



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

## **DISEÑO Y REPLANTEO GEOMÉTRICO DE CARRETERAS CON CLOTOIDE**

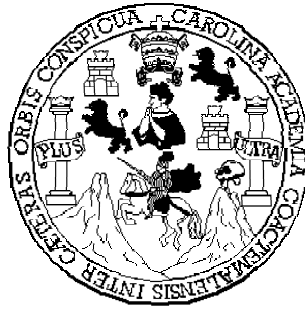
**Johnny Estuardo Gaitán Lutin**

Asesorado por el Ing. Pedro Roberto Martínez Quevedo

Guatemala, mayo de 2007



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO Y REPLANTEO GEOMÉTRICO DE CARRETERAS CON  
CLOTOIDE**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**JOHNNY ESTUARDO GAITAN LUTIN**

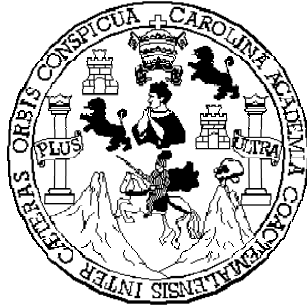
ASESORADO POR EL ING. PEDRO ROBERTO MARTINEZ QUEVEDO

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, MAYO DE 2007

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO: Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
VOCAL I: Inga. Glenda Patricia García Soria  
VOCAL II: Inga. Alba Maritza Guerrero de López  
VOCAL III: Ing. Miguel Ángel Dávila Calderón  
VOCAL IV: Br. Kenneth Issur Estrada Ruíz  
VOCAL V: Br. Elisa Yazminda Vides Leiva  
SECRETARIA: Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO: Ing. Sydney Alexander Samuels Milson  
EXAMINADOR: Ing. Fredy Enrique Ríos Godinez  
EXAMINADOR: Ing. José Gabriel Ordóñez Morales  
EXAMINADOR: Ing. Armando Ola Hernández  
SECRETARIO: Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **DISEÑO Y REPLANTEO GEOMÉTRICO DE CARRETERAS CON CLOTOIDE,**

tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha de 28 de abril de 2005.

Johnny Estuardo Gaitán Lutin

## **ACTO QUE DEDICO A:**

**DIOS**

Fuente de toda sabiduría, por su infinita fidelidad al permitirme alcanzar esta meta.

**MI MADRE**

Elsa Consuelo Lutin, por su amor, sacrificio y esmero en mi educación.

**MI ABUELA**

Otilia Lutin (Q.E.P.D.), por su eterno amor e infinita paciencia y que vive en mi corazón.

**LA FACULTAD  
DE INGENIERÍA.**

Por los conocimientos que adquiriré en el transcurso de mi carrera.

## **AGRADECIMIENTOS A:**

Mi asesor	Ing. Pedro Roberto Martínez, por su valiosa colaboración y confianza en el presente trabajo.
Ing. Irvin Martínez	por sus valiosos consejos y su confianza a mi persona.
Mi tío	Victor Manuel Gaitán, por su valioso apoyo.
Mi novia	Kelley Morales, por su amor y motivación para culminar mi carrera.
Ing. Wendel Rodas	por su invaluable colaboración en la realización del presente trabajo y amistad.
Luis Alfonso Avila Martínez	por su valiosa colaboración en la realización del presente trabajo.
Ing. Carlos Pinto y familia	por su amistad y apoyo.
Ing. Celvin Estrada	por su colaboración.
Ing. Edwin Barrios	por su apoyo y valiosos consejos.
Ing. Alejandro Arevalo	por su apoyo.
Julio García	por su apoyo, consejos y amistad invaluable.
Arq. Dick Valdez	por su confianza, apoyo y amistad.

Elder Pérez

por su colaboración y amistad.

Ing. Tonnio Bonatto

por su apoyo.

Mis amigos

que siempre confiaron y me apoyaron.



# ÍNDICE GENERAL

<b>ÍNDICE DE ILUSTRACIONES</b> .....	V
<b>RESUMEN</b> .....	IX
<b>OBJETIVOS</b> .....	XI
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XIII
<b>1. DISEÑO GEOMÉTRICO CON CLOTOIDES</b> .....	1
1.1. La VELOCIDAD DIRECTRIZ EN EL PROYECTO DE CAMINOS .....	1
1.2. Velocidad segura en curvas, peralte y fricción lateral. ....	3
1.3. Máxima curvatura para varias velocidades de diseño.....	13
<b>2. DISEÑO GEOMÉTRICO CON CLOTIDES.</b> .....	15
2.1. Curvas de transición.....	15
2.2. La Clotoide.....	17
2.3. Elementos de la Clotoide .....	20
2.4. Calculo de los elementos de la clotoide.....	23
2.5. Funciones de la espiral y el círculo.....	32
2.6. Posibilidades de la aplicación de la clotoide.....	34
2.7. Curvas de transición en relación a la posibilidad de diseño .....	36
2.8. Curvas de transición en relación con el peralte .....	38
2.9. Longitudes mínimas de la espiral de transición recomendadas .....	44
2.9.1.Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga .....	44
2.9.2.Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la transición del peralte .....	48

2.9.3. Longitud mínima de la espiral por razones de percepción y estética.....	51
2.10. Enlaces con clotoides .....	52
2.10.1. Enlaces simétricos entre rectas.....	54
2.10.1.1. Enlace simétrico clotoide—círculo—clotoide .....	54
2.10.1.2. Clotoide de vértice (clotoide—clotoide) .....	60
2.10.1.3. Lazo .....	63
2.10.1.4. Alineaciones rectas paralelas (enlace simétrico).....	65
2.10.1.5. Enlace simétrico entre rectas en sustitución de curvas circulares .....	66
2.10.2. Enlaces asimétricos entre rectas .....	69
2.10.2.1. Enlace asimétrico clotoide—círculo—clotoide .....	69
2.10.2.2. Clotoide de vértice forma asimétrica .....	71
2.10.2.3. Enlace entre recta y círculo de sentido contrario .....	72
2.10.2.4. La curva de inflexión.....	74
2.10.2.5. La Ovoide .....	78
2.10.2.6. La serie de clotoides.....	84
2.11. Parámetros de la clotoide .....	85
2.11.1. Parámetro por longitud mínima de la clotoide de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga.....	86
2.11.2. Parámetro por longitud mínima de la clotoide de acuerdo a la transición del peralte .....	87
2.11.3. Parámetro por longitud mínima de la clotoide por razones de percepción y estética .....	88
2.11.4. Consideraciones del parámetro y longitud de la clotoide en el diseño de carreteras .....	89
<b>3. SOBREENCHO .....</b>	<b>91</b>
3.1. Métodos para alcanzar el sobreencho .....	93
3.2. Transición del sobreencho .....	94
<b>4. REPLANTEO .....</b>	<b>97</b>
4.1. Triangulación .....	97
4.2. Bisección.....	99

4.3. Calculo del eje.....	100
4.4. Deflexiones .....	104
4.5. Procedimiento general para replantear espiral y circulo.....	105
4.6. Procedimiento de la divergencia angular y lineal .....	106
4.7. Desviaciones desde un punto intermedio de la espiral .....	107
4.8. Trazado de la espiral por coordenadas.....	108
4.9. Ejemplo de calculo por coordenadas para replanteo en campo .....	108
<b>CONCLUSIONES</b> .....	121
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	125
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	127



# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1	Componentes normales y paralelas al pavimento.....	5
2	Componentes de velocidad de equilibrio.....	6
3	Componentes en el sentido de la fuerza centrífuga.....	7
4	Componentes en sentido contrario a la fuerza centrífuga.....	8
5	Enlace con clotoide entre alineaciones rectas y curvas.....	15
6	Fuerza centrífuga en trazo circular.....	16
7	Fuerza centrífuga en trazos con clotoides.....	17
8	Clotoide.....	18
9	Parámetro de la clotoide.....	20
10	Términos y símbolos de la clotoide.....	21
11	Diferencial de la clotoide.....	24
12	Función de la espiral y el círculo.....	32
13	Función de la curva circular con transición de espiral.....	32
14	Tangente y exterior total de la espiral.....	33
15	Curva de transición.....	35
16	Clotoide de vértice.....	35
17	Curva de inflexión.....	35
18	Ovoide.....	36
19	Serie de clotoides.....	36
10	Esquema tridimensional de la transición del peralte.....	40
21	Distribución del bombeo y peralte.....	42
22	Perfil parcial del bombeo y peralte.....	42
23	Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga.....	45
24	Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la transición del peralte.....	48
25	Enlace simétrico clotoide—círculo—clotoide.....	54

26	Elementos del enlace simétrico clotoide—círculo—clotoide .....	60
27	Clotoide de vértice .....	61
28	Lazo.....	63
29	Enlace simétrico de alineaciones paralelas .....	65
30	Enlace simétrico entre rectas en sustitución de curvas circulares.....	66
31	Enlace asimétrico clotoide—círculo—clotoide .....	69
32	Tangentes en enlace asimétrico clotoide—círculo—clotoide.....	70
33	Clotoide de vértice forma asimétrica .....	71
34	Enlace entre recta y círculo de sentido contrario .....	73
35	La curva de inflexión.....	75
36	La Ovoide.....	78
37	Elementos de La Ovoide .....	80
38	Deflexiones y cuerdas de La Ovoide.....	82
39	La serie de clotoides.....	85
40	Parámetro de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga .....	87
41	Parámetro de la clotoide de acuerdo a la transición del peralte .....	88
42	Relación del parámetro en curva en S.....	89
43	Radio de giro del vehículo SU .....	92
44	Distribución de sobreebanco a ambos extremos .....	93
45	Distribución de sobreebanco en el extremo interno.....	94
46	Distribución lineal del sobreebanco.....	95
47	Triangulación .....	97
48	Bisección .....	99
49	Replanteo de línea .....	101
50	Giros en el mismo sentido.....	101
51	Tangencias.....	103
52	Divergencia de la espiral .....	106
53	Desviación desde el punto interno de la espiral .....	107

## TABLAS

I	Valores de J.....	47
II	Pendientes relativas de los bordes de la calzada.....	51
III	Resultados de replanteo por coordenadas .....	120





## RESUMEN

La clotoide como espiral de transición es aplicada principalmente, en el diseño de carreteras, como enlace entre alineaciones rectas y curvas circulares, o bien, entre dos rectas, debido a su variación de radio gradual con lo cual, se garantiza también, el cambio gradual de la aceleración centrípeta para mantener una velocidad conveniente, así como unas condiciones de seguridad y comodidad en todo el trazado de una carretera. En la longitud de la curva de transición es donde se desarrolla el peralte y el sobreebanco. Además por su bondadosa flexibilidad la clotoide como curva de transición permite una mejor adaptación a la topografía del terreno, principalmente en terrenos montañosos, con lo cual se reduce el movimiento de tierras, lo que supone una considerable ventaja constructiva y la reducción sustancial en el coste de la misma.

La longitud de la clotoide o su parámetro no deberán ser inferiores a un valor mínimo, con el objeto de que la curva cumpla ciertas condiciones de tipo dinámico, geométrico y estético, en función de la velocidad de diseño y radio. La buena disposición del trazo con clotoides lleva consigo una excelente integración al paisaje.

Con los programas actuales para diseño geométrico de carreteras, se facilita el diseño con la clotoide, evitando los cálculos matemáticos, los cuales no son más engorrosos que los del corrimiento en trazos circulares. Y con el uso de dichos programas se transfiere la información necesaria a las estaciones totales y TDS, para su replanteo en campo, el cual se facilita al realizarlo por coordenadas.



# OBJETIVOS

## ◆ GENERAL

Dar a conocer los elementos de seguridad, parámetros y formas de la clotoide como curva de transición en carreteras, par su aplicación en el diseño geométrico y métodos que simplifiquen el replanteo en campo de carreteras.

## ◆ ESPECÍFICOS

1. Aplicar la clotoide en el diseño geométrico de carreteras.
2. Dar a conocer las diferentes formas de la clotoide para su aplicación en carreteras.
3. Crear un documento que cuente con los parámetros de la clotoide para su aplicación en el diseño geométrico de carreteras.
4. Desarrollar los elementos de seguridad en curvas de transición tales como los parámetros y sobreebancho.
5. Desarrollar los diferentes métodos de aplicación del sobreebancho en curvas de transición.

6. Desarrollar métodos para replanteo en campo.
7. Ejemplificar la obtención de coordenadas sobre una curva de transición (clotoide).

# INTRODUCCIÓN

Dentro del estudio de las vías de comunicación, el diseño geométrico y replanteo de carreteras deben cumplir con parámetros que brinden confort y seguridad, lo que hace necesario la incorporación de tecnología y aplicación de métodos modernos, para obtener cálculos rápidos y confiables.

El diseño geométrico de carreteras se ha basado en alineaciones rectas y curvas, realizando por el método de corrimientos la curva de transición entre ambas alineaciones, lo cual no proyecta en planta y perfil el trazo que se colocara en campo. Esto se puede evitar diseñando directamente con curvas de transición, es decir utilizando en el diseño la clotoide como un elemento geométrico, con lo cual se aprecia desde el inicio el trazo que se colocara en campo.

Diseñar con alineaciones rectas y circulares, se debe a que en años anteriores los métodos utilizados para trazos con clotoides, eran laboriosos, tanto en el diseño como en el replanteo en campo, por no contar con los recursos tecnológicos necesarios. En la actualidad los avances tecnológicos permiten realizar cálculos rápidos y precisos, para el diseño geométrico y el replanteo en campo.

En el presente trabajo se analizará la clotoide como curva de transición en carreteras, formas, elementos de seguridad que definen sus parámetros y métodos de replanteo en campo, con el fin de aplicar la clotoide al diseño y simplificar el trabajo en campo.

## **1. DISEÑO GEOMÉTRICO CON CLOTOIDES**

### **1.1. La velocidad directriz en el proyecto de caminos**

A diferencia de las zonas urbanas, en las cuales las velocidades desarrolladas por los vehículos automotores, varían ampliamente por diversos factores, tales como, semáforos, las diversas intersecciones, etc., las zonas rurales tienden a desarrollar velocidades constantes, no mayor que aquéllas permitidas, por las condiciones de tránsito y del camino.

La velocidad promedio se encuentra condicionada, en su gran mayoría por las características del trazado; pero, se debe tener en cuenta de que algunos conductores prefieren velocidades mayores que otros, y viceversa. De cualquier manera, mantener una velocidad uniforme, es el propósito de la mayoría de los conductores.

Por lo anterior, es imprescindible proyectar el trazado de una carretera a una velocidad definida, dicha velocidad de diseño supuesta de una carretera es el máximo de velocidad aproximadamente uniforme que probablemente será adoptada por el grupo más rápido de conductores pero no, necesariamente, por el porcentaje pequeño conductores que prefieren velocidades más elevadas, dicho de otra manera, la velocidad de diseño, es aquella a la cual, "un conductor de habilidad media, con razonable atención, pueda recorrer un camino con entera seguridad".

El principal factor que afecta la selección de velocidad de diseño es la característica del terreno. En general, en zonas llanas o ligeramente onduladas,

justifica velocidades de diseño más elevadas que en zonas montañosas, ya que el costo de construcción de las obras básicas para velocidades altas, es menor en el primer caso.

Una carretera importante que soporta un volumen grande de tráfico puede justificar una velocidad de diseño más alta que una carretera menos importante en topografía similar, debido a que el aumento de los gastos por el derecho de vía y construcción será compensado por las economías en funcionamiento de la operación del vehículo, mantenimiento de la carretera, tiempo y otros costos de operación. Una velocidad de diseño baja no debe asumirse para un camino secundario si la topografía es tal que los operadores de vehículos probablemente viajarán a velocidades altas en la totalidad de la carretera. Los conductores no ajustan su velocidad a la importancia del camino, pero si a las limitaciones físicas como curvatura, pendiente, distancia de visibilidad, y suavidad de la superficie, es decir, a las características del trazado. A igualdad de condiciones, un conductor puede usar velocidades mayores en una carretera menos importante debido a la ausencia de tráfico considerable.

El criterio de la adopción de la velocidad de diseño, la hacemos con la seguridad de que con ello se uniforma la técnica de trazado, haciendo lo más equilibrado. Un diseño equilibrado requiere que cada detalle crítico de la carretera, hasta donde sea económicamente posible, se diseñe para la velocidad supuesta. Para altas velocidades, los radios de curvas, peraltes, distancias de visibilidad, sobreechamientos y hombros se incrementan, las pendientes decrecen, y otros cambios familiares a ingenieros de carreteras deben hacerse.

Ningún detalle inesperado que requiera o anime una reducción súbita de velocidad o desvío del carril ocupado deben permitirse. El enfrentarse de repente con semejante detalle está desconcertando y arriesgando, sobre todo si alguna otra

emergencia se impone en los pensamientos del conductor. Sí por razones excepcionales, fuese imposible, deberán colocarse a suficiente distancia del sitio de riesgo, señales bien visibles de día y de noche.

Al diseñar para una velocidad específica, no es necesario utilizar al límite la curvatura, ya que no es restricción utilizar curvas mas abiertas, si estas pueden ser introducidas y formar parte de un diseño económico. No debe alentarse a un conductor a acelerar con una curva abierta ocasional en el trazo, pero sí una serie de curvas abiertas se reúnen, los conductores naturalmente acudirán a acelerar para alcanzar grandes velocidades y esta sección deberá de diseñarse para una alta velocidad. La velocidad de diseño supuesta para una carretera puede aplicarse en una longitud razonable y no necesariamente en su totalidad.

Un caso excepcional puede justificar en el trazo el diseño de una serie de curvas con radios gradualmente decrecientes para inducir a los conductores a reducir la velocidad antes de alcanzar una sección deliberadamente insegura para altas velocidades. También son casos puntuales, las transiciones de terreno llano a montañoso y entradas a ciudades con numerosas intersecciones. Deben hacerse tales cambios gradualmente en tanto como sea posible y deben aprovecharse los cambios topográficos para reducir cualquier apariencia de alineamiento forzado.

## **1.2. Velocidad segura en curvas, peralte y fricción lateral**

Con el propósito de proporcionar seguridad, eficiencia y un diseño entre los elementos de la carretera desde el punto de vista geométrico y físico, es fundamental estudiar la relación existente entre la velocidad y la curvatura.



Cuando un vehículo circula sobre una curva horizontal, actúa sobre él una fuerza centrífuga  $F$  que tiende a desviarlo radialmente hacia fuera de su trayectoria normal; la magnitud de esta fuerza es:

$$F=ma$$

Donde:

$m$  = Masa del vehículo.

$a$  = Aceleración radial, dirigida hacia el centro de la curvatura.

Pero, la masa  $m$  y la aceleración radial  $a$  son iguales a:

$$m = \frac{W}{g}, \quad a = \frac{V^2}{R}$$

Donde:

$W$  = Peso del vehículo.

$g$  = Aceleración de la gravedad.

$V$  = Velocidad del vehículo.

$R$  = Radio de la curva circular horizontal.

Por lo tanto, la fuerza centrífuga que actúa sobre un vehículo que recorre una curva de radio constante a velocidad constante, está dada por la relación:

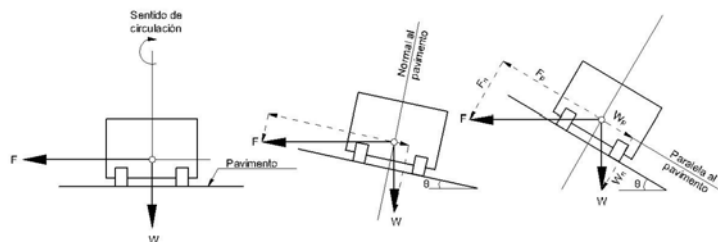
$$F = \frac{W \cdot V^2}{g \cdot R} \quad (1-1)$$

En la expresión anterior se puede ver que para un mismo radio  $R$ , la fuerza centrífuga  $F$  es mayor si la velocidad  $V$  es mayor, por lo que el efecto centrífugo es más notable.

A la aceleración centrífuga se oponen la componente del peso del vehículo paralela a la superficie peraltada  $W_e$  y la fricción entre el neumático y la superficie de rodamiento  $W_f$ . Estas fuerzas por sí solas, generalmente, no es suficiente para impedir el deslizamiento transversal; por lo tanto, es necesario un complemento inclinando transversalmente la calzada. Dicha inclinación transversal se denomina *peralte “e”*.

Si sobre una curva horizontal de radio  $R$  un vehículo circula a una velocidad constante  $V$ , el peso  $W$  y la fuerza centrífuga  $F$  son también constantes, pero sus componentes en las direcciones normal y paralela el pavimento varían según la inclinación que tenga la calzada, tal como se aprecia en la figura 1.

Figura 1. Componentes normales y paralelas al pavimento.



Como se puede apreciar, las componentes normales de las fuerzas  $W$  y  $F$  son siempre del mismo sentido y se suman, actuando hacia el pavimento, contribuyendo a la estabilidad del vehículo. Por el contrario, las componentes de  $W$  y  $F$  son de sentido opuesto y su relación hace variar los efectos que se desarrollan en el vehículo.

Definiremos las componentes normales y paralelas al pavimento, como sigue:

$W_n, F_n$ : Componentes normales al pavimento.

$W_p, F_p$ : Componentes paralelas al pavimento.

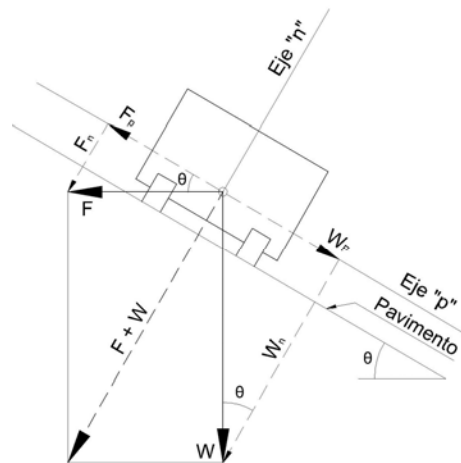
Así, dependiendo de la relación entre  $W_p$  y  $F_p$ , se presentan los siguientes casos.

Caso 1:  $W_p = 0$

La calzada es horizontal, es decir, no hay inclinación transversal y  $F_p$  alcanza su valor máximo  $F$ .

Caso 2:  $W_p = F_p$

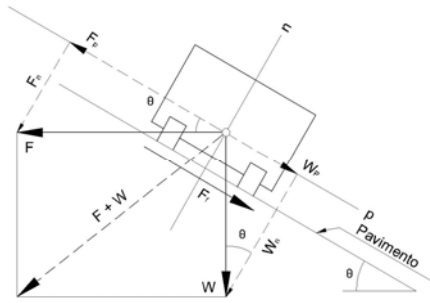
Figura 2. Componentes de velocidad de equilibrio.



En este caso, la fuerza resultante  $F+W$  es perpendicular a la superficie del pavimento. Por lo tanto, la fuerza centrífuga  $F$  no es sensible en el vehículo. La velocidad a la cual se produce este efecto se le llama *velocidad de equilibrio* (figura 2).

Caso 3:  $W_p < F_p$

Figura 3. Componentes en el sentido de la fuerza centrífuga.



En este caso, la fuerza resultante  $F+W$  actúan en el sentido de la fuerza centrífuga  $F$  (figura 3). Por lo tanto, el vehículo tiende a deslizarse hacia el exterior de la curva, pues se origina un momento en sentido contrario al movimiento. El volcamiento en vehículos livianos es el resultado típico en este caso.

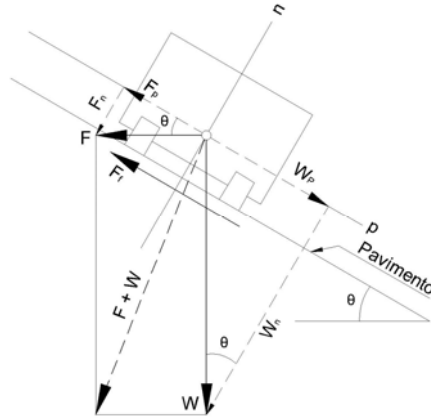
Caso 4:  $W_p > F_p$

En este caso (figura 4), la fuerza resultante  $F+W$  actúan en el sentido contrario de la fuerza centrífuga  $F$ . Por lo tanto, el vehículo tiende a deslizarse hacia el interior de la curva. El volcamiento en vehículos pesados es el resultado típico en este caso.

Por lo tanto, de acuerdo con las figuras anteriores, el peralte “e” se puede expresar:

$$e = \tan(\theta) \quad (1-2)$$

Figura 4. Componentes en sentido contrario a la fuerza centrífuga.



Como se vio en los cuatro casos anteriores de la estabilidad en curva y dependiendo de la relación entre sus componentes, se plantea lo siguiente:

A la velocidad de equilibrio (caso 2).

Según la figura 2, se tiene que:

$$W_p = F_p$$

$$W \cdot \text{sen}(\theta) = F \cdot \text{cos}(\theta)$$

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{F}{W}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1-1) en (1-2), se tiene que:

$$e = \frac{W \cdot V^2}{g \cdot R}$$

$$e = \frac{V^2}{g \cdot R}$$

Donde el peralte  $e$  es adimensional, la velocidad  $V$  se expresa en Km/h, el radio  $R$  en metros, y  $g$  es igual a  $9.81 \text{ m/seg}^2$ . Por lo tanto, convirtiendo unidades y con el valor de  $g$  se llega a:

$$e = \frac{V^2}{127 \cdot R} \quad (1-3)$$

A velocidades diferentes a la de equilibrio:

Para el caso 3,  $W_p < F_p$ , en la figura 3, se observa que: la resultante paralela ( $F_p - W_p$ ) actúan hacia la izquierda, por lo que deberá ser resistida por una fuerza de fricción transversal  $F_f$  desarrollada entre los neumáticos y el pavimento y que actúa hacia la derecha, para el sentido de la figura 3.

Esto es:

$$F_p - W_p = f_t$$

Pero también se sabe que:

Fuerza de fricción = Fuerza normal (coeficiente de fricción).

Por lo tanto,  $f_t$  es el coeficiente de fricción transversal, tal que:

$$F_p - W_p = (F_n + W_n)f_t$$

$$f_t = \frac{F_p - W_p}{F_n + W_n}$$

En la práctica para los valores normales del peralte, la componente  $F_n$  es muy pequeña comparada con la componente  $W_n$ , por lo que se puede despreciar.

Por lo tanto:

$$f_t = \frac{F_p - W_p}{W_n} = \frac{F \cdot \cos(\theta) - W \cdot \sin(\theta)}{W \cdot \cos(\theta)} = \frac{F \cdot \cos(\theta) - W \cdot \sin(\theta)}{W \cdot \cos(\theta)} = \frac{F \cdot \cos(\theta)}{W \cdot \cos(\theta)} - \frac{W \cdot \sin(\theta)}{W \cdot \cos(\theta)} = \frac{F}{W} - \tan(\theta)$$

$$f_t = \frac{F}{W} - e \quad (1-4)$$

Reemplazando la ecuación (1-1):

$$f_t = \frac{\frac{W \cdot V^2}{g \cdot R}}{W} - e = \frac{V^2}{g \cdot R} - e$$

$$e + f_t = \frac{V^2}{g \cdot R}$$

Convirtiendo unidades:

$$e + f_t = \frac{V^2}{127 \cdot R} \quad (1-5)$$

Para el caso 4,  $W_p > F_p$ , según la figura 4, por homología se llega a:

$$e - f_t = \frac{v^2}{127 \cdot R} \quad (1-6)$$

La situación más común en la práctica es aquella en la cual la mayoría de los vehículos circulan a velocidades superiores a la velocidad de equilibrio, por ello, para efectos de diseño, la expresión más utilizada es la de la ecuación (1-5) para el caso 3.

El valor del peralte debe ser limitado por razones de orden práctico. Cuando se viaja en una curva a baja velocidad, como el caso 4, un peralte exagerado puede provocar el deslizamiento del vehículo hacia el interior de la curva, siendo la fuerza centrífuga despreciable. La fricción se opone a este deslizamiento, cuando la misma no alcanza valores superiores a un cierto límite que depende del estado de la superficie, y que los ensayos han permitido fijar en un máximo de fricción de 0.1 W para el momento en que se inicio el deslizamiento. En consecuencia, en zonas en las que existe la posibilidad de formación de hielo sobre la calzada, el peralte no deberá de exceder del 10%. Donde no exista esta posibilidad, el peralte puede utilizarse el valor máximo del 12%.

Un gran número de ensayos indica que la resistencia al deslizamiento lateral que puede ser desarrollada por un vehículo al recorrer con seguridad una curva, está representada por un valor de  $f=0.16$  para velocidades comprendidas entre 50 y 100 km/hora, y  $f=0.14$  para una velocidad de 120 km/hora.

En realidad, pueden desarrollarse resistencias al deslizamiento lateral mucho mayores que las representadas por los valores consignados, sin que se produzca el deslizamiento lateral. Sin embargo, no es aconsejable, cuando se pone como primera condición del proyecto la seguridad, adoptar valores que bajo ciertas condiciones de



la superficie de rodamiento, puedan acercarse a aquéllos que hacen inminente el deslizamiento.

Debido a las limitaciones prácticas en el aumento del peralte, no es posible compensar totalmente la fuerza centrífuga en curvas cerradas y se hace necesario recurrir a la fricción, además del peralte, para impedir a un vehículo deslizarse hacia afuera. En consecuencia, un vehículo que viaja en una carretera a la velocidad de diseño, no desarrollará fricción al recorrer curvas abiertas, pero desarrollará fricción considerable en curvas cerradas.

Hay un pequeño balance en un diseño en el que ninguna fricción se desarrolla al recorrer algunas curvas y la máxima cantidad aceptable es desarrollada al recorrer otras curvas a la misma velocidad. Parece deseable desarrollar una cantidad moderada de fricción al recorrer las curvas abiertas pero la fricción que no debe exceder este desarrollo cuando recorra curvas cerradas peraltadas por el método anterior.

En la práctica el máximo valor del peralte es de 10% y el valor máximo del coeficiente de fricción lateral es de 0.16. Para una curva de radio mínimo y una velocidad de diseño elegida aproximadamente el 39% de la fuerza centrífuga será contrarrestada por el efecto del peralte, debido a la siguiente relación:

$$\frac{0.10}{0.10 + 0.16} = 0.39$$

Si se utiliza exactamente el 39%, como el valor que absorbe el peralte de la fuerza centrífuga, solamente en las curvas de radio mínimo se utilizara el peralte

máximo del 10% y en curvas de radio mayor este decrecerá proporcionalmente al incrementarse el mismo. Esto reduce el margen de seguridad para los vehículos que recorren las curvas amplias a velocidades superiores de la velocidad de diseño. Pero si tratamos de contrarrestar el 100% de la fuerza centrífuga con el peralte donde quiera que sea posible es inaceptable debido a que los cálculos en todas las curvas menos en las más abiertas sería el peralte prácticamente el máximo valor del 10%.

### 1.3. Máxima curvatura para varias velocidades de diseño

Empleando para cada velocidad de diseño  $V$  se adopta un coeficiente de fricción transversal movilizable que sea seguro en condiciones críticas  $f_{m\acute{a}x}$ , como son pavimento majado y estado desgastado de llantas, y un peralte suficiente  $e_{m\acute{a}x}$ , obteniendo así el radio  $R_{m\acute{i}n}$  de la curva o máxima curvatura que genera la fuerza centrífuga que se puede contrarrestar con estos valores seleccionados.

En otras palabras, el radio mínimo  $R_{m\acute{i}n}$  o curvatura máxima, es el límite para una velocidad específica  $V$  dada del vehículo, calculado a partir del peralte máximo  $e_{m\acute{a}x}$  y del coeficiente de fricción transversal máximo  $f_{m\acute{a}x}$ , según la ecuación (3-32 cardenas anterior mía), como:

$$R_{m\acute{i}n} = \frac{V^2}{127(e_{m\acute{a}x} + f_{m\acute{a}x})} \quad (1-7)$$



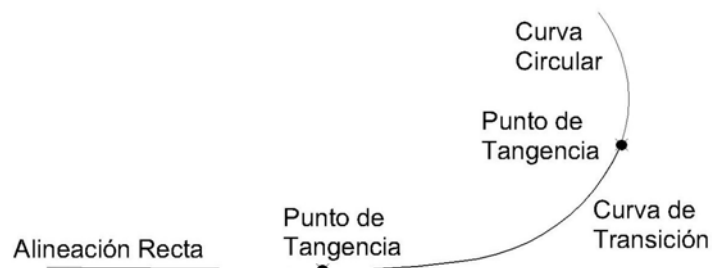
## 2. DISEÑO GEOMÉTRICO CON CLOTOIDES

### 2.1. Curvas de transición

Las curvas de transición (también llamadas “espirales de transición” o “clotoides”) para los ferrocarriles y carreteras son curvas que proporcionan un cambio de curvatura gradual desde un tramo recto a uno circular. Tales curvas de adaptación resultan de gran necesidad en ferrocarriles de velocidad elevada, desde el punto de vista de la comodidad, y para conseguir gradualmente el peralte del carril exterior en las curvas.

El uso de las curvas de transición tiene las mismas ventajas generales que para los ferrocarriles, más el coeficiente de seguridad, es decir, se proporciona una zona de transición, reduciendo así la tendencia a desviarse de la faja lógica de tráfico. En una forma más simple, se utiliza como enlace entre alineaciones rectas y curvas circulares, con el propósito de suavizar gradualmente el encuentro de una curva de radio infinito, como es la recta, con una curva circular de radio determinado (Fig. 5).

Figura 5. Enlace con clotoide entre alineaciones rectas y curvas.



La fuerza centrífuga se define mediante la expresión:

$$F_c = \frac{M \cdot v^2}{R}$$

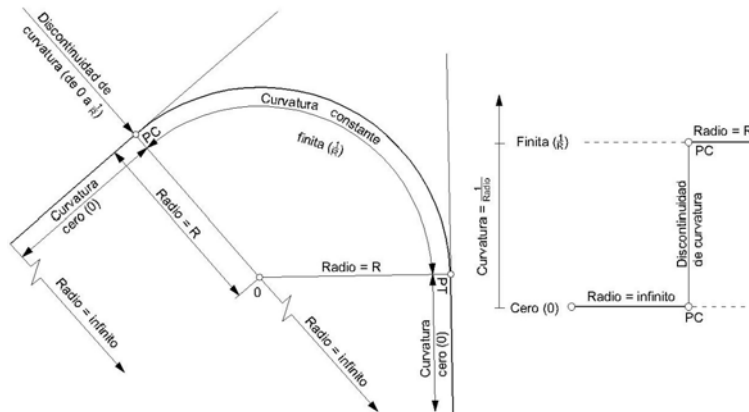
Donde:  $F_c$ : Fuerza centrífuga.

$M$ : Masa del móvil.

$v$ : Velocidad de dicho móvil.

$R$ : Radio de la curva circular.

Figura 6. Fuerza centrífuga en trazo circular.



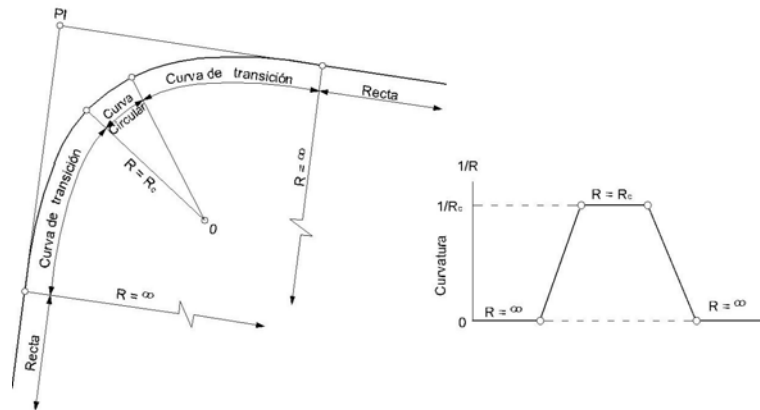
$F_c$  es igual a cero en un tramo recto, pero al entrar en una curva adquiere de pronto un valor determinado, lo cual hace que un vehículo corra el riesgo de salirse a la entrada de la curva, si no reduce la velocidad con lo cual disminuiría el valor de  $F_c$ , como puede verse en la ecuación anterior y figura 6.

Desde el punto de vista del conductor, cuando un vehículo que circula por un tramo recto de carretera llega a uno circular, el conductor debe girar el volante para colocara la rueda conductora en un nuevo ángulo, que depende del radio de la curva. Este movimiento no se puede hacer instantáneamente, sino en un intervalo de

tiempo medible, creando así una necesidad de curva de transición cuya longitud es igual a *velocidad x tiempo*.

Cuando un vehículo recorre una curva de transición para pasar de recta a curva, se va ejerciendo una presión constante y creciente sobre el giro del volante y al mismo tiempo se va desacelerando de forma gradual (figura 7).

Figura 7. Fuerza centrífuga en trazos con clotoides.



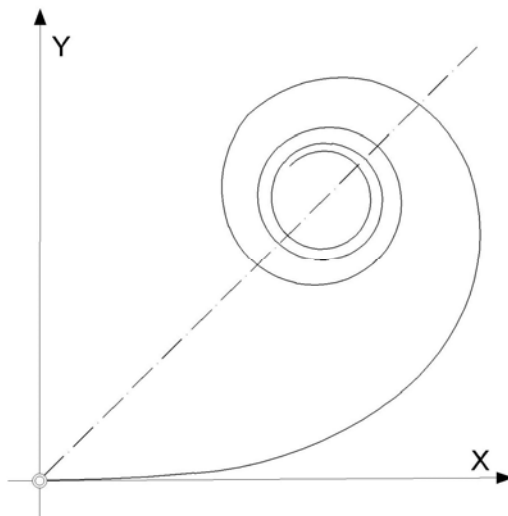
Al utilizar las curvas de transición, se obtiene una variación decreciente del radio y la fuerza centrífuga aumenta también de manera gradual. Así se puede evitar los accidentes, debido a un exceso de velocidad, cuando a la entrada de una curva, la fuerza centrífuga aparece bruscamente expulsando al vehículo de la calzada.

## 2.2. La Clotoide

Conocida también como espiral de Cornú, fue analizada por Max Von Leber en 1860 y aplicada en la ingeniería por L. Oerley en 1937.

La “clotoide” (del griego Cloto), es una curva, cuya curvatura crece linealmente desde  $\frac{1}{R} = 0$  hasta  $\frac{1}{R} = \infty$  (Figura8).

Figura 8. **Clotoide.**



El principal campo de aplicación de la clotoide está en la construcción de carreteras. Un vehículo no puede efectuar, sin una cierta transición, el cambio de dirección necesario para recorrer un arco de círculo. La ausencia de o la inadecuada curva de transición fuerza al conductor a reducir la velocidad, lo que puede llevarle a cortar la curva. La única manera de conseguir una marcha regular y cómoda se realiza empleando curvas de transición adecuadas, requisito especialmente bien cumplido por la clotoide, gracias al crecimiento lineal de sus curvaturas. Pues en un cambio de dirección, permaneciendo constante la velocidad y con presiones uniformemente crecientes en el volante, el camino del vehículo corresponde exactamente a un arco de clotoide. En consecuencia la aplicación de arcos de clotoides representa el tipo más uniforme de transición entre dos elementos del trazo, independientemente de que se trate de unir una recta con un círculo, dos rectas de direcciones diferentes, o dos círculos de radios diferentes.

Tampoco debe subestimarse el efecto psicológico sobre la marcha, resultante de las condiciones de perspectiva. Por ejemplo, la unión de una recta con un círculo, sin la interposición de un arco de transición, aparece como un codo, más o menos marcado, según la magnitud del radio del círculo. Semejante interrupción tiende a impedirle al conductor mirar más allá de dicha interrupción y así le obliga a que reduzca velocidad debido ante la aparente dificultad. Por el contrario, el empleo de la clotoide como arco de transición ofrece a un camino una apariencia continua. Por otra parte, la clotoide permite adaptarse fácilmente al contorno de la topografía, especialmente en terreno montañoso. Tal mejor adaptación al terreno tiene por consecuencia menor movimiento de tierras, lo que supone una considerable ventaja constructiva y la reducción sustancial en el coste de la misma. La clotoide permite un trazado de bondad extraordinaria, cuya flexibilidad es totalmente superior a la que proporcionan los arcos circulares. Las alineaciones rectas de gran longitud resultan rígidas, alteran la perspectiva perturbando la línea de flujo y disminuyen la atención del conductor.

La clotoide tiene especial importancia en la construcción de ferrocarriles, pues no debe olvidarse que el ferrocarril, de tan distinto modo que los vehículos de carretera, el vehículo ferroviario es guiado por los rieles. En el paso de recta a arco circular debe estar garantizado el paulatino aumento de la curvatura, ya que en otro caso, la súbita aparición de la fuerza centrífuga al empezar la curva, podría dar lugar a sacudidas de consideración. Puesto que la fuerza centrífuga es proporcional a la curvatura, al crecer esta linealmente en la clotoide, queda igualmente asegurado el aumento lineal de dicha fuerza. Por consiguiente, también en la construcción de ferrocarriles, el empleo de la clotoide como curva de transición, da lugar a condiciones de marcha dinámicamente muy favorables.

La clotoide también es de importancia en las vías fluviales. La variación uniformemente continua de la curvatura de las líneas de corriente, proporciona



buenas condiciones hidrodinámicas a la misma. Al mismo tiempo, se reduce considerablemente el peligro de erosión de las márgenes.

La bien dispuesta variación de las curvaturas tanto para carreteras, ferrocarriles y vías fluviales, lleva consigo una excelente integración en el paisaje.

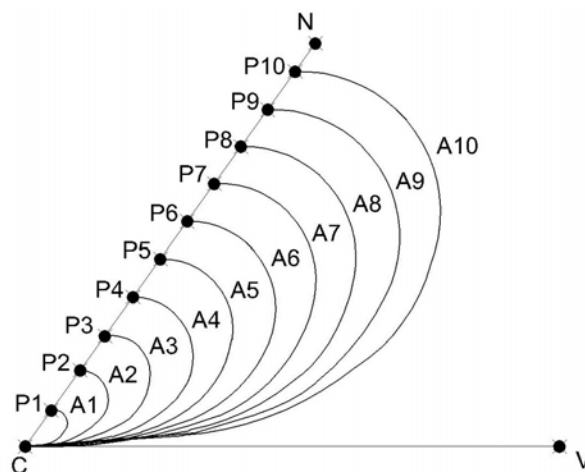
### 2.3. Elementos de la clotoide

La ley de curvatura de la clotoide es:

$$A = \sqrt{L \cdot R}(2-1)$$

Es decir, que, para cada valor del parámetro  $A$ , el producto de la longitud  $L$  y del radio  $R$  es el mismo en todos los punto de la clotoide. Por lo tanto, el parámetro  $A$  expresa unívocamente el tamaño de la clotoide como se muestra en la figura 9.

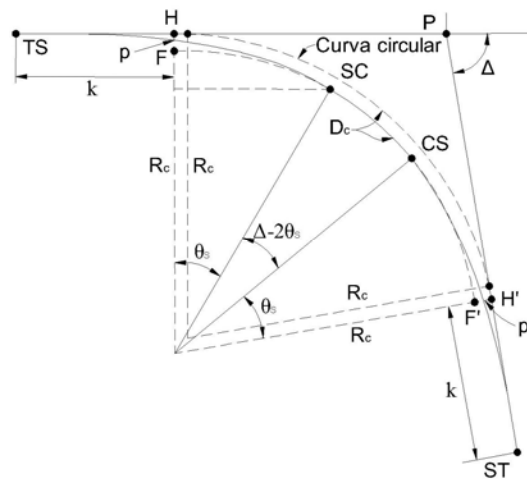
Figura 9. **Parámetro de la clotoide.**



*Todos las Clotoides son semejantes entre si, y por consiguiente puede aumentarse o reducirse proporcionalmente.*

La figura 10 y el siguiente listado de símbolos muestran el significado de los términos y símbolos empleados en esta discusión.

Figura 10. Términos y símbolos de la clotoide.



- PI Punto de intersección de las tangentes principales.
- TS Punto de cambio de tangente a espiral (punto de inicio de la espiral de entrada).
- SC Punto de cambio de espiral a curva circular.
- CS Punto de cambio de curva circular a espiral.
- ST Punto de cambio de espiral a tangente (punto final de la espiral de salida).
- SS Punto de cambio de una espiral a otra.
- $L_s$  Longitud total de la espiral del TS al SC o bien del CS al ST.
- L Longitud desde TS o ST hasta un punto cualquiera de la espiral.
- $L_1$  Longitud entre cualquiera de dos puntos sobre la espiral.
- $\theta$  Ángulo central del arco de espiral en un punto cualquiera de la espiral.
- $\theta_s$  Ángulo central del arco de espiral  $L_s$ , llamado “ángulo de espiral”.

$\Phi$	Angulo de desviación de la espiral en el TS, desde la tangente inicial a un punto de la curva. $R$ =radio.
G	Grado de curvatura de la espiral en cada punto.
$G_c$	Grado de curvatura del círculo desplazado al que resulta tangente la espiral en el SC. $R_c$ =su radio.
K	$D_c/L_s$ relación de cambio de grado de curvatura por metro de la espiral.
$\Delta$	Angulo central total de la curva circular.
$\Delta_s$	Angulo central del arco circular de longitud $L_c$ que va del SC al CS.
y	Ordenada a la tangente de cualquier punto de la espiral, con referencia al TS y la tangente inicial
$y_s$	ordenada a la tangente del SC.
x	distancia en la tangente de cualquier punto de la espiral, con referencia al TS y la tangente inicial.
$x_s$	Distancia en la tangente del SC.
p	Ordenada desde la tangente inicial al PC del círculo desplazado; $p = y_s - R_c(1 - \cos \theta_s)$ .
k	abscisa del PC desplazado, referido al TS. $k = x_s - R_c \text{ sen } \theta_s$ .
a	Distancia del PC al TS de la espiral que se aplica a una curva circular existente (no desplazada).
$T_s$	Distancia total en la tangente = distancia desde el PI al TS, o bien del PI al ST.
	$T_s = (R_c + p) \text{ tg } \frac{1}{2} \Delta + k$ .
$E_s$	Externa de la curva total o distancia del medio del arco circular al PI. $E_s = (R_c + p) (\text{sec } \frac{1}{2} \Delta - 1) + p$ .
LT	Longitud de la tangente larga de la espiral.
ST	Longitud e la tangente corta de la espiral.
LC	Cuerda de la espiral entre TS y SC.

## 2.4. Cálculo de los elementos de la clotoide

Partimos de la ecuación fundamental de la clotoide, dado que en cualquier punto de la curva se cumplirá igualmente que:

$$r \cdot l = A^2 \quad \longrightarrow \quad r \cdot l = R_c \cdot L_s \quad (2-3)$$

$$\text{En un sector diferencial} \quad dl = r \cdot d\theta \quad (2-4)$$

Puesto que al ser  $r$  muy grande su variación es despreciable como se muestra en la figura 11. Despejando  $r$  y sustituyendo en la ecuación anterior queda:

$$\frac{dl}{d\theta} \cdot l = R \cdot L_s \quad d\theta = \frac{l \cdot dl}{R \cdot L_s} \quad (2-5)$$

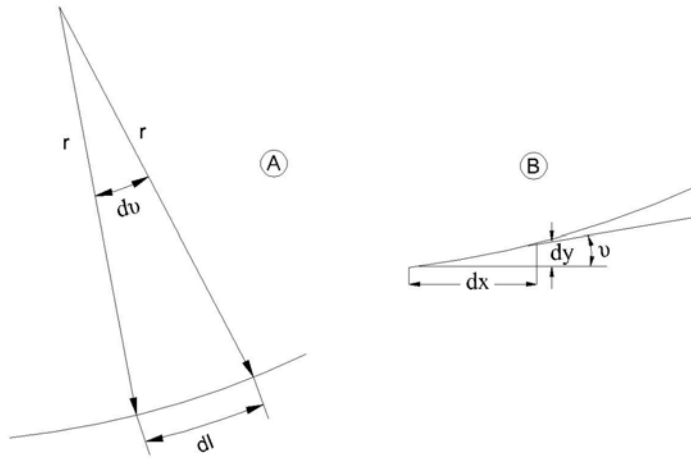
Integrando

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L_s} + C \quad (2-6)$$

Pero  $C=0$  porque  $\theta=0$  cuando  $l=0$ . Queda definitivamente

$$\theta = \frac{l^2}{2 \cdot R \cdot L_s} \quad (2-7)$$

Figura 11. Diferencial de la clotoide.



Valor de  $\theta$  en radianes. Pero en el punto F,  $\theta = \theta_s$  y  $l = L_s$ . Luego

$$\theta_s = \frac{L_s^2}{2R_c \cdot L_s} = \frac{L_s}{2 \cdot R_c}$$

(2-8)

Si ahora sustituimos  $L_s$  por su expresión en función de A y de  $R_c$ , tendremos

$$\theta_s = \frac{\frac{A^2}{R_c}}{2 \cdot R_c} = \frac{A^2}{2 \cdot R_c^2} \longrightarrow R_c = \frac{A}{\sqrt{2 \cdot \theta_s}} \quad (2-9)$$

Por lo cual tenemos relacionados el parámetro A, el radio  $R_c$  y el desarrollo  $L_s$  con el valor angular  $\theta_s$ .

Por otro lado, en un sector diferencial y según la figura 11B.

$$\cos(\theta) = \frac{dx}{dl}$$

$$dx = \cos(\theta) \cdot dl \quad (2-10)$$

Desarrollando en serie del coseno

$$dx = \sum \frac{(-1)^{(n-1)} \cdot \theta^{(2n-2)}}{(2n-2)!} \cdot dl \quad (2-11)$$

Sustituimos la expresión (2-7) en (2-11) y obtenemos

$$\text{Integrando} \quad \delta x = \sum \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot l^{(4n-4)}}{(2n-2)! \cdot (2R_c \cdot L_s)^{(2n-2)}} \delta l \quad (2-12)$$

$$\int l^{(4n-4)} dl = \frac{l^{(4n-3)}}{(4n-3)} + C \quad (2-13)$$

Como  $x=0$  cuando  $l=0$  entonces  $C=0$ , nos queda definitivamente que

$$X = \sum \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot l^{(4n-3)}}{(4n-3) - (2n-2)! \cdot (2R_c \cdot L_s)^{(2n-2)}} \quad (2-14)$$

Para los cuatro primeros términos tendremos:

$$X = 1 - \frac{l^5}{5 \cdot 2! \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^2} + \frac{l^9}{9 \cdot 4! \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^4} - \frac{l^{13}}{13 \cdot 6! \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^6}$$



$$X = 1 - \frac{l^5}{10 \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^2} + \frac{l^9}{216 \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^4} - \frac{l^{13}}{9360 \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^6} \quad (2-15)$$

Para deducir Y partimos nuevamente de la figura 11A

$$\text{sen}(\theta) = \frac{dy}{dl} \quad \longrightarrow \quad dy = \text{sen}(\theta) \cdot dl \quad (2-16)$$

Desarrollando ahora la serie del seno

$$dy = \sum \frac{(-1)^{(n-1)} \cdot \theta^{(2n-2)}}{(2n-1)!} \cdot dl \quad (2-17)$$

Sustituyendo (2-7) en (2-17) tenemos

$$dy = \sum \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot l^{(4n-2)}}{(2n-2)! \cdot (2 \cdot R_c \cdot L_s)^{(2 \cdot n-1)}} \cdot dl \quad (2-18)$$

Integrando obtenemos 
$$Y = \sum \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot l^{(4n-2)}}{(2n-1)! \cdot (4n-1) \cdot (2R_c \cdot L_s)^{(2n-1)}} \quad (2-19)$$

Para los cuatro primeros términos tendremos:

$$Y = \frac{l^3}{3 \cdot (2R_c \cdot L_s)} - \frac{l^7}{7 \cdot 3! \cdot (2R_c \cdot L_s)^3} + \frac{l^{11}}{11 \cdot 5! \cdot (2R_c \cdot L_s)^5} - \frac{l^{15}}{15 \cdot 7! \cdot (2R_c \cdot L_s)^7}$$

↓

$$Y = \frac{l^3}{3 \cdot (2R_c \cdot L_s)} - \frac{l^7}{42 \cdot (2R_c \cdot L_s)^3} + \frac{l^{11}}{1320 \cdot (2R_c \cdot L_s)^5} - \frac{l^{15}}{75600 \cdot (2R_c \cdot L_s)^7} \quad (2-20)$$

Por las expresiones (2-15) y (2-20) podemos conocer X e Y de cualquier punto, siempre y cuando conozcamos su parámetro A (o R<sub>c</sub> y L<sub>s</sub>) y el desarrollo l del punto en concreto. Además si en estas expresiones sustituimos l por el “desarrollo total” L<sub>s</sub>, obtendremos los valores de X y de Y correspondientes al punto F.

En función de X y de Y dispondremos de las expresiones que determinan el resto de los elementos de la clotoide. Analizando la figura 10.

$$\sigma = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (2-21)$$

$$S_L = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2-22)$$



$$\vec{CN} = X_O \quad \vec{CN} = \vec{CH} - \vec{NH} \quad \longrightarrow \quad X_O = R - R \cdot \text{sen}(\tau) \quad (2-23)$$

$$\vec{QN} = \Delta R \quad \vec{QN} = \vec{ON} - \vec{OQ} \quad \longrightarrow \quad \Delta R = (R \cdot \text{COS}(\tau) + y) - R \quad (2-24)$$

$$T_c = \frac{Y}{\text{sen}(\tau)} \quad (2-25)$$

$$\vec{CM} = T_L \quad \vec{CM} = \vec{CH} - \vec{MH} \quad \longrightarrow \quad T_L = X - \frac{Y}{\text{tan}(\tau)} = X - T_c \cdot \text{cos}(\tau) \quad (2-26)$$

En muchos casos, las ecuaciones anteriores no son útiles por no conocer alguno de los datos necesarios para su cálculo. Por eso se usan los valores unitarios de los elemento de la clotoide respecto del radio. Es decir, las expresiones que definen cada uno de los elementos dividido por el radio.

Para el punto  $F$  se cumple que  $l=L_s$ , luego  $X$  será igual a

$$X = \sum \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot L_s^{(4n-3)}}{(4n-3) \cdot (2n-2)! \cdot (2R_c \cdot L_s)^{(2n-2)}} \quad (2-27)$$

Dividiendo por  $R$

$$\frac{X}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{(n+1)}}{(4n-3) \cdot (2n-2)!} \right] \cdot \left[ \frac{L_s^{(4n-3)}}{R_c (2R_c \cdot L_s)^{(2n-2)}} \right] \quad (2-28)$$

Si ahora multiplicamos y dividimos por  $2L_s$

$$\frac{X}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{(n+1)}}{(4n-3) \cdot (2n-2)!} \right] \cdot \left[ \frac{L_s^{(4n-2)}}{(2R_c \cdot L_s)^{(2n-1)}} \right] \quad (2-29)$$

Y como

$$\tau^{2n-1} = \frac{L_s^{4n-2}}{(2R_c \cdot L_s)^{2n-1}} \quad (2-30)$$

Sustituimos (2-30) en la expresión (2-29) y nos queda

$$\frac{X}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{n+1} \cdot \tau^{2n-1}}{(4n-3) \cdot (2n-2)!} \right] \quad (2-31)$$

Tomamos los cinco primeros términos del desarrollo, suficientes para la precisión que necesitamos usualmente

$$\frac{X}{R_c} = 2\tau - \frac{2\tau^3}{10} + \frac{2\tau^5}{216} - \frac{2\tau^7}{9360} + \frac{2\tau^9}{685440} \quad (2-32)$$

Si partimos de nuevo, ahora para el valor de  $Y$

$$Y = \sum \frac{(-1)^{n+1} \cdot L_s^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)! \cdot (2R_c \cdot L_s)^{2n-1}} \quad (2-33)$$

Dividiendo por  $R_c$

$$\frac{Y}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} \cdot \left( \frac{L_s^{4n-1}}{R_c (2R_c \cdot L_s)^{2n-1}} \right) \right] \quad (2-34)$$

Si ahora multiplicamos y dividimos por  $2L_s$

$$\frac{Y}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} \cdot \left[ \frac{2L_s^{4n}}{(2R_c \cdot L_s)^{2n}} \right] \right] \quad (2-35)$$

Y como

$$\frac{2L_s^{4n}}{(2R_c \cdot L_s)^{2n}} = \frac{L_s^{4n}}{(2R_c \cdot L_s)^{2n}} \quad (2-36)$$

Sustituyendo (2-36) en (2-35) tenemos

$$\frac{Y}{R_c} = \sum \left[ \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot \tau^{(2n)}}{(4n-1) \cdot (2n-1)!} \right] \quad (2-37)$$

Tomando los primeros cinco términos del desarrollo

$$\frac{Y}{R_c} = \frac{2\tau^2}{3} - \frac{2\tau^4}{42} + \frac{2\tau^6}{1320} - \frac{2\tau^8}{75600} + \frac{2\tau^{10}}{6894720}$$

(2-38)

Los valores unitarios de los elementos respecto del radio quedan del siguiente modo:

$$\frac{X_o}{R_c} = \frac{X}{R_c} - \text{sen}(\tau)$$

(2-39)

$$\frac{\Delta R}{R_c} = \frac{Y}{R_c} + \text{cos}(\tau) - 1$$

(2-40)

$$\frac{T_c}{R_c} = \frac{\frac{Y}{R_c}}{\text{sen}(\tau)}$$

(2-41)

$$\frac{T_L}{R_c} = \frac{X}{R_c} - \frac{\frac{Y}{R_c}}{\text{tan}(\tau)}$$

(2-42)

## 2.5. Funciones de la espiral y el círculo

En la figura 12, los dos arcos de espiral que van del TS al SC y del CS al ST están unidos por un arco circular intermedio que subtende un ángulo central de  $\Delta_c = (\Delta - 2\theta_s)$  grados. Para hacer sitio a la espiral se ha trasladado radialmente el arco circular hacia dentro a la posición FF', donde  $HF = HF' = p$ . La traslación radial correspondiente, del lado opuesto al PI, llamada desplazamiento, es igual a  $p \cdot \sec\left(\frac{1}{2}\Delta\right)$ .

Elementos importantes, o funciones, de la curva circular con transición de espiral son (figuras 12 y 13).

Figura 12. **Función de la espiral y el círculo.**

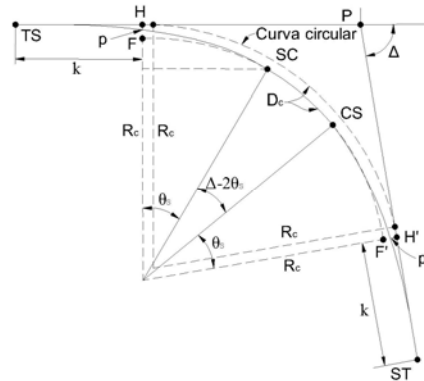
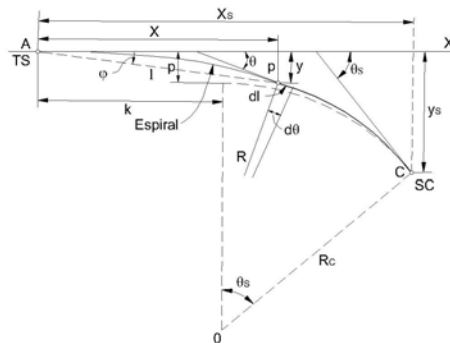


Figura 13. **Función de la curva circular con transición de espiral.**

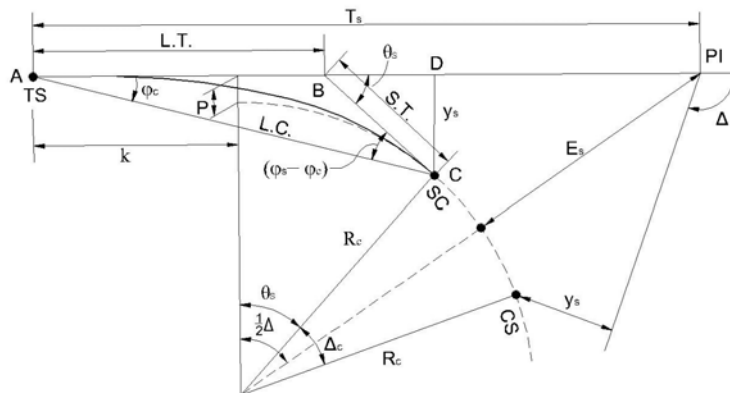


$$p = HF = y_s - R_c(1 - \cos(\theta_s)) \quad (2-43) \quad \text{y} \quad k = x_s - R_c \cdot \text{sen}(\theta_s) \quad (2-44)$$

Donde  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $R_c$  y  $\theta_s$  han sido ya definidos.

Es de gran utilidad el hecho de ser la ordenada desde H a la espiral muy aproximadamente igual a  $\frac{1}{2}(HF)$  o  $\frac{1}{2}p$ . Además, la línea HF biseca aproximadamente a la espiral.

Figura 14. Tangente y exterior total de la espiral.



Refiriéndonos a la figura 14, tenemos

Distancia exterior total

$$E_s = (R_c + p) \cdot \sec\left(\frac{1}{2}\Delta\right) - R_c = (R_c + p) \cdot \left(\sec\left(\frac{1}{2}\Delta\right) - 1\right) + p$$

Distancia de tangente total

$$T_s = (R_c + p) \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + k$$

Se deduce que  $E_s = E + p \cdot \sec\left(\frac{1}{2}\Delta\right)$  (2-45) y  $T_s = T + p \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + k$  (2-46),

siendo E y T las distancias exterior y de tangente para la curva circular no desplazada. Si se conoce  $\Delta$ , G y  $L_s$ , pueden determinarse  $T_s$  y  $E_s$  por las ecuaciones (2-46) y (2-45).

## 2.6. Posibilidades de aplicación de la clotoide

La **curva de transición** es un arco de clotoide desde el radio  $\infty$  (unión a una recta) hasta el radio del arco circular siguiente (figura 15).

La **clotoide de vértice** representa la transición entre dos rectas de direcciones distintas. Se compone de dos ramas de clotoide con el mismo radio de curvatura y tangente común en su punto de contacto (figura 16).

La **curva de inflexión** es una curva en S, que une dos círculos de curvaturas opuestas, sin segmento rectilíneo intermedio. Consta de dos ramas de clotoide, cuyo punto de origen es común, siendo en él el radio  $\infty$  para ambas y la tangente común (figura 17).

La **ovoide** es una sucesión círculo – clotoide – círculo, siendo del mismo sentido la curvatura de las tres curvas. El arco de clotoide intermedio tiene, en los puntos de contacto con los círculos, tangentes comunes y radios iguales, respectivamente (figura 18).

La *serie de clotoides* es una sucesión de arcos de clotoide en los que, siendo distintos los parámetros de cada uno, las curvaturas están dirigidas y son crecientes en el mismo sentido, con tangentes comunes y la misma curvatura, para cada dos arcos sucesivos, en su punto de contacto (figura 19).

Figura 15. **Curva de transición.**

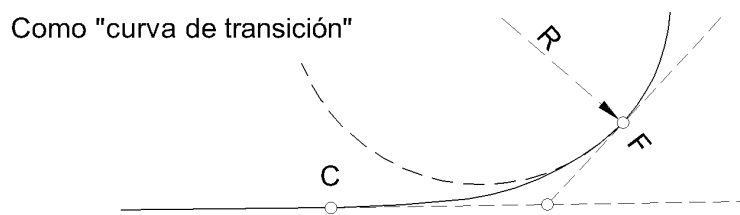


Figura 16. **Clotoide de vértice.**

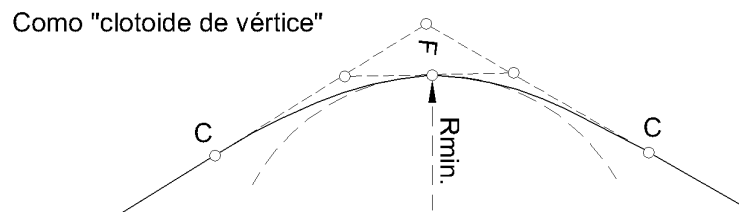


Figura 17. **Curva de inflexión.**

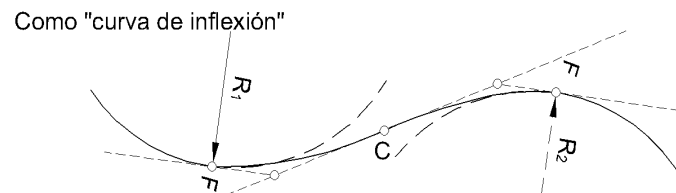




Figura18. Ovoide.

Como "ovoide"

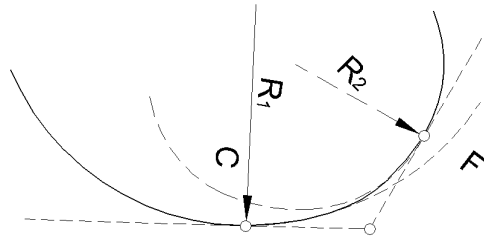
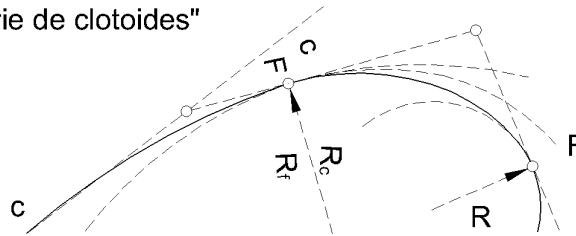


Figura19. Serie de clotoides.

Como "serie de clotoides"



## 2.7. Curvas de transición en relación a la velocidad de diseño

En una carretera con curvas sin transición, la mayoría de los conductores que viajan a la velocidad máxima para la cual una curva ha sido diseñada, encuentran dificultades para mantener su vehículo dentro del carril y mantener una velocidad uniforme al recorrer dicha curva. Al aproximarse a semejante curva el conductor puede escoger uno de varios cursos. Sí puede divisar la curva con suficiente anticipación o conoce su ubicación, disminuye la velocidad de su vehículo de tal forma que pueda tomar la curva permaneciendo en su carril; es decir, se da el suficiente tiempo para pasar de la recta a la curva describiendo una pequeña transición dentro de los límites del carril, ya que el ancho del mismo es mayor que la del vehículo. La más mínima diferencia entre el ancho del carril y del vehículo, es más corta la transición que puede hacerse dentro de los límites del carril. Como una

alternativa a reducir la velocidad el conductor puede girar ampliamente usurpando el carril adyacente. La invasión de carril representa un gran peligro para el conductor y los del carril adyacente. En cualquiera de los casos el esta siguiendo el curso de una transición que ha seleccionada por si mismo.

Por ende, para recorrer una curva a una velocidad uniforme, de tal modo que el conductor pueda mantenerse sin ninguna dificultad dentro del carril, deben de utilizarse transiciones. La longitud de una transición debe ser tal, que permita a la mayoría de conductores que circulan a la velocidad de diseño, disponer del tiempo suficiente para pasar de un alineación recta a una curva, manteniendo sin dificultad alguna el vehiculo dentro de los limites del carril.

Desde otro punto de vista, la transición deberá ser lo suficientemente larga para que el conductor sienta el desarrollo de la fuerza centrífuga de manera gradual. Sí el cambio de tangente a curva se hace en una distancia corta, el conductor se encuentra consiente de la aplicación súbita del total de la fuerza centrífuga, e instintivamente obtendrá en la conducción una transición más larga ocupando parte del carril adyacente. Curvas de transición largas eliminan esta tendencia.

La longitud de transición requerida,  $L_s$ , puede determinarse de la siguiente forma:

Sí un vehículo recorre una curva a una velocidad constante  $v$  en m/seg su aceleración centrípeta esta dada por la relación  $\frac{v^2}{R}$ . El tiempo requerido para recorre la transición es  $\frac{L_s}{v}$ . En la medida que el vehiculo se acerca al final de la transición,

la aceleración centrípeta que experimenta es constante e igual a  $\frac{v^2}{R} \div \frac{L_s}{v} = \frac{v^3}{R \cdot L_s}$ , siendo  $L_s$  la longitud de la transición.

El valor de dicha proporción de la aceleración centrípeta varía para cada conductor y la fijación de un valor promedio al cual se adapte la mayoría de los conductores, requeriría de un gran número y variedad de ensayos. De las pocas observaciones con las que se dispone indican que un valor de 0.6 para  $\frac{v^3}{R \cdot L_s}$ , será satisfactorio. Igualando estos valores y convirtiendo  $v$  de m/seg a Km/hr, tenemos que:

$$0.6 = \frac{v^3}{R \cdot L_s} = 0.0213 \frac{v^3}{R \cdot L_s} \quad L_s = 0.036 \frac{v^3}{R} \quad (2-47)$$

## 2.8. Curvas de transición en relación con el peralte

La sección transversal de la calzada sobre un alineamiento recto tiene una inclinación comúnmente llamada bombeo normal, el cual tiene por objeto facilitar el drenaje o escurrimiento de las aguas de lluvia lateralmente hacia las cunetas. El valor de la pendiente de dicho bombeo dependerá del tipo de superficie y de la intensidad de lluvias en la zona del proyecto, variando del 1% al 4%.

Así mismo, la sección transversal de la calzada sobre un alineamiento curvo tendrá una inclinación asociada con el peralte, el cual tiene por objeto, como se vio

anteriormente, facilitar el desplazamiento seguro de los vehículos sin peligros de desplazamientos laterales.

La transición también es empleada para el efecto del cambio gradual de una sección de calzada con bombeo normal a otra sección peraltada, ya que este cambio no puede realizarse bruscamente, sino gradualmente a lo largo de la vía entre este par de secciones. Por lo tanto en diseños con espirales de transición, la transición del peralte se efectúa junto con la curvatura de la espiral.

Por comodidad y apariencia; y para evitar el mal efecto visual producido por un cambio brusco en el peralte, la transición debe ser lo suficientemente larga para permitir que la pendiente del borde externo del pavimento con respecto a la línea central de la misma, no sea mayor que un valor  $m$ . En este sentido,  $m$  se define como la máxima diferencia algebraica entre las pendientes longitudinales de los bordes de la calzada y el eje de la misma.

Para realizar la transición del bombeo al peralte, pueden utilizarse tres procedimientos:

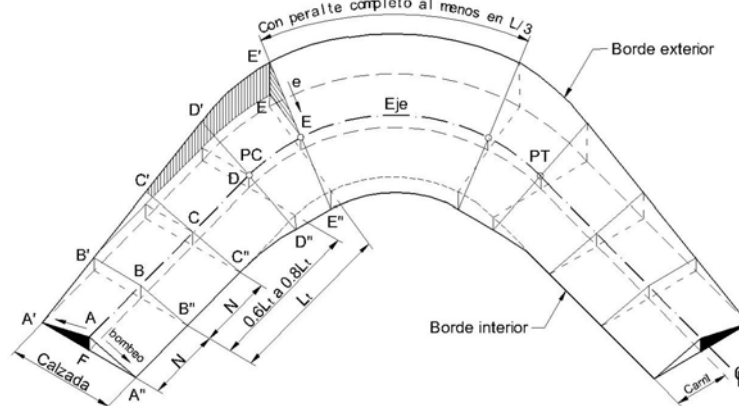
1. Rotando la calzada alrededor de su eje central.
2. Rotando la calzada alrededor de su borde interior.
3. Rotando la calzada alrededor de su borde exterior.

El primer procedimiento es el más conveniente, ya que los desniveles relativos de los bordes con respecto al eje son uniformes, produciendo un desarrollo más armónico y con menos distorsión de los bordes de la calzada y a su vez las longitudes de desarrollo de la transición del peralte son menores.

Donde la pendiente transversal del alineamiento sean tales que acentúen la depresión del borde interno de la sección transversal peraltada, es preferible conservar este borde a su altura normal y elevar, la línea central y el borde exterior de la carretera. Esto resulta en longitudes de transición mínimas casi el doble de las que resultan al método en el cual se mantiene la línea central. La pendiente del borde externo de la carretera, para pasar de sección con bombeo normal a peraltada, se refiere al borde interno de la carretera en lugar de hacerlo a la línea central de la misma.

La figura 20, muestra en forma esquemática y tridimensional, la transición del peralte de una curva circular, rotando la calzada alrededor de su eje central, donde:

Figura 20. Esquema tridimensional de la transición del peralte.



$L_s$  = Longitud de transición.

$D_b$  = Distancia de bombeo o longitud de aplanamiento.

$L_c$  = Longitud de la curva circular.

$e$  = Peralte de la curva circular.

$2a$  = Ancho total de la calzada.

$a$  = Ancho de carril.

La longitud de transición  $L_s$ , por simplicidad, se considera desde aquella sección transversal donde el carril exterior se encuentra a nivel o no tiene bombeo, hasta aquella sección donde la calzada tiene todo su peralte e completo. La curva de transición comienza en el punto TS (figura 10) en el cual la mitad exterior del pavimento deberá ser horizontal, con el objeto de que ningún punto de la superficie de la parte exterior del pavimento tenga peralte negativo o positivo. La totalidad del peralte debe ser alcanzada el punto SC, donde el radio de curvatura es aquél para el cual el peralte fue diseñado. Por facilidad, el cambio en el peralte puede ser calculado uniformemente entre estos dos puntos, es decir el peralte varia proporcional a la distancia entre TS y SC. En el TS, donde se inicia el peraltado de la curva, ambas mitades del pavimento son simétricas con respecto a la línea central, excepto que la mitad interna deberá girarse de una sección con bombeo en TS, a una sección plana inclinada en el punto donde el peralte de la mitad exterior, alcanza el valor de la flecha normal del pavimento. En este punto la sección total será una recta inclinada.

La distancia de bombeo o longitud de aplanamiento  $Db$  es la longitud necesaria para que el carril exterior pierda su bombeo o se aplane, es decir que, la mitad exterior del pavimento deberá girarse de una sección en bombeo en un punto sobre la tangente, situado a cierta distancia de TS, hasta obtener una sección plana en TS.

La figura 21 muestra el gráfico del método para peraltar curvas sobre la línea central.

En la figura 21, aparecen las mitades de las secciones transversales en bombeo y en peralte, lo mismo que el perfil parcial de la transición, donde se observa que (figura 22):

Figura 21. Distribución del bombeo y peralte.

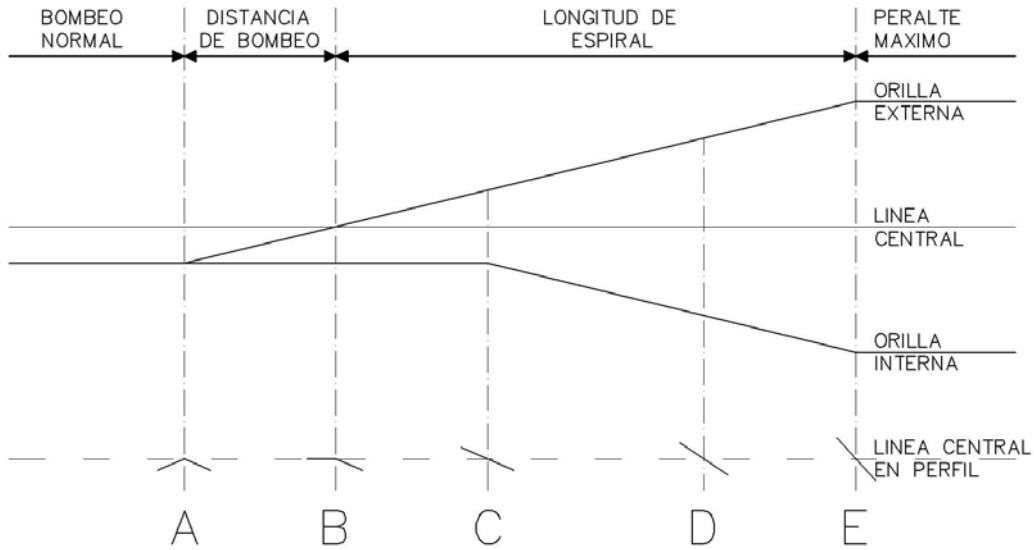
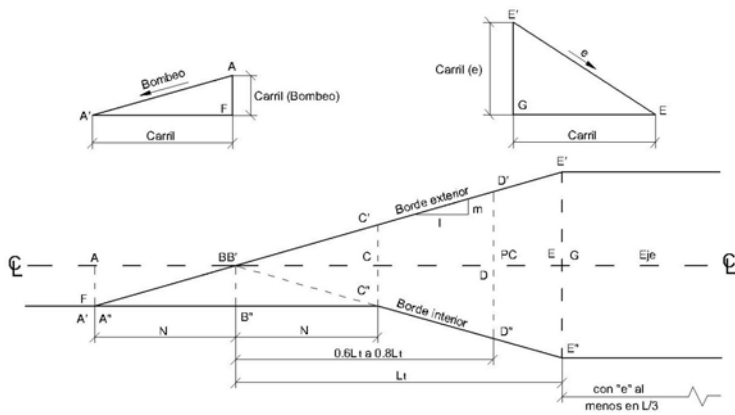


Figura 22. Perfil parcial del bombeo y peralte.



En el triángulo rectángulo B'E'G:

$$\frac{B'G}{E'G} = \frac{1}{m} \quad (2-48)$$

Pero, B'G = L<sub>s</sub> y E'G = el ancho de carril (a) \* el peralte (e), entonces,

$$L_s = \frac{a \cdot e}{m} \quad (2-49)$$

En el triángulo rectángulo AFB:

$$\frac{D_b}{AF} = \frac{1}{m} \quad (2-50)$$

Pero, AF = el ancho de carril (a) \* la pendiente de bombeo normal (Bombeo), entonces,

$$D_b = \frac{a \cdot \text{Bombeo}}{m} \quad (2-51)$$

Cuando las curvas verticales son deseables donde quiera que exista un cambio de pendiente en la rasante, las pendientes de los extremos del pavimento con respecto a la línea central, son tan pequeños que los cambios sin curvas verticales no son notables. Sin embargo, sí se desea la apariencia de curvas verticales, se podrá obtener por simple apreciación visual en el campo.

Una excepción es el punto SCS de una curva de transición total, donde deberá usarse una pequeña sección de peralte total en los casos en que la diferencia de los extremos de la carretera sea mayor que la relación 1:400.

Donde el ST de una curva y el TS de la curva siguiente son idénticos o separados por una corta distancia, para mejorar el manejo del vehículo puede obtenerse con el uso de la variación de elevaciones de la media sección transversal entre los puntos y la línea recta adyacentes al CS y SC.



La razón del peralte, a veces es expresado en términos de la elevación de un neumático con respecto al otro y a veces es expresado por la proporción de cambio angular o la proporción de la pendiente del peralte, similar a el método usado para obtener las transiciones del ferrocarril, a sido promovido como un medio para la determinación de longitudes mínimas de transición. Donde la longitud de transición es mucho menor, para reunir los requisitos perfilados anteriormente por la relativa pendiente de la parte exterior del pavimento, la proporción de la distancia de desarrollo del peralte es moderada.

## **2.9. Longitudes mínimas de la espiral de transición recomendadas**

La longitud de la espiral de transición  $L_s$  o el parámetro de la espiral  $A$  no deberán ser inferiores a un valor mínimo, con el objeto de que la curva cumpla con las condiciones de tipo dinámico, geométrico y estético. En este sentido, existen varios criterios en la determinación de la longitud mínima o parámetro mínimo, adoptándose como parámetro de diseño el mayor valor determinado por cada uno de los criterios, los cuales se desarrollan a continuación.

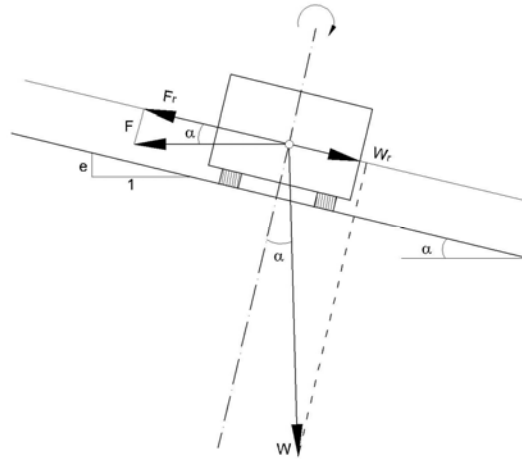
### **2.9.1. Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga**

Analizando transversalmente un vehículo circulando sobre una curva de transición, en un punto cualquiera, como se muestra en la figura 23, se tiene:

La aceleración centrífuga en una curva peraltada se reduce debido a la componente radial del peso del vehículo, por lo que a fuerza centrífuga residual que actúa radialmente sobre el vehículo es:

$$F_r - W_r = m \cdot a_{cr} \quad (2-52)$$

Figura 23. Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga.



$F$  = Fuerza centrífuga =  $m \cdot a_c$

$a_c$  = Aceleración centrífuga.

$W$  = Peso del vehículo =  $m \cdot g$

$g$  = Aceleración de la gravedad =  $9.81 \text{ m/seg}^2$

$F_r$  = Componente radial de la fuerza centrífuga.

$W_r$  = componente radial del peso del vehículo.

$\epsilon$  = Inclinación transversal de la calzada.

$e$  = Peralte de la calzada en tanto por uno =  $\tan \epsilon$

Donde,  $a_{cr}$  es la aceleración radial no compensada por el peralte. Pero:

$$F_r = F \cdot \cos(\epsilon), \quad W_r = W \cdot \sin(\epsilon) \quad (2-53)$$

$$F \cdot \cos(\epsilon) - W \sin(\epsilon) = m \cdot a_{cr} \quad (2-54)$$

Dividiendo por el  $\cos(\varepsilon)$ ,

$$F - W \cdot \tan(\varepsilon) = \frac{m \cdot a_{cr}}{\cos(\varepsilon)} \quad (2-55)$$

Como,  $\tan(\varepsilon) = e$ , y para ángulos  $\varepsilon$  pequeños  $\cos(\varepsilon) \approx 1$ . Entonces:

$$F - W \cdot e = m \cdot a_{cr} \quad (2-56)$$

Sustituyendo F y w,

$$m \cdot a_c - m \cdot g \cdot e = m \cdot a_{cr} \quad (2-57)$$

$$a_{cr} = a_c - g \cdot e \quad (2-58)$$

Cuando el radio de la espiral es R,

$$a_{cr} = \frac{V_e^2}{R} - g \cdot e \quad (2-59)$$

Suponiendo que el vehículo tarda un tiempo t en recorrer toda la longitud de transición  $L_s$  a una velocidad uniforme V y se define a J como la variación de la aceleración centrífuga por unidad de tiempo, en el SC se tiene que:

$$J = \frac{a_{cr}}{t} = \frac{\frac{V^2}{R_c} - g \cdot e_c}{\frac{L_s}{V}}, \text{ de donde, } L_s = \frac{V}{J} \cdot \left( \frac{V^2}{R_c} - g \cdot e_c \right) \quad (2-60)$$

Donde,  $R_c$  es el radio circular y  $e_c$  es el peralte máximo para  $R_c$ .

Expresando a  $V$  en Km/h, a  $R_c$  en metros y a  $e_c$  en tanto por uno, se llega a la siguiente expresión que indica la longitud mínima  $L_s$  de la espiral:

$$L_s \geq \frac{V}{46.656J} \left( \frac{V^2}{R_c} - 127 \cdot e_c \right) \quad (2-61)$$

La expresión anterior se conoce como fórmula de Smirnoff.

Realmente la constante  $J$  es un valor empírico que indica el grado de comodidad que se desea proporcionar. Experimentalmente se ha comprobado que este valor varía entre 0.4 y 0.7  $m/seg^3$ . Los valores específicos para  $J$  se indican en la Tabla I.

Tabla I. **Valores de J.**

Velocidad específica $V$ (Km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$J$ ( $m/seg^3$ )	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4

En caso de que no se tenga en cuenta el peralte, la ecuación anterior se convierte en:

$$L_s \geq \frac{V}{46.656J \cdot R_c} \quad (2-62)$$

La fórmula anterior fue deducida en 1909 por W. H. Shortt, por lo cual se conoce como fórmula de Shortt y a la de Smirnoff como fórmula de Shortt modificada.

Joseph Barnett propuso un valor de  $J = 0.6 \text{ m/seg}^3$  en la fórmula de Shortt, llegándose a:

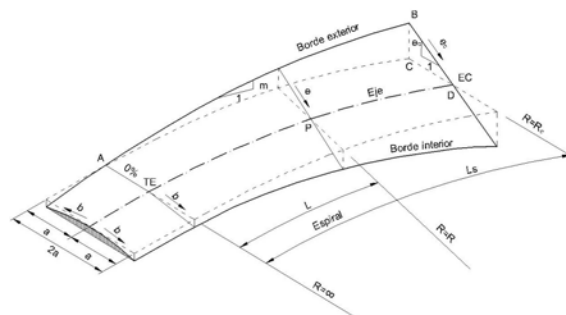
$$L_s \geq 0.036 \frac{V^3}{R_c} \quad (2-63)$$

Dicha expresión se determinó en el apartado de “Curvas de transición en relación a la velocidad de diseño” y es conocida como la fórmula de Barnett.

### 2.9.2. Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la transición del peralte

Para pasar con seguridad y comodidad desde la sección en bombeo normal  $b$  en recta hasta alcanzar la sección con peralte  $e_c$  en SC, es necesario hacer variar gradualmente el peralte. En la figura 24, se muestra la rotación gradual de la calzada alrededor de su eje a lo largo de la longitud de transición desde la tangente hasta el punto SC donde alcanza el peralte de diseño  $e_c$  de dicha curva.

Figura 24. Longitud mínima de la espiral de acuerdo a la transición del peralte.



Donde:

a = Ancho de carril.

2a = Ancho total de calzada.

b = Bombeo normal en recta.

e<sub>c</sub> = Peralte de diseño.

e<sub>p</sub> = Peralte en cualquier sección.

m = Pendiente relativa de los bordes.

En el triángulo rectángulo vertical ABC, se tiene:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{m} \quad (2-64)$$

Igualmente, en el triángulo rectángulo vertical BCD,

$$\frac{BC}{CD} = \frac{e_c}{1} \quad (2-65)$$

Por lo tanto, de la ecuación (2-64) y (2-65), se deduce que:

$$AC = \frac{(CD) \cdot e_c}{m} \quad (2-66)$$

Donde CD = ancho de carril = a, y AC = L<sub>s</sub>

De donde se deduce que:

$$L_s \geq \frac{a \cdot e_c}{m} \quad (2-67)$$

En la tabla II se indican los valores máximos y mínimos de la pendiente relativa de los bordes de la calzada con respecto al eje. Al evaluar el valor máximo de  $m$ , se obtendrá la longitud mínima de la espiral, como sigue:

$$L_s \geq \frac{a \cdot e_c}{m_{\text{mín}}} \quad (2-68)$$

Por otro lado, al utilizar el valor mínimo de  $m$ , se obtendrá la longitud máxima de la espiral, de la siguiente razón:

$$L_s \leq \frac{a \cdot e_c}{m_{\text{máx}}} \quad (2-69)$$

Tabla II. **Pendientes relativas de los bordes de la calzada.**

VELOCIDAD DE DISEÑO	PENDIENTE RELATIVA DE LOS BORDES CON RESPECTO AL EJE DE LA VIA	
	m	
V (Km/h)	Máxima (%)	Mínima (%)
20		0.1 (carril)
30	1.28	
40	0.96	
50	0.77	
60	0.64	
70	0.55	
80	0.50	
90	0.48	
100	0.45	
110	0.42	
120	0.40	
130	0.40	
140	0.40	
150	0.40	

### **2.9.3. Longitud mínima de la espiral por razones de percepción y estética**

La longitud de la curva de transición desde el punto de vista de la percepción, ha de ser suficiente para que se perciba de forma clara el cambio de la curvatura, orientando adecuadamente al conductor.

Para ello, se considera que el retranqueo mínimo a utilizar debe ser de 0.25 metros, con lo cual se obtiene una longitud mínima de la espiral (clotoide) de:



$$L_s \geq \sqrt{6 \cdot R_c} \quad (2-70)$$

Por razones de estética y con el objeto de obtener trazos armoniosos, el ángulo de desviación en el punto de tangencia con la curva circular debe ser superior a 3°. Este ángulo es  $\theta_s$  y el desarrollo equivale a:

$$L_s = \frac{\pi \cdot \theta_s \cdot R_c}{90^\circ} = \frac{\pi \cdot (3^\circ) \cdot R_c}{90^\circ} = \frac{R_c}{9} \quad (2-71)$$

Por tanto,

$$L_s \geq \frac{R_c}{9}$$

Y su parámetro debe ser:

$$A \geq \frac{R_c}{3}$$

## 2.10 Enlaces de clotoides

La clotoide no puede estudiarse como una figura aislada, sino enlaza a rectas y curvas circulares con las que forma un conjunto de alineaciones y en las que cumple la función de realizar la transición entre dichas rectas y círculos.

El caso más general de enlace entre dos alineaciones rectas es aquel en que se plantea un conjunto de clotoide-círculo-clotoide (Figura 25), siendo ambas clotoides de igual parámetro y mismo desarrollo por ser tangentes ambas a la misma curva circular, los cuales llamamos enlaces simétricos. Pero existen otros casos en

los que se puede aplicar un conjunto de clotoide-circulo-clotoide sin que ambas clotoides sean de igual parámetro (figura 31) llamados enlaces asimétricos. En cualquiera de los dos casos si las dos clotoides enlazan directamente sin curva circular se las denomina clotoides de vértice (figuras 27).

También existen enlaces de recta con círculo cuando este es de curvatura contraria a la clotoide (figura 34).

Cundo el enlace se hace entre curvas interiores se llama ovoide (figura 36).

Vamos a estudiar el enlace de clotoides en los siguientes tipos de enlaces:

#### 2.10.1 Enlaces simétricos entre rectas:

2.10.1.1 Clotoide-circulo-clotoide.

2.10.1.2 Clotoide de vértice (clotoide-clotoide).

2.10.1.3 Lazo.

2.10.1.4 Alineaciones rectas paralelas.

2.10.1.5 Enlace simétrico entre rectas en sustitución de curvas circulares.

#### 2.10.2 Enlaces asimétricos entre rectas:

2.10.2.1 Clotoide-circulo-clotoide.

2.10.2.2 Clotoide-clotoide.

2.10.2.3 Enlace entre recta y círculo de sentido contrario.

2.10.2.4 La curva de inflexión.

2.10.2.5 La Ovoide.

2.10.2.6 La serie de clotoides.

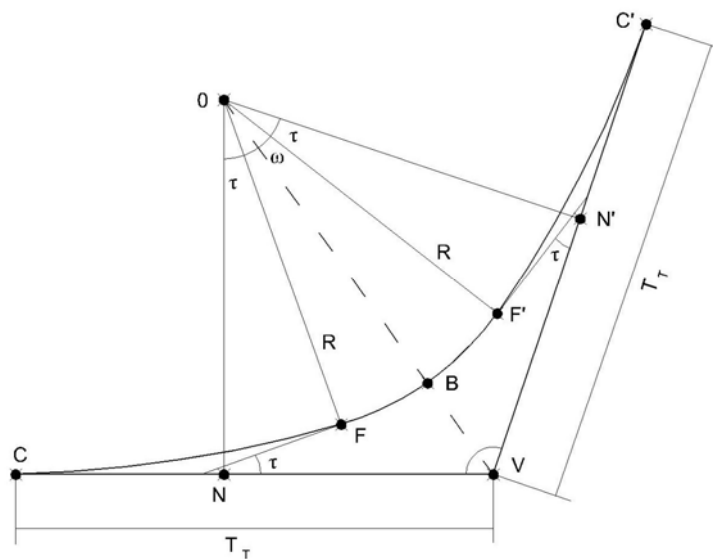
## 2.10.1 Enlaces simétricos entre rectas

### 2.10.1.1 Enlace simétrico clotoides-círculo-clotoide

Este tipo de enlaces son los que se usan frecuentemente, ya que el disponer de clotoides iguales simplifica el cálculo. A continuación se presentan seis casos distintos, en todos ellos se conoce el ángulo en el vértice, puesto que las dos rectas a las que tiene que ser tangente el enlace han de ser conocidas y el radio de la curva circular, salvo en el caso cinco.

En todos los casos siguientes se pretende hallar todos los datos necesarios de la clotoide y la curva circular así como las tangentes totales. Estas son las distancias desde la tangente y salida del enlace hasta el vértice  $V$ , necesarias para localizar la situación de los puntos  $C$  y  $C'$  (figura 25).

Figura 25. Enlace simétrico clotoide—círculo—clotoide.



1 Valores conocidos: R y A

Con el radio y el parámetro la resolución de ambas clotoides es inmediata:

$$L = \frac{A^2}{R} \quad \text{Y} \quad \tau = \frac{L}{2R}$$

Con L y  $\tau$  no tendremos ninguna dificultad para hallar el resto de los elementos de la clotoide que podamos necesitar.

Vamos ahora a calcular las tangentes totales del sistema para poder encajarlo:

$$T_T = \vec{CV} = \vec{C'V} \quad \vec{CV} = \vec{CN} + \vec{NV}$$

Donde CN es  $X_o$  y NV se deduce en el triángulo ONV (figura 2-21)

$$\vec{NV} = \frac{\vec{ON}}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)} \quad \vec{ON} = R + \Delta R \quad \longrightarrow \quad \vec{NV} = \frac{R + \Delta R}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)}$$

Con lo que las tangentes totales quedan así

$$T_T = X_o + \frac{R + \Delta R}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)}$$

El desarrollo total del sistema será igual al desarrollo de las dos clotoides más el desarrollo del arco del círculo:

$$D_T = CF + FF' + F'C' = L + D_{Cc} + L = 2L + D_{Cc}$$

Para calcular el desarrollo del arco circular  $D_{Cc}$  necesitamos conocer el ángulo en el centro  $\omega$

$$V = 120 - (2\tau + \omega) \quad \longrightarrow \quad \omega = 180 - V - 2\tau \quad D_{Cc} = \frac{\pi R \omega}{180}$$

Con lo que el desarrollo total será igual a

$$D_T = 2L + \frac{\pi R \omega}{180}$$

Si en vez del parámetro A, tuviéramos cualquier otro de los elementos de la clotoide, como conocemos el radio R, calcularemos el valor del ángulo  $\tau$  y con él el resto de los elementos de la clotoide. En los siguientes estaremos en una situación similar al caso anterior, con lo que la tangente y el desarrollo total se calcularán del mismo modo.

2 Valores conocidos: R y la distancia al vértice BV

En el triángulo ONV

$$\vec{OV} = R + \vec{BV}$$

$$\vec{ON} = \vec{OV} \cdot \text{sen}\left(\frac{V}{2}\right)$$

Además sabemos que la recta ON es

$$\vec{ON} = R + \Delta R$$

$$\Delta R = \vec{ON} - R$$

Conociendo R y  $\Delta R$  el problema se reduce a lo comentado en el párrafo anterior.

3 Valores conocidos: R y la tangente total  $T_T$

Partimos de la expresión de la tangente total. Si dividimos por el radio en ambos miembros de la expresión nos queda:

$$\frac{T_T}{R} = \frac{X_o}{R} + \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)}$$

Sustituyendo los valores de  $X_o/R$  y  $\Delta R/R$  por sus expresiones correspondientes:

$$\frac{T_T}{R} = \frac{X}{R} - \text{sen}(\tau) + \left(1 + \frac{Y}{R} + \text{cos}(\tau) - 1\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)}$$

$$\frac{T_T}{R} - \frac{X}{R} + \text{sen}(\tau) - \left(\frac{Y}{R} + \text{cos}(\tau)\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)} = 0$$

Expresión en la que todo está en función de  $\tau$ . Probando sucesivos valores de  $\tau$ , encontraremos aquel que cumpla con la ecuación. Y así con  $R$  y  $\tau$  tendremos datos suficientes para resolver la clotoide al igual que en el primer caso.

4 Valores conocidos:  $R$  y el desarrollo total  $D_T$

Partiendo de la expresión del desarrollo total (96)

$$D_T = 2L + \frac{\pi R \omega}{180}$$

y sabiendo que

$$\tau = \frac{L}{2R} \quad \longrightarrow \quad L = 2R\tau = 2R \cdot \tau \cdot \frac{\pi}{180}$$

A su vez el ángulo  $\omega$  es igual

$$\omega = 180 - V - 2\tau \quad \longrightarrow \quad D_{Cc} = \frac{\pi R}{180} \cdot (180 - V - 2\tau)$$

Sustituimos ahora los valores de  $L$  y  $D$  en la expresión inicial

$$D_T = 4 \cdot \tau \cdot \frac{\pi R}{180} + \frac{\pi R}{180} (180 - V - 2\tau)$$

$$D_T = \frac{\pi R}{180} \cdot (2\tau + 180 - V)$$

$$\tau = \frac{180 \left( \frac{D_T}{\pi R} - 1 \right) + V}{2}$$

Conocido el valor de  $\tau$ , el problema estará resuelto.

- 5 Valores conocidos: los desarrollos de las dos clotoides  $L$  y de la curva circular

$D_{Cc}$  sin conocer el radio  $R$

En este caso también vamos a buscar el valor de  $\tau$  y, una vez obtenido, junto con  $L$  podremos hallar el resto de los elementos de la clotoide y las tangentes totales. Partimos del valor de  $\omega$  que como ya sabemos se puede deducir por dos caminos distintos:

$$\omega = \frac{180 D_{Cc}}{\pi R} \qquad \omega = 180 - V - 2\tau \qquad 180 - V - 2\tau = \frac{180 D_{Cc}}{\pi R}$$

En esta expresión no conocemos ni  $\tau$  ni  $R$ . Por otro lado:

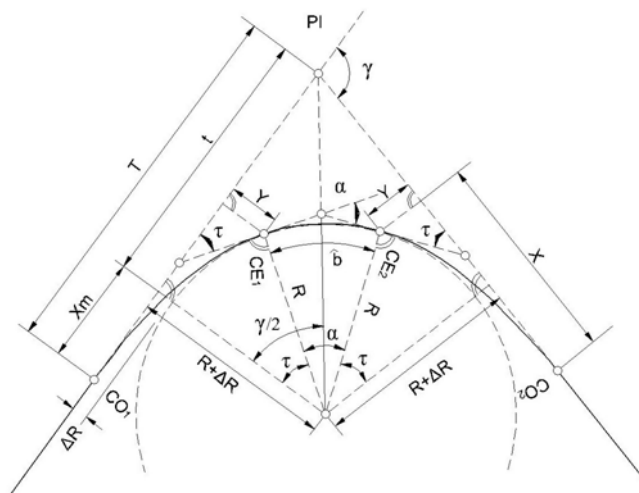
$$\tau = \frac{L}{2R} \qquad \longrightarrow \qquad R = \frac{L}{2\tau} = \frac{L}{2\tau \cdot \frac{\pi}{180}}$$

Sustituimos ahora el valor de  $R$  en la expresión anterior quedando:



$$200 - V - 2\tau = \frac{180 D_{Cc}}{\pi \frac{L}{2\tau \cdot \frac{\pi}{180}}} = \frac{2\tau D_{Cc}}{L} \qquad \tau = \frac{L(180 - V)}{2(L + D_{Cc})}$$

Figura 26. Elementos del enlace simétrico clotoide—círculo—clotoide.



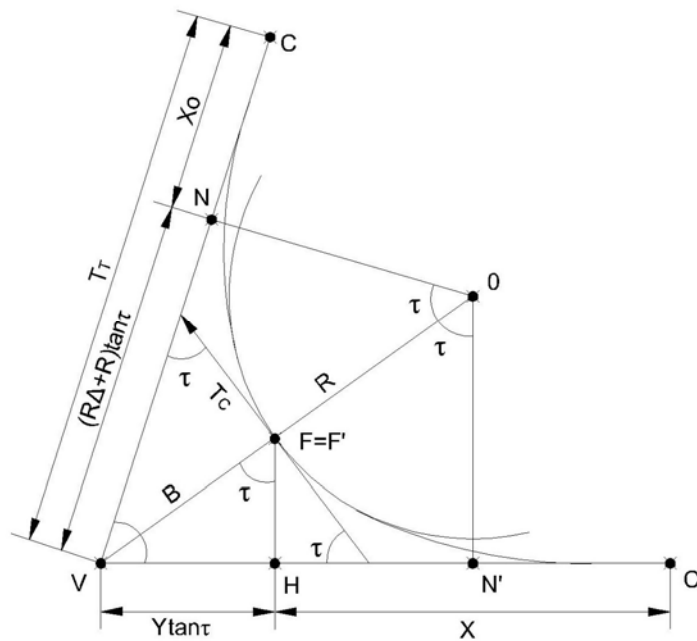
### 2.10.1.2 Clotoide de vértice (clotoide-clotoide)

La clotoide de vértice representa la unión entre dos alineaciones rectas sin arco de círculo intermedio. Se compone de dos arcos de clotoide tangentes, con el mismo radio de curvatura  $R_f$ , en su punto de contacto. Este  $R_f$  es el radio mínimo para cada una de las dos clotoides. Así pues, si conocemos el radio y el parámetro de la clotoide o cualquier otro de sus elementos, será fácil calcular el resto de los datos

de la clotoide. La tangente total y el desarrollo total se calculan con las siguientes expresiones, según la figura 27:

$$T_T = X_o + \frac{R + \Delta R}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)} = (R + \Delta R) \cdot \tan(\tau) + X_o \qquad D_T = 2L$$

Figura 27. Clotoide de vértice.



Sin embargo, la tangente total puede salir de otra forma. Observando la figura:

$$\vec{CV} = \vec{CH} + \vec{HV} = X + Y \cdot \tan(\tau)$$

Puesto que HF es igual a Y.

En las clotoides de vértice se cumple la condición de que el ángulo  $\tau$  es complementario de  $V/2$ , como puede observarse en el triángulo ONV de la figura 27.

$$\tau = 90 - \frac{V}{2}$$

Con lo cual  $\tau$  es un dato de partida puesto que  $V$  es obligado conocerlo.

Dada la simplicidad de cualquier caso en que sepamos el valor del radio, vamos a plantear dos situaciones distintas en donde es precisamente el radio lo que queremos encontrar. Como antes daremos por conocidas las situaciones de las dos rectas, con lo que tendremos el ángulo en  $V$ .

1. Valores conocidos:  $\tau$  y al tangente total  $T_T$

Si en la última expresión de la tangente total dividimos por el radio en ambos miembros y despejamos  $R$ , tendremos

$$\frac{T_T}{R} = \frac{X}{R} + \frac{Y}{R} \tan(\tau) \quad \longrightarrow \quad R = \frac{T_T}{\frac{X}{R} + \frac{Y}{R} \tan(\tau)}$$

Expresión en la que  $R$  es una función de  $T_T$  y de  $\tau$ , con lo que el problema se resuelve directamente.

2. Valores conocidos:  $\tau$  y la distancia al vértice  $VF$

Volviendo al triángulo VFH de la figura 27, podemos deducir el valor de Y en función de  $\tau$  y la distancia al vértice

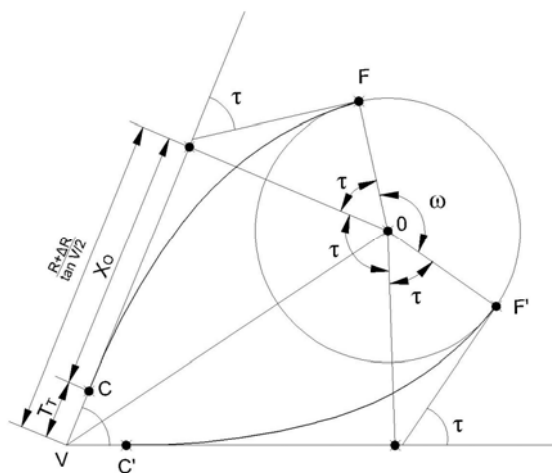
$$Y = b \cdot \cos(\tau)$$

Podemos deducir el radio con facilidad, y calcular las tangentes totales.

### 2.10.1.3 Lazo

Es un caso particular de los enlaces simétricos y su principal característica es que el enlace está al revés, con respecto a las rectas tangentes, con lo que las tangentes de entrada y salida ocupan posiciones muy próximas al vértice, tal como se muestra en la figura 28.

Figura 28. Lazo.



Supuesto que conozcamos el radio y otro elemento de la clotoide podremos hallar la tangente total VC=VC'

$$T_T = \frac{R + \Delta R}{\tan\left(\frac{V}{2}\right)} - X_o$$

Para el cálculo del desarrollo total  $CC'$  necesitaremos calcular el ángulo en el centro  $\omega$

$$\omega = 180 + V - 2\tau \qquad D_{Cc} = \frac{\pi R \cdot \omega}{180} \qquad D_T = D_{Cc} + 2L$$

Pero ahora vamos a estudiar el caso en el que conociendo el radio, no tengamos un segundo elemento de la clotoide.

Valores conocidos:  $R$  y  $D_T$

Partiendo de la expresión anterior para el desarrollo total

$$D_T = D_{Cc} + 2L = \frac{\pi R \cdot \omega}{180} + 2\left(2R \cdot \tau \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi R}{180} \cdot (\omega + 4\tau)$$

Sustituyendo el valor de  $\omega$

$$\omega = 180 + V - 2\tau \qquad D_T = \frac{\pi R}{180} \cdot (180 + V + 2\tau)$$

Despejando el valor de  $\tau$

$$\tau = \frac{\frac{180 D_T}{\pi R} - V + 180}{2}$$

Con  $\tau$  y  $R$  hallaremos el resto de los datos, incluso la tangente total.

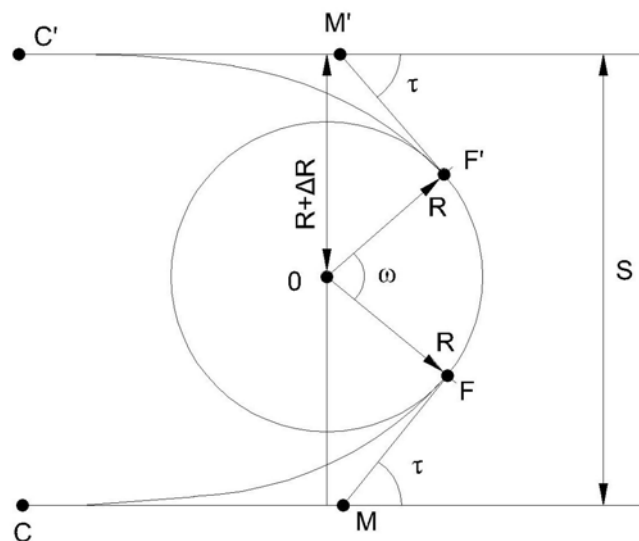
#### 2.10.1.4 Alineaciones rectas paralelas (enlace simétrico)

Este tipo de enlaces se calculan igual que un enlace simétrico entre rectas como en el apartado 2.10.1.2, pero al ser rectas paralelas da lugar a un hecho que simplifica la cuestión. Según la figura 29, observamos que la separación entre las rectas es el doble de la ordenada del centro de la curva circular:

$$S = 2 \cdot Y_o = 2(R + \Delta R)$$

Conocido el radio despejamos  $\Delta R$  y con ello podremos resolver el problema.

Figura 29. Enlace simétrico de alineaciones paralelas.



### 2.10.1.5 Enlace simétrico entre rectas en sustitución de curvas circulares

Actualmente se realizan proyectos de renovación y mejora de antiguos tramos de carretera. Estos consisten en una reposición del pavimento, aumento del ancho de calzada y suavizado del trazado en zonas con muchas curvas. En dichos tramos se puede suavizar las curvas existentes sustituyendo los trazaos circulares por enlaces con clotoides simétricas.

Esto se realiza manteniendo las rectas tangentes originales y buscando el nuevo radio a partir del radio de la antigua curva.

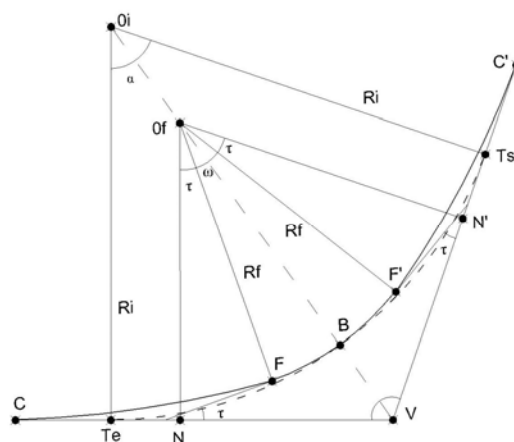
A continuación se presentan un posible caso.

Valor conocido: la distancia al vértice BV (external).

Manteniendo la external existente, no se afecta el punto medio de la curva circular.

Al conocer los datos de la curva circular inicial tendremos (figura 30):

Figura 30. Enlace simétrico entre rectas en sustitución de curvas circulares.



$$O_i T_e = O_i T_s = R_i$$

$$V T_e = V T_s = \text{Tangente}$$

$$T_e T_s = \text{Desarrollo}$$

$$B V = B_i = B_f$$

Deducimos la expresión que define a  $B_f$  sobre el triángulo  $VO_fN$ :

$$B_f = \overrightarrow{(O_f V)} - \overrightarrow{(O_f B)} = \frac{\overrightarrow{(O_f V)}}{\text{sen}\left(\frac{V}{s}\right)} - R_f$$

Dividimos ambos miembros por el radio e igualamos a cero

$$\frac{1 + \frac{\Delta R}{R_f}}{\text{sen}\left(\frac{V}{2}\right)} - 1 - \frac{B}{R_f} = 0$$

Por otro lado, el parámetro está en función de valores conocidos, inherentes al trazado de la carretera, además del radio que no conocemos. Por ejemplo, si condicionamos el parámetro por la razón de transición al peralte (ver capítulo de parámetros mínimos y máximos):

$$A \geq \sqrt{\frac{n \cdot a}{2\xi} \cdot p \cdot R}$$

Donde a R lo llamaremos  $R_f$ , nuestro radio final, y el resto de los datos los podemos convertir en un valor numérico K, con lo que nos queda que:

$$A = K \cdot \sqrt{R_f}$$

$$R_f = \frac{A^2}{K^2}$$



El parámetro se puede determinar por otras condiciones tal como se indicara más adelante.

$R_f$  lo podemos poner en función de  $\tau$

$$A = R \cdot \sqrt{2\tau} \quad A^2 = 2R_f^2 \cdot \tau \quad R_f = \frac{2R_f^2 \cdot \tau}{K^2} \quad R_f = \frac{K^2}{2\tau}$$

Sustituyendo el valor de  $R_f$  en la expresión deducida a partir de la distancia al vértice tendremos

$$\frac{1 + \frac{\Delta R}{R_f}}{\text{sen}\left(\frac{V}{2}\right)} - 1 - \frac{B}{\frac{K^2}{2 \cdot \tau}} = 0$$

Resolvemos la ecuación anterior para  $\tau$  y se sustituye en

$$R_f = \frac{K^2}{2\tau}$$

Una vez determinado  $R_f$  se puede determinar el parámetro A, utilizando la siguiente expresión ya indicada

$$A = K \cdot \sqrt{R_f}$$

Conocidos los datos de la clotoide, será fácil calcular el enlace.

## 2.10.2 Enlaces asimétricos entre rectas

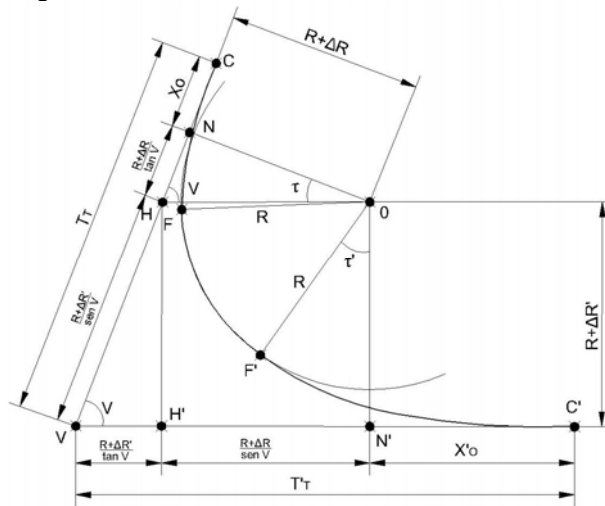
### 2.10.2.1 Enlace asimétrico Clotoide-círculo-clotoide

Un enlace asimétrico es aquel en el que las dos clotoides son distintas. Su principal característica geométrica de este tipo de enlaces es que el centro del círculo osculador tangente a ambas clotoides, no es equidistante de las alineaciones rectas donde se realiza el encaje, lo cual implica que (figura 31).

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ ON \neq ON' \end{array}$$

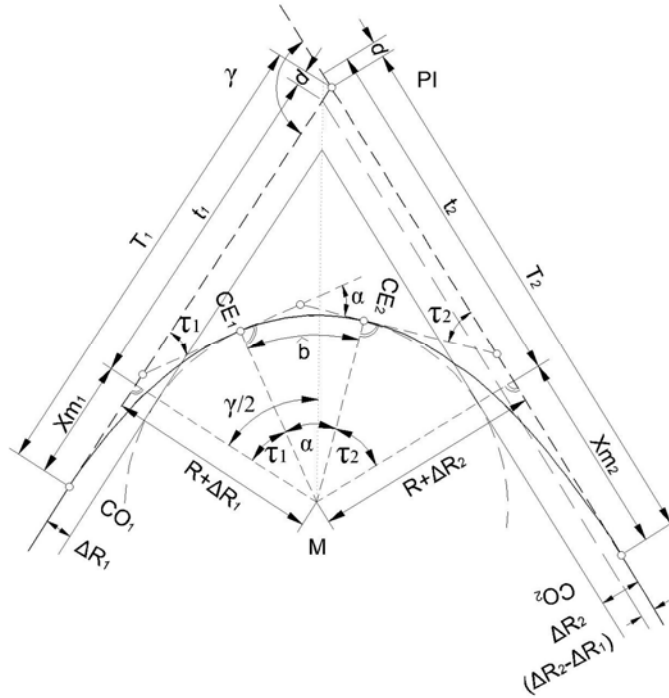
$$R + \Delta R \neq R + \Delta R'$$

Figura 31. Enlace asimétrico clotoide-círculo-clotoide.



Como los dos arcos de clotoide son distintos, el cálculo de las tangentes es distinto en cada caso (figura 32). A continuación se muestra como calcular dichos elementos.

Figura 32. **Tangentes en enlace asimétrico clotoide-círculo-clotoide**



Valores conocidos:  $\gamma$  medido de la solución grafica o calculado,  
 $R$ ,  $A_1$  y  $A_2$ .

Ya sea utilizando las formulas expuestas anteriormente o con la ayuda de la tabla I, se determinan los elementos de la clotoide, a excepción de las tangentes  $T_1$  y  $T_2$ , para calcularlas se deben determinar los valores de  $t_1$ ,  $t_2$  y  $d$ , como sigue:

$$t_1 = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot (R + \Delta R) \qquad t_2 = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot (R + \Delta R')$$

$$d = \frac{\Delta R' + \Delta R}{\text{sen}(\gamma)}$$

Las longitudes de las tangentes se obtienen de las relaciones:

$$T_1 = X_{o1} + t_1 + d \qquad T_2 = X_{o2} + t_2 - d$$

Para el ángulo en el centro

$$\omega = \gamma - \Sigma\tau$$

Para el desarrollo del arco circular

$$D_C = \frac{R \cdot \pi \cdot \omega}{180}$$

### 2.10.2.2 Clotoide de vértice forma asimétrica

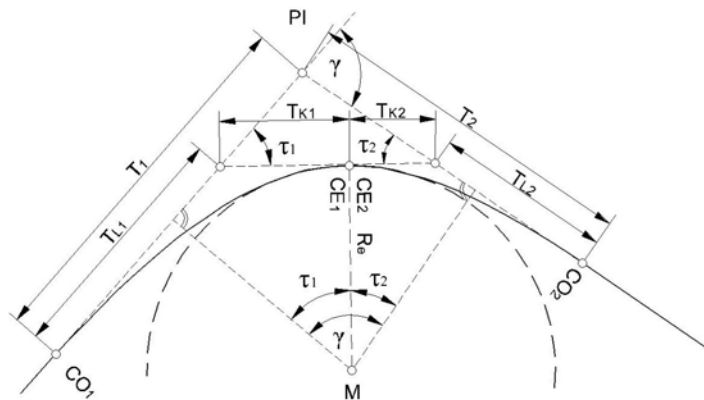
La característica geométrica que distingue los enlaces sin curva circular es la de que la suma de los respectivos valores de  $\tau$  de cada una de las clotoides es igual a  $\gamma$  (figura 33).

$$\gamma = \tau_1 + \tau_2$$

Y que

$$V = 180 - \tau - \tau'$$

Figura 33. Clotoide de vértice forma asimétrica.



Partiendo de esta premisa se plantea la solución de dicho tipo de clotoide.

Valores conocidos:  $\gamma$ ,  $R_f$ ,  $A_1$  los cuales pueden ser medidos de la solución grafica o calculados.

Incógnitas: Elementos de las dos ramas de clotoide, las tangentes  $T_1$  y  $T_2$ .

Solución: Partiendo de  $R_f$  y  $A_1$  se calculan los elementos por las ecuaciones ya conocidas, el ángulo  $\tau_1$  y los demás elementos de esta rama.

Por otra parte sabemos que

$$\tau_2 = \gamma - \tau_1$$

El ángulo  $\tau_2$  determina los restantes elementos de la segunda rama de la clotoide de vértice asimétrica, partiendo de  $\tau_2$  y  $R_f$ .

Las tangentes se calculan mediante las ecuaciones siguientes.

$$T_1 = T_{L1} + \frac{\text{sen}[\tau_1 \cdot (T_{C1} + T_{C2})]}{\text{sen}(\gamma)}$$

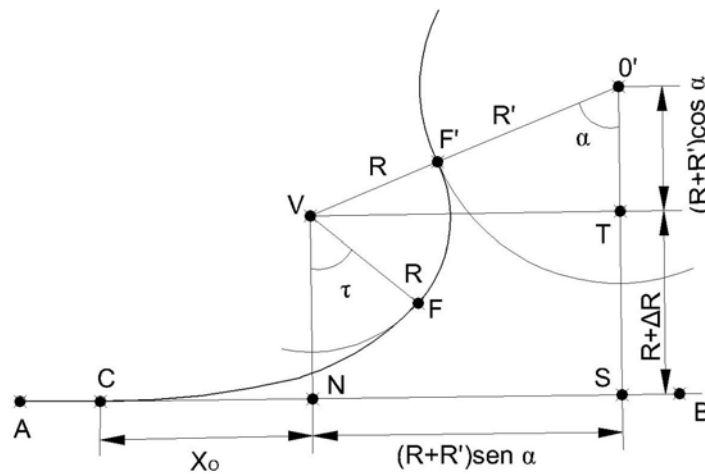
$$T_2 = T_{L2} + \frac{\text{sen}[\tau_2 \cdot (T_{C1} + T_{C2})]}{\text{sen}(\gamma)}$$

### **2.10.2.3 Enlace entre recta y círculo de sentido contrario**

Este caso se produce, sobre todo, en confluencias de dos alineaciones independientes, como son los cruces con enlaces, incorporaciones y salidas.

Para este caso se pretende enlazar la recta AB (figura 34), con el círculo de centro O'. Lógicamente debemos de disponer de la posición de la recta y del centro de dicha curva. Se supone que conocemos el radio R' de esta curva o al menos se propondrá uno, así como el parámetro y el radio de la clotoide que queremos utilizar en el enlace. Lo que buscamos son las coordenadas de la tangente de la recta a la clotoide, punto C, del punto O centro de la curva de R y de la tangente a ambos círculos, F'.

Figura 34. Enlace entre recta y círculo de sentido contrario.



Como conocemos A y R podemos hallar  $X_0$  y  $\Delta R$ . Para poder hallar las coordenadas de C, tendremos que calcular la distancia CS

$$\vec{CS} = \vec{CN} + \vec{NS} = X_0 + (R + R') \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Donde la distancia NS la deducimos del triángulo O'T, puesto que  $NS=OT$ . Sin embargo el ángulo  $\alpha$  no lo conocemos. O'S es conocido mediante el cálculo de la distancia del punto O' a la recta AB. Gracias a esta distancia OS

podremos deducir el valor de  $\alpha$  y darle coordenadas al propio punto S. Sobre la figura 2-30 observaremos que

$$\vec{O'S} = \vec{O'T} + \vec{TS} = (R + R')\cos(\alpha) + (R + \Delta R)$$

Donde O'T lo deducimos también en el triángulo O'T. Podemos despejar  $\alpha$ , en función de datos conocidos.

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\vec{OS} - R - \Delta R}{R + R'}\right)$$

Con  $\alpha$  ya podremos calcular la distancia CS, que nos permitirá hallar las coordenadas de C. Las de O saldrán también desde S, con la distancia conocida NS y  $(R+\Delta R)$ . Conocida la situación de este punto será fácil calcular las coordenadas de F' en la dirección de O' y a una distancia R desde O.

#### 2.10.2.4 La curva de inflexión

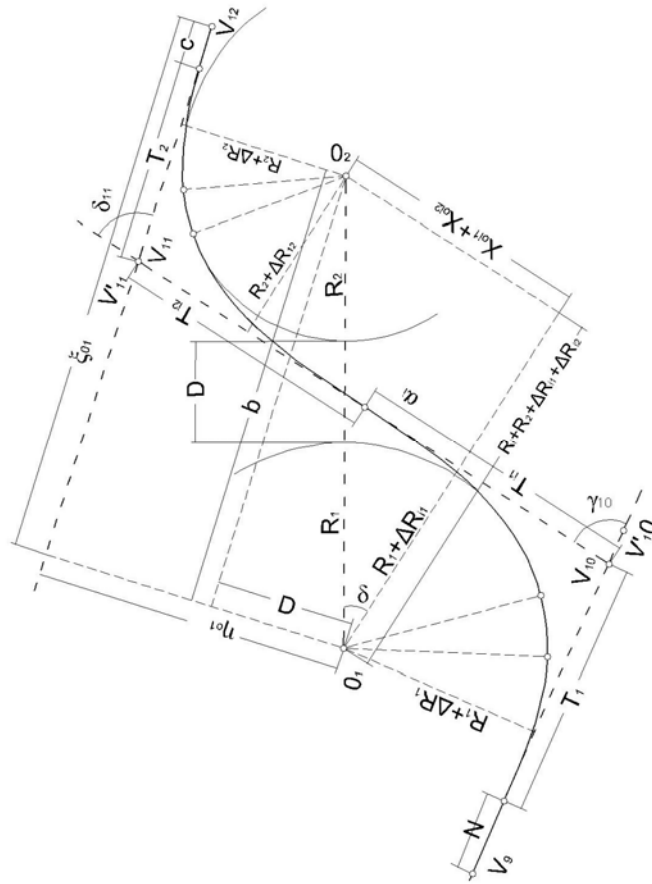
La curva de inflexión es una curva en forma de S, que une dos arcos de círculo, de curvaturas contrarias, sin alineaciones recta intermedia. Consta de dos ramas de clotoide, con radio  $R=\infty$  en su punto de origen común, y la misma tangente en dicho punto. Cada rama puede tener parámetro distinto. Sin embargo, generalmente, se escogen parámetros iguales (figura 35).

Para el cálculo es preciso tener en cuenta, también las clotoides exteriores enlazadas con los círculos. Por consiguiente, el trazado total es la sucesión clotoide — círculo — clotoide de inflexión — círculo — clotoide. Tanto los parámetros  $A_1$ ,  $A_i$  y  $A_2$ , como los radios  $R_1$  y  $R_2$ , pueden tener magnitudes cualesquiera.

Además de los elementos citados, obtenidos gráficamente, es preciso también que esté determinado el punto  $C_1$ , así como el segmento  $N$ , cuya longitud se introduce en el cálculo como valor obligado.

Datos: Coordenadas de los vértices  $V_9, V_{12}, V'_{10}$  y  $V'_{11}$ ;  $A_1, R_1, A_2, R_2, A_2$  y  $N$ .

Figura 35. La curva de inflexión.





Incógnitas: Elementos de las clotoides para  $A_1$ ,  $A_i$  y  $A_2$ , coordenadas de los vértices  $V_{10}$  y  $V_{11}$ , tangentes  $T_1$ ,  $T_{i1}$ ,  $T_{i2}$ ,  $T_2$ , desarrollo de los arcos circulares  $b_1$  y  $b_2$ .

Solución:

1. Calcular los elementos de la clotoides utilizando las ecuaciones conocidas.
2. Hallar las coordenadas del centro  $O_1$ , como punto lateral.
3. Referir las coordenadas de  $O_1$  a la tangente  $V_{12}V'_{11}$ , según el apartado 3.5; resultados:  $\eta_o$  y  $\xi_{o1}$ .
4. hallar la distancia  $O_1O_2$ :

$$\overrightarrow{(O_1 \cdot O_2)} = \sqrt{(R_1 + R_2 + \Delta R_{i1} + \Delta R_{i2})^2 + (X_{oi1} + X_{oi2})^2}$$

5. Hallar los segmentos a, b y c.

$$a = (R_2 + \Delta R_2) - \eta_{o1}$$

$$b = \sqrt{(\overrightarrow{(O_1 \cdot O_2)})^2 - a^2}$$

$$c = \xi_{o1} - b - X_{o2}$$

6. Hallar las coordenadas de  $O_2$ , como punto lateral.
7. Hallar el azimut de  $\alpha_o$  de la línea  $O_1O_2$ , mediante las coordenadas de  $O_1$  y  $O_2$ , mediante las coordenadas de  $O_1$  y  $O_2$ . Como prueba, hallar  $O_1O_2$  a partir de las coordenadas calculadas.
8. Hallar el ángulo  $\delta$ :

$$\tan(\delta) = \frac{X_{oi1} + X_{oi2}}{R_1 + R_2 + \Delta R_{i1} + \Delta R_{i2}}$$

9. Hallar los ángulos  $\gamma_{10}$  y  $\gamma_{11}$ . De las coordenadas de los vértices se obtienen los azimutes  $\alpha_{9,10}$  y  $\alpha_{11,12}$ . El azimut de la tangente en al inflexión  $\alpha_i$ , vale:

$$\alpha_i = \alpha_o \pm \delta \pm 90^\circ$$

El signo de  $\delta$  depende de diversos factores; lo mejor es deducirlo de un croquis a escala. Los ángulos de intersección de las tangentes,  $\gamma_{10}$  y  $\gamma_{11}$ , se obtienen como diferencia entre los azimutes ( $\alpha_{9,10} - \alpha_i$ ) y ( $\alpha_{11,12} - \alpha_i$ ). El signo de la diferencia se deduce también mediante un croquis.

10. Hallar las tangentes  $T_1$ ,  $T_{i1}$ ,  $T_{i2}$  y  $T_2$ . Se determinan según el método expuesto para las curvas de transición, simétricas o asimétricas, según el caso.
11. Hallar los elementos de la poligonal  $V_9 - V_{10} - V_{11} - V_{12}$ , a partir de las tangentes  $N$ ,  $T_1$ ,  $T_{i1}$ ,  $T_{i2}$ ,  $T_2$  y  $c$ , y los ángulos  $\gamma_{10}$  y  $\gamma_{11}$ . De este modo se obtienen una comprobación y, al mismo tiempo, las coordenadas definitivas de los vértices  $V_{10}$  y  $V_{11}$ . Según la experiencia, el error de cierre no debe ser mayor de  $\pm 3\text{cm}$ , en otro caso existe algún error en los cálculos.
12. Suprimir ahora las coordenadas de los vértices  $V'_{11}$  y  $V'_{12}$ .
13. Hallar los desarrollos de los arcos  $b_1$  y  $b_2$ :

$$\omega_1 = \gamma_{10} - (\tau_1 + \tau_{i1})$$

$$\omega_2 = \gamma_{11} - (\tau_2 + \tau_{i2})$$

$$b_1 = \frac{R_1 \cdot \pi \cdot \omega_1}{180^\circ}$$

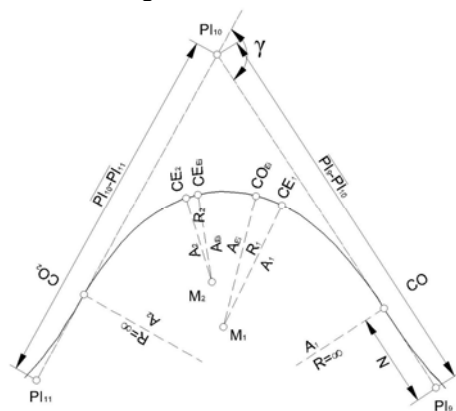
$$b_2 = \frac{R_2 \cdot \pi \omega_2^\circ}{180^\circ}$$

### 2.10.2.5 La Ovoide

La ovoide consiste en una serie círculo – clotoide – círculo. La clotoide que une los arcos circulares (de curvaturas del mismo sentido) tiene comunes con ellos, en los puntos de contacto, las tangentes y los radios (figura 36). Dados los dos círculos, no existe más que una clotoide que cumpla con estas condiciones. El empleo de la clotoide en este caso exige que la curva de radio menor es interior a la otra sin ser concéntricas (figura 37).

En primer lugar se determinan gráficamente los radios de los arcos circulares y los parámetros de las clotoides enlazadas a ella, claro pues, si se ha desarrollado una solución grafica, si no se deben conocer o proponer los radios y parámetros de las clotoides. Luego la longitud del segmento N, que se introducirá en los cálculos como valor obligado. Las coordenadas de los ángulos que forman las tangentes y las longitudes de éstas, son conocidas por medición o mediante el cálculo.

Figura 36. La Ovoide.



Valores conocidos:  $V_9V_{10}$ ,  $V_{10}V_{11}$ , coordenadas de  $V_9$ ,  $V_{10}$ ,  $V_{11}$ , segmento N, parámetros  $A_1$ ,  $A_i$ ,  $A_2$ ; y los radios  $R_1$ ,  $R_2$  (figura 36).

Incógnitas:

- 1) Coordenadas de  $O_1$ .
- 2) Distancia  $O_1O_2=D$ .
- 3) Coordenadas de  $O_2$ .
- 4) Azimut  $O_1O_2$ ,  $\alpha_{1,2}$ .
- 5) Azimut de la tangente principal de la clotoide intermedia.
- 6) Angulos centrales y desarrollo de los arcos circulares.
- 7) Serie de tangentes a la ovoide.

Solución:

Se calculan los elementos de las clotoides correspondientes a sus contactos con los círculos, utilizando las ecuaciones ya conocidas o con la Tabla I.

Para 1) las coordenadas de  $O_1$  deben determinarse.

Para 2)

$$D = O_1 \cdot O_2$$

$$D = \sqrt{(X_{o3} - X_{o2})^2 + (R_1 + \Delta R_2) - (R_2 + \Delta R_2)^2}$$

Para 3) las coordenadas de  $O_1$  se refieren a la tangente  $V_{10}$ ,  $V_{11}$ , de donde se deducen las longitudes a, b y c. Para ello se tiene:

$$V_{10} = \odot C$$

$V_{11} = \odot F$

$O_1$  = punto intermedio.

El valor  $a$  corresponde a  $\eta_p$ . Los valores  $b$  y  $c$ , corresponden a  $\xi_p$ .

La distancia de  $O_2$  a  $V_{10}V_{11}$  es  $(R_2 + \Delta R_1)$ .

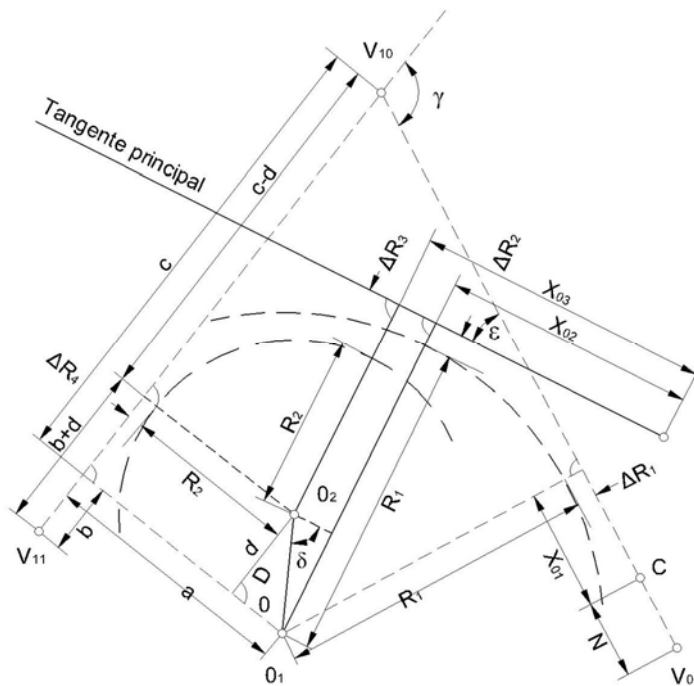
Entonces es:

$$e = a - (R_2 + \Delta R_1)$$

$$d = \sqrt{D^2 - e^2}$$

Ahora se calculan las coordenadas de  $O_2$  por trigonometría.

Figura 37. Elementos de La Ovoide.



Para 4) de las coordinas de  $O_1$  y  $O_2$  se obtiene  $\alpha_{1,2}$ .

Es:

$$\tan(\alpha_{1,2}) = \frac{y_{o2} - y_{o1}}{x_{o2} - x_{o1}}$$

Para 5) primeramente se halla el ángulo  $\delta$  con

$$\cos(\delta) = \frac{X_{o3} - X_{o2}}{D}$$

Da un signo, válido para clotoides “con curvatura a la derecha”, vista desde el origen. Si la clotoide tiene la curvatura hacia la izquierda, debe cambiarse el signo de  $\delta$ .

Este cálculo se refiere a un sistema de coordenadas “dextrorsum”; si el sistema fuera “sinistrorsum”, entonces se verificaría lo contrario.

Para 6) los ángulos centrales se deducen de las siguientes fórmulas, válidas para un sistema de coordenadas “dextrorsum”.

Angulo auxiliar

$$\varepsilon = \alpha_T - \alpha_{9,10}$$

para clotoides “hacia la derecha”;

$$\varepsilon = \alpha_{9,10} - \alpha_T$$

Para clotoides “hacia la izquierda”.

Estas relaciones cambian de signo, si el sistema coordenado es “sinistrorsum”.

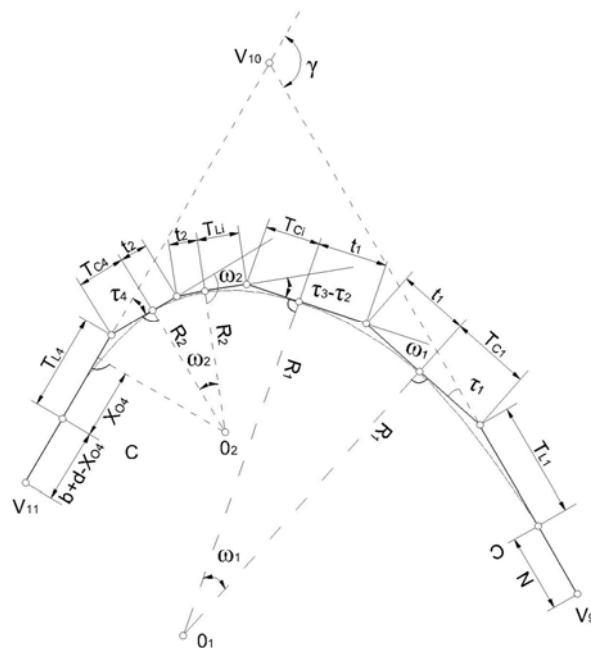
$$\omega_1 = \varepsilon + \tau_2 - \tau_1$$

$$\omega_2 = \gamma - \varepsilon - \tau_4 - \tau_2$$

Comprobación:

$$\gamma = \tau_1 + \tau_3 + \tau_4 - \tau_2 + \omega_1 + \omega_2$$

Figura 38. Deflexiones y curvas de La Ovoide.



Los desarrollos de los círculos son:

$$b_1 = \frac{R_1 \cdot \pi \cdot \omega_1}{180^\circ}$$

$$b_2 = \frac{R_2 \cdot \pi \cdot \omega_2}{180^\circ}$$

Para 7) las tangentes  $T_{L1}$ ,  $T_{C1}$ ,  $T_{L4}$  y  $T_{C4}$  se calculan por las ecuaciones ya conocidas.

Las restantes tangentes se deducen de las fórmulas:

$$t_1 = \tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \cdot R_1$$

$$T_{Li} = \frac{\text{sen}(\tau_3) \cdot (T_{L3} - T_{L2})}{\text{sen}(\tau_3 - \tau_2)} - T_{C2}$$

$$t_2 = \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \cdot R_2$$

$$T_{Ci} = T_{C3} - \frac{\text{sen}(\tau_2) \cdot (T_{L3} - T_{L2})}{\text{sen}(\tau_3 - \tau_2)}$$

Agrupando estas tangentes parciales, y con los ángulos de intersección ya calculados, se obtiene la serie de tangentes a la ovoide.

La longitud de la clotoide que une los círculos es:

$$L_i = L_3 - L_2$$

Como control del cálculo puede considerarse la serie de tangentes como una poligonal que inicia en  $V_9$  y finaliza en  $V_{11}$ .

Las coordenadas finales deben dar diferencias no mayores de  $\pm 3$  cm.; en otro caso, el cálculo no está bien hecho.



### 2.10.2.6 La serie de clotoides

Esta serie es una sucesión de clotoides, con curvaturas del mismo signo, parámetros distintos, crecimiento de la curva siempre en la misma dirección; en el punto de contacto de cada dos sucesivas, la tangente es común y el radio de curvatura idéntico. Puesto que la serie de clotoides raramente encuentra aplicación, aquí se va a exponer el cálculo para el caso de un par de clotoides solamente. Las series de tres o más clotoides, prácticamente no se presentan nunca.

En principio, es indiferente el orden de los arcos de clotoide; la serie de clotoides se considera como un todo único. Con el subíndice  $s$  se designan aquí sus elementos,  $L_s$ ,  $R_s$ ,  $X_{os}$ , etc., que se obtienen como a continuación se indica.

Primeramente, se determinan los valores  $L$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $\tau$ , correspondientes a los elementos  $A_1$  con  $R_1$  (subíndice  $a$ ),  $A_2$  con  $R_1$  (subíndice  $b$ ) y  $A_2$  con  $R_2$  (subíndice  $c$ ).

Entonces, se tiene:

$$\varepsilon = \tau_a - \tau_b \quad (\text{si se obtiene un valor negativo, se adiciona } 360^\circ).$$

$$L_s = L_a + L_c - L_b$$

$$\tau_s = \tau_a + \tau_c - \tau_b$$

$$Y_s = Y_a + (X_c - X_b) \cdot \text{sen}(\varepsilon) + (Y_c - Y_b) \cdot \text{cos}(\varepsilon)$$

$$X_s = X_a - (Y_c - Y_b) \cdot \text{sen}(\varepsilon) + (X_c - X_b) \cdot \text{cos}(\varepsilon)$$

$$X_{os} = X_s - R_2 \cdot \text{sen}(\tau_s)$$

$$\Delta R_s = Y_s - R_2 \cdot (1 - \text{cos}(\tau_s))$$

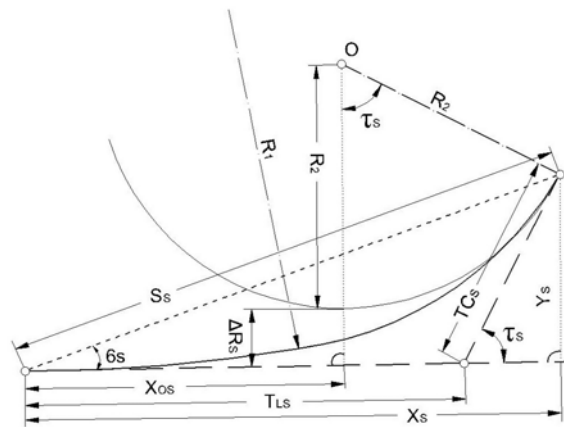
$$T_{Cs} = \frac{Y_s}{\text{sen}(\tau_s)}$$

$$T_{Ls} = X_s - \frac{Y_s}{\tan(\tau_s)}$$

$$S_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$$

$$\tan(\sigma_s) = \frac{X_s}{S_s}$$

Figura 39. La serie de clotoides.



Conocidos estos elementos de la serie de clotoides, pueden resolverse los diversos casos que se presenten; naturalmente, en cada caso particular, sólo se determinarán los elementos necesarios.

## 2.11 Parámetros de la clotoide

La clotoide es aquella curva necesaria para mantener una velocidad conveniente, así como unas condiciones de seguridad y comodidad en todo el trazado de una carretera.

Para ello la longitud de la clotoide  $L_s$  o su parámetro  $A$  no deberán ser inferiores a un valor mínimo, con el objeto de que la curva cumpla ciertas condiciones de tipo dinámico, geométrico y estético. En este sentido, existen varios criterios en la determinación de la longitud mínima o parámetro mínimo, adoptándose como parámetro de diseño el mayor valor determinado por cada uno de los criterios, los cuales son:

### **2.11.1 Parámetro por longitud mínima de la clotoide de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga**

Como se desarrollo en el apartado 2.6.1 y según la figura 40. La aceleración centrífuga se aminora en una curva peraltada, debido a la componente radial del peso del vehículo, por lo cual, actúa radialmente sobre el vehículo una fuerza residual.

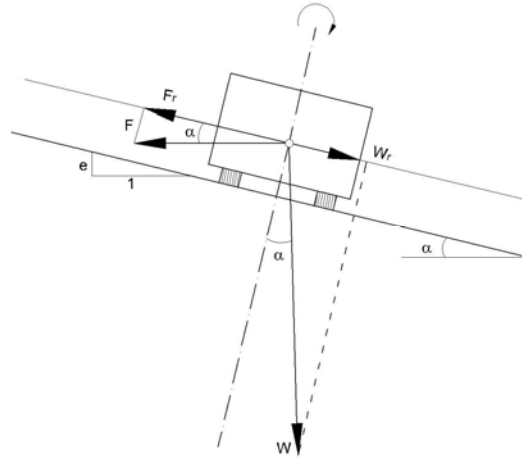
En el apartado 2.6.1, se obtuvo la siguiente expresión:

$$L_s \geq \frac{V}{46.656J} \cdot \left( \frac{V^2}{R_c} - 127 \cdot e_c \right)$$

La cual se conoce como la fórmula de Smirnof. Y expresada en función del parámetro  $A$ , tenemos que:

$$A \geq \sqrt{\frac{V \cdot R}{46.656J} \cdot \left( \frac{V^2}{R} - 127p \right)}$$

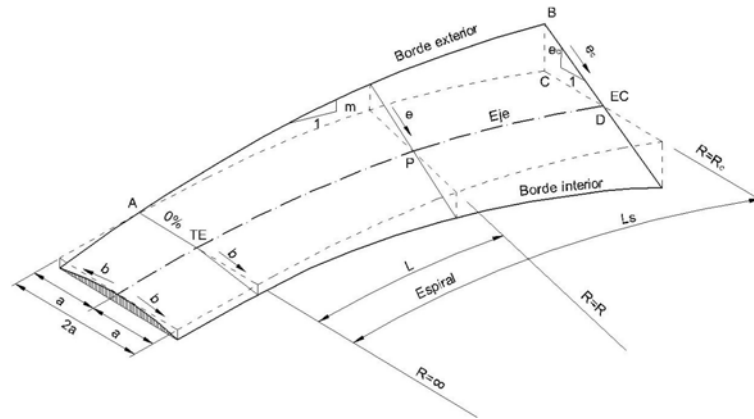
Figura 40. **Parámetro de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga**



### 2.11.2 **Parámetro por longitud mínima de la clotoide de acuerdo a la transición del peralte**

En el apartado 2.6.2, se desarrollo la longitud mínima de la clotoide de acuerdo a la transición del peralte, la cual es la longitud necesaria para pasar con seguridad y comodidad desde la sección en bombeo normal  $b$  en recta hasta aquella sección con peralte  $e_c$  donde empieza la curva circular, variando gradualmente el peralte o inclinación transversal de la calzada, como se observa en la figura 41.

Figura 41. **Parámetro de la clotoide de acuerdo a la transición del peralte.**



De donde se obtuvo la siguiente expresión:

$$L_s \geq \frac{a \cdot e_c}{m}$$

Y expresada en función del parámetro, tenemos que:

$$A = \sqrt{\frac{a \cdot e_c}{m} \cdot R_c}$$

### 2.11.3 Parámetro por longitud mínima de la clotoide por razones de percepción y estética

El apartado 2.6.3 indica que, desde el punto de vista de la percepción, la longitud de la curva de transición ha de ser suficiente para que se perciba de forma clara el cambio de curvatura, orbitando adecuadamente al conductor. Y considera que el retranqueo mínimo a utilizar debe ser de 0.25 metros, además, por razones de

estética y con el objeto de obtener trazos armoniosos, el ángulo de deflexión de la espiral  $\tau$  debe ser mínimo de  $3^\circ$ .

Obteniéndose la siguiente expresión:

$$L \geq \frac{R}{9}$$

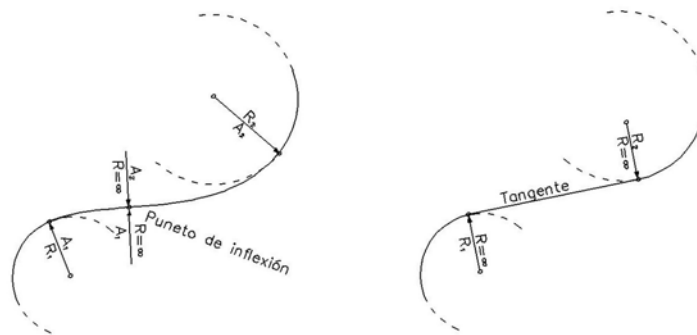
Por lo cual su parámetro es:

$$A \geq \frac{R}{3}$$

#### 2.11.4 Consideraciones del parámetro y longitud de la clotoide en el diseño de carreteras

Un diseño balanceado proporciona movimientos armónicos y una distribución adecuada del peralte. Es por ello que cuando se recorren dos curvas de transición con distinto sentido (o curvas en S), los parámetros de las clotoides deberán ser de iguales parámetros o similares, teniendo una relación entre sus radios de 1.5, como se aprecia en la figura 42.

Figura 42. Relación del parámetro en curvas en S.



La figura anterior se puede expresar así:

$$\frac{R_1}{3} < 3 \leq R_2$$

### 3. SOBREENCHO

La necesidad de sobreancho cuando un vehículo circula por una curva horizontal, se debe a que en ellas, ocupa un ancho de calzada mayor que en recta.

Cuando un vehículo recorre una curva a la velocidad para la cual los efectos del peralte contrarrestan exactamente todo el valor de la fuerza centrífuga, no se desarrolla fricción alguna en sentido radial, el eje posterior sigue la dirección del radio, y los recorridos de las ruedas posteriores se mantienen desplazados hacia adentro, con respecto de las ruedas delanteras, ocasionando dificultad a los conductores para mantener el vehículo en el eje del carril de circulación correspondiente, esto se debe a la rigidez y dimensiones del vehículo. En consecuencia el sobreancho es el sobredimensionamiento que se le da a la calzada en las zonas curvas para garantizar el paso de vehículos de gran longitud.

Un aumento de la velocidad, hace necesario que la fricción comience a actuar, para absorber la fuerza centrífuga adicional que se produzca y, en consecuencia, las ruedas posteriores adoptan una posición algo más hacia fuera, con el fin de formar el ángulo de deslizamiento requerido para desarrollar la fricción necesaria. A medida que aumenta la velocidad, el desplazamiento hacia fuera se acentúa, hasta alcanzar un punto en que el recorrido de las ruedas posteriores pasa a ocupar una posición exterior con respecto al de las ruedas delanteras. Además existe una necesidad psicológica de más espacios para evitar a un vehículo que circula rápidamente en una curva.

Debido a estas circunstancias y con el fin de que las condiciones de operación de los vehículos en las curvas sean similares a las de recta, las calzadas en



las curvas deben ensancharse. A este aumento de ancho de calzada se le llama “*sobreancho*” de la curva.

$$U = u + R - \sqrt{R^2 - L^2}$$

$$F_A = \sqrt{R^2 + A \cdot (2 \cdot L + A)} - R$$

$$Z = 0.104 \frac{V_d}{\sqrt{R}}$$

$$W_c = N \cdot (U + C) + (N - 1) \cdot F_A + Z$$

$$w = W_c - W_n$$

Donde:

N = Número de carriles.

w = sobre ancho en, m.

$W_c$  = ancho total en curva.

$W_n$  = ancho total en tangente

U = ancho de huella del vehículo de diseño (de extremo a extremo de los neumáticos) en, m.

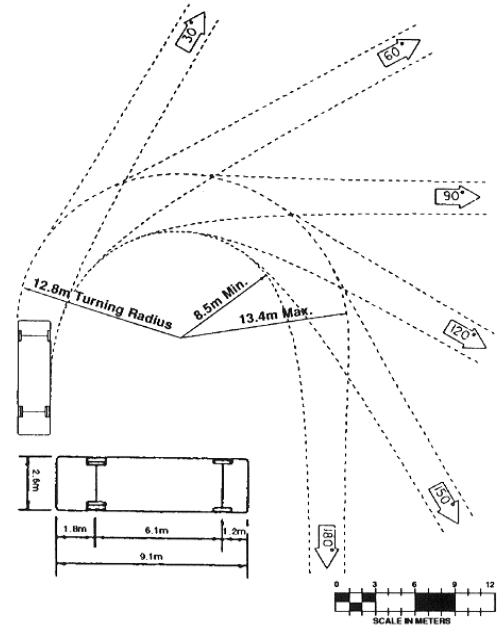
C = distancia libre lateral por vehículo 0.6, 0.75 y 0.9 m. para  $W_n$  de 6.0, 6.6 y 7.2 m.

$F_A$  = ancho de proyección del vehículo por carril de la parte delantera, m.

$F_S$  = ancho de proyección del vehículo por carril de la parte trasera, m.

Figura 43. Radio de giro del vehículo SU

THIS TURNING TEMPLATE SHOWS THE TURNING PATHS OF THE AASHTO DESIGN VEHICLES. THE PATHS SHOWN ARE FOR THE LEFT FRONT OVERHANG AND THE OUTSIDE REAR WHEEL. THE LEFT FRONT WHEEL FOLLOWS THE CIRCULAR CURVE, HOWEVER, ITS PATH IS NOT SHOWN.



z = ancho adicional debido a dificultad de manejo en curvas, m.

u = ancho del vehículo en tangente (de exterior a exterior) 2.6 m.

R = radio de la línea central m.

L = longitud a ejes del vehículo.

A = longitud parte delantera del vehículo.

V = velocidad de diseño en km/h

En Guatemala el sobreebancho se calcula según AASHTO y utilizando como vehículo crítico el SU (figura 43). A continuación se muestran las formulas para el calculo del sobreebancho de AASHTO 2001.

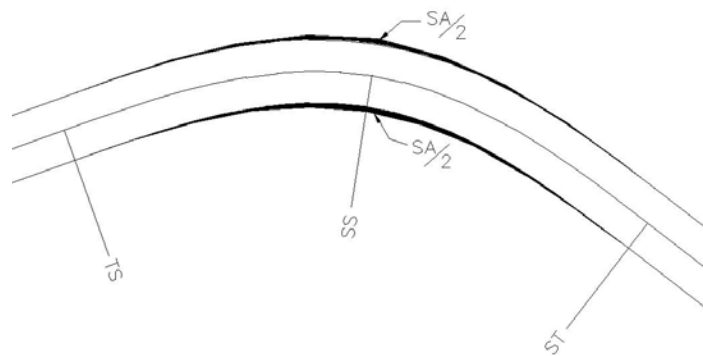
### 3.1 Métodos para alcanzar el sobre ancho

Determinado el ancho adicional para el sobreebancho central hay que considerar dos casos:

- Caso 1) Cuando el eje replanteado es una espiral y
- Caso 2) Cuando el eje es una curva circular.

En el Caso 1, el sobreebancho se puede dividir para que tenga lugar la mitad en el borde interno y la otra mitad en el borde externo (figura 44). Este método garantiza que los datos de la rasante diseñada se colocan exactamente sobre la línea espiralada.

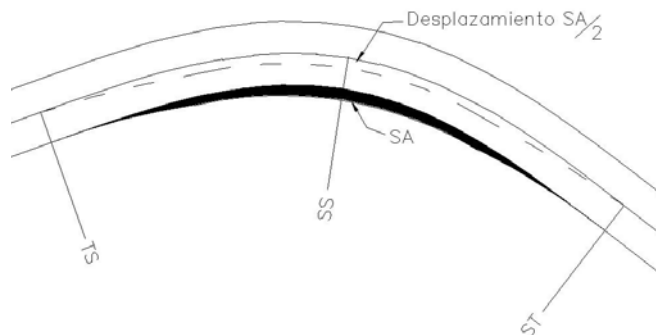
Figura 44. Distribución de sobreebancho a ambos extremos.



En el Caso 2, el borde interno es una curva circular compuesta, y el sobre ancho solo tiene lugar en el interior de la misma (figura 45). La deficiencia de este método es que cuando se coloca la rasante se debe desplazar de la línea espiralada  $\frac{1}{2}$

sobreancho con el propósito de compartir el sobreancho en ambos carriles de la calzada.

Figura 45. **Distribución de sobreancho en el extremo interno.**

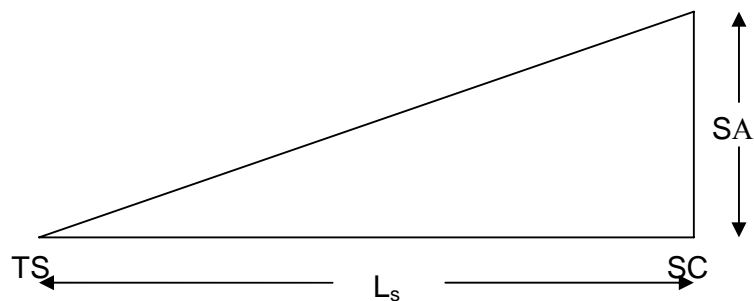


### 3.2 Transición del Sobreancho

En el caso de alineamientos con clotoides, el sobreancho se distribuye a lo largo de la Clotoide, trazando el borde del ensanche por medio de distancias radiales a partir del eje de la vía, las cuales varían directamente con la longitud de la espiral central  $L_s$  desde el TS y el ST, tal que se llega al sobreancho total SA en el SC y el CS, garantizando de esta manera que toda la curva circular central lleve el sobreancho uniforme SA. En el caso de las clotoides de vértice, por apariencia, se debe desarrollar el sobreancho total en una distancia igual a la recorrida en 1 segundos a la velocidad de diseño, dicha distancia obviamente esta distribuida por su parte central en el vértice de la clotoide SCS. Ambos casos se aplican cuando se distribuye el sobreancho hacia ambos lados de la calzada como cuando solamente distribuye en la parte interna.

La distribución del sobreebancho como se indico anteriormente se realiza a lo largo del desarrollo de la clotoide o espiral  $L_s$ . Actualmente se distribuye el sobreebancho proporcional a  $L_s$ , como se muestra en la figura 46, esto se debe por la simplicidad del cálculo y es aplicable también cuando el sobreebancho se aplica directamente a la parte interna de la curva.

Figura 46. **Distribución lineal del sobreebancho.**



De tal manera que se obtiene por simple interpolación el valor total del sobreebancho para la estación deseada.

Este método es simple, pero su apariencia al colocarlo en campo es muy abrupta y utiliza mayor área de estructura de pavimento.

Una distribución del sobreebancho más concordante a la clotoide es utilizando la fórmula de la instrucción mexicana de carreteras.

$$S_p = SA \cdot \left[ 4 \left( \frac{L_p}{L_s} \right)^3 - 3 \left( \frac{L_p}{L_s} \right)^4 \right]$$

Donde  $L_s$  es el desarrollo de la clotoide, SA es el sobreebancho total,  $S_p$  el sobreebancho en un punto intermedio cualquiera p y  $L_p$  el desarrollo desde el origen de la clotoide de dicho punto p. Esta fórmula solo es válida cuando

$$SA = \frac{L_s^3}{24A^2}$$

Donde  $L_s$  y  $A$  son el desarrollo y el parámetro de la clotoide respectivamente.

Este es un método más elegante, requiere menos área de estructura de pavimento y no es represente problemas de calculo.

El método más recomendable es la distribución del sobreeschance mediante dos clotoides (figura 45). En este caso son dos clotoides que definen el borde de la calzada, que diverge de la clotoide del eje hasta conseguir el sobreeschance final, es decir, el borde interno y externo de una calzada sobreeschanchada se supone que es una curva, cuya distancia radial desde la espiral del eje aumenta gradualmente desde  $\frac{1}{2}w$  en el TS a  $\frac{1}{2}w + SA$  en el SC o alguna estación precedente en el caso de las clotoides de vértice, siendo  $w$  el ancho de la rodadura. El sobreeschance, por tanto, varía directamente con la distancia a lo largo del eje, de tal manera que:

$$\text{Longitud de clotoide interna} \quad L_i = L_s + \left( \frac{1}{2}w + \frac{2}{3}SA \right) \cdot \theta_s$$

$$\text{Longitud de clotoide externa} \quad L_e = L_s - \left( \frac{1}{2}w + \frac{2}{3}SA \right) \cdot \theta_s$$

El método anteriormente expuesto armoniza en su totalidad con los trazos con clotoides, ya que es la que más se adapta al trazo natural descrito por el conductor y a la posición que toma el vehículo en curva, por lo tanto, el área de estructura de pavimento es la óptima.

## 4. REPLANTEO

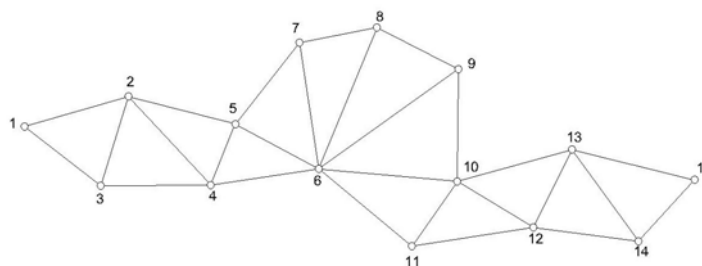
El replanteo se encuentra directamente relacionado con los métodos de triangulación y bisección.

Primero se calculan las coordenadas del eje, luego para determinar una coordenada del mismo se deben ubicar bases o vértices de la triangulación, y por medio de bisección se obtienen los ángulos para ubicar la coordenada deseada; este procedimiento es el que actualmente utiliza la estación total.

### 4.1 Triangulación

Es un sistema de coordenadas en el campo y sus líneas de levantamiento forman figuras triangulares. Una *red de triangulación* (figura 47) se forma cuando se tiene una serie de triángulos conectados entre sí, de los cuales se pueden calcular todos los lados si se conocen los ángulos de cada triángulo y la longitud de la línea base; o bien se conocen las coordenadas de sus vértices.

Figura 47. **Triangulación.**



En una red de triangulación es necesario partir de coordenadas conocidas como las UTM, o bien, si no se conocen dichas coordenadas, se crea un sistema de coordenadas propio del proyecto, asignando coordenada a una base fija y tomando como referencia el norte; partiendo de ello se crean puntos fijos; ambos procedimientos forman lo que se conoce como “triangulación base”, la cual es necesaria para que plano y terreno se refieran a las mismas coordenadas. Un punto no puede trasladarse correctamente al terreno si no es apoyándolo en los mismos puntos en que se apoyó la triangulación base.

Lo primero que se debe hacer es un reconocimiento del terreno para planear la triangulación, o sea, estudiar la posición más conveniente de las estaciones de acuerdo con la topografía misma del terreno y con las condiciones de visibilidad y facilidad de acceso; siendo necesario calcular un eje previo, que ayuda a centrar problemas, para luego determinar las estaciones, lo cual se llama materializarlas; para esto se emplean mojones. Se calculan las coordenadas de dichas estaciones por trigonometría o bien se determinan con la utilización de un GPS, las cuales son los vértices de una serie de triángulos en cadena, en los que cada vértice recién calculado pasa a ser base del siguiente.

Los vértices se conservan con bases de hormigón y se derivarán de ellos triángulos y poligonales secundarias.

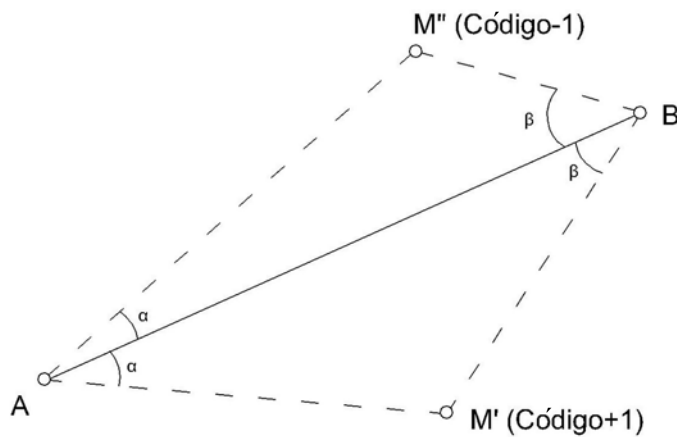
Cada 2 a 4 kilómetros se situará una base de comprobación.

## 4.2 Bisección

La bisección también llamado replanteo por intersección angular, necesita de dos puntos conocidos o bases de replanteo, para situar un punto mediante la intersección de las visuales procedentes de ambas bases ver figura 48.

Partiendo de un acimut de A y B, o coordenadas, datos que se obtiene de la triangulación, se obtienen las coordenadas de un punto M, a partir de los ángulos ( $\alpha, \beta$ ) que M forma con A y B.

Figura 48. **Bisección.**



La aplicación de estos cálculos al replanteo es muy sencilla. Se estacionan dos aparatos, en A y en B. Se visan mutuamente imponiendo la lectura  $0^\circ$  del ángulo horizontal. Después se orientan los aparatos al punto M y se leen los correspondientes ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . También se pueden localizar las coordenadas desde gabinete con la ayuda de programas o bien por trigonometría apoyada en un gráfico a escala.



### 4.3 Cálculo del Eje

El eje es una sucesión de clotoides de curvatura creciente y decreciente, con o sin, tramos de curvatura constante, recta y círculo, inscrita en la poligonal de direcciones principales, según los que progresa el trazado.

La clotoide, de ecuación  $R \cdot L = A^2$ , o bien  $L = 2 \cdot R \cdot \tau$ , y entre cuyos puntos 1 y

2, se cumple  $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$ , es forma fundamental en todo tipo de trazado:  $\tau$  es la variación de azimut al recorrer la trayectoria. La adecuada combinación permite:

En radios pequeños, sobreeje gradual y suficiente longitud de transición para el volteo del peralte.

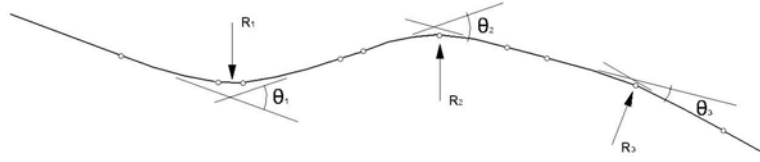
En radios medianos y grandes, tiempo suficiente para suavizar el crecimiento de la aceleración centrífuga.

En radios muy grandes, orientación visual. El retranqueo relativo del recorrido próximo centra en cada instante la perspectiva del mismo desde el punto de vista del conductor.

En todo caso el conductor, a velocidad constante, gira el volante a velocidad también constante, con apoyo uniforme en el mismo.

Supongamos una línea de trazado (figura 49):

Figura 49. **Replanteo de línea.**

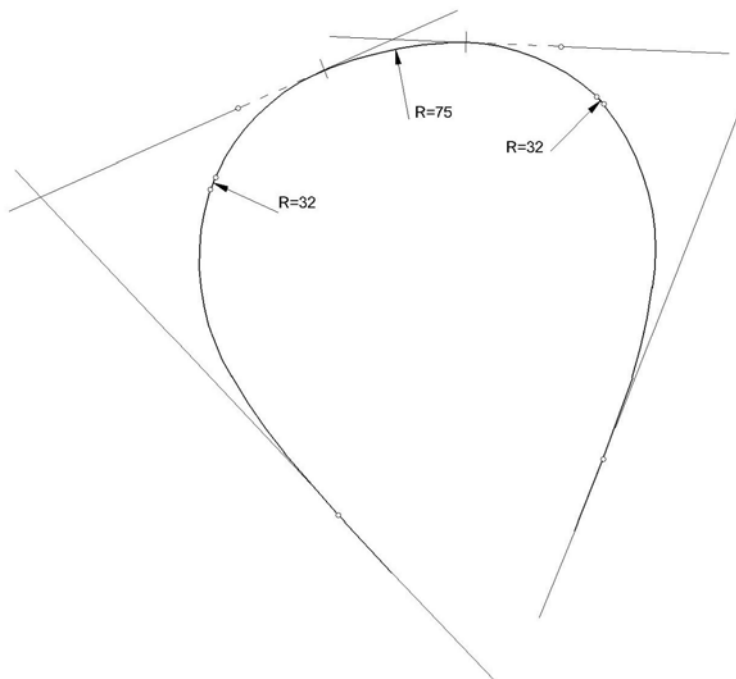


$\theta_1$   $\theta_2$   $\theta_3$  son los giros totales de las direcciones principales. Dos giros  $\theta$  consecutivos, de distinto sentido, determinan un trazado en S con punto de inflexión; es el más frecuente.

Dos giros  $\theta$  consecutivos, del mismo sentido, pueden dar lugar:

1. Al enlace con un tramo recto, como en la figura anterior.
2. A la limitación de la curvatura máxima.

Figura 50. **Giros en el mismo sentido.**



En este caso, curva en C, las direcciones principales son exteriores al trazado.

Cada tramo formado por una clotoide creciente, un círculo y una clotoide decreciente, un círculo y una clotoide decreciente, constituye una unidad de enlace alrededor del vértice de las alineaciones principales; el enlace es nomotético de cualquier otro que tuviese los mismos datos angulares.

Son datos para el cálculo:

1. Los alineaciones base sucesivas dadas en posición, por un punto y su azimut.
2. Las condiciones de enlace entre cada dos consecutivas.

En un enlace completo así descrito:

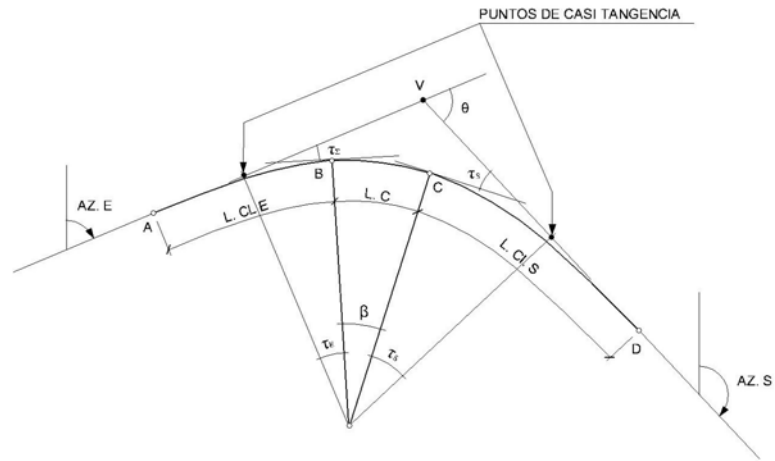
El trazado entre A y D ha girado un ángulo  $\theta$ .

Entre A y B ha girado  $\tau_e$  y recorrido  $L_{se} = 2 \cdot R \cdot \tau_e$ .

Entre B y C ha girado  $\beta$  y recorrido  $L_c = R \cdot \beta$ .

Entre C y D ha girado  $\tau_s$  y recorrido  $L_{ss} = 2 \cdot R \cdot \tau_{ss}$ .

Figura 51. **Tangencias.**



Conocido  $\tau_e$ ,  $\tau_s$  y R o bien longitud de la espiral de entrada  $L_{se}$ , longitud circular  $L_c$  y longitud de la espiral de salida  $L_{ss}$ , está resuelto el problema.

La diferencia de azimutes es  $\theta$ .

Los  $\tau$  de cada lado resuelven las clotoides en su forma, con todos sus valores unitarios, según los métodos descrito en los capítulos anteriores. La posición del centro se obtiene por intersección de paralelas a distancias  $R+\Delta$ .

Si la serie de datos hubiese sido la de longitudes de clotoide, círculo y clotoide, pasamos a la anterior, por las proporciones:

$$R = \frac{L_{se}}{2 \cdot \tau_e} = \frac{2L_c}{2 \cdot \beta} = \frac{L_{ss}}{2 \cdot \tau_s} = \frac{\Sigma \text{longitudes}}{\theta}$$

Puesto que  $\theta = \beta + \tau_e + \tau_s$

Y si es el círculo el que queremos fijar en posición basta obtener el  $\tau$  a partir del retraseo por la fórmula aproximada:  $\tau = \sqrt{\frac{6 \cdot \Delta}{R}}$  (en radianes) de cada una de las transiciones de entrada y salida del enlace completo.

#### 4.4 Deflexiones

En la figura 2.9,  $\theta$ =ángulo PAX=deflexión desde el inicial a cualquier punto de la espiral, el cual es igual a

$$\theta = \left( \frac{L}{L_s} \right)^2 \cdot \theta_s - C_s$$

Donde  $C_s$  ( en segundos) es una pequeña corrección dada por la fórmula:

$$C_s = 0.0031 \cdot \theta_s^3 + 0.0023 \cdot \theta_s^5 (10)^{-5}$$

Para valores de  $\theta_s$  menores de  $15^\circ$ ,  $C_s$  es despreciable.

#### 4.5 Procedimiento general para replantear espiral y círculo

Partiendo de los siguiente datos PI,  $\Delta$  y G. Los pasos siguientes son típicos (figura 14).

1. Elegir la longitud de la espiral; luego, el ángulo de la espiral se deduce de

$$\theta_s = \frac{L_s \cdot G}{40}$$

2. Se determina la distancia de tangente total  $T_s$  por la fórmula

$$T_s = (R_c + p) \cdot \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \Delta\right) + k$$

Conocido  $T_s$ , se puede situar el TS o ST midiendo desde el PI. Además, el punto B, o  $PI_s$ , queda establecido por la distancia  $T_s-LT$  desde el PI. Entonces puede situarse el teodolito en B, con la visual hacia el PI, se gira el ángulo  $\theta_s$ , y se mide la distancia  $V$ , siendo  $V=S.T$ .

3. Con el teodolito situado en TS, y lectura de vernier  $0^{\circ}00'00''$  en la tangente, los ángulos de desviación varían como el cuadrado de la distancia a lo largo de la espiral. La desviación total al SC es  $\frac{1}{3} \cdot \theta_s$  menos una corrección que es despreciable o ordinario.
4. Continuando, con el teodolito situado en el SC, y orientado con una visual inversa al TS o al  $PI_s$ , se replantea la curva circular por desviaciones del modo habitual.

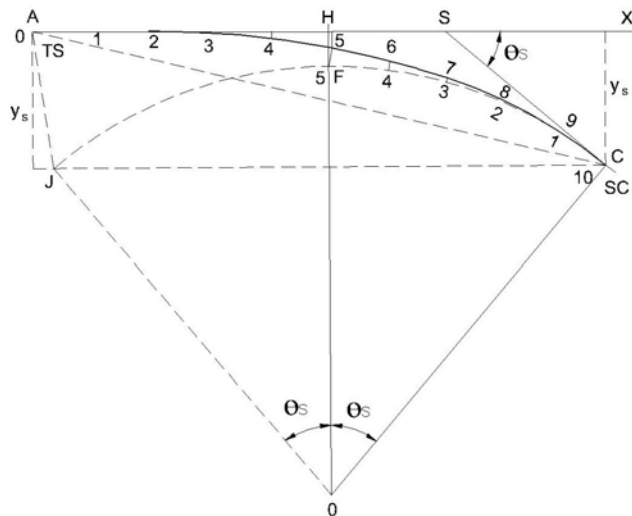
#### **4.6 Propiedad de la divergencia angular y lineal**

Como una recta y un círculo tienen ambos curvatura constante y la espiral de transición es una curva de curvatura uniformemente variable, es cierto que la espiral diverge en ángulo y ordenada de la curva circular, para una distancia dada, en la misma relación que para la tangente inicial. Esta es una propiedad útil de la espiral.

La figura 4.6 muestra una espiral que diverge de la línea recta AH con las mismas coordenadas que del círculo CF. Si se divide la espiral en diez partes iguales, las ordenadas de los puntos 1, 2, 3, etc., del círculo a los correspondientes puntos 9, 8, 7, etc., en la espiral, son las mismas prácticamente que las ordenadas perpendiculares desde la tangente inicial a los puntos de la espiral 1, 2, 3, etc., respectivamente.

Con el teodolito en el TS, con lectura de vernier  $0^{\circ}00'00''$  en la tangente inicial, las desviaciones a los puntos 1, 2, 3, etc., son  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , etc., variando las  $\varphi$  como el cuadrado de la distancia desde el TS. Si se coloca un teodolito en SC, con la lectura de verter  $0^{\circ}$  en la tangente auxiliar, las desviaciones a los puntos 9, 8, 7, etc., son  $\delta_1-\varphi_1, \delta_2-\varphi_2, \delta_3-\varphi_3$ , etc., donde las  $\varphi$  varían como el cuadrado de la distancia desde ST, y las  $\delta$  con las del círculo.

Figura 52. **Divergencia de la espiral.**



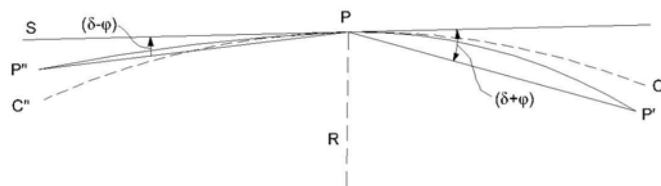
#### 4.7 Desviación desde un punto intermedio de la espiral

El hecho de que la espiral diverge de un círculo en la misma relación que de la tangente inicial proporciona un método para replantear estaciones hacia delante o hacia atrás desde cualquier punto.

Así, si el teodolito está situado en un punto P (figura 53) con lectura de verter  $0^\circ$  en la tangente auxiliar PS, la desviación hacia el punto de delante P' es  $\delta + \varphi$  = desviación para el arco circular PC' (=PP') de radio R más la desviación para el arco de espiral PP', como si el punto P fuera el TS.

De igual modo, la desviación para un punto más atrás P'' es  $\delta - \varphi$ .

Figura 53. Desviación desde el punto interno de la espiral.



#### 4.8 Trazado de la espiral por coordenadas

Ordenadas desde la tangente. Estando dado el ángulo central  $\theta$  en cualquier punto de una espiral por la fórmula:



$$\theta = \left( \frac{L}{L_s} \right)^2 \cdot \theta_s$$

Las coordenadas  $x$  e  $y$  correspondientes se pueden determinar por las fórmulas indicadas a lo largo del presente trabajo.

Cuando se hacen las medidas de la cuerda a lo largo de la curva no son necesarias las distancias  $x$ . Las ordenadas  $y$  se pueden comprobar aproximadamente suponiendo que la espiral es una parábola cúbica.

#### **4.9 Ejemplo de cálculo de coordenadas para replanteo en campo**

El siguiente ejemplo tienen como finalidad el cálculo de estas coordenadas utilizando los conceptos y métodos descritos a lo largo de este trabajo, si bien, con la ayuda de los programas para diseño de carreteras que existen actualmente, tales como, Autodesk Civil Design, Civil Design 3D, Microstation (módulo de carreteras), y otros más, es muy fácil y rápido el cálculo de las coordenadas con una alta precisión, y se basan sobre los mismos principios.

Se desea diseñar una curva circular con espirales de transición de entrada y salida, simétricas, tipo clotoide; para realizar su trazado en planos y localización en el terreno. Para ello, se deben calcular todos los elementos y coordenadas cada 10 m de las curvas.

Datos:

Acimut de la tangente de entrada	=	47°	
Acimut de la tangente de salida	=	133°	
Coordenadas del PI		Norte = 1000	Este = 1000
Abscisa del PI	=	1+500	
Radio de la curva circular central $R_c$	=	80m	
Cuerda unidad C	=	10m	
Longitud de la espiral (clotoide) $L_s$	=	100m	

Solución:

Elementos de las curvas.

Parámetro de la espiral A.

$$A = \sqrt{R_c \cdot L_s} = \sqrt{80 \cdot 100} = 89.443$$

Ángulo de deflexión de la espiral  $\theta_s$

$$\theta_s = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{L_s}{R_c} = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{100}{80} = 35.8099$$

$$\theta_s = 35^\circ 48' 35.64'' = 0.625 \text{ rad}$$

Angulo central de la curva circular  $\Delta_c$

$$\Delta_c = \Delta - 2\theta_s$$

Donde,

$$\Delta = \text{Acimut de salida} - \text{Acimut de entrada} = 133^\circ - 47^\circ = 86^\circ$$

$$\Delta_c = 86^\circ - 2(35.8099^\circ) = 14.3803^\circ = 14^\circ 22' 49.08'' \text{ derecha.}$$

Coordenadas cartesianas del SC ( $x_c, y_c$ )

$$x_c = L_s \left( 1 - \frac{\theta_s^2}{10} + \frac{\theta_s^4}{216} - \frac{\theta_s^6}{9360} + \dots \right)$$

$$x_c = 100 \left( 1 - \frac{0.625^2}{10} + \frac{0.625^4}{216} - \frac{0.625^6}{9360} + \dots \right) = 96.146$$

$$y_c = L_s \left( \frac{\theta_s}{3} - \frac{\theta_s^3}{42} + \frac{\theta_s^5}{1320} - \frac{\theta_s^7}{75600} + \dots \right)$$

$$y_c = 100 \left( \frac{0.625}{3} - \frac{0.625^3}{42} + \frac{0.625^5}{1320} - \frac{0.625^7}{75600} + \dots \right) = 20.259$$

Abcisa del PC desplazado, referido al TS ( $k$ )

$$k = x_c - R_c \cdot \text{sen}(\theta_s) = 96.146 - 80 \cdot \text{sen}(35.8099) = 49.356$$

Retranqueo ( $p$ )

$$p = y_c - R_c \cdot (1 - \cos(\theta_s)) = 20.259 - 80 \cdot (1 - \cos(35.8099)) = 5.136$$

Tangente de la curva espiral-circular-espiral  $T_s$

$$T_s = k + (R_c + p) \cdot \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 49.356 + (80 + 5.136) \cdot \tan\left(\frac{86}{2}\right) = 128.747$$

Externa de la curva espiral-circular-espiral Es

$$E_s = (R_c + p) \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \right) - R_c = (80 + 5.136) \cdot \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{86}{2}\right)} \right) - 80 = 36.409$$

Tangentes larga de la espiral

$$T_L = x_c - \frac{y_c}{\tan(\theta_s)} = 96.146 - \frac{20.259}{\tan(86)} = 68.084$$

Tangente corta de la espiral

$$T_C = \frac{y_c}{\text{sen}(\theta_s)} = \frac{20.259}{\text{sen}(86)} = 34.625$$

Coordenadas cartesianas del centro de la curva circular con transiciones (x<sub>o</sub>,y<sub>o</sub>)

$$x_o = k = 49.356$$

$$y_o = y_c + R_c \cdot \cos(\theta_s) = 20.259 + 80 \cdot \cos(35.8099) = 85.136$$

Cuerda larga de la espiral CLs

$$CL_s = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \sqrt{49.356^2 + 85.136^2} = 98.275$$

Deflexión del SC o ángulo de la cuerda larga

Como  $\Delta > 15^\circ$  entonces se calcula la corrección en segundos

$$C_s = 0.0031 \theta_s^3 + 0.0023 \theta_s^5 \cdot 10^{-5} = 0.0031 \cdot 35.8099^3 + 0.0023 \cdot 35.8099^5 \cdot 10^{-5} = 143.708$$

$$C_s = 143.708 \text{ segundos} = 0.03991899^\circ$$

$$\theta = \frac{\theta_s}{3} - C_s = \frac{35.8099}{3} - 0.03991899 = 11.896702$$

Longitud de la curva circular LC

$$L_C = \frac{C \cdot \Delta_c}{G}$$

Como

$$G = \frac{20 \cdot 360}{2\pi \cdot R_c}$$

Entonces

$$L_C = \frac{C \cdot \Delta_c}{\frac{20 \cdot 360}{2\pi \cdot R_c}} = \frac{10 \cdot (14.3803)}{\frac{20 \cdot 360}{2\pi \cdot 80}} = 20.079$$

Abscisas de los puntos TS, SC, CS y ST.

$$\text{Abscisa TS} = \text{Abscisa PI} - T_s = 1500 - 128.747 = 1+371.253$$

$$\text{Abscisa SC} = \text{Abscisa TS} + L_s = 1371.253 + 100 = 1+471.253$$

$$\text{Abscisa CS} = \text{Abscisa SC} + L_C = 1471.253 + 20.079 = 1+491.332$$

$$\text{Abscisa ST} = \text{Abscisa CS} + L_s = 1491.332 + 100 = 1+591.332$$

Cálculo de localización por deflexiones, por coordenadas cartesianas y por coordenadas topográficas planas.

Espiral de entrada, desde el TS al SC

Para 1+380

Su correspondiente deflexión se calcula como sigue:

$$\theta = \left( \frac{l}{L_s} \right)^2 \cdot \theta_s$$

Donde l es la distancia desde el TS a 1+380

$$l = 1380 - 1371.253 = 8.747$$

$$\theta = \left( \frac{8.747}{100} \right)^2 \cdot 35.8099 = 0.273981577129 \approx 0.0047818806107 \text{ rad}$$

$$x = l \left( 1 - \frac{\theta^2}{10} + \frac{\theta^4}{216} - \frac{\theta^6}{9360} + \dots \right)$$

$$x_{380} = 8.747 \left( 1 - \frac{0.0047818806107^2}{10} + \frac{0.0047818806107^4}{216} - \frac{0.0047818806107^6}{9360} + \dots \right) = 8.747$$

$$y = l \left( \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{42} + \frac{\theta^5}{1320} - \frac{\theta^7}{75600} + \dots \right)$$

$$y_{380} = 8.747 \left( \frac{0.0047818806107}{3} - \frac{0.0047818806107^3}{42} + \frac{0.0047818806107^5}{1320} - \frac{0.0047818806107^7}{75600} + \dots \right) = 0.014$$

$$\phi_{380} = \frac{\theta}{3} = \frac{0.273981577129}{3} = 0.09132719237 \approx 0^\circ 05' 29''$$

Para una cuerda desde el TS a 1+380

$$c_{380} = \sqrt{x_{380}^2 + y_{380}^2} = \sqrt{8.747^2 + 0.014^2} = 8.747$$

Las coordenadas topográficas planas de esta abscisa, s calculan a partir de las coordenadas del TS, las que a su vez se calculan a partir de las coordenadas del PI.

$$N_{TS} = N_{pi} + T_s \cdot \cos(AZ_{pi.TS})$$

$$AZ_{pi.TS} = AZ_{TS.pi} + 180^\circ = 47^\circ + 180^\circ = 227^\circ$$

Donde  $AZ_{TS.pi}$  = acimut de entrada.

$$N_{TS} = 1000 + 128.747 \cos(227) = 912.195$$

$$E_{TS} = E_{pi} + T_s \cdot \sin(AZ_{pi.TS}) = 1000 + 128.747 \sin(227) = 905.841$$

$$N_{380} = N_{TS} + c_{380} \cos(AZ_{380})$$

Donde,

$$AZ_{380} = AZ_{TS.pi} + \phi_{380} = 227^\circ + 0^\circ 05' 29'' = 227^\circ 05' 29'' = 227.09130555$$

$$N_{380} = 912.195 + 8.747 \cos(227.09130555) = 918.15$$

$$E_{380} = E_{TS} + c_{380} \sin(AZ_{380})$$

$$E_{380} = 905.841 + 8.747 \sin(227.09130555) = 912.247$$

Para 1+390

$$\theta = \left( \frac{18.747}{100} \right)^2 \cdot 35.8099 = 1.25853896 = 0.02196564875 \text{ rad}$$

$$x_{390} = 18.747 \left( 1 - \frac{0.021965648751^2}{10} + \frac{0.021965648751^4}{216} - \frac{0.021965648751^6}{9360} + \dots \right) = 18.746$$

$$y_{390} = 18.747 \left( \frac{0.021965648751}{3} - \frac{0.021965648751^3}{42} + \frac{0.021965648751^5}{1320} - \frac{0.021965648751^7}{75600} + \dots \right) = 0.137$$

$$\phi_{390} = \frac{\theta}{3} = \frac{1.25853896}{3} = 0.419512986667 = 0^\circ 25' 10''$$

$$c_{390} = \sqrt{x_{390}^2 + y_{390}^2} = \sqrt{18.746^2 + 0.137^2} = 18.746$$

$$N_{390} = N_{TS} + c_{390} \cos(AZ_{390})$$

$$AZ_{390} = AZ_{TS,pi} + \phi_{390} = 227^\circ + 0^\circ 25' 10'' = 227^\circ 25' 10'' = 227.419512986$$

$$N_{390} = 912.195 + 18.746 \cos(227.419512986) = 924.879$$

$$E_{390} = E_{TS} + c_{390} \sin(AZ_{390})$$

$$E_{390} = 905.841 + 18.746 \sin(227.419512986) = 919.644$$

Y así se continúa hasta llegar a la abscisa del SC

Curva circular, desde el CS al SC

Deflexión por cuerda unitaria

$$\phi_u = \frac{G}{4} = \frac{\frac{20 \cdot 360}{2\pi \cdot R_c}}{4} = \frac{20 \cdot 360}{8\pi \cdot R_c} = \frac{20 \cdot 360}{8 \cdot \pi \cdot (80)} = 3.58098621958 = 3^\circ 34' 46''$$



Deflexión por metro

$$\phi_u = \frac{G}{40} = \frac{\frac{20 \cdot 360}{2\pi \cdot R_c}}{40} = \frac{20 \cdot 360}{80 \cdot \pi \cdot R_c} = \frac{20 \cdot 360}{80 \cdot \pi \cdot (80)} = 0.358098621958 = 0^\circ 21' 29''$$

Deflexión subcuerda lado del SC

$$(1480 - 1471.253) \cdot 0.358098621958 = 3.13228864627 = 3^\circ 07' 56''$$

Deflexión subcuerda lado del CS

$$(1491.332 - 1490) \cdot 0.358098621958 = 0.4769887418045 = 0^\circ 28' 37''$$

Por lo cual, las deflexiones para la curva circular son:

$$\text{Deflexión para } 1+480 = 3.13228864627 = 3^\circ 07' 56''$$

$$\text{Deflexión para } 1+490 = 0.4769887418045 = 0^\circ 28' 37''$$

Las coordenadas topográficas planas de los diversos puntos ubicados sobre la curva circular, se calculan a partir de las coordenadas de su centro O, como sigue:

Acimut del centro de la curva circular (CCo):

$$AZ_{\text{pis.PI}} = AZ_e + \theta_s$$

$$AZ_{\text{pis.PI}} = 47 + 35.8099 = 82.8099 = 82^\circ 48' 36''$$

$$AZ_{\text{CCo}} = AZ_{\text{pis.PI}} + 90 = 82.8099 + 90 = 172.8099 = 172^\circ 48' 36''$$

$$N_o = N_{SC} + R_c \cdot \cos(AZ_{SC.O})$$

$$N_o = 962.962 + 80 \cdot \cos(172.8099) = 883.591$$

$$E_o = E_{SC} + R_c \cdot \sin(AZ_{SC.O})$$

$$E_o = 989.987 + 80 \cdot \sin(172.8099) = 1000$$

Para la estación 1+480

$AZ_{480} = AZ_{O.SC} + \text{el doble de la deflexión del SC}$

$$AZ_{480} = (172.8099 + 180) + 2 \cdot (3.13228864627) = 359.07431859$$

$$N_{480} = N_o + R_c \cdot \cos(AZ_{480})$$

$$N_{480} = 883.591 + 80 \cdot \cos(359.07431859) = 963.58$$

$$E_{480} = E_o + R_c \cdot \sin(AZ_{480})$$

$$E_{480} = 1000 + 80 \cdot \sin(359.07431859) = 998.708$$

Para 1+490

$$AZ_{490} = AZ_{480} + \frac{G}{2} = 359.07431859 + 7.16197243914 = 366.236291029 = 366^\circ 14' 11''$$

$$N_{490} = N_o + R_c \cdot \cos(AZ_{490}) = 883.591 + 80 \cdot \cos(366.236291029) = 963.117$$

$$E_{490} = E_o + R_c \cdot \sin(AZ_{490}) = 1000 + 80 \cdot \sin(366.236291029) = 1008.69$$

Espiral de salida, desde el ST

Las deflexiones y coordenadas cartesianas de la espiral de salida, se calculan tomando como origen el ST y como punto final el CS, como sigue:

Para 1+590

$$l = 1591.332 - 1590 = 1.332$$

$$\theta = \left( \frac{1.332}{100} \right)^2 \cdot 35.8099 = 0.006353478 = 0.0001108891 \text{ rad}$$

$$x_{590} = 1.332 \left( 1 - \frac{0.0001108891^2}{10} + \frac{0.0001108891^4}{216} - \frac{0.0001108891^6}{9360} + \dots \right) = 1.332$$

$$y_{590} = 1.332 \left( \frac{0.0001108891^3}{3} - \frac{0.0001108891^5}{42} + \frac{0.0001108891^7}{1320} - \frac{0.0001108891^9}{75600} + \dots \right) = 0.00004921$$

$$\phi_{590} = \frac{\theta}{3} = \frac{0.006353478}{3} = 0.00211783 = 0^\circ 00' 07''$$

$$c_{590} = \sqrt{x_{590}^2 + y_{590}^2} = \sqrt{1.332^2 + 0.00004921^2} = 1.332$$

Las coordenadas topográficas planas de la estación 1+590, se calculan a partir de las coordenadas del ST, las que a su vez se calculan a partir de las coordenadas del PI.

$$N_{ST} = N_{pi} + T_s \cdot \cos(AZ_{pi,ST})$$

$$AZ_{pi,ST} = 133^\circ$$

$$N_{ST} = 1000 + 128.747 \cos(133) = 912.195$$

$$E_{ST} = E_{pi} + T_s \cdot \text{sen}(AZ_{pi.ST})$$

$$E_{ST} = 1000 + 128.747 \text{sen}(133) = 1093.185$$

$$AZ_{590} = AZ_{ST,pi} - \phi_{590} = (133 + 180) - 0.00211783 = 312.99788217$$

$$N_{590} = N_{ST} + c_{590} \cos(AZ_{590})$$

$$N_{590} = 912.195 + 1.331 \cos(312.99788217) = 913.103$$

$$E_{590} = E_{ST} + c_{590} \text{sen}(AZ_{590})$$

$$E_{590} = 1093.185 + 1.331 \text{sen}(312.99788217) = 1093.185$$

Y así se continúa hasta llegar a la abscisa del CS.

En la Tabla III se ilustra los datos para la localización de la curva espiral-circular-espiral por los tres métodos: deflexiones, coordenadas cartesianas y coordenadas topográficas planas. Igualmente en la parte superior se presentan todos los elementos geométricos.

Tabla III Resultados de replanteo por coordenadas.

ELEMENTOS DE LAS CURVAS								
Acimut de entrada = 47° Acimut de salida = 133° Abscisa del PI = 1+500 $\Delta = 86^\circ$ Rc = 80m c = 10m Ls = 100m A = 89.443			G = 14°19'23" Derecha $\theta_s = 35^\circ 48' 35.64''$ $\Delta c = 14^\circ 22' 49.08''$ $\phi c = 11^\circ 53' 48.13''$ Xc = 96.164 Yc = 20.259 p = 5.136 k = 49.356			Ts = 128.747 Es = 36.409 TL = 68.084 TC = 34.625 xo = 49.356 yo = 85.136 CLs = 98.275 Lc = 20.079		
Abscisas	Longitudes desde el TS y ST espirales l	Deflexiones desde el TS, SC, y ST $\phi$			Coordenadas cartesianas desde el TS y ST		Coordenadas topográficas planas	
		g°	mm'	ss''	x	y	N	E
TS - 1+371.253	0	0	0	0	0	0	912.195	905.841
1+380	8.747	0	5	7	8.747	0.014	918.15	912.247
1+390	18.747	0	25	56	18.746	0.137	924.879	919.644
1+400	28.747	0	59	37	28.739	0.495	931.433	927.196
1+410	38.747	1	47	11	38.713	1.211	937.711	934.979
1+420	48.747	2	50	35	48.639	2.409	943.605	943.056
1+430	58.747	4	7	47	58.474	4.21	948.995	951.477
1+440	68.747	5	38	43	68.149	6.727	953.753	960.27
1+450	78.747	7	23	15	77.572	10.065	957.738	969.437
1+460	88.747	9	23	10	86.62	14.312	960.803	978.951
1+470	98.747	11	36	13	95.142	19.534	962.795	988.745
SC - 1+471.253	100	11	53	40	96.164	20.259	962.962	989.987
1+480	-	3	8	13	-	-	963.58	998.708
1+490	-	6	16	26	-	-	963.117	1008.69
CS - 1+491.332	100	11	53	40	96.164	20.259	962.962	1010.013
1+500	91.332	9	56	22	88.88	15.566	961.427	1018.54
1+510	81.332	7	53	26	79.953	11.072	958.625	1028.135
1+520	71.332	6	4	50	70.614	7.507	954.863	1037.396
1+530	61.332	4	29	47	60.994	4.787	950.291	1046.286
1+540	51.332	3	8	26	51.193	2.812	945.051	1054.801
1+550	41.332	2	2	53	41.285	1.47	939.276	1062.963
1+560	31.332	1	10	10	31.32	0.641	933.087	1070.817
1+570	21.332	0	32	18	21.33	0.202	926.594	1078.422
1+580	11.332	0	9	19	11.332	0.03	919.901	1085.851
1+590	1.332	0	0	12	1.332	4.92E-05	913.103	1093.185
ST - 1+591.332	0	0	0	0	0	0	912.195	1094.159

## CONCLUSIONES

1. Un vehículo no puede efectuar el cambio de dirección necesario, de forma gradual, de un tramo recto a uno circular a la velocidad de diseño, sin la curva de transición (clotoide).
2. La clotoide como curva de transición, por la propiedad del cambio gradual de curvatura, se utiliza como la forma más simple de enlace entre alineaciones rectas y curvas.
3. El empleo de la clotoide como curva de transición, ofrece a un camino una apariencia continua.
4. La ausencia o inadecuada curva de transición fuerza al conductor a reducir la velocidad, lo que puede llevarle a cortar la curva o invadir el carril adyacente.
5. La clotoide permite adaptarse fácilmente al contorno de la topografía, especialmente en terrenos montañosos, teniendo como consecuencia menor movimiento de tierras, lo que representa una considerable ventaja constructiva y la reducción sustancial en el coste de la misma.
6. La clotoide permite una bondad extraordinaria, cuya flexibilidad es totalmente superior a la que proporcionan los trazos que solamente se realizan con rectas y arcos circulares.

7. La clotoide permite adaptarse a trazos ya existentes, por lo cual es aplicable cuando se trata de rehabilitación de carreteras.
8. La buena disposición del trazo con clotoides lleva consigo una excelente integración al paisaje.
9. El parámetro A es igual al producto de la longitud L y del radio R, siendo el mismo en todos los puntos de la clotoide, por lo cual expresa unívocamente el tamaño de la clotoide.
10. Todas las clotoides son semejantes entre si, y por consiguiente pueden aumentarse o reducirse proporcionalmente.
11. La longitud de la espiral de transición  $L_s$  o el parámetro A no deberán ser inferiores a un valor mínimo, con el objeto de que la curva cumpla con las condiciones de tipo dinámico, geométrico y estético.
12. La longitud mínima de la espiral de acuerdo a la variación de la aceleración centrífuga es igual a la ecuación 2-61
 
$$L_s \geq \frac{V}{46.656J} \cdot \left( \frac{V^2}{R_c} - 127 \cdot e_c \right)$$
 determinada por Smirnoff o bien a la ecuación 2-63
 
$$L_s \geq 0.036 \frac{V^3}{R_c}$$
 de Barnett.
13. La longitud mínima de la espiral de acuerdo a la transición del peralte es igual a la ecuación 2-68
 
$$L_s \geq \frac{a \cdot e_c}{m_{\min}}$$
 , en la cual influye principalmente la variación del borde exterior de la calzada.

14. La longitud mínima de la espiral por razones de percepción y estética, es  $L_s \geq \frac{R_c}{9}$ , y su parámetro  $A \geq \frac{R_c}{3}$ .
15. La matemática de la clotoide no es más difícil que la de los corrimientos, pero, con los programas actuales para diseño geométrico de carreteras, es más simple diseñar con la clotoide, ya que si se hace con trazo circular, el diseñador siempre se verá obligado a realizar el cálculo de los corrimientos para poder apreciar exactamente los efectos del corrimiento y para cuantificación de volúmenes, lo que se evita utilizando la clotoide como curva de transición.
16. Con la existencia de las estaciones totales y los programas de diseño, lo más simple es realizar el replanteo por coordenadas.





## RECOMENDACIONES

1. El diseñador de carreteras debe conocer los tres criterios de longitud de la clotoide para su mejor aplicación y no debe de limitarse a dichos valores mínimos.
2. Para una mayor comprensión de la aplicación de la clotoide, se debe tener en cuenta la velocidad de diseño y el desarrollo del peralte.
3. Para realizar los replanteos en campo se facilitan realizándolo por coordenadas, por lo cual es importante que el tipógrafo y diseñador conozcan las características de la estación total para su replanteo, además el diseñador debe tener buen conocimiento del programa de diseño que utilices.
4. Con la aparición de nuevos colectores de datos como los TDS, es más rápido, eficiente, preciso y sencillo realizar los replanteos en campo, por lo cual tanto tipógrafo como diseñador deben estudiar y analizar las propiedades del equipo a utilizar para su mayor aprovechamiento.
5. Todo diseñador debe realizar visitas a campo para tener una mejor percepción del terreno, así como, de los datos topográficos, los cuales utilizara para realizar el diseño, y así obtener una mejor selección de los parámetros o longitudes de la clotoide, para su óptima adaptación al terreno.

6. Para una exitosa localización del trazo con clotoides, se debe de contar con las suficientes referencias; por lo cual el diseñador y tipógrafo deben de seleccionar la ubicación de las mismas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. A Policy on Geometric Design of Highways and Streets. 4<sup>a</sup> ed. EE.UU. AASHTO, 2001.
2. Alfred Krenz y Host Osterloh. Clothoid design and setting out pocket manual. 6<sup>a</sup> ed. Alemania: Bauverlag Wiesbaden, 1963.
3. Instrucción de Carreteras, Norma 3.1-1C. 2<sup>a</sup> ed. Madrid: Dirección General de Carreteras, España 2003.
4. Joseph Barnett. Transition curves for highways. 4<sup>a</sup> ed. Washington DC: Federal Works Agency, 1940.
5. Luís de la Rubia Rincón. Tablas de replanteo de curvas circulares y acuerdos de transición (graduación centesimal). Madrid: Editorial Dossat, 1966.
6. Pietzsch Wolf. Straßenplanung. 6<sup>a</sup> ed. Alemania: Werner Verlag, 2000.
7. Thomas Felix Hickerson. Route Location and Design. 5<sup>a</sup> ed. EE.UU.: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1967.