



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

**COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE  
EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**

**José Eduardo Valdez Méndez**

Asesorado por el Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila

Guatemala, octubre de 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE  
EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**JOSÉ EDUARDO VALDEZ MÉNDEZ**

ASESORADO POR EL ING. MARIO RODOLFO CORZO ÁVILA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, OCTUBRE DE 2014

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Narda Lucía Pacay Barrientos
VOCAL V	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
EXAMINADOR	Ing. Mario Estuardo Arriola Ávila
EXAMINADOR	Ing. Crecencio Benjamín Cifuentes Velásquez
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 16 de octubre de 2013.



**José Eduardo Valdez Méndez**

Guatemala, 6 de agosto de 2014

Ingeniero

Ronald Estuardo Galindo Cabrera

Jefe del Departamento de Estructuras

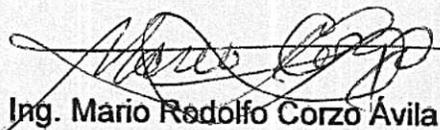
Escuela de Ingeniería Civil

Facultad de Ingeniería

Estimado Ingeniero Galindo:

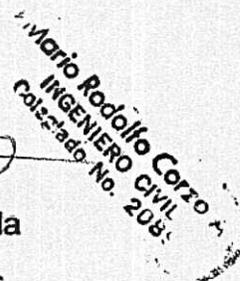
Por medio de la presente, me permito informarle que he revisado el trabajo de graduación realizado por el estudiante de Ingeniería Civil **JOSÉ EDUARDO VALDEZ MÉNDEZ**, titulado "**COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**", habiéndolo encontrado completamente satisfactorio.

Sin otro particular, me suscribo de usted, atentamente.



Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila

Jefe del Área de Estructuras  
Centro de Investigaciones de Ingeniería USAC





**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

Universidad de San Carlos de Guatemala  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Escuela de Ingeniería Civil



Guatemala,  
10 de septiembre de 2014

Ingeniero  
Hugo Leonel Montenegro Franco  
Director Escuela Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos

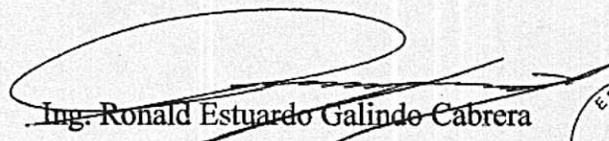
Estimado Ingeniero Montenegro.

Le informo que he revisado el trabajo de graduación **COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**, desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil José Eduardo Valdez Méndez, con Carnet No. 201021110, quien contó con la asesoría del Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila.

Considero este trabajo bien desarrollado y representa un aporte para la comunidad del área y habiendo cumplido con los objetivos del referido trabajo doy mi aprobación al mismo solicitando darle el trámite respectivo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS



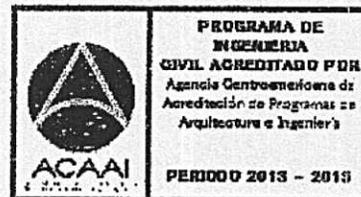
Ing. Ronald Estuardo Galindo Cabrera  
Jefe del Departamento de Estructuras



FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO  
DE  
ESTRUCTURAS  
USAC

/bbdeb.

Mas de 134 años de Trabajo Académico y Mejora Continua





**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

Universidad de San Carlos de Guatemala  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
Escuela de Ingeniería Civil



El director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila y del Coordinador del Departamento de Estructuras Ing. Ronald Estuardo Galindo, al trabajo de graduación del estudiante José Eduardo Valdez Méndez, titulado **COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**, da por este medio su aprobación a dicho trabajo.

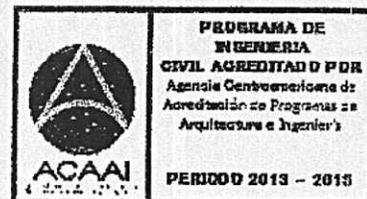
*[Handwritten signature]*  
Ing. Hugo Leonel Montenegro Franco



Guatemala, octubre 2014.

/bbdeb.

Mas de **134** años de Trabajo Académico y Mejora Continua





DTG. 533.2014

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, al Trabajo de Graduación titulado: **COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS RÍGIDOS MEDIANTE EXCEL: MÉTODO MATRICIAL DE LAS RIGIDECES Y MÉTODOS CLÁSICOS**, presentado por el estudiante universitario José Eduardo Valdez Méndez, y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, se autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE:

Ing. Murphy Olimpo Paiz Recinos  
Decano

Guatemala, 10 de octubre de 2014

/gdech



## **ACTO QUE DEDICO A**

<b>Mi madre</b>	Sonia Méndez, gracias por estar siempre cuidando de nosotros.
<b>Mi padre</b>	Juan Valdez, gracias por todo.
<b>Mis hermanos</b>	Sofía Valdez, Juan Valdez y Belén Valdez: sigan sus sueños y consigan lo que se propongan.
<b>Mi abuela</b>	Zonia Vidal, quien siempre se ha preocupado por sus nietos.
<b>Mis tíos</b>	Alma Méndez e Ignacio Sandoval por todo su apoyo y preocupación.

## **AGRADECIMIENTOS**

<b>Mi madre</b>	Por todo el apoyo y comprensión que ha brindado a mis hermanos y a mí.
<b>Hermanos</b>	Por su ayuda, apoyo y todo lo demás.
<b>Mi familia</b>	Agradezco su ayuda, especialmente a mi abuela Zonia Vidal, a mis tíos Alma Méndez e Ignacio Sandoval y a mi tío Luis Felipe León.
<b>La Universidad de San Carlos de Guatemala</b>	Por haberme dado la oportunidad de cursar una carrera universitaria.
<b>Facultad de Ingeniería</b>	Por haberme dado la formación como Ingeniero Civil y por las experiencias allí vividas.
<b>Pueblo de Guatemala</b>	Debido a la inversión que ha hecho en mi formación académica, la cual he de retribuir.
<b>Mis amigos del ITV</b>	A los del grupo Chile Verde, especialmente a Diego Castellanos, Pablo Navas y Bayron Telón.

**Compañeros y amigos**

A todos con quienes tuve la oportunidad de estar en las clases, estudiar, trabajar en los proyectos, convivir, ayudar y que me ayudaron, especialmente a: Absalón Galindo, Carlos Grajeda, Carlos Godoy, Carlos Xoquic, Daniel Ramos, Edy Rodríguez, Estuardo López, Gabriel Moreira, Gerber González, Javier Hernández, José Pedro Suntecún, Josué Chic, Juan Diego Mejía, Kevin Martínez, Pablo Navas y Roger Calderon.

**Mi asesor**

Ingeniero Mario Corzo, por haberme apoyado con sus sugerencias y comentarios en la elaboración de este trabajo, y también por sus enseñanzas.

**Compañeros y amigos de prácticas finales**

A los compañeros y amigos de las prácticas finales (incluyendo a don Fabio Sánchez) de las secciones de Prefabricados y Ecomateriales del Centro de Investigaciones de Ingeniería durante el segundo semestre de 2013: César Bernal, Daniel Ac, Diego Seisdodos, Evelyn Contreras, Helen Castañeda, José Bolívar, Tony Velásquez y Yoselin López.



1.3.1.	Recomendaciones de AGIES (NSE-10) .....	17
1.3.2.	Recomendaciones de UBC 1997, ASCE 7-10 y ACI 318-08 .....	18
1.3.2.1.	Código UBC 1997 .....	18
1.3.2.2.	Código ASCE 7-10 .....	21
1.3.2.3.	Código ACI 318S-08 .....	24
2.	MÉTODOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL .....	29
2.1.	Método Matricial de la Rigideces .....	29
2.1.1.	Análisis de marcos planos.....	32
2.1.1.1.	Procedimiento de análisis de marcos planos .....	33
2.1.1.2.	Marcos con uniones articuladas .....	38
2.1.1.3.	Simplificaciones para marcos regulares .....	41
2.2.	Métodos clásicos de análisis estructural .....	45
2.2.1.	Método de Distribución de Momentos (Método de Cross).....	47
2.2.1.1.	Distribución de momentos fijos.....	48
2.2.1.2.	Marcos con ladeo .....	50
2.2.2.	Método de Kani .....	51
2.2.2.1.	Marcos con nudos rígidos (no desplazables) .....	52
2.2.2.2.	Marcos con nudos desplazables .....	54
3.	METODOLOGÍA DE LOS ANÁLISIS Y COMPARACIONES .....	57
4.	ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 1. ....	63
4.1.	Estructura simétrica.....	63

4.1.1.	Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas.....	63
4.1.1.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	65
4.1.1.2.	Método de Distribución de Momentos .....	66
4.1.1.3.	Método de Kani.....	68
4.1.2.	Cargas uniformemente distribuidas sobre vigas alternadas.....	70
4.1.2.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	71
4.1.2.2.	Método de Distribución de Momentos .....	73
4.1.2.3.	Método de Kani.....	75
4.1.3.	Cargas puntuales laterales .....	77
4.1.3.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	78
4.1.3.2.	Método de Distribución de Momentos .....	79
4.1.3.3.	Método de Kani.....	81
4.2.	Estructura asimétrica.....	83
4.2.1.	Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas.....	83
4.2.1.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	84
4.2.1.2.	Método de Distribución de Momentos .....	86
4.2.1.3.	Método de Kani.....	88
4.2.2.	Cargas uniformemente distribuidas sobre vigas alternadas.....	90
4.2.2.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	91
4.2.2.2.	Método de Distribución de Momentos .....	92

	4.2.2.3.	Método de Kani .....	94
	4.2.3.	Cargas puntuales laterales.....	96
	4.2.3.1.	Método Matricial de las Rigideces.....	97
	4.2.3.2.	Método de Distribución de Momentos.....	98
	4.2.3.3.	Método de Kani .....	100
5.		ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 2. ....	103
5.1.		Estructura simétrica.....	103
	5.1.1.	Resultados del Método Matricial de las Rigideces.....	105
	5.1.1.1.	Método Regular.....	105
	5.1.1.2.	Método Simplificado .....	105
	5.1.2.	Método de Distribución de Momentos .....	106
	5.1.2.1.	Comparación con el Método Matricial Regular .....	106
	5.1.2.2.	Comparación con el Método Matricial Simplificado.....	110
	5.1.3.	Método de Kani .....	113
	5.1.3.1.	Comparación con el Método Matricial Regular .....	113
	5.1.3.2.	Comparación con el Método Matricial Simplificado.....	116
5.2.		Estructura asimétrica.....	119
	5.2.1.	Resultados del Método Matricial de las Rigideces.....	121
	5.2.1.1.	Método Regular.....	121
	5.2.1.2.	Método Simplificado .....	121
	5.2.2.	Método de Distribución de Momentos .....	122

	5.2.2.1.	Comparación con el Método Matricial Regular .....	122
	5.2.2.2.	Comparación con el Método Matricial Simplificado .....	126
	5.2.3.	Método de Kani.....	129
	5.2.3.1.	Comparación con el Método Matricial Regular .....	129
	5.2.3.2.	Comparación con el Método Matricial Simplificado .....	133
6.		ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 3.....	137
6.1.		Columnas empotradas.....	137
	6.1.1.	Cargas simétricas .....	138
	6.1.1.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	139
	6.1.1.2.	Método de Distribución de Momentos .....	139
	6.1.2.	Cargas asimétricas .....	140
	6.1.2.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	141
	6.1.2.2.	Método de Distribución de Momentos .....	142
6.2.		Columnas articuladas .....	143
	6.2.1.	Cargas simétricas .....	143
	6.2.1.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	145
	6.2.1.2.	Método de Distribución de Momentos .....	146
	6.2.2.	Cargas asimétricas .....	147
	6.2.2.1.	Método Matricial de las Rigideces .....	148
	6.2.2.2.	Método de Distribución de Momentos .....	148

CONCLUSIONES..... 151  
RECOMENDACIONES ..... 155  
BIBLIOGRAFÍA..... 157  
APÉNDICE ..... 159

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

### FIGURAS

1.	Distribución de columnas en planta .....	4
2.	Tipos de áreas tributarias para columnas .....	5
3.	Diferentes tamaños de columnas.....	5
4.	Sección transversal de una viga sometida a flexión.....	10
5.	Viga con un extremo lejano empotrado.....	12
6.	Reacciones debido a desplazamientos unitarios .....	14
7.	Apoyos en los miembros .....	38
8.	Fuerzas y desplazamientos en extremos de vigas y columnas.....	43
9.	Marco 1, estructura simétrica .....	63
10.	Solicitudes de carga para el caso 4.1.1.....	64
11.	Curva elástica para el caso 4.1.1. ....	64
12.	Solicitudes para el caso 4.1.2. ....	70
13.	Curva elástica para el caso 4.1.2. ....	71
14.	Solicitudes para el caso 4.1.3.. ....	77
15.	Curva elástica para el caso 4.1.3. ....	78
16.	Marco 1, estructura asimétrica .....	83
17.	Solicitudes de carga para el caso 4.2.1.....	84
18.	Curva elástica para el caso 4.2.1. ....	84
19.	Solicitudes para el caso 4.2.2. ....	90
20.	Curva elástica para el caso 4.2.2. ....	90
21.	Solicitudes para el caso 4.2.3. ....	96
22.	Curva elástica para el caso 4.2.3. ....	96
23.	Marco 2, estructura simétrica .....	103

24.	Solicitudes de carga para el caso 5.1.....	104
25.	Curva elástica para el caso 5.1.....	104
26.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.2.1.....	107
27.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.2.1.....	108
28.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.2.1.....	108
29.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.2.1.....	109
30.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.2.2.....	110
31.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.2.2.....	111
32.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.2.2.....	112
33.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.2.2.....	112
34.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.3.1.....	114
35.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.3.1.....	114
36.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.3.1.....	115
37.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.3.1.....	116
38.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.3.2.....	117
39.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.3.2.....	117
40.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.3.2.....	118
41.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.3.2.....	119
42.	Marco 2, estructura asimétrica.....	119
43.	Solicitudes de carga para el caso 5.2.....	120
44.	Curva elástica para el caso 5.2.....	120
45.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.2.1.....	123
46.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.2.1.....	123
47.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.2.1.....	124
48.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.2.1.....	125
49.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.2.2.....	126
50.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.2.2.....	127
51.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.2.2.....	128
52.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.2.2.....	128

53.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.3.1. ....	130
54.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.3.1. ....	131
55.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.3.1. ....	132
56.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.3.1. ....	132
57.	Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.3.2. ....	133
58.	Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.3.2. ....	134
59.	Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.3.2. ....	135
60.	Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.3.2. ....	136
61.	Configuración estructural del marco 3, con apoyos empotrados.....	137
62.	Solicitudes de carga para el caso 6.1.1.....	138
63.	Curva elástica para el caso 6.1.1.....	138
64.	Solicitudes de carga para el caso 6.1.2.....	141
65.	Curva elástica para el caso 6.1.2.....	141
66.	Configuración estructural del marco 3, con apoyos articulados .....	144
67.	Solicitudes de carga para el caso 6.2.1.....	144
68.	Curva elástica para el caso 6.2.1.....	145
69.	Solicitudes de carga para el caso 6.2.2.....	147
70.	Curva elástica para el caso 6.2.2.....	147

## TABLAS

I.	Espesores de vigas de concreto .....	3
II.	Relaciones de luz y peralte requerido para vigas de acero.....	8
III.	Adaptación de la tabla 1-1 de NSE 3-10. ....	17
IV.	Momentos para vigas continuas, 2 vanos. ....	27
V.	Momentos para vigas, 3 o más vanos.....	27
VI.	Resultados del caso 4.1.1.1. (Regular), en t·m.....	65
VII.	Resultados del caso 4.1.1.1. (Simplificado), en t·m .....	66
VIII.	Resultados del caso 4.1.1.2., en t·m.....	66

IX.	Comparación del caso 4.1.1.2. con el caso 4.1.1.1. (Regular).....	67
X.	Comparación del caso 4.1.1.2. con el caso 4.1.1.1. (Simplificado).....	68
XI.	Resultados del caso 4.1.1.3., en t·m .....	68
XII.	Comparación del caso 4.1.1.3. con el caso 4.1.1.1. (Regular).....	69
XIII.	Comparación del caso 4.1.1.3. con el caso 4.1.1.1. (Simplificado).....	70
XIV.	Resultados del caso 4.1.2.1. (Regular), en t·m .....	72
XV.	Resultados del caso 4.1.2.1. (Simplificado), en t·m.....	72
XVI.	Resultados del caso 4.1.2.2., en t·m .....	73
XVII.	Comparación del caso 4.1.2.2. con el caso 4.1.2.1. (Regular).....	74
XVIII.	Comparación del caso 4.1.2.2. con el caso 4.1.2.1. (Simplificado).....	75
XIX.	Resultados del caso 4.1.2.3., en t·m .....	75
XX.	Comparación del caso 4.1.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Regular).....	76
XXI.	Comparación del caso 4.1.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Simplificado).....	77
XXII.	Resultados del caso 4.1.3.1. (Regular), en t·m .....	79
XXIII.	Resultados del caso 4.1.3.1. (Simplificado), en t·m.....	79
XXIV.	Resultados del caso 4.1.3.2., en t·m .....	80
XXV.	Comparación del caso 4.1.3.2. con el caso 4.1.3.1. (Regular).....	80
XXVI.	Comparación del caso 4.1.3.2. con el caso 4.1.3.1. (Simplificado).....	81
XXVII.	Resultados del caso 4.1.3.3., en t·m. ....	81

XXVIII.	Comparación del caso 4.1.3.3. con el caso 4.1.3.1. (Regular).....	82
XXIX.	Comparación del caso 4.1.3.3. con el caso 4.1.3.1. (Simplificado) .....	82
XXX.	Resultados del caso 4.2.1.1. (Regular), en t·m.....	85
XXXI.	Resultados del caso 4.2.1.1. (Simplificado), en t·m.....	85
XXXII.	Resultados del caso 4.2.1.2, en t·m .....	86
XXXIII.	Comparación del caso 4.2.1.2. con el caso 4.2.1.1. (Regular) .....	87
XXXIV.	Comparación del caso 4.2.1.2. con el caso 4.2.1.1. (Simplificado) .....	87
XXXV.	Resultados del caso 4.2.1.3., en t·m .....	88
XXXVI.	Comparación del caso 4.2.1.3. con el caso 4.2.1.1. (Regular) .....	89
XXXVII.	Comparación del caso 4.2.1.3. con el caso 4.2.1.1. (Simplificado) .....	89
XXXVIII.	Resultados del caso 4.2.2.1. (Regular), en t·m.....	91
XXXIX.	Resultados del caso 4.2.2.1. (Simplificado), en t·m.....	92
XL.	Resultados del caso 4.2.2.2., en t·m. ....	92
XLI.	Comparación del caso 4.2.2.2. con el caso 4.2.2.1. (Regular).....	93
XLII.	Comparación del caso 4.2.2.2. con el caso 4.2.2.1. (Simplificado) .....	94
XLIII.	Resultados del caso 4.2.2.3., en t·m .....	94
XLIV.	Comparación del caso 4.2.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Regular).....	95
XLV.	Comparación del caso 4.2.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Simplificado) .....	95
XLVI.	Resultados del caso 4.2.3.1. (Regular), en t·m.....	97

XLVII.	Resultados del caso 4.2.3.1. (Simplificado), en t·m.....	98
XLVIII.	Resultados del caso 4.2.3.2, en t·m .....	98
XLIX.	Comparación del caso 4.2.3.2. con el caso 4.2.3.1. (Regular).....	99
L.	Comparación del caso 4.2.3.2. con el caso 4.2.3.1. (Simplificado).....	100
LI.	Resultados del caso 4.2.3.3., en t·m .....	100
LII.	Comparación del caso 4.2.3.3. con el caso 4.2.3.1. (Regular).....	101
LIII.	Comparación del caso 4.2.3.3. con el caso 4.2.3.1. (Simplificado).....	101
LIV.	Resultados del Método Matricial Regular, en t·m .....	105
LV.	Resultados del Método Matricial Simplificado, en t·m .....	106
LVI.	Resultados del Método Matricial Regular, en t·m .....	121
LVII.	Resultados del Método Matricial Simplificado, en t·m .....	122
LVIII.	Resultados del caso 6.1.1.1., en t·m .....	139
LIX.	Resultados del caso 6.1.1.2., en t·m .....	139
LX.	Comparación del caso 6.1.1.2. con el caso 6.1.1.1. ....	140
LXI.	Resultados del caso 6.1.2.1., en t·m .....	142
LXII.	Resultados del caso 6.1.2.2., en t·m .....	142
LXIII.	Comparación del caso 6.1.2.2. con el caso 6.1.2.1. ....	143
LXIV.	Resultados del caso 6.2.1.1., en t·m .....	145
LXV.	Resultados del caso 6.2.1.2., en t·m .....	146
LXVI.	Comparación del caso 6.2.1.2. con el caso 6.2.1.1. ....	146
LXVII.	Resultados del caso 6.2.2.1., en t·m .....	148
LXVIII.	Resultados del caso 6.2.2.2., en t·m .....	148
LXIX.	Comparación del caso 6.2.2.2. con el caso 6.2.2.1. ....	149

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
<b><math>h_r</math></b>	Altura de las columnas del piso $r$ , en el Método de Kani
<b><math>h</math></b>	Altura de una columna, en el Método de Kani
<b><math>h</math></b>	Altura de una sección rectangular
<b><math>\theta</math></b>	Ángulo o giro
<b><math>A</math></b>	Área de una sección transversal
<b><math>b</math></b>	Base de una sección rectangular
<b><math>w_u</math></b>	Carga mayorada por unidad de longitud de viga, o losa en una dirección, símbolo del ACI 318S-08
<b><math>w</math></b>	Carga uniformemente distribuida
<b><math>D</math></b>	Cargas muertas, o momentos y fuerzas internas correspondientes, símbolo del ACI 318S-08
<b><math>L</math></b>	Cargas vivas, o momentos y fuerzas internas correspondientes, símbolo del ACI 318S-08
<b>cm</b>	Centímetro, unidad de longitud

<b>K</b>	Coefficiente de rigidez
→	Denota que la variable es una matriz o un vector, al estar encima de esta
<b>Δ</b>	Deriva o desplazamiento lateral de columnas y niveles
<b>v</b>	Desplazamiento expresado en coordenadas globales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>u</b>	Desplazamiento expresado en coordenadas locales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>C</b>	Factor de corrección para distribuciones de momentos fijos de lado, en el Método de Distribución de Momentos
<b>v</b>	Factor de corrimiento o coeficiente de desplazamiento, en el Método de Kani
<b>D<sub>if</sub></b>	Factor de distribución del miembro i – f en el nudo i, hacia el extremo f, en el Método de Distribución de Momentos
<b>μ</b>	Factor de giro o coeficiente de reparto, en el Método de Kani
<b>k</b>	Factor de longitud efectiva
<b>AF</b>	Fuerza axial fija, en el Método Matricial de las Rigideces

<b><math>Q_r</math></b>	Fuerza cortante en el piso $r$ , en el Método de Kani
<b>VF</b>	Fuerza cortante fija, en el Método Matricial de las Rigideces
<b><math>\bar{H}</math></b>	Fuerza de fijación al deslizamiento, en el Método de Kani
<b>F</b>	Fuerza en general y expresada en coordenadas globales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>Q</b>	Fuerza expresada en coordenadas locales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>f</b>	Indica el extremo final de una barra
<b>i</b>	Indica el extremo inicial de una barra
<b>kg</b>	Kilogramo, en este documento se utiliza como unidad de fuerza
<b><math>\ell</math></b>	Longitud de un miembro o barra
<b>L</b>	Longitud de un miembro o barra
<b><math>\ell_n</math></b>	Luz libre medida entre caras de los apoyos, símbolo del ACI 318S-08
<b>MPa</b>	Megapascal, unidad de esfuerzo
<b>m</b>	Metro, unidad de longitud

<b>ksi</b>	Mil libras sobre pulgada cuadrada, unidad de esfuerzo
<b>E</b>	Módulo de elasticidad
<b>E<sub>c</sub></b>	Módulo de elasticidad del concreto, símbolo del ACI 318S-08
<b><math>\bar{M}_{if}</math></b>	Momento de empotramiento perfecto en el extremo i producido por las cargas exteriores, en el Método de Kani
<b>I</b>	Momento de inercia de la sección con respecto al eje que pasa por el centroide (segundo momento de área)
<b>ML</b>	Momento de ladeo, en el Método de Distribución de Momentos
<b><math>\bar{M}_i</math></b>	Momento de sujeción, en el Método de Kani
<b><math>M''_{if}</math></b>	Momento debido al desplazamiento del extremo i de la barra i – f
<b><math>\bar{M}_r</math></b>	Momento del piso, en el Método de Kani
<b><math>\bar{M}'_{fi}</math></b>	Momento en extremo i debido al giro del extremo f, en el Método de Kani
<b><math>M'_{fi}</math></b>	Momento en extremo i debido al giro del mismo, en el Método de Kani

<b>MF</b>	Momento fijo o momento de empotramiento perfecto, en el Método de Distribución de Momentos y en el Método Matricial de las Rigideces
<b>M</b>	Momento flector
<b>M<sub>if</sub></b>	Momento flector en el extremo i de la barra i – f, en el Método de Kani
<b>X,Y</b>	Par de coordenadas globales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>x,y</b>	Par de coordenadas locales, en el Método Matricial de las Rigideces
<b>in</b>	Pulgada, unidad de longitud
<b><math>\sqrt{f_c}</math></b>	Raíz cuadrada de la resistencia especificada a la compresión del concreto, en unidades de esfuerzo, símbolo del ACI 318S-08
<b>f<sub>c</sub></b>	Resistencia especificada a la compresión del concreto, símbolo del ACI 318S-08
<b>F<sub>y</sub></b>	Resistencia en el punto de fluencia del miembro de acero
<b>f<sub>y</sub></b>	Resistencia en el punto de fluencia del refuerzo de acero
<b>t</b>	Tonelada, unidad de fuerza (peso)

**t·m**

Tonelada por metro, unidades que expresan momento flector

## GLOSARIO

<b>ACI</b>	American Concrete Institute.
<b>AISC</b>	American Institute of Steel Construcion.
<b>AGIES</b>	Asociación Guatemalteca de Ingeniería Estructural y Sísmica.
<b>ASCE</b>	American Society of Civil Engineers.
<b>Barra</b>	Designación genérica de un miembro estructural. Puede ser una viga o una columna, de acuerdo al tipo de solicitud y posición.
<b>Carga gravitacional</b>	Es cualquier solicitud (carga puntual o carga distribuida) que tenga una dirección paralela a la dirección del campo gravitacional terrestre.
<b>Carga lateral</b>	Es cualquier solicitud de carga (generalmente puntual) que tiene una dirección horizontal, como las cargas provocadas por la acción de sismos o vientos.
<b>Crujía</b>	Es el espacio comprendido entre dos muros de carga, dos alineamientos de columnas (marcos), o entre un muro y las columnas alineadas contiguas.

<b>Deriva</b>	Es el desplazamiento que resulta del ladeo debido a las cargas laterales en una estructura o parte de esta.
<b>Estructura reticular</b>	Estructura formada por vigas y columnas perpendiculares entre sí, con separaciones repetitivas.
<b>Grados de libertad</b>	Los grados de libertad de una estructura, en general, son definidos como los desplazamientos independientes de los nudos (traslaciones y rotaciones) que son necesarios para especificar la forma deformada de la estructura cuando está sujeta a cargas arbitrarias.
<b>Matriz</b>	Ordenación rectangular de elementos algebraicos que pueden sumarse y multiplicarse de varias maneras.
<b>Método de Gauss-Seidel</b>	Es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método se llama así en honor a los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss y Philipp Ludwig von Seidel y es similar al Método de Jacobi.
<b>Microsoft Excel</b>	Es un programa de por Microsoft Office para hojas de cálculo, distribuido por Microsoft.
<b>Nivel</b>	Es cada uno de las regiones formadas por los elementos horizontales de una estructura reticular (viga o losa).

<b>NSE</b>	Norma de Seguridad Estructural, documento de AGIES.
<b>Piso</b>	Es el espacio entre dos niveles de una estructura.
<b>Sección transversal</b>	La sección transversal de un miembro estructural prismático es la figura plana que resulta cuando éste es cortado por un plano perpendicular al eje longitudinal de dicho miembro.
<b>Solicitud de carga</b>	Es cualquier acción externa, generalmente causada por las cargas de diseño, que afecta a una estructura y a partir de la cual se realizan los cálculos estructurales.
<b>UBC</b>	Uniform Building Code.



## RESUMEN

Se presentan los aspectos básicos del dimensionamiento de marcos estructurales de concreto reforzado y acero. Estos aspectos cubren el predimensionamiento de los miembros, cálculo de rigideces y conceptos básicos de regularidad estructural.

Se describen 3 métodos de análisis estructural de marcos planos con uniones rígidas: Método Matricial de la Rigideces, Método de Distribución de Momentos (Método de Cross) y Método de Kani. Estos 2 últimos serán llamados métodos clásicos.

Se realiza el análisis y comparaciones del Método Matricial de las Rigideces y los métodos clásicos para 3 distintas configuraciones estructurales. Estas configuraciones son presentadas con diversas variaciones en las solicitudes de carga y las características de los miembros estructurales. Las 2 primeras configuraciones estructurales corresponden a marcos rectangulares y la tercera a un marco con elementos inclinados. Los resultados y comparaciones son presentados en forma de tablas cuando se comparan los valores finales, y en forma de gráficas cuando se comparan los resultados de los métodos clásicos en función de la cantidad de ciclos empleados comparados con los resultados del Método Matricial de las Rigideces.

Como parte de este trabajo se elaboraron hojas de cálculo utilizando el programa Microsoft Excel, estando disponibles para el lector. Estas hojas fueron utilizadas para obtener los resultados y las comparaciones, las cuales contienen todos los cálculos realizados. Estos archivos pueden ser utilizados como guía

para la programación de los métodos de análisis estructural descritos en cualquier otra estructura similar.

# OBJETIVOS

## General

Indicar las ventajas, desventajas y características del análisis estructural de marcos planos con el Método Matricial de la Rigideces, comparado con los métodos clásicos: Método de Distribución de Momentos y Método de Kani.

## Específicos

1. Describir los siguientes métodos de análisis de marcos planos: Método Matricial de las Rigideces, Método de Distribución de Momentos y Método de Kani.
2. Aplicar los métodos de predimensionamiento de miembros estructurales y de análisis estructural de forma amigable para el lector, a manera que los cálculos respectivos se hagan de forma sencilla y rápida.
3. Realizar cálculos de marcos planos con diversas configuraciones (variación en: configuración estructural, solicitudes de carga, rigideces de miembros estructurales) utilizando los siguientes métodos: Método Matricial de las Rigideces, Método de Distribución de Momentos y Método de Kani.
4. Comparar los métodos de análisis estructural de marcos planos a través de los resultados obtenidos en diversos casos para indicar las ventajas y desventajas del Método Matricial de las Rigideces y los métodos clásicos.



## INTRODUCCIÓN

El avance de la tecnología y la necesidad de examinar estructuras complejas con mayor rapidez, insta a que se busquen nuevos enfoques en el campo del análisis estructural. Uno de estos avances es el Método Matricial de las Rigideces.

El conocer los métodos matriciales de análisis estructural permite al ingeniero civil comprender mejor y de forma más acertada el comportamiento de las estructuras ante las diversas solicitaciones de carga, así como realizar los cálculos respectivos más eficientemente. Sin embargo, los métodos matriciales de análisis estructural son estudiados en cursos avanzados de ingeniería estructural. Esto significa que los estudiantes de pregrado desconocen la aplicabilidad y ventajas de métodos más sofisticados, como el Método Matricial de las Rigideces.

El trabajo de graduación presentado tiene como objetivo emplear Método Matricial de las Rigideces (también conocido como Método de Desplazamientos o Equilibrio) en el análisis estructural de 3 marcos rígidos y compararlo con los métodos clásicos siguientes: Método de Distribución de Momentos (Método de Cross) y Método de Kani. Esto se hace con el objetivo de introducir el uso del Método Matricial de las Rigideces, indicando las características que presenta en función de los métodos de análisis que son usualmente conocidos (es decir, los métodos clásicos).

Este trabajo incluye los análisis y comparaciones realizados mediante hojas de cálculo (utilizando el programa Microsoft Excel) para 3 distintas configuraciones estructurales. De esta forma se presenta material didáctico para los estudiantes

de ingeniería civil de pregrado, lo cual servirá como introducción al uso del Método Matricial de las Rigideces y a la programación de los métodos clásicos.

# 1. DIMENSIONAMIENTO DE ESTRUCTURAS

El dimensionamiento de las estructuras se refiere al proceso de determinar las dimensiones de las estructuras y de sus miembros constitutivos. Este proceso comprende todo lo relacionado con la determinación del tamaño y forma de la estructura así como de los elementos que la componen. En este capítulo se expondrá sobre el predimensionamiento de los miembros estructurales, el cálculo de sus propiedades geométricas para el análisis estructural y los criterios básicos de regularidad estructural de marcos rígidos.

## 1.1. Predimensionamiento de miembros estructurales

Para realizar el análisis estructural de un marco es necesario conocer las dimensiones y geometría de la estructura, características de los miembros y las solicitudes de carga. Primeramente se deben determinar las dimensiones de las vigas y columnas del marco estructural<sup>1</sup> para poder utilizar los métodos exactos de análisis estructural.

Al proceso de determinar la sección propuesta de un miembro (es decir, dimensiones iniciales de la sección transversal y características como área y momento de inercia) se le llama predimensionamiento. Después de realizar el análisis estructural utilizando la sección propuesta se puede elegir una sección óptima que cumpla con los criterios del diseñador, la cual no necesariamente es la sección inicialmente propuesta.

---

<sup>1</sup> Se pueden emplear métodos aproximados (Método de Puntos de Inflexión, Método del Portal, Método del Voladizo, etc.), para realizar un análisis preliminar y estimar las dimensiones de los miembros, pero esto puede consumir tiempo y recursos adicionales según la complejidad de la estructura.

Para realizar rápidamente el predimensionamiento de los miembros estructurales existen reglas empíricas que permiten una estimación simple de tamaños de secciones transversales aproximados. Estas reglas empíricas indican las dimensiones para los diferentes tipos de elementos según el material, la geometría de la estructura y el sistema estructural empleado. De ninguna forma estas reglas deben utilizarse para el diseño final de las estructuras, solamente sirven como una ayuda para facilitar la selección inicial del tamaño de los miembros estructurales, lo cual puede alargarse si solamente se realiza mediante prueba y error.

Ya que los marcos rígidos se construyen con concreto reforzado y perfiles de acero, y a menudo solo se usa uno de estos materiales, se presentan de forma separada los procesos de predimensionamiento para cada uno de estos materiales.

### **1.1.1. Miembros estructurales de concreto reforzado**

A continuación se presentan algunos criterios básicos para el predimensionamiento de vigas y columnas de concreto reforzado, basados en consideraciones empíricas. Se debe considerar también que el código ACI 318S-08 indica ciertas restricciones para el tamaño de vigas y columnas, siendo algunas muy específicas para estructuras ubicadas en zonas sísmicas (capítulo 21).

#### **1.1.1.1. Predimensionamiento de vigas**

El predimensionamiento de las vigas se realiza determinando la altura de la sección (ya que generalmente se emplean secciones rectangulares). Una elección razonable de la relación altura/base varía entre 1 y 3, con un valor práctico de 2.

La base de la sección se determina en función de una adecuada relación peralte/base. La elección de un peralte efectivo depende de 3 factores:

- El ancho requerido. Un ancho pequeño resultará en una viga profunda (también llamadas vigas de gran altura) que limita la altura libre disponible. Además, una viga estrecha y profunda puede disminuir el momento resistente de diseño del miembro estructural debido a posibles deformaciones laterales.
- La cantidad y distribución del acero de refuerzo. Una viga estrecha puede necesitar más de una cama de barras de acero, lo cual incrementa el peralte total de la sección.
- El espesor de los muros. Si se utilizan paredes de elementos de mampostería, el ancho de la viga se hace coincidir con el ancho del muro. Los muros exteriores en edificios, en la mayoría de los casos, son más anchos que los muros interiores.

El código ACI 318-08, Sección 9.5, especifica un espesor mínimo para miembros sometidos a flexión (altura total del elemento  $h$ ), como se muestra en la tabla I. Los valores son para miembros que no soportan o están conectados a particiones u otras construcciones propensas a ser dañadas por grandes deflexiones.

Tabla I. **Espesores de vigas de concreto**

<b>Miembro</b>	<b>Simplemente soportada</b>	<b>Un extremo continuo</b>	<b>Ambos extremos continuos</b>	<b>Voladizo</b>
Losas sólidas en un sentido	L/20	L/24	L/28	L/10
Vigas o losas nervadas en un sentido	L/16	L/18.5	L/21	L/8

Fuente: ACI. ACI 318S-08. p. 129.

Los espesores mínimos expresados en la tabla I son usados para miembros hechos con concreto de peso normal, y para acero de refuerzo con resistencia a la fluencia  $f_y$  de 420 megapascuales. Los valores para casos de concreto ligero o una resistencia a la fluencia diferente de 420 megapascuales pueden ser determinados según se indica en las notas de la tabla 9.5 (a) del código ACI 318S-08.

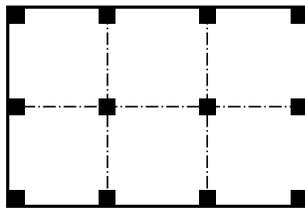
Otro criterio práctico es tomar el valor de la altura de la viga de la siguiente forma: vigas principales y exteriores 8 por ciento de la luz a cubrir, y vigas secundarias e interiores 6 por ciento de la luz a cubrir.

#### 1.1.1.2. Predimensionamiento de columnas

Un método para predimensionar columnas de concreto, basado en la solicitud de carga axial y la resistencia especificada del concreto, es el siguiente:

- Determinar las áreas tributarias de las columnas para cada nivel de la estructura en planta, según la ubicación de las columnas.

Figura 1. **Distribución de columnas en planta**

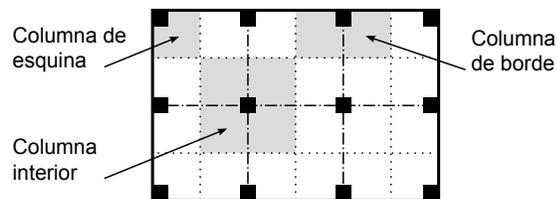


Fuente: elaboración propia.

- Relacionar el área tributaria de las columnas interiores con las áreas tributarias de las columnas de borde y columnas de esquina (columnas

exteriores). Generalmente el área tributaria de las columnas interiores es mayor que el área de las columnas de borde y el área tributaria de las columnas de esquina es la menor. En la figura 2, las áreas tributarias están separadas por líneas punteadas y cada tipo distinto de área tributaria está indicado.

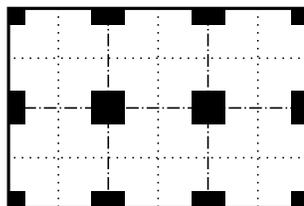
Figura 2. **Tipos de áreas tributarias para columnas**



Fuente: elaboración propia.

- Distribuir la carga que actúa en los niveles según las áreas tributarias de las columnas. Luego, estimar el tamaño con la relación  $A_g = f'_c/P$  donde  $A_g$  es el área bruta de la columna,  $f'_c$  es la resistencia especificada del concreto y  $P$  es la carga actuante. De esta forma se obtienen secciones de columnas proporcionales a la carga que deben soportar.

Figura 3. **Diferentes tamaños de columnas**



Fuente: elaboración propia.

Es importante mencionar que debe tomarse en cuenta la existencia de ladeo en la estructura, lo cual puede ser controlado con el uso de sistemas de restricción lateral (por ejemplo, riostras y contravientos) ya que afectará el análisis y diseño de las columnas (clasificación columnas cortas o columnas esbeltas).

### **1.1.2. Miembros estructurales de acero**

A continuación se presentan algunos criterios básicos para el predimensionamiento de vigas y columnas de acero estructural, basados en consideraciones empíricas. Obviamente se deben tomar en cuenta las indicaciones de los códigos pertinentes, como el elaborado por el American Institute of Steel Construction (AISC).

#### **1.1.2.1. Predimensionamiento de vigas**

Un marco de acero estructural típico puede incluir vigas primarias (principales) y vigas secundarias. Las vigas de techo tienden a ser cargadas más ligeramente que las vigas de piso, y por eso la sección requerida es más pequeña. En la tabla II se dan algunas guías para los rangos de vanos de las vigas y la relación luz/peralte requerido ( $L/d$ ).

#### **1.1.2.2. Predimensionamiento de columnas**

La relación entre la capacidad de carga axial de una columna y la esbeltez expresada como  $kl/r$ , es aproximadamente lineal. Aunque esta relación no es perfectamente lineal, se puede utilizar una estimación aproximada de la capacidad de la columna con  $F_y = 36$  ksi usando la siguiente expresión (válida solo para el sistema inglés de medidas):

$$P \approx A \left( 22,0 - 0,10 \frac{k\ell}{r} \right)$$

Una formulación similar para acero con  $F_y = 50$  ksi produce:

$$P \approx A \left( 30,0 - 0,15 \frac{k\ell}{r} \right)$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal de la columna (en  $\text{in}^2$ ),  $F_y$  es la resistencia a la fluencia del acero,  $k$  es el factor de longitud efectiva para un miembro prismático (obtenido con los ábacos de alineamiento de Jackson y Moreland),  $\ell$  es la longitud de la columna (en in),  $P$  es la capacidad axial de la columna,  $r$  es el radio de giro de la sección (en in).

Es importante notar que estas relaciones son válidas cuando se utiliza acero con  $F_y = 36$  ksi y  $F_y = 50$  ksi. Estos dos casos fueron presentados debido a que son los más utilizados en la práctica ingenieril.

Es evidente que usando estas relaciones de capacidad axial y esbeltez de las columnas de acero, el procedimiento para estimar el área de la sección transversal es igual al de las columnas de concreto presentado en la sección 1.1.1.2. y se deben tomar las mismas consideraciones generales.

Tabla II. **Relaciones de luz y peralte requerido para vigas de acero**

<b>Sistema</b>	<b>L/d</b>	<b>Rango de vanos (m)</b>	<b>Rango de vanos (ft)</b>
Viga de acero	20 a 28	0 a 22.5	0 a 75
Vigueta de acero			
Miembro de piso	20	2.5 a 43	8 a 144
Miembro de techo	24		
Trabe de placas	15	12 a 30	40 a 100
Trabe vigueta	12	6 a 30	20 a 100
Armadura de acero	12	12 a 90	40 a 300
Marco espacial	12 a 20	24 a 90	80 a 300
Vigas primarias (cubierta compuesta convencional o piso prefabricado)		0 a 15	0 a 50
Miembro de piso	20		
Miembro de techo	25		
Vigas secundarias (piso de cubierta compuesta convencional)		0 a 12	0 a 40
Miembro de piso	25		
Miembro de techo	30		

Fuente: IOANNIDES, Socrates y RUDDY, John. Rules of Thumb for Steel Design. [http://www.modernsteel.com/uploads/issues/february\\_2000/0002\\_05\\_ruddyioannides.pdf](http://www.modernsteel.com/uploads/issues/february_2000/0002_05_ruddyioannides.pdf). Consulta: 12 de marzo de 2014.

## 1.2. **Determinación de las propiedades geométricas**

Es muy importante que el diseñador determine las propiedades geométricas de los miembros estructurales correctamente, por lo cual el tema se desarrolla en esta sección del documento.

Las propiedades geométricas de una sección transversal utilizadas en el análisis y diseño estructural son: dimensiones, área, momento de inercia (segundo momento área) y rigideces. Se considerarán las rigideces como propiedades geométricas, ya que para su cálculo solamente interviene la geometría de los miembros estructurales, ya que se supondrá que todo el marco rígido está hecho con el mismo material (el módulo de elasticidad es igual para todos los miembros que forman el marco).

Las dimensiones de los miembros se obtienen con el diseño arquitectónico y predimensionamiento, con lo cual se pueden obtener todas las demás propiedades geométricas. Ya que el cálculo de áreas transversales es sencillo, no se expondrá en este trabajo. No obstante lo anterior, el cálculo de momentos de inercia puede ser complicado para miembros de formas no comunes.

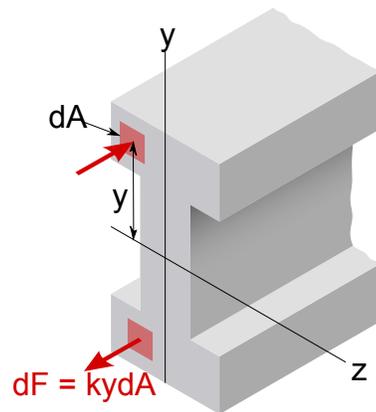
Ya que existen compendios de propiedades geométricas de perfiles de acero estructural y las formas de los miembros de concreto generalmente son regulares, generalmente calcular los momentos de inercia es relativamente sencillo, pero aún así, en ciertos casos puede ser trabajoso.

### **1.2.1. Cálculo de momentos de inercia**

Considérese una viga de sección transversal uniforme la cual está sujeta a dos pares iguales y opuestos aplicados en cada extremo de la viga. Una viga en estas condiciones se considera que está sometida a flexión pura, lo que significa que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes  $dF = kydA$  varían linealmente con la distancia y entre el diferencial de área  $dA$  y un eje que pasa a través del centroide de la sección.

Este eje, representado por  $z$  en la figura 4, se conoce como eje neutro de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son de compresión y las del otro lado son de tracción; en el eje neutro las fuerzas son nulas.

Figura 4. **Sección transversal de una viga sometida a flexión**



Fuente: elaboración propia.

La magnitud de la resultante  $\vec{R}$  de los diferenciales de fuerza  $dF$ , la cual actúa sobre toda la sección es:

$$|\vec{R}| = R = \int ky \, dA = k \int y \, dA$$

La última integral obtenida es el primer momento de área de la sección alrededor del eje  $z$ ; el cual es igual a  $\bar{y}A$  y por lo tanto es igual a cero, ya que el centroide de la sección está situado en el eje  $z$ . Entonces, el sistema de fuerzas  $dF$  se reduce a un par. La magnitud  $M$  de este par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos  $dM_z = ydF = ky^2dA$  de los diferenciales de fuerza. Integrando sobre la sección completa se obtiene la siguiente expresión:

$$M = \int ky^2 \, dA = k \int y^2 \, dA$$

La última integral se conoce como segundo momento de área, o momento de inercia,<sup>2</sup> de la sección de la viga con respecto al eje z y se denota por  $I_z$ . Se obtiene al multiplicar cada diferencial de área  $dA$  por el cuadrado de su distancia desde el eje z e integrando sobre la sección de la viga. Ya que cada producto  $y^2 dA$  es positivo, sin importar el signo de  $y$  o si es cero, la integral  $I_z$  siempre será positiva.

#### **1.2.1.1. Momentos de inercia de áreas compuestas**

Considérese un área compuesta  $A$  compuesta de varias áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Ya que la integral que representa el momento de inercia de  $A$  puede ser dividida en integrales evaluadas sobre  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , el momento de inercia de  $A$  con respecto a un eje dado se obtiene por la adición de los momentos de inercia de las áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , con respecto al mismo eje.

El momento de inercia de un área formada por varias formas comunes puede ser obtenido usando las fórmulas para las formas geométricas más simples. Antes de sumar los momentos de inercia de las áreas individuales, debe evaluarse si el teorema de los ejes paralelos es necesario para transferir cada momento de inercia al eje deseado.

#### **1.2.2. Cálculo de rigideces**

Rigidez puede definirse de forma general como la relación que existe entre una fuerza y una deformación. Es decir, que la rigidez es lo que permite relacionar las solicitudes de carga con los efectos observables que sufren los miembros estructurales. El cálculo de las rigideces de los miembros

---

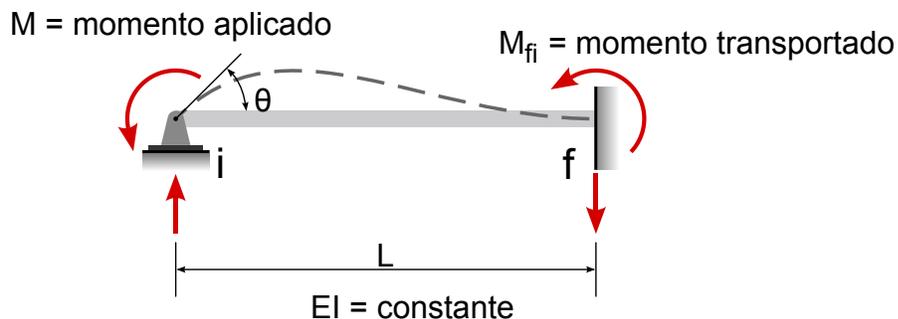
<sup>2</sup>El término segundo momento es más apropiado que momento de inercia, porque, lógicamente, el último debería usarse solo para denotar integrales de masa. En la práctica ingenieril, sin embargo, el término momento de inercia es usado para áreas así como para masas.

estructurales (y de la estructura completa) es fundamental para la aplicación de los métodos clásicos y el Método Matricial de la Rigidez. A continuación se presentan los conceptos fundamentales para el cálculo de las rigideces empleadas en los métodos mencionados.

### 1.2.2.1. Rigidez relativa en los métodos clásicos

Considérese una viga prismática  $if$ , la cual está articulada en  $i$  y empotrada en  $f$ , como se muestra en la figura 5. Si se aplica un momento  $M$  en el extremo  $i$ , la viga rota un ángulo  $\theta$  en el extremo articulado  $i$  y un momento  $M_{fi}$  se desarrolla en el extremo empotrado  $f$ , como se muestra en la figura 5.

Figura 5. **Viga con un extremo lejano empotrado**



Fuente: elaboración propia.

La relación entre el momento aplicado  $M$  y la rotación  $\theta$  puede ser establecida usando la ecuación del Método pendiente-deflexión  $M_{if} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_f - 3\psi) + MF_{if}$ , sustituyendo  $M_{if} = M$ ,  $\theta_i = \theta$  y  $\theta_f = \psi = MF_{if} = 0$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$M = \frac{4EI}{L}\theta \quad (1.1)$$

Donde  $M_{if}$  es el momento en el extremo i, E es el módulo de elasticidad de la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, L es la longitud de la viga,  $\theta_i$  es el giro en el extremo i,  $\theta_f$  es el giro en el extremo f,  $\psi$  es la rotación de la cuerda ( $\psi = \Delta/L$ ) y  $MF_{if}$  es el momento fijo en el extremo i.

La rigidez por flexión  $\bar{K}$  de un miembro se define como el momento que debe ser aplicado al extremo del miembro para que cause una rotación unitaria en dicho extremo. Entonces, si  $\theta = 1$  rad se evalúa en la ecuación 1.1, se obtiene la expresión para la rigidez por flexión la viga:

$$\bar{K} = \frac{4EI}{L} \quad (1.2)$$

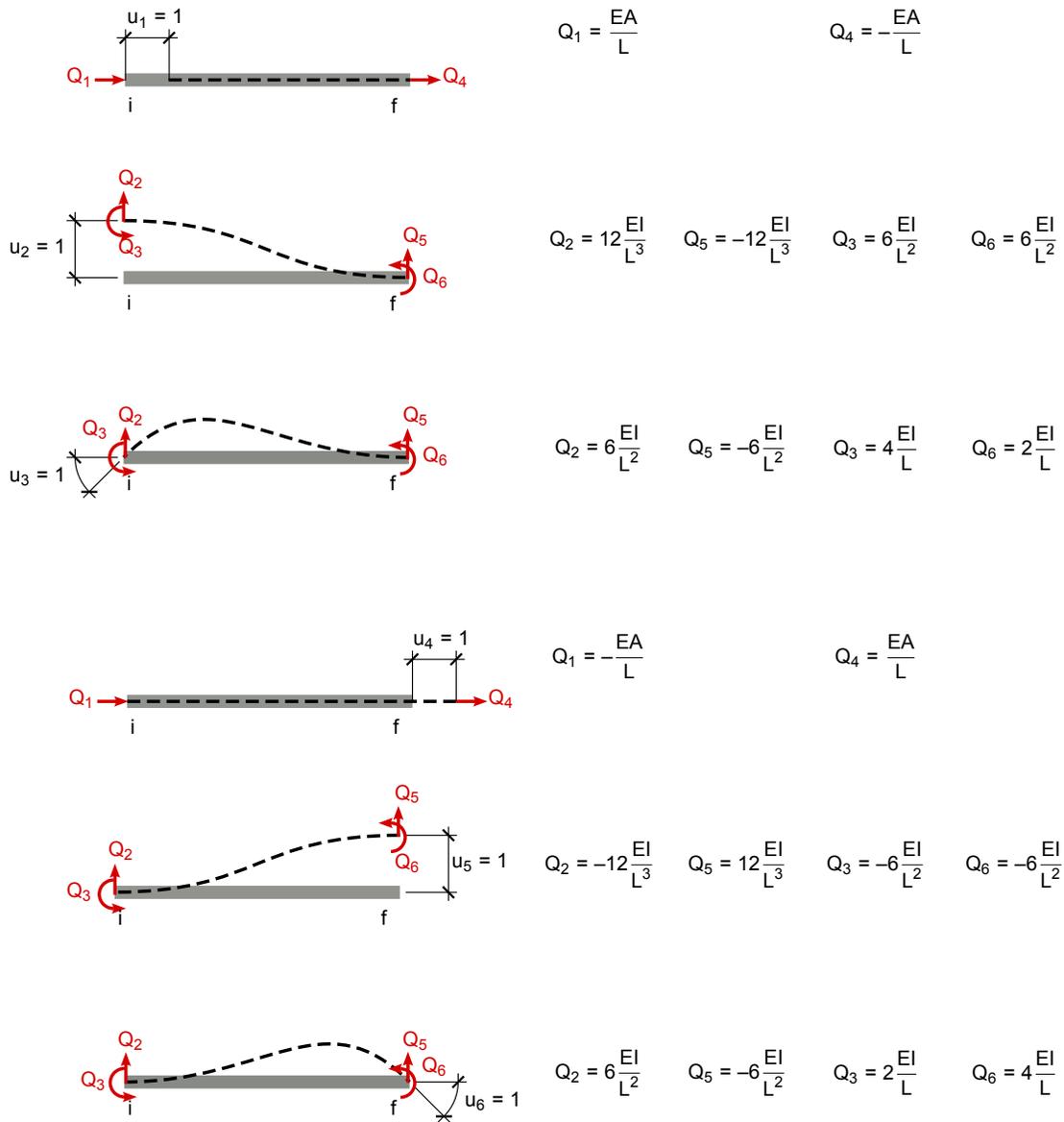
Cuando el módulo de elasticidad para todos los miembros de una estructura es el mismo (es decir, E es constante), es usualmente conveniente trabajar con la rigidez por flexión relativa de los miembros en el análisis. La rigidez por flexión relativa K, de un miembro se obtiene dividiendo la rigidez por flexión  $\bar{K}$ , dentro de 4E. Por lo tanto, la rigidez relativa de la viga de la figura 5 está dada por:

$$K = \frac{\bar{K}}{4E} = \frac{I}{L} \quad (1.3)$$

#### **1.2.2.2. Coeficientes de rigidez y matriz de rigideces**

En el Método Matricial de las Rigideces, un miembro o barra es un elemento prismático recto cuyos extremos están unidos a nudos, de tal forma que las reacciones externas desconocidas actúen solamente en los nudos. Los coeficientes rigidez de una barra se calculan separando cada tipo de sollicitud e imponiendo un desplazamiento unitario para cada una de estas, como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Reacciones debido a desplazamientos unitarios



Fuente: elaboración propia.

Luego los coeficientes de rigidez se ensamblan en una matriz de rigidez, la cual expresa todas las relaciones de rigidez en el miembro. La matriz de rigidez para una barra se compone de dos partes. Estas partes corresponden a los efectos de la fuerza axial y de la fuerza de flexión (corte y momento).

Si los desplazamientos son pequeños, que es una de las suposiciones fundamentales del procedimiento de análisis desarrollado, estos dos efectos no influirán el uno en el otro; se dice que ellos no están acoplados. El acoplamiento de los efectos axiales y flexionantes es un efecto de segundo orden que es despreciable en tanto que los desplazamientos sean pequeños. La matriz de rigidez para el elemento de viga tiene la forma general siguiente:

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} [\text{Axial}] & 0 \\ 0 & [\text{Flexionante}] \end{bmatrix}$$

Un desplazamiento unitario se impone por separado en cada coordenada de la sollicitud, el desplazamiento en las otras coordenadas de sollicitudes se restringe a cero y se calculan las fuerzas de necesarias para mantener esta configuración. Estas son las fuerzas y los desplazamientos que se muestran en la figura 6. Estas fuerzas pueden calcularse con procedimientos como el Método del trabajo virtual o el Método de pendiente-deflexión.

Las fuerzas necesarias para mantener la configuración desplazada son los coeficientes de rigidez en la columna representada por la coordenada con el desplazamiento unitario. La matriz de rigidez final para la viga, en coordenadas locales, es:

$$\vec{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Es importante mencionar que la matriz de rigideces anterior es válida solamente para miembros que tienen ambos extremos fijos, es decir en que se restringe cualquier movimiento o giro. Cuando uno o ambos extremos de la barra son articulados o apoyos simples, la matriz de rigidez cambia para el miembro analizado. El uso de las diferentes matrices de rigidez está desarrollado en la sección 2.1. del capítulo siguiente.

### 1.3. Regularidad estructural

En el marco práctico de este documento se analizarán 3 distintas configuraciones de marcos rígidos, las cuales deberán cumplir con las consideraciones de regularidad estructural para edificaciones de poca altura.

A continuación se repasan algunos criterios básicos utilizados en la práctica para el análisis y diseño de marcos rígidos<sup>3</sup>. Estos criterios corresponden a los siguientes documentos: AGIES (NSE-10), UBC 1997, ASCE 7-10 y ACI 318-08.

---

<sup>3</sup>El libro Diseño Sísmico de Edificios de Bazán y Meli (2009) trata este tema ampliamente en el capítulo de "Criterios de estructuración", cuya lectura se recomienda.

### 1.3.1. Recomendaciones de AGIES (NSE-10)

Las normas de AGIES (NSE-10) especifican características de los edificios según el sistema estructural, material de construcción, nivel de protección, ubicación y otros aspectos para estructuras en Guatemala. Entre los aspectos anteriormente mencionados está el límite de altura, siendo el caso más estricto el límite de 12 metros, los marcos analizados en este documento constan de dos niveles (como máximo) y cumplen con este requisito. Esto es debido a que para un edificio normal, la altura de un piso no es mayor de 6 metros. En la tabla III se presentan las limitaciones de altura según el tipo de sistema estructural y material, así como otros parámetros importantes.

Tabla III. **Adaptación de la tabla 1-1 de NSE 3-10**

Sistema Estructural	Norma	Límite de altura en metros			
		Nivel de protección			
		B	C	D	E
E1 Sistema de marcos					
E1-A Marcos tipo A					
De concreto reforzado	NSE 7.1	SL	SL	SL	SL
De acero estructural	NSE 7.5	SL	SL	SL	SL
E-1B Marcos tipo B					
De concreto reforzado	NSE 7.1	55	33	12	NP
De acero estructural	NSE 7.5	55	33	12	NP

Fuente: AGIES. NSE 3-10 Diseño Estructural de Edificaciones. p. 10.

### **1.3.2. Recomendaciones de UBC 1997, ASCE 7-10 y ACI 318-08**

En Guatemala se han utilizado como referencia los varios códigos de Estados Unidos a lo largo de muchos años. Entre los cuales se mencionan para el tema de estructuras y construcciones el Código UBC de 1997 (Uniform Building Code de International Conference of Building Officials) y el Código ASCE 7-10 (Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures de la American Society of Civil Engineers), y para el estructuras de concreto reforzado el Código ACI 318S-08.

A continuación se presentarán algunos extractos de dichos documentos, con lo cual se pretende recordar la importancia que tiene la configuración estructural en el análisis y diseño de las estructuras.

#### **1.3.2.1. Código UBC 1997**

El código UBC 1997 describe en la sección 16 las irregularidades estructurales que deben evitarse en la configuración de las estructuras. A continuación se presenta el contenido de las tablas 16-L y 16-M de dicho documento.

Tabla 16-L, Irregularidades verticales estructurales:

- Irregularidad de rigidez — piso blando  
Un piso blando es aquel cuya rigidez lateral es menor del 70 por ciento de la rigidez del piso superior o menor del 80 por ciento de la rigidez promedio de los tres pisos superiores al piso blando.

- Irregularidad de peso (masa)  
Debe considerarse que existe irregularidad de masa cuando la masa efectiva de cualquier piso es mayor del 150 por ciento de la masa efectiva de un piso colindante. No es necesario considerar un techo más liviano que el piso inferior.
- Irregularidad vertical geométrica  
Se considerará que existe irregularidad geométrica cuando la dimensión horizontal del sistema de resistencia a las fuerzas laterales en cualquier piso es mayor al 130 por ciento de la de un piso colindante. No es necesario considerar los pisos de azotea de un solo nivel.
- Discontinuidad en el plano de los elementos verticales resistente a las fuerzas laterales  
Una excentricidad en el plano de los elementos resistentes a caras laterales mayor que la longitud de esos elementos.
- Discontinuidad en la capacidad — piso blando  
Un piso débil es aquel en que la resistencia del piso es menor del 80 por ciento de la resistencia en el piso superior. La resistencia del piso es la resistencia total de todos los elementos resistentes a las fuerzas sísmicas que comparten el esfuerzo cortante del piso en la dirección bajo consideración.

Tabla 16-M, Irregularidades estructurales del plano:

- Irregularidad torsional por considerarse cuando los diafragmas no son flexibles  
Se debe considerar que existe regularidad torsional cuando el máximo

desplazamiento relativo del piso calculado incluyendo la torsión accidental, en un extremo de la estructura transversal a un eje es más de 1.2 veces el promedio de los desplazamientos relativos del piso de los dos extremos de la estructura.

- Esquinas reentrantes

Las configuraciones del plano de una estructura y sus sistema resistente a las fuerzas laterales que contienen esquinas reentrantes, cuando ambas proyecciones de la estructura más allá de una esquina reentrante son mayores del 15 por ciento de la dimensión en el plano de la estructura en dicha dirección.

- Discontinuidad de diafragma

Los diafragmas con discontinuidades abruptas o variaciones de rigidez, incluyendo los que tienen áreas recortadas o abiertas mayores del 50 por ciento del área bruta encerrada del diafragma o cambios en la rigidez efectiva del diafragma o cambios en la rigidez efectiva del diafragma mayores del 50 por ciento de un piso al siguiente.

- Desviaciones fuera del plano

Discontinuidades en una trayectoria de fuerza lateral, como desviaciones fuera del plano de los elementos verticales.

- Sistemas no paralelos

Los elementos verticales resistentes a las cargas laterales no son paralelos ni simétricos con respecto a los ejes ortogonales principales del sistema que resiste las fuerzas laterales.

### 1.3.2.2. Código ASCE 7-10

El código documento ASCE 7-10 en la sección 12 describe las irregularidades estructurales en la configuración de las estructuras construidas en zonas de gran actividad sísmica. A continuación se presenta el contenido de las tablas 12.3-1 y 12.3-2 de dicho documento.

Tabla 12.3-1 Irregularidades estructurales horizontales:

- Irregularidad torsional (tipo 1a)  
Irregularidad torsional se define como existente cuando la máxima deriva de piso, computada incluyendo la torsión accidental con  $A_x = 1,0$  (factor de amplificación torsional), en un extremo de la estructura transversal a un eje es más de 1,2 veces el promedio de las derivas de los pisos en los dos extremos de la estructura. Los requisitos de irregularidad torsional en las secciones de referencia aplican solo para estructuras en las cuales los diafragmas son rígidos o semirrígidos.
- Irregularidad torsional extrema (tipo 1b)  
Irregularidad torsional extrema se define como existente cuando la máxima deriva de piso, computada computada incluyendo la torsión accidental con  $A_x = 1,0$  (factor de amplificación torsional), en un extremo de la estructura transversal a un eje es más de 1,4 veces el promedio de las derivas de los pisos en los dos extremos de la estructura. Los requisitos de irregularidad torsional en las secciones de referencia aplican solo para estructuras en las cuales los diafragmas son rígidos o semirrígidos.

- Irregularidad de esquinas reentrantes (tipo 2)  
Irregularidad de esquinas reentrantes se define como existente cuando ambas proyecciones en planta de la estructura más allá de una esquina reentrante son mayores de 15 por ciento de la dimensión en planta de la estructura en la dirección dada.
- Irregularidad de discontinuidad de diafragma (tipo 3)  
Irregularidad de discontinuidad de diafragma se define como existente cuando hay un diafragma con una discontinuidad o variaciones de rigidez abruptas, incluyendo una que tiene una abertura o área abierta mayor que 50 por ciento del área gruesa encerrada por el área del diafragma, o un cambio en la rigidez efectiva del diafragma en más de 50 por ciento de un piso al siguiente.
- Irregularidad fuera de plano (tipo 4)  
Irregularidad fuera de plano se define como existente cuando hay una discontinuidad en el camino de resistencia de fuerzas laterales, tal como una salida fuera de plano de uno de los elementos verticales.
- Irregularidad de sistema no paralelo (tipo 5)  
Irregularidad de sistema no paralelo se define como existente cuando los elementos verticales resistentes a fuerzas laterales no son paralelos a los ejes ortogonales mayores del sistema de resistencia de fuerzas sísmicas.

Tabla 12.3-2 Irregularidades estructurales verticales:

- Irregularidad de rigidez de piso suave (tipo 1a)  
Irregularidad de rigidez de piso suave se define como existente cuando hay un piso en el cual la rigidez lateral es menor que 70 por ciento de la

del piso superior o menor que 80 por ciento de la rigidez promedio de los 3 pisos superiores.

- Irregularidad extrema de rigidez de piso suave (tipo 2a)  
Irregularidad extrema de rigidez de piso suave se define como existente cuando hay un piso en el cual la rigidez lateral es menor que 60 por ciento de la del piso superior o menor que 70 por ciento de la rigidez promedio de los tres pisos superiores.
- Irregularidad de peso (masa) (tipo 2)  
Irregularidad de peso (masa) se define como existente cuando la masa efectiva de cualquier piso es mayor que 150 por ciento de la masa efectiva de un piso adyacente. Un techo que es más ligero que el piso inferior no necesita ser considerado.
- Irregularidad vertical geométrica (tipo 3)  
Irregularidad vertical geométrica se define como existente cuando la dimensión horizontal del sistema para resistencia de fuerzas sísmicas en cualquier piso es mayor que 130 por ciento de la del piso adyacente.
- Irregularidad de discontinuidad en el plano en elementos verticales para resistencia de fuerzas laterales (tipo 4)  
Irregularidad de discontinuidad en el plano en elementos verticales para resistencia de fuerzas laterales se define como existente cuando hay una salida en el plano de un elemento vertical para resistencia de fuerzas sísmicas que resulta en demandas de volteo en una viga, columna, armadura o losa que los soporta.

- Irregularidad de discontinuidad en resistencia lateral—piso débil (tipo 5a)  
Irregularidad de discontinuidad en resistencia lateral—piso débil se define como existente cuando la resistencia lateral del piso es menos que 80 por ciento de la del piso superior. La resistencia lateral del piso es la resistencia lateral total de todos los elementos del sistema sismorresistente que comparten el corte del piso para la dirección bajo consideración.
- Irregularidad de discontinuidad en resistencia lateral—piso débil extremo (tipo 5b)  
Irregularidad de discontinuidad en resistencia lateral—piso débil extremo se define como existente cuando la resistencia lateral del piso es menos que 65 por ciento de la del piso superior. La resistencia lateral del piso es la resistencia lateral total de todos los elementos del sistema sismorresistente que comparten el corte del piso para la dirección bajo consideración.

### **1.3.2.3. Código ACI 318S-08**

En la sección 8.3 del código ACI 318S-08 se habla acerca de los métodos de análisis para marcos (pórticos) de concreto, entre los cuales se consideran alternativas de análisis en ciertos casos. A continuación se presentan dichas consideraciones:

Todos los elementos de pórticos o estructuras continuas deben diseñarse para resistir los efectos máximos producidas por las cargas mayoradas determinadas de acuerdo con la teoría del análisis elástico, excepto cuando se modifiquen de acuerdo con la redistribución de momentos en elementos continuos sometidos a flexión (sección 8.4 de ACI 318S-08).

Se debe permitir simplificar el diseño usando las suposiciones especificadas en las secciones 8.7 a 8.11 de ACI 318S-08. Excepto para concreto preesforzado, se pueden emplear métodos aproximados de análisis estructural para edificaciones con luces, alturas de entrepisos y tipos de construcción comunes.

Como alternativa al análisis estructural, se permite utilizar en el diseño de vigas continuas y de losas en una dirección (losas reforzadas para resistir los esfuerzos de flexión en una sola dirección), los siguientes momentos y fuerzas cortantes aproximadas, siempre y cuando:

- Haya 2 o más vanos
- Los vanos sean aproximadamente iguales, sin que el mayor de los vanos adyacentes exceda en más de 20 por ciento al menor
- Las cargas estén uniformemente distribuidas
- La carga viva no mayorada  $L$  no excede en 3 veces la carga muerta no mayorada  $D$
- Los elementos sean prismáticos

Para el cálculo de los momentos negativo,  $l_n$  se toma como adyacente el promedio de las luces libres de los vanos adyacentes. En la tabla IV están indicados los valores para determinar los momentos en marcos formados por 2 vanos y en la tabla V se indican los valores para el cálculo de momentos de marcos formados por 3 o más vanos.

Estos valores de momentos son válidos solo para vigas o losas de concreto reforzado con cargas de diseño uniformemente distribuidas,  $w_u$ , y un vano libre,  $l_n$ , cuando se tienen las siguientes condiciones:

- La longitud de los vanos adyacentes no difiere en más de 20 por ciento
- La carga viva no mayorada es menor o igual a 3 veces la carga muerta no mayorada

El momento negativo (en la cara del apoyo) puede ser tomado como  $w_u l_n^2 / 12$  para losas con vanos libres no mayores que 3 metros (10 pies) y para vigas que se enmarcan en columnas relativamente rígidas (específicamente, la suma de las rigideces de las columnas dividida por la suma de las rigideces de las vigas en cada extremo de la viga debe ser mayor que 8). La rigidez es el producto del módulo de elasticidad y el momento de inercia, ninguna de las anteriores es una cantidad fácilmente determinable para elementos estructurales formados de dos materiales unidos.

Para concreto de peso normal, el módulo de elasticidad puede ser tomado como se indica en el código ACI 318 ( $E_c = 57000 \sqrt{f'_c}$  (psi),  $E_c = 4700 \sqrt{f'_c}$  (MPa),  $E_c = 15100 \sqrt{f'_c}$  (kg/cm<sup>2</sup>)), usando la resistencia  $f'_c$  del cilindro de concreto a los 28 días. El cálculo de momentos de inercia recae en el diseñador, aunque el ACI permite cualquier conjunto de suposiciones razonables.

Se sugiere utilizar valores brutos de  $E_c I$  para vigas y columnas: donde  $E_c$  es igual para todos los miembros, un nudo típico con vigas y columnas en cuatro puntos ortogonales, y de ancho constante de secciones de columnas y vigas, calificaría para el momento negativo de  $w_u l_n^2 / 12$  solo cuando los espesores de columna en ese nudo son más del doble que los espesores de viga.

Tabla IV. **Momentos para vigas continuas, 2 vanos**

Restricciones en los extremos para 2 vanos	Momento positivo		Momento negativo	
	Vano extremo		Vano extremo	
			Apoyo interior	Apoyo exterior
Extremo discontinuo no restringido	$w_u l_n^2 / 11$			
Extremo discontinuo restringido por viga de borde	$w_u l_n^2 / 14$		$w_u l_n^2 / 9$	$w_u l_n^2 / 24$
Extremo discontinuo restringido por columna	$w_u l_n^2 / 14$		$w_u l_n^2 / 9$	$w_u l_n^2 / 16$

Fuente: OCHSHORN, Jonathan. *Structural Elements for Architects and Builders*. p. 342.

Tabla V. **Momentos para vigas, 3 o más vanos**

Restricciones en los extremos para 3 o más vanos	Momento positivo			Momento negativo	
	Vano interior	Vano exterior	Soporte típico interior	Vano extremo	
				Apoyo interior	Apoyo exterior
Extremo discontinuo no restringido	$w_u l_n^2 / 16$	$w_u l_n^2 / 11$			
Extremo discontinuo restringido por viga de borde	$w_u l_n^2 / 16$	$w_u l_n^2 / 14$	$w_u l_n^2 / 11$	$w_u l_n^2 / 10$	$w_u l_n^2 / 24$
Extremo discontinuo restringido por columna	$w_u l_n^2 / 16$	$w_u l_n^2 / 14$	$w_u l_n^2 / 11$	$w_u l_n^2 / 10$	$w_u l_n^2 / 16$

Fuente: OCHSHORN, Jonathan. *Structural Elements for Architects and Builders*. p. 342.



## **2. MÉTODOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **2.1. Método Matricial de la Rigideces**

Los métodos clásicos de análisis estructural y los métodos matriciales están basados en los mismos principios fundamentales. Sin embargo, las relaciones fundamentales de equilibrio, compatibilidad, y rigideces de los miembros son ahora expresadas en forma de ecuaciones matriciales, de tal forma que los cálculos numéricos puedan ser eficientemente realizadas con una computadora.

La mayoría de los métodos clásicos fueron desarrollados para analizar tipos particulares de estructuras, y ya que están destinados para cálculos manuales, frecuentemente involucran ciertas suposiciones (que son innecesarias en los métodos matriciales) para reducir la cantidad de esfuerzo computacional requerido para el análisis.

La aplicación de esos métodos usualmente requiere una buena comprensión del comportamiento estructural. Como ejemplo se tiene el método clásico de distribución de momentos, el cual puede ser usado para analizar solamente vigas y marcos planos bajo deformaciones por flexión. Las deformaciones debido a fuerzas axiales en los marcos son ignoradas para reducir el número de traslaciones de nudos independientes.

Aunque estas suposiciones reducen significativamente el esfuerzo computacional, complica el análisis al requerir que el analista dibuje la forma deflectada del marco correspondiente a cada grado de libertad de lado

(traslación de nudo independiente), para estimar la magnitud relativa de los momentos fijos de los miembros: una tarea difícil, incluso en el caso de pocos grados de libertad de ladeo si el marco tiene miembros inclinados. Debido a su naturaleza especializada e intrincada, los métodos clásicos son generalmente considerados no adecuados para programación computacional.

En contraste a los métodos clásicos, los métodos matriciales fueron específicamente desarrollados para implementación computacional. Se caracterizan por ser sistemáticos (por lo que pueden ser programados con relativa facilidad), y generales (en el sentido que el mismo formato general del procedimiento analítico puede ser aplicado a varios tipos de marcos estructurales<sup>4</sup>).

Ya que el análisis de estructuras grandes y altamente redundantes puede consumir mucho tiempo, los métodos matriciales son comúnmente usados. Sin embargo, los métodos clásicos son preferidos por muchos ingenieros para analizar estructuras más pequeñas, ya que proveen una mejor percepción del comportamiento estructural.

Los métodos clásicos pueden ser usados para diseños preliminares, para corroborar los resultados de análisis computarizados, y para derivar las relaciones de fuerza-deformación en los miembros necesarias en los métodos matriciales. Además, un estudio de los métodos clásicos es considerado esencial para desarrollar un entendimiento adecuado del comportamiento estructural.

---

<sup>4</sup>·Esto incluye otros tipos de estructuras, como armaduras, parrillas y otras.

Dos métodos diferentes pueden ser usados para el análisis matricial de estructuras: el Método de las Flexibilidades, y el Método de las Rigideces. El Método de las Flexibilidades, el que también es llamado Método de las Fuerzas o Compatibilidades, es esencialmente una generalización en forma matricial del Método de deformaciones consistentes. En este enfoque, las incógnitas primarias son las fuerzas redundantes, las cuales son calculadas primero al resolver las ecuaciones de compatibilidad de la estructura.

Una vez que las fuerzas redundantes son conocidas, los desplazamientos pueden ser evaluados aplicando las ecuaciones de equilibrio y las relaciones apropiadas de fuerza-desplazamiento de los miembros. El Método de las Rigideces, el cual se originó a partir del método clásico de Pendiente-Deflexión, es también llamado el Método de los Desplazamientos o Equilibrio. En este enfoque, las incógnitas primarias son los desplazamientos de los nudos, las cuales son determinadas primero resolviendo las ecuaciones de equilibrio de la estructura. Con los desplazamientos de los nudos conocidos, las fuerzas desconocidas son obtenidas con consideraciones de compatibilidad y las relaciones de fuerza-desplazamiento de los miembros.

Aunque cualquiera de los métodos puede ser usado para analizar marcos estructurales, el Método de las Flexibilidades es generalmente conveniente para analizar estructuras pequeñas con pocas redundantes. Este método puede ser usado también para establecer las relaciones de fuerza-desplazamiento para desarrollar el Método de las Rigideces.

El Método de las Rigideces es más sistemático y puede ser implementado más fácilmente en computadoras, por lo tanto, se prefiere para el análisis de estructuras grandes y altamente redundantes. La mayoría del software comercialmente disponible para el análisis estructural está basado en el Método

de las Rigideces. Este documento está enfocada al Método de las Rigideces, con énfasis en una versión particular conocida como el Método Directo de las Rigideces.

### 2.1.1. Análisis de marcos planos

Los pasos para analizar un marco plano que está formado en su totalidad por nudos rígidos se expone en la sección 2.1.1.1., las modificaciones para marcos que tienen alguno de sus nudos articulados en la sección 2.1.1.2.. El procedimiento general para analizar cualquier marco rígido se resume a continuación (todas las variables se definen y se explican en las próximas secciones de este capítulo):

- Identificar los grados de libertad,  $\vec{d}$ , de la estructura.
- Para cada miembro:  
 Evaluar  $\vec{k}$ ,  $\vec{Q}_f$  y  $\vec{T}$   
 Calcular  $\vec{K} = \vec{T}^T \vec{k} \vec{T}$  y  $\vec{F}_f = \vec{T}^T \vec{k} \vec{Q}_f$
- Almacenar  $\vec{K}$  en  $\vec{S}$  y  $\vec{F}_f$  en  $\vec{P}_f$
- Formar el vector conjunto de cargas,  $\vec{P}$
- Resolver  $\vec{P} - \vec{P}_f = \vec{S} \vec{d}$  para  $\vec{d}$
- Para cada miembro:  
 obtener  $\vec{v}$  a partir de  $\vec{d}$   
 Calcular  $\vec{u} = \vec{T} \vec{v}$ ,  $\vec{Q} = \vec{k} \vec{u} + \vec{Q}_f$  y  $\vec{F} = \vec{T}^T \vec{Q}$
- Determinar las reacciones al considerar el equilibrio de los nudos de apoyo

### 2.1.1.1. Procedimiento de análisis de marcos planos

A continuación se describe el procedimiento de análisis de marcos cuyos miembros están unidos por nudos rígidos en su totalidad:

- Utilizar un modelo analítico de la estructura de la siguiente forma:
  - Dibujar un diagrama de la estructura, en el que se identifica cada nudo y miembro por un número.
  - Seleccionar un sistema de coordenadas globales XY, con el eje X orientado en la dirección horizontal (positiva hacia la derecha) y el eje Y orientado en la dirección vertical (positiva hacia arriba). Es conveniente localizar el origen de este sistema de coordenadas en un nudo inferior izquierdo de la estructura, de manera que la mayoría de las coordenadas X y Y sean positivas.
  - Establecer para cada miembro un sistema de coordenadas locales xy, seleccionando uno de los nudos en sus extremos como el nudo inicial y el otro como el final. Indicar en el diagrama de la estructura, para cada miembro, la dirección positiva del eje local x, dibujando una flecha a lo largo del miembro que apunte hacia el nudo final. Para los miembros horizontales, se puede evitar la transformación de coordenadas al seleccionar el nudo del extremo izquierdo del miembro como el inicial.
  - Identificar los grados de libertad o desplazamientos desconocidos de los nudos,  $\vec{d}$ , de la estructura. Los grados de libertad se especifican en el diagrama de la estructura dibujando flechas en los nudos y se numeran empezando en el número de nudo más bajo y avanzando de forma secuencial hasta el número más alto de nudo. En el caso de más de un grado de

libertad en un nudo, primero se numera la traslación X, seguida de la traslación Y y, después, la rotación. Debe recordarse que un nudo de un marco plano puede tener hasta tres grados de libertad (dos traslaciones y una rotación). Las traslaciones de los nudos se consideran positivas cuando giran en la dirección positiva de los ejes X y Y. Las rotaciones de los nudos se consideran positivas cuando giran en contra del sentido de las agujas del reloj (sentido antihorario).

- Evaluar la matriz de rigidez de la estructura,  $\vec{S}$ , y el vector de fuerzas en nudo fijo,  $\vec{P}_f$ . Para cada miembro de la estructura se deben realizar las operaciones siguientes:
  - Calcular la matriz de rigidez de los miembros en coordenadas locales,  $\vec{k}$ . En la ecuación 2.1 (es la misma que la expresión 1.4), se dan las expresiones de  $\vec{k}$  para miembros de vigas continuas:

$$\vec{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

- Si el miembro se encuentra sujeto a cargas externas, entonces se debe evaluar el vector de fuerzas en extremos fijos,  $\vec{Q}_f$ , en coordenadas locales, utilizando las expresiones para los momentos en extremos fijos y aplicando las ecuaciones de

equilibrio. El vector de fuerzas en extremos fijos,  $\vec{Q}_f$ , se expresa con la forma general indicada en la ecuación 2.2.

$$\vec{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AF_i \\ VF_i \\ MF_i \\ AF_f \\ VF_f \\ MF_f \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- Para miembros horizontales con el eje local x positivo hacia la derecha (es decir, con la misma dirección que la del eje global X), las relaciones de rigidez de esos miembros en las coordenadas locales y las globales son las mismas (es decir  $\vec{K} = \vec{k}$  y  $\vec{F}_f = \vec{Q}_f$ ). De lo contrario, se debe calcular la matriz de transformación del miembro,  $\vec{T}$ , con el uso de la ecuación 2.3.

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

El ángulo  $\theta$  de cada miembro se calcula relacionando las coordenadas globales iniciales  $(X_i, Y_i)$ , finales  $(X_f, Y_f)$  y la longitud L de los miembros, de la forma siguiente:

$$\cos \theta = \frac{X_f - X_i}{L} = \frac{X_f - X_i}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{Y_f - Y_i}{L} = \frac{Y_f - Y_i}{\sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2}}$$

- Determinar la matriz de rigidez de los miembros en coordenadas globales,  $\vec{K} = \vec{T}^T \vec{k} \vec{T}$  (ecuación 2.4), el vector correspondiente de fuerzas en extremos fijos,  $\vec{F}_f = \vec{T}^T \vec{k} \vec{Q}_f$  (ecuación 2.5). La matriz  $\vec{K}$  debe ser simétrica.

$$\vec{K} = \vec{T}^T \vec{k} \vec{T} \quad (2.4)$$

$$\vec{F}_f = \vec{T}^T \vec{k} \vec{Q}_f \quad (2.5)$$

- Identificar los números de grados de libertad de la estructura correspondiente la miembro y almacenar los elementos pertinentes de  $\vec{K}$  y  $\vec{F}_f$  en sus posiciones apropiadas en la matriz de rigidez de la estructura,  $\vec{S}$ , y el vector de fuerzas en nudo fijo,  $\vec{P}_f$ , respectivamente. La matriz completa de rigidez de la estructura,  $\vec{S}$ , obtenida al ensamblar los coeficientes de rigidez de todos los miembros de la estructura debe ser simétrica.
- Formar el vector de cargas del nudo,  $\vec{P}$ .
- Determinar los desplazamientos desconocidos del nudo. Sustituir  $\vec{P}$ ,  $\vec{P}_f$  y  $\vec{S}$  en las relaciones de rigidez de la estructura,  $\vec{P} - \vec{P}_f = \vec{S} \vec{d}$  (ecuación 2.6), y resolver el sistema resultante de ecuaciones simultáneas para los desplazamientos desconocidos del nudo  $\vec{d}$ .

$$\vec{P} - \vec{P}_f = \vec{S} \vec{d} \quad (2.6)$$

- Calcular los desplazamientos en los extremos de los miembros y las fuerzas en los extremos. Para cada miembro se debe hacer lo siguiente:

- Obtener los desplazamientos en los extremos del miembro, en coordenadas globales  $\vec{v}$  a partir de los desplazamientos de los nodos  $\vec{d}$ , utilizando los números de los grados de libertad de la estructura correspondientes al propio miembro.
- Determinar los desplazamientos de los extremos del miembro, en coordenadas locales, utilizando la relación  $\vec{u} = \vec{T}\vec{v}$  (ecuación 2.7). Para los miembros horizontales con el eje local x positivo hacia la derecha, es decir  $\vec{u} = \vec{v}$ .

$$\vec{u} = \vec{T}\vec{v} \quad (2.7)$$

- Calcular las fuerzas en los extremos del miembro, en coordenadas locales, usando la relación  $\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f$  (ecuación 2.8)

$$\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f \quad (2.8)$$

- Calcular las fuerzas en los extremos del miembro, en coordenadas globales, usando la relación de transformación  $\vec{F} = \vec{T}^T\vec{Q}$  (ecuación 2.9). Para los miembros horizontales con el eje local x positivo hacia la derecha,  $\vec{F} = \vec{Q}$ .

$$\vec{F} = \vec{T}^T\vec{Q} \quad (2.9)$$

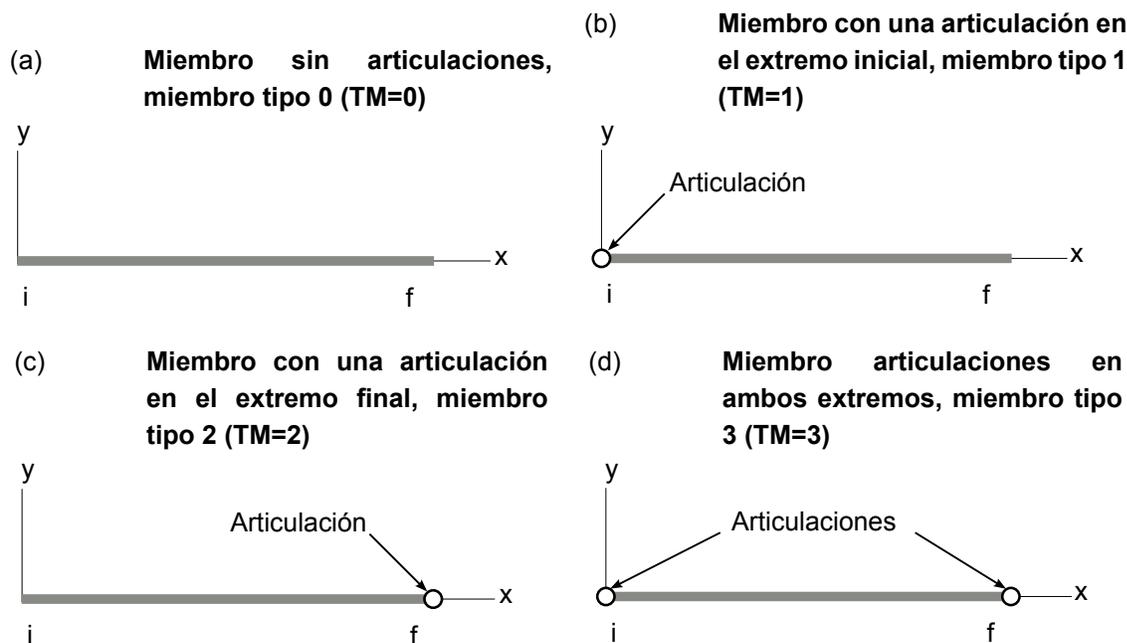
- Determinar las reacciones en los apoyos al considerar el equilibrio de los nudos en los apoyos de la estructura.

### 2.1.1.2. Marcos con uniones articuladas

Los efectos de las articulaciones pueden ser incorporadas en el Método de las rigideces al modificar las matrices de rigideces locales de los miembros. Resulta conveniente clasificar cada miembro de un marco en uno de cuatro tipos de miembro (TM) según las rigideces locales que posee en función de sus apoyos (tipo de nudo). En la figura 7 se muestran los tipos de miembros según los apoyos que poseen.

Como se indica en la figura 7a, un miembro que está rígidamente conectado a los nudos en ambos extremos (no tiene articulaciones), es considerado del tipo 0 (esto es,  $TM=0$ ), lo cual produce la matriz de rigidez mostrada en la ecuación 1.4.

Figura 7. Apoyos en los miembros



Fuente: elaboración propia, basado en KASSIMALI, Aslam. *Matrix Analysis of Structures*. p. 342.

Si el extremo  $i$  de un miembro está conectado al nudo adyacente por una articulación, cuando su extremo opuesto  $f$  está rígidamente conectado al nudo adyacente (figura 7b), el miembro se clasifica como tipo 1 ( $TM=1$ ). De igual forma, si el extremo  $i$  de un miembro está rígidamente conectado al nudo adyacente, pero su extremo  $f$  está conectado por una articulación al nudo adyacente (figura 7c), entonces el miembro se considera ser del tipo 2 ( $TM=2$ ). Finalmente, si un miembro está unido a los nudos inicial y final, (figura 7d), se clasifica como tipo 3 ( $TM=3$ ).

Las expresiones para las matrices de rigideces locales  $\vec{k}$  (ecuaciones 2.10 y 2.1) y los vectores de fuerzas fijas  $\vec{Q}_f$  (ecuación 2.2) derivadas para vigas y marcos planos pueden ser usadas solamente para el tipo 0 ( $TM=0$ ), porque se basan en la condición de que los miembros están rígidamente conectados en ambos extremos, de tal forma que las rotaciones en los extremos son iguales a las rotaciones de los nudos adyacentes. Cuando un extremo de un miembro está conectado al nudo adyacente por una articulación, el momento en el extremo articulado debe ser cero. Las expresiones previas de  $\vec{k}$  y  $\vec{Q}_f$  pueden ser fácilmente modificadas para reflejar las condiciones de momentos cero en los extremos articulados, como se explica a continuación.

- Miembros con una articulación al inicio ( $TM=1$ )

Cuando el extremo  $i$  de un miembro está conectado a un nudo adyacente por una articulación, de la figura 6 se pueden obtener las fuerzas cuando el momento en el extremo inicial (extremo  $i$ )  $Q_3$  debe ser cero.

Al hacer todas las sustituciones necesarias, las ecuación 2.8 ( $\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f$ ) con las modificadas para los miembros tipo 1 ( $TM=1$ ), se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3L \\ 0 & 3L & 0 & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AF_i \\ VF_i - \frac{3}{2L}MF_i \\ 0 \\ AF_f \\ VF_f + \frac{3}{2L}MF_f \\ MF_f - \frac{1}{2}MF_f \end{bmatrix}$$

- Miembros con una articulación al final (TM=2)

Si el extremo f de un miembro está conectado a un nudo adyacente por una articulación, de la figura 6 se pueden obtener las fuerzas cuando el momento en el extremo final (extremo f)  $Q_6$  debe ser cero.

Al hacer todas las sustituciones necesarias, las ecuación 2.8 ( $\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f$ ) con las modificadas para los miembros tipo (TM=2), se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3L & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3L & 3L^2 & 0 & -3L & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3L & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AF_i \\ VF_i - \frac{3}{2L}MF_f \\ MF_i - \frac{1}{2}MF_f \\ AF_f \\ VF_f + \frac{3}{2L}MF_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Miembros con articulación en ambos extremos (TM=3)

Si ambos extremos de un miembro están articulados, se debe cumplir que los momentos en los dos extremos ( $Q_3$  y  $Q_6$ ) deben ser cero.

Al hacer todas las sustituciones necesarias, en la ecuación 2.8 ( $\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f$ ), las relaciones modificadas para los miembros tipo (TM=3), se expresan en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AF_i \\ VF_i - \frac{1}{L} (MF_i + MF_f) \\ 0 \\ AF_f \\ VF_f + \frac{1}{L} (MF_i + MF_f) \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.1.1.3. Simplificaciones para marcos regulares

En marcos de baja a mediana altura, las deformaciones axiales de los miembros son generalmente mucho más pequeñas que las deformaciones por flexión. Por lo tanto, el número de grados de libertad de tales marcos puede ser reducido, sin comprometer significativamente la precisión de los resultados del análisis, al despreciar las deformaciones axiales de los miembros, o al suponer que los miembros son inextensibles.

A continuación se considera que el análisis de marcos planos rectangulares compuestos de miembros horizontales y verticales los cuales se suponen como inextensibles (no pueden someterse a elongaciones o acortamientos axiales).

El procedimiento general para el análisis aproximado de marcos planos rectangulares sigue siendo el mismo que para los marcos planos generales, desarrollado en el apartado 2.1.1.1., pero con la condición de que las relaciones de rigidez de los miembros se modifican para excluir los efectos axiales. Como los marcos están compuestos solamente de miembros horizontales y verticales, cada miembro tiene cuatro grados de libertad<sup>5</sup>. en los sistemas de coordenadas locales y globales. Las fuerzas en los extremos locales y globales y los desplazamientos de las vigas (miembros horizontales), y las columnas (miembros verticales), del marco se dan en la figura 8.

Para simplificar el análisis, el eje local de cada miembro  $x$  está orientado a la derecha para las vigas (figura 8a) y positivo hacia arriba para las columnas (figura 8b). Con los efectos axiales despreciados, la relación entre las fuerzas locales en los extremos  $\vec{Q}$ , y los desplazamientos en los extremos  $\vec{u}$ , es expresada por la matriz de rigidez local simplificada  $\vec{k}$  (ecuación 2.10) y el vector de fuerzas fijas simplificado  $\vec{Q}_f$  (ecuación 2.11) para vigas con la misma expresión  $\vec{Q} = \vec{k}\vec{u} + \vec{Q}_f$  (ecuación 2.8).

$$\vec{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

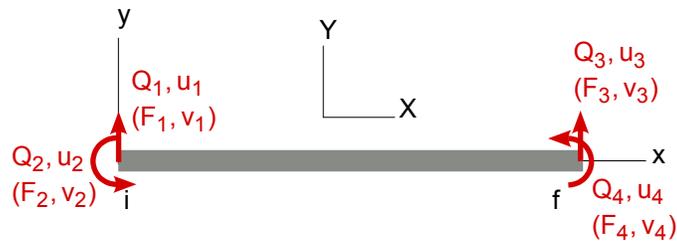
$$\vec{Q}_f = \begin{bmatrix} VF_i \\ MF_i \\ VF_f \\ MF_f \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

---

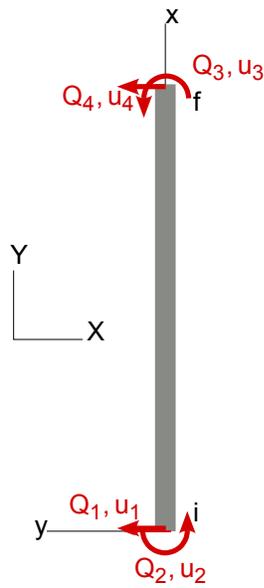
<sup>5</sup>La matriz de rigidez completa de un miembro en coordenadas locales presentada con la ecuación 2.1 consta de seis grados de libertad.

Figura 8. **Fuerzas y desplazamientos en extremos de vigas y columnas**

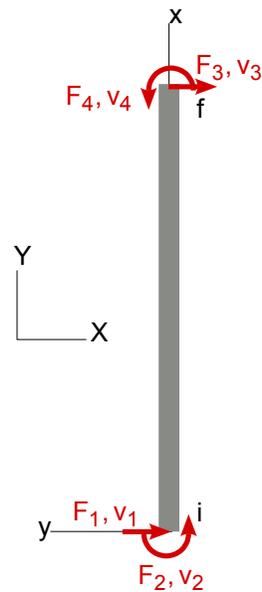
(a) **Fuerzas y desplazamientos en los extremos de una viga, en coordenadas globales y locales.**



(b) **Fuerzas y desplazamientos en los extremos de una columna, en coordenadas locales.**



(c) **Fuerzas y desplazamientos en los extremos de una columna, en coordenadas globales.**



Fuente: KASSIMALI, Aslam. *Matrix Analysis of Structures*. p. 508.

En cuanto a las relaciones de rigidez del miembro en el sistema de coordenadas globales, para vigas (figura 8a) no son necesarias transformaciones de coordenadas, se tiene entonces que  $\vec{K}_{viga} = \vec{k}$  y  $\vec{F}_{fviga} = \vec{Q}_f$ . Para columnas, la matriz de transformación,  $\vec{T}_{columna}$ , puede ser establecida siguiendo las relaciones entre las fuerzas en los extremos locales  $\vec{Q}$  y las fuerzas en los extremos globales  $\vec{F}$  (ver figuras 8b y 8c):

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz de transformación para la columna es  $\vec{T}_{columna}$ :

$$\vec{T}_{columna} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La expresión de la matriz de rigidez global para columnas,  $\vec{K}_{columna}$ , puede ser obtenida aplicando la relación  $\vec{K} = \vec{T}^T \vec{k} \vec{T}$ , lo cual produce:

$$\vec{K}_{columna} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Es importante notar que la suposición de despreciar las deformaciones axiales pequeñas, como se usa aquí, no implica que las fuerzas axiales en el miembro sean también insignificantes. Ya que las fuerzas axiales no aparecen en las relaciones de rigidez de los miembros, la aplicación de el Método Matricial de las Rigideces Simplificado permite obtener solamente fuerzas cortantes y momentos en los extremos de los miembros.

Una vez que se conocen las fuerzas cortantes, las fuerzas axiales del miembro pueden ser evaluadas considerando el equilibrio de los cuerpos libres de los nudos y miembros de la estructura.

## **2.2. Métodos clásicos de análisis estructural**

Los métodos de análisis estructural de marcos rígidos cuyo proceso involucra cálculos iterativos y que se utilizaban antes de que el uso de las calculadoras y computadoras fuera común, se denominan en este documento como métodos clásicos. Específicamente en este documento se refiere a 2 métodos, el Método de Distribución de Momentos (Método de Cross) y el Método de Kani, los cuales han sido ampliamente utilizados en la práctica y docencia del análisis estructural en Guatemala.

Los métodos clásicos para el análisis de marcos rígidos se caracterizan por lo siguiente:

- Los resultados obtenidos del análisis son los momentos en los extremos de cada uno de los miembros que forman la estructura. Conociendo estos momentos y las solicitaciones de carga, pueden calcularse las demás fuerzas que actúan en el miembro (fuerza cortante, fuerza axial), así como las deformaciones resultantes.

- Se desprecian las deformaciones axiales. Debido a que las deformaciones axiales son muy pequeñas en una estructura ordinaria, puede suponerse que los miembros no se acortan o alargan debido a las solitudes de carga. Por esta misma razón, los miembros que sufren asentamientos (derivadas) conservan su misma longitud y se puede suponer que el asentamiento resultante es perpendicular a la posición no deformada del miembro.
- Los momentos fijos debido a las solitudes en los miembros son distribuidos en cada uno de estos según las rigideces relativas de los miembros. Es por esto que el cálculo de las rigideces es uno de los primeros pasos para estos métodos.
- Los momentos se obtienen mediante cálculos cíclicos retroalimentados (iteraciones o aproximaciones sucesivas). Esto significa que la exactitud del resultado final dependerá de la cantidad de ciclos que se realicen.

Para comenzar con el análisis con cualquiera de los dos métodos clásicos se debe dibujar un esquema del marco que muestre claramente todos los parámetros involucrados (longitudes, rigideces y cargas). Las líneas en el esquema representan los ejes longitudinales de cada uno de los miembros (que deben coincidir con sus respectivos centroides). Es importante recordar que el cálculo de los coeficientes de rigidez debe hacerse cuidadosamente, con la relación  $K = I/L$ .

En las siguientes secciones se describirá el procedimiento de análisis para marcos rígidos formados por varias crujiás y de varios niveles (de forma rectangular, es decir con columnas verticales y vigas horizontales). Aunque el procedimiento general es el mismo para cualquier tipo de estructura, otras

estructuras con otras configuraciones deben tomar en cuenta la compatibilidad de deformaciones de una forma más minuciosa. Un estudio más detallado sobre este tema se puede consultar el libro *Statically Indeterminate Structures* de Chu-Kia Wang, el cual contiene varios ejemplos del análisis de estructuras no reticulares.

### **2.2.1. Método de Distribución de Momentos (Método de Cross)**

El Método de Distribución de Momentos fue desarrollado por Hardy Cross y presentado en Estados Unidos en 1930. Cross resolvió las ecuaciones de equilibrio en los nudos usando el método iterativo de Gauss-Seidel. Este Método es fácil y rápido y también es uno de los más comúnmente usados para el análisis estructural. Adicionalmente, este Método es uno de los que más ayuda para comprender el comportamiento estructural de los marcos rígidos.

Este método tiene la ventaja de poder ser utilizado para analizar los efectos de la flexión en marcos rígidos con cualquier tipo de configuración. Sin embargo, este método se vuelve más complejo según los grados de libertad de la estructura, lo que lo hace poco práctico para estructuras muy complejas.

En el análisis de estructuras que se realiza mediante el Método de Distribución de Momentos debe cumplir con las condiciones basadas en el principio de superposición, compatibilidad de deformaciones elásticas y equilibrio de la estructura.

El principio de superposición permite separar los efectos de las solicitaciones en distintas distribuciones de momentos. Siguiendo el procedimiento general de distribución de momentos en la estructura, se obtienen momentos en los extremos de cada barra.

Es muy importante tener en cuenta que el momento final en un extremo de una barra es igual a la suma de cada producto del momento y del factor de corrección de cada distribución de momentos. Por esta razón, y como se podrá notar en la descripción de este método, es necesario un factor de corrección cuando se utilizan momentos de ladeo arbitrarios. El momento final del extremo de una barra se expresa de forma general con:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i C_i \quad (2.13)$$

Donde M es el momento final,  $M_i$  y  $C_i$  son el momento y factor de corrección para la distribución de momento  $i$ , y  $n$  es el número de distribuciones de momento (según los grados de libertad supuestos para la estructura).

#### **2.2.1.1. Distribución de momentos fijos**

A continuación se describe el procedimiento general para distribuir los momentos en una estructura. Cuando se realiza el análisis solamente debido a cargas gravitacionales o no existe ladeo el análisis se limita solamente a este procedimiento.

El procedimiento para la distribución de los momentos fijos es el siguiente:

- Calcular el valor del coeficiente de rigidez,  $K = I/L$ , para cada barra.
- Calcular los factores de distribución para cada nudo. El factor de distribución para el nudo  $i$  de una barra  $i - f$  es igual al coeficiente de rigidez de la barra  $i - f$  dividido entre la suma de coeficientes de rigidez de las barras que concurren en el nudo  $i$ . La suma de los factores de distribución en el nudo  $i$  debe ser igual a 1.

- Calcular los momentos de empotramiento perfecto (momentos fijos) según la solicitud de cargas. Se consideran los momentos reactivos y el sentido positivo contrario a las manecillas del reloj. Los valores de los momentos fijos se encuentran generalmente en las tapas o apéndices de los libros de análisis estructural.
- Sumar los momentos fijos de los extremos de las barras en cada nudo. Multiplicar a la suma de momentos en cada nudo el valor del factor de distribución multiplicado por  $-1$ . Con lo anterior se obtienen los momentos proporcionales a la rigidez de los miembros que concurren en cada nudo (distribución de momentos).
- Repartir el momento en el extremo de cada barra con el de la barra contigua, multiplicando por  $1/2$ . A este momento se le conoce como momento transportado.
- Repetir los dos pasos anteriores de forma iterativa hasta que el momento distribuido sea pequeño o hasta que se llegue a la precisión deseada.
- Los momentos finales en los extremos de los miembros son iguales a la suma del momento fijo más todos los valores de las iteraciones realizadas. El último momento transportado no se debe tomar en cuenta para calcular los momentos finales.

Para fines prácticos, el cálculo de los momentos finales se realiza con tres ciclos<sup>6</sup>. Al realizar las iteraciones correspondientes a tres ciclos, la suma de los momentos en cada nudo debe ser igual a cero.

---

<sup>6</sup>Es posible que para ciertas configuraciones estructurales sea necesario realizar más iteraciones, pero para la gran mayoría de los casos son suficientes tres ciclos.

### 2.2.1.2. Marcos con ladeo

Al analizar marcos sujetos a ladeo, debe hacerse un análisis previo de las posibles deformaciones en la estructura, es decir, determinar los grados de ladeo o grados de libertad posibles. Esto se realiza para determinar las distribuciones de momentos necesarias para considerar correctamente el comportamiento del marco ante el ladeo.

El equilibrio de fuerzas horizontales en las columnas, que se expresa como la suma de las fuerzas horizontales externas desde el piso superior (último piso) hasta el piso considerado, debe ser igual a la suma de fuerzas cortantes en los extremos inferiores de las columnas del piso considerado. Esto se puede expresar matemáticamente así:

$$\sum F_{\text{externas}} = \sum F_{\text{columnas}} \quad (2.14)$$

El procedimiento para analizar marcos con ladeo es el siguiente:

- Realizar la distribución de momentos con ladeo restringido. Determinar la fuerza cortante horizontal en los extremos inferiores de las columnas del piso considerado (se consideran todas las cargas externas). Esto se realiza con la ecuación 2.14.
- Asignar el sentido de los momentos fijos de ladeo (cuya magnitud es arbitraria) según la dirección contraria de la fuerza cortante en el nivel. Los momentos deben ser consistentes con las derivas producidas por las cargas externas.

- Los momentos fijos de ladeo se relacionan<sup>7</sup> de la siguiente forma (siendo momento  $ML_1$  de magnitud arbitraria para la columna 1 y  $ML_2$  el momento de ladeo proporcional para la columna 2):

$$ML_2 = ML_1 \frac{\Delta_2 I_2 L_1^2}{\Delta_1 I_1 L_2^2} = ML_1 \frac{\Delta_2 K_2 L_1}{\Delta_1 K_1 L_2} \quad (2.15)$$

- Realizar la distribución de momentos con ladeo permitido en el nivel considerado (es decir, con el ladeo restringido en todos los demás niveles). Se debe hacer una distribución de momentos para cada caso. Determinar fuerzas cortantes en extremos inferiores en las columnas de cada nivel (no se consideran las cargas externas).
- Usar la ecuación 2.13 y la ecuación 2.14 para plantear un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los factores de corrección para cada distribución de momentos con ladeo permitido.
- Usar la ecuación 2.13 para determinar los valores de los momentos de los extremos. Corregir los momentos de ladeo de las distribuciones de momento con el respectivo factor de corrección.

### 2.2.2. Método de Kani

El Método de Kani fue presentado por Gaspar Kani en 1959 en Alemania, siendo similar al Método de Distribución de Momentos. Este Método utiliza el Método iterativo de Gauss-Seidel para resolver las ecuaciones de Pendiente-Deflexión sin conocer explícitamente esas ecuaciones.

<sup>7</sup>Esta relación se realiza con la fórmula  $ML = (6EI\Delta) / (L^2)$ , que corresponde al momento producido por una deriva  $\Delta$  en una viga empotrada.

Al realizar las iteraciones para los momentos en los extremos desconocidos, el Método de Kani proporcionará la precisión deseada en los momentos finales de los extremos de los miembros. Para fines prácticos, la obtención de los momentos finales con este método se dará cuando los valores de iteraciones se repiten en el 50 por ciento de los nudos de la estructura<sup>8</sup>.

El Método de Kani es fácil y rápido y también tiene incorporada la capacidad de eliminación de errores. Esto significa que los errores computacionales desaparecerán automáticamente en operaciones subsecuentes. Sin embargo, este método solamente sirve para analizar marcos rígidos rectangulares, formados por columnas verticales (que pueden tener distintas longitudes).

El autor del método (G. Kani) recomienda iniciar los cálculos en el nudo más descompensado y elegir una ruta que facilite los cálculos siguientes. Sin embargo, debido a la naturaleza de este método, esto no es estrictamente necesario. La desventaja de no utilizar una ruta que cumpla con el criterio anterior es que puede ser posible que la convergencia de las iteraciones requiera más ciclos.

#### **2.2.2.1. Marcos con nudos rígidos (no desplazables)**

A continuación se describe el procedimiento general para obtener los momentos finales en marco con nudos rígidos (no desplazables), es decir, una estructura que no está sujeta a ladeo.

- Calcular los valores de los coeficientes de repartición o factores de giro  $\mu$ , repartiendo el valor  $-1/2$  proporcionalmente en cada nudo a los valores

---

<sup>8</sup>Es posible que para ciertas configuraciones estructurales sea necesario realizar más iteraciones, pero para la gran mayoría de los casos basta que los valores de las iteraciones se repitan en la mitad de los nudos de la estructura.

de rigideces  $K$  de las barras que concurren en él. Por ejemplo, para el extremo  $i$  de la barra  $i-f$ , se tiene:

$$\mu_{if} = -\frac{1}{2} \frac{K_{if}}{\sum_{(i)} K_{if}}$$

Como comprobación se debe cumplir que la suma de los factores de distribución en cada nudo sea igual a  $-1/2$ :

$$\sum_{(i)} \mu_{if} = -\frac{1}{2}$$

- Calcular para cada sollicitación de carga, los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de las barras  $\bar{M}_{if}$ . Sumando en cada nudo estos momentos de empotramiento, se obtienen los valores de los momentos de sujeción para cada uno de los nudos:

$$\bar{M}_i = \sum_{(i)} \bar{M}_{if}$$

- Las sucesivas influencias del giro de los nudos a los momentos  $M'_{if}$  se determinan mediante iteraciones de la siguiente operación:

$$M'_{if} = \mu_{if} \left( \bar{M}_i + \sum_{(i)} M'_{fi} \right)$$

Esto se realiza de un nudo a otro, hasta obtener la aproximación deseada. Este paso se realiza hasta alcanzar la precisión deseada en los resultados.

- Sumando los momentos de empotramiento en los extremos de las barras  $\bar{M}_{if}$  con la influencia de los giros, se obtienen los momentos definitivos de los extremos de cada barra. Así, para el extremo i de la barra i-f se tiene:

$$M_{if} = \bar{M}_{if} + 2M'_{if} + M'_{fi}$$

### 2.2.2.2. Marcos con nudos desplazables

El cálculo de los momentos totales para un marco de varios pisos con nudos desplazables (estructura sujeta a ladeo), se desarrolla de la forma siguiente. Se considera que cada piso r tiene las columnas de la misma longitud.

- Calcular los momentos de empotramiento perfecto  $M_{if}$  en el extremo de cada barra, tanto para las fuerzas verticales como horizontales. Obtener los momentos de sujeción en cada nudo i, sumando los momentos de empotramiento correspondientes a los extremos de las barras que concurren en el nudo i:

$$\bar{M}_i = \sum_{(i)} \bar{M}_{if}$$

En caso de existir cargas horizontales, se determinan las fuerzas de fijación  $\bar{H}$  y con ellas, en cada piso r, la fuerza  $Q_r$  se calcula mediante la suma de las fuerzas  $\bar{H}$  que actúan por encima del piso considerado:

$$Q_r = \sum_1^r \bar{H}_i$$

Con los valores de  $Q_r$  se obtienen los momentos de piso con esta expresión siguiente:

$$\bar{M}_r = \frac{1}{3} Q_r h_r$$

- Obtener los coeficientes de reparto  $\mu$  repartiendo el valor  $-1/2$  en cada nudo, proporcionalmente a los coeficientes de rigidez  $K$  de las barras que concurren en el nudo. Así para el extremo  $i$  (nudo  $i$ ) de la barra  $i - f$ , se tiene:

$$\mu_{if} = -\frac{1}{2} \frac{K_{if}}{\sum_{(i)} K_{if}}$$

Se debe cumplir que la suma de los factores de distribución en cada nudo sea igual a  $-1/2$ .

- Obtener los factores de corrimiento  $v$ , distribuyendo en cada piso el valor  $-3/2$  proporcionalmente a las rigideces de las columnas. Para una columna  $i - f$  del piso  $r$ , el valor de  $v$  será:

$$v_{if} = -\frac{3}{2} \frac{K_{if}}{\sum_{(r)} K_{if}}$$

Se debe cumplir que la suma de los factores de corrimiento en cada piso igual a  $-3/2$ .

- Las influencias del giro  $M'_{ik}$  se obtienen por iteración sucesiva de la fórmula siguiente, de uno a otro nudo:

$$M'_{if} = \mu_{if} \left[ \bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{fi} + M''_{if}) \right] \quad (2.16)$$

Las influencias del desplazamiento  $M''_{if}$ , se obtienen por iteración sucesiva de todos los nudos mediante esta fórmula:

$$M''_{if} = v_{if} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} (M'_{if} + M'_{fi}) \right] \quad (2.17)$$

Las iteraciones con las fórmulas 2.16 y 2.17 serán sucesivas alternando las dos, empezando con la 2.16 para cada nudo y luego la 2.17 y así, hasta que todas las influencias de los giros y desplazamientos lleguen a la exactitud deseada.

- Se obtienen los momentos finales en los extremos de las barras, sumando los momentos de empotramiento  $\bar{M}_{ik}$ , las influencias de los giros  $\bar{M}_{if}$ , y las influencias del desplazamiento  $M''_{if}$ . Así, por ejemplo, para el extremo i de la barra i – f:

$$M_{if} = \bar{M}_{if} + 2M'_{if} + M'_{fi} + M''_{if} \quad (2.18)$$

### 3. METODOLOGÍA DE LOS ANÁLISIS Y COMPARACIONES

Para realizar las comparaciones entre los métodos clásicos y el Método Matricial de las Rigideces se eligieron tres marcos planos con las siguientes configuraciones estructurales:

- Marco 1: marco rectangular de dos niveles y dos crujeías con todos los apoyos empotrados.
- Marco 2: marco rectangular de dos niveles y tres crujeías con todos los apoyos empotrados.
- Marco 3: marco de un nivel con techo a dos aguas, considerando cuando los apoyos están empotrados y también cuando los apoyos están articulados.

Los marcos 1 y 2 estarán sujetos a las solicitudes de cargas uniformemente distribuidas sobre las vigas y cargas puntuales laterales en cada nivel. El marco 3 estará sujeto a las solicitudes de carga uniformemente distribuida en cada una de las vigas que forma el techo a dos aguas.

Los marcos rígidos a analizar serán estructuras de concreto. Se eligió hacer el análisis de este tipo de estructuras debido a que el cálculo de las propiedades geométricas de secciones rectangulares (típicas para elementos de concreto reforzado) es más sencillo. También se consideró que debido a que todos los miembros que forman la estructura son del mismo material, se puede obviar la inclusión del módulo de elasticidad  $E$  en el análisis realizado con los métodos clásicos. Esto significa que el análisis es válido para cualquier material,

siendo necesario tomar las consideraciones de los diferentes valores del módulo de elasticidad y propiedades geométricas (área y momento de inercia).

El análisis estructural y la comparación de los resultados se llevaron a cabo utilizando hojas de cálculo hechas con el software Microsoft Excel. Se eligió este software debido a las siguientes razones: es software ampliamente conocido y utilizado en ingeniería, es software que está disponible en la mayoría de computadoras hoy en día<sup>9</sup>. (siendo los archivos compatibles con otros programas de hojas de cálculo), y porque posee todas las características necesarias para realizar los cálculos del análisis estructural. Se crearon tres archivos, uno por cada marco, teniendo una hoja para cada Método de análisis estructural y las una para las comparaciones. En este documento se presentarán los resultados obtenidos con dichas hojas de cálculo.

Las hojas de cálculo elaboradas proporcionan los valores de los momentos finales en los extremos de cada miembro, obtenidos mediante los métodos clásicos (Método de Distribución de Momentos y Método de Kani) y el Método Matricial de las Rigideces (con dos diferentes consideraciones: considerando todos los grados de libertad posibles —Método regular— y considerando que las derivas en un piso son iguales para todas las columnas y despreciando deformaciones axiales —Método simplificado—).

Debido a la versatilidad que tienen las hojas de cálculo elaboradas para este trabajo, es posible realizar una gran variedad de variaciones a las estructuras. Las variables que pueden modificarse son las siguientes:

---

<sup>9</sup> Obviamente se refiere a las computadoras con sistema operativo Windows o Mac OS, aunque también existen alternativas de software de hojas de cálculo compatible para otros sistemas operativos como LibreOffice Calc o Apache OpenOffice Calc.

- Dimensiones del edificio (luces de las vigas y alturas de las columnas)
- Dimensiones de la sección transversal de cada miembro
- Ubicación, magnitud y sentido de las cargas (cargas distribuidas sobre vigas y cargas laterales en cada los niveles)

Aunque Excel es una herramienta muy versátil, no es posible, usando solo funciones básicas, realizar un programa sofisticado que sea capaz de analizar cualquier tipo estructura<sup>10</sup>. Por esta razón, las estructuras que se analizaron corresponden solamente a tres configuraciones estructurales básicas y comunes, a partir de las cuales los lectores podrán basarse para estimar el comportamiento de otras estructuras.

El análisis con los métodos clásicos se hizo tomando en cuenta el ladeo en las estructuras debido a que se realizan suposiciones más apegadas al comportamiento real de las estructuras. También para el análisis hecho con los métodos clásicos se emplearon 12 ciclos (es decir 12 iteraciones), esto se realizó así, a pesar de que los momentos finales se obtienen generalmente con menos ciclos para los métodos clásicos (tres ciclos para el Método de Distribución de Momentos y hasta que el 50 por ciento de los valores en las iteraciones en los nudos se repitan para el Método de Kani), para mostrar el comportamiento de los resultados en un rango razonablemente amplio.

Los resultados del marco 1 corresponden a los siguientes casos:

- Cumple con requisitos básicos de regularidad estructural (como se describe en la sección 1.3.), siendo una estructura simétrica:
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las luces.

---

<sup>10</sup>. A esto se debe agregar que el autor tiene conocimientos para el uso de Microsoft Excel, pero no para otras herramientas de programación.

- Cargas uniformemente distribuidas colocadas en luces alternas.
- Cargas puntuales laterales, ubicadas en cada nivel de la estructura.
- No cumple con con requisitos básicos de regularidad estructural, siendo una estructura asimétrica:
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las luces.
  - Cargas uniformemente distribuidas colocadas en luces alternas.
  - Cargas puntuales laterales, ubicadas en cada nivel de la estructura.

Cada caso se analizará con el Método de Distribución de Momentos, Método de Kani y el Método Matricial de las Rigideces en sus dos variantes.

Los resultados del marco 2 corresponden a los siguientes casos:

- Cumple con requisitos básicos de regularidad estructural (como se describe en la sección 1.3.), siendo una estructura simétrica:
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas y cargas puntuales laterales.
- No cumple con con requisitos básicos de regularidad estructural, siendo una estructura asimétrica:
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas y cargas puntuales laterales.

Los resultados del marco 3 corresponden a los siguientes casos:

- Columnas empotradas en los apoyos.
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre cada una de las vigas colocadas. en forma simétrica (en el mismo sentido)

- Cargas uniformemente distribuidas sobre cada una de las vigas colocadas. en forma asimétrica (en sentido diferente).
- Columnas articuladas en los apoyos.
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre cada una de las vigas colocadas. en forma simétrica (en el mismo sentido).
  - Cargas uniformemente distribuidas sobre cada una de las vigas colocadas. en forma asimétrica (en sentido diferente).

Los análisis fueron hechos usando el sistema MKS, es decir tomando como unidad de longitud el metro (m) para las longitudes de los miembros, los centímetros (cm) para las dimensiones de las secciones transversales y las toneladas (t) como unidades de fuerza.

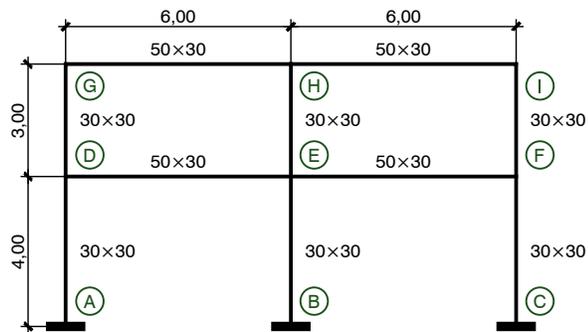


## 4. ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 1

### 4.1. Estructura simétrica

La configuración estructural del marco 1 cuando es una estructura con geometría simétrica y cumple con los criterios básicos de regularidad estructural se muestra en la figura 9. Las longitudes están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están dadas en centímetros (altura×base).

Figura 9. Marco 1, estructura simétrica



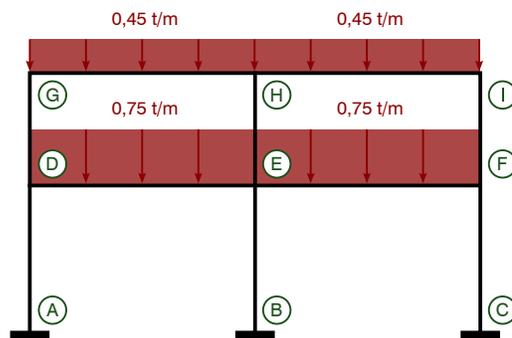
Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.1. Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas

Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 10. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

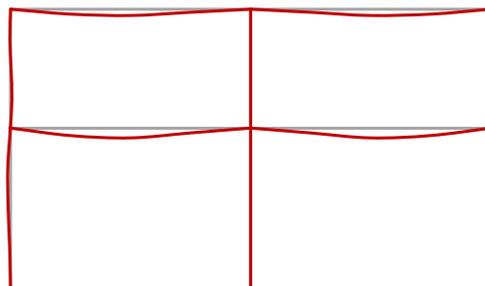
En la figura 11 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular. Las deformaciones están aumentadas 500 veces.

Figura 10. **Solicitudes de carga para el caso 4.1.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 11. **Curva elástica para el caso 4.1.1.**



Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.1.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron mediante dos procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla VI.

Tabla VI. Resultados del caso 4.1.1.1. (Regular), en t·m

<b>G</b>	0,6299	-1,6370	<b>H</b>	1,6370	-0,6299	<b>I</b>
-0,6299			0,0000			0,6299
-0,7118			0,0000			0,7118
<b>D</b>	1,1184	-2,7588	<b>E</b>	2,7588	-1,1184	<b>F</b>
-0,4065			0,0000			0,4065
-0,2048			0,0000			0,2048
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces simplificado se muestran en la tabla VII.

Tabla VII. **Resultados del caso 4.1.1.1. (Simplificado), en t·m**

<b>G</b>	0,5864	-1,7318	<b>H</b>	1,7318	-0,5864	<b>I</b>
-0,5864			0,0000			0,5864
-0,6779			0,0000			0,6779
<b>D</b>	1,0626	-2,8437	<b>E</b>	2,8437	-1,0626	<b>F</b>
-0,3847			0,0000			0,3847
-0,1924			0,0000			0,1924
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.1.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla VIII. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla VIII. **Resultados del caso 4.1.1.2., en t·m**

<b>G</b>	0,5864	-1,7318	<b>H</b>	1,7318	-0,5864	<b>I</b>
-0,5864			0,0000			0,5864
-0,6779			0,0000			0,6779
<b>D</b>	1,0626	-2,8437	<b>E</b>	2,8437	-1,0626	<b>F</b>
-0,3847			0,0000			0,3847
-0,1924			0,0000			0,1924
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

Es importante notar que los momentos en los extremos de las columnas BE y EH teóricamente deben ser cero, debido a que la estructura es simétrica en geometría y solicitudes de cargas. Los valores relativos que se ven en la

comparación se deben a las diferentes precisiones que tiene cada método (el valor teórico que debería mostrarse en este caso es el de la forma indeterminada 0/0).

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.1.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.1.1.), se muestra en la tabla IX. En todos los valores comparativos se puede observar una buena concordancia con el Método Matricial Regular, siendo la mayor diferencia 6,9 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla IX. **Comparación del caso 4.1.1.2. con el caso 4.1.1.1. (Regular)**

<b>G</b>	93,1%	105,8%	<b>H</b>	105,8%	93,1%	<b>I</b>
93,1%			24,4%			93,1%
95,2%			91,9%			95,2%
<b>D</b>	95,0%	103,1%	<b>E</b>	103,1%	95,0%	<b>F</b>
94,6%			463,4%			94,6%
93,9%			-83,8%			93,9%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.1.2.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.1.1.1.), se muestra en la tabla X. La concordancia con el Método Matricial Simplificado es del 100 por ciento, a excepción de las columnas BE y EH. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla X. **Comparación del caso 4.1.1.2. con el caso 4.1.1.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			12,6%			100,0%
100,0%			25,4%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			-115,9%			100,0%
100,0%			-75,7%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.1.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla XI. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XI. **Resultados del caso 4.1.1.3., en t·m**

<b>G</b>	0,5864	-1,7318	<b>H</b>	1,7318	-0,5864	<b>I</b>
-0,5864			0,0000			0,5864
-0,6779			0,0000			0,6779
<b>D</b>	1,0626	-2,8437	<b>E</b>	2,8437	-1,0626	<b>F</b>
-0,3847			0,0000			0,3847
-0,1924			0,0000			0,1924
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

Es importante notar que los momentos en los extremos de las columnas BE y EH teóricamente deben ser cero, debido a que la estructura es simétrica en

geometría y solicitudes de cargas. Los valores relativos que se ven en la comparación se deben a las diferentes precisiones que tiene cada método (el valor teórico que debería mostrarse en este caso es el de la forma indeterminada 0/0).

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.1.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.1.1.), se muestra en la tabla XII. Los valores relativos respecto al Método matricial regular son los mismos que la comparación realizada con el Método de Kani, siendo la única diferencia los valores comparativos en las columnas. La mayor diferencia entre los valores relativos es de 6,9 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XII. **Comparación del caso 4.1.1.3. con el caso 4.1.1.1. (Regular)**

<b>G</b>	93,1%	105,8%	<b>H</b>	105,8%	93,1%	<b>I</b>
93,1%			0,0%			93,1%
95,2%			0,0%			95,2%
<b>D</b>	95,0%	103,1%	<b>E</b>	103,1%	95,0%	<b>F</b>
94,6%			0,0%			94,6%
93,9%			0,0%			93,9%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.1.3.) con el Método matricial Simplificado (caso 4.1.1.1.), se muestra en la tabla XIII. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla XIII. **Comparación del caso 4.1.1.3. con el caso 4.1.1.1. (Simplificado)**

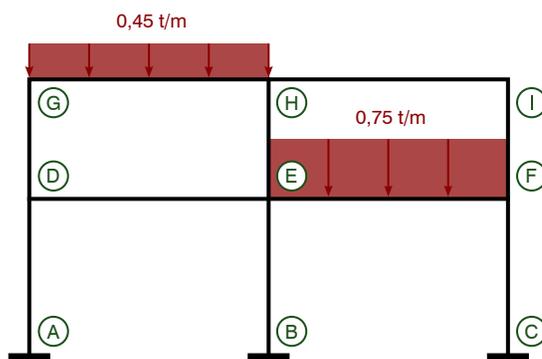
<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			0,0%			100,0%
100,0%			0,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			0,0%			100,0%
100,0%			0,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.2. Cargas uniformemente distribuidas sobre vigas alternadas

Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 12. Las cargas distribuidas están en dadas en toneladas sobre metro.

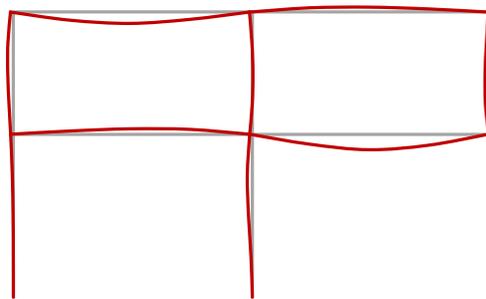
Figura 12. **Solicitudes para el caso 4.1.2.**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 13 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método matricial de la rigidez Regular. Las deformaciones están aumentadas 500 veces.

Figura 13. **Curva elástica para el caso 4.1.2.**



Fuente: elaboración propia.

#### **4.1.2.1. Método Matricial de las Rigideces**

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Los resultados se obtuvieron mediante dos procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla XIV.

Tabla XIV. **Resultados del caso 4.1.2.1. (Regular), en t·m**

<b>G</b>	0,5137	-0,9080	<b>H</b>	0,7290	-0,1162	<b>I</b>
-0,5137			0,1789			0,1162
-0,0764			-0,3404			0,6354
<b>D</b>	-0,0185	-0,9545	<b>E</b>	1,8043	-1,1369	<b>F</b>
0,0949			-0,5094			0,5015
0,0031			-0,2979			0,2079
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces simplificado se muestran en la tabla XV.

Tabla XV. **Resultados del caso 4.1.2.1. (Simplificado), en t·m**

<b>G</b>	0,4928	-0,9552	<b>H</b>	0,7767	-0,0936	<b>I</b>
-0,4928			0,1785			0,0936
-0,0590			-0,3391			0,6189
<b>D</b>	-0,0475	-0,9977	<b>E</b>	1,8460	-1,1101	<b>F</b>
0,1065			-0,5092			0,4912
0,0090			-0,2989			0,2014
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.2.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla XVI. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XVI. Resultados del caso 4.1.2.2., en t·m

<b>G</b>	0,4928	-0,9552	<b>H</b>	0,7767	-0,0936	<b>I</b>
-0,4928			0,1785			0,0936
-0,0590			-0,3392			0,6189
<b>D</b>	-0,0475	-0,9977	<b>E</b>	1,8460	-1,1101	<b>F</b>
0,1065			-0,5092			0,4912
0,0090			-0,2988			0,2013
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.2.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.2.1.), se muestra en la tabla XVII. Se observa que algunos valores comparativos presentan grandes variaciones.

El valor del momento AD es casi tres veces el valor de comparación, de igual forma que el momento DE. Otra diferencia apreciable ocurre en el momento DG, siendo el momento casi 77 por ciento del valor comparativo. También se observa que el nudo I presenta variaciones considerables en los momentos. En los demás miembros la diferencia no es tan grande.

Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales en la mayoría de los casos, pero sí se ven afectados los nudos que no están cargados directamente y que corresponden a columnas exteriores (nudos D, I).

Tabla XVII. **Comparación del caso 4.1.2.2. con el caso 4.1.2.1. (Regular)**

<b>G</b>	95,9%	105,2%	<b>H</b>	106,5%	80,5%	<b>I</b>
95,9%			99,7%			80,5%
77,2%			99,6%			97,4%
<b>D</b>	257,1%	104,5%	<b>E</b>	102,3%	97,6%	<b>F</b>
112,2%			100,0%			98,0%
289,4%			100,3%			96,9%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.2.2.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.1.2.1.), se muestra en la tabla XVIII. Se puede ver que la correspondencia en todos los momentos es de 100 por ciento, excepto en el momento del AD.

Es precisamente en este lugar donde ocurre la mayor diferencia cuando se compara con el Método Matricial Regular. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla XVIII. **Comparación del caso 4.1.2.2. con el caso 4.1.2.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
99,8%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.2.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla XIX. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XIX. **Resultados del caso 4.1.2.3., en t·m**

<b>G</b>	0,4929	-0,9552	<b>H</b>	0,7766	-0,0935	<b>I</b>
-0,4927			0,1785			0,0936
-0,0591			-0,3391			0,6188
<b>D</b>	-0,0475	-0,9976	<b>E</b>	1,8461	-1,1101	<b>F</b>
0,1065			-0,5092			0,4912
0,0090			-0,2988			0,2014
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.2.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.2.1.), se muestra en la tabla XX. El valor del momento AD es

casi tres veces el valor de comparación, de igual forma que el momento DE. Otra diferencia apreciable ocurre en el momento DG, siendo el momento casi 77 por ciento del valor comparativo.

También se observa que el nudo I presenta variaciones considerables en los momentos. En los demás miembros la diferencia no es tan grande. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales en la mayoría de los casos, pero sí se ven afectados los nudos que no están cargados directamente y que corresponden a columnas exteriores (nudos D, I).

Tabla XX. **Comparación del caso 4.1.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Regular)**

<b>G</b>	95,9%	105,2%	<b>H</b>	106,5%	80,4%	<b>I</b>
95,9%			99,7%			80,6%
77,3%			99,6%			97,4%
<b>D</b>	257,5%	104,5%	<b>E</b>	102,3%	97,6%	<b>F</b>
112,2%			100,0%			98,0%
289,8%			100,3%			96,9%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- **Comparación con el Método Matricial Simplificado**

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.2.3.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.1.2.1.), se muestra en la tabla XXI. Hay muy buena correspondencia entre los valores comparativos. Es interesante notar que las únicas diferencias (que son muy pequeñas) se dan en los mismos nudos que en el caso 4.1.2.2.. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla XXI. **Comparación del caso 4.1.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	99,9%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,1%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
99,9%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

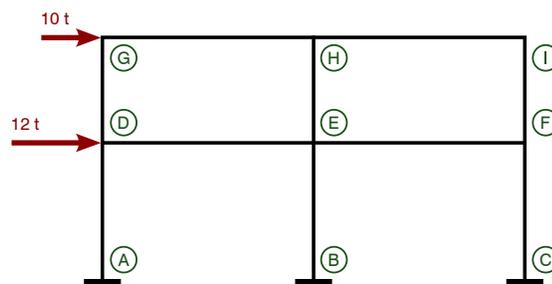
Fuente: elaboración propia.

### 4.1.3. Cargas puntuales laterales

Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 14. Las cargas puntuales están dadas en toneladas.

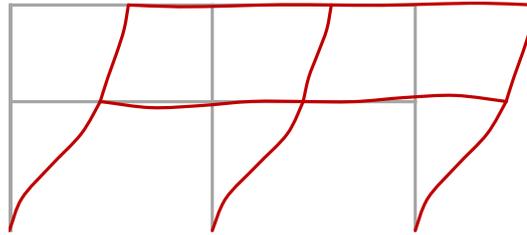
En la figura 15 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular. Las deformaciones están aumentadas 100 veces.

Figura 14. **Solicitudes para el caso 4.1.3.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 15. **Curva elástica para el caso 4.1.3.**



Fuente: elaboración propia.

#### **4.1.3.1. Método Matricial de las Rigideces**

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj, en coordenadas globales.

Los resultados se obtuvieron mediante dos procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla XXII.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces simplificado se muestran en la tabla XXIII.

Tabla XXII. **Resultados del caso 4.1.3.1. (Regular), en t·m**

<b>7</b>	-4,8581	-3,8098	<b>8</b>	-3,8098	-4,8581	<b>9</b>
4,8581			7,6197			4,8581
2,8260			7,0121			2,8260
<b>4</b>	-15,6975	-11,3519	<b>5</b>	-11,3519	-15,6975	<b>6</b>
12,8715			15,6917			12,8715
15,0510			16,4633			15,0510
<b>1</b>			<b>2</b>			<b>3</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXIII. **Resultados del caso 4.1.3.1. (Simplificado), en t·m**

<b>7</b>	-4,8558	-3,8153	<b>8</b>	-3,8153	-4,8558	<b>9</b>
4,8558			7,6307			4,8558
2,8188			7,0201			2,8188
<b>4</b>	-15,6998	-11,3574	<b>5</b>	-11,3574	-15,6998	<b>6</b>
12,8809			15,6948			12,8809
15,0455			16,4524			15,0455
<b>1</b>			<b>2</b>			<b>3</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.3.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla XXIV. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.3.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.3.1.), se muestra en la tabla XXV. Casi todos los valores corresponden al 100 por ciento, siendo la mayor diferencia de tan

solo 0,3 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XXIV. **Resultados del caso 4.1.3.2., en t·m**

<b>G</b>	-4.8559	-3.8154	<b>H</b>	-3.8154	-4.8559	<b>I</b>
4.8559			7.6308			4.8559
2.8187			7.0200			2.8187
<b>D</b>	-15.6998	-11.3575	<b>E</b>	-11.3575	-15.6998	<b>F</b>
12.8811			15.6949			12.8811
15.0454			16.4522			15.0454
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXV. **Comparación del caso 4.1.3.2. con el caso 4.1.3.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,0%	100,1%	<b>H</b>	100,1%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,1%			100,0%
99,7%			100,1%			99,7%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,1%			100,0%			100,1%
100,0%			99,9%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- **Comparación con el Método Matricial Simplificado**

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.1.3.2.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.1.3.2.), se muestra en la tabla XXVI. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla XXVI. **Comparación del caso 4.1.3.2. con el caso 4.1.3.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.3.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla XXVII. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XXVII. **Resultados del caso 4.1.3.3., en t-m**

<b>G</b>	-4,8561	-3,8151	<b>H</b>	-3,8151	-4,8561	<b>I</b>
4,8557			7,6308			4,8557
2,8189			7,0200			2,8189
<b>D</b>	-15,6995	-11,3576	<b>E</b>	-11,3576	-15,6995	<b>F</b>
12,8810			15,6946			12,8810
15,0455			16,4523			15,0455
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.3.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.3.1.), se muestra en la tabla XXVIII. Casi todos los valores

corresponden al 100 por ciento, siendo la mayor diferencia de tan solo 0,3 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XXVIII. **Comparación del caso 4.1.3.3. con el caso 4.1.3.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,0%	100,1%	<b>H</b>	100,1%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,1%			100,0%
99,7%			100,1%			99,7%
<b>D</b>	100,0%	100,1%	<b>E</b>	100,1%	100,0%	<b>F</b>
100,1%			100,0%			100,1%
100,0%			99,9%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- **Comparación con el Método Matricial Simplificado**

La comparación del Método de Kani (caso 4.1.3.3.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.1.3.1.), se muestra en la tabla XXIX. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla XXIX. **Comparación del caso 4.1.3.3. con el caso 4.1.3.1. (Simplificado)**

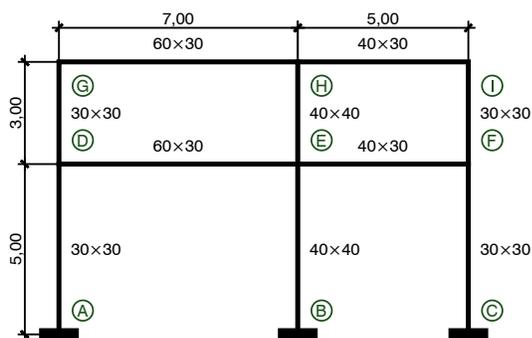
<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

## 4.2. Estructura asimétrica

La configuración estructural del marco 1 cuando es una estructura con geometría asimétrica se muestra en la figura 16. Las longitudes están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están dadas en centímetros (altura×base).

Figura 16. **Marco 1, estructura asimétrica**



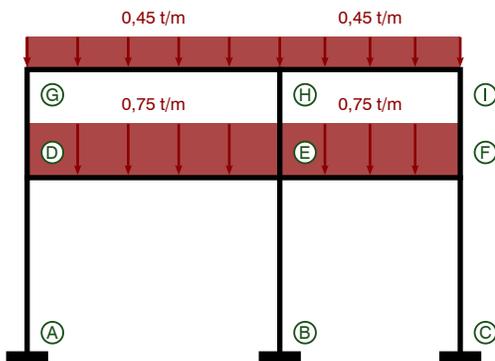
Fuente: elaboración propia.

### 4.2.1. Cargas uniformemente distribuidas sobre todas las vigas

Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 17. Las cargas distribuidas están en dadas en toneladas sobre metro.

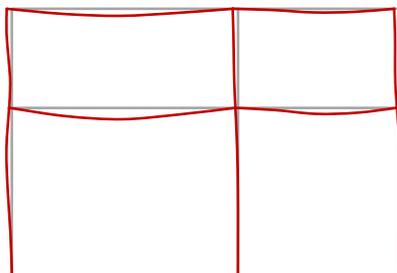
En la figura 18 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método matricial de la rigidez Regular. Las deformaciones están aumentadas 500 veces.

Figura 17. **Solicitudes de carga para el caso 4.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 18. **Curva elástica para el caso 4.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.1.1. **Método Matricial de las Rigideces**

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron mediante dos procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método

Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla XXX.

Tabla XXX. **Resultados del caso 4.2.1.1. (Regular), en t·m**

<b>G</b>	0,9352	-1,7484	<b>H</b>	1,3959	-0,4093	<b>I</b>
-0,9352			0,3525			0,4093
-1,0607			0,5872			0,6470
<b>D</b>	1,5492	-2,8995	<b>E</b>	1,9918	-1,0057	<b>F</b>
-0,4885			0,3206			0,3588
-0,3012			-0,0148			0,1251
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces simplificado se muestran en la tabla XXXI.

Tabla XXXI. **Resultados del caso 4.2.1.1. (Simplificado), en t·m**

<b>G</b>	0,9348	-1,7756	<b>H</b>	1,4192	-0,3999	<b>I</b>
-0,9348			0,3564			0,3999
-1,0626			0,5961			0,6450
<b>D</b>	1,5436	-2,9187	<b>E</b>	2,0037	-0,9961	<b>F</b>
-0,4810			0,3189			0,3511
-0,2954			-0,0142			0,1206
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.1.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla XXXII. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XXXII. Resultados del caso 4.2.1.2., en t·m

<b>G</b>	0,9348	-1,7756	<b>H</b>	1,4192	-0,3999	<b>I</b>
-0,9348			0,3564			0,3999
-1,0626			0,5961			0,6450
<b>D</b>	1,5436	-2,9187	<b>E</b>	2,0037	-0,9961	<b>F</b>
-0,4810			0,3189			0,3511
-0,2954			-0,0142			0,1206
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.1.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.2.1.1.), se muestra en la tabla XXXIII. Hay una buena correspondencia en todos los nudos con los valores comparativos.

La mayor diferencia es de 4,1 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XXXIII. **Comparación del caso 4.2.1.2. con el caso 4.2.1.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,0%	101,6%	<b>H</b>	101,7%	97,7%	<b>I</b>
100,0%			101,1%			97,7%
100,2%			101,5%			99,7%
<b>D</b>	99,6%	100,7%	<b>E</b>	100,6%	99,0%	<b>F</b>
98,5%			99,5%			97,9%
98,1%			95,9%			96,4%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.1.2.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.2.1.1.), se muestra en la tabla XXXIV. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla XXXIV. **Comparación del caso 4.2.1.2. con el caso 4.2.1.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

### 4.2.1.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla XXXV. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XXXV. Resultados del caso 4.2.1.3., en t·m

<b>G</b>	0,9348	-1,7756	<b>H</b>	1,4192	-0,3999	<b>I</b>
-0,9348			0,3564			0,3999
-1,0626			0,5961			0,6450
<b>D</b>	1,5436	-2,9187	<b>E</b>	2,0037	-0,9961	<b>F</b>
-0,4810			0,3189			0,3511
-0,2954			-0,0142			0,1206
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Kani (caso 4.2.1.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.2.1.1.), se muestra en la tabla XXXVI. Hay una buena correspondencia en todos los nudos con los valores comparativos.

La mayor diferencia es de 4,1 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XXXVI. **Comparación del caso 4.2.1.3. con el caso 4.2.1.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,0%	101,6%	<b>H</b>	101,7%	97,7%	<b>I</b>
100,0%			101,1%			97,7%
100,2%			101,5%			99,7%
<b>D</b>	99,6%	100,7%	<b>E</b>	100,6%	99,0%	<b>F</b>
98,5%			99,5%			97,9%
98,1%			95,9%			96,4%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- **Comparación con el Método Matricial Simplificado**

La comparación del Método de Kani (caso 4.2.1.3.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.2.1.1.), se muestra en la tabla XXXVII. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla XXXVII. **Comparación del caso 4.2.1.3. con el caso 4.2.1.1. (Simplificado)**

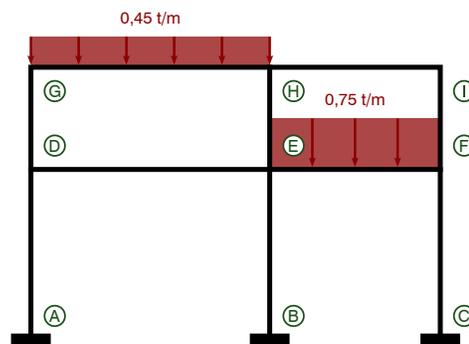
<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.2. Cargas uniformemente distribuidas sobre vigas alternadas

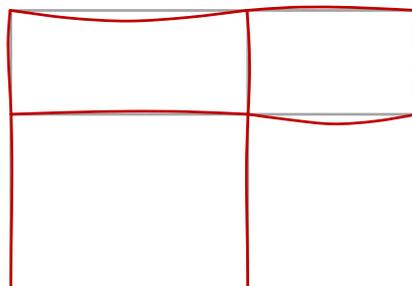
Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 19. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

Figura 19. Solicitudes para el caso 4.2.2.



Fuente: elaboración propia.

Figura 20. Curva elástica para el caso 4.2.2.



Fuente: elaboración propia.

En la figura 20 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular. Las deformaciones están aumentadas 500 veces.

#### 4.2.2.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Los resultados se obtuvieron mediante 2 procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla XXXVIII.

Tabla XXXVIII. Resultados del caso 4.2.2.1. (Regular), en t·m

<b>G</b>	0,6293	-1,1866	<b>H</b>	0,4830	-0,0459	<b>I</b>
-0,6293			0,7036			0,0459
-0,2429			-0,4903			0,6130
<b>D</b>	0,1575	-0,6033	<b>E</b>	1,6590	-1,1223	<b>F</b>
0,0854			-0,5654			0,5092
0,0333			-0,3092			0,2466
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Simplificado se muestran en la tabla XXXIX.

Tabla XXXIX. **Resultados del caso 4.2.2.1. (Simplificado), en t·m**

<b>G</b>	0,6300	-1,1991	<b>H</b>	0,4949	-0,0407	<b>I</b>
-0,6300			0,7041			0,0407
-0,2436			-0,4838			0,6126
<b>D</b>	0,1538	-0,6140	<b>E</b>	1,6634	-1,1190	<b>F</b>
0,0898			-0,5656			0,5064
0,0360			-0,3109			0,2443
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.2.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla XL. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XL. **Resultados del caso 4.2.2.2., en t·m**

<b>G</b>	0,6300	-1,1990	<b>H</b>	0,4949	-0,0407	<b>I</b>
-0,6300			0,7041			0,0407
-0,2436			-0,4838			0,6126
<b>D</b>	0,1538	-0,6140	<b>E</b>	1,6634	-1,1190	<b>F</b>
0,0897			-0,5656			0,5064
0,0360			-0,3108			0,2443
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.2.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.2.2.1.), se muestra en la tabla XLI. La mayoría de valores son cercanos al 100 por ciento.

En el nudo I se observa la mayor variación, siendo esta de 11,3 por ciento. También en el nudo A se observa otra diferencia apreciable, que es de 7,9 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XLI. **Comparación del caso 4.2.2.2. con el caso 4.2.2.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,1%	101,0%	<b>H</b>	102,5%	88,7%	<b>I</b>
100,1%			100,1%			88,7%
100,3%			98,7%			99,9%
<b>D</b>	97,7%	101,8%	<b>E</b>	100,3%	99,7%	<b>F</b>
105,1%			100,0%			99,4%
107,9%			100,5%			99,1%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.2.2.), con el Método Matricial Regular (caso 4.2.2.1.), se muestra en la tabla XLII. La correspondencia en todos los momentos es de 100 por ciento. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla XLII. **Comparación del caso 4.2.2.2. con el caso 4.2.2.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
99,9%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.2.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla XLIII. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XLIII. **Resultados del caso 4.2.2.3., en t·m**

<b>G</b>	0,6301	-1,1991	<b>H</b>	0,4949	-0,0407	<b>I</b>
-0,6300			0,7041			0,0407
-0,2436			-0,4838			0,6126
<b>D</b>	0,1538	-0,6139	<b>E</b>	1,6634	-1,1190	<b>F</b>
0,0897			-0,5656			0,5064
0,0360			-0,3108			0,2443
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Kani (caso 4.2.2.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.1.2.1.), se muestra en la tabla XLIV. Los resultados son casi iguales al caso 4.2.2.2.. La mayor diferencia se encuentra en el momento IH,

siendo de 11,4 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XLIV. **Comparación del caso 4.2.2.3. con el caso 4.1.2.1. (Regular)**

<b>G</b>	100,1%	101,1%	<b>H</b>	102,5%	88,6%	<b>I</b>
100,1%			100,1%			88,7%
100,3%			98,7%			99,9%
<b>D</b>	97,6%	101,8%	<b>E</b>	100,3%	99,7%	<b>F</b>
105,1%			100,0%			99,4%
107,9%			100,5%			99,1%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Kani (caso 4.2.2.3.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.2.2.1.), se muestra en la tabla XLV. La correspondencia en todos los momentos es de 100 por ciento. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla XLV. **Comparación del caso 4.2.2.3. con el caso 4.2.2.1. (Simplificado)**

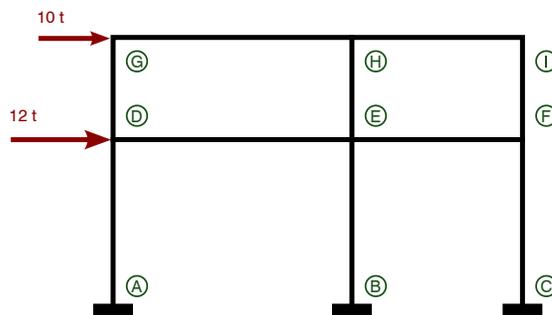
<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	99,9%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,1%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

### 4.2.3. Cargas puntuales laterales

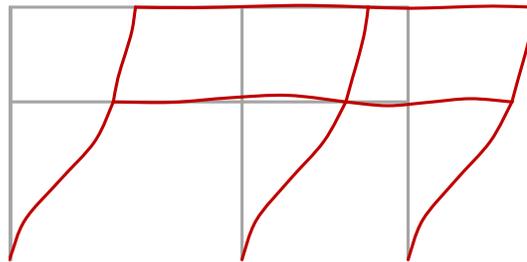
Las solicitaciones de la estructura se muestran en la figura 21. Las cargas puntuales están dadas en toneladas.

Figura 21. Solicitudes para el caso 4.2.3.



Fuente: elaboración propia.

Figura 22. Curva elástica para el caso 4.2.3.



Fuente: elaboración propia.

En la figura 22 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular. Las deformaciones están aumentadas 500 veces.

#### 4.2.3.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron mediante dos procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Regular ) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Simplificado).

- Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular se muestran en la tabla XLVI.

Tabla XLVI. Resultados del caso 4.2.3.1. (Regular), en t·m

<b>G</b>	-6,6070	-7,8395	<b>H</b>	-3,5078	-3,1119	<b>I</b>
6,6070			11,3472			3,1119
6,1350			3,5163			-0,7174
<b>D</b>	-18,3936	-26,5029	<b>E</b>	-6,7556	-7,3995	<b>F</b>
12,2586			29,7422			8,1169
12,8819			36,1972			10,8032
<b>A</b>			<b>C</b>			<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

- Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces simplificado se muestran en la tabla XLVII.

Tabla XLVII. **Resultados del caso 4.2.3.1. (Simplificado), en t·m**

<b>G</b>	-6,6788	-7,9208	<b>H</b>	-3,4234	-3,0459	<b>I</b>
6,6788			11,3442			3,0459
6,2009			3,5047			-0,7745
<b>D</b>	-18,4602	-26,5682	<b>E</b>	-6,7130	-7,3577	<b>F</b>
12,2593			29,7764			8,1321
12,8631			36,1694			10,7996
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.3.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla XLVIII. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla XLVIII. **Resultados del caso 4.2.3.2., en t·m**

<b>G</b>	-6,6789	-7,9210	<b>H</b>	-3,4234	-3,0460	<b>I</b>
6,6789			11,3444			3,0460
6,2008			3,5044			-0,7745
<b>D</b>	-18,4602	-26,5684	<b>E</b>	-6,7130	-7,3577	<b>F</b>
12,2594			29,7770			8,1322
12,8630			36,1690			10,7994
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.3.2.) con el Método Matricial Regular (caso 4.2.3.1.), se muestra en la tabla XLIX. Hay una buena correspondencia en los resultados. La mayor diferencia está en el momento FI, la cual es de 8,0 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Distribución de Momentos no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla XLIX. **Comparación del caso 4.2.3.2. con el caso 4.2.3.1. (Regular)**

<b>G</b>	101,1%	101,0%	<b>H</b>	97,6%	97,9%	<b>I</b>
101,1%			100,0%			97,9%
101,1%			99,7%			108,0%
<b>D</b>	100,4%	100,2%	<b>E</b>	99,4%	99,4%	<b>F</b>
100,0%			100,1%			100,2%
99,9%			99,9%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 4.2.3.2.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.2.3.1.), se muestra en la tabla L. Todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos son correctos.

Tabla L. **Comparación del caso 4.2.3.2. con el caso 4.2.3.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.3.3. Método de Kani

Los momentos obtenidos con el Método de Kani se muestran en la tabla LI. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Tabla LI. **Resultados del caso 4.2.3.3., en t·m**

<b>G</b>	-6,6784	-7,9211	<b>H</b>	-3,4235	-3,0458	<b>I</b>
6,6789			11,3439			3,0460
6,2008			3,5050			-0,7745
<b>D</b>	-18,4604	-26,5678	<b>E</b>	-6,7129	-7,3576	<b>F</b>
12,2591			29,7767			8,1321
12,8631			36,1695			10,7995
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Regular

La comparación del Método Kani (caso 4.2.3.3.) con el Método Matricial Regular (caso 4.2.3.1.), se muestra en la tabla LII. Hay una buena

correspondencia en los resultados. La mayor diferencia está en el extremo F de la columna IF, la cual es de 8,0 por ciento. Esto indica que las simplificaciones de análisis del Método de Kani no afectan considerablemente los resultados finales.

Tabla LII. **Comparación del caso 4.2.3.3. con el caso 4.2.3.1. (Regular)**

<b>G</b>	101,1%	101,0%	<b>H</b>	97,6%	97,9%	<b>I</b>
101,1%			100,0%			97,9%
101,1%			99,7%			108,0%
<b>D</b>	100,4%	100,2%	<b>E</b>	99,4%	99,4%	<b>F</b>
100,0%			100,1%			100,2%
99,9%			99,9%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial Simplificado

La comparación del Método de Kani (caso 4.2.3.3.) con el Método Matricial Simplificado (caso 4.2.3.1.), se muestra en la tabla LIII. En este caso, todos los valores son iguales al Método Matricial Simplificado. Esto indica que los resultados obtenidos con el Método de Kani son correctos.

Tabla LIII. **Comparación del caso 4.2.3.3. con el caso 4.2.3.1. (Simplificado)**

<b>G</b>	100,0%	100,0%	<b>H</b>	100,0%	100,0%	<b>I</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>D</b>	100,0%	100,0%	<b>E</b>	100,0%	100,0%	<b>F</b>
100,0%			100,0%			100,0%
100,0%			100,0%			100,0%
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>

Fuente: elaboración propia.



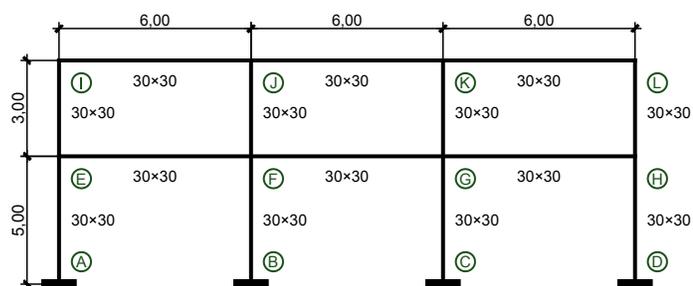
## 5. ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 2

En las gráficas comparativas del marco 2, se observará que en el eje vertical se tienen los símbolos siguientes: MC, que significa Método de Distribución de Momentos, MK, que significa Método de Kani, MS, que significa Método Matricial de las Rigideces Simplificado y MR, que significa Método Matricial de las Rigideces Regular.

### 5.1. Estructura simétrica

La configuración estructural del marco 2 cuando es una estructura con geometría simétrica se muestra en la figura 23. Las longitudes están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están dadas en centímetros (altura×base). Esta es una estructura que es simétrica en todas las luces de las vigas, así como en las secciones transversales de vigas y columnas.

Figura 23. Marco 2, estructura simétrica

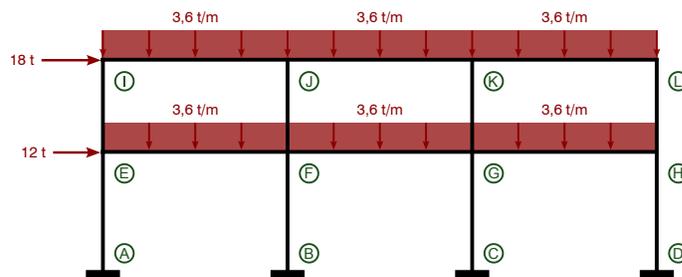


Fuente: elaboración propia.

Las solicitudes de carga de la estructura se muestran en la figura 24. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro y las cargas puntuales en toneladas. Estas solicitudes de carga se eligieron para hacer un análisis similar cuando la estructura está sujeta solamente a cargas gravitacionales y cargas laterales.

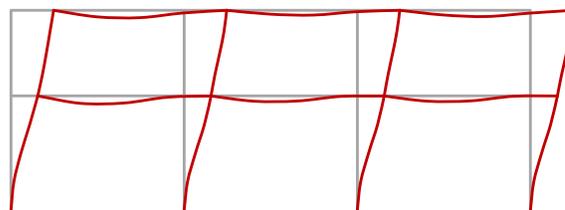
En la figura 25 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de la Rigidez Regular. Las deformaciones están aumentadas 25 veces.

Figura 24. **Solicitudes de carga para el caso 5.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 25. **Curva elástica para el caso 5.1.**



Fuente: elaboración propia.

### 5.1.1. Resultados del Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Los resultados se obtuvieron mediante 2 procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Matricial Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Matricial Simplificado).

#### 5.1.1.1. Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular, se muestran en la tabla LIV.

Tabla LIV. Resultados del Método Matricial Regular, en t·m

<b>I</b>	1,5368	-17,6493	<b>J</b>	5,7807	-16,1861	<b>K</b>	6,1365	-14,2633	<b>L</b>
-1,5368			11,8686			10,0496			14,2633
-4,4043			8,2618			7,0498			8,4480
<b>E</b>	-3,1883	-22,7441	<b>F</b>	0,6761	-20,9871	<b>G</b>	0,2659	-21,5417	<b>H</b>
7,5926			13,8062			13,6714			13,0937
15,6851			18,8324			18,7924			18,5261
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>			<b>D</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 5.1.1.2. Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Simplificado se muestran en la tabla LV.

Tabla LV. **Resultados del Método Matricial Simplificado, en t-m**

<b>I</b>	1,5471	-17,7072	<b>J</b>	5,8217	-16,1952	<b>K</b>	6,1546	-14,2788	<b>L</b>
-1,5471			11,8855			10,0405			14,2788
-4,5324			8,2586			7,0696			8,5465
<b>E</b>	-3,2517	-22,8268	<b>F</b>	0,7093	-20,9796	<b>G</b>	0,3175	-21,4966	<b>H</b>
7,7842			13,8589			13,5924			12,9501
15,8225			18,8599			18,7266			18,4055
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>			<b>D</b>

Fuente: elaboración propia.

### 5.1.2. Método de Distribución de Momentos

A continuación se muestran los resultados al comparar los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos con el Método Matricial (Regular y Simplificado).

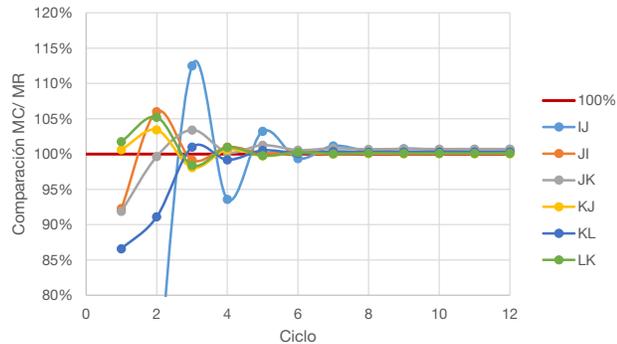
#### 5.1.2.1. Comparación con el Método Matricial Regular

Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre el el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.1.), se muestra en la figura 26. Todos los momentos tienden al 100 por ciento a partir del ciclo 6.

Figura 26. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

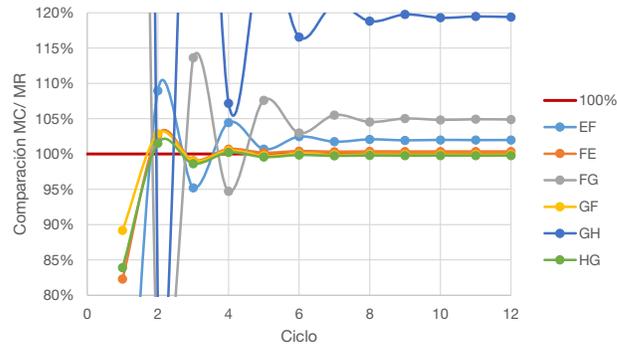
- Vigas del nivel 1

La comparación entre el el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.1.), se muestra en la figura 27. Los valores comparativos de los momentos FE, GF y HG (corresponden a los momentos en el extremo final de las vigas a las que pertenecen) tienden al 100 por ciento a partir del ciclo 5, desde donde permanecen constantes.

Los valores comparativos de los momentos EF, FG y GH (corresponden a los momentos en el extremo inicial de las vigas a las que pertenecen) no tienden al 100 por ciento, pero permanecen constantes después del ciclo 9. El valor comparativo del momento EF es 102,0 por ciento, el valor comparativo del momento FG es 104,9 por ciento y el valor comparativo del momento GH es 119,4 por ciento, para el ciclo 12.

Se puede concluir que los valores más alejados del resultado exacto son los momentos en los extremos iniciales de las vigas y la diferencia mayor es de 19,4 por ciento en el momento GH.

Figura 27. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.2.1.**

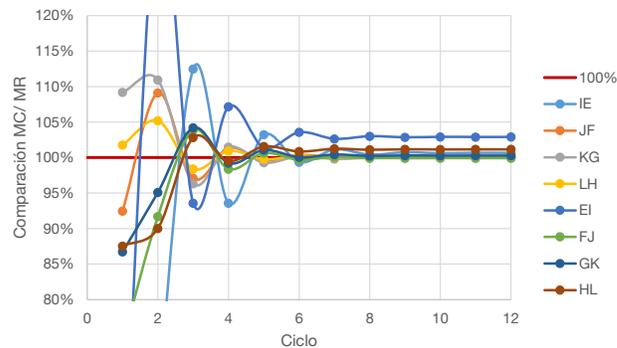


Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 2

La comparación entre el el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.1.), se muestra en la figura 28. Todos los valores comparativos permanecen constantes desde el ciclo 6. Los valores no presentan una tendencia marcada antes del ciclo 6.

Figura 28. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.2.1.**



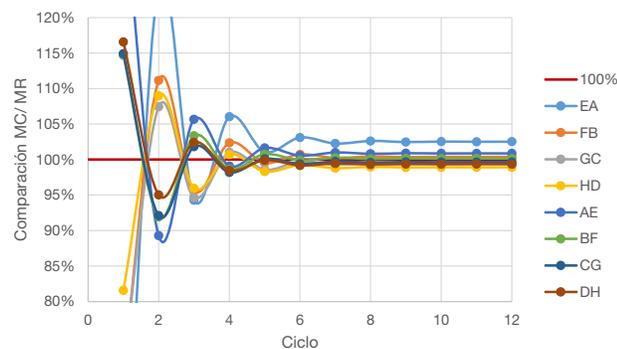
Fuente: elaboración propia.

También se nota que los valores comparativos de los momentos GK y HL son los más alejados del 100 por ciento (siendo de 102,9 por ciento y 101,2 por ciento respectivamente, en el ciclo 12), los cuales corresponden a los extremos iniciales de las columnas más lejanas a los puntos de aplicación de cargas laterales.

- Columnas del piso 1

La comparación entre el el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.1.), se muestra en la figura 29. Todos los valores comparativos permanecen constantes desde el ciclo 6. El valor comparativo del momento EA es el más alejado del 100 por ciento, siendo de 102,5 por ciento en el ciclo 12.

Figura 29. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

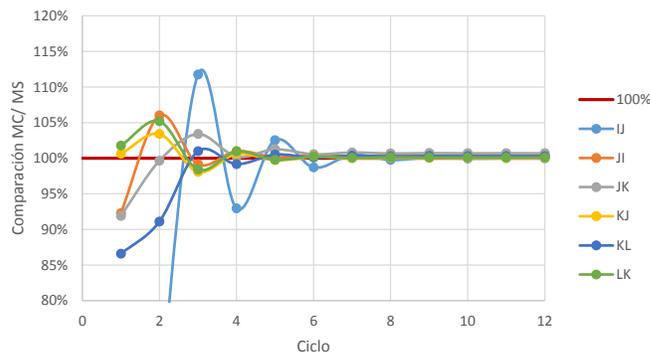
### 5.1.2.2. Comparación con el Método Matricial Simplificado

Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre el el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.2.), se muestra en la figura 30. Todos los momentos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 7.

Figura 30. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.2.2.**



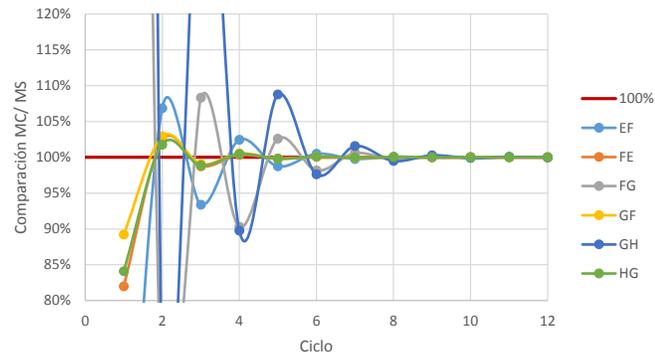
Fuente: elaboración propia.

- Vigas del nivel 1

La comparación entre el el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.2.), se muestra en la figura 31. Todos los

momentos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 8. Antes de que la tendencia fuese constante, se pueden observar grandes variaciones, específicamente en los momentos GH y FG.

Figura 31. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

- **Columnas del piso 2**

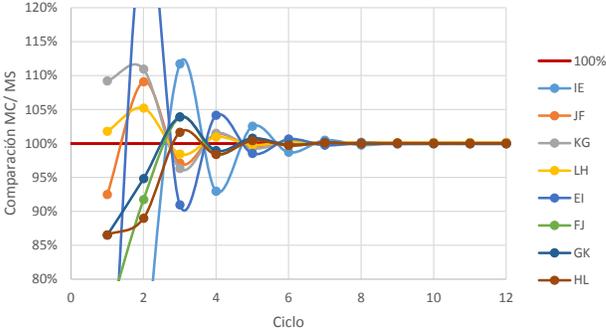
La comparación entre el el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.2.), se muestra en la figura 32. Todos los momentos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 7. Antes de que la tendencia fuese constante, se pueden observar grandes variaciones, específicamente en el momento GK.

- **Columnas del piso 1**

La comparación entre el el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.1.2.2.), se muestra en la figura 33. Todos los momentos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 6. Antes de que la tendencia

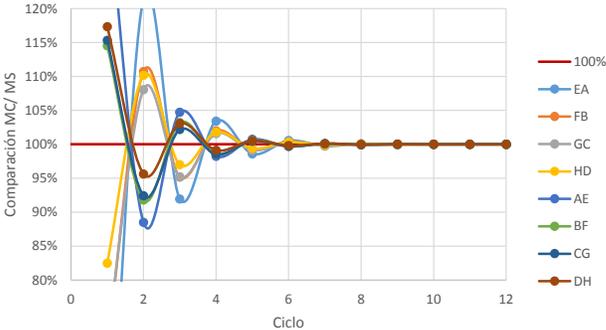
fuese constante se pueden observar grandes variaciones, específicamente en los momentos EA, GC y AC.

Figura 32. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 33. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

### **5.1.3. Método de Kani**

A continuación se muestran los resultados al comparar los momentos obtenidos con el Método de Kani con el Método Matricial de las Rigideces (Regular y Simplificado).

#### **5.1.3.1. Comparación con el Método Matricial Regular**

Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Regular y el de Kani, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre el Método de Kani y el Método Matricial Regular (caso 5.1.3.1.), se muestra en la figura 34. Todos los valores comparativos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 10.

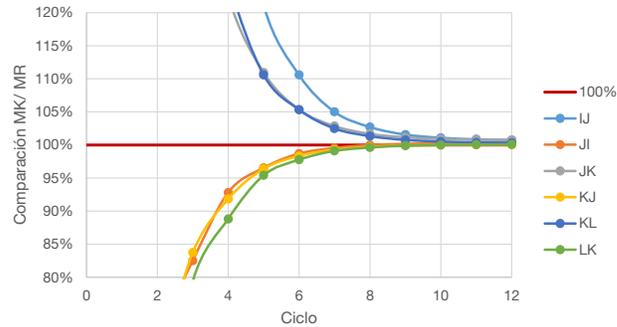
- Vigas del nivel 1

La comparación entre el Método de Kani y el Método Matricial Regular (caso 5.1.3.1.), se muestra en la figura 35.

La mayoría de los valores comparativos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 9. Los valores comparativos más alejados son los correspondientes a los momentos EF y FG (siendo de 101,8 por ciento y 105,4 por ciento respectivamente, en el ciclo 12), los cuales corresponden a los extremos

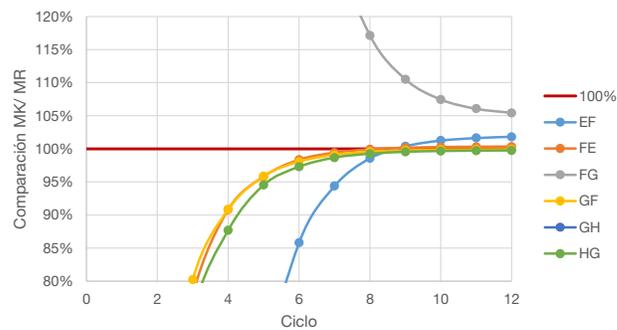
iniciales de las vigas a las cuales pertenecen.

Figura 34. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.3.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 35. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.3.1.**



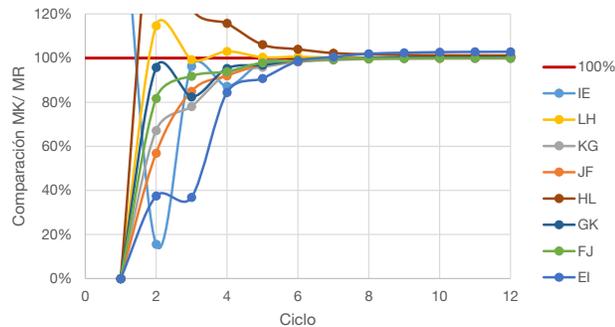
Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 2

La comparación entre el Método de Kani y el Método Matricial Regular (caso 5.1.3.1.), se muestra en la figura 36. Todos los valores tienden al 100 por ciento

desde el ciclo 7. Antes del ciclo 6 se observa que hay una gran variación en la tendencia de los valores comparativos.

Figura 36. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.3.1.**



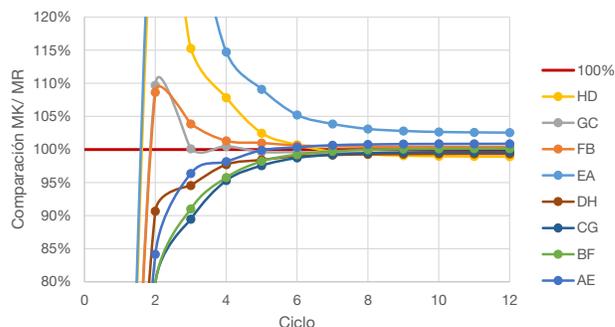
Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 1

La comparación entre el Método Matricial Regular y el de Kani, (caso 5.1.3.1.), se muestra en la figura 37. La mayoría de valores comparativos tienden al 100 por ciento desde el ciclo 7, aunque los valores comparativos sean ligeramente menores que 100 por ciento.

El valor comparativo del momento EA es el más alejado, siendo de 102,5 por ciento en el ciclo 12. También se nota que antes del ciclo 7, los valores comparativos no tienden a un valor constante.

Figura 37. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.3.1.**



Fuente: elaboración propia.

### 5.1.3.2. Comparación con el Método Matricial Simplificado

Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

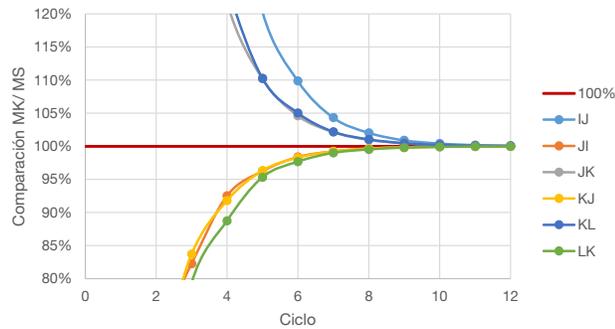
La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.1.3.2.), se muestra en la figura 38. Todos los valores comparativos tienden al 100 por ciento a partir del ciclo 10.

- Vigas del nivel 1

La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.1.3.2.), se muestra en la figura 39. En el ciclo 12, todos los valores comparativos

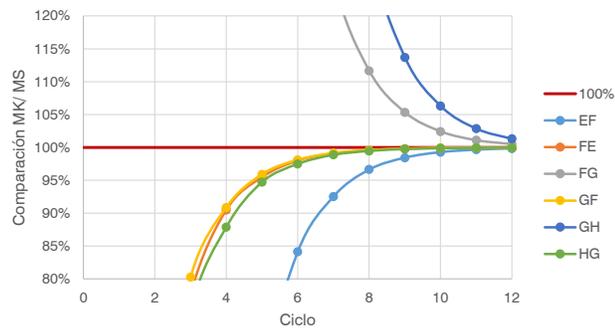
tienden al 100 por ciento. Es interesante notar que los momentos GH, FG y EF no presentan una tendencia marcada hacia un valor constante antes del ciclo 9.

Figura 38. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.1.3.2.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 39. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.1.3.2.**

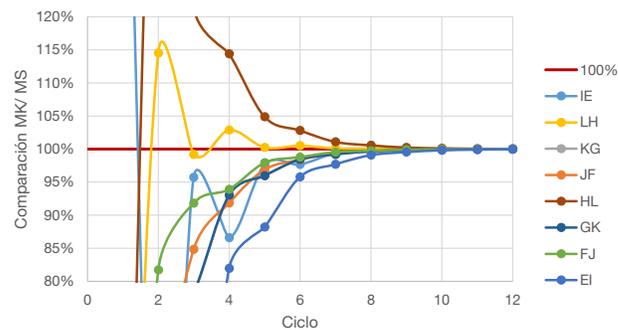


Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 2

La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.1.3.2.), se muestra en la figura 40. Todos los valores comparativos tienden al 100 por ciento a partir del ciclo 9. Se observa que algunos momentos tienen grandes variaciones con respecto a los valores de comparación.

Figura 40. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.1.3.2.**

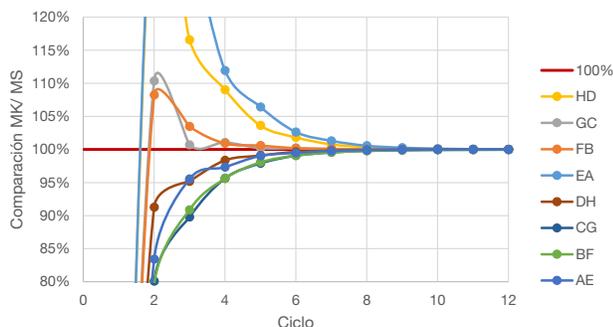


Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 1

La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.1.3.2.), se muestra en la figura 41. Todos los valores comparativos tienden al 100 por ciento a partir del ciclo 8. Se observa que algunos momentos tienen grandes variaciones con respecto a los valores de comparación.

Figura 41. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.1.3.2.**

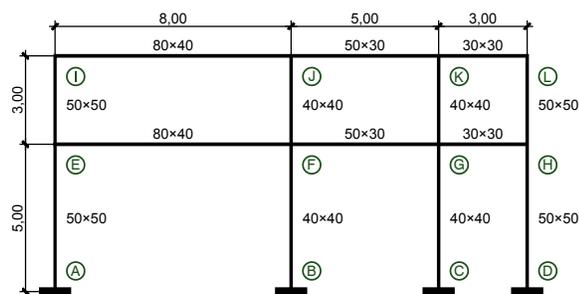


Fuente: elaboración propia.

## 5.2. Estructura asimétrica

La configuración estructural del marco 2 cuando es una estructura con geometría asimétrica se muestra en la figura 42. Las longitudes están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están dadas en centímetros (altura×base). Esta es una estructura que no es simétrica en todas las luces de las vigas, ni en las alturas de las columnas, así como en las secciones transversales de vigas y columnas.

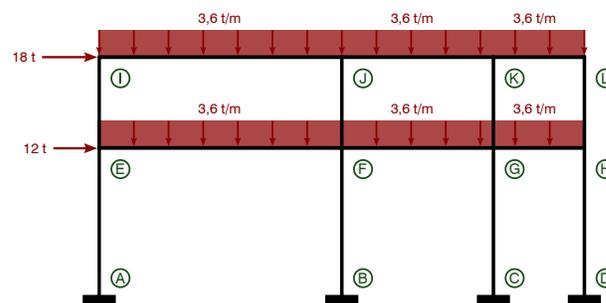
Figura 42. **Marco 2, estructura asimétrica**



Fuente: elaboración propia.

Las solicitudes de carga de la estructura se muestran en la figura 43. Las cargas distribuidas están en dadas en toneladas sobre metro y las cargas puntuales en toneladas. Estas carga se eligieron para hacer un análisis similar cuando solamente hay solicitaciones debido a las cargas muertas y de sismo.

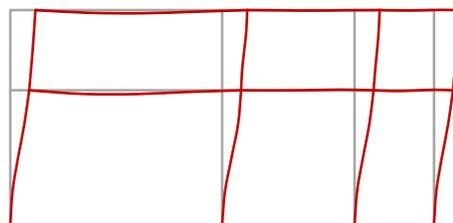
Figura 43. **Solicitudes de carga para el caso 5.2.**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 44 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Las deformaciones fueron calculadas a partir de los resultados obtenidos con el Método Matricial de la Rigidez Regular. Las deformaciones están aumentadas 50 veces.

Figura 44. **Curva elástica para el caso 5.2.**



Fuente: elaboración propia.

### 5.2.1. Resultados del Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales.

Los resultados se obtuvieron mediante 2 procedimientos: considerando todos los grados de libertad posibles (Método Matricial Regular) y con las mismas suposiciones que los métodos clásicos (Método Matricial Simplificado).

#### 5.2.1.1. Método Regular

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Regular, se muestran en la tabla LVI.

Tabla LVI. Resultados del Método Matricial Regular, en t·m

<b>I</b>	-2,5419	-25,0758	<b>J</b>	6,9744	-9,8438	<b>K</b>	0,3897	-5,8263	<b>L</b>
2,5419			18,1014			9,4540			5,8263
-3,6525			17,2429			6,0536			-1,5677
<b>E</b>	-20,9192	-38,4171	<b>F</b>	2,6609	-16,3912	<b>G</b>	-2,6482	-8,7467	<b>H</b>
24,5717			18,5133			12,9858			10,3144
34,8525			18,5439			15,7827			14,4357
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>			<b>D</b>

Fuente: elaboración propia.

#### 5.2.1.2. Método Simplificado

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces Simplificado, se muestran en la tabla LVII.

Tabla LVII. **Resultados del Método Matricial Simplificado, en t·m**

<b>I</b>	-3,2077	-26,2442	<b>J</b>	7,7994	-9,3385	<b>K</b>	0,5586	-5,5514	<b>L</b>
3,2077			18,4448			8,7799			5,5514
-3,2549			17,5651			5,5326			-1,8265
<b>E</b>	-21,7296	-39,4639	<b>F</b>	3,3989	-15,8199	<b>G</b>	-2,4526	-8,4912	<b>H</b>
24,9845			18,4999			12,7399			10,3177
35,0098			18,4731			15,5931			14,3820
<b>A</b>			<b>B</b>			<b>C</b>			<b>D</b>

Fuente: elaboración propia.

## 5.2.2. Método de Distribución de Momentos

A continuación se muestran los resultados al comparar los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos con el Método Matricial (Regular y Simplificado).

### 5.2.2.1. Comparación con el Método Matricial Regular

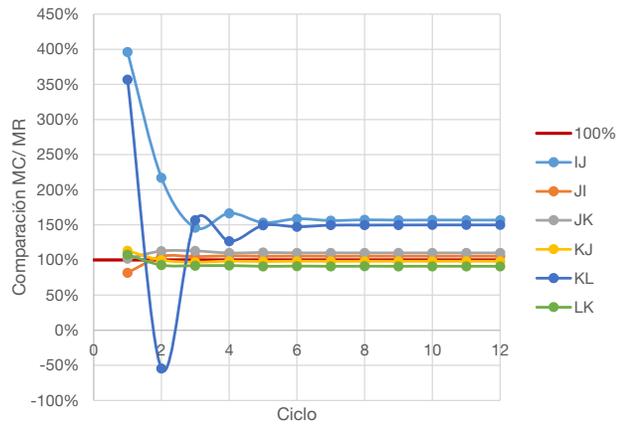
Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Regular y el de Distribución de Momentos, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre los Métodos de Distribución de Momentos, y el Matricial Regular (caso 5.2.2.1.), se muestra en la figura 45. Todos los valores comparativos tienden a un valor constante a partir del ciclo 7.

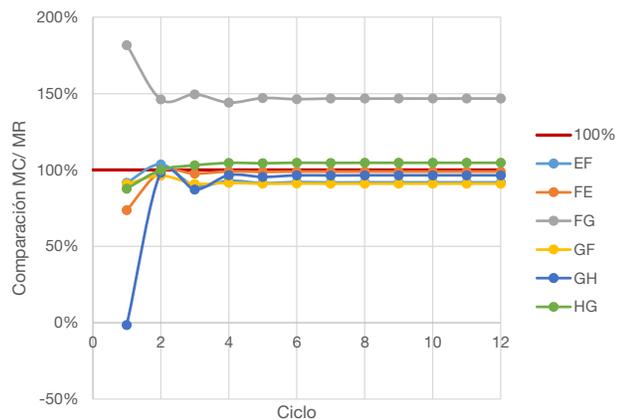
En los momentos IJ y KL se ve que son mayores (156,9 por ciento y 150,0 por ciento respectivamente, en el ciclo 12). Los demás valores comparativos tienden a acercarse más al 100 por ciento.

Figura 45. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 46. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

- Vigas del nivel 1

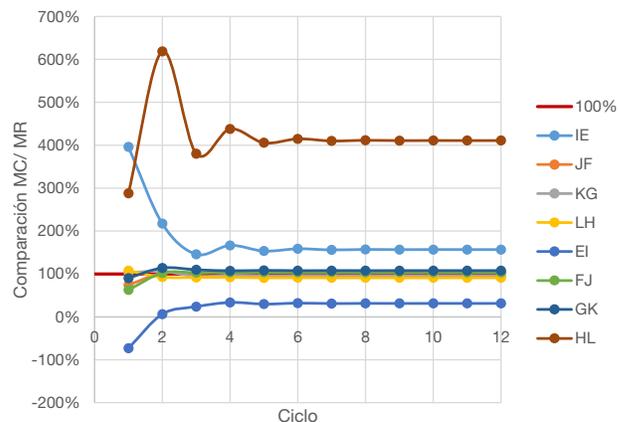
La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.2.2.1.), se muestra en la figura 46. Todos los valores comparativos tienden a un valor constante a partir del ciclo 5.

El valor comparativo del momento FG es el más alejado del 100 por ciento, siendo de 146,8 por ciento en el ciclo 12. Todos los demás valores se aproximan a 100 por ciento variando entre 91 por ciento y 105 por ciento aproximadamente.

- Columnas del piso 2

La comparación entre los Métodos de Distribución de Momentos, y el Matricial Regular (caso 5.2.2.1.), se muestra en la figura 47. Hay una gran variación en los valores comparativos. Aunque todos los valores tienden a un valor constante desde el ciclo 6.

Figura 47. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.2.1.**



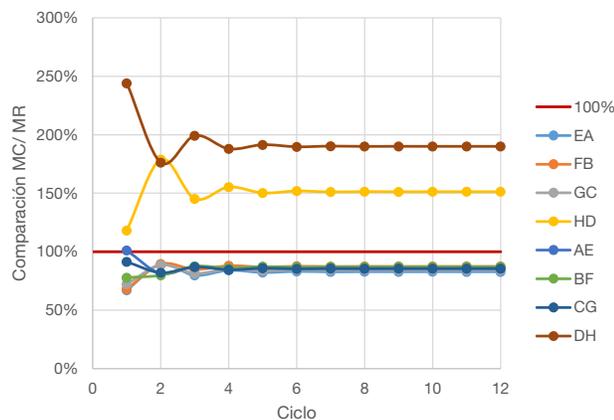
Fuente: elaboración propia.

El valor comparativo del momento HL es de 410,9 por ciento en el ciclo 12. El valor comparativo del momento IE 156,9 por ciento en el ciclo 12. El valor comparativo del momento EI es de 31,4 por ciento en el ciclo 12. Todos los demás valores varían entre 91 por ciento y 108 por ciento aproximadamente.

- Columnas del piso 1

La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Distribución de Momentos (caso 5.2.2.1.), se muestra en la figura 48. Hay una gran variación en los valores comparativos y ninguno tiende al 100 por ciento, aunque todos los valores tienden a un valor constante desde el ciclo 6.

Figura 48. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

El valor comparativo del momento DH es de 190,0 por ciento en el ciclo 12. El valor comparativo del momento HD 151,3 por ciento en el ciclo 12. Todos los demás valores tienden a 85 por ciento aproximadamente.

### 5.2.2.2. Comparación con el Método Matricial Simplificado

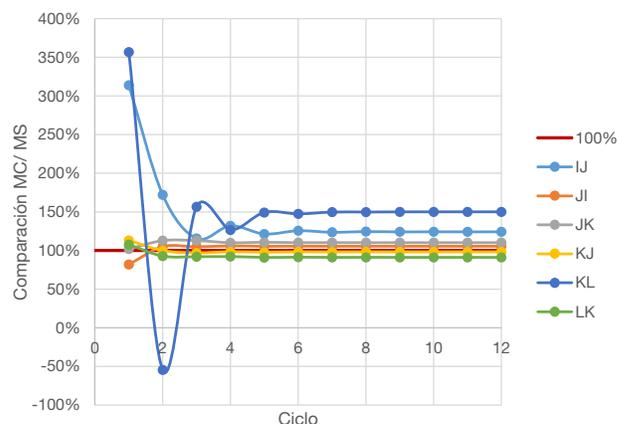
Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre el el Método Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.2.2.2.), se muestra en la figura 49. Los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 6.

El momento KL es el de mayor variación, siendo de 150 por ciento en el ciclo 12. El valor comparativo del momento IJ es de 124,3 por ciento en el ciclo 12. Todos los demás valores varían entre 91 por ciento y 110 por ciento.

Figura 49. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.2.2.**

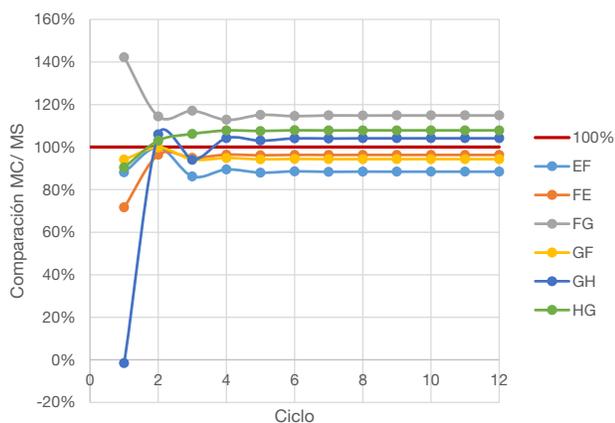


Fuente: elaboración propia.

- Vigas del nivel 1

La comparación entre los Métodos Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.2.2.2.), se muestra en la figura 50. Todos los valores comparativos tienden a un valor constante a partir del ciclo 5. Los valores varían entre 88,4 por ciento y 114,9 por ciento, en el ciclo 12.

Figura 50. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.2.2.**



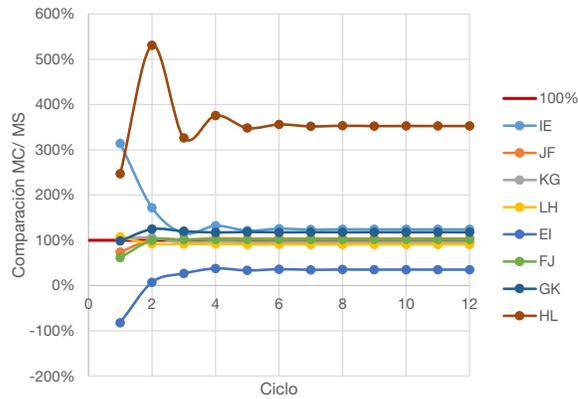
Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 2

La comparación entre los Métodos Matricial Simplificado y el de Distribución de Momentos (caso 5.2.2.2.), se muestra en la figura 51. Los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 6.

El valor comparativo del momento HL es de 352,7 por ciento en el ciclo 12. El valor comparativo del momento EI es de 35,3 por ciento en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 91 por ciento y 118 por ciento en el ciclo 12.

Figura 51. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.2.2.**

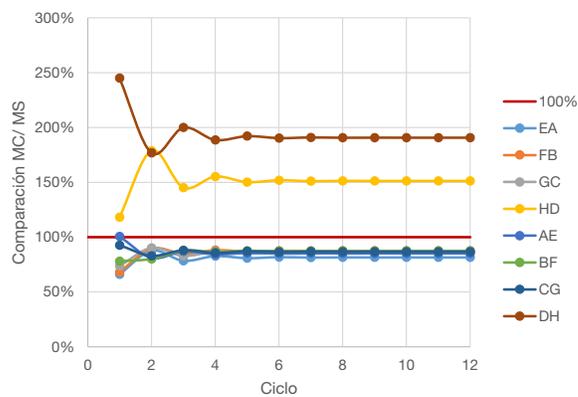


Fuente: elaboración propia.

- **Columnas del piso 1**

La comparación entre los Métodos de Distribución de Momentos, y el Matricial Simplificado (caso 5.2.2.2.), se muestra en la figura 52. Los valores comparativos tienden a valores constantes desde el ciclo 6.

Figura 52. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

El valor comparativo del momento DH es de 190,7 por ciento y el valor comparativo del momento HD es de 151,2 por ciento, en el ciclo 12. Los demás valores tienden a 86 por ciento aproximadamente.

### **5.2.3. Método de Kani**

A continuación se muestran los resultados al comparar los momentos obtenidos con el Método de Kani con el Método Matricial (Regular y Simplificado).

#### **5.2.3.1. Comparación con el Método Matricial Regular**

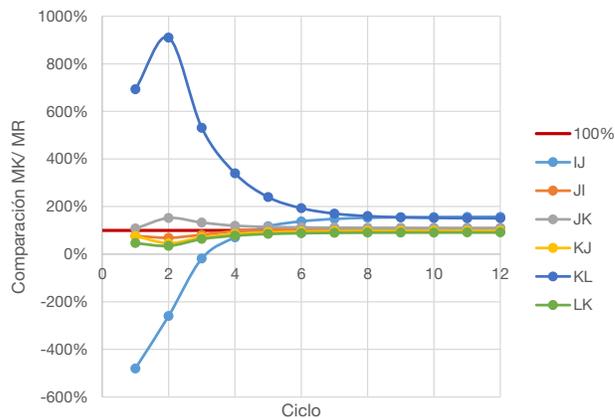
Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Regular y el de Kani, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Kani, (caso 5.2.3.1.), se muestra en la figura 53. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8.

Los valores comparativos más alejados del 100 por ciento (en el ciclo 12) son los que corresponden al momento IJ y al momento KL, siendo de 156,6 por ciento y 150,5 por ciento respectivamente. Los demás valores varían entre 91 por ciento y 110 por ciento aproximadamente.

Figura 53. **Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.3.1.**



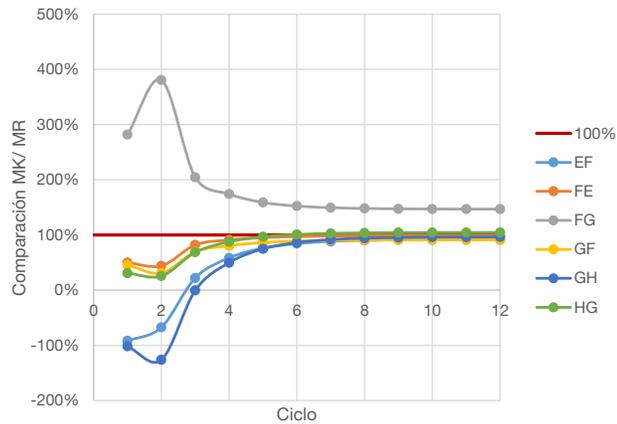
Fuente: elaboración propia.

- Vigas del nivel 1

La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Kani, (caso 5.2.3.1.), se muestra en la figura 54. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8.

El valor comparativo más alejado del 100 por ciento es el correspondiente al momento FG, que es de 149,6 por ciento en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 91 por ciento y 105 por ciento aproximadamente.

Figura 54. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.3.1.**



Fuente: elaboración propia.

- Columnas del piso 2

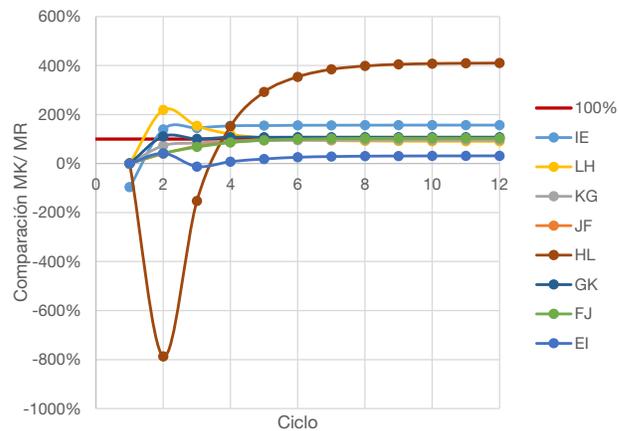
La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Kani, (caso 5.2.3.1.), se muestra en la figura 55. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8. Los valores comparativos más alejados del 100 por ciento son los que corresponden al momento HL, al momento IE y al momento EI, siendo de 410,3 por ciento, 156,8 por ciento y 31,3 por ciento respectivamente, en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 91 por ciento y 108 por ciento aproximadamente.

- Columnas del piso 1

La comparación entre los Métodos Matricial Regular y el de Kani, (caso 5.2.3.1.), se muestra en la figura 56. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 9. Los valores comparativos más alejados del 100 por ciento son los que corresponden al momento DH y al momento HD

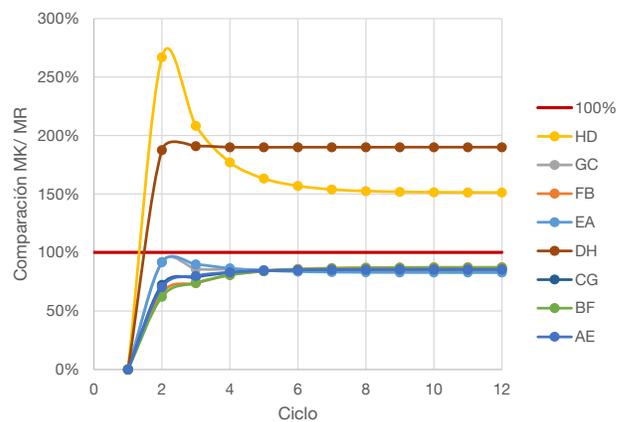
siendo de 190,0 por ciento y 151,3 por ciento respectivamente, en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 83 por ciento y 87 por ciento aproximadamente.

Figura 55. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.3.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 56. **Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.3.1.**



Fuente: elaboración propia.

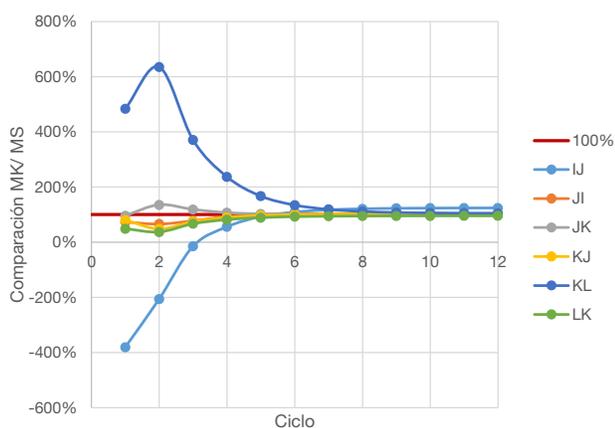
### 5.2.3.2. Comparación con el Método Matricial Simplificado

Las comparaciones de los momentos finales entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, se muestran en las gráficas siguientes, separadas en vigas de cada nivel y columnas de cada piso.

- Vigas del nivel 2

La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.2.3.2.), se muestra en la figura 57. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8. El valor comparativo más alejado del 100 por ciento es el correspondiente al momento IJ, que es de 124,1 por ciento en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 95 por ciento y 105 por ciento aproximadamente.

Figura 57. Convergencia en vigas del nivel 2 para el caso 5.2.3.2.

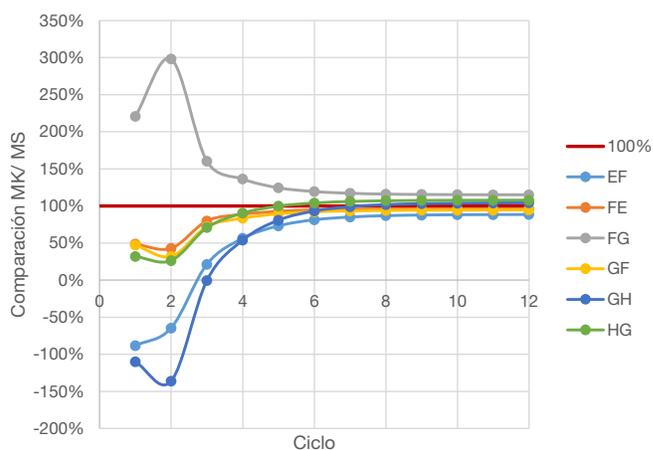


Fuente: elaboración propia.

- Vigas del nivel 1

La comparación entre el Método Matricial Simplificado y el de Kani, (caso 5.2.3.2.), se muestra en la figura 58. Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8. Todos los valores varían entre 88 por ciento y 115 por ciento aproximadamente.

Figura 58. **Convergencia en vigas del nivel 1 para el caso 5.2.3.2.**



Fuente: elaboración propia.

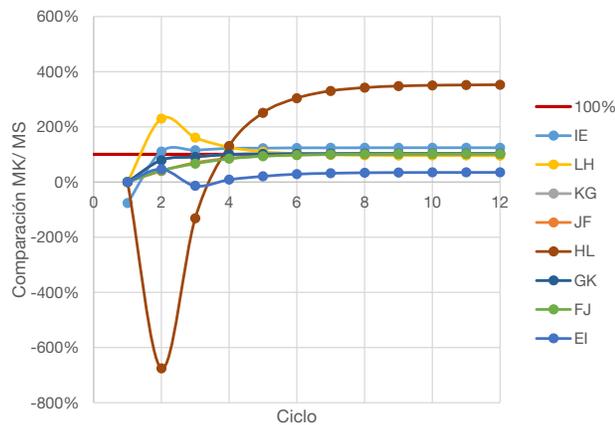
- Columnas del piso 2

La comparación entre los Métodos de Kani y el Matricial Simplificado (caso 5.2.3.2.), se muestra en la figura 59.

Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 8. Los valores comparativos más alejados del 100 por ciento son los que corresponden al momento HL, al momento IE y al momento EI, siendo de 352,2

por ciento, 124,3 por ciento y 35,2 por ciento respectivamente, en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 96 por ciento y 102 por ciento aproximadamente.

Figura 59. **Convergencia en columnas del piso 2 para el caso 5.2.3.2.**



Fuente: elaboración propia.

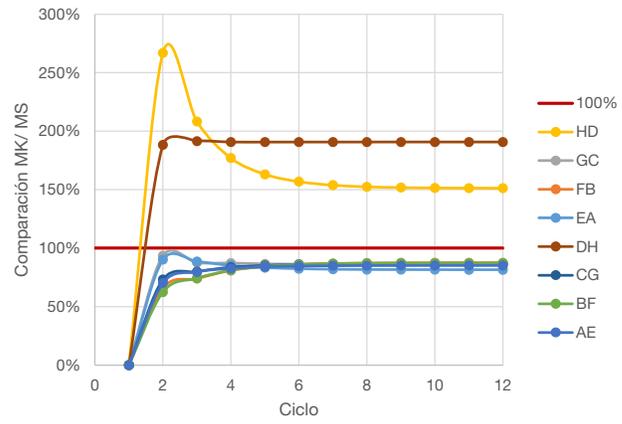
- **Columnas del piso 1**

La comparación entre el Método de Kani y el Método Matricial Simplificado (caso 5.2.3.2.), se muestra en la figura 60.

Todos los valores comparativos tienden a valores constantes a partir del ciclo 9. Los valores comparativos más alejados del 100 por ciento son los que corresponden al momento DH y al momento HD siendo de 190,7 por ciento y 151,3 por ciento respectivamente, en el ciclo 12. Los demás valores varían entre 81 por ciento y 87 por ciento.

Figura 60.

**Convergencia en columnas del piso 1 para el caso 5.2.3.2.**



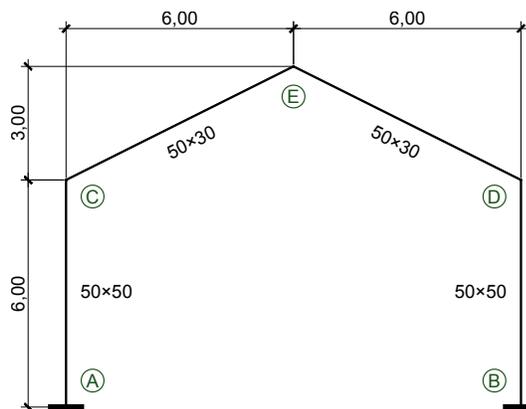
Fuente: elaboración propia.

## 6. ANÁLISIS Y COMPARACIONES DEL MARCO 3

### 6.1. Columnas empotradas

La configuración estructural del marco 3 se muestra en la figura 61. Es importante notar que las columnas cuentan con apoyos empotrados. Las longitudes de los miembros están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están indicadas en centímetros (altura×base).

Figura 61. Configuración estructural del marco 3, con apoyos empotrados

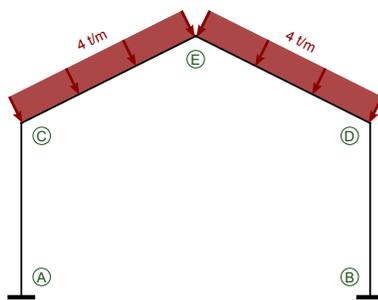


Fuente: elaboración propia.

### 6.1.1. Cargas simétricas

Las solicitudes de carga de la estructura se muestran en la figura 62. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

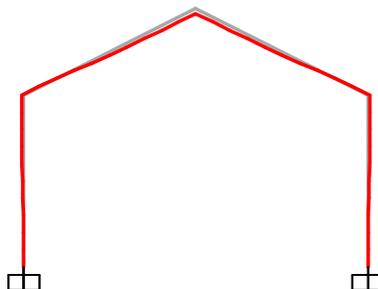
Figura 62. **Solicitudes de carga para el caso 6.1.1.**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 63 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Esta gráfica se obtuvo con el programa SAP2000. Las deformaciones están aumentadas 10 veces.

Figura 63. **Curva elástica para el caso 6.1.1.**



Fuente: elaboración propia.

### 6.1.1.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron considerando todos los posibles grados de libertad de la estructura.

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces se muestran en la tabla LVIII.

Tabla LVIII. Resultados del caso 6.1.1.1., en t·m

<b>C</b>	27,9327	0,8873	<b>E</b>	-0,8873	-27,9327	<b>D</b>
-27,9327						27,9327
-22,4272						22,4272
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

Tabla LIX. Resultados del caso 6.1.1.2., en t·m

<b>C</b>	27,9353	0,7766	<b>E</b>	-0,7766	-27,9353	<b>D</b>
-27,9353						27,9353
-22,6408						22,6408
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

### 6.1.1.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla LIX.

- Comparación con el Método Matricial

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 6.1.1.2.) con el Método Matricial (caso 6.1.1.1.), se muestra en la tabla LX. Todos los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos coinciden muy bien con los resultados del Método Matricial. La mayor diferencia se encuentra en el nudo E, siendo la diferencia de 12,5 por ciento.

Tabla LX. **Comparación del caso 6.1.1.2. con el caso 6.1.1.1.**

<b>C</b>	100,0%	87,5%	<b>E</b>	87,5%	100,0%	<b>D</b>
100,0%						100,0%
101,0%						101,0%
<b>A</b>						<b>B</b>

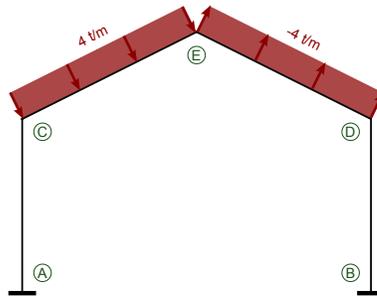
Fuente: elaboración propia.

### 6.1.2. Cargas asimétricas

Las solicitudes de carga de la estructura se muestran en la figura 64. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

En la figura 65 se presentan las deformaciones aproximadas, que sufre la estructura en este caso. Esta gráfica se obtuvo con el programa SAP2000. Las deformaciones están aumentadas 10 veces.

Figura 64. **Solicitudes de carga para el caso 6.1.2.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 65. **Curva elástica para el caso 6.1.2.**



Fuente: elaboración propia.

### 6.1.2.1. **Método Matricial de las Rigideces**

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron considerando todos los posibles grados de libertad de la estructura.

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces se muestran en la tabla LXI.

Tabla LXI. **Resultados del caso 6.1.2.1., en t·m**

<b>C</b>	-13,5866	0,0000	<b>E</b>	0,0000	-13,5866	<b>D</b>
13,5866						13,5866
58,4134						58,4134
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

### 6.1.2.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla LXII.

Tabla LXII. **Resultados del caso 6.1.2.2., en t·m**

<b>C</b>	-13,5860	0,0000	<b>E</b>	0,0000	-13,5860	<b>D</b>
13,5860						13,5860
58,4140						58,4140
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 6.1.2.2.) con el Método Matricial (caso 6.1.2.1.), se muestra en la tabla LXIII. Todos los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos coinciden exactamente con los resultados del Método Matricial.

Es importante notar que los valores comparativos del nudo E son cero, esto es debido a las diferencias de precisión entre los métodos, ya que teóricamente debe corresponder a la forma indeterminada 0/0.

Tabla LXIII. **Comparación del caso 6.1.2.2. con el caso 6.1.2.1.**

<b>C</b>	100,0%	0,0%	<b>E</b>	0,0%	100,0%	<b>D</b>
100,0%						100,0%
100,0%						100,0%
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

## 6.2. Columnas articuladas

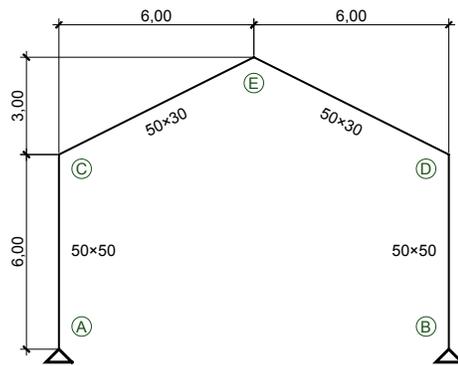
La configuración estructural del marco 3 se muestra en la figura 66. Es importante notar que las columnas cuentan con apoyos empotrados. Las longitudes de los miembros están dadas en metros y las dimensiones de las secciones transversales rectangulares están indicadas en centímetros (altura×base).

### 6.2.1. Cargas simétricas

Las solicitudes de carga de la estructura se muestran en la figura 67. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

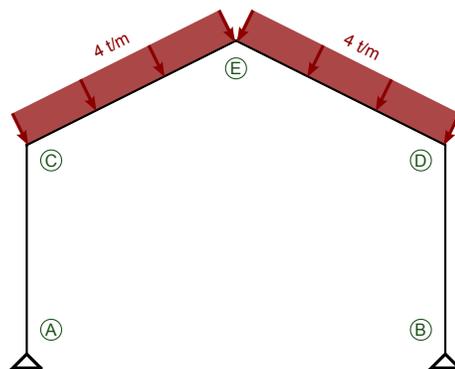
En la figura 68 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Esta gráfica se obtuvo con el programa SAP2000. Las deformaciones están aumentadas 10 veces.

Figura 66. **Configuración estructural del Marco 3, con apoyos articulados**



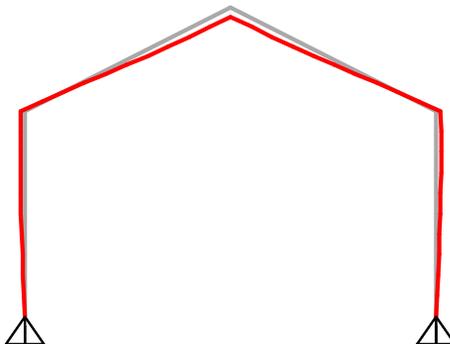
Fuente: elaboración propia.

Figura 67. **Solicitudes de carga para el caso 6.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

Figura 68. **Curva elástica para el caso 6.2.1.**



Fuente: elaboración propia.

### 6.2.1.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron considerando todos los posibles grados de libertad de la estructura.

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces, se muestran en la tabla LXIV.

Tabla LXIV. **Resultados del caso 6.2.1.1., en t·m**

<b>C</b>	31,0417	7,4374	<b>E</b>	-7,4374	-31,0417	<b>D</b>
-31,0417						31,0417
0,0000						0,0000
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

### 6.2.1.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla LXV.

Tabla LXV. **Resultados del caso 6.2.1.2., en t·m**

<b>C</b>	31,0687	7,3969	<b>E</b>	-7,3969	-31,0687	<b>D</b>
-31,0687						31,0687
0,0000						0,0000
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 6.2.1.2.) con el Matricial (caso 6.2.1.1.), se muestra en la tabla LXVI. Todos los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos coinciden muy bien con los resultados del Método Matricial.

Tabla LXVI. **Comparación del caso 6.2.1.2. con el caso 6.2.1.1.**

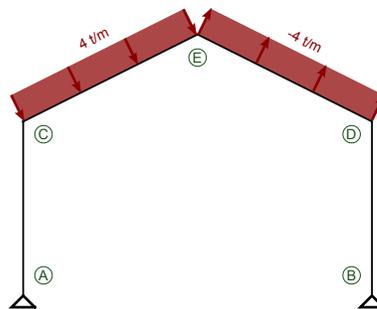
<b>C</b>	100,1%	99,5%	<b>E</b>	99,5%	100,1%	<b>D</b>
100,1%						100,1%
0/0						0/0
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

## 6.2.2. Cargas asimétricas

Las solicitaciones de carga de la estructura se muestran en la figura 69. Las cargas distribuidas están dadas en toneladas sobre metro.

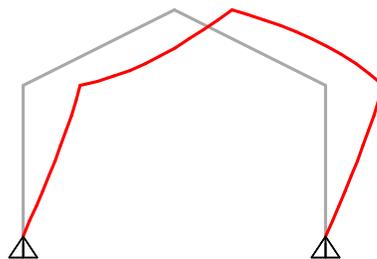
Figura 69. **Solicitudes de carga para el caso 6.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 70 se presentan las deformaciones aproximadas que sufre la estructura en este caso. Esta gráfica se obtuvo con el programa SAP2000. Las deformaciones están aumentadas 10 veces.

Figura 70. **Curva elástica para el caso 6.2.2.**



Fuente: elaboración propia.

### 6.2.2.1. Método Matricial de las Rigideces

A continuación se muestran los momentos finales en los extremos de cada miembro de la estructura. El signo positivo indica dirección en contra de las agujas del reloj en coordenadas globales. Los resultados se obtuvieron considerando todos los posibles grados de libertad de la estructura.

Los momentos obtenidos con el Método Matricial de las Rigideces se muestran en la tabla LXVII.

Tabla LXVII. Resultados del caso 6.2.2.1., en t·m

<b>C</b>	-72,0000	0,0000	<b>E</b>	0,0000	-72,0000	<b>D</b>
72,0000						72,0000
0,0000						0,0000
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

### 6.2.2.2. Método de Distribución de Momentos

Los momentos obtenidos con el Método de Distribución de Momentos se muestran en la tabla LXVIII.

Tabla LXVIII. Resultados del caso 6.2.2.2., en t·m

<b>C</b>	-72,0000	0,0000	<b>E</b>	0,0000	-72,0000	<b>D</b>
72,0000						72,0000
0,0000						0,0000
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.

- Comparación con el Método Matricial

La comparación del Método de Distribución de Momentos (caso 6.2.2.2.) con el Método Matricial (caso 6.2.2.1.), se muestra en la tabla LXIX. Los resultados obtenidos con el Método de Distribución de Momentos coinciden exactamente con los resultados del Método Matricial.

Es importante notar que los valores comparativos del nudo E son valores grandes, esto es debido a las diferencias de precisión entre los métodos, ya los momentos que se están comparando son muy pequeños (en los resultados se ve que son prácticamente 0) y los valores comparativos sirven para mostrar las diferencias relativas de los momentos.

Tabla LXIX. **Comparación del caso 6.2.2.2. con el caso 6.2.2.1.**

<b>C</b>	100,0%	145,5%	<b>E</b>	960,0%	100,0%	<b>D</b>
100,0%						100,0%
0/0						0/0
<b>A</b>						<b>B</b>

Fuente: elaboración propia.



## CONCLUSIONES

1. El Método de Distribución de Momentos y el Método de Kani tienen procedimientos similares para el cálculo de los factores de distribución, y comparten las mismas suposiciones de análisis. Difieren en el procedimiento iterativo para el cálculo de los momentos y en las consideraciones de compatibilidad de deformaciones. Ya que el Método de Distribución de Momentos requiere que se analicen explícitamente las relaciones de compatibilidad de deformaciones en las estructuras y el Método de Kani no, el primero resulta ser más didáctico y el segundo resulta ser más práctico para ciertas estructuras.

El Método Matricial de las Rigideces expresa las relaciones de fuerza y deformación en forma matricial. Esto permite el análisis sistemático de gran diversidad de estructuras y obtener resultados más apegados al comportamiento real de las estructuras.

2. Los criterios de predimensionamiento presentados sirven para ayudar al lector a estimar las dimensiones de los elementos estructurales de una forma fácil y práctica. Los cálculos elaborados muestran una forma de realizar los procedimientos de análisis estructural, utilizando las hojas de cálculo del programa Excel. Por consiguiente, estas hojas de cálculo pueden utilizarse como una introducción a la programación de métodos de análisis estructural en general y específicamente al Método Matricial de las Rigideces.

3. Se mostró la precisión de los métodos clásicos en diversos casos comparados con el Método Matricial de las Rigideces. Debido a que no era parte del objetivo de este trabajo el crear un programa sofisticado para el análisis de cualquier estructura, se estudiaron solamente 3 configuraciones estructurales básicas y comunes, a partir de las cuales el lector podrá guiarse para estimar el comportamiento de otras estructuras similares. En general se puede decir que los resultados obtenidos (para las estructuras analizadas) con métodos clásicos mantienen una variación de  $\pm 5$  por ciento con respecto al Método Matricial de las Rigideces, pero que en ciertos casos puede variar considerablemente, especialmente en puntos donde existen concentraciones de esfuerzos.

Es importante resaltar que los métodos matriciales son tan precisos como el software (o hardware) lo permite, lo cual no depende del procedimiento de cálculo. Se presentó el comportamiento de la convergencia de la comparación de los métodos clásicos y el Método Matricial de las Rigideces: el comportamiento de convergencia del Método de Distribución de Momentos es de forma sinusoidal, lo cual indica que las primeras iteraciones pueden presentar una alta variabilidad; para el Método de Kani se observó que la convergencia toma la forma de curvas suaves, lo cual indica que las iteraciones se acercan a los valores finales en forma gradual.

4. Los métodos clásicos son adecuados en la mayoría de los casos ordinarios, sin embargo el Método Matricial de las Rigideces presenta mayor acercamiento al comportamiento real de las estructuras, debido a que puede considerar más factores en el análisis de estas. Además permite analizar las estructuras de una forma sistemática, lo cual facilita su uso para estructuras muy grandes o complejas.

El Método de Distribución de Momentos es adecuado para analizar cualquier tipo de marco estructural. Sin embargo, este Método puede complicarse cuando existen muchos grados de libertad en la estructura (por ejemplo, edificios de varios niveles sujetos a ladeo, estructuras no reticulares o irregulares). Para obtener resultados con muy buena exactitud se recomiendan 6 ciclos o más en el procedimiento iterativo.

El Método de Kani es aplicable para el análisis de marcos reticulares. Este Método tiene la ventaja de poder realizar el análisis de marcos reticulares sujetos a ladeo de una forma más sencilla y poder corregir los errores automáticamente. Para obtener resultados con muy buena exactitud se recomiendan 6 ciclos o más en el procedimiento iterativo.



## RECOMENDACIONES

1. Cuando se utilice cualquier método de análisis (no solo estructural), profundizar un poco más en el uso y origen de este. Esto es debido a que se puede encontrar alguna manera de utilizarlo más eficientemente.
2. Utilizar los métodos de análisis estructural de marcos planos en los casos donde sean más convenientes. Para estos se sugiere que sean utilizados en los siguientes casos:
  - Método de Distribución de Momentos: estructuras con pocos grados de libertad, estructuras con geometría irregular, estructuras en general.
  - Método de Kani: marcos planos formados por elementos perpendiculares, especialmente cuando están sujetos a ladeo.
  - Método Matricial de las Rigideces: cualquier tipo de estructura, especialmente si son muy grandes o complejas.
3. Emplear las hojas de cálculo elaboradas en este trabajo para observar el comportamiento estructural de marcos rígidos. También usar las hojas de cálculo como guía para la implementación de los métodos clásicos y métodos matriciales para el análisis estructural en general.
4. Instar a los estudiantes de pregrado a utilizar software en los proyectos de los cursos de la carrera de Ingeniería Civil y en general, proporcionar a los estudiantes las oportunidades para el uso de herramientas

informáticas y de programación. Esto es debido a las múltiples ventajas de las computadoras contemporáneas, ya que ahorran tiempo en los cálculos y realizan con facilidad tareas complejas o tediosas para una persona. Esto no significa olvidar los cálculos manuales, sino realizar los trabajos eficientemente con las herramientas adecuadas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ACI Committee 318. *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-08) y Comentario (Versión en español y en sistema métrico)*. Estados Unidos: American Concrete Institute, 2008. 518 p.
2. Asociación Guatemalteca de Ingeniería Estructural y Sísmica. *AGIES NSE 3-10 Diseño Estructural de Edificaciones*. Guatemala: AGIES, 2010. 42 p.
3. CROSS, Hardy. *Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments*. Estados Unidos: American Society of Civil Engineers, 1930. 10 p.
4. GONZÁLEZ CUEVAS, Óscar. *Análisis estructural*. México: Limusa, 2002. 200 p.
5. International Conference of Building Officials. *Uniform Building Code: Structural Engineering Design Provisions*. Estados Unidos: International Conference of Building Officials, 1997. 492 p.
6. KANI, Gaspar. *Cálculo de pórticos de varios pisos*. España: Reverté, 1958. 95 p.
7. KASSIMALI, Aslam. *Análisis estructural*. 2a ed. México: Thomson Learning, 2001. 705 p.

8. KASSIMALI, Aslam. *Matrix analysis of structures*. 2a ed. Estados Unidos: Cengage Learning, 2012. 641 p.
9. OCHSHORN, Jonathan. *Structural elements for architects and builders*. Estados Unidos: Elsevier, 2010. 385 p.
10. WANG, Chu-Kia. *Statically indeterminate structures*. Estados Unidos: McGraw-Hill, 1953. 424 p.

## APÉNDICE

### Uso de las hojas de cálculo

Como parte de este trabajo se elaboraron hojas de cálculo, utilizando el programa Microsoft Excel, las cuales se incluyen en el CD que se encuentra disponible en la Facultad de Ingeniería de la USAC. A continuación se describe el contenido e instrucciones para el uso de estos archivos.

- Descripción de los archivos

Se proveen 3 archivos de hojas de cálculo correspondientes al análisis y a los resultados del marco 1, 2 y 3. Se incluyen archivos en el formato `xlsx` y `xls` para conveniencia de los usuarios, pero no existen diferencias entre los archivos del mismo nombre. A continuación se describe el contenido de cada archivo.

El archivo `M1.xlsx` (corresponde a los análisis del marco 1) contienen las siguientes hojas:

- Inicio: descripción general del contenido.
- Ingresar Datos: datos que se deben ingresar para realizar el análisis estructural.
- Comparación: comparación de los resultados de los métodos clásicos con el Método Matricial. Contraseña: `editarcomparacion`
- CG: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos sin considerar ladeo. Contraseña: `editarcg`

- CL: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos considerando ladeo. Contraseña: editarcl
- KG: análisis mediante el Método de Kani sin considerar ladeo. Contraseña: editarkg
- KL: análisis mediante el Método de Kani considerando ladeo. Contraseña: editarkl
- MMS: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces simplificado (mismas suposiciones que los métodos clásicos). Contraseña: editarmms
- MMD: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces simplificado (suponiendo que las columnas de cada piso tienen las mismas derivas y tomando en cuenta deformaciones axiales). Contraseña: editarmmd
- MMS: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces regular (tomando en cuenta todos los grados de libertad posibles). Contraseña: editarmmr
- Unidades: hoja que contiene las unidades de medidas empleadas en los cálculos. Contraseña: editarunidades
- Deflexiones: contiene los cálculos para las deflexiones de cada una de los elementos de la estructura. Contraseña: editardeflexiones
- Plot Elástica: contiene la información para hacer la elástica aproximada mostrada en la hoja Ingresar Datos. Contraseña: editarplotelastica

El archivo M2.xlsx (corresponde a los análisis del marco 2) contienen las siguientes hojas:

- Inicio: descripción general del contenido.
- Ingresar Datos: datos que se deben ingresar para realizar el análisis estructural.
- Comparación: comparación de los resultados de los métodos clásicos con el Método Matricial. Contraseña: editarcomparacion
- CG: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos sin considerar ladeo. Contraseña: editarcg
- CL: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos considerando ladeo. Contraseña: editarcl
- CL Ciclos: Cálculos para la comparación de los resultados en todos los ciclos del Método de Distribución de Momentos. Contraseña: editarclciclos
- KG: análisis mediante el Método de Kani sin considerar ladeo. Contraseña: editarkg
- KL: análisis mediante el Método de Kani considerando ladeo.
- KL Ciclos: Cálculos para la comparación de los resultados en todos los ciclos del Método de Kani. Contraseña: editarklciclos
- MMS: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces simplificado (mismas suposiciones que los métodos clásicos). Contraseña: editarmms
- MMD: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces simplificado (suponiendo que las columnas de cada piso tienen las mismas derivas y tomando en cuenta deformaciones axiales). Contraseña: editarmmd
- MMS: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces regular (tomando en cuenta todos los grados de libertad posibles). Contraseña: editarmmr

- Unidades: hoja que contiene las unidades de medidas empleadas en los cálculos. Contraseña: editarunidades
- Deflexiones: Contiene los cálculos para las deflexiones de cada una de los elementos de la estructura. Contraseña: editardeflexiones
- Plot Elástica: contiene la información para hacer la elástica aproximada mostrada en la hoja Ingresar Datos. Contraseña: editarplotelastica

El archivo M3.xlsx (corresponde a los análisis del marco 3) contienen las siguientes hojas:

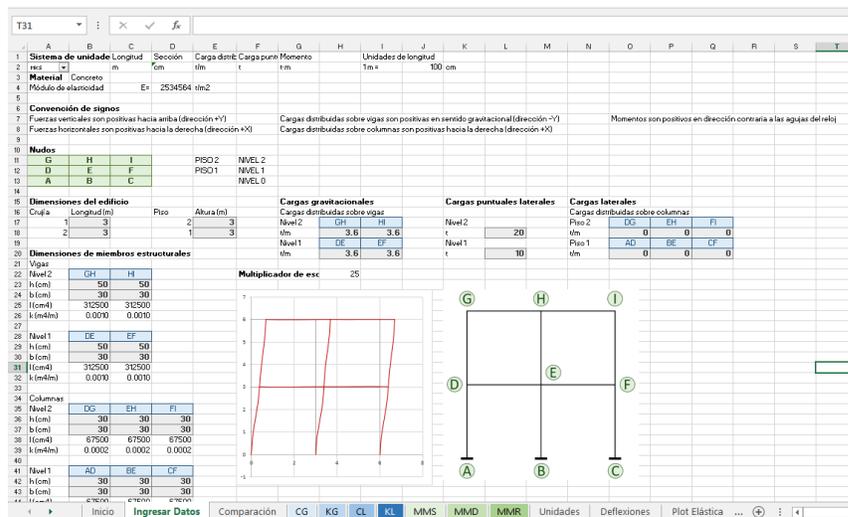
- Inicio: descripción general del contenido.
- Ingresar Datos: datos que se deben ingresar para realizar el análisis estructural.
- Comparación: comparación de los resultados de los métodos clásicos con el Método Matricial. Contraseña: editarcomparacion
- CE: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos considerando ladeo cuando las columnas están empotradas. Contraseña: editarce
- MME: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces cuando las columnas están empotradas. Contraseña: editarmme
- CA: análisis mediante el Método de Distribución de Momentos considerando ladeo cuando las columnas están articuladas. Contraseña: editarca
- MMA: análisis mediante el Método Matricial de las Rigideces cuando las columnas están articuladas. Contraseña: editarmma
- Unidades: hoja que contiene las unidades de medidas empleadas en los cálculos. Contraseña: editarunidades

Se proveen las contraseñas para editar las hojas con el fin de poder observar la forma en que se relacionaron las celdas. El objetivo principal de contar con contraseñas es evitar modificaciones accidentales y perjudicar la integridad del archivo y los cálculos realizados.

- Instrucciones de uso de las hojas de cálculo

Para comenzar el análisis con cualquiera de las hojas de cálculo se debe ir a la hoja Ingresar Datos. En el apéndice 1 se muestra el aspecto de esta hoja para el archivo M1.xlsx. Las celdas grises son las que admiten valores para ingresar, pudiéndose ingresar las dimensiones de los miembros (dimensiones de la sección transversal y longitud), así como las cargas. Los resultados (valores de los momentos finales) se muestran en cada una de las hojas de los métodos de análisis como se indica en la sección anterior.

### Apéndice 1. Hoja Ingresar Datos del archivo M1.xlsx



Fuente: elaboración propia.

Los valores que se pueden modificar en cada uno de los marcos son los siguientes:

- Dimensiones de las secciones transversales (altura y base de una sección rectangular).
- Longitud de las barras (luz de las vigas y altura de las columnas).
- Magnitud y dirección de las cargas uniformemente distribuidas sobre las vigas.
- Magnitud y dirección de las cargas laterales horizontales en los niveles de los marcos reticulares.

El uso de estas hojas de cálculo es bastante intuitivo, por lo que el usuario verá resultados a medida que vaya ingresando o cambiando los valores.

### **Análisis de un marco reticular de 2 niveles con el Método de Distribución de Momentos**

A continuación se muestra el procedimiento para determinar una fuerza transversal situada en el extremo  $i$ , es decir  $V_i$ , de una barra de longitud  $L$ .

Conociendo los momentos  $M_i$  y  $M_f$  que provienen del Método de distribución de momentos, se realiza una suma de momentos en el punto  $f$ :

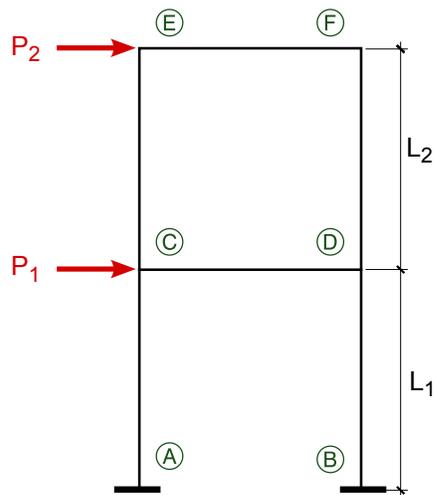
$$\sum M_f = M_i + M_f - LV_i = 0,$$

ya que se debe cumplir la condición de equilibrio estático, se puede determinar el valor de  $V_i$ :

$$V_i = - (M_i + M_f) / L \quad (A.1)$$

Esta relación será de gran utilidad para determinar las fuerzas transversales en las columnas de la estructura.

Apéndice 2. **Geometría y cargas laterales de un marco reticular de dos niveles**



Fuente: elaboración propia.

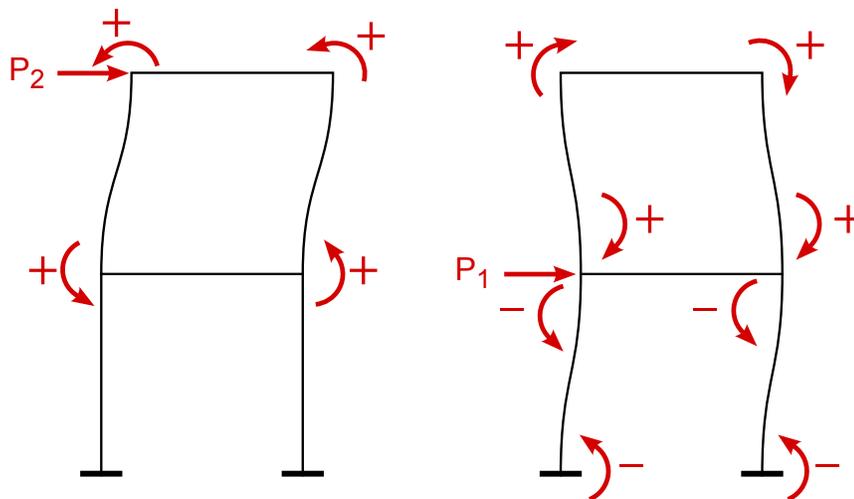
Para una estructura de dos niveles (ver apéndice 2) se deben realizar 3 distribuciones de momentos:

- La primera distribución de momentos corresponde a las solicitudes de carga de la estructura que actúan sobre cada una de las barras (vigas y columnas). Esta distribución de momentos se realiza de la manera habitual siguiendo los pasos que se indican en la sección 2.2.1.1.. Esta es la distribución de momentos 0.

- Las otras dos distribuciones de momentos corresponden a los momentos generados por el ladeo en la estructura. El cálculo se realiza con la suposición de que las columnas están unidas mediante elementos rígidos, es decir que todas las columnas presentan derivas de igual magnitud y dirección. Esto se describe con más detalle en la sección 2.2.1.2..

En el apéndice 3 se muestran los momentos de ladeo debido a cada una de las cargas laterales. La distribución de momentos 2 es la que se realiza con los momentos arbitrarios de ladeo que corresponden al ladeo del piso 2 y la distribución de momentos 1 es la que se realiza con los momentos arbitrarios de ladeo que corresponden al ladeo del piso 1.

### Apéndice 3. Momentos de ladeo debido a las cargas laterales



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar los momentos finales se deben corregir los momentos arbitrarios de ladeo, para lo cual se considera el equilibrio estático de los

miembros estructurales. El procedimiento para determinar los momentos finales de la estructura mostrada en el apéndice 2 es como sigue:

- El diagrama de cuerpo libre del piso 2 se muestra en el apéndice 4. Allí se observan los momentos que actúan en esa parte de la estructura, así como las fuerzas laterales involucradas. Los momentos que se muestran en el apéndice 4 son los momentos finales, los cuales pueden separarse al considerar el principio de superposición (ecuación 2.13).

- La condición de equilibrio horizontal del piso 2 queda de la siguiente forma:

$$P_2 + H_C + H_D = 0 \quad (A.2)$$

- Al colocar las fuerzas horizontales en función de los momentos en los extremos de las barras (usando la expresión A.1) y ordenando la ecuación A.2 se obtiene:

$$M_{CE} + M_{EC} + M_{DF} + M_{FD} = \sum M_2 = L_2 P_2,$$

donde  $\sum M_2$  es la suma de los momentos finales en los extremos de todas las columnas del piso 2.

- Sustituyendo los momentos finales por los momentos obtenidos con cada una de las distribuciones de momentos se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum M_2 = \sum M_{0,2} + C_2 \sum M_{2,2} + C_1 \sum M_{1,2} = L_2 P_2, \quad (A.3)$$

donde  $\sum M_{0,2}$  es la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 2 obtenidos con la distribución de momentos 0,  $\sum M_{2,2}$  es la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 2 obtenidos con la distribución de momentos 2,  $\sum M_{1,2}$  es

la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 2 obtenidos con la distribución de momentos 1. Los factores de corrección  $C_2$  y  $C_1$  son los que corresponden a los momentos del piso 2 y 1, respectivamente.

- El diagrama de cuerpo libre del piso 2 y piso 1 se muestra en el apéndice 4. Allí se observan los momentos que actúan en esa parte de la estructura, así como las fuerzas laterales involucradas. Los momentos que se muestran en el apéndice 4 son los momentos finales, los cuales pueden separarse al considerar el principio de superposición (ecuación 2.13).
  - La condición de equilibrio horizontal del los pisos 1 y 2 queda de la siguiente forma:

$$P_2 + P_1 + H_A + H_B = 0 \quad (A.4)$$

- Al colocar las fuerzas horizontales en función de los momentos en los extremos de las barras (usando la expresión A.1) y ordenando la ecuación A.4 se obtiene:

$$M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = \sum M_1 = L_1 (P_2 + P_1)$$

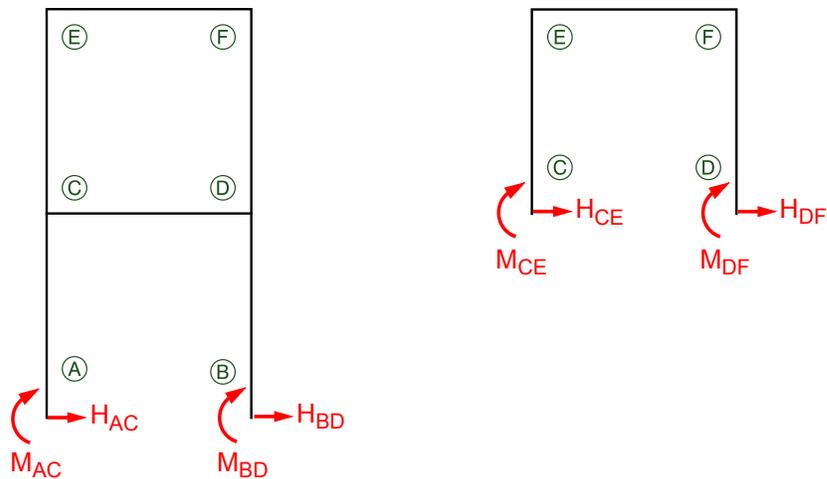
donde  $\sum M_2$  es la suma de los momentos finales en los extremos de todas las columnas del piso 2.

- Sustituyendo los momentos finales por los momentos obtenidos con cada una de las distribuciones de momentos se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum M_1 = \sum M_{0,1} + C_2 \sum M_{2,1} + C_1 \sum M_{1,1} = L_1 (P_2 + P_1) \quad (A.5)$$

donde  $\Sigma M_{0,1}$  es la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 1 obtenidos con la distribución de momentos 0,  $\Sigma M_{2,1}$  es la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 1 obtenidos con la distribución de momentos 2,  $\Sigma M_{1,1}$  es la suma de momentos en los extremos de las columnas del piso 1 obtenidos con la distribución de momentos 1. Los factores de corrección  $C_2$  y  $C_1$  son los que corresponden a los momentos del piso 2 y 1, respectivamente.

#### Apéndice 4. Momentos de ladeo debido a las cargas laterales



Fuente: elaboración propia.

- Teniendo las ecuaciones A.3 y A.5 se pueden encontrar los factores de corrección  $C_2$  y  $C_1$ . Para hacer esto, puede procederse por cualquier Método para resolver ecuaciones con varias incógnitas. Una solución sencilla es utilizar matrices para resolver este sistema de ecuaciones, como se muestra a continuación:

- Las ecuaciones A.3 y A.5 colocan en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} \sum M_{2,2} & \sum M_{1,2} \\ \sum M_{2,1} & \sum M_{1,1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 P_2 \\ L_1 (P_2 + P_1) \end{bmatrix}$$

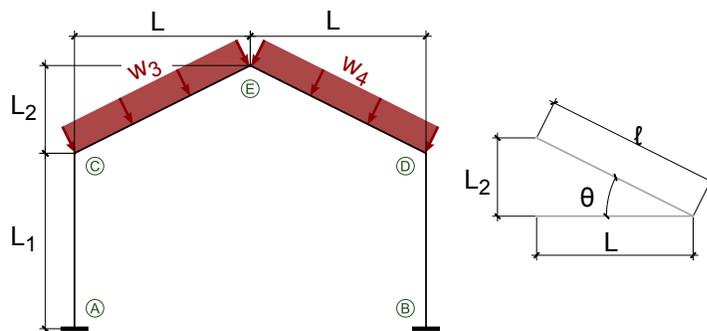
y se resuelve con cualquier software que haga operaciones matriciales.

- Los momentos de ladeo se multiplican con su factor de corrección respectivo y luego se suman para obtener los momentos finales.

### Análisis del marco 3 con el Método de distribución de momentos

El análisis estructural del marco 3 (capítulo 6.) hecho con el Método de Distribución de Momentos se describe en esta sección. Las longitudes necesarias para el análisis, así como las solicitudes de carga se muestran en el apéndice 5. Es importante notar las dimensiones del triángulo que se forma al tomar un lado del techo y la horizontal.

#### Apéndice 5. Configuración estructural del marco 3, con apoyos empotrados



Fuente: elaboración propia.

- Análisis estático

Para realizar el análisis del marco 3, se considerará el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en el nudo E, como se observa en los apéndices 6 y 7, quedando de la forma siguiente:

$$\sum F_X = H_{EC} + H_{ED} = 0 \quad (A.6)$$

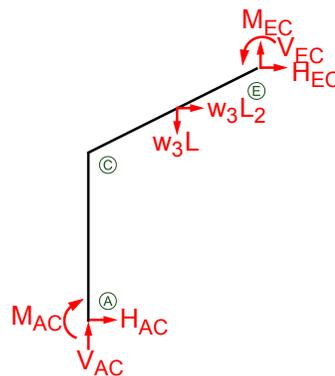
$$\sum F_Y = V_{EC} + V_{ED} = 0 \quad (A.7)$$

Usando la ecuación A.1 para las columnas AC y BD se obtienen las fuerzas horizontales  $H_{AC}$  y  $H_{BD}$ :

$$H_{AC} = -(M_{CA} + M_{AC}) / L_1 \quad (A.8)$$

$$H_{BD} = -(M_{DB} + M_{BD}) / L_1 \quad (A.9)$$

Apéndice 6. **Diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo del marco 3**



Fuente: elaboración propia.

El diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo del marco 3 se muestra en el apéndice 6, del cual se observa la condición de equilibrio de las fuerzas horizontales:

$$\sum F_X = H_{EC} + w_3 L_2 + H_{AC} = 0$$

Sustituyendo  $H_{AC}$  por la ecuación A.8 y despejando  $H_{EC}$  se obtiene:

$$H_{EC} = -H_{AC} - w_3 L_2 = (M_{CA} + M_{AC}) / L_1 - w_3 L_2 \quad (A.10)$$

Haciendo una suma de momentos en el nudo A, se obtiene lo siguiente:

$$\sum M_A = M_{AC} - w_3 L \left( \frac{L}{2} \right) - w_3 L_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - H_{EC} (L_1 + L_2) + V_{EC} L + M_{EC} = 0 \quad (A.11)$$

Al despejar  $V_{EC} L$  de la ecuación A.11 y sustituir la ecuación A.10 se tiene entonces:

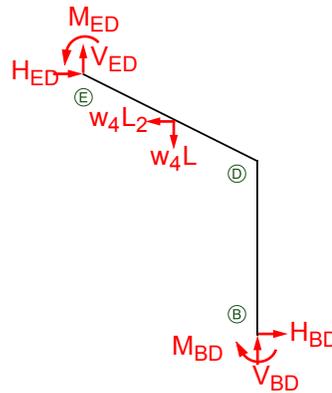
$$V_{EC} L = - (M_{AC} + M_{EC}) + \frac{1}{2} w_3 L^2 - \frac{1}{2} w_3 L_2^2 + (M_{CA} + M_{AC}) \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) \quad (A.12)$$

Para el lado derecho del marco 3 se procede de la misma forma (apéndice 7), la condición de equilibrio de las fuerzas horizontales queda así:

$$\sum F_X = H_{ED} - w_4 L_2 + H_{BD} = 0$$

Sustituyendo  $H_{BD}$  por la ecuación A.9 y despejando  $H_{ED}$  se obtiene:

$$H_{ED} = -H_{BD} + w_4 L_2 = (M_{DB} + M_{BD}) / L_1 + w_4 L_2 \quad (A.13)$$



Fuente: elaboración propia.

Haciendo una suma de momentos en el nudo B, se obtiene lo siguiente:

$$\sum M_B = M_{BD} + w_4L \left( \frac{L}{2} \right) + w_4L_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - H_{ED} (L_1 + L_2) - V_{ED}L + M_{ED} = 0 \quad (A.14)$$

Al despejar  $V_{ED}L$  de la ecuación A.14 y sustituir la ecuación A.13 se tiene entonces:

$$V_{ED}L = M_{BD} + M_{EC} + \frac{1}{2}w_3L^2 - \frac{1}{2}w_3L_2^2 - (M_{DB} + M_{BD}) \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) \quad (A.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones A.10 y A.13 en la condición de equilibrio expresada en la ecuación A.6 se obtiene:

$$H_{EC} + H_{ED} = (M_{CA} + M_{AC}) / L_1 - w_3L_2 + (M_{DB} + M_{BD}) / L_1 + w_4L_2 = 0$$

Simplificando, la expresión anterior es:

$$-L_1 L_2 (w_4 - w_3) = M_{CA} + M_{AC} + M_{DB} + M_{BD} \quad (A.16)$$

estando el lado derecho de esta expresión formado por los momentos finales, los cuales se separan con la ecuación 2.13.

El equilibrio de fuerzas verticales del nudo E, mostrado en la ecuación A.7 con la sustitución de las ecuaciones A.12 y A.15 queda así:

$$\begin{aligned} (V_{EC} + V_{ED}) L = \\ - (M_{AC} + M_{EC}) + \frac{1}{2} w_3 L^2 - \frac{1}{2} w_3 L_2^2 + (M_{CA} + M_{AC}) \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) \\ + M_{BD} + M_{ED} + \frac{1}{2} w_3 L^2 - \frac{1}{2} w_3 L_2^2 - (M_{DB} + M_{BD}) \left( \frac{L_1 + L_2}{L_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión y ordenando se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (w_3 + w_4) (L^2 - L_2^2) = \\ M_{BD} + M_{ED} - M_{AC} - M_{EC} + (M_{AC} + M_{CA} - M_{DB} - M_{BD}) \left( \frac{L_1 + L_2}{L_2} \right) \end{aligned} \quad (A.17)$$

esta expresión al igual que la ecuación A.16 se separa mediante el principio de superposición (ecuación 2.13) para plantear un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y encontrar los factores de corrección para los momentos arbitrarios de lado.

- Análisis de deformaciones

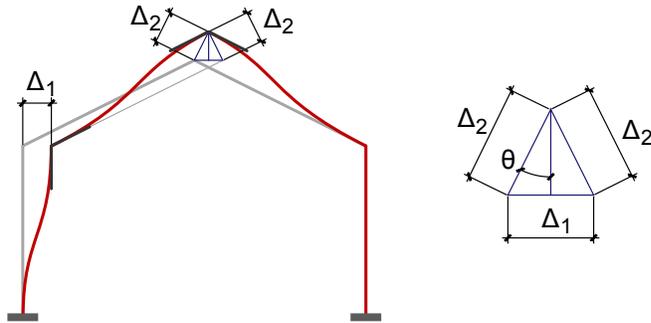
Las deformaciones que sufre el marco 3 serán consideradas de la siguiente forma: se supondrá que la estructura tiene dos grados de libertad, siendo posible que cada una de las columnas tenga una deriva distinta (según las posibles variaciones en solitud de cargas y rigideces de los elementos).

Lo anterior significa que el análisis de deformaciones se hará considerando en 2 casos: cuando la columna izquierda tiene la libertad de deformarse y la derecha permanece inmóvil y cuando la columna derecha tiene la libertad de moverse y la izquierda permanece inmóvil. Esto se está ilustrado en el apéndice 8 y el apéndice 9 respectivamente.

En el apéndice 8 se ve que la relación de deformaciones cuando la columna izquierda se mueve es:  $\Delta_2/\Delta_1 = (1/2)(l/L_2)$ . Debe notarse el triángulo azul a la derecha de el apéndice 8, el cual es el acercamiento de las derivas en la cúspide del techo. A partir de esta figura se realizan relaciones de triángulos para relacionar las deformaciones y poder para utilizar la ecuación 2.15. En el apéndice 9 se observa que las deformaciones están relacionadas de la siguiente forma:  $\Delta_4/\Delta_3 = (1/2)(l/L_2)$ .

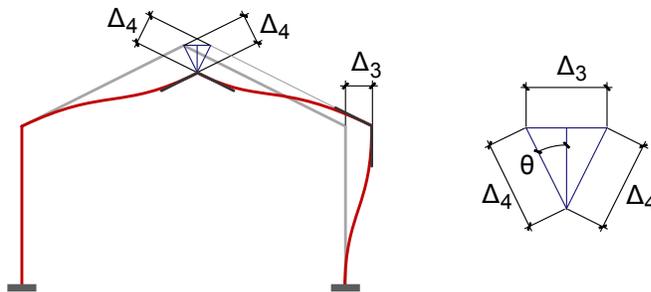
De esta forma se realizó el análisis estructural del marco 3 cuando las columnas se encuentran empotradas. El procedimiento para el caso de que las columnas sean articuladas se hace exactamente de la misma forma, la única diferencia es que los momentos  $M_{AC}$  y  $M_{BD}$  son cero.

Apéndice 8. **Derivas cuando la la columna izquierda está libre**



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 9. **Derivas cuando la la columna derecha está libre**



Fuente: elaboración propia.