carga, como por ejemplo, cargas uniformes o no uniformes, así como momentos concentrados. Se debe recordar que dichas cargas equivalen a una fuerza puntual, que tiene magnitud igual al área de carga y está ubicada en el centroide de la misma. La principal dificultad que presentan este tipo de cargas es que todo debe quedar en función de la distancia “ x ” y se deben aplicar las fórmulas para su área y centroide, que expresen todo en función de esta variable. Para el caso de los momentos concentrados, éstos únicamente influirán en el diagrama de momentos flexionantes y se debe cuidar el signo que se le da, según su condición. Dichos momentos no necesitan ningún brazo para ser aplicados, sino que simplemente se suma o resta la magnitud del momento en la sumatoria que se realiza para encontrar el valor del momento flexionante, siempre y cuando éste se ubique a la izquierda de la sección de análisis.
- Además se debe recordar las relaciones establecidas entre las ecuaciones de los distintos diagramas, se podría aplicar también los criterios de primera y segunda derivada, para encontrar el signo tanto de la pendiente como de su concavidad.
- En ocasiones, se puede comprobar o simplificar el análisis al comparar las ecuaciones de momento flexionante, de cortante, pues simplemente al derivar la primera se obtiene la ecuación de la segunda, sin embargo, cabe destacar que no se podría integrar la ecuación de fuerza cortante para obtener la de momento, debido a que se pierde la constante “ c ” de integración, para lo cual se necesitaría condiciones iniciales para poder establecerla.

5.3.3 Método de áreas o semigráfico

El método de áreas o semigráfico es una alternativa para elaborar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante; se vale de las expresiones encontradas, a partir de la relación que existe entre los diagramas de carga, cortante y momento (págs. 101 y 102), recordando que quedaron de la manera siguiente:

$$V_2 - V_1 = \text{Área en diagrama de cargas } (V_2 - V_1 = A_C)$$

$$M_2 - M_1 = \text{Área en diagrama de fuerza cortante } (M_2 - M_1 = A_V)$$

Siendo V_2 la fuerza cortante al final de un tramo de viga y V_1 el cortante al inicio de ese tramo; A_C representa el área de cargas en el tramo que está analizando. M_2 es el momento flexionante en el extremo final, M_1 en el extremo inicial y A_V el área en el diagrama de fuerza cortante para ese tramo. En el momento de utilizar el método, se hacen diversas consideraciones en las que se debe tener mucho cuidado, como por ejemplo el signo del área en cada diagrama, así como cargas y reacciones, además de momentos concentrados que cambiarían el valor final para cada tramo, ya sea de la fuerza cortante en el primer caso y del momento flexionante en el segundo. Se considera también sumar o restar cargas y momentos concentrados que se presenten al final de cada tramo; y se recuerda que las fuerzas puntuales y las reacciones representan modificaciones en el diagrama de fuerza cortante únicamente, así como los momentos concentrados en el diagrama de momento flexionante.

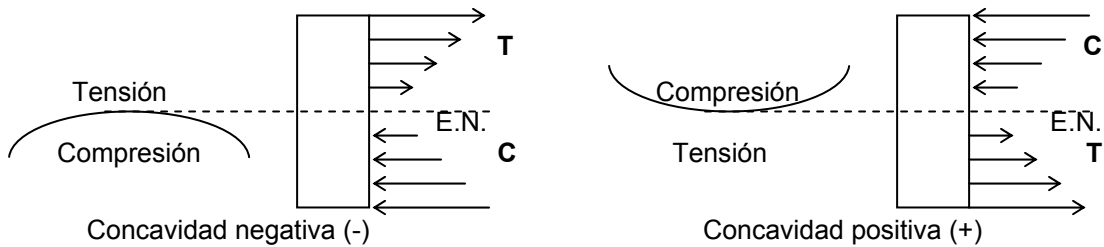
Para comprender de una mejor manera lo explicado anteriormente, se sugiere revisar los ejemplos propuestos al final del capítulo y comparar las ventajas y desventajas de cada uno de los métodos, recordando que sólo la práctica resolverá posibles dudas que se tengan al realizar los distintos diagramas, para determinada condición de carga en una viga.

5.3.4 Trazo de la curva elástica y su interpretación

La curva elástica es un esquema que muestra la forma que adquiere la viga, según la condición de carga y apoyos, si fuera muy flexible, es decir, que representa las deformaciones que tiene una viga. En el desarrollo de la presente tesis, únicamente se aprenderá a trazar o esquematizar la forma de esta curva; sin embargo, el cálculo de los valores de estas deformaciones, que se miden a partir de la posición inicial y la posición final de la viga, a través de una distancia llamada flecha, se estudiarán en cursos posteriores al de Resistencia de Materiales 1. Para trazar la curva elástica, la forma más sencilla es imaginar que la viga que se está estudiando es de un material que se deforme fácilmente, por ejemplo, el hule. La interpretación de la curva elástica es importante, para lo cual se debe tener bien claro el signo de la concavidad de la misma, según la convención de signos establecida anteriormente. Dicha importancia radica en que si la curva elástica tiene signo positivo (+), es decir, es cóncava hacia arriba, la parte superior de su sección transversal medida desde el eje neutro (E.N.) de la misma, estará sometida a compresión y la parte inferior a tensión. Lo contrario sucede con la concavidad negativa (-), en la parte superior de la sección trasversal estarán actuando esfuerzos de tensión y en la parte inferior esfuerzos de compresión.

Para ilustrar lo anterior se propone la figura siguiente:

Figura 53. Interpretación de la concavidad en curva elástica



Otro aspecto muy importante en su interpretación es la relación que ésta tiene con el diagrama de momentos. En realidad, el signo de dicho diagrama es el que da la concavidad de la curva elástica, es decir, que si se tuviera la ecuación de la curva elástica, la cual es factible encontrarla con métodos explicados en cursos posteriores al de Resistencia de Materiales 1, y si se hace la segunda derivada de dicha ecuación para cualquier tramo, el resultado no es otro que la ecuación que representa la forma del diagrama de momentos en dicho tramo. Esta propiedad es importante también al encontrar un momento nulo ($M = 0$), pues representa un cambio de signo en dicho diagrama y, por lo tanto, un cambio de concavidad en la curva elástica, por lo que se puede concluir que cuando el momento es cero, existe un punto de inflexión o cambio de concavidad en esta curva. El determinar exactamente dónde se presenta este punto equivale a reconocer los tramos de la viga, para la cual en su sección transversal está actuando a partir del eje neutro, ya sea esfuerzos de tensión o de compresión, ya que esto está íntimamente relacionado con el signo de la concavidad, como se estudió anteriormente, y es allí donde radica la importancia de conocer la forma de este diagrama en toda la longitud de una viga.

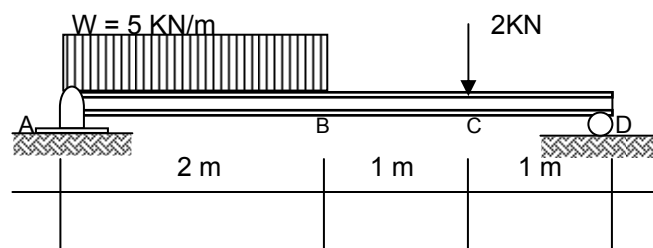
5.4 Problemas resueltos del capítulo cinco

Para poder concluir y entender todas estas recomendaciones, la mejor manera de resolver las dudas que hayan surgido es con la resolución de ejemplos, los cuales se proponen a continuación:

5.4.1 Problema resuelto número diez

Encontrar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante con sus valores, así como las ecuaciones que los describen para la viga mostrada en la figura 54. Dibujar la curva elástica de la viga.

Figura 54. Problema resuelto número diez



Como primer paso, se debe establecer el valor de cada una de las reacciones; para hacerlo, valerse de las ecuaciones de la estática y se hace sumatoria de momentos respecto a cualquier apoyo; en este caso se usa como punto de referencia la articulación del punto A. Regularmente se recomienda, para simplificar el análisis, hacer la sumatoria de momentos con respecto a un apoyo que esté en un extremo, pues se tiene mayor facilidad para encontrar el signo de los momentos, aunque en realidad es invariable respecto de qué apoyo se haga la sumatoria.

Se hace la sumatoria de momentos en el punto A, así:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad \curvearrowright (+) \quad & 2(5)(1) + 2(3) - R_D(4) = 0 \\ & R_D = 4 \text{ KN} \end{aligned}$$

Como práctica, se podría hacer la sumatoria de momentos respecto del punto D, aunque con la sumatoria de fuerzas verticales habría sido suficiente para encontrar el valor de la otra reacción.

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 \quad \curvearrowleft (+) \quad & 2(1) + 2(5)(3) - R_A(4) = 0 \\ & R_A = 8 \text{ KN} \end{aligned}$$

Para comprobar que el valor de las reacciones es el correcto, se hace la sumatoria de fuerzas verticales, así:

$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 \quad & 5(2) + 2 - R_A - R_D = 0 \\ & R_A + R_D = 12 \text{ KN} \\ & 8 + 4 = 12 \text{ KN} \\ & 12 = 12 \text{ KN} \end{aligned}$$

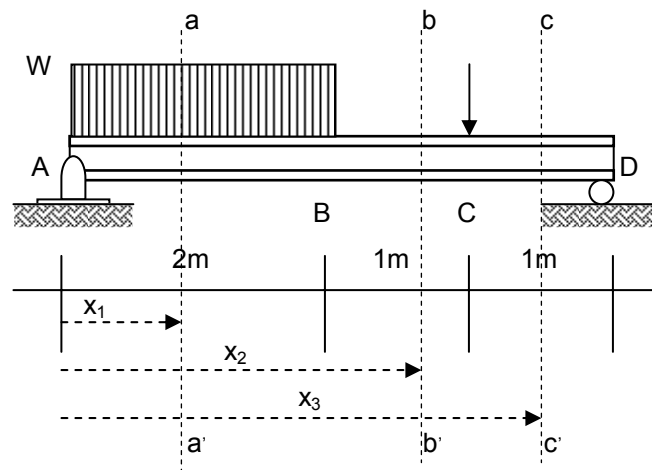
Por lo que se establece que el valor de las reacciones es el adecuado, pues tiene la misma magnitud que todas las cargas aplicadas en la viga.

Ahora se debe establecer el número de cortes y los intervalos para los que se va a hacer el análisis; para el efecto, hay que recordar que dicho número de cortes es igual al número que se estima que va a variar en el diagrama, tanto de corte como de momento. Como se puede observar en la viga del presente ejemplo, existen cuatro variaciones para la condición de carga, ubicadas en los puntos A, B, C y D, por lo que se debe hacer tres cortes en la longitud de la viga, pues así se estima que será el número de variaciones.

Sin embargo, lo que en realidad interesa es establecer el valor en magnitud, tanto de la fuerza cortante como del momento flexionante en cada uno de esos puntos, por lo que se debe valuar en cada una de las ecuaciones los límites del intervalo, en donde varía el punto de cada corte.

Para entender de una mejor manera lo anterior, se desarrolla el ejemplo, efectuando los cortes que se indican en la figura siguiente:

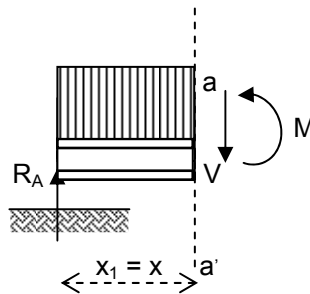
Figura 55. **Cortes en viga, problema resuelto número diez**



El corte a-a' se podría haber hecho en cualquier lugar entre los puntos A y B; en este caso, se hizo a una distancia x_1 medida desde el extremo izquierdo de la viga, y los límites para dicha distancia serían desde que x_1 es 0 en el punto A, hasta que toma el valor de 2 en el punto B, es decir, que se puede expresar el intervalo como $0 \leq x_1 \leq 2$, el cual no es otro que el intervalo en el que se pudo realizar el corte.

Se procede ahora a analizar y encontrar la ecuación que describe el comportamiento, tanto de la fuerza cortante como del momento flexionante para ese intervalo, considerando el esquema presentado en la figura 56. Cabe destacar que el resumen de las ecuaciones y la forma de la gráfica final se presenta en la página 121, por lo que se considera conveniente ir analizando las características de la gráfica, después de trabajar cada tramo.

Figura 56. Corte a-a', problema resuelto número 10



Para la figura anterior, se debe recordar que se puede encontrar el valor de V y M en la fibra a analizar por medio de sumatorias de fuerzas y momentos a la izquierda del corte. Para cada análisis, siempre se especifica el intervalo en el que varía la distancia x .

$$0 \leq x \leq 2$$

$$V = \sum F_{izq}$$

$$V = R_A - W(x)$$

$$V = 8 - 5(x)$$

La expresión anterior es la que describe el comportamiento del diagrama de fuerza cortante para el intervalo dado. Cabe destacar que representa una ecuación de primer grado, es decir, una línea recta y que coincide con la relación que existe cuando se presenta una carga constante y la forma triangular del diagrama de fuerza cortante.

Ahora se procede a valorar dicha ecuación en cada intervalo:

$$V = 8 - 5x \begin{cases} x = 0, V = 8 \text{ KN} \\ x = 2, V = -2 \text{ KN} \end{cases}$$

Como se puede ver, el valor de la fuerza cortante en $x = 0$ (punto A) coincide con el valor de la reacción en el mismo punto, y es de valor positivo pues esta fuerza va hacia arriba. El valor del cortante en $x = 2$ representa un valor negativo de -2, por lo que tiene un cambio de signo en la gráfica.

Este cambio de signo es de mucha importancia y se necesita saber exactamente a qué distancia x se ubica el cortante nulo, por lo que la ecuación que representa la fuerza cortante se iguala a cero y despeja el valor de x , así:

$$\begin{aligned} 8 - 5x &= 0 \\ x &= 8/5 \\ \mathbf{x = 1.6 \text{ para } V = 0} \end{aligned}$$

Entonces se establece que el valor nulo en el esfuerzo cortante se da a una distancia $x = 1.6$ metros, desde el extremo izquierdo de la viga. Más adelante se explicará la importancia del anterior proceso.

Ahora se procede a averiguar la ecuación del momento flexionante para este tramo, aplicando la definición para el método de ecuaciones y recordando que la sumatoria de momentos se realiza respecto al punto en donde se realiza el corte, considerando la convención de signos ya establecida, según la concavidad de la viga y haciendo la carga distribuida equivalente a una carga puntual, de magnitud igual al área de dicha carga, en este caso rectangular ($A = b h$), la cual está aplicada en su centroide ($b/2$).

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x_1 \leq 2 \\
 M &= \sum M_{izq} \\
 M &= R_A(x) - W(x)(x/2) \\
 M &= 8x - 5x^2/2 \\
 M &= 8x - 2.5x^2
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior representa lógicamente una parábola (ecuación de segundo grado). Ahora se procede a valuar los límites del intervalo para la ecuación obtenida:

$$M = -2.5x^2 + 8x \begin{cases} x = 0, M = 0 \\ x = 2, M = 6 \text{ KN-m} \end{cases}$$

El resultado anterior corresponde a un valor de momento flexionante igual a cero en el extremo izquierdo de la viga y un valor de 6 KN-m a una distancia $x = 2\text{m}$. Recordar que en el diagrama de fuerza cortante se pasa por un valor de cortante nulo, y según la relación que existe entre el signo del diagrama de fuerza cortante y la pendiente de la recta tangente a la curva, en el de momentos, se tiene un cambio de signo en dicha pendiente, por lo que se puede establecer, cuando el cortante es 0 un valor nulo en la pendiente de la recta tangente, es decir, un valor máximo en el diagrama de momentos.

Para hallar dicho valor, se debe sustituir el valor de la distancia x en donde se presenta el cortante nulo, el cual anteriormente se estableció como $x = 1.6$ metros.

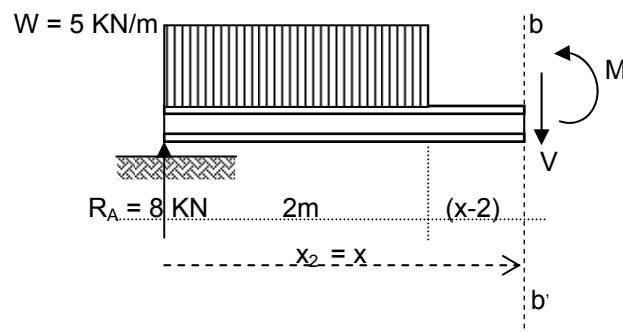
$$M = 8x - 2.5x^2 \text{ para } x = 1.6$$

$$x = 1.6, M = 6.4 \text{ KN-m}$$

Se puede observar que el valor del momento es efectivamente máximo en este punto. Para encontrar la concavidad de la parábola que representa este diagrama, se puede recurrir a dos aspectos: el primero, recordando el criterio de segunda derivada, que en este caso es el diagrama de cargas y como se ve que este es negativo, entonces la concavidad del diagrama de momentos será de este signo. Un criterio alternativo es establecer dicha concavidad evaluando el signo del término x^2 en la ecuación de la parábola, que en este caso es negativo, por lo que la concavidad tendrá también este signo.

Ahora se analiza el corte b-b', el cual se podría hacer a una distancia x_2 desde el extremo izquierdo de la viga, es decir, en cualquier fibra entre los puntos B y C. Dicho corte tiene entonces como intervalo de variación desde que x está en el punto B, es decir $x = 2$, hasta que x llega al punto C, o sea $x = 3$, tal como se ilustra en la figura 57.

Figura 57. Corte b-b', problema resuelto número diez



Se procede ahora a encontrar las ecuaciones que describan cada uno de los diagramas:

$$2 \leq x \leq 3$$

$$V = \sum F_{izq}$$

$$V = R_A - W(2)$$

$$V = 8 - 5(2)$$

$$V = -2 \text{ KN}$$

Al analizar la ecuación que se obtuvo para este intervalo, se concluye que ésta representa una cantidad constante para $V = -2 \text{ KN}$, y si se quiere valuar para los límites del intervalo, se establece que no existe una variable en donde se pueda hacer, por lo que la fuerza cortante es constante y obedece a la relación entre carga y cortante, pues no se tiene ninguna condición de carga para este tramo.

Para encontrar el momento flexionante, se procede a realizar la sumatoria de momentos en el punto donde se hizo el corte, poniendo mucha atención el brazo de momento, en cada una de las cargas, especialmente en la carga distribuida, cuyo radio de momento, desde el punto de corte será la distancia x menos 1 metro, que es donde se ubica el centroide del área rectangular.

$$2 \leq x \leq 3$$

$$M = \sum M_{izq}$$

$$M = R_A(x) - 2(W)(x-1)$$

$$M = 8x - 10(x-1)$$

$$M = 8x - 10x + 10$$

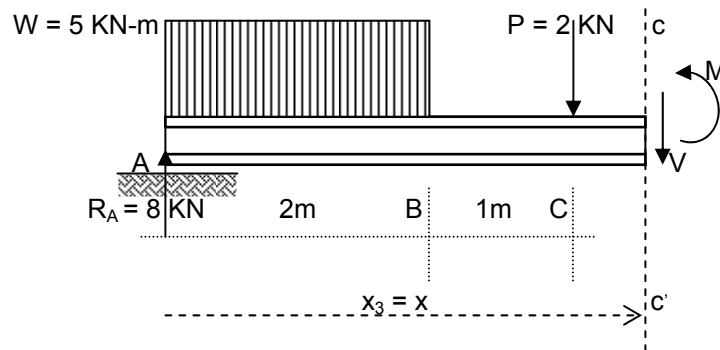
$$M = -2x + 10$$

La ecuación anterior de grado uno representa una línea recta, siguiendo la relación entre los diagramas. Ahora se valúan en la ecuación los límites del intervalo, así:

$$M = -2x + 10 \left\{ \begin{array}{l} x = 2, M = 6 \text{ KN-m} \\ x = 3, M = 4 \text{ KN-m} \end{array} \right.$$

Se procede por ultimo a analizar el corte c-c', el cual podría estar ubicado en cualquier fibra entre los puntos C y D, por lo que su intervalo de variación será desde que x está en C (x = 3m), hasta que x finalmente llega al punto D (x = 4m), tal como se ilustra en la figura siguiente:

Figura 58. Corte c-c', problema resuelto número diez



Se encuentra ahora el valor de la fuerza cortante para esta fibra, siguiendo el procedimiento ya explicado anteriormente.

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 4 \\ V &= \sum F_{izq} \\ V &= R_A - 2(W) - 2 \\ V &= 8 - 2(5) - 2 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{-4 \text{ KN}} \end{aligned}$$

El valor anterior es constante para este intervalo y hace que exactamente cierre el diagrama de fuerza cortante, al finalizar con el valor de la reacción en B (R_B), el cual tiene el mismo valor, pero con signo contrario, así:

$$V = -4 + R_B$$

$$V = -4 + 4 = 0 \text{ KN}$$

Para el diagrama de momento flexionante, se tiene que hacer la sumatoria de momentos, respecto a la posición de la fibra en el corte c-c; se estudia cuidadosamente el brazo de cada una de las fuerzas en función de la distancia x y luego se valúa para el intervalo especificado.

$$3 \leq x \leq 4$$

$$M = \sum M_{izq}$$

$$M = 8(x) - 2(W)(x-1) - P(x-3)$$

$$M = 8x - 10x + 10 - 2x + 6$$

$$M = -4x + 16$$

$$M = -4x + 16 \left\{ \begin{array}{l} x = 3, M = 4 \text{ KN-m} \\ x = 4, M = 0 \text{ KN-m} \end{array} \right.$$

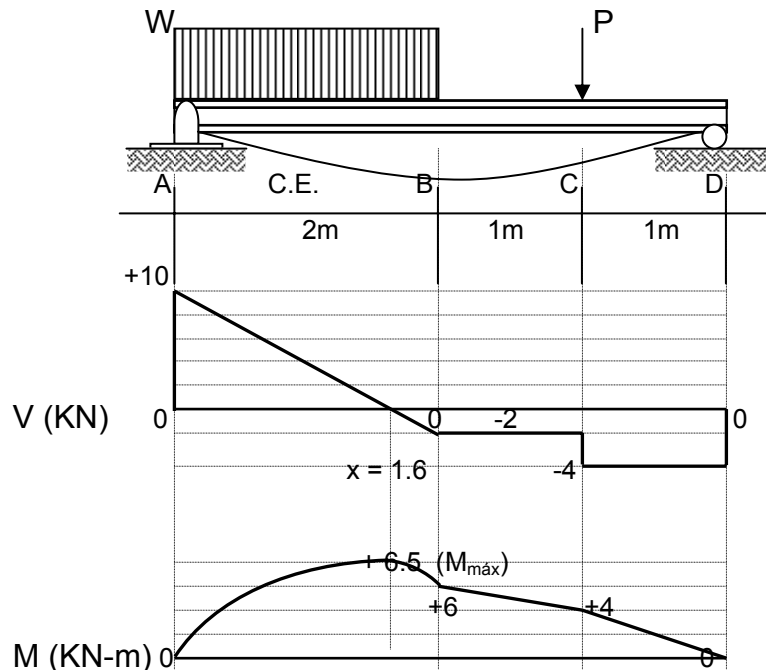
El valor del diagrama de momentos es de 0 KN-m al final de la viga, por lo que efectivamente “cierra”. Se debe destacar también el valor inicial para este intervalo ($x = 3$), que coincide exactamente con el valor final del intervalo anterior, como debe suceder, siempre que esté correcto el análisis para encontrar los valores de estos diagramas.

En resumen, se propone la siguiente tabla para recordar los valores y ecuaciones que se obtuvieron en el desarrollo del presente ejemplo, la cual será de mucha utilidad para trazar finalmente los diagramas de la figura 59.

Tabla V. **Tabla resumen; problema resuelto número diez**

Tabla resumen, problema resuelto número diez						
Corte	Intervalo	Ecuación	Grado y forma	Valor Inicial (KN, KN-m)	Valor Final (KN, KN-m)	Observación
a-a'	$0 \leq x \leq 2$	$V = -5x + 8$	1, triangular	$V = 8$	$V = -2$	Cambio de signo de V en $x=1.6$, valor del momento $M_{\max} = 6.5$
		$M = -2.5x^2 + 8x$	2, parabólica	$M = 0$	$M = 6$	
b-b'	$2 \leq x \leq 3$	$V = -2$	0, constante	$V = -2$	$V = -2$	
		$M = -2x + 10$	1, triangular	$M = 6$	$M = 4$	
c-c'	$3 \leq x \leq 4$	$V = -4$	0, constante	$V = -4$	$V = -4$	
		$M = -4x + 16$	1, triangular	$M = 4$	$M = 0$	

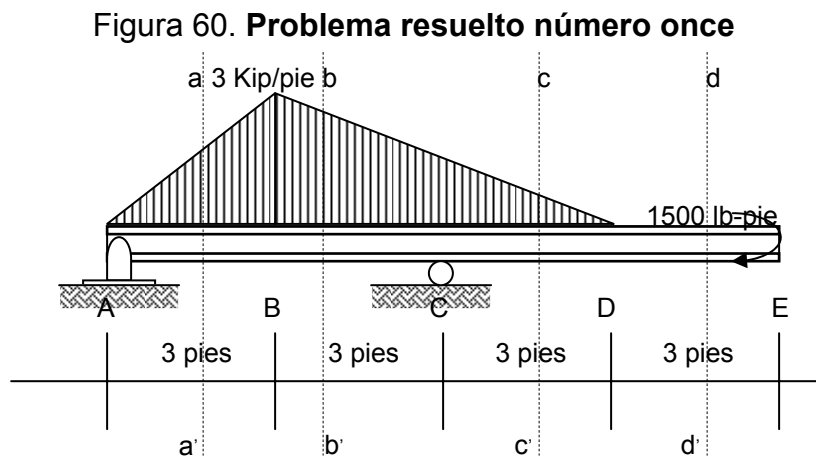
Figura 59. **Diagramas; problema resuelto número diez**



Ahora se procede a realizar otro ejemplo con un mayor grado de dificultad que el anterior, omitiendo algunas explicaciones y anotaciones que son obvias para el conocimiento que ya se tiene, después de haber estudiado todos los apartados del presente capítulo. El diagrama final para este ejemplo se presenta en la página 130, por lo que se recomienda revisarlo constantemente mientras se trabaja el problema.

5.4.2 Problema resuelto número once

Encontrar el diagrama de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga con la condición de carga que se muestra en la figura:



Al observar la figura, nótese que se presentan diversas condiciones de carga que no se han estudiado. Para poder resolverlo, el primer paso es analizar el número y la ubicación de los cortes transversales, que ayudarán a encontrar la respuesta, que obviamente es en el tramo en que existe una misma carga, tal como se muestra en la figura. Se procede además a encontrar las reacciones y las ecuaciones que describirán los diagramas, tanto de fuerza cortante como de momento flexionante, teniendo mucho cuidado al calcular el valor de las áreas de carga y la ubicación de sus centroides.

Además se debe tener cuidado con el momento concentrado, que también se muestra en la viga, pues éste no necesita “brazo” para actuar y solamente afecta para encontrar las reacciones, así también en el cálculo del diagrama de momentos; es nula su participación en el diagrama de fuerza cortante, pues internamente no tiene ningún efecto sobre la viga en cuanto a este tipo de fuerza.

- Cálculo de reacciones

$$\sum M_A = 0 \quad M_{\text{concentrado}} + \frac{1}{2}(b)(h)r_{\text{radio}} + \frac{1}{2}(b)(h)r_{\text{radio}} - R_C(r_{\text{radio}}) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 1500 + \frac{1}{2}(3)(3000)(2) + \frac{1}{2}(6)(3000)(5) - R_C(6) = 0$$

$$R_C = 55500/6$$

$$R_C = 9250 \text{ lb.}$$

$$\sum F_{\text{verticales}} = 0 \quad R_A + R_C = A_{\text{cargas}}$$

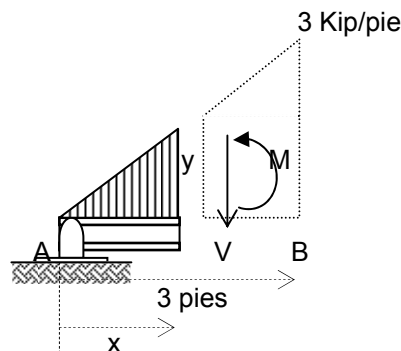
$$R_A + 9250 = \frac{1}{2}(3)(3000) + \frac{1}{2}(6)(3000)$$

$$R_A = 4250 \text{ lb}$$

Figura 61. Corte a-a'; problema resuelto número once

Corte a-a'

$$0 \leq x \leq 3$$



Al observar el corte en la figura, se puede notar que la distancia “x” a la que se analiza la fibra forma una carga triangular con altura “y” desconocida.

Dicha altura se puede encontrar a través de una relación de triángulos, entre la carga mostrada y la carga total al final del intervalo, en la cual se conoce tanto la base (3 pies) como la altura (3 Kip/pie). Dicha relación queda de la manera siguiente, con el claro objetivo de encontrar la altura desconocida en función de la variable x .

$$\begin{aligned}
 y/x &= 3000/3 \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{1000 x} \\
 M &= \sum M_{izq} \quad M = R_A (x) - \frac{1}{2}(x)(y)(x/3) \\
 M &= 4250x - \frac{1}{2}(x)(1000 x)(x/3) \\
 M &= 4250x - 166.67x^3 \\
 \mathbf{M} &= \mathbf{-166.67x^3 + 4250x} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x = 0, M = 0} \\ \mathbf{x = 3, M = 8250 \text{ lb-pie}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Se puede aplicar la relación entre la ecuación de cortante y la de momento, por lo que se deriva respecto a la variable x la anterior ecuación de momentos, para obtener la de esfuerzo cortante para el mismo tramo:

$$\begin{aligned}
 V &= dM/dx \\
 \mathbf{V} &= \mathbf{-500x^2 + 4250} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x = 0, V = 4250 \text{ lb}} \\ \mathbf{x = 3, V = -250 \text{ lb}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Al analizar los valores para la fuerza cortante, se puede observar que existe un cambio de signo en su diagrama, por lo que existe un momento máximo para este tramo.

Este momento máximo coincide con el valor de “x”, para el cual se presenta el cortante nulo. Para encontrar dicho valor, iguala a 0 la ecuación de cortante y se despeja “x”, así:

$$-500x^2 + 4250 = 0$$

$$x = 2.915476 \text{ pies}$$

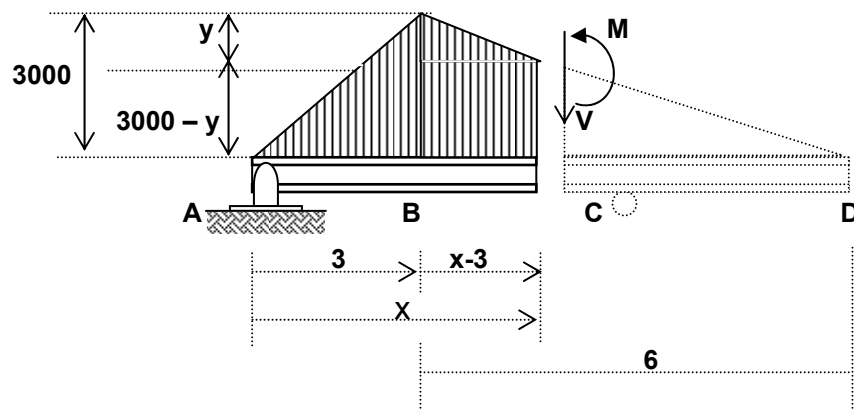
Se valúa este valor en la ecuación de momento flexionante, así:

$$M = -166.67x^3 + 4250x \left\{ \begin{array}{l} x = 2.915476, M_{\text{máx}} = 8260.43258 \text{ lb-pie} \end{array} \right.$$

Figura 62. Corte b-b'; problema resuelto número once

Corte b-b'

$$3 \leq x \leq 6$$



Al hacer la sumatoria de momentos a la izquierda en la posición del corte b-b', surge una figura triangular, tal y como se muestra, la cual está compuesta de un rectángulo, en este caso de base x-3 y altura 300-y, combinada con un triángulo, en este caso de igual base y de altura “y”. Además se puede observar un triángulo hacia el otro sentido y la reacción en A (4250 lb).

Se plantea el esquema y se realiza la relación de triángulos y la sumatoria de momentos a la izquierda, cuidando el punto de aplicación de las cargas distribuidas, el cual es el centroide de cada área en función de la distancia “x” y cuyo brazo de momento se mide a partir de la posición del corte.

$$y/x-3 = 3000/6$$

$$y = 500x - 1500$$

$$M = 4250(x) - 1/2(3)(3000)(x-2) - 1/2(x-3)(y)2/3(x-3) - (x-3)(x-3)(3000-y)1/2(x-3)$$

Se sustituye el término “y” por $500x - 1500$ y se efectúa el proceso algebraico; por lo que al final, surge la ecuación siguiente, que representa el diagrama de momentos para este intervalo:

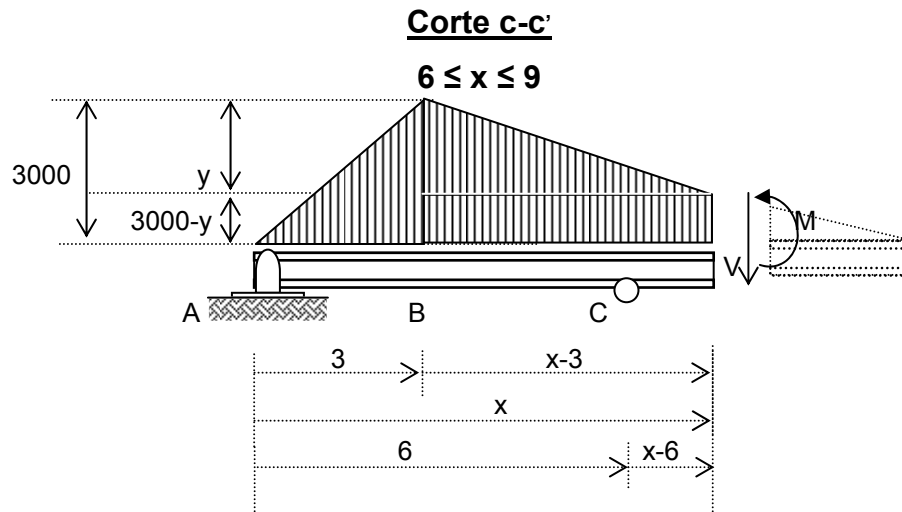
$$M = 83.3333 x^3 - 2250 x^2 + 11000 x - 6750 \left\{ \begin{array}{l} x = 3, M = 8250 \text{ lb-pie} \\ x = 6, M = -3750-72 \text{ lb-pie} \end{array} \right.$$

Para encontrar la ecuación de fuerza cortante y sus valores en el intervalo, simplemente se deriva con respecto de la variable “x” y se valúa, así:

$$V = 250 x^2 - 4500 x + 11000 \left\{ \begin{array}{l} x = 3, V = -250 \text{ lb} \\ x = 6, M = -7000 \text{ lb} \end{array} \right.$$

Ahora se procede a realizar el corte c-c', ubicado después del punto C, es decir, que este corte incluye la segunda reacción, como se muestra en la figura:

Figura 63. Corte c-c'; problema resuelto número once



La relación de triángulos en este corte, así como la sumatoria de momentos a la izquierda de su ubicación son exactamente iguales a los establecidos en el corte anterior, con la única diferencia de que en este corte ya se incluye la reacción ubicada en el punto C (9250 lb), y cuyo brazo de momento es x-6, así pues:

$$M = 83.3333 x^3 - 2250 x^2 + 11000 x - 6750 + 9250 (x-6)$$

$$M = 83.3333 x^3 - 2250 x^2 + 20250 x - 62250 \begin{cases} x = 6, M = -3750 \text{ lb-pie} \\ x = 9, M = -1500 \text{ lb-pie} \end{cases}$$

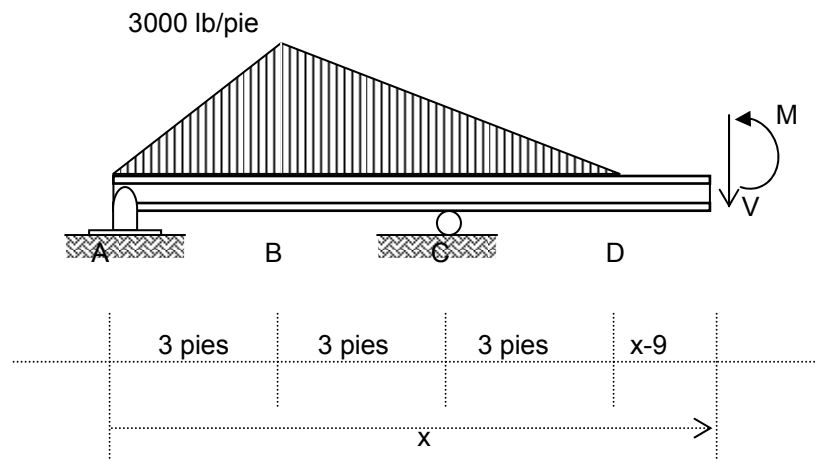
$$V = 250 x^2 - 4500 x + 20250 \begin{cases} x = 6, V = -2250 \text{ lb} \\ x = 9, V = 0 \text{ lb} \end{cases}$$

Al evaluar los valores de fuerza cortante para los límites del intervalo, se puede ver que el cortante a una distancia $x = 6$ (-3750 lb-pie) no coincide con el valor que proporcionó la ecuación del intervalo anterior para la misma distancia (-7000-pie); sin embargo, esto se debe a la reacción positiva que está actuando en C ($R_C = 9250$ lb) y que es la causa del salto en el valor del cortante a dicha distancia, pues se puede ver que al sumar algebraicamente el valor en $x = 6$ de -7000 lb con el valor de la reacción, el nuevo valor para el cortante es correcto. Además, se puede observar que el valor de fuerza cortante para $x = 9$ es nulo, y es así porque ya no existe ninguna carga más allá de esta distancia que pueda afectar el diagrama de cortante, pues el único elemento después de este punto, es un momento concentrado que afecta únicamente el valor de momento flexionante y por lo tanto, su diagrama.

Figura 64. **Corte d-d'; problema resuelto número once**

Corte d-d'

$9 \leq x \leq 12$



$$M = R_A(x) + R_B(x-6) - \frac{1}{2}(3)(3000)(x-2) - \frac{1}{2}(6)(3000)(x-5)$$

$$M = 4250x + 9250x - 55500 - 4500x + 9000 - 9000x + 45000$$

$$\mathbf{M = -1500}$$

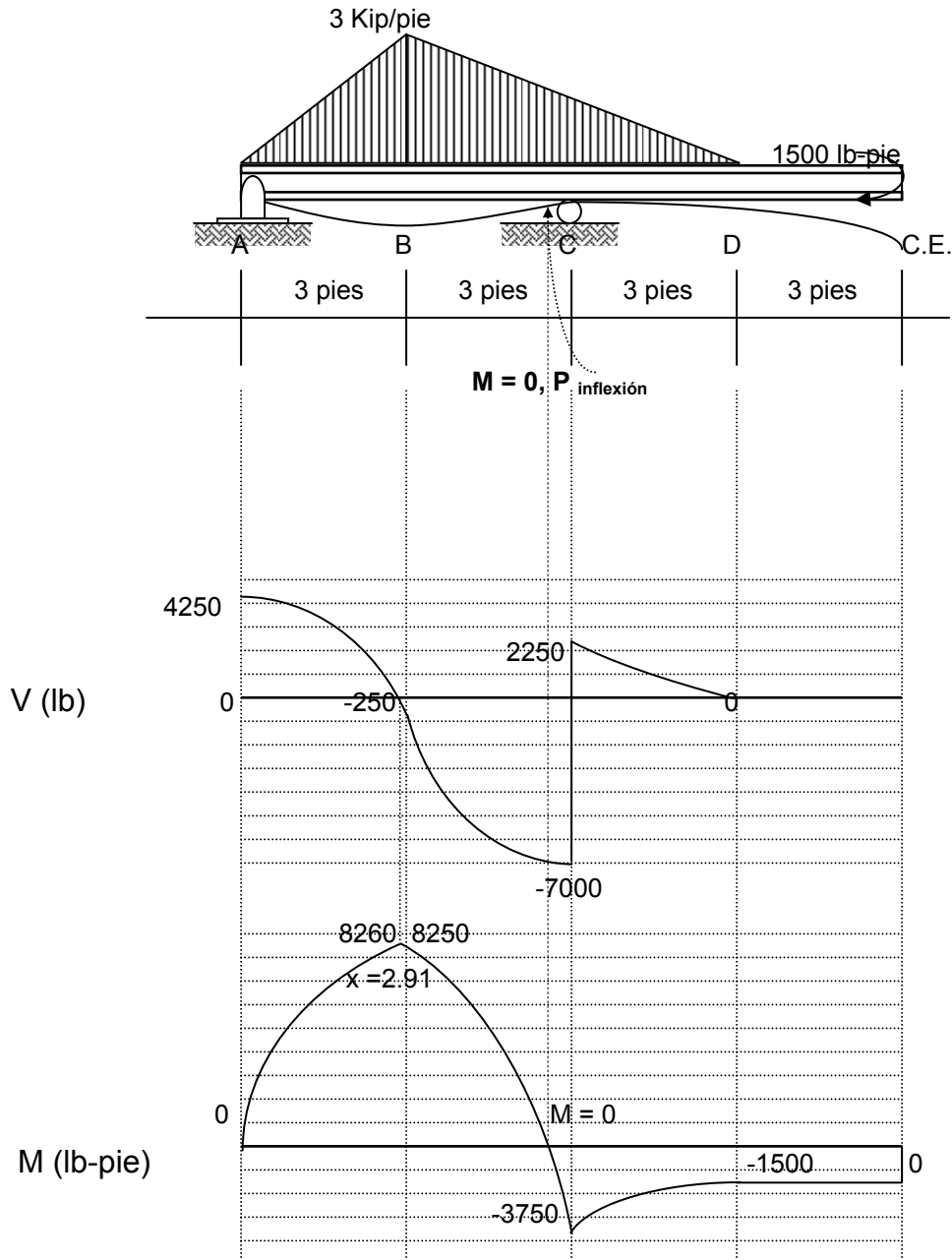
El valor de momento flexionante para el intervalo es constante y corresponde a -1500 lb-pie, el cual coincide exactamente con el valor del momento concentrado aplicado al final de la viga, por lo que el diagrama “cierra”. Para la fuerza cortante en este intervalo, el valor es nulo, debido a que no existe ninguna carga que esté aplicada en la viga y el momento concentrado no afecta a dicho valor.

Se propone la tabla siguiente para recordar los valores y ecuaciones que se obtuvieron en el desarrollo del presente ejemplo, que será de mucha utilidad, para finalmente trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante, así como también la curva elástica (C.E.) de la viga.

Tabla VI. **Tabla resumen; problema resuelto número once**

Tabla resumen, problema resuelto número once						
Corte	Intervalo	Ecuación	Grado y forma	Valor inicial (lb, lb-pie)	Valor final (lb, lb-pie)	Observación
a-a'	$0 \leq x \leq 3$	$V = -500x^2 + 4250$	2, parabólica	$V = 4250$	$V = -250$	$V = 0$ en $x = 2.9154$, $M_{\max} = 8260.43$ lb-pie
		$M = -1666.67x^3 + 4250x$	3, curva 3er grado	$M = 0$	$M = 8250$	
b-b'	$3 \leq x \leq 6$	$V = 250x^2 - 4500x + 11000$	2, parabólica	$V = -250$	$V = -7000$	
		$M = 83.33x^3 - 2250x^2 + 11000x - 6750$	3, curva 3er grado	$M = 8250$	$M = -3750$	
c-c'	$6 \leq x \leq 9$	$V = 250x^2 - 4500x + 20250$	2, parabólica	$V = 2250$	$V = 0$	
		$M = 83.33x^3 - 2250x^2 + 20250x - 62250$	3, curva 3er grado	$M = -3750$	$M = -1500$	
d-d'	$9 \leq x \leq 12$	$V = 0$	cortante nulo	$V = 0$	$V = 0$	M cierra con el M concentrado = -3750
		$M = -1500$	0, constante	$M = -3750$	$M = 0$	

Figura 65. Diagramas; problema resuelto número once

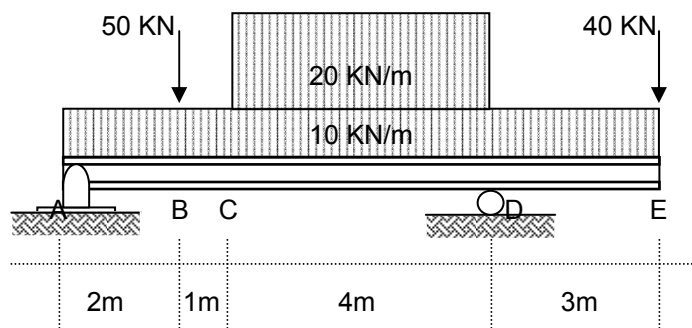


5.4.3 Problema resuelto número doce

Se propone a continuación un ejemplo resuelto, que ayudará a entender el método semigráfico, pues es la mejor manera que se tiene para resolver dudas y encontrar soluciones a dichas interrogantes.

Encontrar el diagrama de fuerza cortante y el de momento flexionante, con sus valores respectivos para la viga con la condición de carga mostrada a continuación. Utilizar el método de áreas y dibujar la curva elástica.

Figura 66. Problema resuelto número doce



- Cálculo de reacciones

$$\sum M_A = 0 \quad 7R_D = 50(2) + 40(10) + 4(20)(5) + 10(10)(5)$$

$$R_D = 200 \text{ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad R_A + 200 = 50 + 40 + 20(4) + 10(10)$$

$$R_A = 70 \text{ KN}$$

Ahora se aplica el método de áreas para el diagrama de fuerza cortante, es decir $V_f - V_o = A_{\text{cargas}}$, evaluando si cambia el valor al final de cada intervalo.

$0 \leq x \leq 2$

Figura 67. Fuerza cortante; problema resuelto número doce

$$V_2 - V_0 = A_{0-2}$$

$$V_2 = A + V_0$$

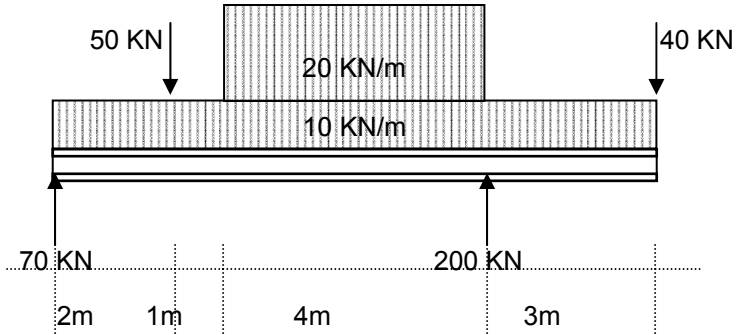
$$V_0 = 70 \text{ KN}$$

$$V_2 = 2(-10) + 70$$

$$V_2 = +50 \text{ KN}$$

$$V_2 = +50 - 50$$

$$V_2 = 0 \text{ KN}$$

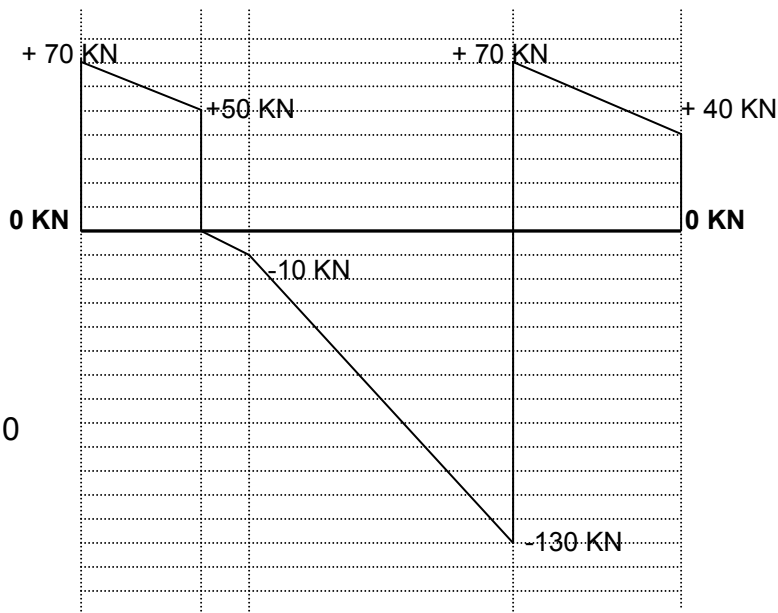


$2 \leq x \leq 3$

$$V_3 = A_{2-3} + V_2$$

$$V_3 = 1(-10) + 0$$

$$V_3 = -10 \text{ KN}$$



$3 \leq x \leq 7$

$$V_7 = A_{3-7} + V_3$$

$$V_7 = 4(-10) + 4(-20) - 10$$

$$V_7 = -130 \text{ KN}$$

$$V_7 = -130 + 200$$

$$V_7 = +70 \text{ KN}$$

$7 \leq x \leq 10$

$$V_{10} = A_{7-10} + V_7$$

$$V_{10} = 3(-10) + 70$$

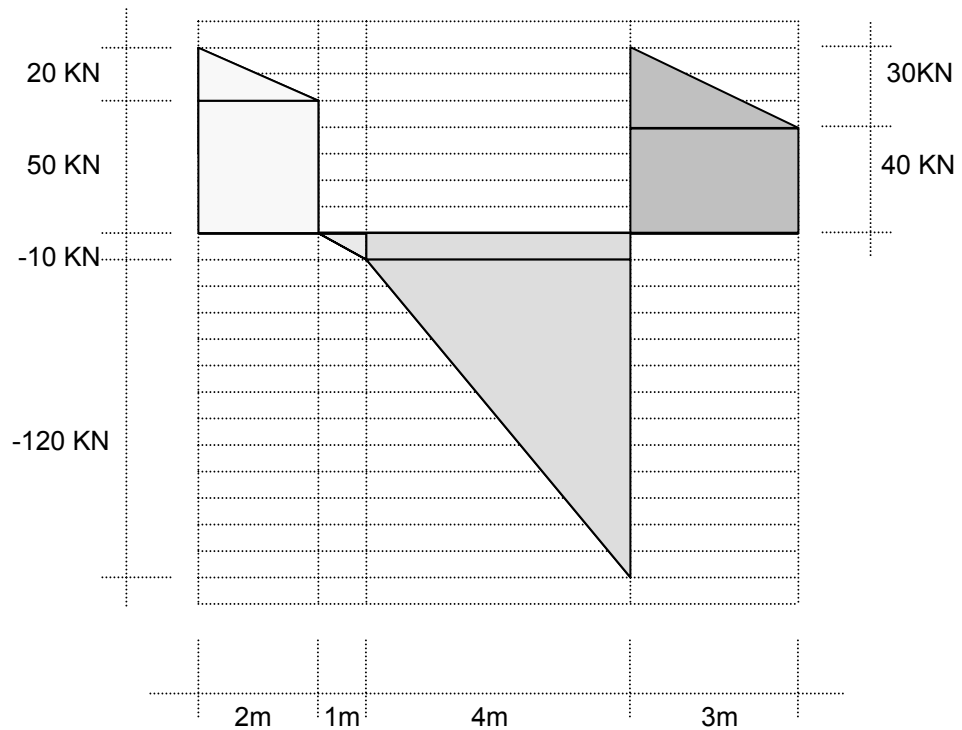
$$V_{10} = 40 \text{ KN}$$

$$V_{10} = 40 - 40$$

$$V_{10} = 0 \text{ KN}$$

Como es de vital importancia conocer las dimensiones de las figuras geométricas que surgen en el diagrama de fuerza cortante, se propone la figura siguiente para facilitar el encontrar los valores del diagrama de momentos.

Figura 68. **Áreas de cortante; problema resuelto número doce**



Así pues, se procede a encontrar y trazar los valores del diagrama de momentos flexionantes, a través del método de áreas. Se debe considerar que todo el diagrama de momentos del presente ejemplo estará formado por curvas de segundo grado con concavidad negativa, según las relaciones entre carga, cortante y momento.

Aplicando entonces la definición del método de áreas y considerando las dimensiones de las figuras geométricas (triángulos y rectángulos), que se formaron en el diagrama de fuerza cortante, se procede a calcular los valores del diagrama de momentos y la respectiva curva elástica (C.E.) de la viga, teniendo puntos de inflexión en ésta, cuando se presenta un momento nulo, es decir $M = 0$, así:

Figura 69. **Momento flexionante; problema resuelto número doce**

$0 \leq x \leq 2$

$M_0 = 0 \text{ KN-m}$

$M_2 = A_{V_{1-2}} + M_0$

$M_2 = 1/2 (2)(20) + 2(50) + 0$

$M_2 = 120 \text{ KN-m}$

$2 \leq x \leq 3$

$M_3 = A_{V_{2-3}} + M_2$

$M_3 = 1/2 (1)(-10) + 120$

$M_3 = +115 \text{ KN-m}$

$3 \leq x \leq 7$

$M_7 = A_{V_{3-7}} + M_3$

$M_7 = 4(-10) + (1/2)(4)(-120) + 115$

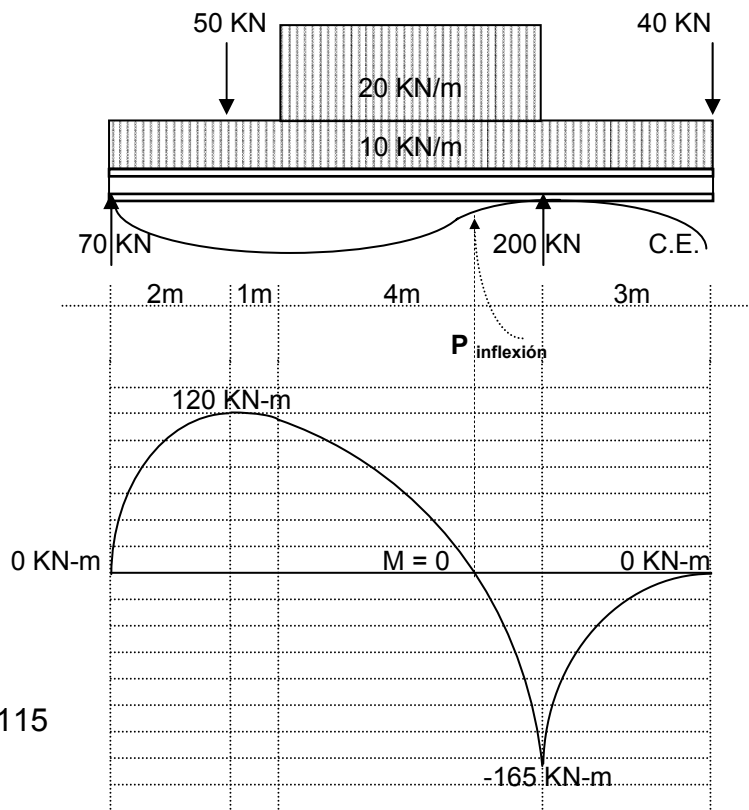
$M_7 = -165$

$7 \leq x \leq 10$

$M_{10} = A_{V_{7-10}} + M_7$

$M_{10} = 1/2(3)(30) + 3(40) - 165$

$M_{10} = 0$



6. ESFUERZO EN VIGAS

6.1 Introducción

Anteriormente se han estudiado los efectos que tiene sobre una viga las cargas externas, es decir, generar efectos internos diagramados en forma de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. En el presente capítulo, se estudiarán los esfuerzos y deformaciones que son creados a partir de estos elementos, que son parte fundamental para el diseño de vigas, pues tanto el concepto de esfuerzo como el de deformación están íntimamente ligados con la geometría y material de cualquier estructura.

El concepto de deformación de una viga está ligado a la curva elástica que se explicó en el capítulo anterior, en donde la distancia que existe entre la viga y dicha curva elástica, llamada flecha, representa la deformación que ésta sufre para determinada condición de carga. Este concepto no se desarrolla en su totalidad, pues es en cursos posteriores en donde se hace el estudio de estas deformaciones y de la forma de calcularlas.

Se estudia primero el concepto de los esfuerzos; en dónde la fuerza cortante da origen a esfuerzos de corte, que ya se han estudiado anteriormente, y el momento flexionante genera esfuerzos por flexión, un concepto muy importante en el estudio de Resistencia de Materiales, al cual se le da especial atención por ser un concepto nuevo y de gran importancia en el estudio, especialmente de vigas, pues éstas trabajan y su diseño se rige principalmente por este tipo de esfuerzos.

6.2 Deducción de la fórmula de la flexión

Los esfuerzos producidos por el momento flexionante son llamados esfuerzos de flexión, y éstos se pueden calcular a través de la fórmula de la flexión, la cual dará la relación entre dichos valores y la geometría de la sección transversal de la viga.

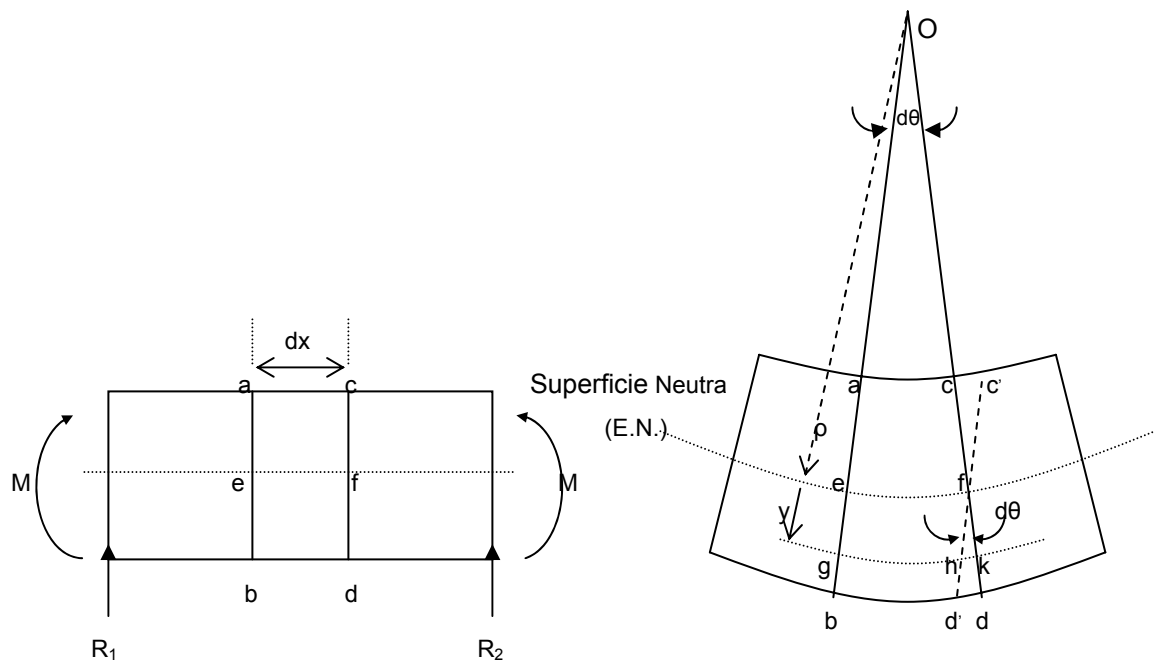
Hay que destacar las dos clases de esfuerzos por flexión que se presentan, relacionados principalmente por el tipo de momento flexionante que les da origen. Estas son flexión pura, que es la flexión causada por un momento flexionante constante, es decir, sin cambios en toda la longitud de la viga; y flexión no uniforme, la cual se presenta cuando existe un cambio o es variable el diagrama de momento flexionante; esto ocurre cuando se tiene la presencia de fuerzas cortantes que también actúan sobre la viga.

Para deducir la fórmula de la flexión, se hacen las siguientes hipótesis y consideraciones:

- Las secciones planas de la viga, inicialmente planas, permanecen planas.
- El material del que está hecho la viga es de naturaleza homogénea y obedece a la ley de Hooke.
- El módulo elástico es igual a tensión que a compresión.
- La viga es inicialmente recta y de sección constante.
- El plano en el que actúan las fuerzas contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga, y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de aquella. (6-122)

Para deducir ésta fórmula, se debe considerar la siguiente figura, la cual servirá para seguir el mismo procedimiento que se utilizó al deducir la fórmula de torsión, es decir, relacionar mediante las condiciones de equilibrio las deformaciones elásticas junto con la ley de Hooke. Esta relación determina la forma de la distribución de esfuerzos, que es lo que interesa.

Figura 70. **Deducción de la fórmula de la flexión (deformaciones)**



Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de materiales. Pág. 123

La figura muestra dos secciones adyacentes ab y cd , de longitud paralela, separadas una distancia dx . Al aplicarle los momentos respectivos, las fibras giran un ángulo $d\theta$; la fibra superior ac se acorta una distancia $c-c'$, y de acuerdo con esto, la fibra está sometida a esfuerzos de compresión que originan su acortamiento. La fibra inferior bd se alarga una distancia $d-d'$, por lo que la misma está sometida a tensión. Cabe destacar la concavidad positiva de la viga, según lo explicado en la interpretación de la curva elástica, la parte superior de su sección transversal está a compresión y la inferior a tensión.

La fibra ef, ubicada en el eje neutro, contenida por un plano llamado superficie neutra permanece con la misma longitud, y cualquier fibra ubicada dentro de ésta superficie no varía, por lo tanto, no están sujetas a ningún esfuerzo.

De acuerdo con lo anterior, las fibras ubicadas, ya sea en la parte superior o inferior de la superficie neutra, presentan diferentes comportamientos. Se analiza una fibra cualquiera gh, con la misma longitud que la fibra ef, como se ve en la figura, y que se encuentra a una distancia “y” de la superficie neutra. Esta fibra está sometida a tensión y tiene un alargamiento hk. Dicha deformación, que es una longitud de un arco de radio “y” y subtendido por un ángulo dθ, se puede determinar a través de la fórmula de longitud de arco (S= rθ), así:

$$S = r\theta$$

$$\delta = hk = y(d\theta)$$

Para encontrar la deformación unitaria de la fibra que se está analizando, se aplica la fórmula $\epsilon = \delta/L$, siendo L la longitud inicial gh de la fibra, pero para el análisis y según los datos del dibujo, se utilizará la longitud ef, que es de la misma magnitud y que se puede expresar como la longitud de arco de radio ρ subtendida también por el ángulo dθ, entonces:

$$L = gh = ef = \rho(d\theta)$$

$$\epsilon = \delta/L = hk/ef$$

$$\epsilon = y(d\theta)/\rho(d\theta)$$

$$\epsilon = y/\rho$$

Se debe recordar que el material obedece a la ley de Hooke, es decir, el esfuerzo que se presenta es proporcional a la fuerza, así:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\sigma = E(y/\rho)$$

Esta última expresión se podría escribir también de la manera siguiente:

$$\sigma = (E/\rho) y$$

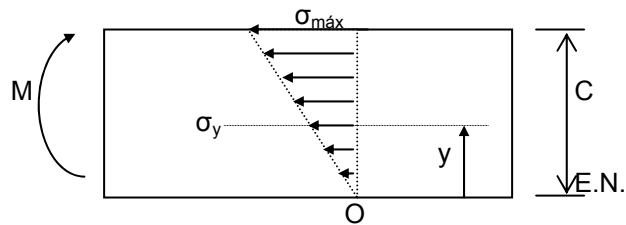
En donde tanto el módulo de elasticidad E como el radio de curvatura de la superficie neutra ρ son constantes, por lo que puede concluirse que el esfuerzo, en este caso esfuerzo flexionante, es directamente proporcional a la distancia “ y ” medida desde la superficie neutra, hasta la fibra que se este analizando, ya sea que ésta fibra esté a tensión o a compresión, pues también se tomó en cuenta la hipótesis de la igualdad del módulo elástico para cualquiera de estas condiciones de esfuerzo. Cabe destacar también que los esfuerzos por flexión que se presenten no deben de pasar el valor del límite de proporcionalidad, pues dejaría de cumplirse la ley de Hooke que ha sido fundamental para la deducción de la fórmula hasta el momento.

Para usos posteriores, la anterior expresión también se podría escribir de la forma siguiente:

$$E/\rho = \sigma/y$$

Para completar la deducción, se deben aplicar las condiciones de equilibrio y tomar en cuenta la proporcionalidad entre la distancia “y” y el esfuerzo flexionante, tal como se muestra en un elemento diferencial cualquiera de la sección que se ha estado estudiando (figura 71), en donde la intersección de esta sección con la superficie neutra recibe el nombre de eje neutro (E.N.), y en la cual se puede hacer una sumatoria de momentos, respecto a un punto ubicado en este eje (punto O), el cual no presenta ninguna reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Figura 71. **Deducción de la fórmula de flexión (equilibrio)**



Recordar que la relación entre el esfuerzo y la fuerza que lo produce es por la fórmula $P = \sigma A$, pero como el análisis se realiza para un elemento diferencial, en realidad la fuerza aplicada a una distancia “y” desde el eje neutro queda definida como $\sigma_y dA$.

$$\sum M_O = 0 \quad M - (\sigma_y)(dA)y = 0$$

$$M = \int \sigma_y y dA$$

Anteriormente se encontró la expresión que relaciona el esfuerzo con el radio de curvatura, la cual es $\sigma = y (E/\rho)$, la que se aplica a la fórmula anterior, considerando que el término E/ρ es constante, así:

$$M = (E/\rho) \int (y) (y) dA$$

$$M = (E/\rho) \int y^2 dA$$

en donde la expresión $\int y^2 dA$ representa el primer momento de inercia I del área, respecto al eje de referencia, que en este caso es el eje neutro (E.N.), por lo que la ecuación queda de la manera siguiente:

$$M = EI/\rho$$

Se despeja E/ρ de la anterior expresión, para que quede la relación siguiente:

$$M/I = E/\rho$$

Ésta también se relaciona con la forma de la ecuación en la primera parte de la deducción para la fórmula de la flexión, es decir:

$$M/I = E/\rho = \sigma/y$$

En donde el término E/ρ está compuesto por constantes, por lo que se deben relacionar las variables que se tienen en la igualdad, y queda la fórmula de la flexión así:

$$\sigma = My/I$$

Ésta proporciona el valor de esfuerzo flexionante causado por un momento flexionante para una fibra ubicada a una distancia “y” del eje neutro.

Regularmente en el diseño de una viga interesan principalmente los esfuerzos máximos que se producen dentro de ésta, por lo que dicha distancia “y”, para la cual se presenta el esfuerzo máximo, se puede sustituir por C, que es justamente la ubicación del elemento más alejado del eje neutro, así:

$$\sigma_{\text{máx}} = MC/I$$

El cociente I/C es llamado módulo de resistencia de la sección, al cual se puede designar simplemente como S, por lo que la fórmula de la flexión adquiere la forma siguiente:

$$\sigma_{\text{máx}} = MC/I = M/S$$

La utilidad del módulo de resistencia S radica en su empleo para vigas de sección constante, pues éste está ya definido para el tipo de sección que se presente, tal como lo observa en la tabla siguiente:

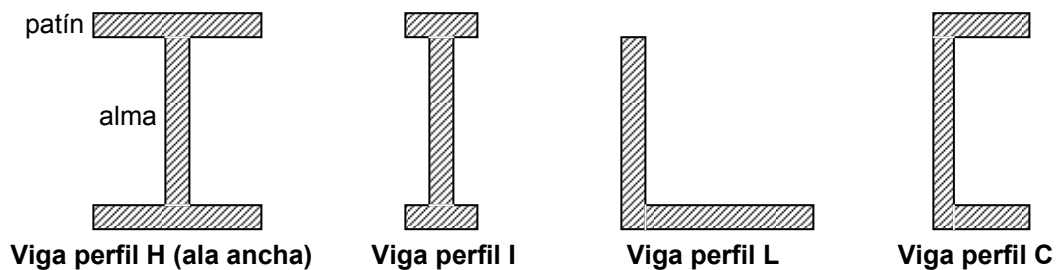
Tabla VII. **Cálculo del módulo de resistencia S de algunas secciones**

Tabla de para el cálculo del módulo de resistencia S, según la sección	
<p>Rectangular</p> <p>$S = bh^2/6$</p>	<p>Circular llena</p> <p>$S = \pi d^3/32$</p>
<p>Circular Tubular</p> <p>$S = (\pi/4R) (R^4 - r^4)$</p>	<p>Triangular</p> <p>$S = bh^3/24$</p>

Adaptado de Pytel y Singer. Resistencia de Materiales. Pág. 127

Al analizar las distintas formas que se presentan para la sección transversal de una viga; es importante considerar que para una sección transversal rectangular o circular, los esfuerzos por flexión que se presentan son mucho mayores en los extremos que para la parte media de la sección; esto crea una sensación de que la cantidad de material con que está hecha la viga no está siendo aprovechada en su totalidad, pues se tiene una gran área de material que no está sometida a ningún esfuerzo. Debido a esto y a la importancia que juega el momento de inercia con respecto a los esfuerzos por flexión que se producen, se han creado perfiles comerciales para vigas, como los que se describen en la figura siguiente:

Figura 72. **Perfiles comerciales en vigas**



Estos perfiles comerciales tienen la función de aprovechar de una mejor manera el material, así como de aumentar el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro, ya que el valor de dicho momento es proporcionado por el teorema de ejes paralelos ($I = I_0 + Ad^2$), que aumenta la inercia en función del área y del cuadrado de la distancia que se tiene respecto al eje neutro, en este caso, del área de los patines en cada una de las secciones. La importancia de aumentar el momento de inercia radica en la relación directa que existe en la fórmula de esfuerzo flexionante de esta variable respecto al momento que puede soportar dicha viga ($M = \sigma I / c$), en donde al aumentar el momento de inercia, hace que el valor del momento flexionante que soporta la viga, sea mayor.

6.3 Esfuerzo cortante en vigas

Anteriormente se ha analizado el efecto que tienen las cargas transversales en una viga, las cuales generan tanto momentos flexionantes, que son la causa de esfuerzos normales por flexión ($\sigma = Mc/I$), como las fuerzas cortantes perpendiculares al eje longitudinal de la sección. Estas fuerzas cortantes son la causa de los esfuerzos cortantes en vigas, los cuales son generados, tanto transversal como longitudinalmente. Esto se debe a que un esfuerzo cortante que actúa sobre algún lado de un elemento va siempre acompañado por un esfuerzo cortante de igual magnitud que actúa sobre una cara perpendicular. Una forma más práctica para demostrar la existencia de esfuerzos cortantes horizontales en una viga se lleva a cabo por medio de un sencillo experimento, el cual consiste en imaginar una viga compuesta por tabloncillos, en donde la superficie superior e inferior de cada uno de los tabloncillos es considerada lisa y que no están unidas entre sí, por lo que al aplicar una carga transversal hará que se deslicen uno respecto a otro. Por otro lado, se podría considerar que las tablas sí se unen, entonces al aplicar la carga transversal se generan los esfuerzos longitudinales entre cada una de las tablas, que evitarán el deslizamiento relativo, por lo que actuarán en unidad, como regularmente se presenta en una viga.

El procedimiento que se sigue para encontrar la fórmula de esfuerzos cortantes en una viga no se describe en la presente tesis; sin embargo se puede mencionar que este proceso es llevado a cabo considerando, tanto los esfuerzos cortantes horizontales, que son de igual magnitud que los verticales, los esfuerzos por flexión que son causados en una viga sometida a flexión no uniforme, y la relación de primera derivada entre la fuerza cortante y el momento flexionante ($V = dM/dx$).

Dicho procedimiento finalmente termina en la fórmula de esfuerzo cortante en vigas, que queda de la manera siguiente:

$$\tau = VQ/ Ib$$

En donde la notación para las distintas letras que se presentan es la siguiente:

- τ = esfuerzo de corte en el miembro que se está analizando, ubicado a una distancia “y” del eje neutro.
- Q = momento estático con respecto al eje neutro del área transversal parcial A', cuyo centroide está ubicado a una distancia y' del eje neutro.
- V = fuerza cortante interna resultante, obtenida del diagrama de fuerza cortante para la ubicación del elemento que se está analizando.
- I = momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje neutro.
- b = ancho de la sección transversal de la viga.

Para la fórmula anterior, es necesario que el material del que está hecha la viga sea de naturaleza homogénea y que se comporte de una manera elástico-lineal, es decir, que los esfuerzos generados no sobrepasen el límite de proporcionalidad; además, se asume que el módulo elástico E es igual para esfuerzos de tensión como para esfuerzos de compresión; además ésta fórmula no es aplicada cuando se tienen vigas de sección semicircular o triangular.

Cabe destacar que la distribución de esfuerzos cortantes para una viga rectangular tiene forma parabólica, la cual varía desde cero en la parte extrema superior e inferior de la sección transversal y es máximo en su valor para una fibra ubicada en el eje neutro de dicha sección. Esto se puede comprobar al observar que en la fórmula de esfuerzo cortante ($\tau = VQ/Ib$) la única variable de la que depende dicho esfuerzo es del momento estático del elemento que se está analizando, el cual es máximo para el nivel del eje neutro ($Q_{E.N.}$) y además es nulo en los extremos, por lo que se puede determinar que el esfuerzo cortante máximo queda así:

$$\tau_{\text{máx}} = VQ_{E.N.}/Ib$$

En el caso de presentarse una sección transversal de diferente forma, como es el caso de las vigas I (vigas de patín ancho) y las vigas C, en donde la sección transversal tiene la forma de estas letras, el ancho b que se utiliza al aplicar la fórmula de esfuerzo cortante es el ancho del alma de la viga; pues en comparación, es en el alma donde se presenta una cantidad significativamente mayor de esfuerzo cortante que la soportada en los patines.

6.3.1 Cálculo de la inercia total de sección de una viga

Como se estudió anteriormente, uno de los elementos fundamentales en el estudio de los esfuerzos, tanto normales como tangenciales que se producen en una viga, es el cálculo correcto del momento de inercia de su sección respecto al eje neutro, pues está presente en cada una de estas fórmulas. Dicho momento de inercia, también llamado inercia de rotación, es una propiedad que depende de la ubicación del eje, alrededor del cual tenga que rotar determinada masa. Se puede mencionar que es mucho más fácil hacer rotar alrededor de un eje una masa que se encuentra cerca de éste que una alejada al mismo.

En el caso del cálculo de inercia total de la sección transversal de una viga, cabe destacar la importancia de la ubicación del eje neutro; a continuación, se empieza por explicar el cálculo de dicha ubicación.

Para el caso de secciones transversales cuadradas, rectangulares o circulares, el cálculo del eje neutro es bastante sencillo, pues este se ubica exactamente a la mitad de su altura; sin embargo, en los perfiles comerciales de vigas tipo I, T, C o L, es importante conocer una forma para encontrar la ubicación del eje. Esta forma se puede definir de la manera siguiente:

$$E.N. = \frac{\sum A\hat{y}}{\sum A}$$

El término del denominador representa la sumatoria de las áreas A , que surgen a partir de dividir la sección, de una forma arbitraria, en figuras conocidas (regularmente rectángulos) y el término del numerador representa la sumatoria del producto de cada una de éstas áreas por la ubicación de su centroide (\hat{y}) medido desde un eje de referencia (*datum*), que frecuentemente es la parte inferior de la sección.

Luego de calcular la ubicación de este eje, en unidades lineales y medido a partir del eje de referencia establecido, se procede a buscar la inercia total de la sección con respecto al eje neutro. Para el efecto, se debe utilizar el teorema de ejes paralelos y la fórmula de inercia, la cual regularmente es la del rectángulo, pues ésta es la figura más común en la que se puede dividir una sección transversal de cualquier viga.

El cálculo de la inercia total será la sumatoria de la inercia para cada una de las áreas en las que se divide la sección transversal, así:

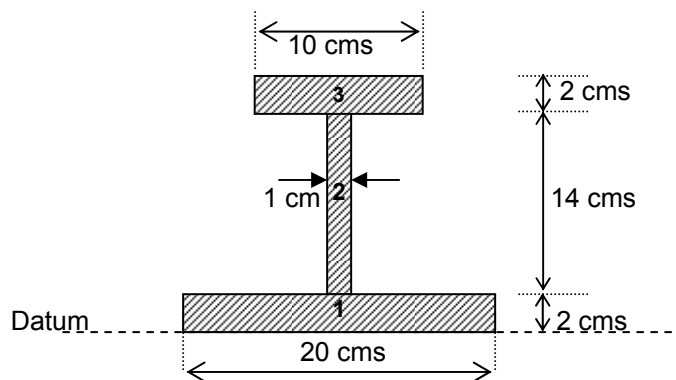
$$I_{\text{Total}} = \sum (I_o + Ad^2)$$

$$I_o = (bh^3)/12 + (bh) d^2$$

En donde las letras b y h representan la base y la altura, respectivamente, de cada una de las áreas de forma rectangular en la que se divide la viga, y d es la distancia desde el eje neutro, ya calculado, hasta el centroide de cada una de dichas áreas.

Para entender de una mejor manera el cálculo del eje neutro, así como del momento de inercia, se propone el siguiente ejemplo, para la viga con sección transversal con dimensiones que se muestran en la figura siguiente:

Figura 73. **Calculo de eje neutro (E.N.) e inercia (I) de viga perfil I**



La forma de simplificar el procedimiento para encontrar tanto el eje neutro como la inercia de rotación de la sección transversal de la viga es a través de la tabla que se muestra a continuación, en donde las figuras 1, 2 y 3 son los rectángulos representados y numerados, en la que se puede dividir fácilmente la figura anterior (figura 73), y el centroide (\hat{y}) de cada una de ellas está medido a partir del eje de referencia llamado *datum*.

Tabla VIII. Cálculo de eje neutro e inercia de rotación

Tabla para el cálculo de eje neutro e inercia de rotación									
Figura	b	h	A (bh)	\hat{y}	$A\hat{y}$	I_o (bh ³ /12)	d (\hat{y} -E.N.)	Ad^2	$I_o + Ad^2$
1	20	2	40	1	40	13.333	5.837	1362.823	1376.156
2	1	14	14	9	126	228.67	2.163	65.50	294.17
3	10	2	20	17	340	6.67	10.163	2065.731	2072.401
Σ			74		506			Momento de inercia total I:	3742.427

**E.N. = 506/74 =
6.837 cms**

I total (m⁴) = 3.742 E-5

Cabe destacar que todas las dimensionales de la tabla anterior están en centímetros (cms) para la longitud, centímetros cuadrados (cm²) para el área y centímetros a la cuarta (cm⁴) para el momento de inercia I; esto es de mucha importancia, ya que regularmente se debe trasladar todo al sistema internacional, es decir, a metros. La propiedad más importante en éste análisis es la inercia de rotación, entonces simplemente se divide este valor, dado en centímetros a la cuarta, dentro de cien millones (100 E6) para obtener las dimensionales correctas, que son metros a la cuarta (m⁴).

6.3.2 Cálculo del primer momento del área “Q”

El primer momento del área, también llamado momento estático, es de importancia para poder calcular el esfuerzo de corte de cualquier elemento o fibra de la sección transversal de una viga. Se calcula por niveles, y cada nivel corresponde a la ubicación de dicha fibra.

Esta variable está definida por la integral $\int y \, dA$, y se debe hacer respecto a un eje de rotación, que en este curso es siempre el eje neutro. En dicha integral, la variable “y” representa la distancia del centroide del elemento diferencial de área dA respecto al eje de rotación. Para simplificar el cálculo del primer momento de área, se cuenta también con el equivalente de la definición anterior, el cual es:

$$Q = A' \hat{y}$$

En donde Q representa el momento estático, respecto al eje neutro de un área parcial (A'), situada entre la paralela al E.N. ubicada a la altura del nivel, donde se desea encontrar el momento estático y el borde superior de la sección de la viga y el término \hat{y} , es la distancia desde el centroide del área A' hasta el eje neutro.

El momento estático Q está dado pues en unidades lineales de exponente tres (m^3 , cm^3 , in^3 , etc.) y su valor máximo está ubicado en el nivel que coincide con el eje neutro. Dicho valor máximo es importante, pues es el que sirve para encontrar el esfuerzo cortante máximo, entonces:

$$Q_{\text{máx}} = Q_{\text{E.N.}}$$

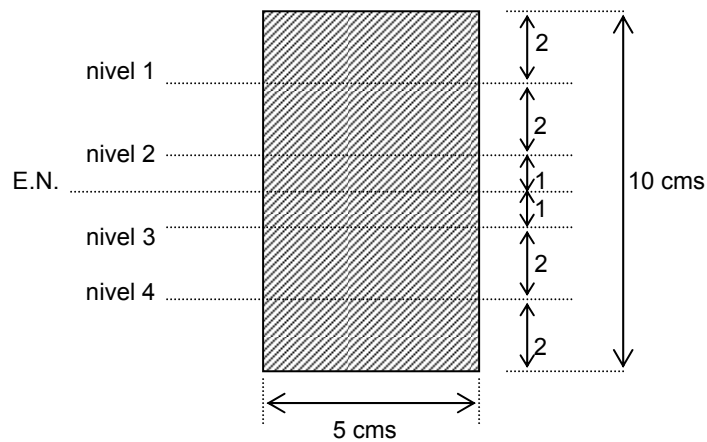
Frecuentemente se presenta un poco de confusión en el cálculo del momento de inercia, pero éste se simplifica, según las recomendaciones siguientes:

- Ubicar adecuadamente el eje neutro, pues es respecto a él que se encontrará el primer momento del área en cualquier sección.
- Definir el nivel o ubicación de la fibra, para la cual se desea calcular el momento de inercia, así como la distancia que existen entre ésta fibra, el eje neutro y los extremos superior e inferior de la sección transversal.
- Ya definido el nivel dibujar la sección transversal de forma parcial, a partir del eje neutro hacia cualquiera de los extremos, según la mayor conveniencia; regularmente se dibuja hacia el extremo donde se encuentra ubicada el nivel al cual se calculará el momento de inercia.
- Definir adecuadamente el valor, las dimensiones y distancias entre los centroides y el eje neutro de las áreas, que se forman al dibujar parcialmente la sección.
- Aplicar la definición del primer momento del área ($Q = A\hat{y}$) y evaluar las dimensionales con las que se está trabajando.

Regularmente la dimensional que se utiliza es centímetros (cm), y en este caso para el momento de inercia, centímetros con exponente de tercer grado (cm^3), por lo que para hacer la conversión al sistema internacional y trabajar con metros cúbicos (m^3), se debe dividir la magnitud en centímetros dentro de un millón (1 E6).

Para entender de una mejor manera lo anterior y aplicar las recomendaciones dadas, se propone la siguiente figura, en la que se calcula de diferentes formas el primer momento de área para los niveles que se muestran; así se comprueban las distintas formas en las que se puede trabajar para el cálculo de este elemento.

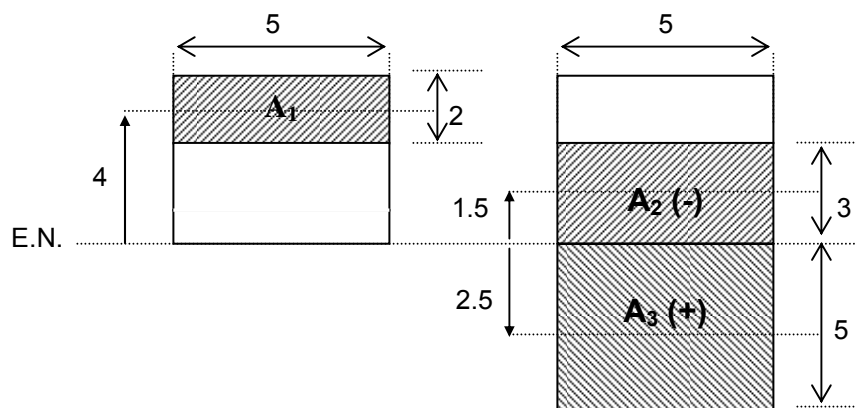
Figura 75. **Cálculo del primer momento del área a distintos niveles**



Para calcular el momento de inercia a cualquier nivel, primero se debe establecer la ubicación del eje neutro; en este caso se hace de una forma muy sencilla, pues por ser una sección rectangular, el eje neutro queda exactamente a la mitad de la altura de dicho rectángulo (5 cms). Ahora se procede a calcular “Q” para el nivel 1, dibujando el área que corresponde desde ese nivel hasta cualquiera de los extremos, aunque es mucho más fácil calcular el Q con el área parcial, que resulta de relacionar el nivel con el extremo más cercano, en este caso, con el extremo superior.

Para interpretar de mejor manera el cálculo de Q al nivel 1, se propone la figura 66, la cual muestra el área parcial que debe de dibujarse al relacionar el nivel con los extremos, ya sea superior o inferior, según sea el caso. Cabe destacar que si en dicha relación el eje neutro queda dentro del área parcial, se debe introducir una convención de signos para el área antes (superior) y después (inferior) del eje neutro; es positiva el área parcial de mayores dimensiones, o se podría simplificar al aplicar el valor absoluto en el resultado.

Figura 66. Cálculo de Q al nivel 1



Se debe recordar entonces la definición del primer momento del área, el cual establece que es el producto del área parcial por la distancia del centroide de dicha área hacia el eje neutro ($Q = A\hat{y}$), y queda así:

$$Q_1 (\text{extremo superior}) = A_1 \hat{y}_1$$

$$Q_1 = (5)(2)(4)$$

$$Q_1 = 40 \text{ cms}^3$$

$$Q_1 (\text{extremo inferior}) = A_3 \hat{y}_3 - A_2 \hat{y}_2$$

$$Q_1 = (5)(5)(2.5) - (3)(5)(1.5)$$

$$Q_1 = 62.5 - 22.5$$

$$Q_1 = 40 \text{ cms}^3$$

Así pues, se pueden observar las distintas opciones que se tiene para calcular el momento estático para cualquier nivel. Se procede entonces a calcular el Q para los demás niveles, tomando la relación entre el nivel al que se va a calcular y el extremo más cercano. Es de especial importancia destacar el cálculo del primer momento del área en el nivel que coincide con el eje neutro, pues es aquí donde presenta su mayor valor.

A continuación, se calcula el primer momento para los demás niveles:

$$Q_2 = (4)(5)(3) = 60 \text{ cms}^3$$

$$Q_{E.N.} = (5)(5)(2.5) = 62.5 \text{ cms}^3$$

$$Q_3 = (4)(5)(3) = 60 \text{ cms}^3$$

$$Q_4 = (2)(5)(4) = 40 \text{ cms}^3$$

Es de mucha importancia destacar que el área que se utiliza es la que tiene por límites, por un lado, el nivel al que deseo calcular el momento estático, y por otro lado, cualquiera de los extremos de la sección, aunque el cálculo resulta más fácil al relacionar el nivel con el extremo más cercano.

La dificultad que surge al calcular el primer momento de área para una sección o perfil comercial se simplifica, al establecer claramente las dimensiones entre el eje neutro y las áreas en las que se puede dividir las secciones parciales a partir de este eje. Para comprobar lo anterior, se sugiere consultar el problema resuelto del diseño de viga al final del presente capítulo.

6.3.3 Flujo de corte

El flujo de corte, también llamado flujo cortante, es el valor de la fuerza cortante resistida por la viga a lo largo de su longitud; especialmente se utiliza este concepto para vigas con miembros compuestos, en donde los perfiles se “arman” con distintos elementos y donde se requiere de sujetadores, clavos, pernos, soldadura o pegamento, a fin de evitar que las partes componentes se deslicen una respecto de la otra.

El flujo cortante estará representado por la letra “q” minúscula y se puede definir como la fuerza cortante horizontal por unidad de distancia, a lo largo del eje longitudinal de la viga, es decir:

$$q = dF/dx$$

Por lo que se tienen dimensionales de fuerza por unidad de longitud (N/m, lb/pie, Kg/cm, etc.). Una forma más simplificada de encontrar el flujo de corte es multiplicar el esfuerzo cortante tangencial a la sección de la viga ($\tau = VQ/Ib$) por el ancho de la misma, por lo que queda de la manera siguiente:

$$q = \tau b$$

$$q = VQ/I$$

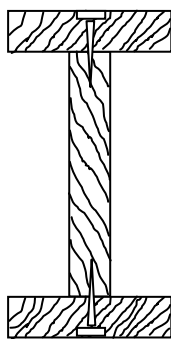
siendo q el flujo de corte, V la fuerza cortante máxima, para un valor máximo de flujo de corte; I el momento de inercia y Q el primer momento del área al nivel del elemento para el que se quiere encontrar el flujo de corte. Como puede observar en la fórmula, existe cierta relación entre los esfuerzos cortantes, tanto vertical como horizontal; esto se debe a que en la aparición de cualquier esfuerzo, éste siempre viene acompañado de otro esfuerzo en un sentido perpendicular al primero.

6.4 Espaciamiento de remaches, tornillos u otro medio de unión

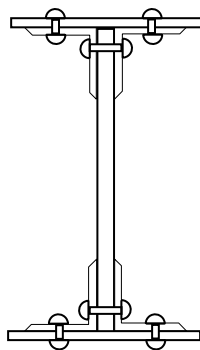
Las vigas de perfil comercial o vigas compuestas se fabrican con dos o más piezas de material unidas entre sí para formar una sola viga. Tales vigas se construyen en una gran variedad de formas, con tal de satisfacer requisitos tanto estructurales como arquitectónicos. Para unir cada una de estas piezas se utilizan clavos, remaches, tornillos, pernos, soldadura, o pegamento. Cada uno de los elementos con los que se arma la viga soportan esfuerzos de corte en toda su longitud, pues se recuerda que éstos tienden a deslizarse entre ellos; además destaca también la relación que esto tiene con el concepto de flujo de corte que se estableció anteriormente, la cual proporciona la magnitud de la fuerza cortante en relación con la distancia horizontal.

A continuación, se presentan algunos perfiles de vigas compuestas por varios elementos y la forma de unión entre ellos:

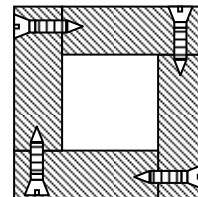
Figura 76. **Perfiles de vigas compuestas**



**Viga I de madera
unida con clavos**



**Viga I
unida con remaches**



**Viga Cajón
unida con tornillos**

El principal objetivo al hacer vigas con distintos elementos es que ésta se comporte como una viga de un solo miembro, sin embargo, un gran obstáculo para cumplir esto es que los esfuerzos horizontales afectan principalmente las uniones entre cada uno de los elementos. Al diseñar una viga, se debe establecer el tipo de unión que se emplea, según sea el material y los distintos requerimientos, por ejemplo, en una viga de madera regularmente se utilizan clavos para las uniones y se debe conocer la resistencia que tienen estos clavos en relación con la fuerza cortante longitudinal, que le afectará al momento de trabajar en la unión de una viga, es decir, la fuerza de corte del clavo, en este caso.

Así pues, el espaciamiento queda definido de la forma siguiente:

$$e = F_V / q$$

Es “e” el espaciamiento en unidades de longitud, F_V la fuerza de corte que soporta el elemento que sirve como unión y q el flujo de corte en el nivel de unión.

6.5 Diseño de viga por flexión y por cortante

Las vigas son elementos estructurales diseñados principalmente para soportar cargas perpendiculares a sus ejes longitudinales. Hasta el momento, se ha considerado problemas de análisis donde se dieron las dimensiones y forma de la viga y se calcularon los esfuerzos. Los problemas de diseño utilizan los mismos conceptos estudiados hasta el momento, siempre y cuando que la viga por diseñar sea de un material homogéneo y con comportamiento elástico-lineal, por lo que las vigas de concreto armado quedan fuera de este rango.

El único concepto anexo al diseño de vigas de este tipo es el cálculo de sus deflexiones o flechas, lo cual no son otra cosa que la deformación que pueda tener una viga con ciertas limitaciones, como por ejemplo, cuando soportan cielos rasos hechos de materiales frágiles como el yeso.

El diseño de vigas consiste principalmente en encontrar una forma y tamaño en la viga, en donde los esfuerzos de ésta no sobrepasen los esfuerzos permisibles del material. El diseñar una viga corresponde, pues, a encontrar la capacidad de carga y el tamaño de la sección de una viga, es decir, sus dimensiones, a partir de ciertas limitaciones como el valor de los esfuerzos por flexión y de los esfuerzos de corte; es decir, que se conoce la luz de la viga y a través de la integración de cargas; también se conoce la forma y magnitud de la carga y se requiere encontrar las dimensiones de su sección a partir de dos criterios: el esfuerzo normal o por flexión y el esfuerzo de corte. Sin embargo, se podría aclarar, que en vigas cuya luz es corta y están fuertemente cargadas, las dimensiones se regirán principalmente por el esfuerzo de corte, el cual varía con la fuerza cortante. Por otro lado, aquellas vigas que son largas suele ser casi siempre el esfuerzo por flexión el que limita la carga o determina las dimensiones de la sección, ya que el momento flexionante aumenta con la longitud.

Al diseñar una viga para resistir esfuerzos de flexión, por lo regular comienza calculando el módulo de resistencia a partir de la relación $\sigma = M/S$, en donde se conoce el esfuerzo permisible (σ_{perm}), el cual se basa en las propiedades del material, del cual se quiere construir la viga, así como del factor de seguridad, y además el momento máximo ($M_{m\acute{a}x}$) se conoce según la integración de cargas, por lo que se parte de la fórmula siguiente:

$$S = M_{m\acute{a}x} / \sigma_{perm}.$$

Para garantizar que no se rebase el esfuerzo permisible, se debe escoger una viga que proporcione un módulo de resistencia, por lo menos tan grande que el obtenido en la ecuación anterior. Las vigas se construyen de una gran variedad de tamaños para cumplir diferentes propósitos, y regularmente se escoge la viga que tenga menor área transversal y menor peso, es decir, la viga más ligera que proporcione el módulo de resistencia requerido, así como que cumpla cualquier otro requisito de diseño impuesto.

Para facilitar el diseño de vigas, se encuentran las dimensiones y propiedades de muchos tipos de éstas en manuales de ingeniería. Las propiedades que proporcionan son, por ejemplo, el peso por unidad de longitud, el área transversal, el momento de inercia y el módulo de resistencia. Los perfiles de acero estructural, que están estandarizados por el *American Institute of Steel Construction (AISC)*, que es el instituto americano que rige la construcción en acero publica un manual que da las propiedades distintas secciones fabricadas en este material. Los perfiles de acero estructural reciben una nomenclatura como W 30 x 211, que significa el perfil W, llamado también perfil de patín ancho con una altura nominal de 30 pulgadas y un peso de 211 libras por unidad de longitud.

Se utilizan designaciones análogas para los perfiles S (o vigas I) y los perfiles C. Las secciones de perfil L se designan por las longitudes de los dos lados y el espesor; por ejemplo L8 x 6 x 1 denota una viga con lados desiguales que miden 8 y 6 pulgadas, además de contar con un espesor de una pulgada. La mayoría de vigas de madera tienen dimensiones rectangulares que se designan con dimensiones en pulgadas, como por ejemplo 4 x 8 y representan el tamaño sin cepillar de la viga. Sin embargo, en el diseño estructural se deben utilizar las dimensiones reales de la viga, que para el ejemplo anterior es de 3.5 x 7.25 pulgadas después de cepillarla.

Así pues, se podría resumir el diseño de vigas por flexión y cortante al seguir los pasos siguientes:

- Se calcula el módulo de resistencia (S) requerido con base en el material y a la carga uniforme dada ($S = M_{\text{máx}}/\sigma_{\text{perm}}$).
- Se escoge un tamaño de prueba para la viga
- Se añade el peso de la viga a la carga uniforme y se calcula un nuevo módulo de resistencia
- Se comprueba que la viga elegida sea satisfactoria, es decir, que los esfuerzos por flexión y corte no sobrepasen los esfuerzos permisibles del material.
- Si la viga no satisface este criterio, se selecciona una viga de mayores dimensiones y se repite el proceso.

En el diseño de vigas, se deben considerar algunas cuestiones prácticas que se puedan presentar, por ejemplo, en el diseño de vigas de madera el contenido de humedad de la misma juega un papel muy importante en la variación de su resistencia, así como el estado físico de la madera, es decir, imperfecciones, como nudos, hendiduras, grietas, etcétera. Un ejemplo claro de esto es que los nudos tienen menor resistencia a la tensión, por lo que si se necesita diseñar una viga de sección simétrica es mejor que la madera se coloque de una forma en el que el nudo trabaje a compresión, según la condición de carga y apoyos. Esto se puede saber a través del esquema de la curva elástica de la viga.

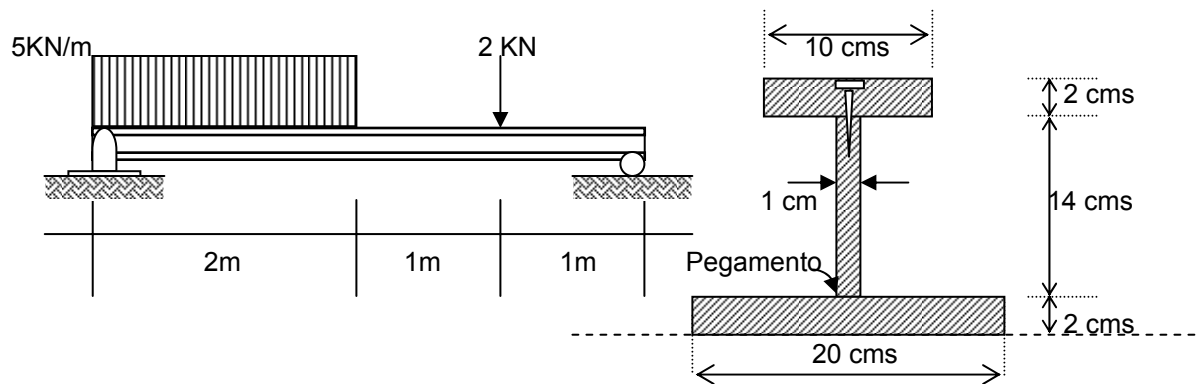
6.6 Problemas resueltos del capítulo seis

6.6.1 Problema resuelto número trece

La viga de sección I, con las dimensiones que se muestra, se une en la parte superior por medio de clavos que resisten una fuerza máxima de corte de 100 KN, y en la parte inferior mediante pegamento. Si la viga presenta la condición de carga que se muestra, se deben realizar los siguientes incisos:

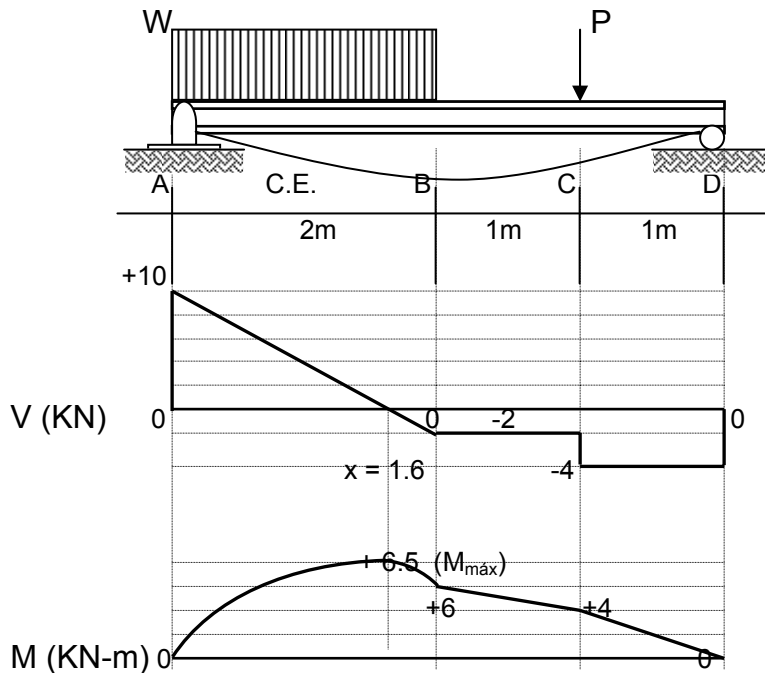
- Trazar los diagramas cortante y de momento, además de la curva elástica.
- Determine los esfuerzos máximos a tensión y compresión.
- Determine el esfuerzo máximo de corte al que se somete la viga.
- Calcule el flujo de corte que soporta el pegamento.
- Calcule el espaciamiento de los clavos.

Figura 77. Problema resuelto número trece



a) Los diagramas de cortante y momento fueron trazados y explicados en el problema resuelto número diez, y quedaron de la forma siguiente:

Figura 69. **Diagramas; problema resuelto número trece**



b) Para determinar los esfuerzos máximos, tanto de tensión como de compresión, se debe estudiar la concavidad de la curva elástica; esto es para encontrar el tipo de esfuerzo que soporta la sección transversal de la viga. Como se puede observar, en la curva elástica del presente ejemplo, se muestra una concavidad totalmente positiva; por lo que se puede establecer que a partir del eje neutro de la sección transversal hacia la parte superior de la misma, actúan esfuerzos de compresión, y en la parte inferior actúan esfuerzos de tensión.

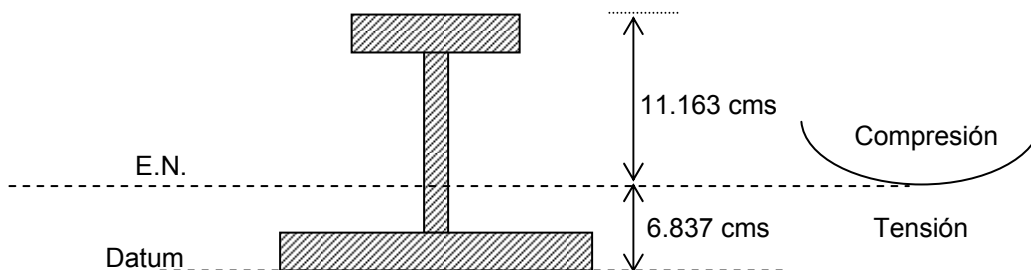
Para calcular la magnitud de dichos esfuerzos, se puede utilizar la fórmula $\sigma_{\text{máx}} = MC/I$, en donde M representa el momento máximo del diagrama, para este caso, 6.5 KN-m. C es la distancia desde el eje neutro de la sección transversal hacia sus extremos y la variable I representa el momento de inercia.

Las propiedades de la sección transversal con las dimensiones que se muestra ya fueron calculadas en el capítulo que le corresponde (ver pág. 149); la inercia de la sección y la ubicación del eje neutro es entonces:

$$E.N. = 6.837 \text{ cms} = 0.06837 \text{ m} \quad I_{\text{total}} (\text{m}^4) = 3.742 \text{ E-5}$$

Según la ubicación del eje neutro, se podrían mostrar en la siguiente figura las dimensiones de la sección de la viga que interesan para encontrar la distancia C para aplicarla en la fórmula de la sección:

Figura 79. Distancia “C”; problema resuelto número trece



Considerando la distancia C, correspondiente para encontrar los esfuerzos máximos, se aplica la fórmula de la flexión:

$$\sigma = MC/I$$

$$\sigma_{\text{máx}} (\text{Compresión}) = (6.5 \text{ E3})(0.11163) / (3.742 \text{ E-5})$$

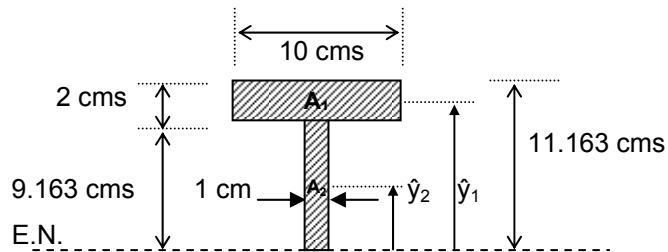
$$\sigma_{\text{máx}} (\text{Compresión}) = 19.39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{máx}} (\text{Tensión}) = (6.5 \text{ E3})(0.06837) / (3.742 \text{ E-5})$$

$$\sigma_{\text{máx}} (\text{Tensión}) = 11.87 \text{ MPa}$$

c) Para encontrar el esfuerzo máximo de corte, según la fórmula $\tau_{\text{máx}} = VQ_{\text{E.N.}} / Ib$, se procede a encontrar el primer momento de área para el nivel ubicado en el eje neutro de la sección. Para esto, conviene revisar el procedimiento descrito a partir de la página 150 de la presente tesis. Se procede entonces a dibujar la sección de interés con sus dimensiones, y a calcular el Q a nivel del eje neutro, así:

Figura 80. Cálculo de $Q_{\text{E.N.}}$; problema resuelto número trece



$$Q_{\text{E.N.}} = A\hat{y} = A_1\hat{y}_1 + A_2\hat{y}_2$$

$$Q_{\text{E.N.}} = (10)(2)(9.163 + 1) + (1)(9.163)(9.163/2)$$

$$Q_{\text{E.N.}} = 245.24 \text{ cm}^3 = \mathbf{2.4524 \text{ E-4 m}^3}$$

Y ahora se aplica la definición de la fórmula para esfuerzo cortante máximo ($\tau_{\text{máx}} = VQ_{\text{E.N.}} / Ib$); donde V es el mayor valor del diagrama de fuerza cortante (10 KN), y la variable b es la menor dimensión de la sección transversal (1 cm), por lo que se procede:

$$\tau_{\text{máx}} = VQ_{\text{E.N.}} / Ib$$

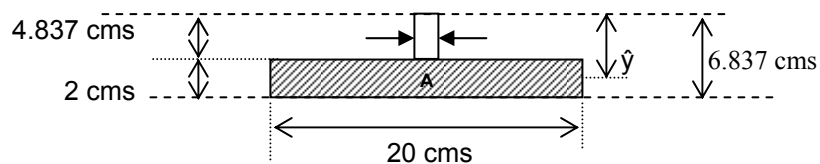
$$\tau_{\text{máx}} = (10 \text{ E}3)(2.4524 \text{ E-4}) / (3.742 \text{ E-5})(0.01)$$

$$\tau_{\text{máx}} = 6553722.19 \text{ Pa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \mathbf{6.55 \text{ MPa}}$$

d) Para calcular el flujo de corte del pegamento, ubicado en la unión inferior de la viga, se aplica la fórmula $q = VQ/I$; Q representa en esta ecuación el primer momento de área al nivel que interesa, en este caso, a nivel del pegamento. Entonces se procede con la fórmula del primer momento de área, calculado para el nivel del pegamento ($Q = A\hat{y}$); A es el área sombreada, desde el nivel del pegamento hasta el extremo inferior de la sección, y la variable \hat{y} la distancia desde el eje neutro hasta el centroide de dicha área.

Figura 81. **Q a nivel del pegamento; problema resuelto número trece**



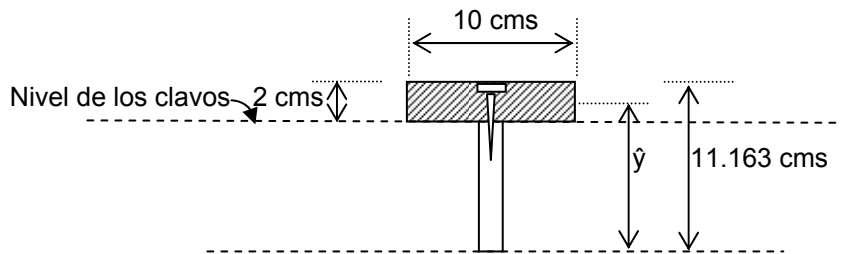
$$\begin{aligned}
 Q &= A\hat{y} \\
 Q &= (20)(2) (4.837 + 1) \\
 Q_{\text{pegamento}} &= 233.48 \text{ cm}^3 \\
 \mathbf{Q_{\text{pegamento}} = 2.3348 \text{ E } -4 \text{ m}^3}
 \end{aligned}$$

Por lo que el flujo de corte del pegamento será:

$$\begin{aligned}
 q &= VQ_{\text{pegamento}}/I \\
 q &= (10 \text{ E}3)(2.3348 \text{ E}-4) / (3.742 \text{ E}-5) \\
 q_{\text{pegamento}} &= 62394.44 \text{ N/m} \\
 \mathbf{q_{\text{pegamento}} = 62.394 \text{ KN/m}}
 \end{aligned}$$

e) Para encontrar el espaciamiento de los clavos, que están en la unión superior de la sección transversal, se aplica la fórmula $e = F_V / q$; F_V es la fuerza cortante que resisten los clavos, en este caso 200 KN y q es el flujo de corte a ese nivel, por lo que se procede, auxiliándose de la siguiente figura para calcular el primer momento del área:

Figura 82. **Q a nivel de los clavos; problema resuelto número trece**



$$Q = A\hat{y}$$

$$Q = (2)(10) (11.163 - 1)$$

$$Q = 203.26 \text{ cms}^3$$

$$Q = 2.0326 \text{ E-4 m}^3$$

Por lo que el flujo de corte será:

$$q = VQ/I$$

$$q_{\text{clavos}} = (10 \text{ E3})(2.0326 \text{ E-4}) / (3.742 \text{ E-5})$$

$$q_{\text{clavos}} = 54318.54 \text{ N/m}$$

$$q_{\text{clavos}} = \mathbf{54.318 \text{ KN/m}}$$

Y para encontrar el espaciamiento de los clavos, se aplica la definición:

$$e = F_V / q_{\text{clavos}}$$

$$e = (100 \text{ E3}) / (54.31854 \text{ E3})$$

$$e \text{ (espaciamiento de clavos)} = \mathbf{1.84 \text{ metros}}$$

CONCLUSIONES

1. A través del presente trabajo de graduación, se hace una síntesis para guiar adecuadamente, tanto al estudiante como al profesor del curso, a través del conocimiento necesario para el diseño de estructuras.
2. Estudiantes, profesionales y profesores del curso Resistencia de Materiales 1 pueden acceder fácilmente a este documento, por lo que se convierte en una fuente de consulta de mucha utilidad.
3. Se presentan en este trabajo de graduación, todos los temas relacionados con el curso Resistencia de Materiales 1 impartido en la Universidad de San Carlos de Guatemala; se presentan en una manera clara los distintos temas que se tratan en el curso, además de algunas recomendaciones para desarrollar y entender ciertos temas de una mejor manera.
4. Al presentar los problemas tipo, los cuales están resueltos y tienen una explicación teórica, se tiene el beneficio de establecer un vínculo entre la teoría, los conceptos descritos y la práctica, en el momento de resolver un problema determinado.
5. El profesor del curso tiene en el presente trabajo de graduación un valioso material de consulta, y puede hacer uso del material didáctico de apoyo que se presenta en el apéndice del mismo.

RECOMENDACIONES

1. Se debe utilizar esta guía como texto base del curso “Resistencia de Materiales 1”, pues se considera que cumple con todos y cada uno de los requerimientos para desarrollar temas de interés en la mecánica de materiales.
2. Hay que atender adecuadamente a las recomendaciones que se presentan en cada uno de los temas desarrollados, así como evaluar cada una de ellas, pues constituyen un material empírico muy útil, especialmente en el desarrollo de problemas.
3. Para los profesores, se debe motivar al estudiante en el desarrollo de las aplicaciones, que tienen los conceptos estudiados en el presente trabajo de graduación, así como ejemplificar conforme se avance en cada uno de los temas, según la experiencia que se tenga como profesional, y evaluar la importancia que tiene la resistencia de materiales, como un estudio fundamental e inminente para conocer las propiedades de los elementos utilizados en el diseño, mantenimiento y uso de estructuras o máquinas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Beer, Ferdinand P. y E. Russell Johnston Jr. **Mecánica vectorial para ingenieros. “Estática”**. Sexta edición. Tr. Muci Kuchler, Karim Heinz y Alex Elías Zúñiga. México: Editorial Mcgraw-Hill, 1997. 599 pp.
2. Byars, Edward F. y Robert D. Snyder. **Mecánica de cuerpos deformables**. Tercera edición. Tr. Paniagua, Francisco. México: Representaciones y servicios de ingeniería, 1978. 504 pp.
3. Fitzgerald, Robert W. **Mecánica de materiales**. Primera edición revisada. Tr. Ordóñez Reyna, Luis. México: Ediciones Alfaomega, 1990. 557 pp.
4. Gere, James M. y Stephen P. Timoshenko. **Mecánica de materiales**. Cuarta edición. Tr. de la Cera Alonso, José. México: International Thomson editores, 1998. 912 pp.
5. Hibbeler, R.C. **Mecánica de materiales**. Tercera edición. Tr. de la Cera Alonso, José. México: Editorial Prentice Hall, 1998. 854 pp.
6. Pytel, Andrew y Ferdinand L. Singer. **Resistencia de materiales**. Cuarta edición. Tr. Gaspar Torrent, Raimundo y Angel Gutiérrez Vásquez. México: editorial Oxford, 1994. 584 pp.

APENDICES

Nociones fundamentales

Diferencia entre Mecánica y Resistencia de Materiales

La resistencia de materiales amplía el estudio que se inició en mecánica, pero la principal diferencia entre ambas es que la mecánica abarca fundamentalmente las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un sólido indeformable y la resistencia de materiales estudia y establece las relaciones entre las cargas exteriores aplicadas y sus efectos en el interior de los sólidos. Además no considera un sólido como indeformable, sino que las deformaciones son de gran interés, así como las propiedades del material del que se construye una estructura y, que afectan tanto a su elección como a su diseño, ya que deben de satisfacer las condiciones de resistencia y rigidez.

División de los materiales

Por su naturaleza: homogéneo y no homogéneo

Material homogéneo es aquel, cuyas propiedades físicas, químicas, etc. son iguales en cualquier punto, como el acero. En caso contrario es un material no homogéneo como por ejemplo la madera, que presenta irregularidades por los nudos y otras imperfecciones.

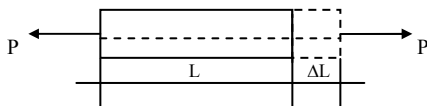
Por su comportamiento ante las cargas: dúctil y frágil

Dúctil es aquel material que puede sufrir una gran deformación, antes de producirse una ruptura, como es el caso del concreto. En caso contrario, si no se deforma mucho antes de la ruptura, el material es frágil, como el acero de alto carbono.

División de las cargas

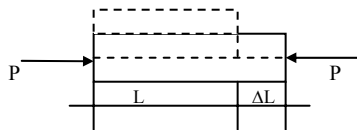
Por su línea de acción: tensión, compresión, corte, torsión, flexión.

Fuerza de tensión: es aquella aplicada de tal manera que hace alargar el elemento en dirección de la fuerza.

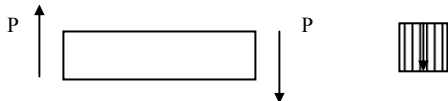


Esta fuerza es aplicada en la sección transversal y es paralela al eje geométrico de la figura.

Fuerza de compresión: tiene sentido y efecto contrario a la fuerza de tensión, es decir, hace que se acorte el elemento.



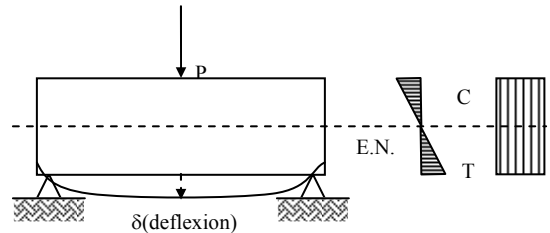
Fuerza de corte: actúa en la sección transversal del elemento, es decir, paralela a ella.



Torsión: es aquella que somete al elemento a un par alrededor de su eje y tiende a torcerlo. Produce una falla a 45 grados.

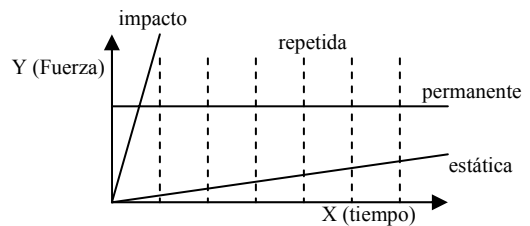


Flexión: la acción de la flexión actúa en un plano normal o perpendicular al eje geométrico y tiene la peculiaridad de que parte de la sección transversal la somete a tensión y la otra parte a compresión. Produce deflexiones en distintos puntos del material, según sus condiciones de apoyo.



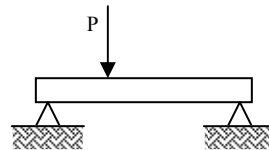
Por el tiempo de aplicación: estáticas, de impacto, permanente y repetida.

La carga estática es aplicada a la estructura muy lentamente, si es aplicada rápidamente será una carga de impacto. La fuerza permanente es intrínseca de la estructura, como sería su propio peso. La carga repetida es la que se aplica y se suprime infinidad de veces. Para tener una mejor idea de esta clasificación, se presenta el siguiente gráfico, en donde el eje x será el tiempo de aplicación y el eje y la fuerza aplicada.



Por su área de aplicación: carga concentrada y carga distribuida.

La carga concentrada está aplicada en un área relativamente pequeña, comparada con el área de la estructura y tiene dimensiones de fuerza (Ej.: Newton, Kg, lb, etc.)



La carga distribuida está aplicada en un área relativamente grande comparada con el área total de la estructura. Está dada en unidades de fuerza por cada unidad de longitud (Ej.: Kg/m, Nt/m, etc.)

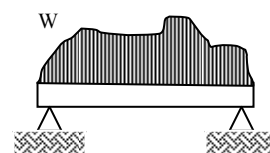


Diagrama esfuerzo-deformación

Hasta el momento, se ha estudiado únicamente la resistencia de los materiales, las relaciones entre la fuerza (carga) y la superficie (área), es decir, el esfuerzo. Ahora se debe estudiar otro gran campo: los cambios de forma, o sea las deformaciones que acompañan a un determinado estado de fuerzas.

Cabe destacar la importancia de conocer el esfuerzo en determinado material en vez de la fuerza, debido a que la fuerza aplicada depende principalmente del área transversal del elemento en que se aplica. De igual modo, es más importante conocer la deformación relativa (unitaria) de un elemento en tensión o compresión que el alargamiento total sufrido en su longitud. Como consecuencia para el estudio de las propiedades mecánicas de los materiales se acostumbra construir gráficas de la relación entre esfuerzos y deformación en una prueba en particular, en este caso, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria (σ - ϵ).

Dicho gráfico presenta los resultados de un ensayo, en este caso a tensión, en donde en el eje de las ordenadas se llevan las cargas (esfuerzo) y en el de las abscisas los correspondientes alargamientos (deformación).

Esfuerzo: el valor de esfuerzo es la relación entre la fuerza aplicada y el área perpendicular a ella.

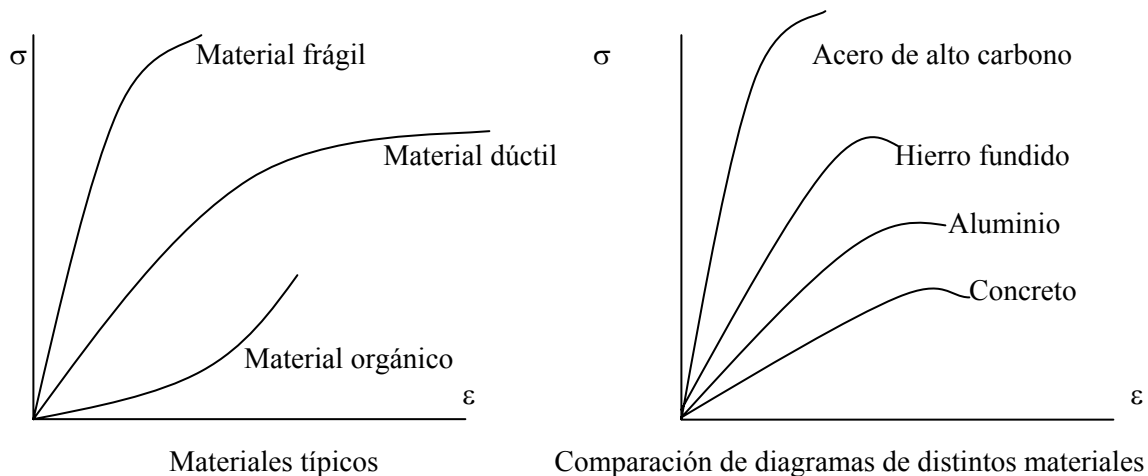
$$\sigma = P/A$$

Deformación Unitaria: el valor de la deformación unitaria es el cociente del alargamiento (deformación total δ) y la longitud L en la que se ha producido.

$$\epsilon = \delta/L$$

Numéricamente hablando, cada material tiene su propia gráfica.

Los materiales, capaces de resistir grandes deformaciones, se llaman materiales dúctiles, y lo contrario se aplica a materiales frágiles, como se muestra en la figura.



Esfuerzos límites y análisis del diagrama

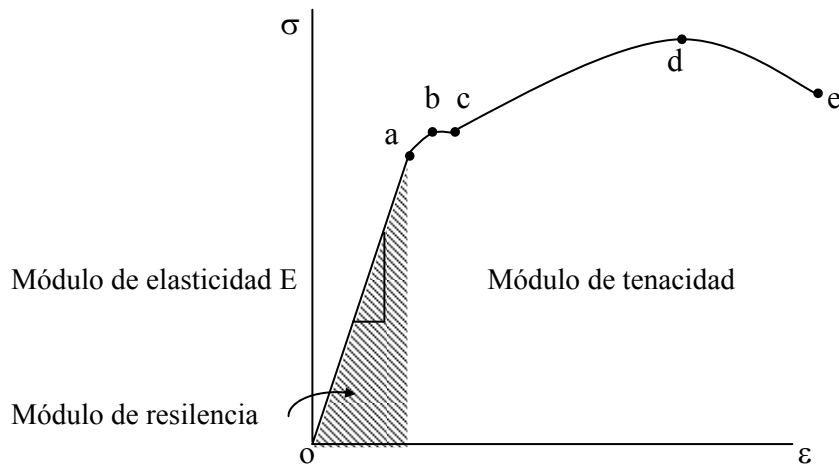


Diagrama esfuerzo-deformación

Punto (a) límite proporcional: es el esfuerzo en donde deja de ser proporcional la gráfica esfuerzo – deformación. Desde el origen hasta el punto a, llamado límite de proporcionalidad, se observa un segmento rectilíneo, en donde todos sus puntos tienen una relación constante entre el esfuerzo y la deformación.

Punto (b) límite elástico: se le llama así por ser el máximo esfuerzo que la barra pueda soportar sin que se produzca deformación permanente.
A partir del punto b las deformaciones, empiezan a ser ligeramente mayores.

Punto (c) límite de fluencia: es la parte de la curva donde se produce una deformación a esfuerzo constante. El fenómeno de fluencia no existe en los materiales frágiles. Se produce por

Punto (d) esfuerzo último: se le llama también límite de resistencia, que es el máximo valor de esfuerzo que es soportado por el material.

Punto de ruptura (e): es donde falla finalmente el material.

Ley de Hooke: Para el caso uniaxial dice que debe haber proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria; dicha ley se deduce en la recta que se forma desde el origen hasta el límite de proporcionalidad.

Módulo de elasticidad (E): es la pendiente de la recta formada entre el origen y el límite de proporcionalidad, y se deduce según la ley de Hooke. Es una medida de la rigidez de un material.

$$E = \sigma/\varepsilon \text{ , donde } \sigma = P/A \text{ y } \varepsilon = \delta/L, \text{ por lo tanto:}$$

$$\delta = PL / AE$$

Módulo de resiliencia: es el área bajo la curva entre el origen y el límite de elasticidad, y representa la capacidad de absorber energía en la zona elástica.

Módulo de tenacidad: es el área bajo la gráfica completa esfuerzo-deformación y da la medida de la capacidad del material para resistir una carga de energía hasta que se de su ruptura.

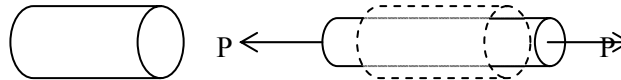
Fenómeno de estricción: se produce próximo a la ruptura y es donde el material se alarga muy rápidamente y luego se estrecha en un lugar localizado de la probeta de ensayo.

Relación de Poisson

Se sabe que cuando una barra o elemento se carga axialmente, los esfuerzos y deformaciones satisfacen la ley de Hooke (el esfuerzo es proporcional a la deformación), siempre que no se exceda el límite elástico del material. Si la fuerza está dirigida a lo largo del eje x, se tiene un esfuerzo en dicha dirección, y una deformación unitaria, así:

$$\epsilon_x = \sigma_x / E$$

En todos los materiales usados en ingeniería, el alargamiento producido por una fuerza **P de tensión**, en su dirección, está acompañado de **contracciones en cualquier dirección transversal**, tal como se muestra en la figura. Asimismo, si la fuerza **P es a compresión**, se acompañan de **expansiones en sus direcciones transversales**.



Cabe destacar que la deformación debe tener el mismo valor en cualquier dirección transversal, para este caso:

$$\epsilon_y = \epsilon_z$$

Este valor es la deformación lateral y el valor absoluto de la relación entre la deformación lateral y la axial es el **Módulo de Poisson**, y se denota por la letra griega **V** (nu), de la siguiente forma:

V = deformación lateral /deformación axial

ó

$$V = - \epsilon_y / \epsilon_x = - \epsilon_z / \epsilon_x$$

Para casos biaxiales o triaxiales se tiene:

Algunos valores para v son:

V concreto = 0.10

V metales = 0.25

V caucho = 0.50 (máximo valor de v)

$$\epsilon_x = \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E$$

$$\epsilon_y = - \nu \sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu \sigma_z/E$$

$$\epsilon_z = - \nu \sigma_x/E - \nu \sigma_y/E + \sigma_z/E$$

El signo negativo, observado en las ecuaciones anteriores, se utiliza debido a que un alargamiento longitudinal (deformación positiva) produce una contracción lateral (deformación negativa) y viceversa. En consecuencia, se utiliza únicamente para indicar que está actuando a compresión y no debe utilizarse matemáticamente.

Potencia en torsión

En muchas aplicaciones prácticas, los árboles se utilizan para transmitir potencia. Se sabe que un árbol se define como un sólido de revolución que tiene la función de transmitir un par. Por otro lado, del estudio de la dinámica se sabe que la potencia P transmitida por un par constante T , que gira a una velocidad angular constante ω está dada por:

$$P = T \cdot \omega$$

Donde ω está medida en radianes por unidad de tiempo (Rad/seg).

Se sabe también que la velocidad angular se puede expresar como $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia, es decir, el número de vueltas o revoluciones que gira en un segundo, expresada en rev/seg o Hertz (Hz). Al sustituirlo en la ecuación anterior, entonces el momento torsionante se puede expresar así:

$$T = P / (2\pi f)$$

Con P medida en Watts ($1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$) f en revoluciones por segundo y la ecuación anterior, se podrá determinar el momento torsionante en $\text{N} \cdot \text{m}$.

El valor encontrado de momento torsionante puede usarse en la ecuación $\tau = T\rho/J$, para obtener el esfuerzo cortante y en la ecuación $\theta = TL / JG$, para determinar el ángulo de torsión, medido en radianes.

Para trasladar la potencia dada en caballos de fuerza (hp) o caballos de vapor (cv), se deben de utilizar las siguientes conversiones:

$$1 \text{ Caballo de fuerza (hp)} = 745.7 \text{ Watts}$$

$$1 \text{ Caballo de vapor (cv)} = 736 \text{ Watts} = 0.986 \text{ Caballos de fuerza}$$

Y para trabajar en el sistema inglés se utiliza la conversión:

$$1 \text{ Caballo de fuerza (hp)} = 550 \text{ pie-libra/seg}$$

Vigas, cargas y reacciones

Vigas

Definición

Viga es un elemento estructural de longitud relativamente largo, en relación con las dimensiones de su sección, diseñado para soportar cargas que están aplicadas en varios puntos a lo largo de ella.

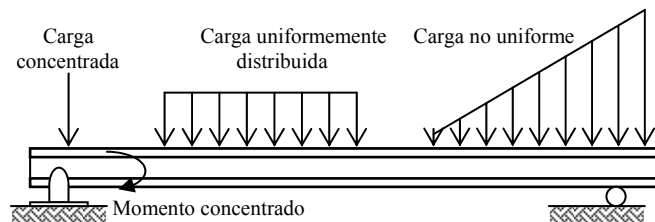
Clasificación

Regularmente las vigas se clasifican de dos formas: por la forma en que están apoyadas, se clasifican como viga simplemente apoyada, viga en voladizo y viga con voladizo. La distancia L entre apoyos recibe el nombre de claro.

Por su grado de determinación, se clasifican en: estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas, esto es, según si son suficientes las tres ecuaciones de equilibrio para poder determinar las reacciones en sus apoyos, o se necesitan otras basadas en deformaciones.

Tipos de Cargas

Una viga puede estar sujeta a **cargas concentradas** expresadas en dimensionales de fuerza (Newton, Libras, Kilogramos, etc.) o a **cargas distribuidas**, expresadas en dimensionales de fuerza por unidad de longitud (Newton/m, Libra/pie, etc.). Dicha carga distribuida puede ser uniforme, si tiene un valor constante sobre la viga o, en caso contrario, es no uniforme, como se ilustra a continuación. Además pueden existir momentos concentrados aplicados en la viga.

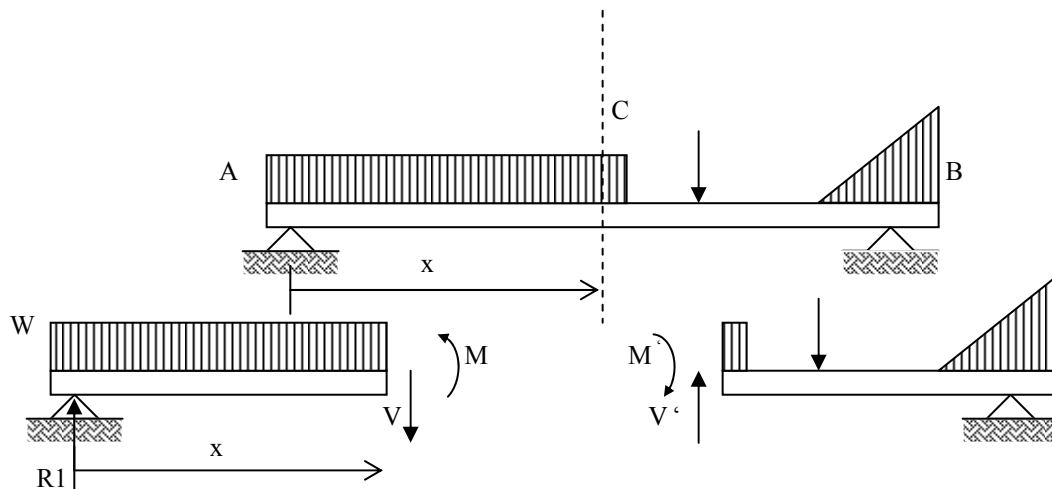


Reacciones en soportes y apoyos

TABLA DE APOYOS Y REACCIONES			
Apoyo	Esquema	Movimiento que impide	Reacciones
Rodillo			Vertical
Articulación			Horizontal Vertical
Empotramiento			Horizontal Vertical Momento

Fuerza cortante (V) y momento flexionante (M)

Al aplicar cargas en una viga, los efectos internos son variables de una a otra sección de la viga. Estos efectos son de dos tipos: fuerza cortante y momento flexionante. Para el estudio de los mismos, se considera una viga AB bajo la acción de varias cargas, tanto concentradas como distribuidas. Para determinar las fuerzas internas en C, se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre, igualando a cero la suma de las componentes verticales que actúan sobre cada tramo, para determinar la fuerza cortante en cada tramo, así como la suma de momentos respecto a C para el momento flexionante.



Fuerza Cortante: la fuerza vertical interna que hace el equilibrio de las fuerzas verticales externas es la suma de todas las fuerzas verticales que tienen sentido contrario (fuerzas a la izquierda). La fuerza vertical interna hacia arriba correspondiente a las fuerzas situadas a la izquierda de la sección es negativa.

$$\Sigma F_{\text{verticales}} = 0 \quad R1 - W(x) - V = 0 \quad V = R1 - W(x)$$

$$V = \Sigma \text{fuerzas a la izquierda}$$

Momento flexionante: la magnitud de este momento es igual a la suma de los momentos externos producidos por las fuerzas a la izquierda de la sección.

$$M = \Sigma \text{Momentos a la izquierda}$$

Signo del momento flexionante: el momento flexionante es positivo, si la flexión que produce en la viga presenta concavidad hacia arriba.

Flexión Positiva



Flexión Negativa



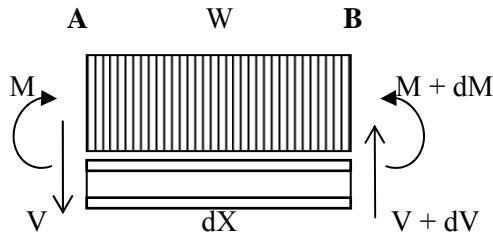
Un criterio equivalente es que las fuerzas que actúan hacia arriba, respecto de cualquier sección, producen momentos flexionantes positivos. Este criterio tiene la ventaja de que permite calcular el momento flexionante sin posibilidad de confusión de signos, pues solo hay que recordar que las fuerzas positivas, hacia arriba, producen momento positivo.

Diagramas de corte y de momento

Sirven para registrar los respectivos valores en cualquier punto de la viga, que se grafican contra la distancia x medida a partir de un extremo de la viga.

Relaciones entre carga, cortante y momento

Dichas relaciones producen un método para trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Consideremos la figura como el diagrama de cuerpo libre de un elemento de longitud diferencial de la viga.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\Sigma F_Y = 0 \quad V + w \, dx - (V + dV) = 0,$$

Esta se reduce a $dV = W \, dX$, es decir, la carga es la primera derivada de la fuerza cortante. Se integra la expresión, en donde los límites de integración son V_1 en el punto X_1 y V_2 en el punto X_2 .

$$\int dV = \int W \, dX$$

El lado izquierdo se reduce a $V_2 - V_1$, y en el segundo miembro el término $W \, dX$, representa el área de un elemento diferencial de área del diagrama de cargas, comprendida entre X_2 y X_1 , de donde se obtiene:

$$V_2 - V_1 = \text{Área de carga}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + V \, dx + (W \, dx) \left(\frac{dx}{2}\right) - (M + dM) = 0,$$

Tomando en cuenta que el tercer sumando contiene el cuadrado de un diferencial, es decir, es un diferencial de segundo orden que se puede despreciar frente a los de primer orden, la ecuación toma la forma $dM = V \, dX$; el corte es la primera derivada de el momento flexionante. Se integra dicha expresión, desde M_2 en X_2 y M_1 en X_1 , y se obtiene:

$$M_2 - M_1 = \text{Área de cortante}$$

Tabla IX. Factores de conversión

TABLA DE FACTORES DE CONVERSIÓN		
Unidad Inglesa	Factor de conversión multiplicativo	Igual a la unidad SI
Aceleración lineal Pie por segundo al cuadrado (ft/s ²) Plg. por segundo cuadrado (in/s ²)	0.3048 0.0254	Metro por seg. cuadrado (m/s ²) Metro por seg. cuadrado (m/s ²)
Área Pie cuadrado (ft ²) Pulgada cuadrada (in ²)	0.0929 645.16	Metro cuadrado (m ²) Milímetro cuadrado (mm ²)
Trabajo y energía Pie-libra (ft-lb) Kilowatt-hora	0.35528 3.6	Joule (J) Megajoule (MJ)
Fuerza Libra (lb) Kip (mil libras)	4.44822 4.44822	Newton (N) Kilonewton (KN)
Fuerza por longitud unitaria (intensidad de fuerza) Libra por pie (lb/ft) Libra por pulgada (lb/in) Kip por pie (kip/ft) Kip por pulgada (Kip/in)	14.5939 175.127 14.5939 175.127	Newton por metro (N/m) Newton por metro (N/m) Kilonewton por metro (KN/m) Kilonewton por metro (KN/m)
Longitud Pie (ft) Pulgada (in) Milla (mi)	0.3048 25.4 1.6093	Metro (m) Milímetro (mm) Kilómetro (Km)
Masa Slug	14.5939	Kilogramo (Kg)
Momento de una fuerza; par Libra-pie (lb-ft) Libra-pulgada (lb-in) Kip-pie (kip-ft) Kip-pulgada (kip-in)	1.3582 0.112985 1.3582 0.112985	Newton-metro (N-m) Newton-metro (N-m) Kilonewton-metro (KN-m) Kilonewton-metro (KN-m)

Nota: Para pasar del SI al sistema inglés, dividir dentro del factor multiplicativo.

Tabla X. Propiedades de algunos materiales
TABLA DE PROPIEDADES DE ALGUNOS MATERIALES

Material	Módulo de elasticidad E		Módulo de rigidez G		Razón de Poisson
	ksi	GPa	ksi	Gpa	
Aleaciones de aluminio	10000-11400	70-79	3800-4300	26-30	0.33
2014-T6	10600	73	4000	28	0.33
6061-T6	10000	70	3800	26	0.33
7075-T6	10400	72	3900	27	0.33
Latón	14000-16000	96-110	5200-6000	36-41	0.34
Bronce	14000-17000	96-120	500-6300	36-44	0.34
Hierro Fundido	12000-25000	83-170	4600-10000	32-69	0.2-0.3
Concreto (compresión)	2500-4500	17-31			0.1-0.2
Cobre y aleaciones	16000-18000	110-120	5800-6800	40-47	0.33-0.36
Vidrio	7000-12000	48-83	2700-5100	19-35	0.17-0.27
Aleaciones de magnesio	6000-6500	41-45	2200-2400	15-17	0.35
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25000	170	9500	66	0.32
Níquel	30000	210	11400	80	0.31
Plásticos					
Nylon	300-500	2.1-3.4			0.4
Polietileno	100-200	0.7-1.4			0.4
Piedra (compresión)					
Granito, mármol	6000-14000	40-100			0.2-0.3
Caliza, arenisca	3000-10000	20-70			0.2-0.3
Hule	0.1-0.6	0.0007-0.004	0.03-0.2	0.0002-0.0001	0.45-0.50
Acero	28000-30000	190-210	10800-11800	75-80	0.27-0.30
Aleaciones de titanio	15000-17000	100-120	5600-6400	39-44	0.33
Tungsteno	50000-55000	340-380	21000-23000	140-160	0.2
Madera (flexión)					
Pino Douglas	1600-1900	11-13			
Roble	1600-1800	11-12			
Pino del sur	1600-2000	11-14			

Tabla XI. Propiedades de algunos materiales

TABLA DE PROPIEDADES DE ALGUNOS MATERIALES					
Material	Esfuerzo de fluencia		Esfuerzo último		Porcentaje de alargamiento
	Ksi	MPa	ksi	Mpa	
Aleaciones de aluminio	5-70	35-500	15-80	100-550	1-45
2014-T6	60	410	70	480	13
6061-T6	40	270	45	310	17
7075-T6	70	480	80	550	11
Latón	10-80	70-550	30-90	200-620	4-60
Bronce	12-100	82-690	30-120	200-830	5-60
Hierro fundido					
Tensión	17-42	120-290	10-70	69-480	0-1
Compresión			50-200	340-1400	
Concreto			1.5-10	10-70	
Compresión					
Cobre y aleaciones	8-110		33-120		4-50
Vidrio			5-150	30-1000	0
Vidrio en placa			10	70	
Fibra de vidrio			1000-3000	7000-20000	
Aleaciones de magnesio	12-40	80-280	20-50	140-340	2-20
Monel (67% Ni, 30% Cu)	25-160	170-1100	65-170	450-1200	2-50
Níquel	15-90	100-620	45-110	310-760	2-50
Plásticos					
Nylon			6-12	40-80	20-100
Polietileno			1-4	7-28	15-300
Piedra (compresión)					
Granito, mármol			8-40	50-280	
Caliza, arenisca			3-30	20-200	
Hule	0.2-1.0	1-7	1-3	7-20	100-800
Acero					
Alta resistencia	50-150	340-1000	80-180	550-1200	5-25
Máquinas	50-100	340-700	80-125	550-860	5-25
Resortes	60-240	400-1600	100-270	700-1900	3-15
Inoxidable	40-100	280-700	60-150	400-1000	5-40
Herramientas	75	520	130	900	8
Acero estructural	30-100	200-700	50-120	340-830	10-40
ASTM-A36	36	250	60	400	30
ASTM-A572	50	340	70	500	20
ASTM-A514	100	700	120	830	15
Alambre de acero	40-150	280-1000	80-200	550-1400	5-40
Aleaciones de titanio	110-150	760-1000	130-170	900-1200	10
Tungsteno			200-600	1400-4000	0-4

Tabla XII. **Coefficientes de dilatación térmica**

TABLA DE COEFICIENTES DE DILATACIÓN TÉRMICA EN ALGUNOS MATERIALES		
Material	Coefficiente de dilatación térmica (α)	
	$10^{-6}/^{\circ}\text{F}$	$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Aleaciones de aluminio	13	23
Latón	10.6-11.8	19.1-21.2
Bronce	9.9-11.6	18-21
Hierro fundido	5.5-6.6	9.9-12
Concreto	4-8	7-14
Cobre y aleaciones	9.2-9.8	16.6-17.6
Vidrio	3-6	5-11
Aleaciones de magnesio	14.5-16.0	26.1-28.8
Monel	7.7	14
Níquel	7.2	13
Plásticos		
Nylon	40-80	70-140
Polietileno	80-160	140-290
Piedra	3-5	5-9
Hule	70-110	130-200
Acero	5.5-9.9	10-18
Alta resistencia	8.0	14
Inoxidable	9.6	17
Estructural	6.5	12