Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Civil

MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA, APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES

César Armando Josimar del Cid Juárez

Asesorado por el Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno

Guatemala, mayo de 2009.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA, APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

CÉSAR ARMANDO JOSIMAR DEL CID JUÁREZ
ASESORADO POR EL ING. ALFREDO ENRIQUE BEBER ACEITUNO

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL

GUATEMALA, MAYO DE 2009

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Inga. Glenda Patricia García Soria
VOCAL II	Inga. Alba Maritza Guerrero de López
VOCAL III	Ing. Miguel Angel Dávila Calderón
VOCAL IV	Br. José Milton De León Bran
VOCAL V	Br. Isaac Sultán Mejía
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. José Gabriel Ordoñez Morales
EXAMINADOR	Ing. Wuilliam Ricardo Yon Chavarría
EXAMINADOR	Ing. Diego Velázquez Jofre
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA, APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES,

tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 18 de noviembre de 2008.

César Armando Josimar del Cid Juárez

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, 24 de abril de 2009

Ingeniero
Sydney Alexander Samuels Milson
Director de Escuela de Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala

Señor Director:

Por este medio me permito informar a usted que en mi calidad de Asesor, he terminado la revisión del trabajo de graduación titulado **"MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES"**, desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil César Armando Josimar del Cid Juárez, y habiéndose efectuado todas las correcciones indicadas, el suscrito lo da por aprobado, por lo que se solicita continuar con los trámites correspondientes.

Atentamente.

"Id y Enseñad a Todos"

Alfredo E. Beber A
INGENIERO CIVIL
COLEGIADO No. 3079

Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
Asesor

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala,
27 de abril de 2009

Ingeniero
Sydney Alexander Samuels Milson
Director Escuela Ingeniería Civil
Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos

Estimado Ingeniero Samuels.

Le informo que he revisado el trabajo de graduación **MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES**, desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil César Armando Josimar del Cid Juárez, quien contó con la asesoría del suscrito.

Considero este trabajo bien desarrollado y representa un aporte para la comunidad del área y habiendo cumplido con los objetivos del referido trabajo doy mi aprobación al mismo solicitando darle el trámite respectivo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS

ESCUELA INGENIERIA CIVIL

FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO
DE
TRANSPORTES
USAC

Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
Revisor por el Área de Topografía y Transporte

/bbdeb.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

El Director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor y Revisor por el Área de Topografía y Transportes, Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno, al trabajo de graduación del estudiante César Armando Josimar del Cid Juárez, titulado MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA, APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES, da por este medio su aprobación a dicho trabajo.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL
DIRECTOR
FACULTAD DE INGENIERIA

Mgter. Ing. Sydney Alexander Samuels Milson

Guatemala, mayo 2009

/bbdeb.

Universidad de San Carlos
de Guatemala

Facultad de Ingeniería
Decanato

Ref. DTG.175.2009

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, al trabajo de graduación titulado: **MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE AGRODESIA, APLICANDO GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SISTEMAS DE ECUACIONES,** presentado por el estudiante universitario **César Armando Josimar del Cid Juárez,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
DECANO

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
DECANO
FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, mayo de 2009

/gdech

ACTO QUE DEDICO A:

DIOS	TODOPODEROSO
MIS PADRES	Irma Fabiola Juárez Boror y César Armando del Cid Morales
MIS HERNANOS	Marco César del Cid Juárez y Kimberly María Fabiola del Cid Juárez
MIS ABUELAS	Elvira Boror y Aurelia Fuentes
A MI FAMILIA EN GENERAL	
ALGUIEN ESPECIAL	Madelin H.

AGRADECIMIENTOS A:

MI ASESOR	Ing. Alfredo Beber
LOS CATEDRÁTICOS	Ing. José Saquimux,
	Inga. Carmen Mérida
	Ing. Gabriel Ordoñez
	Ing. Omar Medrano
	Ing. Arturo Samayoa
	Ing. Pedro Aguilar
	Ing. Mario Corzo
	Inga. Vera Marroquín
	Ing. Julio Corado
	Ing. Jorge Vettorazzi

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

TABLAS

GLOSARIO

Agrodesia	Parte de la Topografía que trata las divisiones de polígonos.
Área	Superficie comprendida dentro de un perímetro.
Azimut	Es el ángulo horizontal medido en el sentido de las manecillas del reloj a partir de un meridiano de referencia. Lo más usual es medir el azimut desde el norte (sea verdadero, magnético o arbitrario). El azimut varía desde 0° hasta 360° y no se requiere indicar el cuadrante que ocupa la línea observada.
Finca	Propiedad inmueble.
Finca matriz	Finca madre de la que se constituyen otras fincas independientes por medio de desmembración.
Lindero	Límite, término o línea que separa terrenos.

Rumbo Es el ángulo horizontal agudo (menor que 90°) que forman una línea con un meridiano de referencia, generalmente se toma como tal, una línea Norte-Sur. El rumbo se mide desde el norte o desde el sur. Como el ángulo que se mide, es menor que 90° debe especificarse a qué cuadrante corresponde cada rumbo.

Topografía Ciencia que trata la descripción y el dibujo detallado de la superficie de un terreno.

RESUMEN

En el presente trabajo de graduación están contenidos la descripción y la guía de los métodos desarrollados para el proceso de solución de problemas de Agrodesia y transformación de linderos, utilizando sistemas de ecuaciones, asimismo se presentan resultados prácticos, demostrando los beneficios de los métodos, como una alternativa a ser aplicada en el estudio del tema.

En el primer capítulo, se presentan los conceptos fundamentales de la Trigonometría Analítica que se requieren para la correcta aplicación de los métodos, las principales fórmulas y algunas deducciones de las mismas.

En el segundo capítulo, se presentan la descripción y solución de los casos de división de polígonos con condiciones específicas para el nuevo lindero que se utiliza como división de acuerdo con las necesidades del propietario.

El tercer capítulo, trata con las transformaciones de linderos que tienen como objetivo cambiar las características geométricas de un polígono si variar la magnitud de su área. Este procedimiento se aplica cuando los colindantes llegan a un acuerdo de modificar un lindero, por otro que cumpla con las necesidades y requerimientos de las partes involucradas.

OBJETIVOS

- **GENERAL**

Proporcionar al estudiante de Ingeniería Civil una metodología alternativa para resolver problemas de Agrodesia, la cual resulte más sencilla de aplicar que los métodos tradicionales utilizados actualmente y que sea aplicable a los distintos casos de división de polígonos.

- **ESPECÍFICOS:**

1. Presentar la forma en que se utilizan los sistemas de ecuaciones para resolver problemas de división de polígonos topográficos y transformación de linderos.

2. Aplicar y demostrar el uso de la metodología propuesta en ejemplos específicos para cada caso.

INTRODUCCIÓN

Al realizar proyectos de Ingeniería, es necesario contar, principalmente, con un plano del terreno, con las características más importantes, según el tipo de proyecto, tales como infraestructura, vías de acceso, configuración, etc. En muchas ocasiones, además de conocer el área total del terreno en estudio, se requiere hacer divisiones del terreno de acuerdo con distintas necesidades, lo cual es motivo de estudio de la Agrodesia, parte importante de la Topografía.

Los métodos que se presentan se basan en el planteo de varias ecuaciones que dependen del tipo de problema a resolver, donde las incógnitas principales son las coordenadas de las intersecciones; los medios que se utilizan para plantear ecuaciones son: el método de coordenadas (se conoce también como método matricial) para encontrar áreas definidas en función de las incógnitas establecidas, la ecuación de la recta que separa una fracción de área determinada de un polígono original, la ecuación de la recta que sustituirá a un lindero sinuoso, la ecuación de la recta que transforma un lindero existente en otro con un rumbo dado, entre otros.

1. CONCEPTOS BÁSICOS

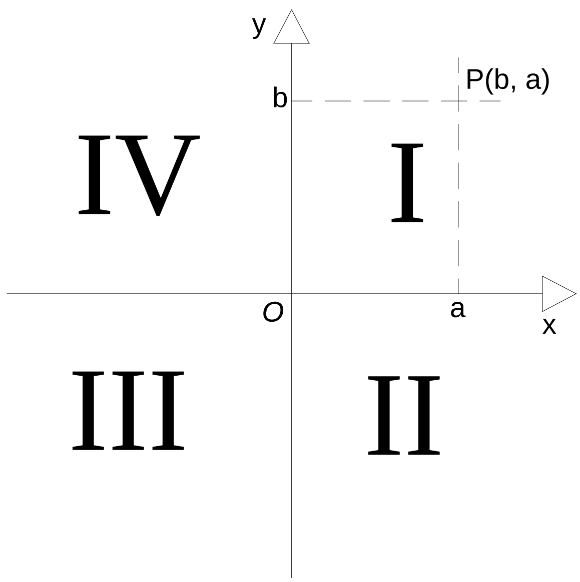
1.1 Geometría analítica

1.1.1 El plano coordenado

El plano coordenado es el vínculo entre la geometría y el algebra. En el plano coordenado se pueden trazar gráficas de ecuaciones algebraicas.

Al igual que los puntos sobre una recta se pueden representar con números reales para formar la recta numérica, los puntos sobre un plano se pueden identificar por medio de pares ordenados de números para formar el plano coordenado o plano cartesiano. Para hacerlo se trazan dos rectas de números reales entre si y que se cortan el cero de cada recta. Una recta es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y se llama eje x; la otra recta es vertical y la dirección positiva es hacia arriba; recibe el nombre de eje y. el punto de intersección del eje x y del eje y es el origen O, y los dos ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes, llamados I, II, III y IV (figura 1).

Figura 1. **Plano cartesiano**



Cualquier punto *P* en el plano coordenado se puede ubicar por medio de un único par ordenado de números, que en topografía se maneja así: (*b*, *a*), como se muestra en la figura 1. El primer número *b* se llama coordenada de *y* de *P*; y el segundo número *a* se llama coordenada de *x* de *P*. se puede pensar que las coordenadas de *P* son como la "dirección de domicilio" porque especifican su ubicación en el plano.

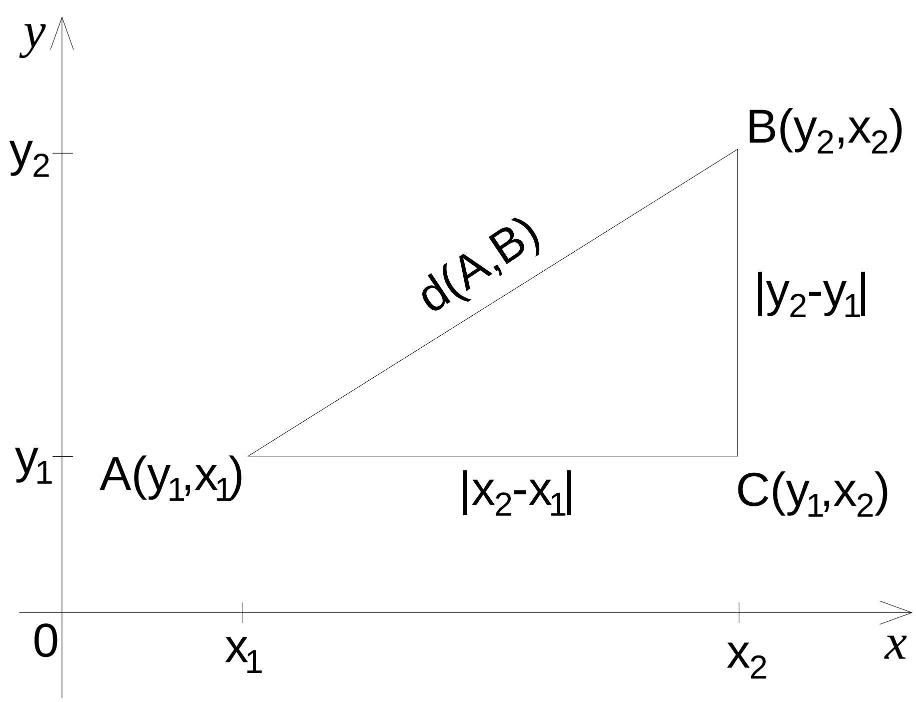
1.1.2 Fórmulas para la distancia y el punto medio

La distancia entre los puntos *a* y *b* en una recta numérica es:

$$d(a,b) = |b - a|$$

Para determinar una fórmula para la distancia entre dos puntos $A(y_1, x_1)$ y $B(y_2, x_2)$ en el plano cartesiano, primero se calcula la distancia en cada eje por separado. Según la figura 2, la distancia entre los puntos $A(y_1, x_1)$ y $C(y_1, x_2)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2-x_1|$, la distancia entre $B(y_2, x_2)$ y $C(y_1, x_2)$ sobre una recta vertical debe ser $|y_2-y_1|$.

Figura 2. **Distancia entre puntos**

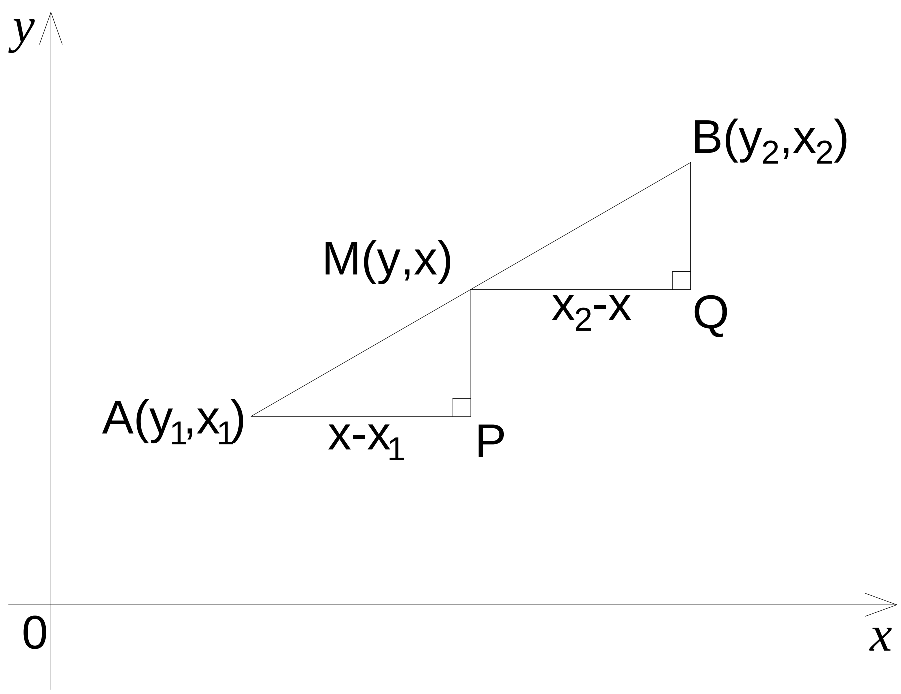


Debido a que el triángulo *ABC*, es un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d(A,B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para determinar las coordenadas de (y, x) del punto medio M del segmento de recta que une el punto $A(y_1, x_1)$ con el punto $B(y_2, x_2)$. En la figura 3 se puede ver que los triángulos *APM* y *MQB* son congruentes porque la distancia de A a M es igual a la de M a B y los ángulos correspondientes son iguales.

Figura 3. **Punto medio entre puntos**



Se infiere entonces que d(A, P) = d(M, Q) y que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Al despejar el de x, se obtiene

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De igual manera, se obtiene el valor de *y*

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Entonces, el punto medio del segmento de recta desde *A*(y_1, x_1) a *B*(y_2, x_2) es

$$(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2})$$

1.1.3 Gráficas de las ecuaciones con dos variables

Una ecuación de dos variables, tal como $y = x^3+5$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto (*y*, *x*) satisface la ecuación si la ecuación es verdadera cuando los valores para *x* y *y* se sustituyen en dicha ecuación. Por ejemplo, el punto (13,2) satisface la ecuación $y = x^3+5$ porque $13 = 2^3 + 5$, pero el punto (7,1) no porque $7 \neq 1^3 + 5$.

La gráfica de una ecuación con *y* y *x* es el conjunto de todos los puntos (*y*, *x*) del plano coordenado que satisfacen la ecuación.

Uno de los principios fundamentales de la geometría analítica es que un punto (y, x) pertenece a una gráfica de una ecuación si y solo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

EJEMPLO

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 4$

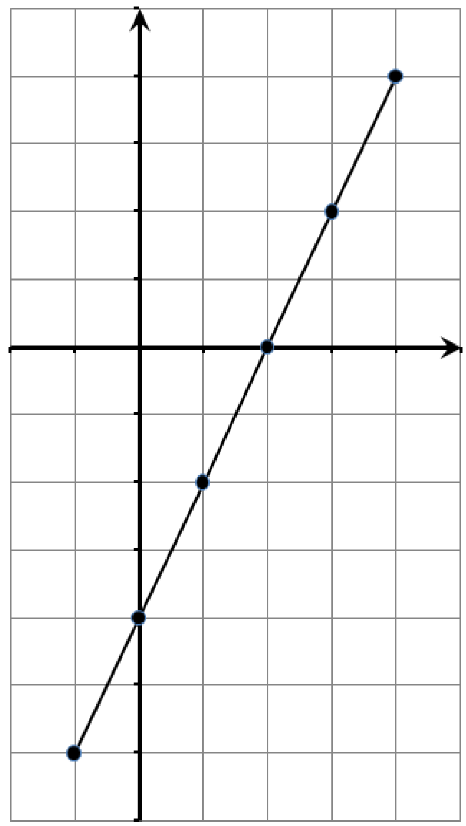
Primero se resuelve la ecuación para encontrar el valor de y

$$y = 2x - 4$$

Esto ayuda a calcular las coordenadas y en la siguiente tabla

x	$y = 2x - 4$	(y, x)
-1	-6	(-6,-1)
0	-4	(-4,0)
1	-2	(-2,1)
2	0	(0,2)
3	2	(2,3)
4	4	(4,4)

Figura 4. **Representación gráfica de una recta**



1.1.4 Intersecciones con los ejes

Las coordenadas x de los puntos donde una gráfica corta al eje x se denominan intersecciones con el eje x de la gráfica y se obtienen al hacer $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas de y de los puntos donde una gráfica corta al eje y se llaman intersección con el eje y de la gráfica y se determinan al hacer $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

1.2 Rectas

Las ecuaciones de las rectas dependen principalmente de la inclinación de éstas.

1.2.1 La pendiente de una recta

Se necesita una manera de medir la “inclinación” de una recta, o qué tan rápido asciende o desciende cuando se desplaza de izquierda hacia la derecha. Se define el desplazamiento horizontal como la distancia hacia la derecha y desplazamiento vertical como la distancia correspondiente que la recta asciende o desciende. La pendiente de una recta es la relación de desplazamiento horizontal a desplazamiento vertical:

$$pendiente = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal}$$

Si una recta está en un plano coordenado, entonces el desplazamiento horizontal es el cambio en la ordenada *x* y el desplazamiento vertical es el cambio correspondiente en la coordenada *y* entre dos puntos cualesquiera de la recta.

La pendiente *m* de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{desplazamiento\ vertical}{desplazamiento\ horizontal} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

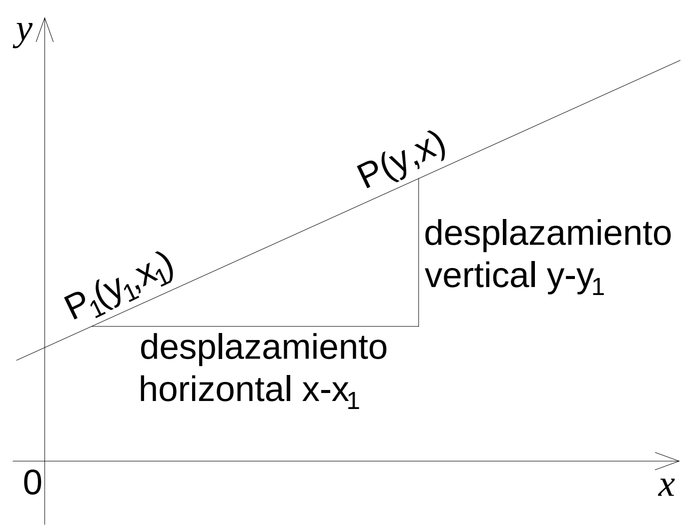
La pendiente de una recta vertical no está definida.

1.2.2 Ecuaciones de rectas

Se procede a calcular la ecuación de la recta que pasa por un punto dado $P_1(y_1,x_1)$y tiene pendiente m. Un punto $P(y, x)$ con $x \neq x_1$ queda en esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (figura 5), es decir

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Figura 5. **Pendiente de una recta**



Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; se observa que la ecuación también se cumple cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (y_1, x_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5, 10) y tiene una pendiente de 5%.

Una pendiente de 5% significa:

$$m = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Si se conocen la pendiente y las coordenadas de un punto que pasa por la recta, se puede encontrar la ecuación de la misma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = \frac{1}{20}(x - (10))$$

$$y = \frac{1}{20}x - \frac{11}{2}$$

Ejemplo:

Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5, 6) y (1, -2).

Para calcular la ecuación de una recta se deben tener la pendiente y las coordenadas de un punto perteneciente a la misma. En este caso sólo se tienen las coordenadas de dos puntos; con los mismos se procede a calcular la pendiente de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{6 - (-2)} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Ahora, con la pendiente y con las coordenadas de un punto (se puede trabajar con cualquiera de los dos puntos) se procede a calcular la ecuación de la recta.

$$y - 5 = 0.5(x - 6)$$

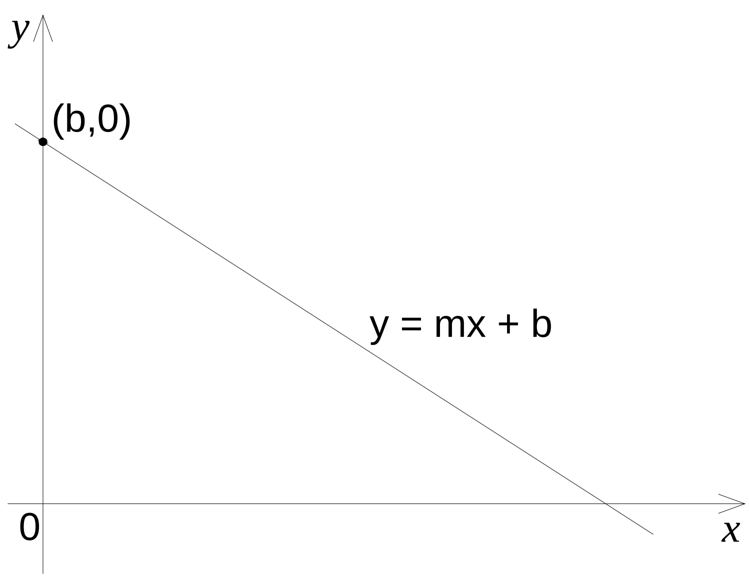
$$y = 0.5x + 2$$

Otra forma de trabajar se conoce como ecuación de la recta dada la **pendiente y la ordenada al origen**.

Una recta no vertical que tiene una pendiente *m* y una ordenada al origen *b* (figura 6). Esto significa que la recta corta al eje de las *y* en el punto (*b*,0) de modo que la ecuación para la recta se vuelve:

$$y - b = m(x - 0)$$

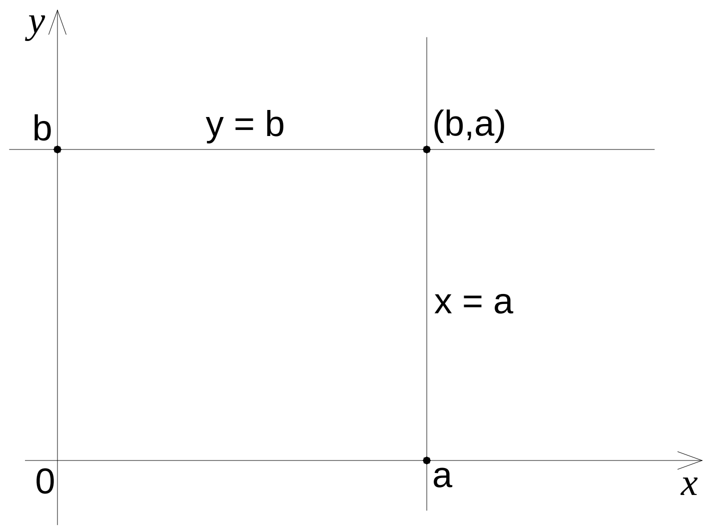
Figura 6. **Ecuación de una recta dada la pendiente y la ordenada al origen**



La ecuación anterior se simplifica a *y* = *m x* + *b*, y ésta se conoce como la ecuación de recta dada la pendiente y la ordenada al origen. Ésta ordenada al origen es de suma importancia en los métodos propuestos en este documento como se verá en los siguientes capítulos.

Si una recta es horizontal, su pendiente es *m* = 0, de modo que su ecuación es *y* = *b*, donde *b* es la ordenada al origen (figura 7). Una recta vertical no tiene una pendiente, pero podemos expresar su ecuación como *x* = *a*, donde *a* es la intersección con el eje *x* porque la coordenada *x* de cada uno de los puntos sobre la recta es *a*.

Figura 7. **Rectas horizontal y vertical**



La ecuación de la recta vertical que pasa por (*b*,a) es *x* = *a*.

La ecuación de la recta horizontal que pasa por (*b*,a) es *y* = *b*.

Ejemplo:

1. Calcule la ecuación de la recta con pendiente 2 y ordenada al origen -5.

2. Encuentre la pendiente y la ordenada en el origen de la recta:

$$3y - 2x = 1$$

Solución (1)

En éste ejemplo solo se deben sustituir los datos que se conocen en la ecuación de la recta dada la pendiente y la ordenada al origen:

$$y = mx + b$$

$$y = 2x - 5$$

Solución (2)

En éste caso se debe transformar la ecuación dada, en la forma punto-pendiente (despejando *y*):

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

1.2.3 Rectas paralelas

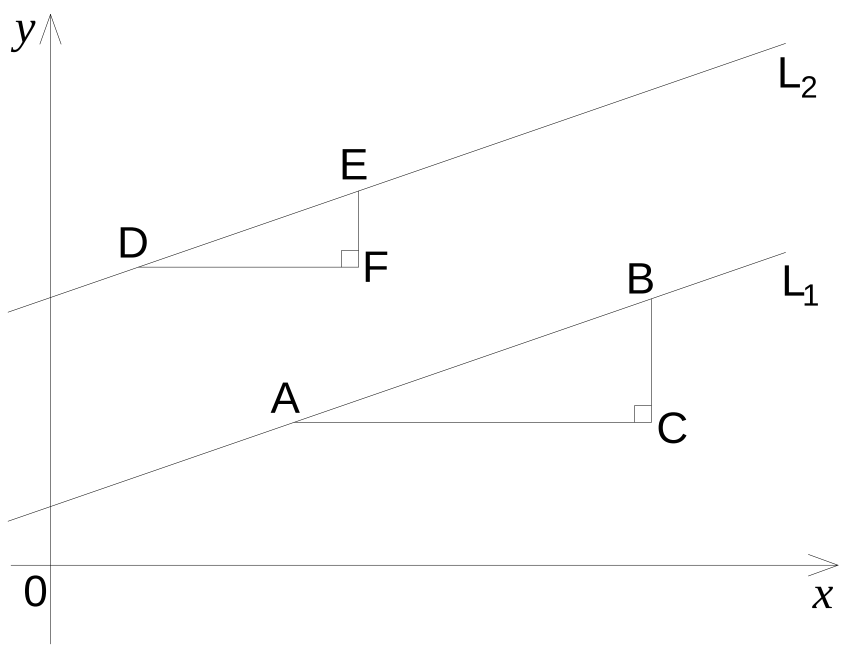
Debido a que la pendiente mide la inclinación de una recta, es razonable que las rectas paralelas tengan la misma pendiente. De hecho, se puede demostrar.

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración. Sean las rectas L_1 y L_2 de la figura 8 que tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectángulos *ABC* y *DEF* son semejantes, de modo que

$$m_1 = \frac{d(B,C)}{d(A,C)} = \frac{d(E,F)}{d(D,F)} = m_2$$

Figura 8. **Rectas paralelas**



Y al contrario, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos son semejantes, por lo que $\angle$ *BAC* = $\angle$ *EDF* y las rectas son paralelas.

Ejemplo:

Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (6,4) que es paralela a la recta $-8x+2y+6=0$

Solución:

Para encontrar la ecuación de la recta se necesita un punto y la pendiente, y solo se tiene un punto, entonces de debe encontrar la pendiente, para ello, se utiliza el hecho que las dos rectas son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente y como ya se cuenta con la ecuación de la otra recta, simplemente se debe reescribir en la forma punto-pendiente para encontrar la pendiente de la misma.

$$-8x + 2y + 6 = 0$$

$$2y = 8x - 6$$

$$y = 4x - 3$$

La pendiente de esta recta es 4, ahora con este dato y las coordenadas de un punto que pasa por la recta, se proceda a calcular la ecuación de la recta requerida.

DATOS:

$$P(6{,}4); m = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 4)$$

$$y = 4x - 4 * 4 + 6$$

$$y = 4x - 10$$

1.2.4 Rectas perpendiculares

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como con las rectas paralelas.

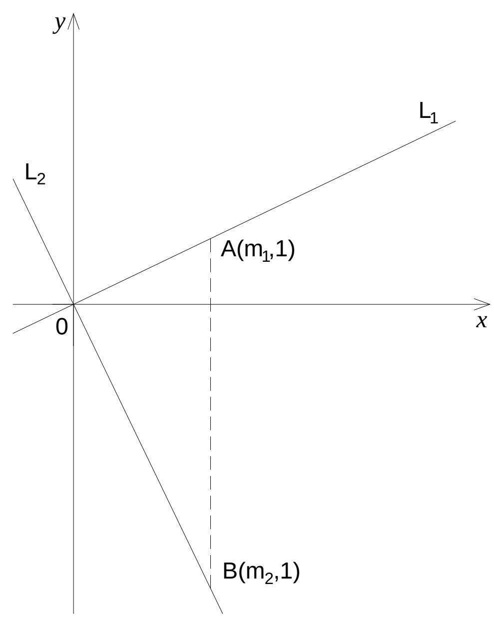
Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si, el producto m_1m_2 = -1, es decir, sus pendientes son recíprocas y de signo contrario:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Asimismo, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a la recta vertical (pendiente indefinida).

Demostración. En la figura 9 se ilustran dos rectas que se cortan en el origen. (Si las rectas se cortan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cortan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las originales.)

Figura 9. **Rectas perpendiculares**



Si las rectas L_1 y L_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y=m_2x$. Se observa que $A(m_1,1)$ queda sobre L_1 y $B(m_2,1)$ queda sobre L_2. Según el Teorema de Pitágoras $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$

De acuerdo con la fórmula de la distancia, esto se transforma en

$$(1^2 + {m_1}^2) + (1^2 + {m_2}^2) = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + {m_1}^2 + {m_2}^2 = {m_2}^2 - 2m_1m_2 + {m_1}^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

Ejemplo:

Determine la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta x+6y-5 = 0 y que pasa por (2,5)

Primero se debe encontrar la pendiente de la recta dada, luego con ese dato, se aplica la fórmula de pendientes perpendiculares para encontrar la pendiente de la recta requerida.

La recta x+6y-5 = 0 se debe escribir en la forma punto-pendiente.

$$x + 6y - 5 = 0$$

$$6y = -x + 5$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$$

Los datos de la recta requerida son:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 6; P(2,5)$$

$$y - 2 = 6(x - 5)$$

$$y = 6x - 6 * 5 + 2$$

$$y = 6x - 28$$

1.3 Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que contiene las mismas variables. Una solución de un sistema es una asignación de valores de las variables que hacen que cada una de las ecuaciones del sistema se cumpla. Resolver un sistema quiere decir encontrar todas las soluciones del sistema.

Uno de los métodos utilizados para resolver los sistemas es el denominado *de sustitución*. En éste método se empieza con una ecuación del sistema y despejamos una variable, que queda en términos de la otra variable. El método se describe en la siguiente tabla

Tabla I. **Método de sustitución**

1.	**Despejar una variable**. Se escoge una ecuación y se despeja una de las variables.
2.	**Sustituir**. Se sustituye la expresión de se determinó en el paso 1 en la otra ecuación para obtener una ecuación con una variable, luego se resuelve para obtener el valor de dicha variable.
3.	**Sustituir en la ecuación de la variable despejada**. Se sustituye el valor encontrado en el paso 2 en la expresión obtenida en el paso 1 para determinar la variable faltante.

EJEMPLO:

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 20$$

$$2x - y = 19$$

Se procede a despejar *y* de la primera ecuación para luego sustituirla en la segunda ecuación para despejar *x*.

$$y = 20 - x$$

$$2x - (20 - x) = 19$$

$$2x - 20 + x = 19$$

$$3x = 39$$

$$x = \frac{39}{3} = 13$$

Este valor de *x* se sustituye en una de las dos ecuación, para despejar *y*.

$$2(13) - y = 19$$

$$y = 2 * 13 - 19 = 7$$

La solución es *y* = 7 y *x* = 13.

Cuando se necesita encontrar el punto de intersección de dos rectas, conviene utilizar el método de igualación, debido a la forma en que están expresadas las ecuaciones de las rectas (pendiente y ordenada al origen).

El método de igualación consiste en una pequeña variante del método mencionado anteriormente. Para resolver un sistema de ecuaciones por este método se debe despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado.

Tabla II. **Método de igualación**

1.	**Despejar una variable**. Se despeja una de las variables en ambas ecuaciones.
2.	**Igualar**. Se igualan las expresiones obtenidas el paso 1, a fin de obtener una ecuación con una variable, luego se resuelve.
3.	**Encontrar el valor de la variable despejada**. Se sustituye el valor que se encontró en el paso 2 en cualquiera de las expresiones obtenidas en el paso 1 para determinar la variable faltante.

EJEMPLO:

Encuentre las coordenadas (y, x) del punto de intersección entre las rectas $4x + 2y = 20$ & $3x - 6y = -30$.

Se procede a despejar la y en la primera ecuación.

$$4x + 2y = 20$$

$$2y = 20 - 4x$$

$$y = 10 - 2x$$

Se procede a despejar la y en la segunda ecuación.

$$3x - 6y = -30$$

$$-6y = -30 - 3x$$

$$y = 5 + 0.5x$$

Se igualan las expresiones de *y*

$$y = y$$

$$10 - 2x = 5 + 0.5x$$

$$-2x - 0.5x = 5 - 10$$

$$-2.5x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-2.5} = 2$$

Ahora se sustituye este valor de *x* en una de las ecuaciones.

$$y = 10 - 2x$$

$$y = 10 - 2(2) = 10 - 4$$

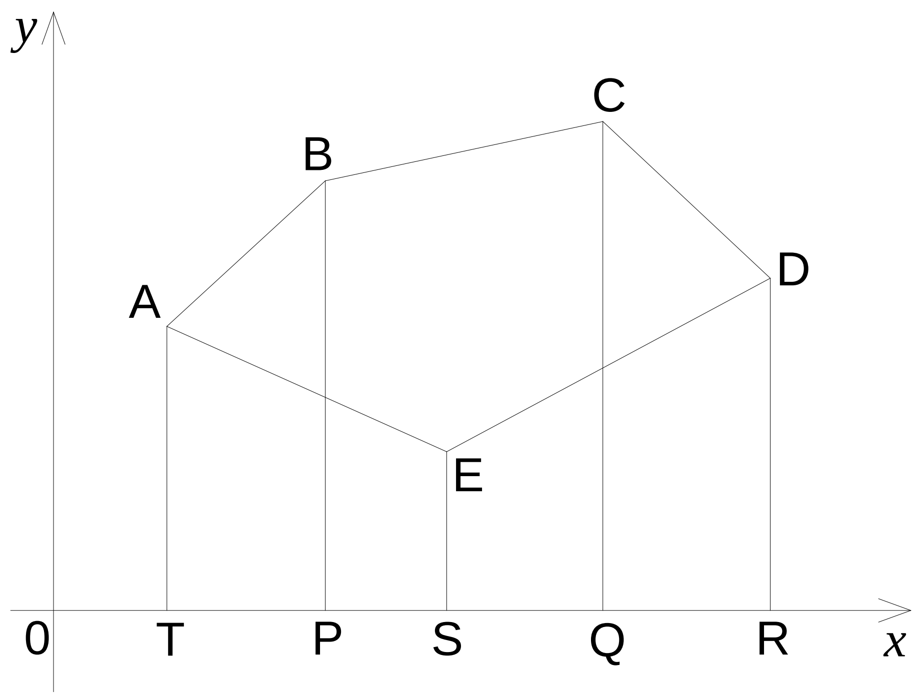
$$y = 6$$

1.4 Área de un polígono

En el caso particular de polígonos dibujados por **coordenadas totales**, es conveniente calcular el área a partir de las mismas coordenadas.

Al considerar el polígono *ABCDEA* (figura 10), cuyas estaciones tienen coordenadas totales: (Y_A, X_A), (Y_B, X_B), etc.

Figura 10. **Área de un polígono**



El área de un trapecio es:

$$A_{trapecio} = \frac{(B+b)}{2}H$$

El área del polígono, se calcula por medio de trapecios:

$$\acute{A}rea\ ABCDEA = \acute{a}rea(ABPT + BCQP + CDRQ - DESR - EATS)$$

$$= \frac{Y_A + Y_B}{2}(X_B - X_A) + \frac{Y_B + Y_C}{2}(X_C - X_B) + \frac{Y_C + Y_D}{2}(X_D - X_C) - \frac{Y_D + Y_E}{2}(X_D - X_E) - \frac{Y_E + Y_A}{2}(X_E - X_A)$$

$$= \frac{1}{2}[(Y_A X_B + Y_B X_C + Y_C X_D + Y_D X_E + Y_E X_A) - (Y_B X_A + Y_C X_B + Y_D X_C + Y_E X_D + Y_A X_E)]$$

$$= \frac{1}{2}[Y_A(X_B - X_E) + Y_B(X_C - X_A) + Y_C(X_D - X_B) + Y_D(X_E - X_C) + Y_E(X_A - X_E)]$$

En general

$$Área = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i+1} - X_{i-1})$$

La ecuación anterior puede reducirse a una forma más fácil de recordar: se disponen las **coordenadas totales** Y y X de cada estación en dos columnas, se repiten al final las coordenadas de la estación de partida. Se establecen los productos indicados por las diagonales con flecha, se consideran positivos los de la línea continua y negativos los de la línea punteada. Luego se determina la suma algebraica de todos los productos y se divide entre dos para obtener el área.

Y	X
Y_A	X_A
Y_B	X_B
Y_C	X_C
Y_D	X_D
Y_E	X_E
Y_A	X_A

$$A = \frac{\sum Y * X - \sum X * Y}{2}$$

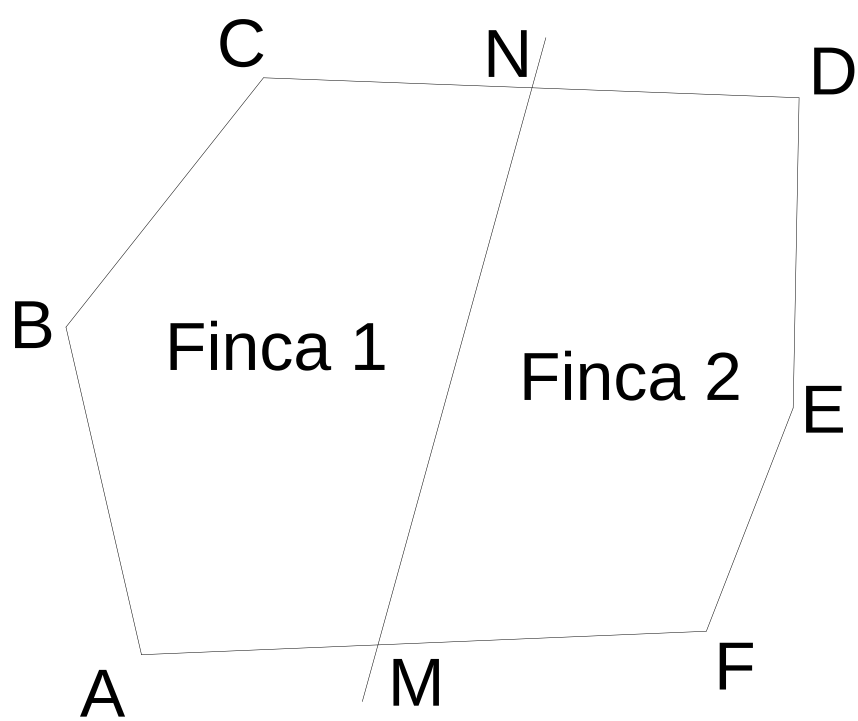
1.5 Procedimiento general del método

El método consiste en plantear ecuaciones que involucren las coordenadas de interés y luego resolver el sistema de ecuaciones

Las coordenadas de interés son las estaciones que forman el nuevo lindero, el cual, divide el polígono o modifica un lindero existente según sea requerido.

Si se requiere dividir una finca (figura 11) con un lindero de dirección dada (por medio de un azimut o un rumbo), se puede calcular la pendiente de la recta que define dicho lindero, por tanto la incógnita de la ecuación de la recta es *b* ($y = mx + \mathbf{b}$). Para encontrar las coordenadas de los puntos donde el lindero corta o intercepta los linderos que forman el perímetro del polígono, simplemente se igualan las ecuaciones que definen dichos linderos, es decir, se igualan las ecuaciones de las rectas CD con MN y AF con MN, pero dichas coordenadas tienen como incógnita b; la otra ecuación necesaria para resolver el sistema se obtiene al calcular el área con las coordenadas totales de una finca (por ejemplo la Finca uno, y entonces la Finca dos se utiliza al final para realizar la prueba).

Figura 11. **Procedimiento general**



El área es un dato que se conoce o es fácil de calcular: por ejemplo, si se desea dividir la finca de la figura 11 en dos partes iguales, se debe calcular primero el área total de la finca y luego dividir dicho dato entre dos. Luego de tener una ecuación para el área queda una ecuación de segundo grado, de la cual se obtienen dos soluciones, para saber cuál de las dos es la correcta, se considera que b es la intersección de una recta con el eje y. Finalmente se realiza una comprobación al calcular el área de la otra finca con las nuevas coordenadas totales.

2. AGRODESIA

Este capítulo está dedicado a los métodos necesarios para separar o dividir áreas de polígonos. Éstos son de mucha utilidad en los trabajos que se realizan en lotificaciones, divisiones de parcelas o desmembraciones.

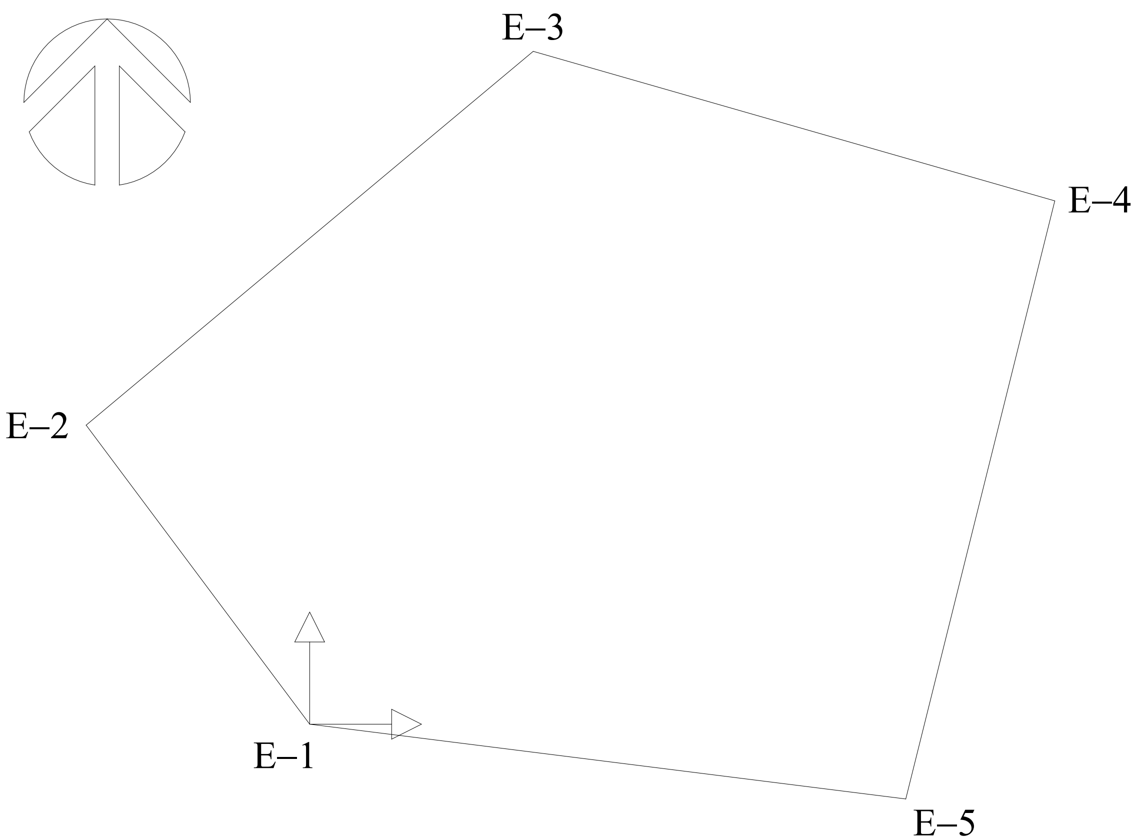
Los ejemplos a continuación, representan polígonos con sus coordenadas en cada vértice, las cuales se obtuvieron con cualquiera de los métodos existentes para ello.

2.1 Separar una fracción de área determinada de un polígono partiendo el nuevo lindero desde un punto del perímetro del mismo

EJEMPLO 1

Se desea dividir el polígono de la figura 12 en dos partes, de tal manera que la parte del oeste tenga el 55% del área total, iniciando el nuevo lindero en la estación 1.

Figura 12. **Finca matriz**



EST.	P.O.	Y_T	X_T
1	2	40	-30
2	3	90	30
3	4	70	100
4	5	-10	80
5	1	0	0

Se procede a calcular el área por el método matricial:

Y	X
40	-30
90	30
70	100
-10	80
0	0
40	-30

$$A = \frac{15800 - (-1600)}{2} = 8700\ m^2$$

Área de cada desmembración:

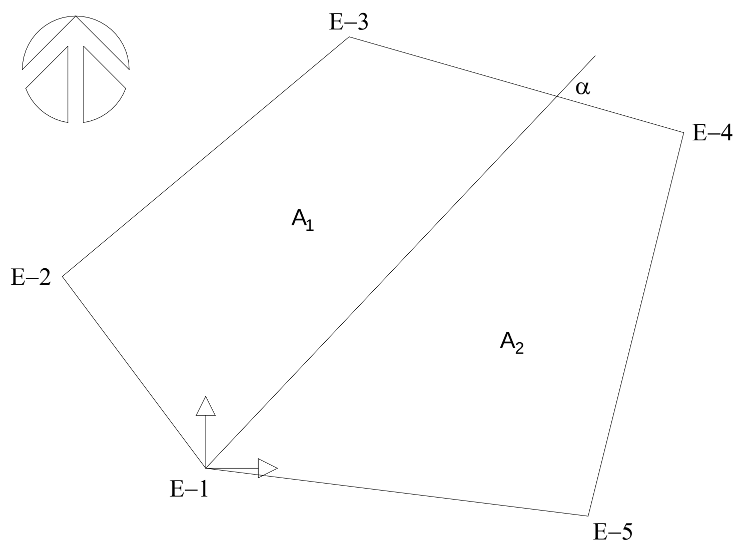
$$A_1 = 55\%\ A_T = 0.55*(8700) = 4785\ m^2$$

$$A_2 = (100\% - 55\%)\ A_T = 0.45*(8700) = 3915\ m^2$$

$$\sum = 8700\ m^2$$

Debido a que el punto α está sobre la recta definida por las estaciones 3 y 4, se procede a calcular la ecuación de dicha recta

Figura 13. **Lindero de división desde una estación**



	Y	X
E-3	90	30
E-4	70	100

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 70}{30 - 100} = -\frac{2}{7}$$

Con el valor de la pendiente y las coordenadas de una estación (en este caso se utiliza la E-3) se puede encontrar la ecuación de la recta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 90 = -\frac{2}{7}(x - 30)$$

$$y = -\frac{2}{7}x + \frac{690}{7}$$

PRUEBA:

Para saber si la ecuación que se encontró es la correcta, basta con evaluar en la misma, las coordenadas de la otra estación (E-4):

$$y = -\frac{2}{7}(100) + \frac{690}{7}$$

$$y = 70$$

CORRECTO

Las coordenadas de α, debido a que están sobre la recta definida por las estaciones 3 y 4 son:

Y	X
$-\frac{2}{7}x + \frac{690}{7}$	x

Para encontrar el valor de “x”, la ecuación que se debe plantear es el área de una desmembración y se iguala al área que se conoce, luego se despeja la incógnita.

Datos de la Finca 1 (con $A_1 = 4785\ m^2$)

EST.	P.O.	Y	X
α	1	0	0
1	2	40	-30
2	3	90	30
3	α	$-\frac{2}{7}x + \frac{690}{7}$	x

Se procede a calcular el área, en función de "x"

Y	X
0	0
40	-30
90	30
$-\frac{2}{7}x + \frac{690}{7}$	x
0	0

$$A = \frac{(1200 + 90x) - (\frac{1800}{7} - \frac{60}{7}x)}{2}$$

$$2A = \frac{6600}{7} + \frac{690}{7}x$$

Se sustituye el área que se conoce en la ecuación anterior y se despeja el valor de x.

$$2(4785) = \frac{6600}{7} + \frac{690}{7}x$$

$$x = \left[2(4785) - \frac{6600}{7}\right] * \frac{7}{690}$$

$$x = \frac{2013}{23} \cong 87.52173913$$

Para encontrar el valor de la ordenada, simplemente se sustituye el valor de la abscisa, en la ecuación de la recta:

$$y = -\frac{2}{7}x + \frac{690}{7}$$

$$y = -\frac{2}{7}\left(\frac{2013}{23}\right) + \frac{690}{7} = \frac{1692}{23} \cong 73.56521739$$

Las coordenadas de la estación α son:

Y	X
73.56521739	87.52173913

PRUEBA:

Para conocer si los valores encontrados son correctos, se procede a calcular el área de la otra partición cuyas coordenadas son:

EST.	P.O.	Y	X
5	1	0	0
1	α	73.56521739	87.52173913
α	4	70	100
4	5	-10	80

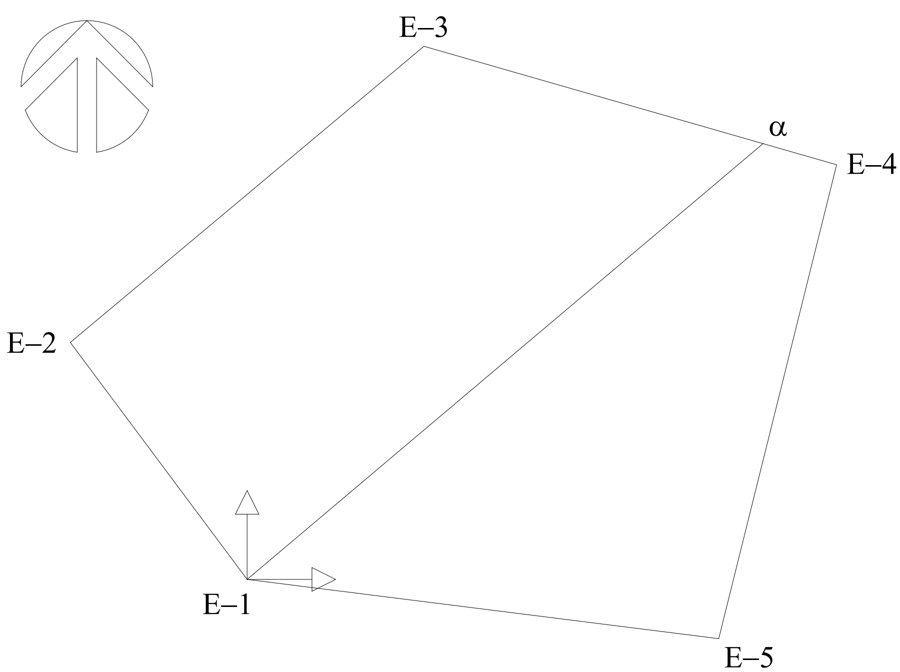
Se procede a calcular el área:

Y	X
0	0
73.56521739	87.52173913
70	100
-10	80
0	0

$$A = \frac{12956.52174 - (5126.521739)}{2} = 3915\ m^2$$

Y éste es el valor que se esperaba.

Figura 14. **División final**

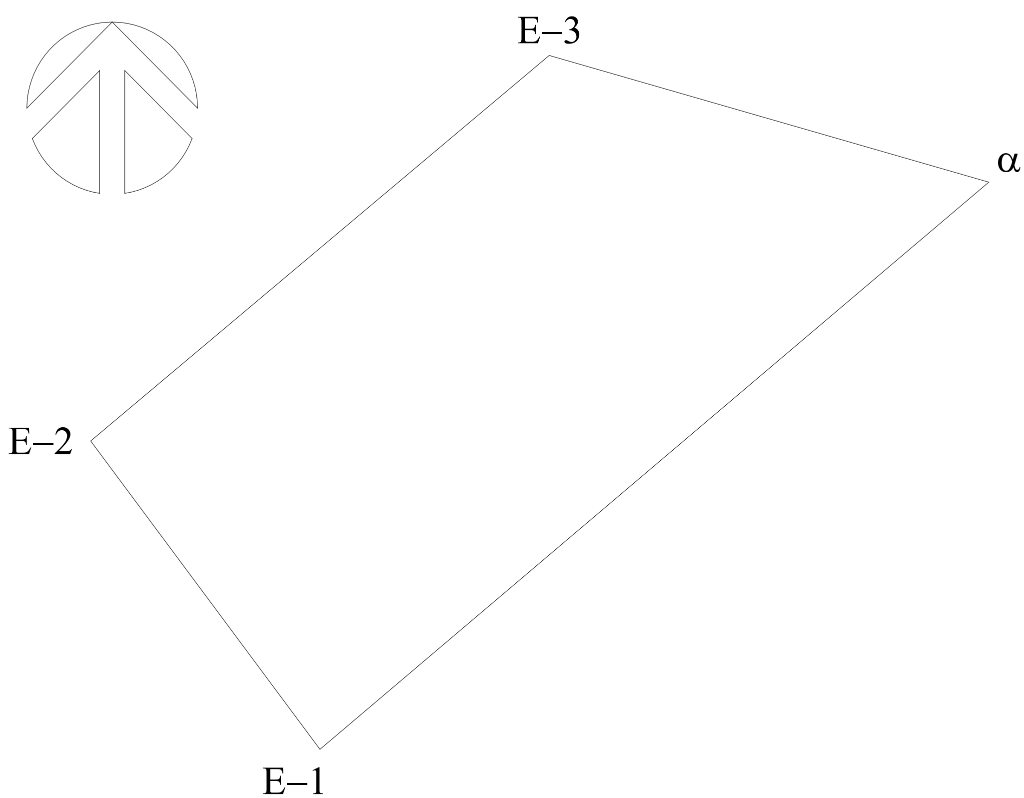


Cada partición queda de la siguiente manera:

Partición núm. 1

EST	P.O.	Y	X
α	1	0	0
1	2	40	-30
2	3	90	30
3	α	73.56521739	87.52173913

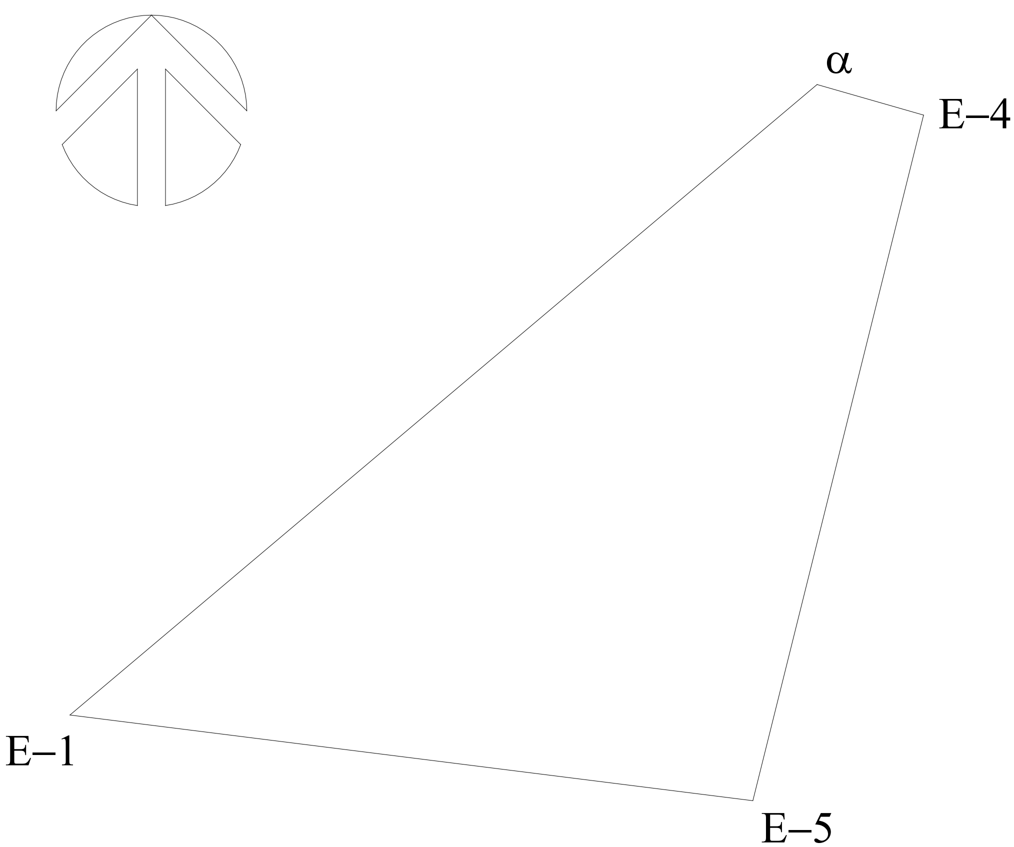
Figura 15. **Partición núm. 1**



Partición núm. 2

EST	P.O.	Y	X
5	1	0	0
1	α	73.56521739	87.52173913
α	4	70	100
4	5	-10	80

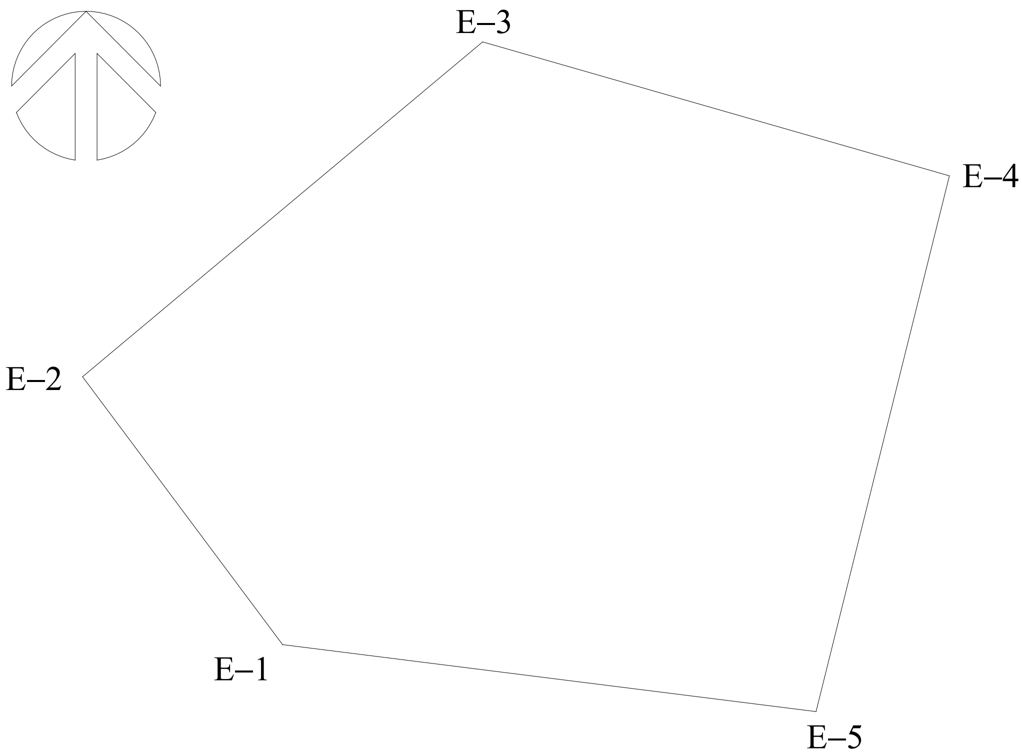
Figura 16. **Partición núm. 2**



EJEMPLO 2

Se requiere dividir el polígono de la figura 17 en dos partes iguales, iniciando el nuevo lindero en el punto medio de la recta definida por las estaciones 4 y 5.

Figura 17. **Finca matriz**



EST	P.O.	Y	X
5	1	0	0
1	2	40	-30
2	3	90	30
3	4	70	100
4	5	-10	80

El primer paso es calcular es área total

Y	X
0	0
40	-30
90	30
70	100
-10	80
0	0

$$A = \frac{15800 - (-1600)}{2} = 8700\ m^2$$

$$\frac{A_T}{2} = 4350\ m^2$$

Se procede a calcular el punto medio entre las estaciones 4 y 5 con la siguiente fórmula:

$$Punto\ Medio(\frac{Y_1 + Y_2}{2}, \frac{X_1 + X_2}{2})$$

Las coordenadas de dichas estaciones son:

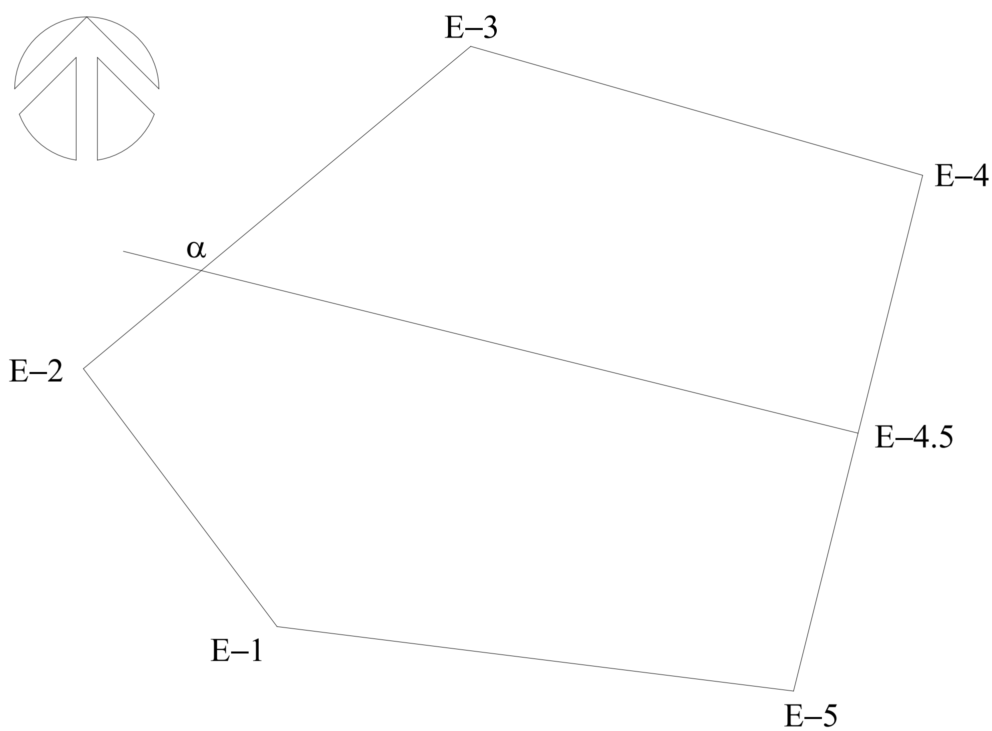
	Y	X
E-4	70	100
E-5	-10	80

Entonces el punto medio es (E-4.5)

$$E - 4.5\left(\frac{70 - 10}{2}, \frac{100 + 80}{2}\right)$$

$$E - 4.5(30{,}90)$$

Figura 18. **Lindero de división desde el punto medio entre dos estaciones**



En la figura 18 se observa que el punto α está sobre la recta definida por las estaciones 2 y 3

Se procede a calcular la ecuación de la recta definida por las estaciones 2 y 3.

	Y	X
E-2	40	-30
E-3	90	30

$$m = \frac{40 - 90}{-30 - 30} = \frac{5}{6}$$

$$y - 40 = \frac{5}{6}(x + 30)$$

$$y = \frac{5}{6}x + 65$$

Debido a que la estación α se encuentra sobre la recta definida por las estaciones 2 y 3, las coordenadas de dicha estación son:

Y	X
$\frac{5}{6}x + 65$	x

Se procede a calcular el área del polígono formado por las estaciones 1, 2, 4.5 y 5.

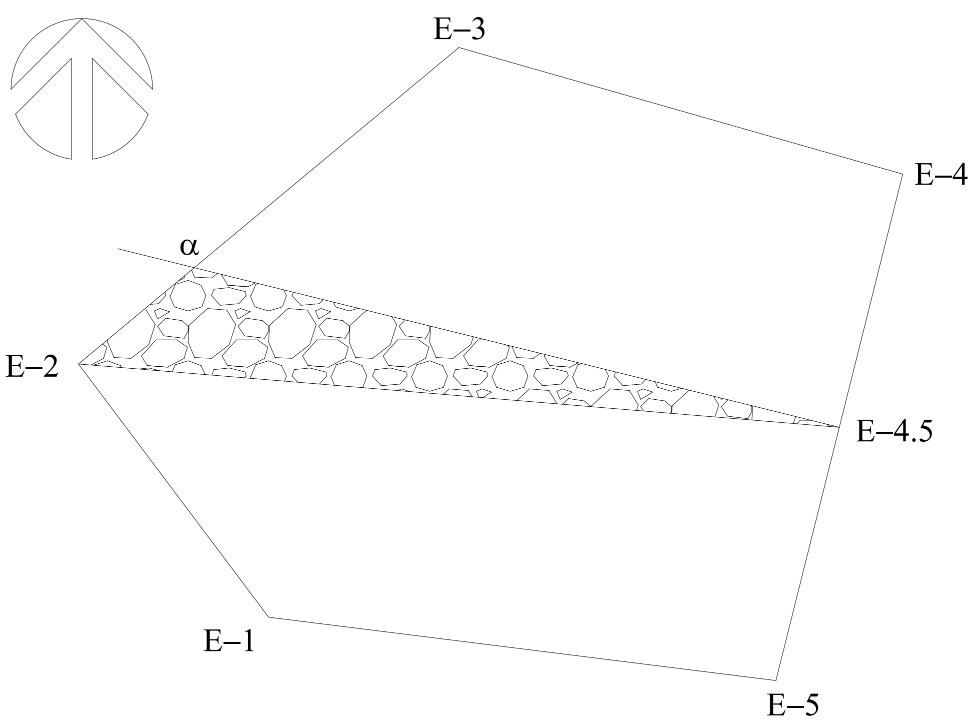
EST	P.O.	Y	X
5	1	0	0
1	2	40	-30
2	4.5	30	90
4.5	5	-10	80

Y	X
0	0
40	-30
30	90
-10	80
0	0

$$A = \frac{6000 - (-1800)}{2} = 3900\ m^2$$

Éste dato es menor que la mitad del área total, lo que confirma la suposición de la posición de la estación α. Ahora se calcula el diferencial de área (área sombreada de la figura 19) para llegar al área deseada (50% A_T = 4350 m^2)

Figura 19. **Diferencial de área**



$$\Delta A = 4350 - 3900 = 450\ m^2$$

El diferencial de área debe ser cubierto por el triangulo formado por las estaciones 2, α y 4.5; se procede a calcular dicha área pero en función de las coordenadas de la estación α

EST	P.O.	Y	X
α	4.5	30	90
4.5	2	40	-30
2	α	$\frac{5}{6}x + 65$	x

Y	X
30	90
40	-30
$\frac{5}{6}x + 65$	x
30	90

$$A = \frac{4950 + 115x - (1650 + 5x)}{2}$$

Al simplificar se obtiene la siguiente ecuación

$$2A = 3300 + 110x$$

Donde A es el diferencial de área que se calculó anteriormente, al sustituir dicho dato, se despeja x

$$A = 450\ m^2$$

$$2(450) = 3300 + 110x$$

$$x = \frac{2(450) - 3300}{110} = -\frac{240}{11} \cong -21.81818182$$

Éste valor de x se sustituye en la ecuación de la ordenada de la estación α

$$y = \frac{5}{6}\left(-\frac{240}{11}\right) + 65 = \frac{515}{11} \cong 46.81818182$$

Las coordenadas de α son:

Y	X
46.81818182	-21.81818182

PRUEBA:

Para saber si los datos calculados son correctos, se calcula el área de la otra partición, es decir, el polígono formado por las estaciones α, 3, 4 y 4.5

EST	P.O.	Y	X
4	4.5	30	90
4.5	α	515/11	-240/11
α	3	90	30
3	4	70	100

Y	X
30	90
515/11	-240/11
90	30
70	100
30	90

$$A = \frac{16050 - (7350)}{2} = 4350\ m^2$$

<u>**CORRECTO**</u>

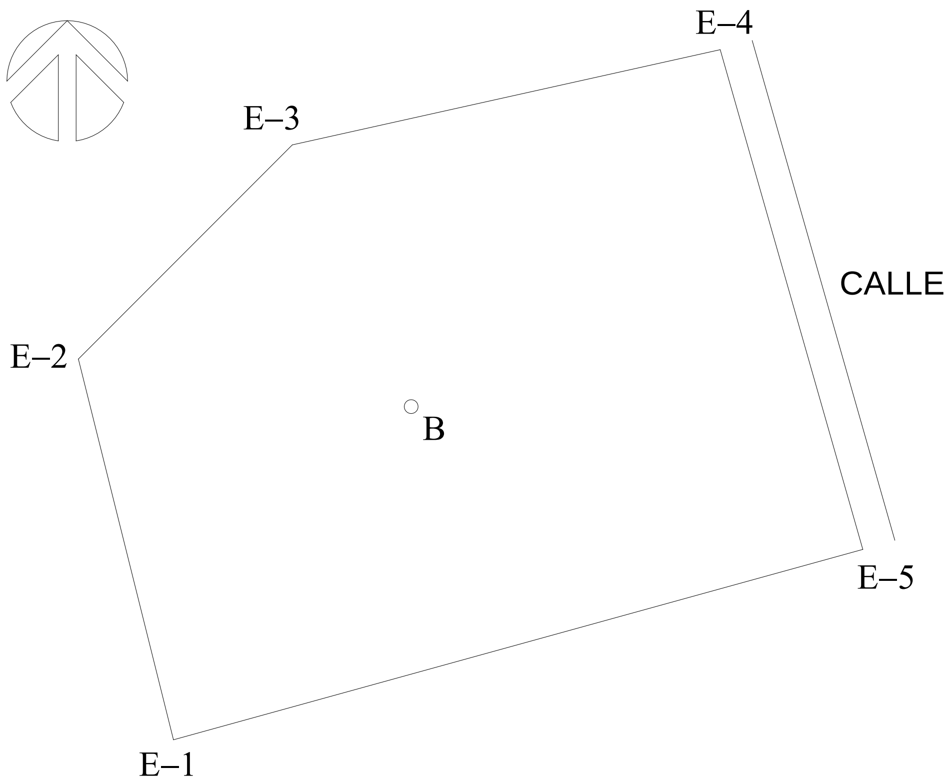
2.2 Separar una fracción de área determinada desde un punto interior al polígono

Esta técnica se aplica cuando hay un punto de interés para los propietarios que van a compartir el nuevo lindero. Dicho punto puede ser: un pozo, nacimiento de agua, un árbol, entre otros.

EJEMPLO 3

Se requiere dividir el polígono de la figura 20 en dos partes iguales, tomando en consideración que el nuevo lindero debe pasar por el punto B con coordenadas (y = 30, x = -40) y por el punto medio de la recta definida por las estaciones 4 y 5 que da a la calle.

Figura 20. **Finca matriz**



EST	P.O.	Y	X
5	1	-110	-140
1	2	50	-180
2	3	140	-90
3	4	180	90
4	5	-30	150

Lo primero que se debe hacer es calcular el área del polígono.

Y	X
-110	-140
50	-180
140	-90
180	90
-30	150
-110	-140

$$A = \frac{59100 - (-67600)}{2} = \frac{126700}{2} = 63350\ m^2$$

Como se requieren dos partes iguales, cada partición debe tener:

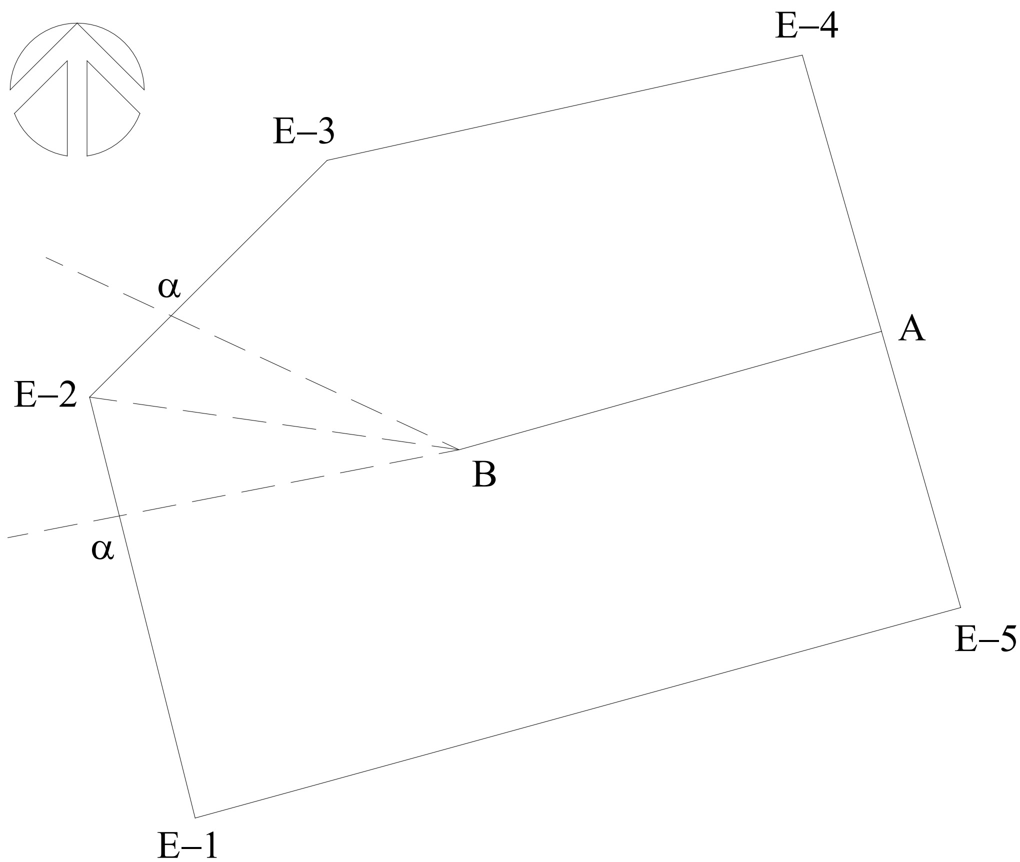
$$\frac{A_T}{2} = 31675\ m^2$$

El punto medio entre las estaciones 4 y 5 es:

$$A(75{,}120)$$

Para conocer la posición del punto α, se calcula el área del polígono formado por las estaciones 2, 3, 4, A y B.

Figura 21. **Lindero de división desde un punto interior del polígono**



$$Si\ A_{234AB} > \frac{A_T}{2} \Rightarrow \alpha\ está\ sobre\ la\ recta\ 2-3$$

$$Si\ A_{234AB} < \frac{A_T}{2} \Rightarrow \alpha\ está\ sobre\ la\ recta\ 1-2$$

EST	P.O.	Y	X
B	2	50	-180
2	3	140	-90
3	4	180	90
4	A	75	120
A	B	30	-40

Y	X
50	-180
140	-90
180	90
75	120
30	-40
50	-180

$$A = \frac{21300 - (-33050)}{2} = \frac{54350}{2} = 27175\ m^2$$

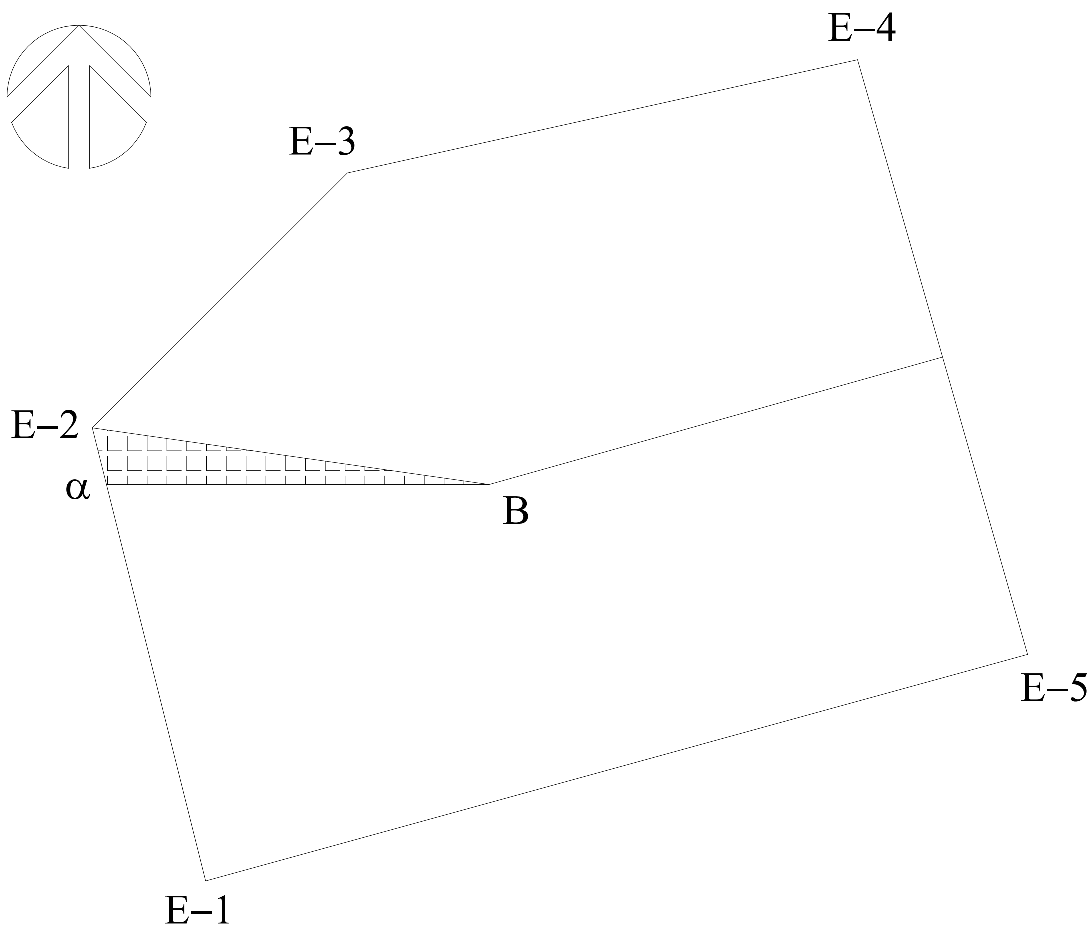
El área que se obtuvo es menor que la que se requiere (31675 m^2), por tanto, el punto α está sobre la recta 1-2.

Se procede a calcular el diferencial de área:

$$\Delta A = 31675 - 27175 = 4500\ m^2$$

Este diferencial de área debe ser cubierto por el triangulo formado por las estaciones 2, B y α.

Figura 22. **Diferencial de área**



Ahora se calculan las coordenadas de la estación α, que se encuentra sobre la recta definida por las estaciones 1 y 2.

Se calcula primero la ecuación de dicha recta:

	Y	X
E-1	-110	-140
E-2	50	-180

$$m = \frac{-110 - (50)}{-140 - (-180)} = -4$$

$$y + 110 = -4(x + 140)$$

$$y = -4x - 670$$

Entonces, las coordenadas de la estación α son:

Y	X
$-4x - 670$	x

Se procede a calcular el área del triangulo formado por las estaciones 2, B y α en función de las coordenadas de la estación α.

EST	P.O.	Y	X
α	2	50	-180
2	B	30	-40
B	α	$-4x - 670$	x

Y	X
50	-180
30	-40
$-4x - 670$	x
50	-180

$$A = \frac{-2000 + 30x + 720x + 670 * 180 - [-30 * 180 + 40(4x) + 40 * 670 + 50x]}{2}$$

Al simplificar se obtiene:

$$A = 270x + 48600$$

La magnitud de A es 4500 m^2, entonces se sustituye este dato en la ecuación anterior y se despeja x.

$$4500 = 270x + 48600$$

$$x = \frac{4500 - 48600}{270} = -\frac{490}{3} \cong -163.333333333$$

El valor de x se sustituye en la ecuación de la ordenada de la estación α.

$$y = -4\left(-\frac{490}{3}\right) - 670 = -\frac{50}{3} \cong -16.666666667$$

Las coordenadas de la estación α son:

Y	X
-16.666666667	-163.333333333

PRUEBA:

Se calcula el área de la otra partición formada por las estaciones 1, α, B, A y 5.

EST	P.O.	Y	X
5	1	-110	-140
1	α	-50/3	-490/3
α	B	30	-40
B	A	75	120
A	5	-30	150

Y	X
-110	-140
-50/3	-490/3
30	-40
75	120
-30	150
-110	-140

$$A = \frac{37683.33333 - (-25666.66667)}{2} = \frac{63350}{2} = 31675\ m^2$$

CORRECTO

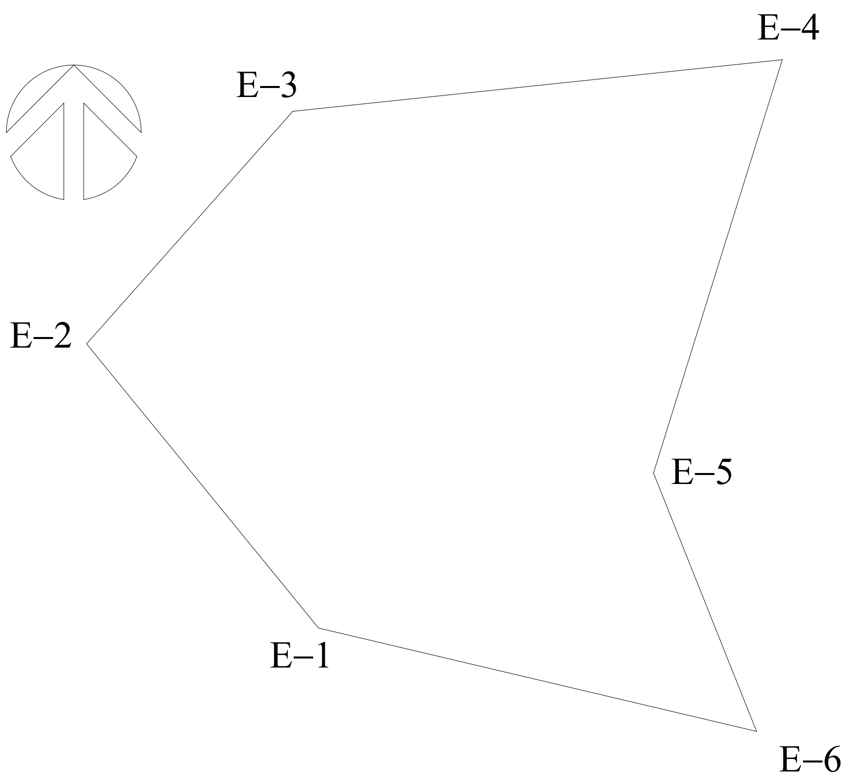
2.3 Separar una fracción de área determinada por medio de un lindero de dirección dada

Esta técnica se utiliza cuando el nuevo lindero que va a servir de división tiene que conservar la dirección de un muro existente, de una casa, o por la forma del polígono.

EJEMPLO 4

Se requiere separar el polígono de la figura 23 en dos partes iguales con la condición que el lindero de división tenga un azimut de 65°00'00".

Figura 23. **Finca matriz**



EST	P.O.	Y	X
6	1	-40	-35
1	2	15	-80
2	3	60	-40
3	4	70	55
4	5	-10	30
5	6	-60	50

El primer paso consiste en encontrar el área del polígono.

Y	X
-40	-35
15	-80
60	-40
70	55
-10	30
-60	50
-40	-35

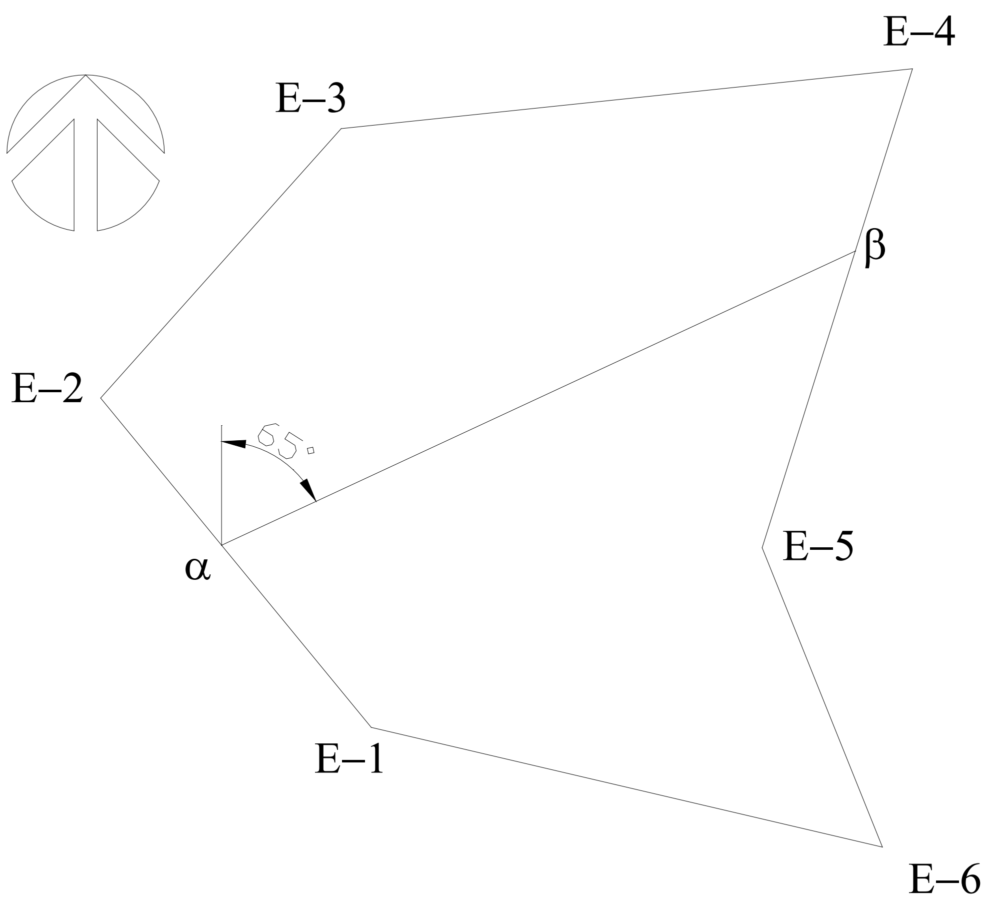
$$A = \frac{9600 - (-12475)}{2} = 11037.5\ m^2$$

Cada partición tendrá un área de:

$$\frac{A_T}{2} = 5518.75\ m^2$$

El nuevo lindero está formado por las estaciones α y β.

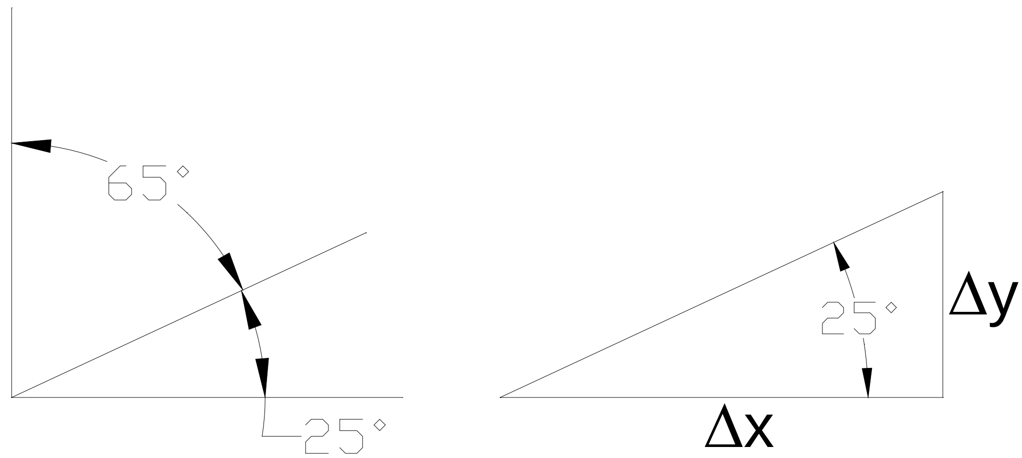
Figura 24. **Lindero de división de dirección dada**



Se procede a calcular la ecuación de la recta definida por las estaciones α y β.

Lo único que se sabe acerca de la recta es que tiene un azimut de 65°, entonces la pendiente de dicha recta es:

Figura 25. **Cambio de azimut a pendiente**



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$m = tan25° = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La ecuación de la recta es:

$$y = mx +$$

$$y = (tan25°)x + b$$

En este caso la incógnita es b.

El siguiente paso es calcular las ecuaciones de las rectas que interceptan a la recta α-β, es decir, las rectas 1-2 y 4-5.

Recta 1-2

	Y	X
E-1	-40	-35
E-2	15	-80

$$m = \frac{-40 - 15}{-35 + 80} = -\frac{11}{9}$$

$$y + 40 = -\frac{11}{9}(x + 35)$$

$$y = -\frac{11}{9}x - \frac{745}{9}$$

Recta 4-5

	Y	X
E-4	70	55
E-5	-10	30

$$m = \frac{70 + 10}{55 - 30} = \frac{16}{5}$$

$$y - 70 = \frac{16}{5}(x - 55)$$

$$y = \frac{16}{5}x - 106$$

El siguiente paso consiste en encontrar las coordenadas de α y β.

Coordenadas de α:

El punto α está sobre las rectas 1-2 y α-β, entonces para encontrar las coordenadas de α se deben igualar las ecuaciones de ambas rectas.

$$y = -\frac{11}{9}x - \frac{745}{9}$$

$$y = (tan25°)x + b$$

$$-\frac{11}{9}x - \frac{745}{9} = (tan25°)x + b$$

$$x = \frac{b + \frac{745}{9}}{-\frac{11}{9} - tan25°} \cong -0.592231154b - 49.0235789$$

El siguiente trabajo algebraico es bastante pesado, por tanto, para simplificar los cálculos se deben definir varias funciones y trabajarlas con un paquete adecuado o una calculadora que maneje este tipo de operaciones.

$$Definir\ i(b) = -0.592231154b - 49.0235789$$

Para encontrar el valor de la ordenada, es necesario evaluar el valor de x (definido como i(b)) en cualquiera de las dos ecuaciones de las rectas.

Se escoge la ecuación de la recta 1-2.

$$y = -\frac{11}{9}x — \frac{745}{9}$$

$$y = -\frac{11}{9}\left(i(b)\right) — \frac{745}{9} \cong 0.723838077b - 22.8600703$$

$$Definir\ j(b) = 0.723838077b - 22.8600703$$

Las coordenadas del punto α son:

$$\alpha\left(j(b), i(b)\right)$$

Coordenadas de β:

El punto β está sobre las rectas 4-5 y α-β, entonces para encontrar las coordenadas de β se deben igualar las ecuaciones de ambas rectas.

$$y = \frac{16}{5}x - 106$$

$$y = (tan25°)x + b$$

$$\frac{16}{5}x - 106 = (tan25°)x + b$$

$$x = \frac{b + 106}{\frac{16}{5} - tan25°} \cong 0.365805612b + 38.7753949$$

$$Definir\ k(b) = 0.365805612b + 38.7753949$$

Para encontrar el valor de la ordenada, es necesario evaluar el valor de x (definido como k(b)) en cualquiera de las dos ecuaciones de las rectas.

Se escoge la ecuación de la recta 4-5.

$$y = \frac{16}{5}x - 106$$

$$y = \frac{16}{5}\left(k(b)\right) - 106 \cong 1.17057796b + 18.0812636$$

$$Definir\ l(b) = 1.17057796b + 18.0812636$$

Las coordenadas del punto β son:

$$\beta\left(l(b), k(b)\right)$$

Con las coordenadas de α y β se puede calcular el área de cualquiera de las dos particiones.

Se procede a calcular el área (en función de "b") de la partición más al norte, es decir, la formada por las estaciones 4, β, α, 2 y 3.

EST	P.O.	Y	X
3	4	70	55
4	β	l(b)	k(b)
β	α	j(b)	i(b)
α	2	15	-80
2	3	60	-40

Y	X
70	55
l(b)	k(b)
j(b)	i(b)
15	-80
60	-40
70	55

$$A = \frac{70k + l * i - 80j - 15 * 40 + 55 * 60 - [55l + j * k + 15i - 80 * 60 - 40 * 70]}{2}$$

Al realizar las operaciones y simplificar se obtiene:

$$A = -0.479018383b^2 - 87.7989737b + 7291.98372$$

El área de ambas particiones es de 5518.75 m^2, ahora se sustituye esta magnitud de “A” en la ecuación anterior, y se resuelve la ecuación de segundo orden.

$$5518.75 = -0.479018383b^2 - 87.7989737b + 7291.98372$$

Al resolver la ecuación se obtienen dos valores:

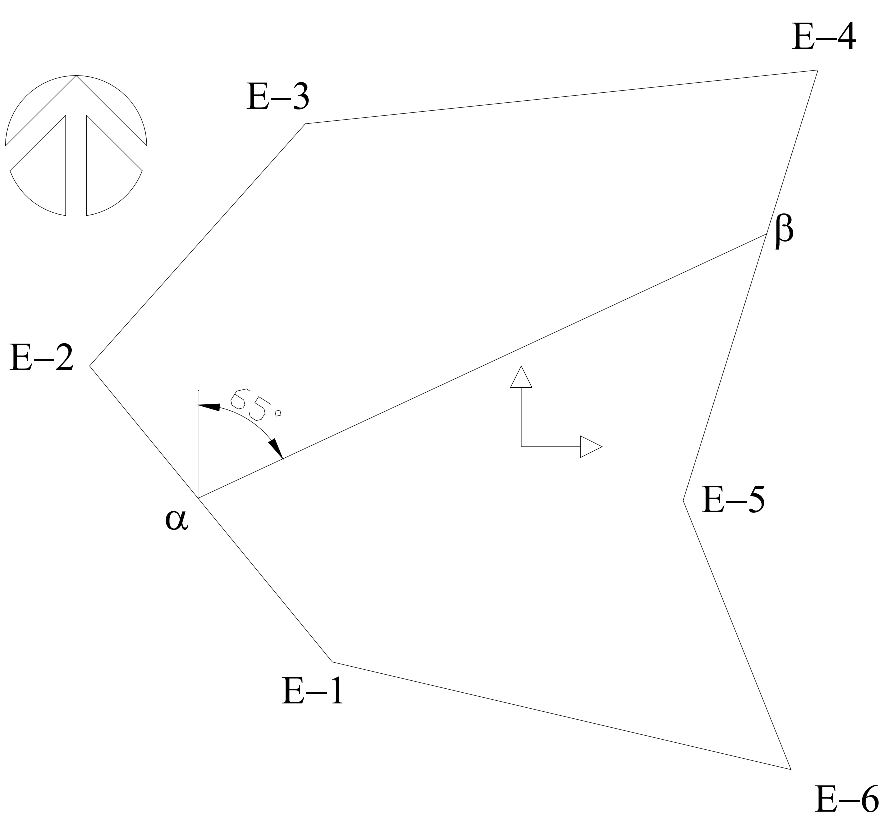
$$b = 18.3578408$$

$$b = -201.647203$$

Ahora surge la pregunta ¿Qué valor se debe tomar?

Para responder se debe tener en cuenta que el valor de “b” es la intersección de la recta con el eje de las ordenadas, es decir, el eje y; entonces según la figura 26 se puede ver que el valor de “b” debe ser positivo, porque se encuentra arriba del eje x.

Figura 26. **Condición final**



Entonces el valor de b, es:

$$b = 18.3578408$$

El siguiente paso es sustituir el valor de "b" en las coordenadas de α y β.

$$\alpha\big(j(b), i(b)\big)$$

$$\alpha(-9.57196607, -59.8956641)$$

$$\beta\big(l(b), k(b)\big)$$

$$\beta(39.5705474, 45.4907961)$$

PRUEBA:

Para conocer sí los cálculos de las coordenadas de α y β son correctos, basta con calcular el área de la otra partición (la que no se utilizó para el cálculo de las mismas)

EST	P.O.	Y	X
6	1	-40	-35
1	α	-9.57196607	-59.8956641
α	β	39.5705474	45.4907961
β	5	-10	30
5	6	-60	50

Y	X
-40	-35
-9.57197	-59.8957
39.57055	45.4908
-10	30
-60	50
-40	-35

$$A = \frac{4747.506629 - 6289.993364}{2} = 5518.749996\ m^2$$

Error Absoluto = $|5518.75 - 5518.749996| = 0.00000355$

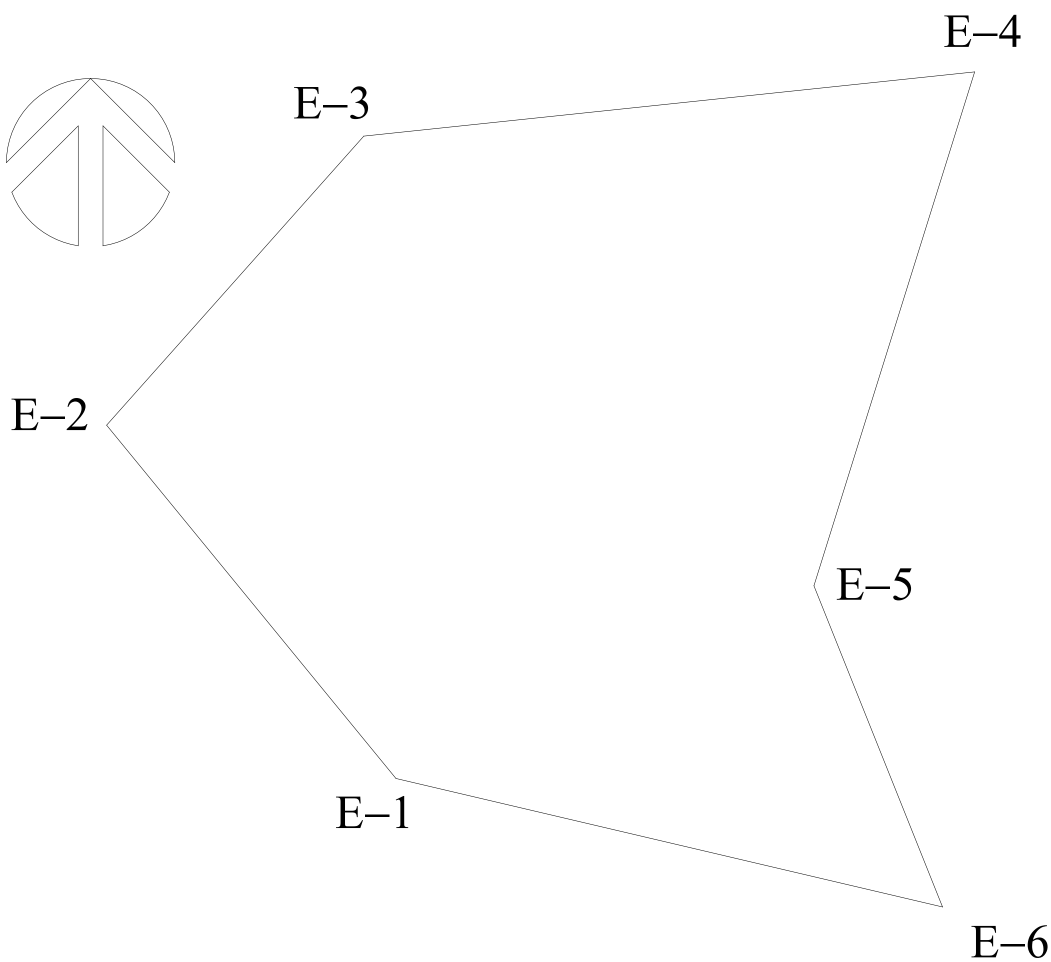
CORRECTO

2.4 Separar una fracción de área determinada por medio de un lindero perpendicular a otro

EJEMPLO 5

Se requiere dividir el polígono de la figura 27 en dos partes iguales por medio de un lindero perpendicular al lindero definido por las estaciones 1 y 2.

Figura 27. **Finca matriz**



Del ejemplo 4 se sabe que cada partición tendrá una magnitud de:

$$\frac{A_T}{2} = 5518.75\ m^2$$

Al proyectar líneas perpendiculares en la recta 1-2 desde las estaciones 1 y 4 (como se muestra en la figura 28) se observa que el lindero que se requiere está dentro del área sombreada.

Figura 28. **Área comprendida por rectas perpendiculares al lindero 1-2**

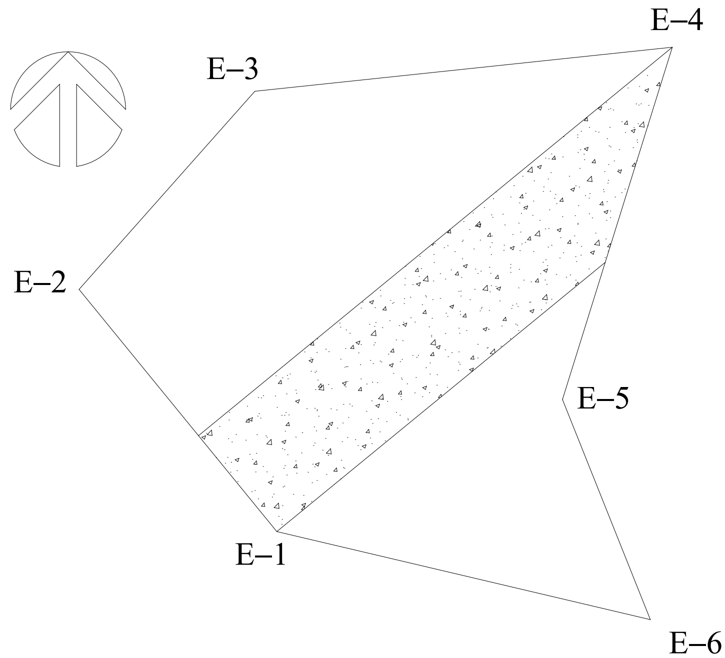
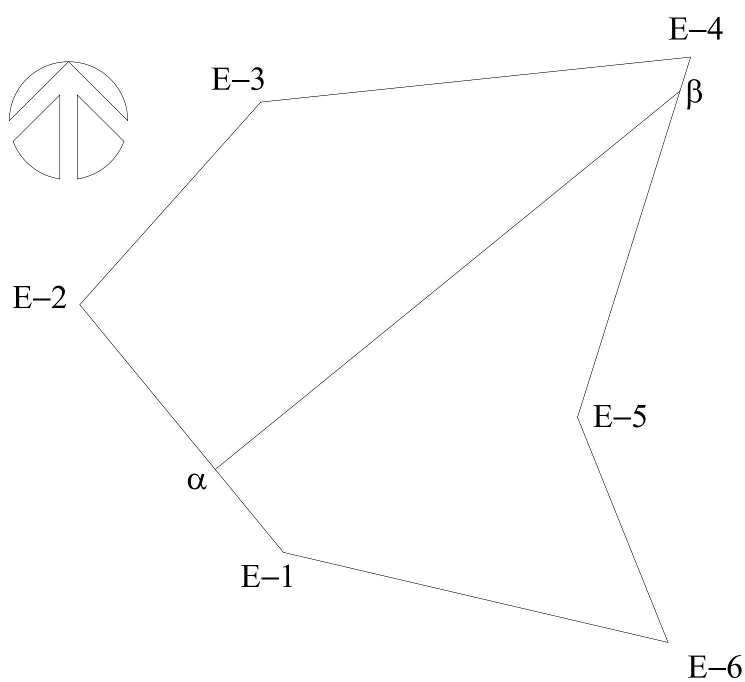


Figura 29. **Lindero de división perpendicular**



Se procede a calcular las coordenadas de α, para lo cual se necesita encontrar las ecuaciones de las rectas 1-2 y α-β.

Ecuación de la recta 1-2

	Y	X
E-1	-40	-35
E-2	15	-80

$$m = \frac{-40 - 15}{-35 + 80} = -\frac{11}{9}$$

$$y = -\frac{11}{9}x - \frac{745}{9}$$

Ecuación de la recta α-β

Para el cálculo de la pendiente se utiliza la fórmula de las pendientes perpendiculares:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

La pendiente de la recta α-β es:

$$m = -\frac{1}{-\frac{11}{9}} = \frac{9}{11}$$

Entonces, la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{9}{11}x + b$$

Para encontrar las coordenadas de α se igualan las ecuaciones de las rectas 1-2 y α-β, ya que α es común a ambas rectas.

$$-\frac{11}{9}x - \frac{745}{9} = \frac{9}{11}x + b$$

Se despeja x:

$$x = \frac{b + \frac{745}{9}}{-\frac{11}{9} - \frac{9}{11}} \cong -0.49009901b - 40.5693069$$

$$Definir\ i(b) = -0.49009901b - 40.5693069$$

Para encontrar la ordenada, se debe evaluar la expresión de "x" en cualquiera de las ecuaciones de las rectas, es decir, la recta 1-2 ó α-β.

$$y = -\frac{11}{9}\big(i(b)\big) - \frac{745}{9} \cong 0.599009901b - 33.1930693$$

$$Definir\ j(b) = 0.599009901b - 33.1930693$$

Las coordenadas de α son:

$$\alpha\big(j(b), i(b)\big)$$

Se procede a calcular las coordenadas de la estación β, para lo cual se deben igualar las rectas 4-5 y α-β.

Ecuación de la recta 4-5

	Y	X
E-4	70	55
E-5	-10	30

$$m = \frac{70 + 10}{55 - 30} = 3.2$$

$$y - 70 = 3.2(x - 55)$$

$$y = 3.2x - 106$$

Se igualan ambas ecuaciones:

$$3.2x - 106 = \frac{9}{11}x + b$$

Se despeja x:

$$x = \frac{b + 106}{3.2 - \frac{9}{11}} = 0.419847328b + 44.5038168$$

$$Definir\ p(b) = 0.419847328b + 44.5038168$$

Para encontrar la ordenada, se debe evaluar la expresión de “x” en cualquiera de las ecuaciones de las rectas, es decir, la recta 4-5 ó α-β.

$$y = 3.2\big(p(b)\big) - 106 \cong 1.34351145b + 36.4122137$$

$$Definir\ q(b) = 1.34351145b + 36.4122137$$

Las coordenadas de β son:

$$\beta\big(q(b), p(b)\big)$$

Ahora con las coordenadas de α y β, se procede a calcular el área de alguna de las dos particiones en función de b.

Se escoge el siguiente polígono:

EST	P.O.	Y	X
α	2	15	-80
2	3	60	-40
3	4	70	55
4	β	q(b)	p(b)
β	α	j(b)	i(b)

Cálculo del área:

Y	X
15	-80
60	-40
70	55
q(b)	p(b)
j(b)	i(b)
15	-80

$$A = \frac{-15 * 40 + 60 * 55 + 70p(b) + q(b)i(b) - 80j(b) - \left(-80 * 60 - 40 * 70 + 55q(b) + p(b)j(b) + 15i(b)\right)}{2}$$

$$A = -0.454973169b^2 - 85.0731237b + 7338.29028$$

El área se conoce (5518.75 m^2), entonces se sustituye dicha magnitud en la ecuación del área y se despeja *b*.

$$5518.75 = -0.454973169b^2 - 85.0731237b + 7338.29028$$

Al resolver la ecuación se obtienen los siguientes valores

$$b = 19.3794384$$

$$b = -206.364363$$

Se toma el primer valor, y el criterio que se utiliza es que el valor de “b” es la intersección con el eje “y”, entonces según la gráfica del polígono, el primer valor está dentro del rango que se esperaba.

Ahora se sustituye el valor de b encontrado en las expresiones para las coordenadas de α y β.

$$\alpha\big(j(b), i(b)\big)$$

$$\alpha(-21.5845938, -50.0671505)$$

$$\beta\big(q(b), p(b)\big)$$

$$\beta(62.4487111, 52.6402222)$$

PRUEBA:

La prueba consiste en calcular el área de la otra partición.

EST	P.O.	Y	X
6	1	-40	-35
1	α	-21.5845938	-50.0671505
α	β	62.4487111	52.6402222
β	5	-10	30
5	6	-60	50

Y	X
-40	-35
-21.5846	-50.0672
62.44871	52.64022
-10	30
-60	50
-40	-35

$$A = \frac{4339.929539 - (-6697.570456)}{2} = \frac{11037.5}{2} = 5518.75\ m^2$$

CORRECTO

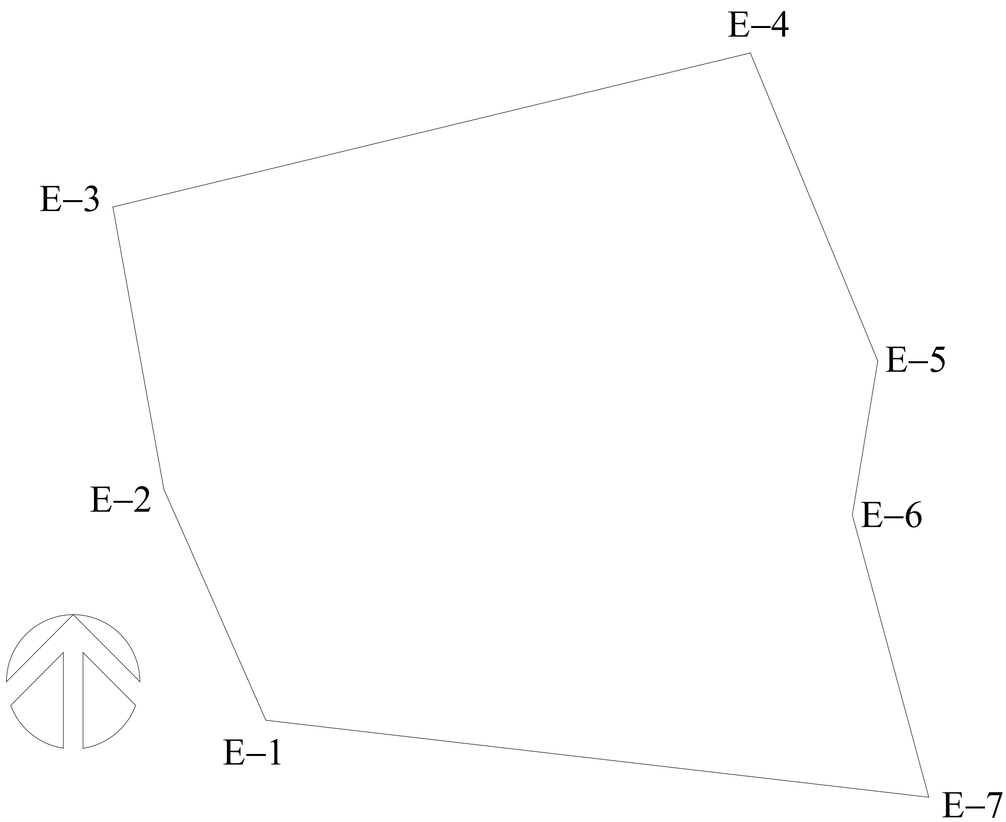
2.5 Dividir un polígono en varias partes iguales por medio de linderos paralelos

Esta técnica se utiliza para dividir polígonos, conservando la misma dirección entre sus linderos. Se utiliza principalmente en lotificaciones, donde los terrenos tienen un mayor valor económico por su forma, ya que quedan más ordenados y con un mejor aprovechamiento del espacio.

EJEMPLO 6

Se requiere separar el polígono de la figura 30 en tres partes iguales con linderos paralelos a la recta definida por las estaciones 1 y 2.

Figura 30. **Finca matriz**



EST	P.O.	Y	X
7	1	-60	-60
1	2	-15	-80
2	3	40	-90
3	4	70	35
4	5	10	60
5	6	-20	55
6	7	-75	70

El primer paso consiste en calcular el área total del polígono.

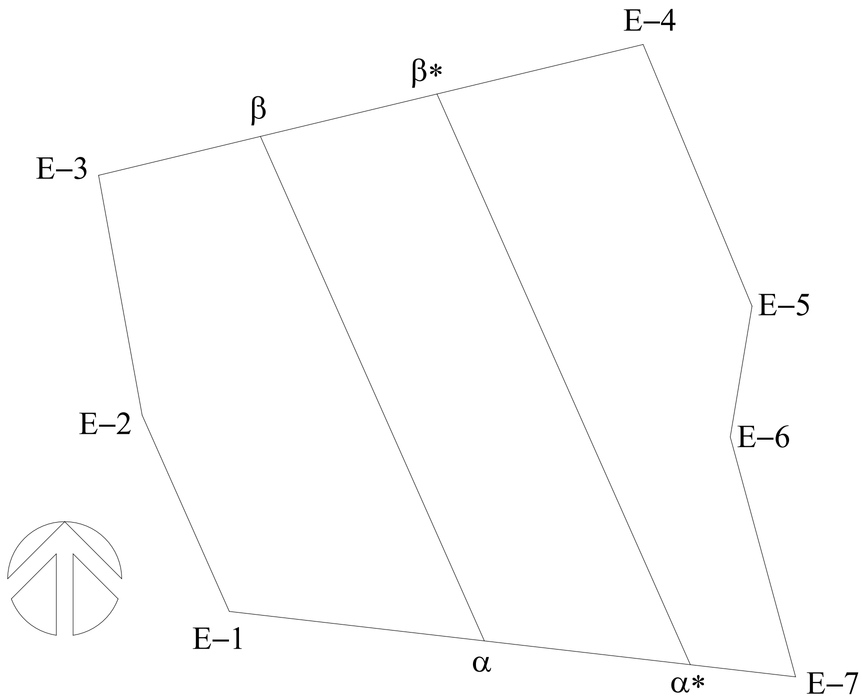
Y	X
-60	-60
-15	-80
40	-90
70	35
10	60
-20	55
-75	70
-60	-60

$$A = \frac{15400 - (-17775)}{2} = \frac{33175}{2} = 16587.5\ m^2$$

Cada una de las particiones tiene un área de:

$$\frac{A_T}{3} = 5529.166667\ m^2$$

Figura 31. **Linderos de división paralelos**



Para encontrar las coordenadas de α, β, α' y β' se deben encontrar las ecuaciones de las rectas definidas por las estaciones 3-4, 1-7, α-β y α'-β'.

Ecuación de la recta 3-4

	Y	X
E-3	40	-90
E-4	70	35

$$m = \frac{40 - 70}{-90 - 35} = 0.24$$

$$y - 40 = 0.24(x + 90)$$

$$y = 0.24x + 61.6$$

Ecuación de la recta 1-7

	Y	X
E-1	-60	-60
E-7	-75	70

$$m = \frac{-60 + 75}{-60 - 70} = -\frac{3}{26}$$

$$y + 60 = -\frac{3}{26}(x + 60)$$

$$y = -\frac{3}{26}x - \frac{870}{13}$$

Ecuación de la recta α-β.

La recta α-β es paralela a la recta 1-2, por tanto tienen la misma pendiente.

Pendiente de la recta 1-2:

	Y	X
E-1	-60	-60
E-2	-15	-80

$$m = \frac{-60 + 15}{-60 + 80} = -\frac{9}{4}$$

Entonces la ecuación de la recta α-β es:

$$y = -\frac{9}{4}x + b$$

Cálculo de las coordenadas de α.

Para calcular las coordenadas de α se igualan las ecuaciones de las rectas 1-7 y α-β.

$$-\frac{3}{26}x - \frac{870}{13} = -\frac{9}{4}x + b$$

$$x = \frac{b + \frac{870}{13}}{\frac{9}{4} - \frac{3}{26}} \cong 0.468468468b + 31.3513514$$

$$Definir\ i(b) = 0.468468468b + 31.3513514$$

Para encontrar la ordenada, se debe evaluar la expresión de "x" en cualquiera de las ecuaciones de las rectas que permitieron encontrar "x", es decir, la ecuación 1-7 ó α-β.

$$y = -\frac{3}{26}\big(i(b)\big) - \frac{870}{13} \cong -0.054054054b - 70.5405405$$

$$Definir\ j(b) = -0.054054054b - 70.5405405$$

Las coordenadas de α son:

$$\alpha\big(j(b), i(b)\big)$$

Cálculo de las coordenadas de β.

Para calcular las coordenadas de β se igualan las ecuaciones de las rectas 3-4 y α-β.

$$0.24x + 61.6 = -\frac{9}{4}x + b$$

$$x = \frac{b - 61.6}{\frac{9}{4} + 0.24} \cong 0.401606426b - 24.7389558$$

$$Definir\ p(b) = 0.401606426b - 24.7389558$$

$$y = 0.24\big(p(b)\big) + 61.6 \cong 0.096385542b + 55.6626506$$

$$Definir\ q(b) = 0.096385542b + 55.6626506$$

Las coordenadas de β son:

$$\beta\big(q(b), p(b)\big)$$

Para encontrar las coordenadas de α y β se procede a calcular el área de una partición que contenga al lindero α-β:

EST	P.O.	Y	X
α	1	-60	-60
1	2	-15	-80
2	3	40	-90
3	β	q(b)	p(b)
β	α	j(b)	i(b)

Y	X
-60	-60
-15	-80
40	-90
q(b)	p(b)
j(b)	i(b)
-60	-60

$$A = \frac{\begin{array}{c} 60*80+15*90+40p(b)+q(b)i(b)-60j(b) \\ -\left(60*15-80*40-90q(b)+p(b)j(b)-60i(b)\right) \end{array}}{2}$$

$$A = 0.033431021b^2 + 56.0903072b + 9291.79692$$

El área de cada partición se conoce: 5529.166667 m^2, se sustituye dicho dato en la ecuación del área y se resuelve la ecuación de segundo grado.

Al resolver la ecuación se obtienen los siguientes valores:

$$b = -70.0023488$$

$$b = -1607.78986$$

Se toma el primer valor y se sustituye en las expresiones para las coordenadas de α y β.

$$\alpha\left(j(b), i(b)\right)$$

$$\alpha(-66.7566296, -1.44254178)$$

$$\beta\left(q(b), p(b)\right)$$

$$\beta(48.9154363, -52.8523489)$$

Las expresiones para α' y β' son iguales que para α y β, pero para evitar alguna confusión que pueda surgir, simplemente se le cambia de nomenclatura.

Las coordenadas de α' son:

$$\alpha\left(j(b), i(b)\right)$$

$$\alpha'\left(g(b), f(b)\right)$$

$$Definir\ f(b) = 0.468468468b + 31.3513514$$

$$Definir\ g(b) = -0.054054054b - 70.5405405$$

Las coordenadas de β' son:

$$\beta\left(q(b), p(b)\right)$$

$$\beta'\left(n(b), m(b)\right)$$

$$Definir\ m(b) = 0.401606426b - 24.7389558$$

$$Definir\ n(b) = 0.096385542b + 55.6626506$$

Para encontrar las coordenadas de α' y β' se calcula el área de un polígono que contenga al lindero α'-β'.

t	P.O.	Y	X
β'	4	70	35
4	5	10	60
5	6	-20	55
6	7	-75	70
7	α'	g(b)	f(b)
α'	β'	n(b)	m(b)

Cálculo del área:

Y	X
70	35
10	60
-20	55
-75	70
g(b)	f(b)
n(b)	m(b)
70	35

$$A = \frac{\begin{array}{c} 70 * 60 + 10 * 55 - 20 * 70 - 75f(b) + g(b)m(b) + 35n(b) \\ -\big(10 * 35 - 20 * 60 - 75 * 55 + 70g(b) + n(b)f(b) + 70m(b)\big) \end{array}}{2}$$

$$A = -0.033431021b^2 - 56.0903072b + 7295.70308$$

El área de cada partición se conoce: 5529.166667 m^2, se sustituye dicho dato en la ecuación del área y se resuelve la ecuación de segundo grado.

Al resolver la ecuación se obtienen los siguientes valores:

$$b = 30.9245138$$

$$b = -1708.71672$$

Se toma el primer valor y se sustituye en las expresiones para las coordenadas de α' y β'.

$$\alpha'\left(g(b), f(b)\right)$$

$$\alpha'(-72.2121359, 45.838511)$$

$$\beta'\left(n(b), m(b)\right)$$

$$\beta'(58.6433266, -12.3194724)$$

PRUEBA:

Se calcula el área de un polígono que contenga las coordenadas de α' y β'.

EST	P.O.	Y	X
α'	α	-66.7566296	-1.44254178
α	β	48.9154363	-52.8523489
β	β'	58.6433266	-12.3194724
β'	α'	-72.2121359	45.838511

Y	X
-66.7566296	-1.44254178
48.9154363	-52.8523489
58.6433266	-12.3194724
-72.2121359	45.838511
-66.7566296	-1.44254178

$$A = \frac{5717.924106 - (-5340.409204)}{2} = \frac{11058.33331}{2} = 5529.166655\ m^2$$

$$Error\ Absoluto = |5529.166667 - 5529.166655| = 0.000012$$

CORRECTO

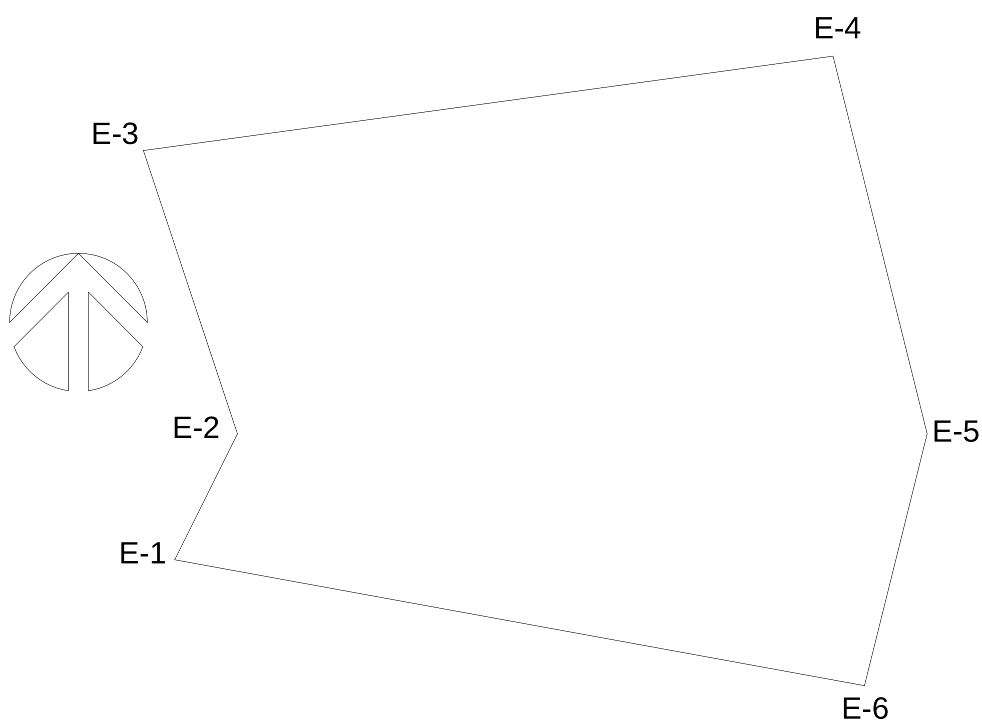
2.6 Dividir un polígono en varias partes diferentes por medio de linderos paralelos

EJEMPLO 7

Se requiere dividir el polígono de la figura 32 en tres partes de tal forma que tengan 25%, 30% y 45% del área total, respectivamente; con linderos paralelos a la recta definida por las estaciones 2 y 3.

EST	P.O.	Y	X
6	1	-60	-90
1	2	-20	-70
2	3	70	-100
3	4	100	120
4	5	-20	150
5	6	-100	130

Figura 32. **Finca matriz**



El primer paso consiste en calcular el área total del polígono:

Y	X
-60	-90
-20	-70
70	-100
100	120
-20	150
-100	130
-60	-90

$$A = \frac{36000 - (-38300)}{2} = 37150\ m^2$$

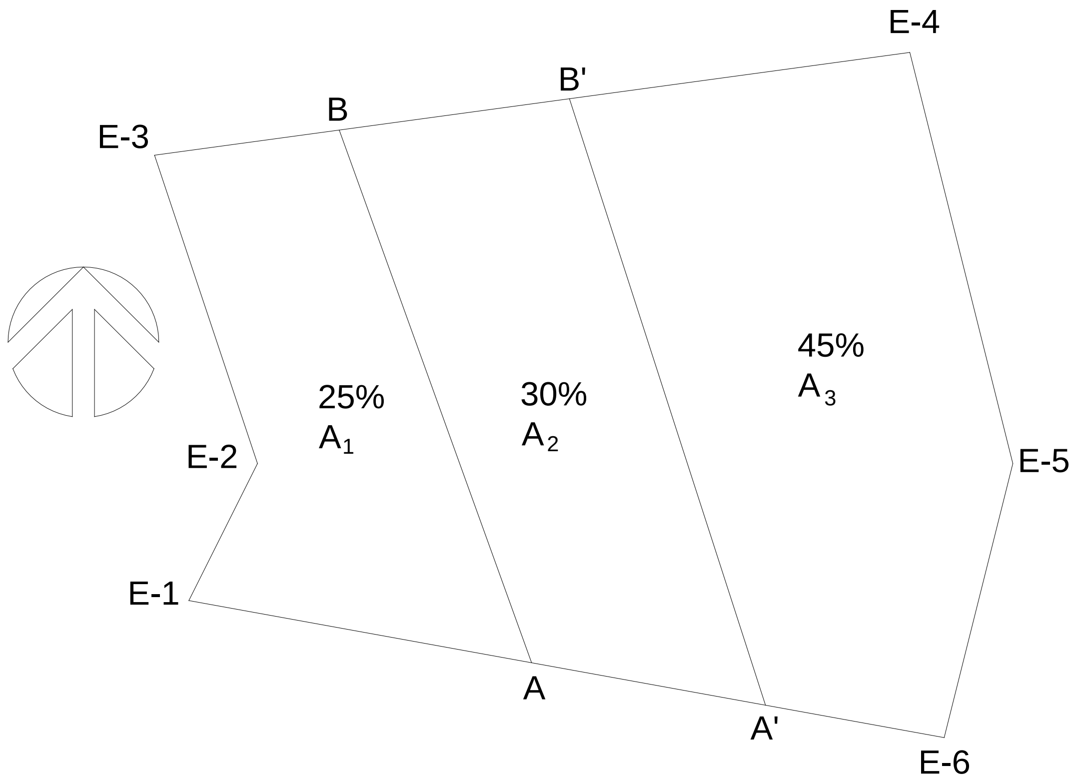
Se proceda a calcular el área de cada partición:

$$A_1 = 0.25(37150) = 9287.5\ m^2$$

$$A_2 = 0.30(37150) = 11145.0\ m^2$$

$$A_3 = 0.45(37150) = 16717.5\ m^2$$

Figura 33. **Linderos de división paralelos**



Para encontrar las coordenadas de A, B, A' y B' se deben encontrar las ecuaciones de las rectas 3-4, 1-6, A-B y A'-B'.

Ecuación de la recta 3-4:

	Y	X
E-3	70	-100
E-4	100	120

$$m = \frac{70 - 100}{-100 - 120} = \frac{3}{22}$$

$$y - 70 = \frac{3}{22}(x + 100)$$

$$y = \frac{3}{22}x + \frac{920}{11}$$

Ecuación de la recta 1-6:

	Y	X
E-1	-60	-90
E-6	-100	130

$$m = \frac{-60 + 100}{-90 - 130} = -\frac{2}{11}$$

$$y + 60 = -\frac{2}{11}(x + 90)$$

$$y = -\frac{2}{11}x - \frac{840}{11}$$

Ecuación de la recta A-B:

Esta recta tiene la misma que la recta 2-3:

	Y	X
E-2	-20	-70
E-3	70	-100

$$m = \frac{-20 - 70}{-70 + 100} = -3$$

$$y = -3x + b$$

Con los datos calculados anteriormente se pueden calcular las coordenadas de las estaciones A y B:

El punto A está sobre las rectas 1-6 y A-B, por tanto, se igualan ambas ecuaciones y se despeja el valor de la abscisa. Para encontrar el valor de la ordenada, se sustituye el valor de la abscisa en cualquiera de las ecuaciones que se utilicen para el cálculo de la misma.

$$-\frac{2}{11}x - \frac{840}{11} = -3x + b$$

$$x = \frac{b + \frac{840}{11}}{3 - \frac{2}{11}} \cong 0.35483871b + 27.0967742$$

$$Definir\ i(b) = 0.35483871b + 27.0967742$$

$$y = -\frac{2}{11}\big(i(b)\big) - \frac{840}{11} \cong -0.064516129b - 81.2903226$$

$$Definir\ j(b) = -0.064516129b - 81.2903226$$

Las coordenadas de A son:

$$A\big(j(b), i(b)\big)$$

Coordenadas de B:

El punto B está sobre las rectas 3-4 y A-B, por tanto, se igualan ambas ecuaciones y se despeja el valor de la abscisa. Para encontrar el valor de la ordenada, se sustituye el valor de la abscisa en cualquiera de las ecuaciones que se utilicen para el cálculo de la misma.

$$\frac{3}{22}x + \frac{920}{11} = -3x + b$$

$$x = \frac{b - \frac{920}{11}}{3 - \frac{3}{22}} \cong 0.349206349b - 29.2063492$$

$$Definir\ p(b) = 0.349206349b - 29.2063492$$

$$y = \frac{3}{22}\big(p(b)\big) + \frac{920}{11} \cong 0.047619048b + 79.6536797$$

$$Definir\ q(b) = 0.047619048b + 79.6536797$$

Las coordenadas de B son:

$$B\big(q(b), p(b)\big)$$

Para encontrar las coordenadas de A y B, se debe calcular el área de una partición que contenga a dichas estaciones.

EST	P.O.	Y	X
A	1	-60	-90
1	2	-20	-70
2	3	70	-100
3	B	q(b)	p(b)
B	A	j(b)	j(b)

Y	X
-60	-90
-20	-70
70	-100
q(b)	p(b)
j(b)	j(b)
-60	-90

$$A = \frac{\begin{array}{c}60 * 70 + 20 * 100 + 70p(b) + q(b)i(b) - 90j(b) \\ -\big(90 * 20 - 70 * 70 - 100q(b) + p(b)j(b) - 60i(b)\big)\end{array}}{2}$$

$$A = 0.019713262b^2 + 56.1802355b + 11973.5116$$

Para resolver esta ecuación se debe sustituir la magnitud del área (A_1 = 9287.5 m^2).

Al resolverla se obtienen los siguientes valores:

$$b = -48.6408029$$

$$b = -2801.22933$$

Se toma el primer valor de "b" y se sustituye en las expresiones de las coordenadas de A y B:

$$A\big(j(b), i(b)\big)$$

$$A(-78.1522063{,}9.83713445)$$

$$B\big(q(b), p(b)\big)$$

$$B(77.3374509, -46.1920264)$$

Para el cálculo de las coordenadas de A' y B', se pueden obtener de dos formas:

- ✓ Se realiza un cálculo análogo al que se utilizó para calcular las coordenadas de A y B, pero con el polígono definido por las estaciones 4, 6, A' y B'.

- ✓ Utilizar la misma ecuación de área que se utilizó para el cálculo de las coordenadas de A y B, pero sustituyendo otra magnitud de área (la correspondiente a las particiones con el 25% y 30% del área total del polígono).

Se opta por la segunda opción por ser más fácil que la primera.

Ahora se debe calcular el área de las particiones con el 25% y 30% del área total del polígono

$$Area = A_1 + A_2 = 9287.5 + 11145.0 = 20432.5\ m^2$$

Ésta área se debe sustituir en la siguiente función de área (utilizada para el cálculo de las coordenadas de A y B):

$$A = 0.019713262b^2 + 56.1802355b + 11973.5116$$

Al resolver la ecuación se obtienen los siguientes valores:

$$20432.5 = 0.019713262b^2 + 56.1802355b + 11973.5116$$

$$0.019713262b^2 + 56.1802355b - 8458.9884 = 0$$

$$b = 143.3574303$$

$$b = -2993.227508$$

Se toma el primer valor de "b" y se sustituye en las expresiones de las coordenadas de A y B (las coordenadas que se obtengan son las de las estaciones A' y B'):

$$A'\big(j(b), i(b)\big)$$

$$A'(-90.53918905, 77.96553978)$$

$$B'\big(q(b), p(b)\big)$$

$$B'(86.48022395, 20.85497566)$$

PRUEBA:

Se calcula el área de la otra partición, ya que esta no se ha utilizado para encontrar las coordenadas de las estaciones A’ y B’, debe dar una magnitud de:

$$A_3 = 0.45(37150) = 16717.5\ m^2$$

EST	P.O.	Y	X
B'	4	100	120
4	5	-20	150
5	6	-100	130
6	A'	-90.53918905	77.96553978
A'	B'	86.48022395	20.85497566

Y	X
100	120
-20	150
-100	130
-90.5392	77.96554
86.48022	20.85498
100	120

$$A = \frac{13092.8803 - (-20342.1197)}{2} = \frac{33435}{2} = 16717.5\ m^2$$

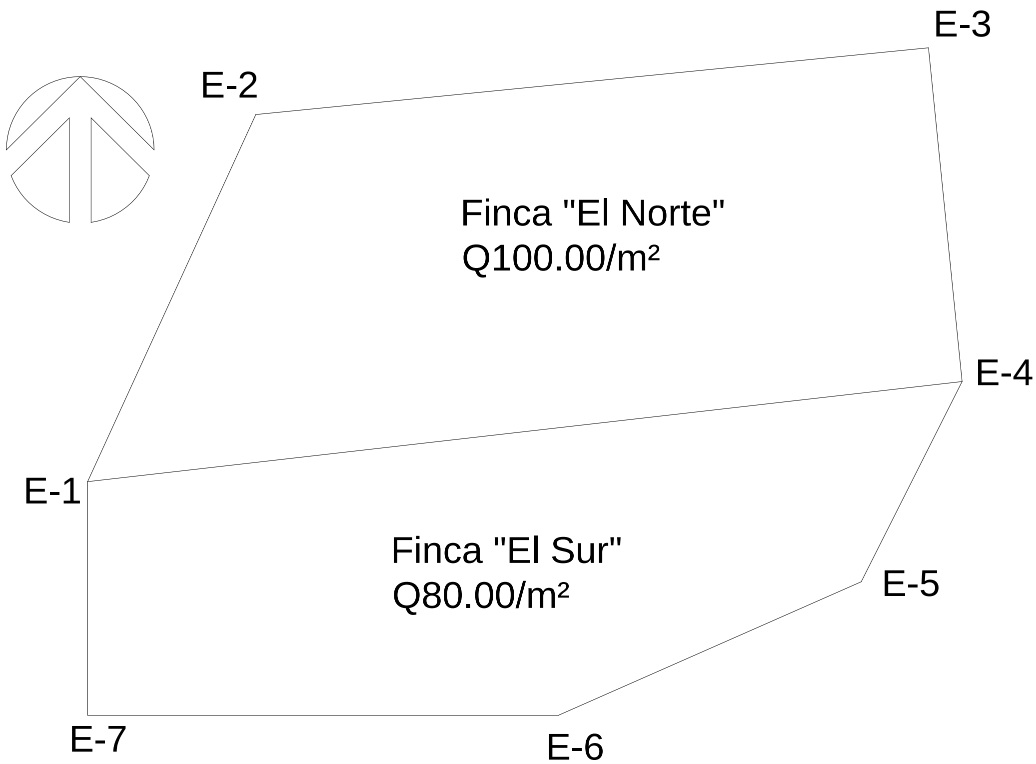
2.7 Separar fracciones de terreno de diferente valor

Se requieren obtener dos particiones de igual valor económico del polígono de la figura 34, si el precio unitario de la Finca “El Norte” (con plantaciones de café) es de Q100.00/m^2, y el de la Finca “El Sur” (con plantaciones de maíz) es de Q80.00/m^2; por medio de un lindero paralelo al 2-3.

Finca "El Norte"			
EST	P.O.	Y	X
4	1	-30	-140
1	2	80	-90
2	3	100	110
3	4	0	120

Finca "El Sur"			
EST	P.O.	Y	X
7	1	-30	-140
1	4	0	120
4	5	-60	90
5	6	-100	0
6	7	-100	-140

Figura 34. **Finca matriz compuesta por partes de diferente valor**



Se procede calcular el área de cada finca:

Finca “El Norte”:

Y	X
-30	-140
80	-90
100	110
0	120
-30	-140

$$A = \frac{23500 - (-23800)}{2} = \frac{47300}{2} = 23650\ m^2$$

Finca “El Sur”:

Y	X
-30	-140
0	120
-60	90
-100	0
-100	-140

$$A = \frac{24400 - (-12000)}{2} = \frac{36400}{2} = 18200\ m^2$$

El siguiente paso consiste en calcular el valor económico de cada partición:

Finca “El Norte”:

$$23650\ m^2 * \frac{Q100.00}{1\ m^2} = Q2\ 365\ 000.00$$

Finca “El Sur”:

$$18200\ m^2 * \frac{Q80.00}{1\ m^2} = Q1\ 456\ 000.00$$

El valor total es de:

$$Q2\ 365\ 000.00 + Q1\ 456\ 000.00 = Q3\ 821\ 000.00$$

El valor de cada partición debe ser de:

$$\frac{P_T}{2} = Q1\ 910\ 500.00$$

El procedimiento de particiones por valor tiene dos enfoques:

1er. Enfoque:

$$Q2\ 365\ 000.00 - Q1\ 910\ 500.00 = Q454\ 500.00$$

La Finca “El Norte” tiene un exceso de Q454 500.00 y se le va a quitar en área:

$$Q454\ 500.00 * \frac{1\ m^2}{Q100.00} = 4545\ m^2$$

2do. Enfoque:

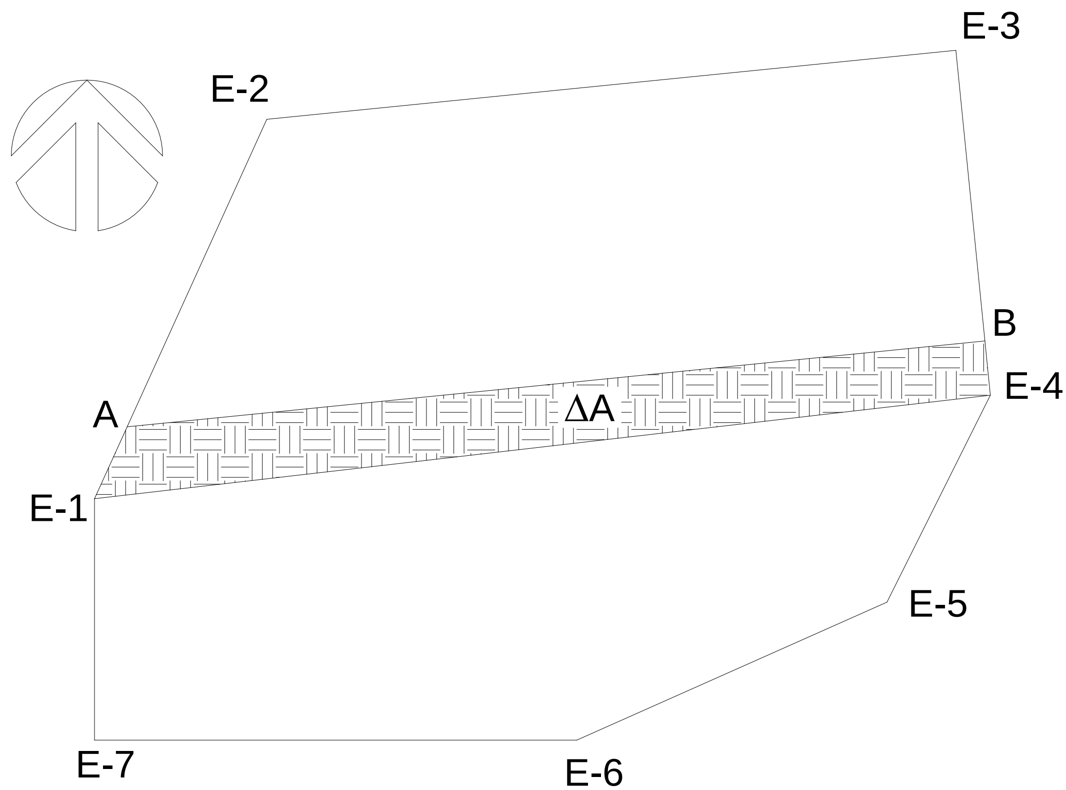
$$Q1\ 910\ 500.00 - 1\ 456\ 000.00 = Q454\ 500.00$$

Para que la Finca “El Sur” tenga un valor de Q1 910 500.00 se le debe agregar Q454 500.00, pero dicha área pertenece a la Finca “El Norte” con un precio unitario de Q100.00/m^2:

$$Q454\ 500.00 * \frac{1\ m^2}{Q100.00} = 4545\ m^2$$

Cualquiera sea el enfoque que se tome, se llega a la conclusión que el nuevo lindero debe estar en la Finca “El Norte” y dicho diferencial de área debe tener una magnitud de 4545 m^2.

Figura 35. **Diferencial de área**



Para encontrar las coordenadas de A y B se deben encontrar las ecuaciones de las rectas 1-2, 3-4 y A-B.

Ecuación de la recta 1-2:

	Y	X
E-1	-30	-140
E-2	80	-90

$$m = \frac{-30 - 80}{-140 - (-90)} = 2.2$$

$$y + 30 = 2.2(x + 140)$$

$$y = 2.2x + 278$$

Ecuación de la recta 3-4:

	Y	X
E-3	100	110
E-4	0	120

$$m = \frac{100 - 0}{110 - 120} = -10$$

$$y - 100 = -10(x - 110)$$

$$y = -10x + 1200$$

Ecuación de la recta A-B:

La recta A-B debe ser paralela a la recta 2-3, por tanto, debe tener el mismo valor de pendiente que la recta 2-3.

	Y	X
E-2	80	-90
E-3	100	110

$$m = \frac{80 - 100}{-90 - 110} = 0.1$$

Entonces la ecuación de la recta A-B es:

$$y = 0.1x + b$$

Se procede a calcular las coordenadas de la estación A, se igualan las ecuaciones de las rectas 1-2 y A-B.

$$2.2x + 278 = 0.1x + b$$

$$x = \frac{b - 278}{2.2 - 0.1} = \frac{10}{21}b - \frac{2780}{21}$$

$$Definir\ i(b) = \frac{10}{21}b - \frac{2780}{21}$$

$$y = 2.2\big(i(b)\big) + 278 = \frac{22}{21}b - \frac{278}{21}$$

$$Definir\ j(b) = \frac{22}{21}b - \frac{278}{21}$$

Las coordenadas de la estación A, son:

$$A\big(j(b), i(b)\big)$$

Se procede a calcular las coordenadas de la estación B; se igualan las ecuaciones de las rectas 3-4 y A-B.

$$-10x + 1200 = 0.1x + b$$

$$x = \frac{b - 1200}{-10 - 0.1} = \frac{12000}{101} - \frac{10}{101}b$$

$$Definir\ p(b) = \frac{12000}{101} - \frac{10}{101}b$$

$$y = -10\big(p(b)\big) + 1200 = \frac{100}{101}b + \frac{1200}{101}$$

$$Definir\ q(b) = \frac{100}{101}b + \frac{1200}{101}$$

Las coordenadas de la estación B, son:

$$B\big(q(b), p(b)\big)$$

Se procede a calcular el diferencial de área en función de b:

EST	P.O.	Y	X
B	4	0	120
4	1	-30	-140
1	A	j(b)	i(b)
A	B	q(b)	p(b)

Y	X
0	120
-30	-140
j(b)	i(b)
q(b)	p(b)
0	120

$$A = \frac{-30i(b) + j(b)p(b) + 120q(b) - \left(-30 * 20 - 140j(b) + i(b)q(b)\right)}{2}$$

$$A \cong -0.287600189b^2 + 251.192834b + 3571.91891$$

$$\Delta A = 4\,545\ m^2$$

Se sustituye el diferencial de área en la función de área y se resuelve la ecuación cuadrática de segundo grado.

Se obtienen las siguientes soluciones:

$$b = 3.891176783$$

$$b = 869.518659282$$

El dato correcto para éste contexto es el primero; se sustituye dicho dato en las expresiones de las coordenadas de A y B.

$$j(b) = -9.161624322$$

$$i(b) = -130.528011056$$

$$A(-9.161624322, -130.528011056)$$

$$q(b) = 15.733838399$$

$$p(b) = 118.42661616$$

$$B(15.733838399, 118.42661616)$$

PRUEBA:

La prueba consiste en encontrar el área y el valor de una de las dos particiones con las nuevas coordenadas.

EST	P.O.	Y	X
2	3	100	110
3	B	15.7338384	118.4266162
B	A	-9.161624322	-130.5280111
A	2	80	-90

Y	X
100	110
15.7338384	118.4266162
-9.161624322	-130.5280111
80	-90

$$A = \frac{19413.50117 - (-18796.49882)}{2} = \frac{38209.99999}{2} = 19\ 105\ m^2$$

$$Valor = 19\,105\;m^2 * \frac{Q100.00}{1\;m^2} = Q1\,910\,500.00$$

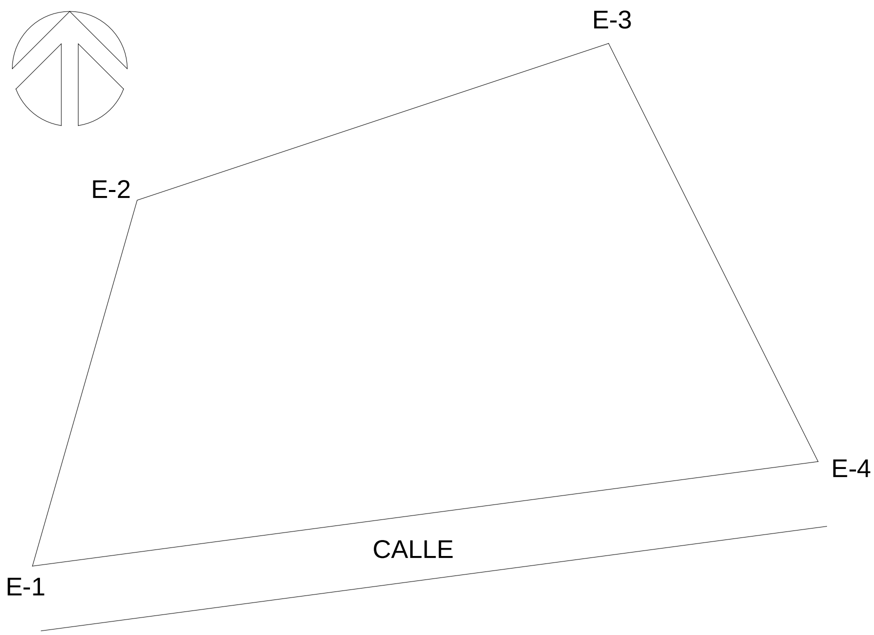
CORRECTO

2.8 Caso especial de división de polígonos

Se requiere dividir el polígono de la figura 36 en tres partes iguales de tal forma que el lindero del fondo tenga la misma longitud para cada partición.
El primer paso consiste en encontrar el área total.

EST	P.O.	Y	X
4	1	-110	-120
1	2	30	-80
2	3	90	100
3	4	-70	180

Figura 36. **Finca matriz**



Y	X
-110	-120
30	-80
90	100
-70	180
-110	-120

$$A = \frac{36400 - (-37600)}{2} = 37\,000\ m^2$$

Se procede a dividir la recta del fondo (2-3) en tres partes iguales.

	Y	X
E-2	30	-80
E-3	90	100

$$\Delta x = 100 — 80 = 180$$

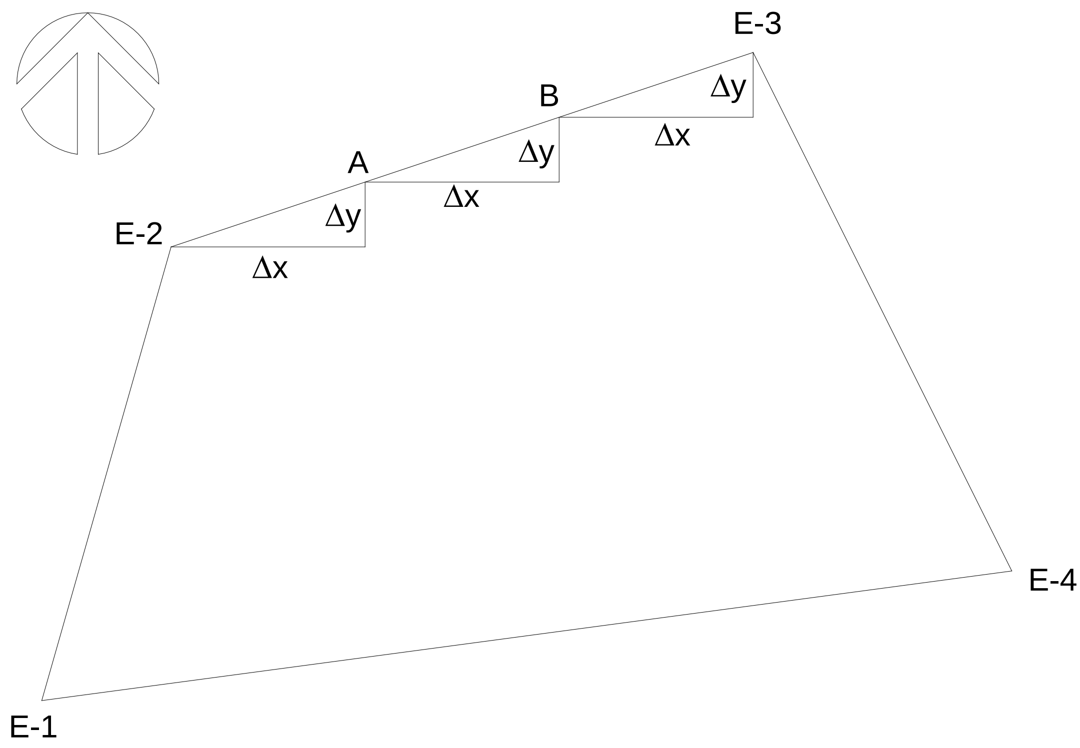
$$\frac{\Delta x}{3} = 60$$

$$\Delta y = 90 - 30 = 60$$

$$\frac{\Delta y}{3} = 20$$

Las coordenadas de las estaciones A y B son:

Figura 37. **División de lindero en tres partes iguales**



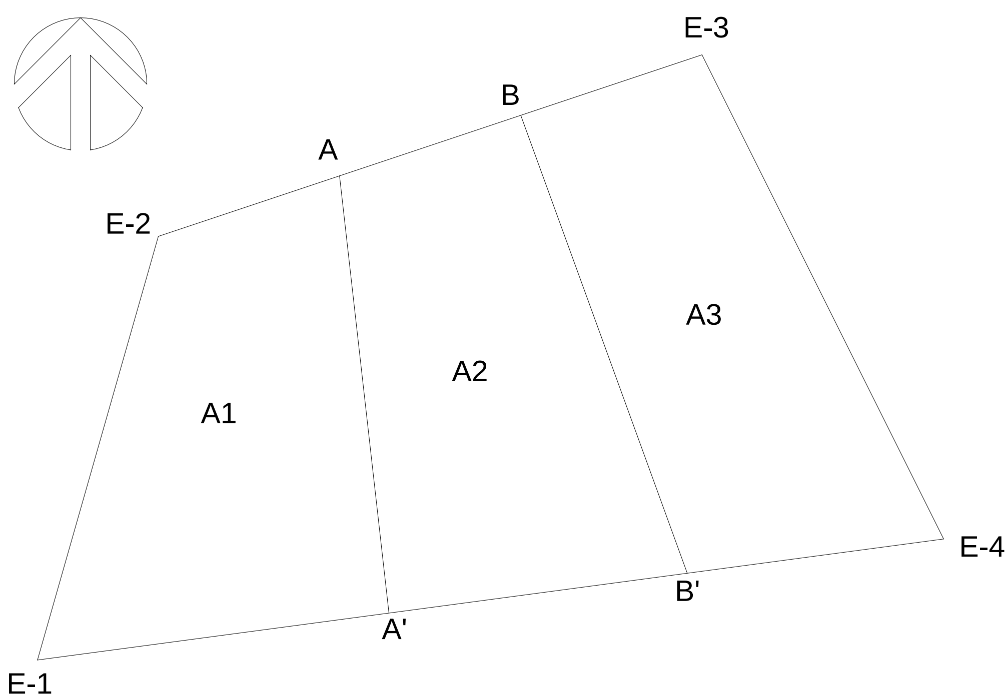
Estación A:

	Y	X
E-2	30	-80
A	30+20	-80+60
A	50	-20

Estación B:

	Y	X
A	50	-20
B	50+20	-20+60
B	70	40

Figura 38. **Linderos de división**



Las estaciones A’ y B’ están sobre la recta 1-4, entonces se debe calcular la ecuación de dicha recta.

	Y	X
E-1	-110	-120
E-4	-70	180

$$m = \frac{-110 + 70}{-120 - 180} = \frac{2}{15}$$

$$y + 110 = \frac{2}{15}(x + 120)$$

$$y = \frac{2}{15}x - 94$$

Las coordenadas de A’ son:

$$A'\left(\frac{2}{15}x - 94, x\right)$$

Se procede a calcular la magnitud de A_1.

EST	P.O.	Y	X
A'	1	-110	-120
1	2	30	-80
2	A	50	-20
A	A'	$\frac{2}{15}x - 94$	x

Y	X
-110	-120
30	-80
50	-20
$\frac{2}{15}x-94$	x
-110	-120

$$A=\frac{34x+19480-\left(-\frac{338}{3}x-5720\right)}{2}$$

Se sustituye la magnitud del área ($A_T/3$) y se despeja el valor de la abscisa.

$$x=-\frac{40}{11}\cong -3.636363636$$

$$y=\frac{2}{15}\left(-\frac{40}{11}\right)-94=\frac{3118}{33}\cong -94.48484848$$

Las coordenadas de A', son:

$$A'(-94.48484848,-3.636363636)$$

Se procede a calcular la magnitud de A_3, para encontrar las coordenadas de B'.

Las coordenadas de B', tienen las mismas expresiones que las de A, debido a que se encuentran sobre la misma recta.

$$B'\left(\frac{2}{15}x - 94, x\right)$$

EST	P.O.	Y	X
B	3	90	100
3	4	-70	180
4	B'	$\frac{2}{15}x - 94$	x
B'	B'	70	40

Y	X
90	100
-70	180
$\frac{2}{15}x - 94$	x
70	40
90	100

$$A = \frac{19440 - \frac{194}{3}x - (94x - 20320)}{2}$$

Se sustituye la magnitud del área ($A_T/3$) y se despeja el valor de la abscisa.

$$x = \frac{11320}{119} \cong 95.12605042$$

$$y = \frac{2}{15}\left(\frac{11320}{119}\right) - 94 = -\frac{29030}{357} \cong -81.31652661$$

Las coordenadas de la estación B’, son:

$$B'(-81.31652661, 95.12605042)$$

PRUEBA

La prueba consiste en calcular el área de A_2, la cual no ha sido utilizada para el cálculo de las coordenadas.

EST	P.O.	Y	X
A'	A	50	-20
A	B	70	40
B	B'	-81.31652661	95.12605042
B'	A'	-94.48484848	-3.636363636

Y	X
50	-20
70	40
-81.31652661	95.12605042
-94.48484848	-3.636363636
50	-20

$$A = \frac{10884.21696 - (-13822.44971)}{2} = \frac{24666.66667}{2} = 12\ 333.33333\ m^2$$

$$\frac{A_T}{3} = 12\ 333.33333\ m^2$$

<u>CORRECTO</u>

3. TRANSFORMACIÓN DE LINDEROS

La transformación de linderos tiene como objetivo el cambiar las características geométricas de un polígono sin variar la magnitud de su área. Este procedimiento se aplica cuando los colindantes llegan a un acuerdo de modificar un lindero por otro que cumpla con las necesidades y requerimientos de las partes interesadas.

3.1 Transformar un lindero sinuoso en un lindero recto

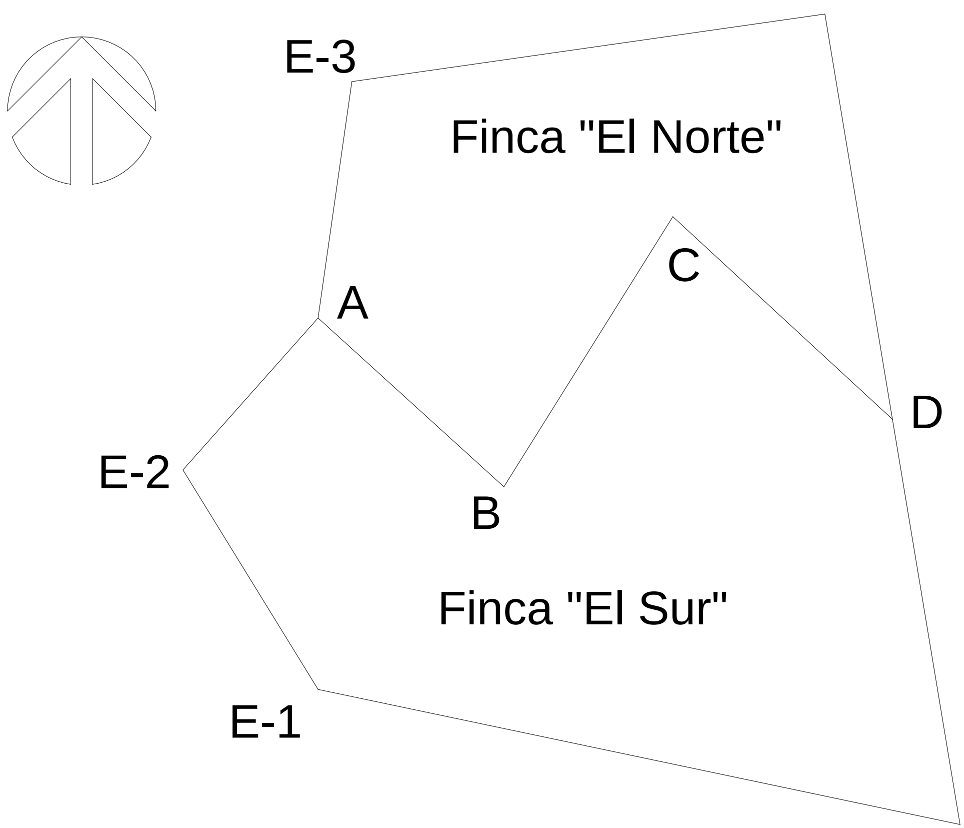
EJEMPLO 10

Sustituya el lindero sinuoso A, B, C, D, que divide las Fincas “El Norte” y “El Sur”, por un lindero recto, partiendo de A.

Finca "El Norte"			
EST	P.O.	Y	X
A	3	80	-80
3	4	100	60
4	D	-20	80
D	C	40	15
C	B	-40	-35
B	A	10	-90

Finca "El Sur"			
EST	P.O.	Y	X
5	1	-100	-90
1	2	-35	-130
2	A	10	-90
A	B	-40	-35
B	C	40	15
C	D	-20	80
D	5	-140	100

Figura 39. **Fincas separadas por un lindero sinuoso**



El primer paso consiste en calcular el área de cada finca.

Finca “El Norte”:

Y	X
80	-80
100	60
-20	80
40	15
-40	-35
10	-90
80	-80

$$A = \frac{13900 - (-14150)}{2} = 14\,025\ m^2$$

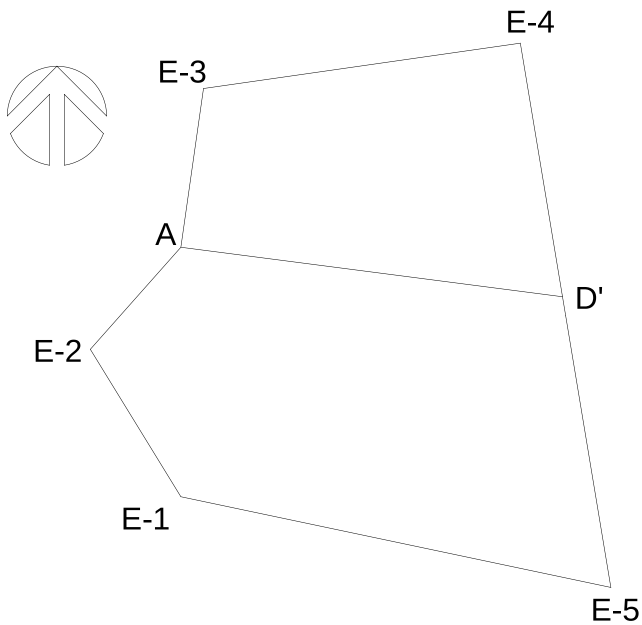
Finca “El Sur”:

Y	X
-100	-90
-35	-130
10	-90
-40	-35
40	15
-20	80
-140	100
-100	-90

$$A = \frac{29000 - (-17450)}{2} = 23\,225\ m^2$$

La estación D’ se encuentra sobre la recta definida por las estaciones 4 y 5, entonces se debe encontrar la ecuación de dicha recta.

Figura 40. **Nuevo lindero**



	Y	X
E-4	100	60
E-5	-140	100

$$m = \frac{100 + 140}{60 - 100} = -6$$

$$y - 100 = -6(x - 60)$$

$$y = -6x + 460$$

Las coordenadas de la estación D’ son:

$$D^{'}(-6x+460, x)$$

El siguiente paso consiste en calcular el área de un polígono, en función de “x”.

EST	P.O.	Y	X
A	3	80	-80
3	4	100	60
4	D'	-6x+460	x
D'	A	10	-90

Y	X
80	-80
100	60
-6x+460	x
10	-90
80	-80

$$A = \frac{\begin{matrix} 80*60+100x-90(-6x+460)-10*80 \\ -(-80*100+60(-6x+460)+10x-90*80) \end{matrix}}{2}$$

$$A = 495x - 24900$$

Se sustituye la magnitud que se conoce del área de la Finca “El Norte” y se despeja “x”.

$$14025 = 495x - 24900$$

$$x = \frac{14025 + 24900}{495} = \frac{865}{11} \cong 78.63636364$$

$$y = -6\left(\frac{865}{11}\right) + 460 = -\frac{130}{11} \cong -11.81818182$$

Las coordenadas de la estación D’ son:

$$D^{'}(-11.81818182{,}78.63636364)$$

PRUEBA:

La prueba consiste en calcular el área de la Finca “El Sur”.

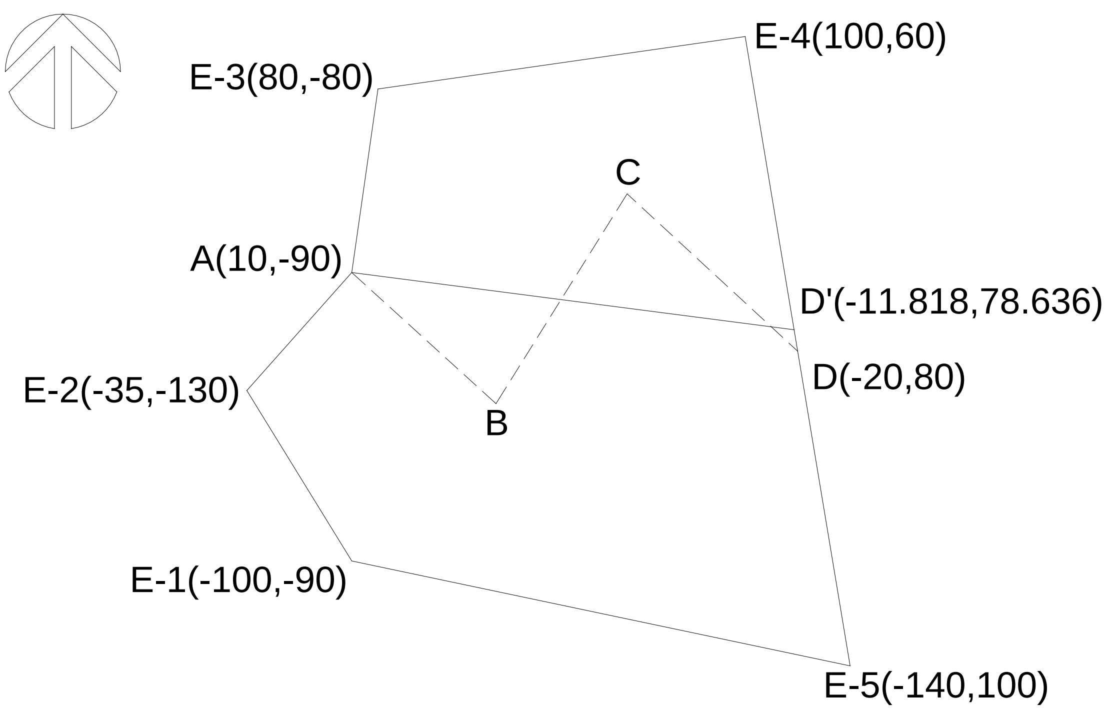
EST	P.O.	Y	X
5	1	-100	-90
1	2	-35	-130
2	A	10	-90
A	D'	-11.81818182	78.63636364
D'	5	-140	100

Y	X
-100	-90
-35	-130
10	-90
-11.81818182	78.63636364
-140	100
-100	-90

$$= \frac{28354.54545 - (-18095.45455)}{2} = \frac{46450}{2} = 23\,225\ m^2$$

En la figura 41 se pueden apreciar las condiciones inicial (línea discontinua) y la final (línea continua).

Figura 41. **Linderos inicial y final**



CORRECTO

3.2 Transformar un lindero sinuoso en un lindero constituido por dos rectas

Esta técnica se utiliza cuando se desea cambiar un lindero sinuoso y existen dos puntos de interés común a ambos colindantes por lo que el nuevo lindero debe pasar por dichos puntos.

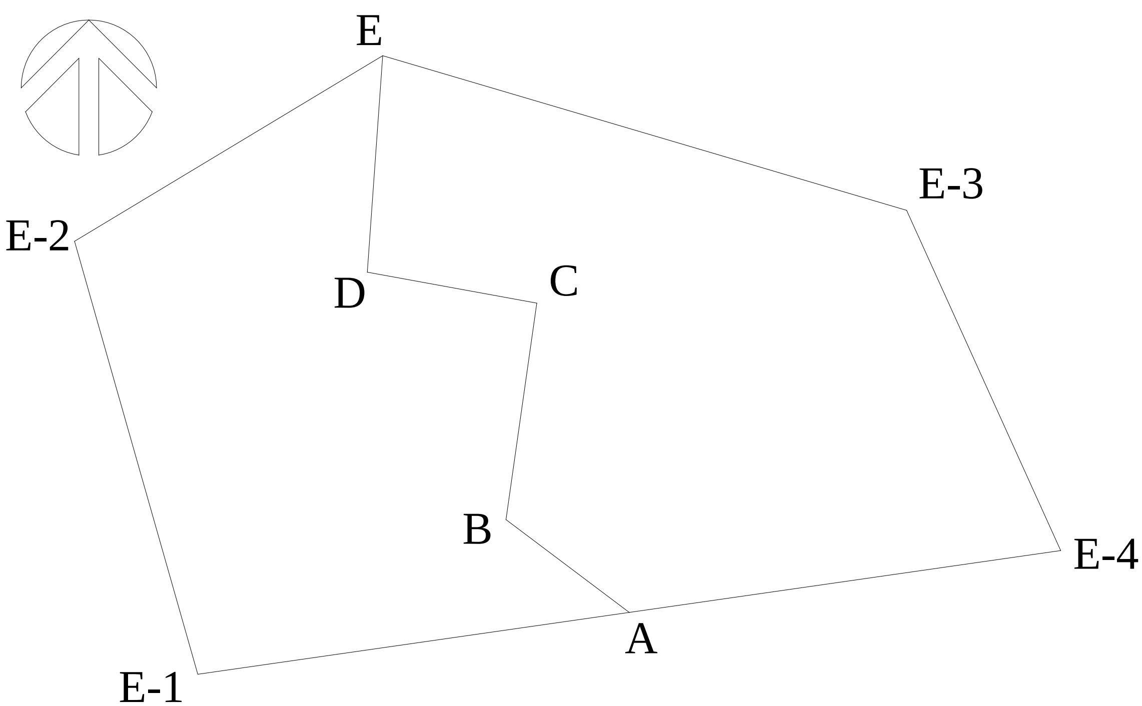
Ejemplo 11

Se desea transformar el lindero sinuoso mostrado en la figura 42, por otro constituido por dos rectas, conservando las estaciones B y C.

Finca 1			
EST	P.O.	Y	X
A	1	-90	-120
1	2	50	-160
2	E	110	-60
E	D	40	-65
D	C	30	-10
C	B	-40	-20
B	A	-70	20

Finca 2			
EST	P.O.	Y	X
4	A	-70	20
A	B	-40	-20
B	C	30	-10
C	D	40	-65
D	E	110	-60
E	3	60	110
3	4	-50	160

Figura 42. **Fincas separadas por un lindero sinuoso**



El primer paso consiste en calcular el área de cada finca:

Finca 1:

Y	X
-90	-120
50	-160
110	-60
40	-65
30	-10
-40	-20
-70	20
-90	-120

$$A = \frac{10850 - (-27950)}{2} = \frac{38800}{2} = 19400\ m^2$$

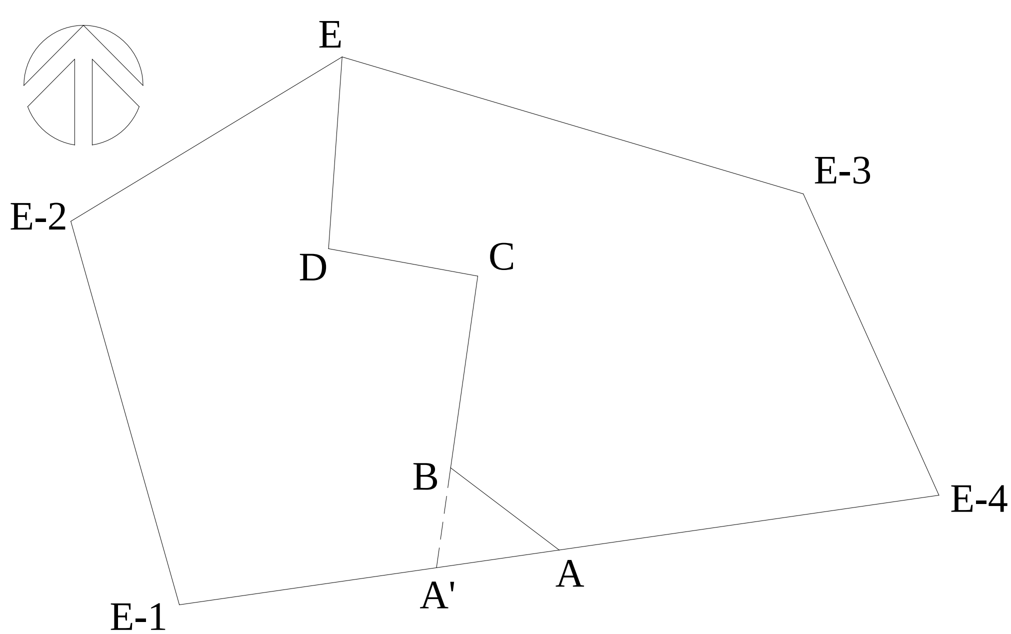
Finca 2:

Y	X
-70	20
-40	-20
30	-10
40	-65
110	-60
60	110
-50	160
-70	20

$$A = \frac{18150 - (-29250)}{2} = \frac{47400}{2} = 23700\ m^2$$

Lo que se debe hacer es prolongar el lindero formado por las estaciones B y C hasta la calle y el otro lindero se obtiene desde la estación C hasta la estación E’, según la figura 43.

Figura 43. **Lindero de división, primera parte**



Para encontrar las coordenadas de A’ se deben igualar las ecuaciones de las rectas 1-4 y B-C.

Recta 1-4:

	Y	X
E-1	-90	-120
E-4	-50	160

$$m = \frac{-90-(-50)}{-120-160} = \frac{1}{7}$$

$$y + 90 = \frac{1}{7}(x + 120)$$

$$y = \frac{1}{7}x - \frac{510}{7}$$

Recta B-C:

	Y	X
B	-40	-20
C	30	-10

$$m = \frac{-40-30}{-20-(-10)} = 7$$

$$y + 40 = 7(x + 20)$$

$$y = 7x + 100$$

Se procede a calcular las coordenadas de A':

$$\frac{1}{7}x - \frac{510}{7} = 7x + 100$$

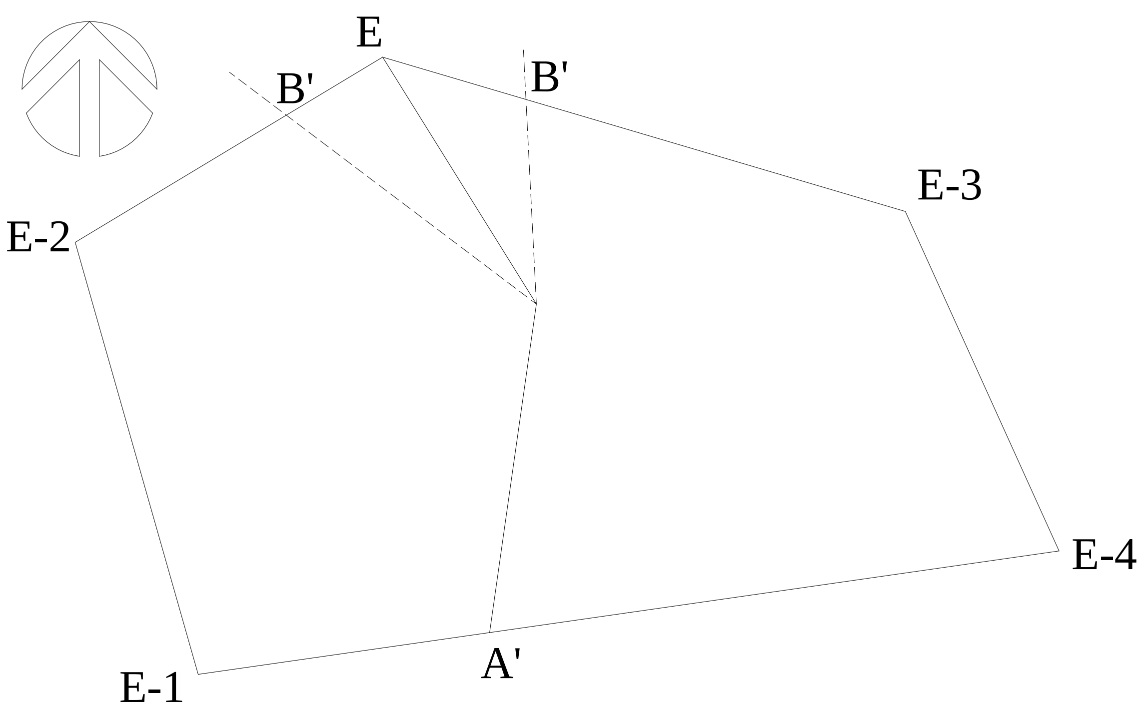
$$x = \frac{100 + \frac{510}{7}}{\frac{1}{7} - 7} = -\frac{605}{24} \cong -25.20833333$$

$$y = 7\left(-\frac{605}{24}\right) + 100 = -\frac{1835}{24} \cong -76.45833333$$

$$A'\left(-\frac{1835}{24}, -\frac{605}{24}\right)$$

El punto E' puede estar dentro de la recta 2-E o la E-3.

Figura 44. **Lindero de división, segunda parte**



Para conocer la posición del punto E' se debe calcular el área del polígono formado por las estaciones 1, 2, E, C y A'; si el área resulta mayor que el de la Finca 1, entonces E' está sobre la recta 2-E, de lo contrario, E' está sobre la recta E-3.

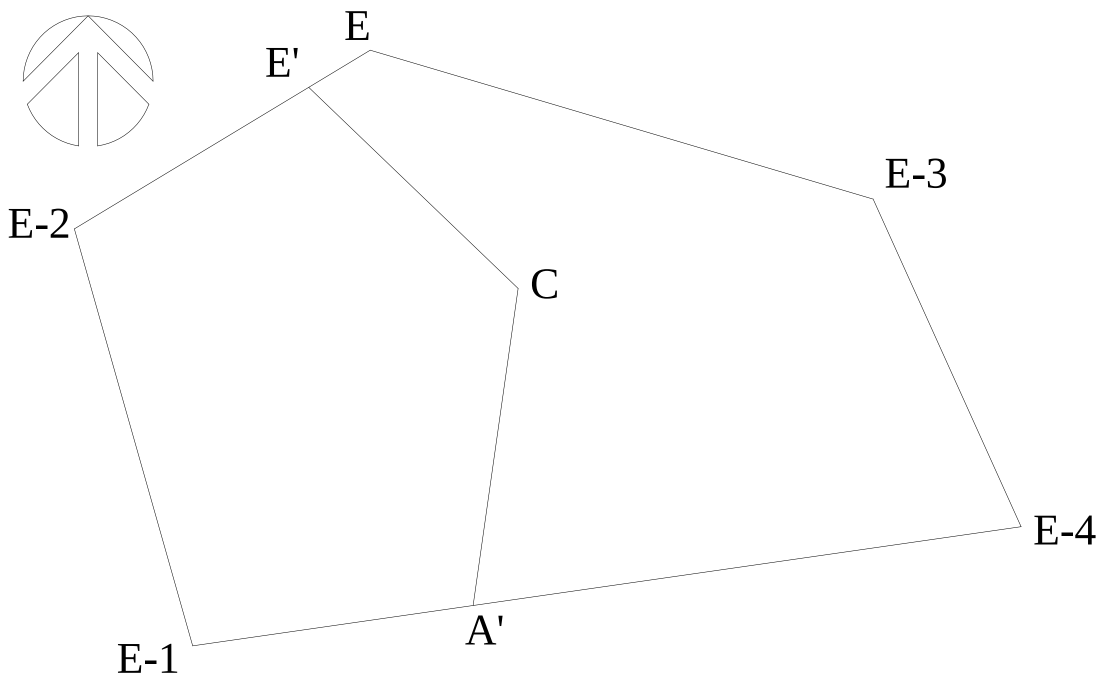
EST	P.O.	Y	X
A'	1	-90	-120
1	2	50	-160
2	E	110	-60
E	C	30	-10
C	A'	-1835/34	-605/24

Y	X
-90	-120
50	-160
110	-60
30	-10
-1835/34	-605/24
-90	-120

$$A = \frac{18718.75 - \left(-\frac{67100}{3}\right)}{2} = \frac{493025}{24} \cong 20\,542.70833\ m^2$$

Este dato es mayor que el área de la Finca 1 (19 400 m^2), entonces el punto E' está sobre la recta 2-E.

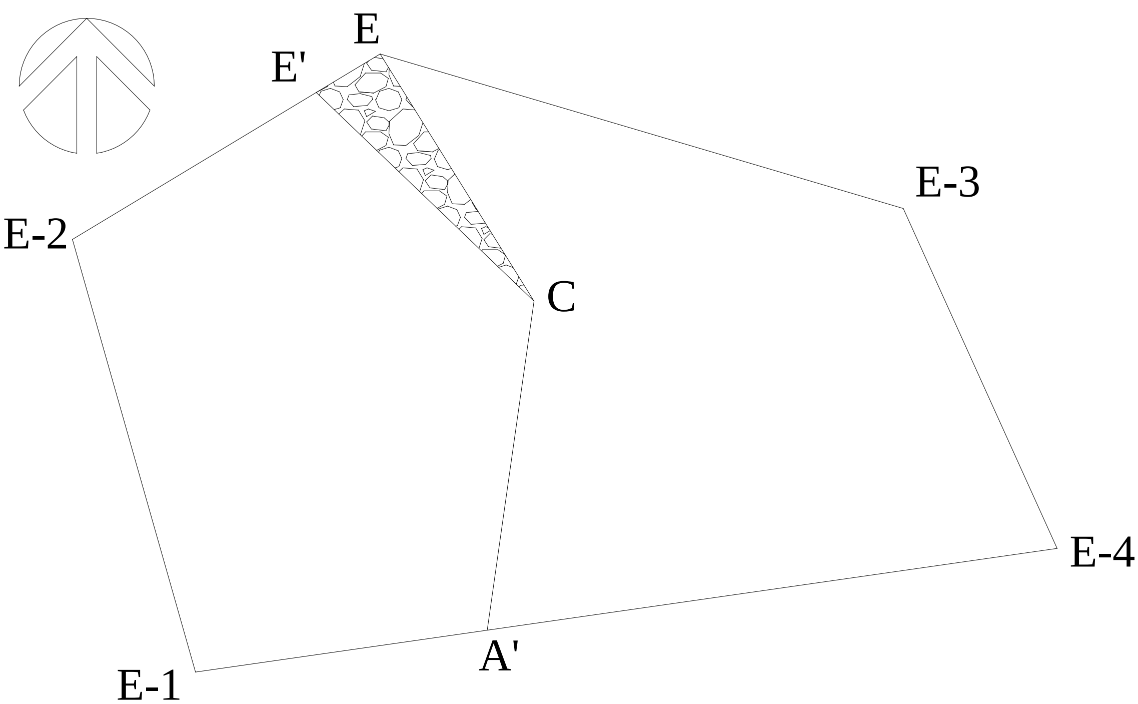
Figura 45. **Posición del lindero final**



La diferencia de área es:

$$\Delta A = \frac{493025}{24} - 19400 = \frac{27425}{24} \cong 1\,142.708333$$

Figura 46. **Diferencial de área**



Se procede a calcular la ecuación de la recta 2-E:

EST	Y	X
2	50	-160
E	110	-60

$$m = \frac{50 - 110}{-160 - (-60)} = 0.6$$

$$y - 50 = 0.6(x + 160)$$

$$y = 0.6x + 146$$

Las coordenadas de E’, son:

$$E^{'}(0.6x + 146, x)$$

Se procede a calcular el área del triangulo C-E’-E:

EST	P.O.	Y	X
E	C	30	-10
C	E'	0.6x+146	x
E'	E'	110	-60

Y	X
30	-10
0.6x+146	x
110	-60
30	-10

$$A = \frac{\begin{array}{c}30x - 60(0.6x + 146) - 10 * 110 \\ -(-10(0.6x + 146) + 110x - 60 * 30)\end{array}}{2} = -55x - 3300$$

Se sustituye el diferencial de área y se despeja la abscisa.

$$\frac{27425}{24} = -55x - 3300$$

$$x = \frac{-3300 - \frac{27425}{24}}{55} = -\frac{21325}{264} \cong -80.77651515$$

$$y = 0.6\left(-\frac{21325}{264}\right) + 146 = \frac{8583}{88} \cong 97.53409091$$

$$E'\left(\frac{8583}{88}, -\frac{21325}{264}\right)$$

PRUEBAS:

Consisten en calcular las áreas de las dos fincas.

Finca 1:

EST	P.O.	Y	X
A'	1	-90	-120
1	2	50	-160
2	E'	8583/88	-21325/264
E'	C	30	-10
C	A'	-1835/24	-605/24

Y	X
-90	-120
50	-160
8583/88	-21325/264
30	-10
-1835/24	-605/24
-90	-120

$$A = \frac{17804.58333 - (-20995.41667)}{2} = \frac{38800}{2} = 19\,400\ m^2$$

Finca 2:

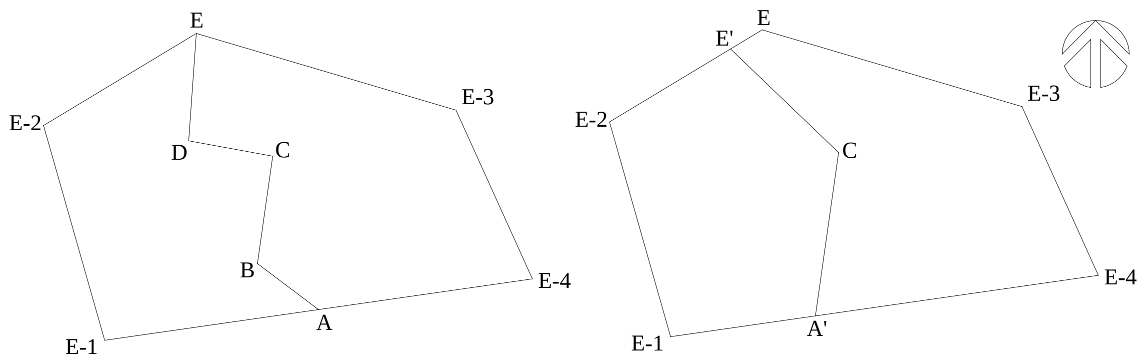
EST	P.O.	Y	X
E	3	60	110
3	4	-50	160
4	A'	-1835/24	-605/24
A'	C	30	-10
C	E'	8583/88	-21325/264
E'	E	110	-60

Y	X
60	110
-50	160
-1835/24	-605/24
30	-10
8583/88	-21325/264
110	-60
60	110

$$A = \frac{15449.65909 - (-31950.34091)}{2} = \frac{47400}{2} = 23\ 700\ m^2$$

En la figura 47 se muestran la condición inicial (izquierda) y la final (derecha).

Figura 47. **Condiciones inicial y final**



CORRECTO

3.3 Transformar un lindero en otro que pase por un punto determinado

Éste caso es parecido al anterior, excepto que en éste, es sólo un punto el que interesa a ambos colindantes, por tanto, a veces se debe cambiar un lindero recto por un lindero sinuoso o viceversa; esto depende de la forma de los polígonos y los requerimientos de los propietarios.

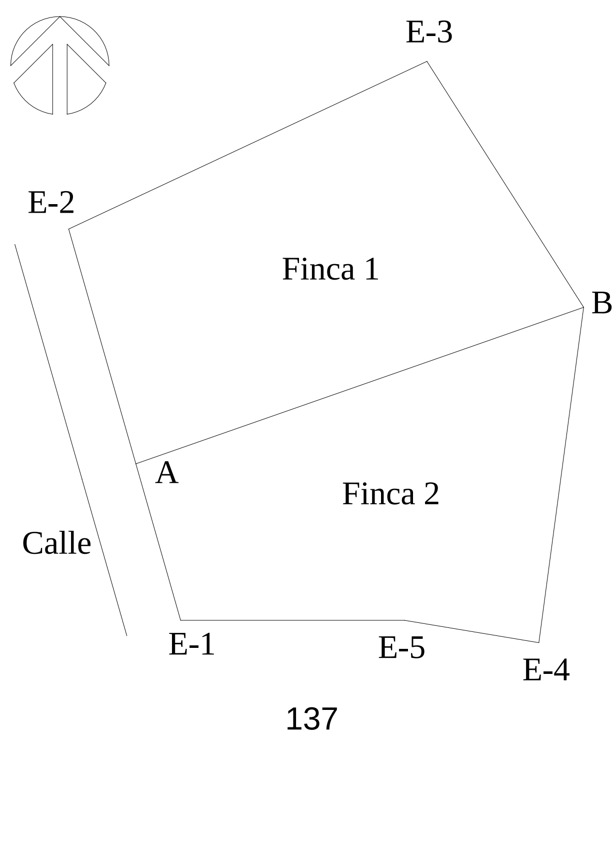
Ejemplo 12

Se requiere sustituir el lindero recto A-B por otro que pase por el punto C con coordenadas (50,10), ya que éste representa interés a ambos propietarios.

Finca 1			
EST	P.O.	Y	X
B	A	-20	-110
A	2	85	-140
2	3	160	20
3	B	50	90

Finca 2			
EST	P.O.	Y	X
5	1	-90	-90
1	A	-20	-110
A	B	50	90
B	4	-100	70
4	5	-90	10

Figura 48. **Fincas originales**



El primer paso es encontrar el área de cada finca.

Finca 1:

Y	X
-20	-110
85	-140
160	20
50	90
-20	-110

$$A = \frac{13400 - (-32550)}{2} = 22\,975\ m^2$$

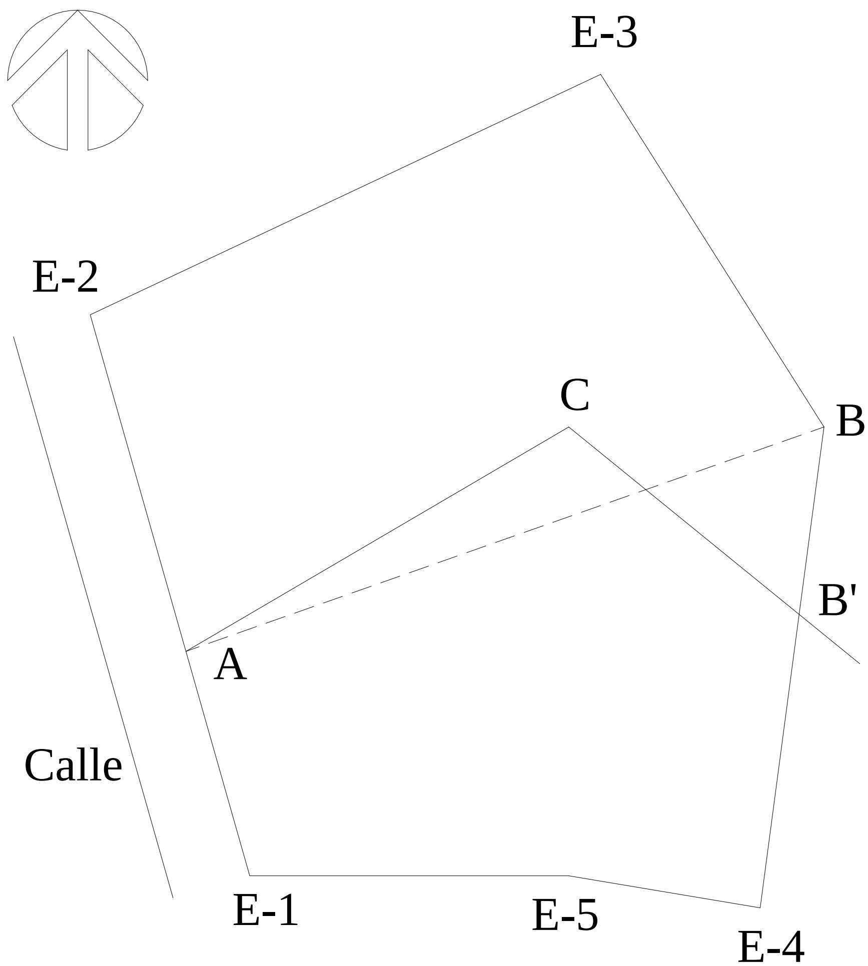
Finca 2:

Y	X
-90	-90
-20	-110
50	90
-100	70
-90	10
-90	-90

$$A = \frac{18700 - (-19900)}{2} = 19\,300\ m^2$$

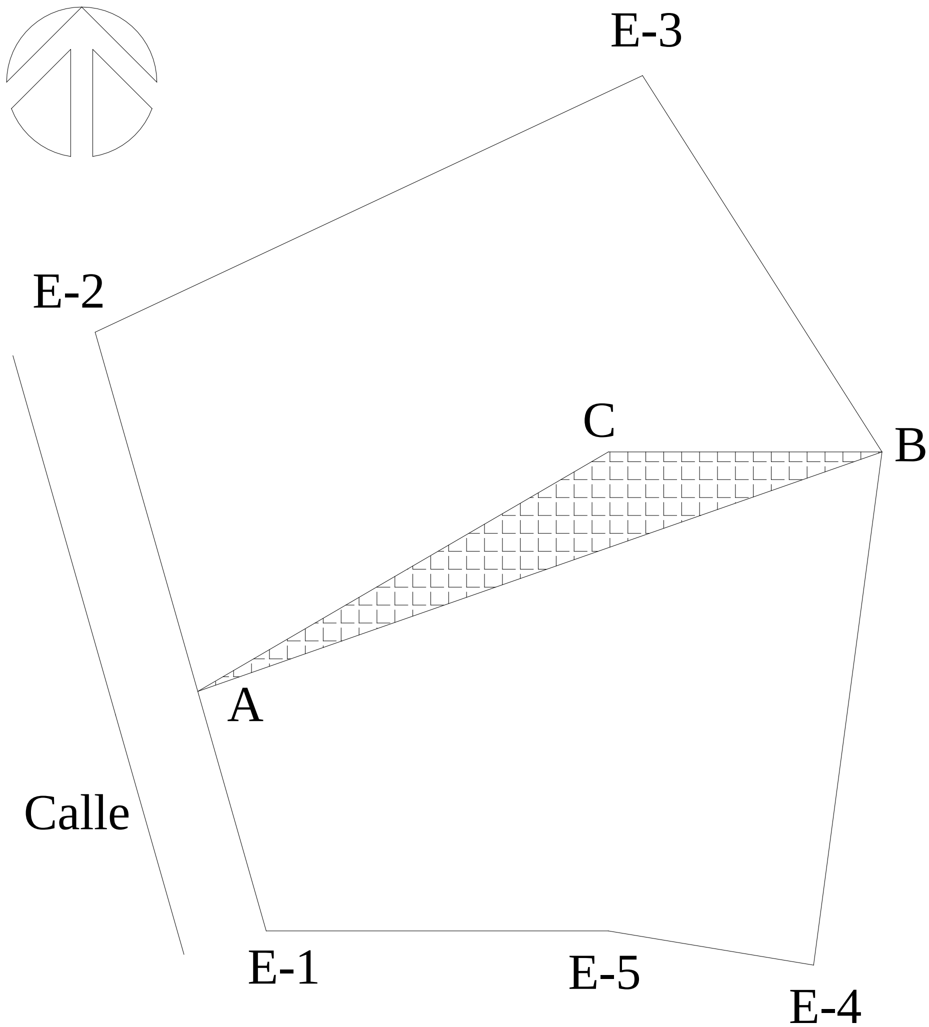
Lo más conveniente es dejar la estación A en la posición actual (ya que de otra manera se reduce la medida que da a la calle) y encontrar las coordenadas de B'.

Figura 49. **Condición requerida para el nuevo lindero**



Se debe formar un lindero primario formado por las estaciones A, C y B. Al formar el nuevo lindero, a la Finca 2 se le está agregando el área sombreada; se procede a calcular dicha área:

Figura 50. **Área agregada a la Finca dos**



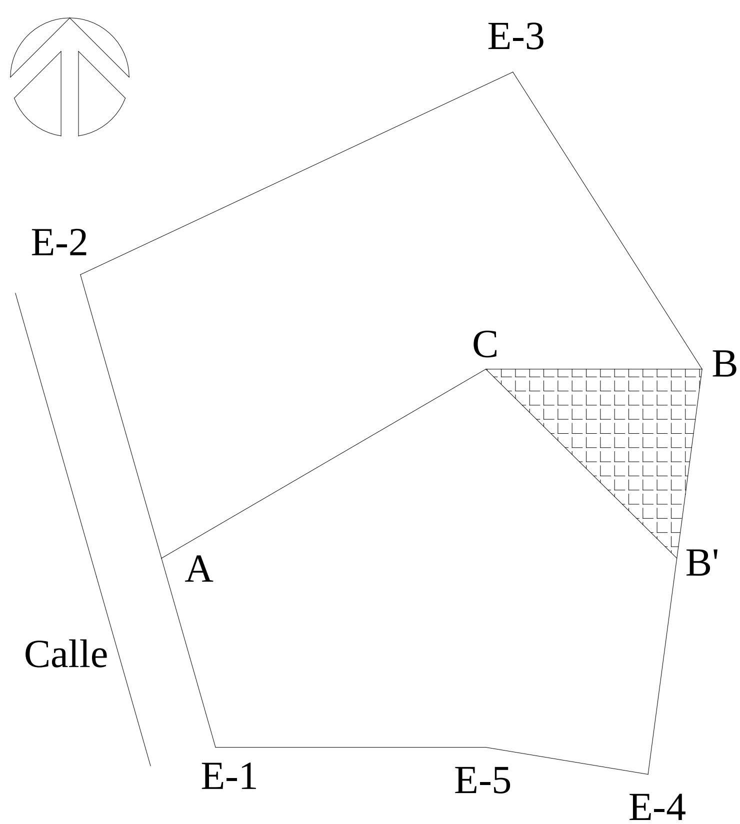
EST	P.O.	Y	X
B	A	-20	-110
A	C	50	10
C	B	50	90

Y	X
-20	-110
50	10
50	90
-20	-110

$$A = \frac{-1200 - (-6800)}{2} = 2800\ m^2$$

Dicha área que se le está sumando a la Finca 2, ahora se le debe restar por medio del triángulo C-B-B'.

Figura 51. **Área a sustraer de la Finca dos**



Se procede a calcular las coordenadas del punto B’, el cual, está sobre la recta B-4.

Ecuación de la recta B-4.

EST	Y	X
B	50	90
4	-100	70

$$m = \frac{50 - (-100)}{90 - 70} = 7.5$$

$$y - 50 = 7.5(x - 90)$$

$$y = 7.5x - 625$$

$$B'(7.5x - 625, x)$$

Se procede a calcular la expresión para el área del triángulo C-B-B’.

EST	P.O.	Y	X
B'	C	50	10
C	B	50	90
B'	B'	7.5x-625	x

Y	X
50	10
50	90
7.5x-625	x
50	10

$$A = \frac{\begin{array}{c}50*90+50x+10(7.5x-625)\\-[50*10+90(7.5x-625)+50x]\end{array}}{2} = 27000-300x$$

Se sustituye el área que se debe restar de la Finca 2 (2 800 m^2) y se despeja “x”.

$$2800 = 27000-300x$$

$$x = \frac{27000-2800}{300} = \frac{242}{3} \cong 80.66666667$$

$$y = 7.5\left(\frac{242}{3}\right)-625 = -20$$

$$B'\left(-20, \frac{242}{3}\right)$$

PRUEBAS:

Las pruebas consisten en encontrar el área de las dos fincas.

Finca 1:

EST	P.O.	Y	X
C	A	-20	-110
A	2	85	-140
2	3	160	20
3	B	50	90
B	B'	-20	242/3
B'	C	50	10

Y	X
-20	-110
85	-140
160	20
50	90
-20	242/3
50	10
-20	-110

$$A = \frac{\frac{51700}{3} - \left(-\frac{86150}{3}\right)}{2} = \frac{45950}{2} = 22\,975\ m^2$$

Finca 2:

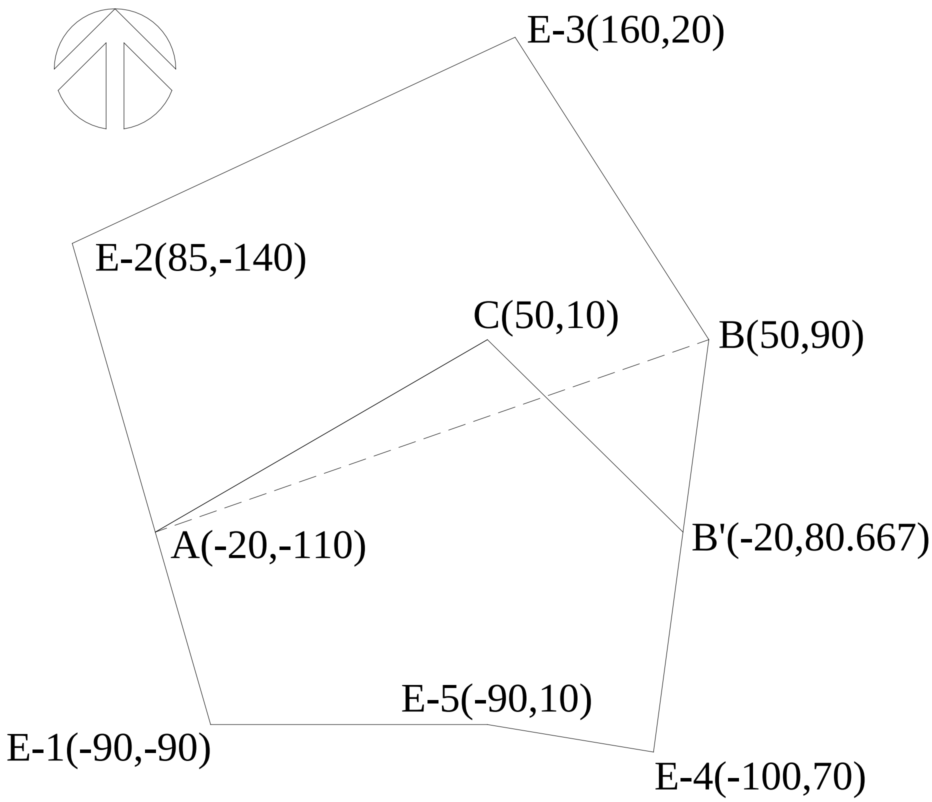
EST	P.O.	Y	X
5	1	-90	-90
1	A	-20	-110
A	C	50	10
C	B'	-20	242/3
B'	4	-100	70
4	5	-90	10

Y	X
-90	-90
-20	-110
50	10
-20	80.666667
-100	70
-90	10
-90	-90

$$A = \frac{\frac{58300}{3} - (-\frac{57500}{3})}{2} = \frac{38600}{2} = 19\,300\ m^2$$

En la figura 52 se muestran la condición inicial (línea discontinua) y la final (línea continua).

Figura 52. **Condiciones inicial y final**



<u>CORRECTO</u>

3.4 Transformar un lindero dado en otro constituido por una recta de rumbo dado

Esta técnica es muy útil cuando se desea cambiar un lindero y el nuevo que lo va a sustituir debe conservar una dirección en la que los vecinos de los terrenos han acordado. El lindero a sustituir puede o no ser sinuoso.

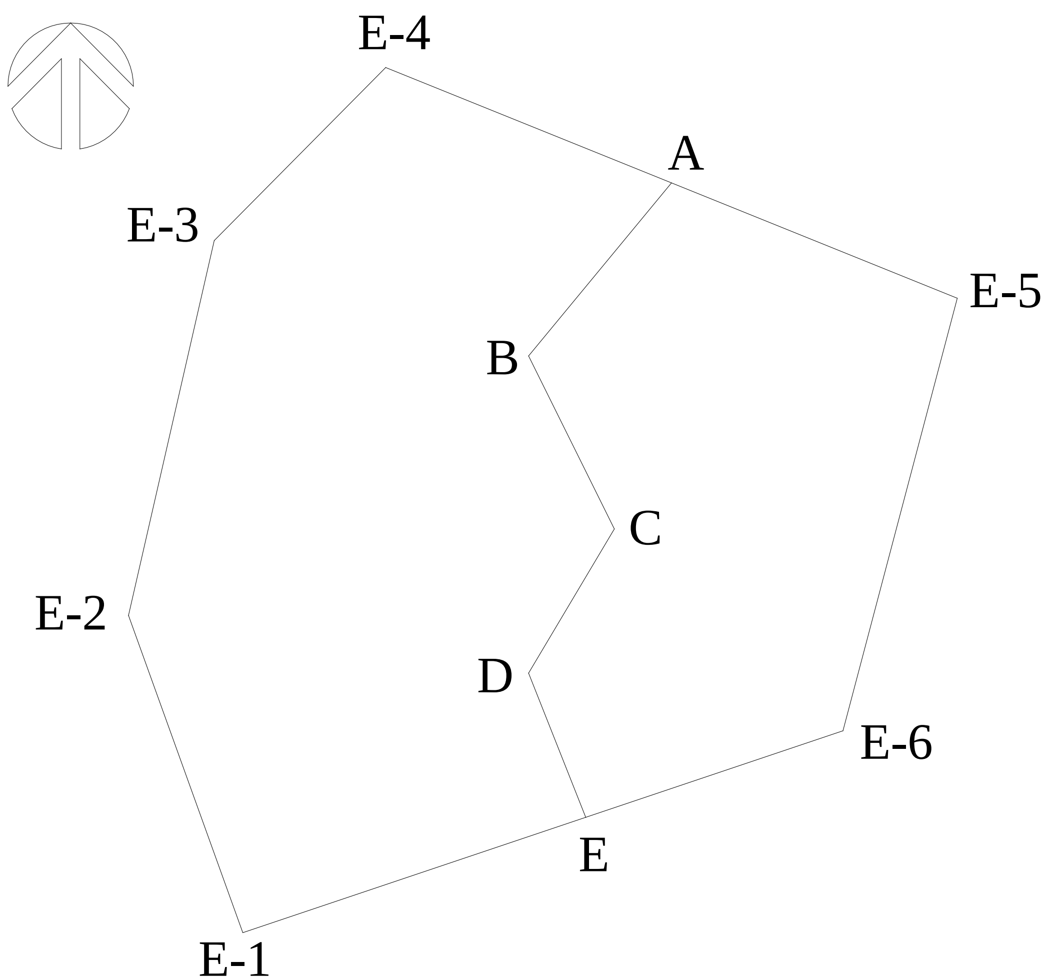
Ejemplo 13

En el polígono de la figura 53, se desea transformar el lindero sinuoso que divide las Fincas 1 y 2, con un nuevo lindero paralelo a la recta definida por las estaciones 5 y 6.

Finca 1			
EST	P.O.	Y	X
E	1	-150	-120
1	2	-40	-160
2	3	90	-130
3	4	150	-70
4	A	110	30
A	B	50	-20
B	C	-10	10
C	D	-60	-20
D	E	-110	0

Finca 2			
EST	P.O.	Y	X
6	E	-110	0
E	D	-60	-20
D	C	-10	10
C	B	50	-20
B	A	110	30
A	5	70	130
5	6	-80	90

Figura 53. **Fincas originales**



El primer paso consiste en calcular el área de cada finca.

Finca 1:

Y	X
-150	-120
-40	-160
90	-130
150	-70
110	30
50	-20
-10	10
-60	-20
-110	0
-150	-120

$$A = \frac{39100 - (-33500)}{2} = \frac{72600}{2} = 36\,300\ m^2$$

Finca 2:

Y	X
-110	0
-60	-20
-10	10
50	-20
110	30
70	130
-80	90
-110	0

$$A = \frac{23900 - (-19700)}{2} = 21\,800\ m^2$$

Se procede a calcular la pendiente de la recta 5-6.

	Y	X
E-5	70	130
E-6	-80	90

$$m = \frac{70 - (-80)}{130 - 90} = 3.75$$

La recta A'-E' debe ser paralela a la recta 5-6, por tanto, tienen la misma pendiente. La ecuación es:

$$y = 3.75x + b$$

El siguiente paso consiste en encontrar las coordenadas de A' y E', para ello se deben igualar las rectas que tengan como intersecciones dichos puntos:

Se deben calcular las ecuaciones de las rectas 1-6 y 4-5.

Recta 4-5:

	Y	X
E-4	150	-70
E-5	70	130

$$m = \frac{150 - 70}{-70 - 130} = -0.4$$

$$y - 150 = -0.4(+70)$$

$$y = -0.4x + 122$$

Recta 1-6:

	Y	X
E-1	-150	-120
E-6	-80	90

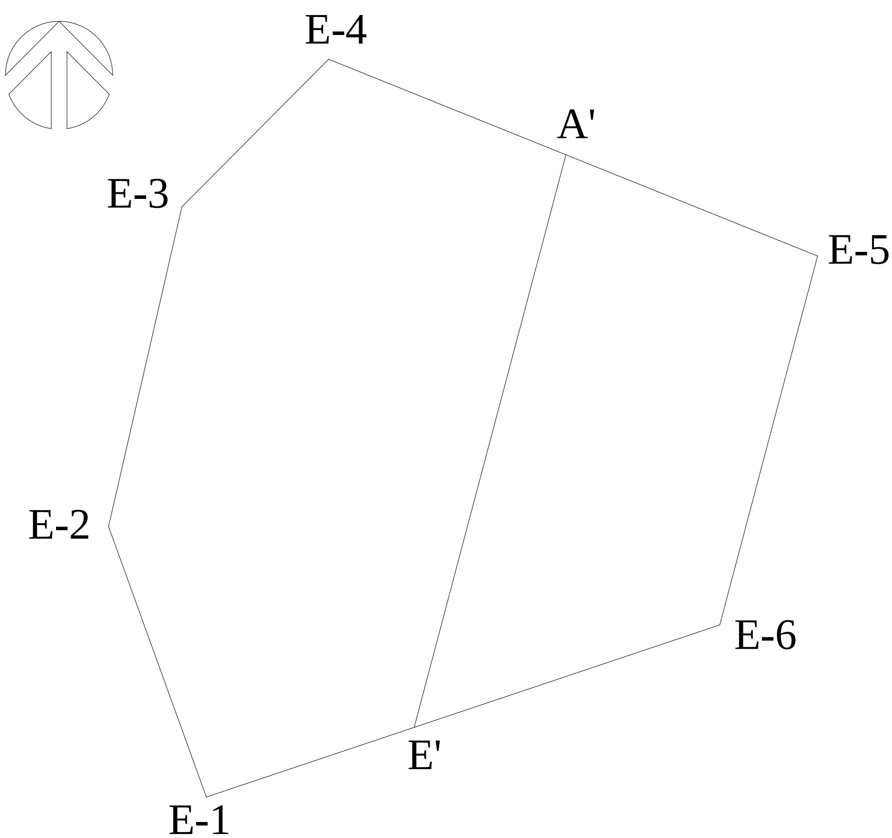
$$m = -\frac{150 - (-80)}{-120 - 90} = \frac{1}{3}$$

$$y + 150 = \frac{1}{3}(x + 120)$$

$$y = \frac{1}{3}x - 110$$

Se procede a calcular las estaciones de A’ y E’.

Figura 54. **Nuevo lindero de dirección dada**



Para el calcular las coordenadas de E’, se igualan las ecuaciones de las rectas 1-6 y A’-E’.

$$\frac{1}{3}x - 110 = 3.75x + b$$

$$x = \frac{b + 110}{\frac{1}{3} - 3.75} \cong -0.292682927b - 32.195122$$

$$Definir\ i(b) = -0.292682927b - 32.195122$$

$$y = \frac{1}{3}\big(i(b)\big) - 110 \cong -0.097560976b - 120.731707$$

$$efinir\ j(b) = -0.097560976b - 120.731707$$

Las coordenadas de E' son:

$$E^{'}(j(b), i(b))$$

Para el calcular las coordenadas de A', se igualan las ecuaciones de las rectas 4-5 y A'-E'.

$$-0.4x + 122 = 3.75x + b$$

$$x = \frac{b - 122}{-0.4 - 3.75} \cong 29.3975904 - 0.240963855b$$

$$Definir\ p(b) = 29.3975904 - 0.240963855b$$

$$y = -0.4\big(p(b)\big) = +122 \cong 0.096385542b + 110.240964$$

Las coordenadas de A' son:

$$A^{'}\big(q(b), p(b)\big)$$

El siguiente paso es calcular el área de una de las dos fincas (la de menos estaciones, para facilitar los cálculos) en función de b.

EST	P.O.	Y	X
5	6	-80	90
6	E'	j(b)	i(b)
E'	A'	q(b)	p(b)
A'	5	70	130

Y	X
-80	90
j(b)	i(b)
q(b)	p(b)
70	130
-80	90

$$A = -\frac{80i(b) + j(b)p(b) + 130q(b) - (90j(b) + i(b)q(b) + 70p(b) - 130 * 80)}{2}$$

$$A = 0.025859536b^2 + 61.5927123b + 21207.4787$$

Ahora se sustituye el área de la Finca 2, y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$21800 = 0.025859536b^2 + 61.5927123b + 21207.4787$$

$$b = 9.58144674$$

$$b = -2391.39963$$

Ahora se sustituye el primer valor de "b" en las expresiones para las coordenadas de las estaciones A' y E'.

$$i(b) = -34.9994478$$

$$j(b) = -121.666483$$

$$p(b) = 27.088808$$

$$q(b) = 111.164477$$

Las coordenadas son:

$$E^{'}(-121.666483, -34.9994478)$$

$$A^{'}(111.164477, 27.088808)$$

PRUEBA:

La prueba consiste en calcular el área de la Finca 1.

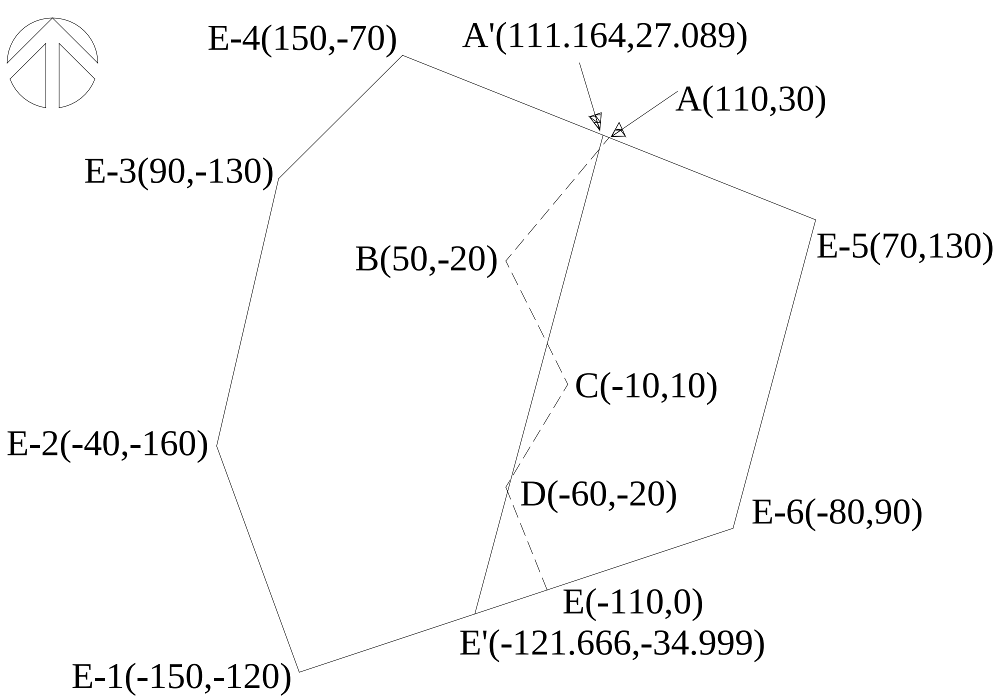
EST	P.O.	Y	X
E'	1	-150	-120
1	2	-40	-160
2	3	90	-130
3	4	150	-70
4	A'	111.164477	27.088808
A'	E'	-121.666483	-34.9994478

Y	X
-150	-120
-40	-160
90	-130
150	-70
111.164477	27.088808
-121.666483	-34.9994478
-150	-120

$$A = \frac{37672.60385 - (-34927.39622)}{2} = \frac{72600.00007}{2} = 36\ 300.00003\ m^2$$

En la figura 55 se muestran la condición inicial (línea discontinua) y la final (línea continua).

Figura 55. **Condiciones inicial y final**



CONCLUSIONES

1. Debido a la naturaleza abstracta de las matemáticas y por ende del método, es necesario no tomar los resultados como definitivos sin antes realizar pruebas analíticas y gráficas para verificar si los resultados son razonables.

2. Los métodos propuestos son válidos, tanto para particiones como para desmembraciones, ya que en esencia se trata del mismo problema: modificar linderos que cumplan con condiciones que se establecen por el propietario del inmueble.

3. Es de suma importancia tener en consideración que en la mayoría de los casos la incógnita es “b” (valor de la intersección de una recta con el eje vertical), por tanto, una gráfica del polígono ayuda a seleccionar el dato adecuado entre los dos obtenidos de la fórmula cuadrática.

4. Es muy importante saber identificar el tipo de problema con que se trabaja para elegir adecuadamente las incógnitas, con el fin de obtener una solución fácilmente.

5. Los métodos propuestos no se deben tomar como la única solución posible para resolver un caso específico que se presente, se debe captar el concepto, no la forma operatoria.

RECOMENDACIONES

1. El sistema de coordenadas utilizado en topografía cambia ligeramente del sistema tradicional en coordenadas cartesianas, por tanto, es de mucha utilidad escribir siempre sobre las coordenadas el par ordenado que representan, es decir, (y, x).

2. En la mayoría de los métodos utilizados en cualquier área, para resolver algún tipo de problema, si se comete un error al inicio, dicho error afecta el resultado final, por tanto, es una práctica muy buena, realizar pruebas (analíticas y gráficas) durante el proceso de cálculos y por supuesto, una última prueba con los resultados finales.

3. En este trabajo de graduación se utilizan muchos decimales, esto es por razones didácticas, ya que en la práctica los resultados finales no requieren tantos decimales, debido a que no interesan por ejemplo las décimas de milímetro.

BIBLIOGRAFÍA

1. Brinker, Russell. **Topografía moderna**. 6ta. Ed. México: Harla, 1982. 542 págs.

2. McCormac, Jack. **Topografía**. México: Limusa-Wiley, 2004. 416 págs.

3. Stewart, James y otros. **Precálculo**. 5ta. ed. México: Thomson Editores, 2007. 933 págs.

4. Valdez Ruiz, Pedro Oscar. Particiones, transformación y rectificación de linderos. Trabajo de graduación Ing. Civil. Guatemala, Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Ingeniería, 1997.

5. Argueta Girón, Gustavo Adolfo. Guía técnica para el curso de topografía II. Trabajo de graduación Ing. Civil. Guatemala, Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Ingeniería, 1997.