



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

**COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS  
DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08**

**Elmer Oswaldo Gálvez**

Asesorado por el Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila

Guatemala, noviembre de 2014



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Narda Lucía Pacay Barrientos
VOCAL V	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Juan Carlos Linares Cruz
EXAMINADOR	Ing. Ronald Estuardo Galindo Cabrera
EXAMINADOR	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

## HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 8 de noviembre de 2012.



**Elmer Oswaldo Gálvez**


Guatemala 28 de julio de 2014

Ingeniero  
Guillermo Francisco Melini Salguero  
Coordinador Área de Materiales  
Escuela de Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
Presente

Estimado Ingeniero:

Cumpliendo con lo resuelto con la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, se procedió a la asesoría y revisión del trabajo de graduación: **COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08**, presentado por el estudiante: Elmer Oswaldo Galvez.

Considerando que el trabajo de graduación se ha desarrollado satisfactoriamente y cumple con los objetivos que motivaron la selección de dicho tema, por lo que hago de su conocimiento que apruebo el trabajo realizado. Sin otro particular, atentamente.



Mario Rodolfo Corzo Avila  
Ingeniero Civil Colegiado No. 2089

Mario Rodolfo Corzo A.  
INGENIERO CIVIL  
Colegiado No. 2089



**USAC**  
**TRICENTENARIA**  
 Universidad de San Carlos de Guatemala

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

Universidad de San Carlos de Guatemala  
 FACULTAD DE INGENIERÍA  
 Escuela de Ingeniería Civil



Guatemala,  
 22 de septiembre de 2014

Ingeniero  
 Hugo Leonel Montenegro Franco  
 Director Escuela Ingeniería Civil  
 Facultad de Ingeniería  
 Universidad de San Carlos

Estimado Ingeniero Montenegro.

Le informo que he revisado el trabajo de graduación **COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08**, desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil Elmer Oswaldo Galvez quien contó con la asesoría del Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila.

Considero este trabajo bien desarrollado y representa un aporte para la comunidad del área y habiendo cumplido con los objetivos del referido trabajo doy mi aprobación al mismo solicitando darle el trámite respectivo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS

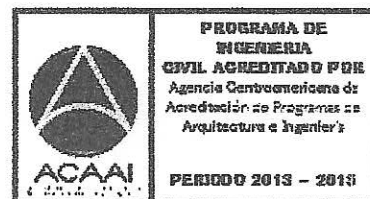
Ing. Civil Guillermo Francisco Melini Saiguer  
 Coordinador del Área de Materiales y  
 Construcciones Civiles



FACULTAD DE INGENIERIA  
 AREA DE MATERIALES Y  
 CONSTRUCCIONES CIVILES  
**USAC**

/bbdeb.

Mas de 134 años de Trabajo Académico y Mejora Continua





**USAC**  
**TRICENTENARIA**  
 Universidad de San Carlos de Guatemala

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

Universidad de San Carlos de Guatemala  
 FACULTAD DE INGENIERÍA  
 Escuela de Ingeniería Civil



El director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila y del Coordinador del Área de Materiales y Construcciones Civiles, Ing. Guillermo Francisco Melini Salguero, al trabajo de graduación del estudiante Elmer Oswaldo Gálvez, titulado **COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08**, da por este medio su aprobación a dicho trabajo.

  
 Ing. Hugo Leonel Montenegro Francisco



Guatemala, noviembre 2014.

/bbdeb.

Mas de 134 años de Trabajo Académico y Mejora Continua



DTG. 628.2014

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, al trabajo de graduación titulado: **COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO EN VIGAS BAJO EFECTOS DE TORSIÓN BASADO EN ACI 318-08**, presentado por el estudiante universitario **Elmer Oswaldo Gálvez**, y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, se autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE:



Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno  
Decano en Funciones

Guatemala, 11 de noviembre de 2014



/gdech



## **ACTO QUE DEDICO A:**

<b>Dios</b>	Por prestarme la vida, guiar mi camino y permitirme cumplir esta meta.
<b>Mi madre</b>	Olivia Gálvez. Por su amor y apoyo incondicional durante toda mi vida.
<b>Mis hermanos</b>	Eveling, Fidel, Yeimy, Mildred, Henry, Marvin y Marlene Galvez. Por todo su apoyo, comprensión y ayuda brindada.
<b>Mis primos y demás familia</b>	Por su ayuda y amistad.
<b>Mis amigos</b>	Por todos los buenos momentos compartidos en la Facultad de Ingeniería.
<b>Ing. Mario Corzo</b>	Por su amistad y ayuda prestada para la realización de este trabajo.



1.5.1.2.	Viga soportando una viga en voladizo .....	18
1.5.1.3.	Vigas de borde que soportan muros excéntricamente .....	19
1.5.2.	Vigas sujetas a torsión por compatibilidad .....	20
1.5.2.1.	Vigas en voladizo que se intersectan entre ellas mismas .....	21
1.5.2.2.	Vigas de borde soportando una losa de piso.....	22
1.5.2.3.	Vigas de borde soportando una viga secundaria.....	22
1.6.	Aplicación del círculo de Mohr a esfuerzos de torsión .....	23
1.6.1.	Trayectorias de esfuerzos .....	24
1.7.	Flujo de esfuerzos cortantes diagonales debido a la torsión ....	26
2.	RESISTENCIA Y DEFORMACIÓN .....	27
2.1.	Torsión pura en vigas.....	27
2.1.1.	Análisis en concreto simple .....	27
2.1.1.1.	Teoría del comportamiento elástico .....	28
2.1.1.1.1.	Rigidez torsional.....	30
2.1.1.1.2.	Secciones compuestas.....	30
2.1.1.1.3.	Analogía de la membrana de Prandtl.....	31
2.1.1.2.	Teoría del comportamiento plástico .....	33
2.1.1.2.1.	Analogía del montón de arena de Nádai.....	34
2.1.1.3.	Teoría de Hsu.....	35

2.1.2.	Análisis en concreto reforzado.....	38
2.1.2.1.	Teoría de la flexión asimétrica.....	39
2.1.2.2.	Teoría de la analogía de la armadura en el espacio .....	42
2.2.	Teoría de flexión más torsión .....	46
2.3.	Teoría de torsión más cortante.....	46
3.	DISEÑO A TORSIÓN SEGÚN DISPOSICIONES DEL ACI 318-08 .....	49
3.1.	Antecedentes.....	49
3.2.	Diseño por torsión .....	50
3.3.	Umbral de torsión .....	52
3.3.1.	Criterios para el torque de agrietamiento.....	52
3.4.	Cálculo del momento torsional mayorado.....	53
3.4.1.	Criterios para equilibrio y compatibilidad .....	53
3.5.	Resistencia al momento torsional.....	55
3.5.1.	Criterio de $A_0$ y $A_{0h}$ .....	55
3.5.2.	Criterio para el cálculo del área de acero longitudinal $A_L$ .....	57
3.5.3.	Criterio para momento torsional y cortante.....	57
3.5.4.	Criterio para momento torsional y flexión .....	58
3.6.	Detalles del refuerzo para torsión.....	59
3.7.	Refuerzo mínimo para torsión .....	62
3.7.1.	Criterio para el refuerzo transversal y longitudinal por torsión.....	63
3.8.	Espaciamiento del refuerzo para torsión .....	63
3.8.1.	Criterio para el espaciamiento de los estribos .....	64
3.9.	Procedimiento para el diseño de una viga a torsión .....	64
3.9.1.	Análisis estructural.....	64
3.9.2.	Datos .....	65

3.9.3.	Análisis por flexión .....	65
3.9.4.	Tipo de torsión.....	66
3.9.5.	Chequeo del diseño por torsión.....	66
3.9.6.	Chequeo de la sección transversal .....	67
3.9.7.	Refuerzo transversal por torsión y cortante.....	68
3.9.8.	Diseño de los estribos .....	69
3.9.9.	Diseño del refuerzo longitudinal .....	70
4.	MÉTODO DE ENSAYO .....	73
4.1.	Descripción del ensayo .....	73
4.1.1.	Extremos restringidos.....	75
4.1.2.	Unión entre vigas .....	75
4.1.3.	Viga principal.....	75
4.1.4.	Viga secundaria.....	76
4.2.	Material y equipo a utilizar.....	76
4.3.	Procedimiento para el ensayo.....	76
4.4.	Esquema del método propuesto para el ensayo .....	77
5.	DESARROLLO EXPERIMENTAL.....	79
5.1.	Propuesta.....	79
5.2.	Diseño del elemento 1.....	80
5.2.1.	Análisis estructural .....	81
5.2.2.	Diseño del acero de refuerzo por flexión corte y torsión para la viga principal.....	84
5.2.3.	Diseño del acero de refuerzo por corte y flexión para la viga secundaria .....	89
5.2.4.	Diseño del nudo y los apoyos.....	91
5.3.	Diseño del elemento 2.....	92
5.3.1.	Análisis estructural .....	92

5.3.2.	Diseño del acero de refuerzo por flexión corte y torsión para la viga principal .....	93
5.3.3.	Diseño del acero de refuerzo por corte y flexión para la viga secundaria.....	98
5.3.4.	Diseño del nudo y los apoyos .....	98
5.4.	Resumen del diseño de los elementos .....	99
5.5.	Esquema del armado de los elementos.....	100
5.6.	Construcción y ensayo de los elementos .....	101
6.	RESULTADOS OBTENIDOS DEL ENSAYO .....	107
6.1.	Propiedades del concreto .....	107
6.1.1.	Peso específico del concreto .....	107
6.1.2.	Consistencia del concreto.....	107
6.1.3.	Resistencia a compresión de los testigos .....	108
6.1.4.	Resumen de las pruebas.....	108
6.2.	Lectura de los deformómetros y ángulos de giro.....	109
6.3.	Aspectos observados durante la aplicación de carga.....	116
6.4.	Gráficos momento torsor-ángulo de giro .....	117
6.5.	Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro, para el elemento 1 .....	121
6.5.1.	Zona elástica .....	123
6.5.2.	Zona elasto-plástica.....	124
6.5.3.	Zona plástica .....	124
6.5.4.	Rigidez antes del agrietamiento.....	126
6.5.4.1.	Cálculo experimental .....	126
6.5.4.2.	Cálculo teórico .....	127
6.5.5.	Rigidez después del agrietamiento.....	128
6.5.5.1.	Calculo experimental .....	128
6.5.6.	Torque de agrietamiento $T_{cr}$ .....	128

6.6.	Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro, para el elemento 2 .....	129
6.6.1.	Zona elástica .....	131
6.6.2.	Zona elasto-plástica .....	131
6.6.3.	Zona plástica .....	131
6.6.4.	Rigidez antes del agrietamiento .....	132
6.6.4.1.	Cálculo experimental .....	132
6.6.4.2.	Cálculo teórico.....	132
6.6.5.	Rigidez después del agrietamiento .....	133
6.6.5.1.	Cálculo experimental.....	133
6.6.6.	Torque de agrietamiento $T_{cr}$ .....	134
7.	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO PRESENTADO POR LAS VIGAS ENSAYADAS .....	135
7.1.	Comparación de los resultados experimentales y los teóricos según el ACI para cada viga.....	135
7.1.1.	Comparación del torque último y el torque de agrietamiento de cada viga .....	136
7.1.2.	Análisis de las grietas presentadas en cada viga.....	136
7.1.3.	Comparación de la rigidez a torsión que presento cada elemento .....	141
7.1.4.	Capacidad de giro .....	143
7.2.	Conclusión de los resultados .....	145
7.2.1.	Comparación de resultados teóricos y experimentales .....	145
7.2.1.1.	Rigidez efectiva no agrietada .....	145
7.2.1.2.	Torque de agrietamiento $T_{cr}$ .....	146
7.2.1.3.	Torque de diseño $T_u$ .....	146

7.2.2.	Relación entre rigidez agrietada y no agrietada de cada elemento .....	147
7.2.3.	Comparación de resultados experimentales entre elementos .....	149
7.2.3.1.	Comparación de rigidez.....	149
7.2.3.2.	Torque de agrietamiento $T_{cr}$ y torque de diseño $T_u$ .....	151
CONCLUSIONES .....		153
RECOMENDACIONES.....		155
BIBLIOGRAFÍA.....		157





# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Corte directo.....	2
2.	Corte inducido de forma indirecta .....	3
3.	Distribución del esfuerzo cortante en una sección circular.....	5
4.	Deformación en una barra de sección rectangular.....	6
5.	Deformación angular .....	7
6.	Distribución del esfuerzo cortante en una sección rectangular .....	9
7.	Superficie de falla.....	10
8.	Flujo de cortante en un tubo de pared delgada .....	11
9.	Relación del flujo cortante con el par torsor aplicado .....	13
10.	Torsión por equilibrio.....	14
11.	Torsión por compatibilidad .....	15
12.	Viga soportando una losa en voladizo.....	17
13.	Viga principal soportando una viga en voladizo .....	19
14.	Viga soportando un muro excéntricamente.....	20
15.	Vigas que se intersectan entre ellas mismas .....	21
16.	Vigas de borde en un sistema de piso .....	23
17.	Trayectoria de esfuerzos por torsión .....	25
18.	Esfuerzos de tensión y compresión inducidos por cortante .....	25
19.	Flujo de esfuerzos en secciones cerradas y abiertas.....	26
20.	Factores de esfuerzo y rigidez para secciones rectangulares sujetas a torsión .....	29
21.	Subdivisión de secciones compuestas.....	31
22.	Analogía de la membrana en torsión pura .....	32

23.	Fluencia torsional de una sección cuadrada .....	33
24.	Analogía del montón de arena de Nádai.....	34
25.	Teoría de Hsu de falla por flexión .....	36
26.	Flexión asimétrica debida a la torsión.....	39
27.	Fuerzas que se generan a través de las fisuras .....	40
28.	Analogía de la armadura en el espacio.....	42
29.	Significado del parámetro $A_0$ .....	43
30.	Diagramas de cuerpo libre de las fuerzas que actúan en la analogía de una armadura en el espacio.....	45
31.	Adición de esfuerzos por torsión y cortante .....	47
32.	Gráfico momento torsor-rotación para una viga de concreto armado sujeta a torsión.....	51
33.	Momento torsor crítico a una distancia $d$ .....	54
34.	Definición de $A_{0h}$ .....	56
35.	Estribos cerrados formados por dos estribos en U .....	59
36.	Esfuerzos de compresión de las diagonales de concreto en una viga de sección rectangular .....	60
37.	Descascaramiento de la esquina en vigas de sección rectangular.....	61
38.	Estribos para resistir torsión .....	62
39.	Modelo del elemento.....	73
40.	Modelo idealizado .....	74
41.	Esquema del ensayo .....	78
42.	Anclaje de barras en el nudo .....	91
43.	Armado del elemento 1 .....	100
44.	Estribos de los elementos.....	101
45.	Colocación del estribo.....	102
46.	Amarre de estribos.....	103
47.	Detalle de armado.....	103
48.	Armado del nudo.....	104

49.	Armado de los elementos.....	105
50.	Elementos a ensayar.....	106
51.	Elemento 1 al inicio del ensayo .....	106
52.	Colocación de deformómetros .....	109
53.	Relaciones trigonométricas para los deformómetros .....	110
54.	Diagrama de momento torsor.....	113
55.	Curva con datos del deformómetro 1-2 para el elemento 1 .....	118
56.	Curva con datos del deformómetro 3 para el elemento 1.....	118
57.	Curva con datos promedio para el elemento 1 .....	119
58.	Curva con datos del deformómetro 1-2 para el elemento 2 .....	119
59.	Curva con datos del deformómetro 3 para el elemento 2.....	120
60.	Curva con promedio para el elemento 2 .....	120
61.	Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro para el elemento 1 .....	121
62.	Zonas de trabajo del elemento 1 .....	122
63.	Análisis del grafico momento torsor-ángulo de giro para el elemento 2 .....	129
64.	Zonas de trabajo del elemento 2.....	130
65.	Fisuras presentadas por los elementos.....	137
66.	Esfuerzos de tensión y compresión inducidos por torsión en el elemento 1 .....	138
67.	Aplicación de la carga al elemento 1.....	139
68.	Comportamiento de los apoyos del elemento 1 .....	140
69.	Esfuerzos en los apoyos .....	141
70.	Comparación entre elementos .....	142
71.	Giro y rigidez en los elementos .....	143
72.	Deformación del elemento 2 .....	144
73.	Comparación de la reducción de rigidez en cada etapa del elemento .....	148

74.	Relación de rigidez entre elementos.....	150
75.	Porcentaje de diferencia de rigidez entre elementos .....	151

## TABLAS

I.	Esfuerzos cortantes para secciones sólidas y tubulares.....	8
II.	Análisis para el acero transversal .....	41
III.	Valores para $\lambda$ según ACI 8.6.1 .....	50
IV.	Pasos para el diseño por flexión .....	65
V.	Chequeo del diseño por torsión .....	66
VI.	Propiedades de la sección.....	67
VII.	Chequeo de la sección .....	68
VIII.	Refuerzo transversal por torsión .....	68
IX.	Refuerzo transversal por cortante.....	69
X.	Diseño de los estribos.....	70
XI.	Diseño del refuerzo longitudinal.....	71
XII.	Variaciones en cada elemento.....	79
XIII.	Dimensiones de las vigas .....	80
XIV.	Análisis por carga muerta .....	82
XV.	Análisis por carga puntual aplicada .....	83
XVI.	Corte y momentos totales en elemento 1 .....	84
XVII.	Datos del diseño .....	85
XVIII.	Diseño por flexión .....	85
XIX.	Chequeo del momento torsor aplicado .....	86
XX.	Propiedades de la sección.....	86
XXI.	Chequeo de la sección transversal .....	87
XXII.	Refuerzo transversal requerido por torsión.....	87
XXIII.	Refuerzo transversal requerido por corte.....	88
XXIV.	Diseño de los estribos.....	88

XXV.	Diseño del refuerzo longitudinal .....	89
XXVI.	Diseño por flexión .....	90
XXVII.	Refuerzo transversal requerido por corte .....	90
XXVIII.	Corte y momentos totales para el elemento 2.....	93
XXIX.	Diseño por flexión .....	94
XXX.	Chequeo del momento torsor aplicado.....	95
XXXI.	Propiedades de la sección .....	95
XXXII.	Chequeo de la sección transversal .....	96
XXXIII.	Refuerzo transversal requerido por torsión .....	96
XXXIV.	Refuerzo transversal requerido por corte .....	97
XXXV.	Diseño de los estribos .....	97
XXXVI.	Diseño del refuerzo longitudinal .....	98
XXXVII.	Comparación en el diseño de ambos elementos .....	99
XXXVIII.	Resultados de ensayo a compresión de testigos .....	108
XXXIX.	Propiedades teóricas y experimentales del concreto .....	109
XL.	Lecturas de los deformómetros para el elemento 1 .....	111
XLI.	Lecturas de los deformómetros para el elemento 2 .....	112
XLII.	Momento torsor y ángulo de giro para el elemento 1 .....	114
XLIII.	Momento torsor y ángulo de giro para el elemento 2 .....	115
XLIV.	Datos de descarga para el elemento 1.....	116
XLV.	Observaciones durante la aplicación de la carga .....	117
XLVI.	Comparación de parámetros teóricos y experimentales para ambos elementos.....	135
XLVII.	Comparación experimental entre ambos elementos .....	136
XLVIII.	Comparación de la rigidez entre elementos .....	142



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$h$	Altura de la sección transversal de una viga, en mm.
$b$	Ancho de la cara a compresión de una viga, en mm.
$\theta$	Ángulo entre el eje neutro y el puntal diagonal a compresión de una viga a torsión.
$A_o$	Área bruta encerrada por la trayectoria del flujo de cortante, en mm <sup>2</sup> .
$A_{bt}$	Área de la sección transversal de una varilla para estribo, en mm <sup>2</sup> .
$A_{cp}$	Área de la sección transversal de una viga, medida entre los bordes exteriores del refuerzo transversal, en mm <sup>2</sup> .
$A_v$	Área de refuerzo de cortante con una espaciado S, en mm <sup>2</sup> .
$A_s$	Área de refuerzo longitudinal a tensión, en mm <sup>2</sup> .
$A_{s\ max}$	Área de refuerzo longitudinal máximo a tensión, en mm <sup>2</sup> .
$A_{s\ min}$	Área de refuerzo longitudinal mínimo a tensión, en mm <sup>2</sup> .
$A_t$	Área de una rama de estribo cerrado que resiste torsión colocado con un espaciado S, en mm <sup>2</sup> .



$A_{oh}$	Área encerrada por el eje del refuerzo transversal cerrado más externo colocado para resistir torsión, en $mm^2$ .
$A_{l, \min}$	Área mínima de refuerzo longitudinal para resistir torsión, en $mm^2$ .
$A_l$	Área total de refuerzo longitudinal para resistir torsión, en $mm^2$ .
$A_{st}$	Área total de refuerzo transversal por torsión, en $mm^2$ .
$p_u$	Carga axial ultima, en kN.
$V_t$	Cortante por torsión.
$\rho_{bal}$	Cuantía del refuerzo $A_s$ evaluada sobre el área $bd$ que produce condiciones balanceadas de deformación unitaria.
<b>Def 1, Def 2 y Def 3</b>	Deformación medida por los deformómetros 1, 2 y 3 respectivamente, en mm.
$L_{Def 1}$ y $L_{Def 2}$	Distancia del eje neutro al deformómetro 1 y 2 respectivamente, en m.
$f_s$	Esfuerzo en el refuerzo calculado para las cargas de servicio, en Mpa.
<b>T</b>	Esfuerzo torsor, en kN-m.
<b>t</b>	Espesor de un tubo de pared delgada, en mm.
<b>e</b>	Excentricidad de la carga aplicada respecto de su eje neutro, en mm.
$\beta_1$	Factor que relaciona la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos de compresión con la profundidad del eje neutro.
<b>q</b>	Flujo de cortante.
<b>kg</b>	Kilogramo.

<b>kN</b>	Kilo-newton.
<b>L</b>	Longitud de la viga principal, en m.
<b>l</b>	Longitud de la viga secundaria, en m.
<b>L<sub>b</sub></b>	Longitud del brazo de palanca, en m.
<b>m</b>	Metro.
<b>mm</b>	Milímetro.
<b>G</b>	Modulo de rigidez en corte.
<b>G<sub>eq</sub></b>	Módulo de rigidez equivalente en corte.
<b>M<sub>u max</sub></b>	Momento flexionante ultimo máximo, en kN-m.
<b>M<sub>u</sub></b>	Momento flexionante último, en kN-m.
<b>M<sub>f</sub></b>	Momento flexionante, en kN-m.
<b>J</b>	Momento polar de inercia, en mm <sup>4</sup> .
<b>J<sub>eq</sub></b>	Momento polar equivalente de inercia, en mm <sup>4</sup> .
<b>T<sub>cr</sub></b>	Momento torsor de agrietamiento en kN-m.
<b>T<sub>max</sub></b>	Momento torsor máximo resistido por un elemento, en kN-m.
<b>T<sub>c</sub></b>	Momento torsor resistido por el concreto, en kN-m.
<b>T<sub>s</sub></b>	Momento torsor resistido por el refuerzo longitudinal y transversal, en kN-m.
<b>T<sub>fb</sub></b>	Momento torsor resistido por una fibra, en kN-m
<b>M<sub>t</sub></b>	Momento torsor, en kN-m.
<b>n<sub>h</sub></b>	Numero de estribos horizontales.
<b>n<sub>v</sub></b>	Numero de estribos verticales.
<b>K1 y K2</b>	Parámetro que surge para expresar $f_s$ en función de $f_y$ .
<b>a</b>	Profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos a compresión de una viga, en mm.
<b>rad</b>	Radianes.
<b>V<sub>c</sub></b>	Resistencia al cortante del concreto, en kN.

$V_s$	Resistencia al cortante del refuerzo, en kN.
$f'_c$	Resistencia especificada a la compresión del concreto, en Mpa.
$f_y$	Resistencia especificada a la fluencia del refuerzo, en Mpa.
$f_{yt}$	Resistencia especificada a la fluencia $f_y$ del refuerzo transversal, en Mpa.
$T_n$	Resistencia nominal a torsión, en kN-m.
$f_{cr}$	Resistencia promedio a la compresión requerida del concreto, en Mpa.
$f_{ct}$	Resistencia promedio a la tracción por hendimiento del concreto liviano, en Mpa.
$K'_t$	Rigidez a torsión efectiva, en kN-m.
$K_t$	Rigidez a torsión, en kN-m.
$s$	Separación de los estribos, en mm.
$T_u$	Torsión mayorada en la sección, en kN-m.

## GLOSARIO

<b>Agrietamiento</b>	Hendidura alargada que se produce cuando se separan las partículas del material que conforma un elemento.
<b>Alabeo</b>	Curvatura de un tablero que resulta del giro de sus bordes en direcciones opuestas.
<b>Amarre</b>	Alambres usados para conectar o unir de forma permanente las varillas usadas que conforman el armado de un elemento en una construcción.
<b>Aplastamiento</b>	Reducción de la dimensión del eje longitudinal de un elemento a causa de esfuerzos de compresión.
<b>Armado</b>	Colocación de varillas de refuerzo dispuestas para resistir tensión, en un elemento de concreto.
<b>Asentamiento</b>	Diferencia de altura que se da entre el cono de Abrams y el concreto, después de retirar el cono.
<b>Compresión</b>	Esfuerzos que tienden a aplastar el eje longitudinal de un elemento.
<b>Concreto armado</b>	Conformación de concreto y acero de refuerzo.

<b>Cono de Abrams</b>	Prueba realizada al concreto fresco para determinar el asentamiento.
<b>Deformación</b>	Cambio en el tamaño o forma de un cuerpo al presentarse esfuerzos internos.
<b>Deformometro</b>	Aparato utilizado para medir las deformaciones en un elemento.
<b>Descascararse</b>	Pérdida del recubrimiento de un elemento de concreto reforzado.
<b>Ductilidad</b>	Capacidad de un elemento para sostener grandes deformaciones.
<b>Elasticidad</b>	Propiedad de un material por virtud de la cual las deformaciones causadas por el esfuerzo desaparecen al removérsele.
<b>Elastomero</b>	Material compuesto por polímeros que presenta alta elongación frente a cargas, antes de fracturarse o romperse.
<b>Elemento</b>	Estructura compuesta por una viga principal y una viga secundaria.
<b>Esfuerzo</b>	Medida de la fuerza aplicada por unidad de área en la sección transversal de un elemento.

<b>Estribo</b>	Refuerzo empleado para resistir esfuerzos de cortante y de torsión en un elemento estructural.
<b>Flexión</b>	Esfuerzo producido en una viga debido a fuerzas paralelas al eje longitudinal de la misma.
<b>Flujo cortante</b>	Analogía que existe con el flujo constante de un fluido incompresible que circula a través del espesor de un tubo.
<b>Formaleta</b>	Estructura diseñada para limitar el concreto en estado fresco hasta que alcance resistencia propia.
<b>Fuerza - par</b>	Momento ocasionado por dos fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta actuando a una distancia $d$ .
<b>Gato hidráulico</b>	Dispositivo que utiliza un fluido que es impulsado a un cilindro mediante el émbolo de una bomba.
<b>Hiperestático</b>	Sistema estáticamente indeterminado
<b>Longitud de desarrollo</b>	Longitud embebida del refuerzo en el concreto, que se requiere para poder desarrollar la resistencia de diseño del refuerzo en una sección crítica.
<b>Plasticidad</b>	Propiedad que permite al material sobrellevar deformación permanente sin que sobrevenga la ruptura.

<b>Recubrimiento</b>	Distancia entre la superficie externa del refuerzo embebido y la superficie externa más cercana del concreto.
<b>Resistencia</b>	Capacidad de un material para resistir esfuerzos.
<b>Rigidez</b>	Propiedad que mide la deformabilidad relativa de un material bajo carga, se expresa como la razón entre el esfuerzo y la deformación correspondiente.
<b>Rotura</b>	Estado en el cual el material llega a la falla.
<b>Tensión diagonal</b>	Esfuerzos de tensión producidos por esfuerzos principales de tensión y compresión.
<b>Varilla</b>	Elemento estructural de acero embebido en el concreto.

## RESUMEN

La torsión se divide en dos tipos: la que surge por condiciones de equilibrio y la que es requisito para la compatibilidad estructural. En este trabajo se hace énfasis en la primera. Se realiza un estudio experimental de dos vigas de concreto armado sometidas a torsión primaria o de equilibrio, con la finalidad de observar su comportamiento y hacer una comparación de la eficiencia que se obtiene al incrementar la base de la sección transversal de un elemento respecto del otro. Se observan parámetros importantes para un diseñador, como la resistencia y deformación del elemento, por ende la rigidez antes como después del agrietamiento. Otro aspecto importante son las fisuras presentadas, con lo cual da el parámetro de cómo poder colocar el refuerzo.

Para realizar el ensayo se propuso un sistema estructural en el que se combinan dos vigas; su funcionamiento está directamente ligado a un conjunto, por lo que los resultados se interpretan como tal. El método utilizado consiste en utilizar una viga secundaria para proporcionar un brazo de palanca y poder aplicar fuerza axial excéntrica al eje longitudinal del elemento, obteniendo como equivalente una fuerza-par. Por este motivo, en la viga analizada existe corte y flexión, pero estos son pequeños en comparación de la torsión por lo que se asume que las propiedades analizadas son directamente por torsión.

Los resultados obtenidos indican la eficiencia del elemento con la base de la sección incrementada, presentando mayor resistencia, menor deformación y fisuras visibles después de alcanzar su torque de diseño.





## **OBJETIVOS**

### **General**

Realizar un análisis sobre los efectos producidos al aplicar un par torsor a dos vigas de concreto reforzadas por torsión, cada una con diferente base en su sección transversal.

### **Específicos**

1. Realizar el diseño por torsión de los elementos.
2. Determinar la resistencia del concreto y la contribución del acero antes y después del agrietamiento.
3. Hacer una comparación mediante gráficos torsión-giro del torque de agrietamiento y torque último, para cada una de las vigas.
4. Determinar la eficiencia de los estribos para resistir corte por torsión.
5. Determinar mediante un análisis comparativo la eficiencia entre las dos vigas.
6. Estudiar las grietas que se forman en la falla y bajo qué condiciones de rigidez torsional se dan.



## INTRODUCCIÓN

Debido al desarrollo en Guatemala, en especial el sector constructivo, cada día se vuelve más importante y necesario considerar en el diseño la torsión. El diseñador debe ser capaz de dar soluciones prácticas y económicas ante estas sollicitaciones. Para esto es necesario que exista información real y actualizada basada en ensayos, sobre este comportamiento. No solo aplicado a esfuerzos de torsión simple porque raramente actúan solos, sino también en combinación con flexión y fuerzas cortantes.

Con este trabajo se pretende determinar el comportamiento de vigas sometidas a torsión, y ofrecer información detallada del funcionamiento como sistema estructural en el que intervienen varios factores como: unión entre vigas, apoyos y la evaluación de las vigas.

Se incluye una investigación clara, concisa e ilustrada del problema fundamental de torsión, comenzando por esfuerzos en secciones circulares, secciones rectangulares y tubos de pared delgada. También se indica el análisis estructural de algunos casos en los que la torsión por equilibrio y por compatibilidad es inducida a vigas.

Se estudian las teorías para el cálculo de esfuerzos torsores en concreto simple y reforzado. En concreto simple porque la resistencia antes del agrietamiento del elemento es provista básicamente por este. Para concreto reforzado, se estudian dos teorías: la de flexión asimétrica y la de la armadura espacial, que es la que propone el Código ACI.

Se detallan todos los requerimientos del Código ACI para vigas sujetas a torsión, flexión y corte. Realizando el diseño de los elementos en base a estas especificaciones para luego compararlas con los resultados experimentales. También se incluye el procedimiento general a seguir para el diseño de vigas, lo cual es una herramienta muy útil.

La variación en cada elemento es la geometría, se utiliza distinta base en la sección transversal de cada elemento, con este cambio se obtiene el doble del momento polar de inercia que en el primer elemento, con lo que se espera mayor resistencia al momento torsor actuante, sin presentar deficiencias en otros aspectos como la deformación y las fisuras presentadas. Otro aspecto a considerar es el armado, la diferencia en la forma del estribo servirá para verificar la eficiencia de cada uno ante estos esfuerzos torsores, el objetivo es que no exista pérdida en las aristas del elemento.

# 1. GENERALIDADES

## 1.1. Antecedentes

Por varios años los efectos producidos por la torsión en elementos de concreto armado fueron ignorados en el diseño, se tomaba a la torsión como una acción secundaria, pues esta no contribuye a resistir la acción de sismo.

Una de las razones por las que no existían problemas de torsión era porque sus efectos los absorbía el factor de seguridad global que se aplicaba a las estructuras diseñadas por corte o flexión.

En años posteriores se empezó a considerar la torsión en el diseño porque los métodos más exactos de análisis permitían estructuras más livianas, menos conservadoras, por lo tanto con menor coeficiente de seguridad global. Otra razón es porque se incrementó el uso de elementos estructurales en los cuales la torsión es crítica, como es el caso de vigas de puentes curvos en planta, vigas cargadas excéntricamente, estructuras prefabricadas sin continuidad, balcones, losas helicoidales, etc.

La solución general para la torsión de miembros de sección transversal rectangular fue desarrollada por Saint-Venant en 1853. Antes de esa época se utilizaban ecuaciones semejantes a las de flexión, pero los ensayos mostraban grandes variaciones en los resultados, excepto en los elementos de sección transversal circular.

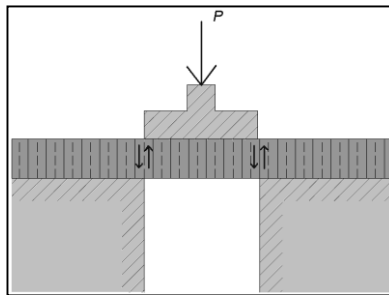
## 1.2. Esfuerzos cortantes

Esfuerzo de corte es aquel que actúa paralelamente al plano que lo resiste, a diferencia de los esfuerzos axiales que actúan normalmente al plano. Los esfuerzos cortantes se pueden dividir en dos grupos: los que aparecen de forma directa y los que aparecen de forma indirecta.

### 1.2.1. Cortante directo

El corte tiene lugar en un plano paralelo a la carga aplicada y las resultantes están espaciadas a distancias infinitesimales entre sí, como se observa en la figura 1.

Figura 1. **Corte directo**



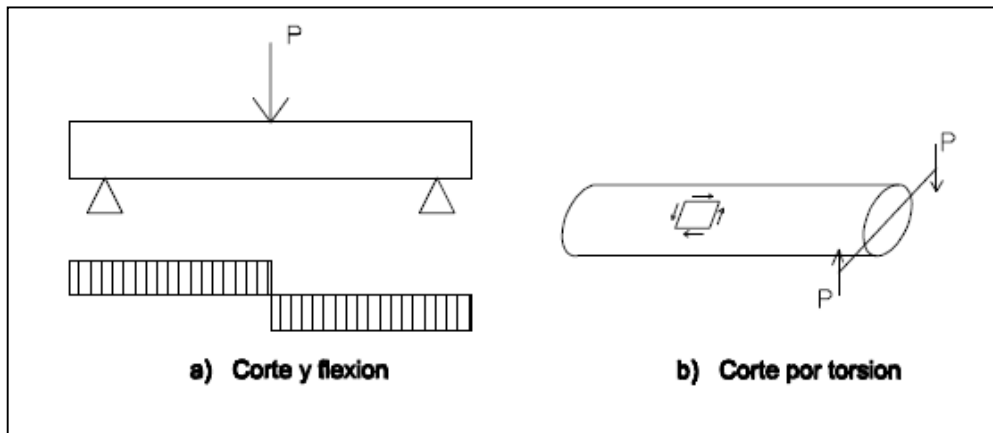
Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 1.2.2. Cortante indirecto

Este se presenta en elementos sujetos a compresión, flexión y torsión. Cuando un elemento está sometido únicamente a esfuerzos cortantes se dice que está sujeto a cortante puro.

En la figura 2 se observan los casos descritos de corte y flexión combinados y corte por torsión.

Figura 2. **Corte inducido de forma indirecta**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 1.3. Torsión

Cuando las fuerzas son paralelas y opuestas aplicadas en un plano perpendicular al del eje longitudinal de un elemento, se establece la acción de un momento alrededor del eje longitudinal del mismo, que produce torsión. A diferencia de los esfuerzos axiales, cortantes y flexionantes, los esfuerzos por torsión son más complicados de analizar debido al comportamiento que los elementos presentan.

Cuando la torsión se presenta por la excentricidad de las cargas que actúan en el elemento, se le llama torsión por equilibrio. Cuando ocurre por compatibilidad de deformaciones de miembros monolíticos como el caso de un sistema losa-viga, se le conoce como torsión por compatibilidad.



Los efectos de torsión se analizan en dos etapas. La primera etapa es el análisis estructural, que consiste en la determinación de las fuerzas que actúan en el elemento, y que conllevan a pares que obligan al elemento a girar respecto de su eje longitudinal. La segunda etapa consiste en la determinación de la resistencia y deformación que el elemento presentará cuando esté sometido a dichas fuerzas.

### **1.3.1. Centro de torsión**

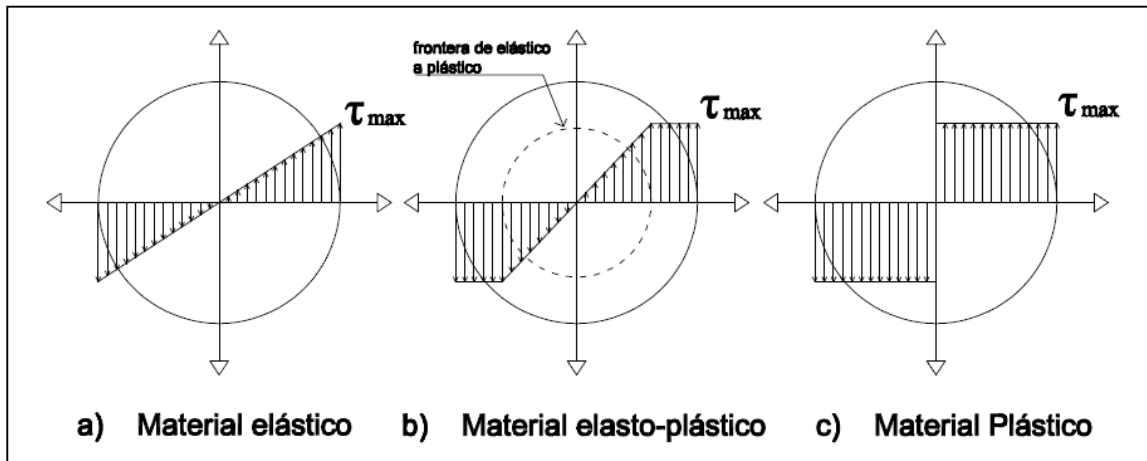
En cualquier sección de una viga, siempre que no exista un momento flexionante constante, existen esfuerzos cortantes que inducen un flujo cortante interno o resistente. Si la resultante de este flujo no es igual, opuesta y colineal con la fuerza cortante exterior, en la viga existirá flexión y torsión. La flexión sin torsión tiene lugar solamente si la resultante de las fuerzas cortantes exteriores pasa por el llamado centro de torsión, que también se llama centro de cortante, e incluso centro de flexión.

### **1.3.2. Torsión en elementos de sección circular**

Para efectos de análisis e interpretación y de manera generalizada la torsión se puede definir como la transmisión de un momento a lo largo de un eje que tiene la misma dirección que la del vector de momento.

En un caso idealizado en donde un miembro este sometido a torsión y no exista flexión, se dice que existe esfuerzo de corte puro. En un material elástico de sección circular no es constante y varía desde cero en el eje hasta un máximo en las fibras externas. La figura 3 muestra estos esfuerzos cortantes aplicados a una sección circular de distintos materiales.

Figura 3. **Distribución del esfuerzo cortante en una sección circular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Existe una serie de hipótesis planteadas para la validación de las ecuaciones de torsión:

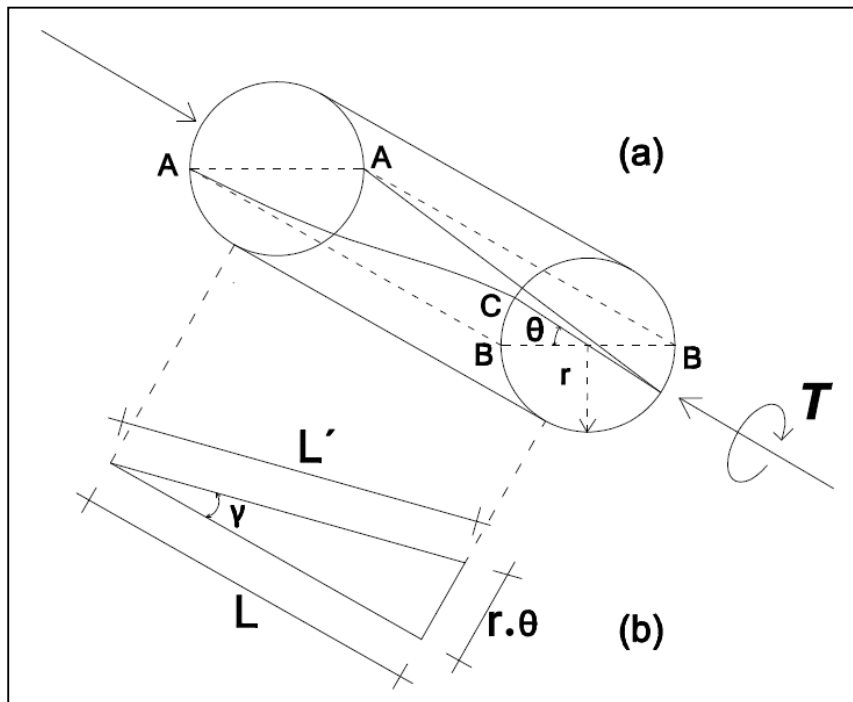
- Las secciones circulares permanecerán así después de la torsión.
- Las secciones transversales, que son planas y paralelas antes de la deformación, giran y permanecen planas y paralelas.
- La proyección sobre una sección transversal de una línea radial permanecerá así después de la torsión.
- El par al que esté sometido el elemento es perpendicular a su eje.
- Los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad.

Si se tiene una barra circular uniforme de longitud  $L$  como la que se muestra en la figura 4, y se le aplica un momento torsor  $T$  a los extremos, la línea  $AB$  inicialmente recta, se retuerce formando una hélice  $AC$  la cual se asume como lineal, y la sección en  $B$  gira un ángulo  $\theta$  respecto de la sección en  $A$ .

La línea  $BC$  es la longitud de arco debido a  $\theta$  y al radio de la sección  $r$ . De la relación trigonométrica proyectada en la superficie de la barra, y asumiendo que la  $\tan^{-1}(\gamma) \approx \gamma$ , se tiene:

$$BC = r \cdot \theta; \quad \gamma = \frac{r \cdot \theta}{L}$$

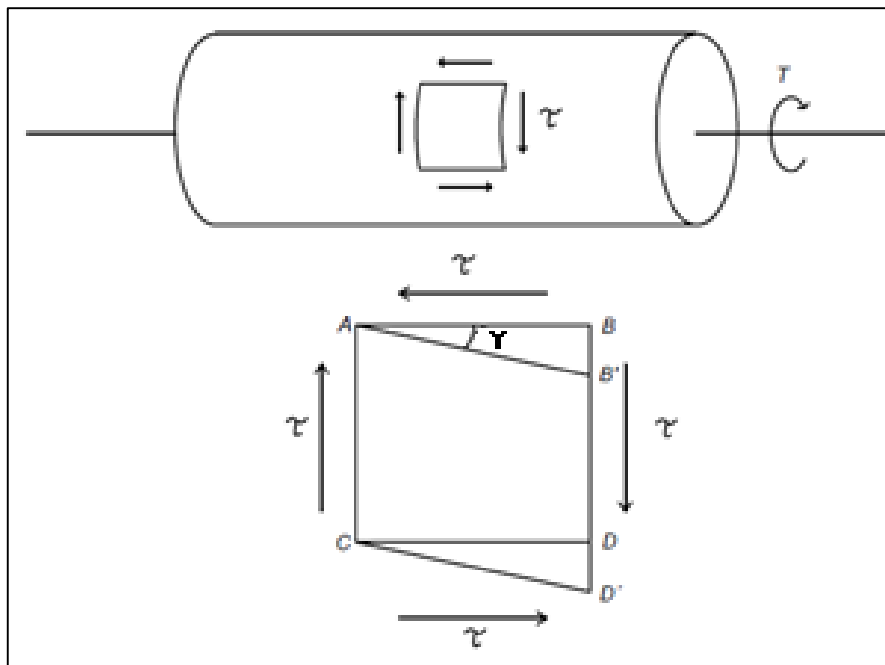
Figura 4. **Deformación en una barra de sección rectangular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

En donde  $\gamma$  es la distorsión o deformación angular causada por fuerzas cortantes, similar a la deformación longitudinal producida por fuerzas axiales. La diferencia es que un elemento sometido a fuerzas de tensión o compresión, cambia su longitud según sea el caso, mientras que un elemento sometido a una fuerza cortante no varía la longitud de sus lados, presenta un cambio de forma de rectángulo a paralelogramo como se observa en la figura 5.

Figura 5. **Deformación angular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Según la ley de Hooke dentro del límite de proporcionalidad el esfuerzo cortante se expresa como:

$$\tau = \gamma \cdot G = \frac{r \cdot \theta}{L} G$$

Como es necesario que se cumplan las condiciones de equilibrio estático, se aplican las condiciones que, el par torsor resistente debe ser igual al par torsor aplicado.

$$T = T_r = \int r \, dr = \int r (\tau \, dA)$$

Como el objetivo de este trabajo no es demostrar ecuaciones, solamente se indicará que sumando los esfuerzos correspondientes a una sección transversal, la relación entre el esfuerzo cortante en la fibra extrema y el torque aplicado puede expresarse como:

$$T = \frac{G\theta}{L} J ; \quad \theta = \frac{TL}{GJ}$$

En la tabla I se muestran los esfuerzos cortantes para secciones circulares sólidas y tubulares.

Tabla I. **Esfuerzos cortantes para secciones sólidas y tubulares**

<b>Secciones</b>	<b>Esfuerzo cortante</b>
Solidas	$\tau = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot r^3}$
Tubulares	$\tau = \frac{2 \cdot T \cdot r}{\pi(r^4 - r_1^4)}$

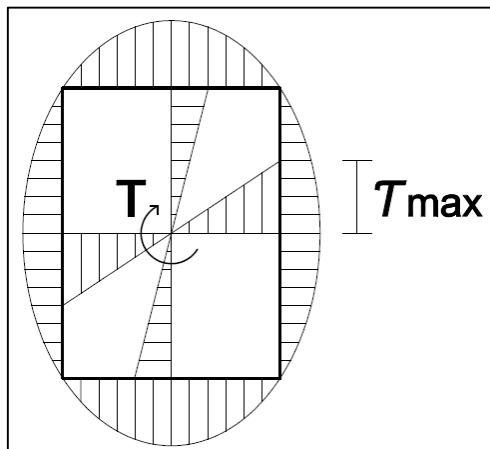
Fuente: elaboración propia.

### 1.3.3. Torsión en secciones rectangulares

Los esfuerzos de torsión en un elemento de sección transversal rectangular son más complicados de analizar que en barras de sección circular. En este caso las secciones originalmente planas, experimentan alabeo cuando se aplica un momento torsor. En la figura 6 se observa lo siguiente:

- Los esfuerzos cortantes son variables, desde cero en el centro hasta el máximo en la cara exterior.
- La capacidad de la sección para resistir la torsión depende principalmente de la magnitud de la dimensión más corta.
- Los cortantes máximos se producen en la parte central de las caras de mayor longitud.

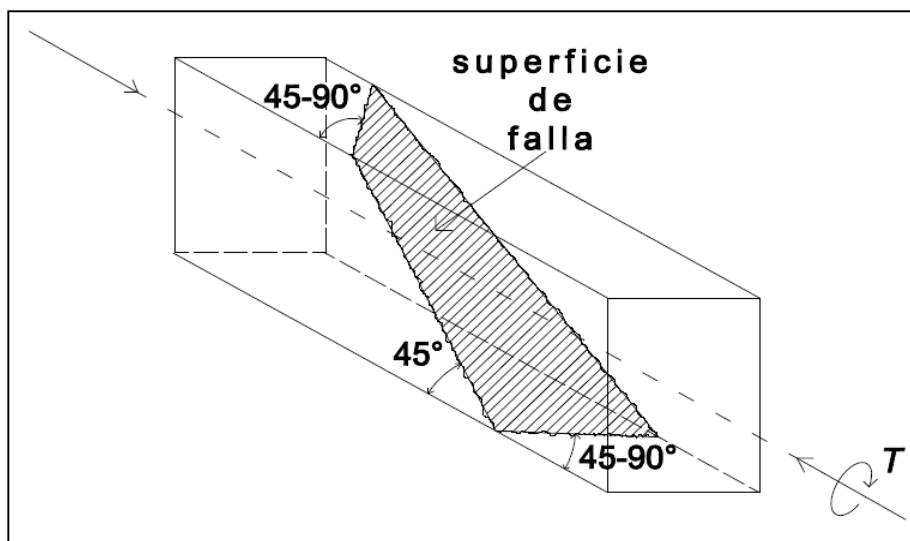
Figura 6. **Distribución del esfuerzo cortante en una sección rectangular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Si una viga de sección transversal rectangular se lleva hasta la rotura se producirá una superficie de falla diagonal, formando grietas helicoidales en todas sus caras. En las caras largas las grietas que se producen forman ángulos aproximados de 45 grados con respecto al eje longitudinal del elemento, mientras que en las caras cortas el ángulo varía entre 45 y 90 grados. La figura 7 muestra la superficie de falla formada por estas cuatro grietas.

Figura 7. Superficie de falla



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

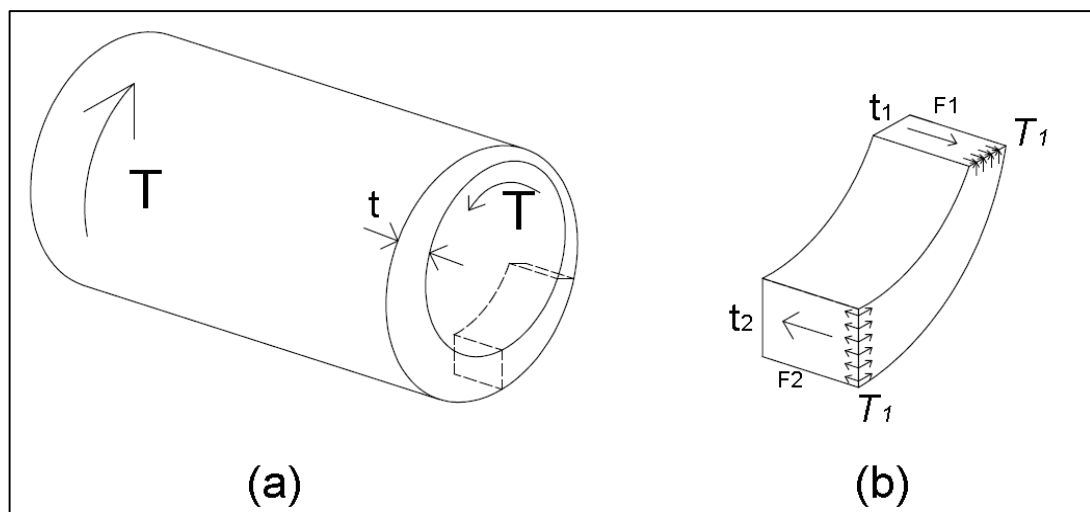
Debido a la dificultad que representa el análisis de estos elementos se han desarrollado varias teorías para poder calcular estos esfuerzos de manera sencilla. Como se verá en el capítulo 2, una de ellas es la teoría clásica de la elasticidad desarrollada por Saint-Venant, junto con su analogía de la membrana desarrollada por Prandtl. Otra alternativa es la teoría de la plasticidad representada por la analogía del montón de arena desarrollada por Nadai. Ambas teorías se aplicaron principalmente al estado de torsión pura.

### 1.3.4. Torsión en tubos de pared delgada

La torsión en elementos de sección distinta a la circular requiere métodos avanzados de cálculo, pero en el caso de tubos de pared delgada se puede obtener una solución sencilla y aproximada a la solución exacta. Cuando el espesor  $t$  de la pared de un tubo, es pequeño comparado con las dimensiones de la sección, se pueden suponer esfuerzos cortantes uniformes a través del espesor.

La teoría de resistencia de materiales indica que todo esfuerzo cortante que actúa sobre la cara de un elemento, es acompañado de otro de igual magnitud, aplicado en la cara perpendicular a la primera. Al tomar un elemento diferencial de longitud  $dL$ , como el que se muestra en la figura 8, el esfuerzo cortante  $\tau_1$  que existe en el punto de espesor  $t_1$  produce otro longitudinal de la misma magnitud, y lo mismo ocurre con  $\tau_2$  en la parte de espesor  $t_2$ .

Figura 8. Flujo de cortante en un tubo de pared delgada



Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 76.



$$F_1 = q_1 L \quad \text{y} \quad F_2 = q_2 L ; \quad q_1 L = q_2 L \quad q_1 = q_2$$

Las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  son las resultantes de estos esfuerzos cortantes longitudinales, y por condición de equilibrio son iguales. El flujo de cortante  $q$  es igual a:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \tau \, dt$$

Este es constante en todo el espesor del tubo y es independiente del espesor  $t$ . El nombre de flujo de cortante se debe a la analogía que existe con el flujo constante de un fluido incompresible que circula a través del espesor  $t$  del tubo.

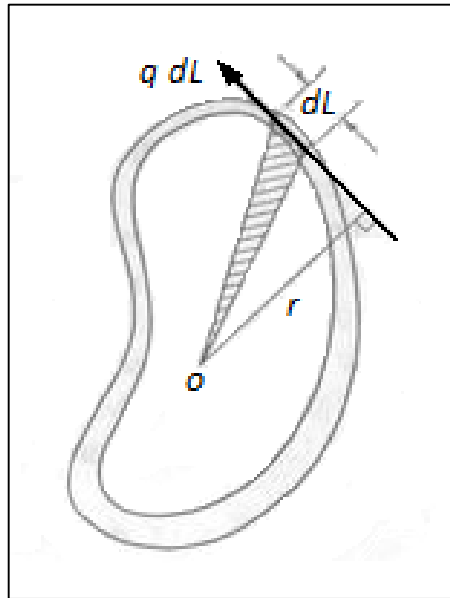
Para relacionar el flujo cortante con el par torsor aplicado  $T$ , se debe analizar la figura 9. La fuerza tangencial que actúa en una longitud  $dL$ , contribuye al par resistente con un momento diferencial respecto al punto  $O$ .

$$T = \int r \cdot F = \int r(q \, dL) = q \int (r \, dL)$$

El valor de la integral es,  $q$  veces, el doble del área encerrada por la línea media de la pared del tubo, y el esfuerzo cortante medio en cualquier punto de espesor  $t$ , viene dado por:

$$T = 2Aq ; \quad \tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2At}$$

Figura 9. **Relación del flujo cortante con el par torsor aplicado**



Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 76.

#### **1.4. Acciones que originan la torsión**

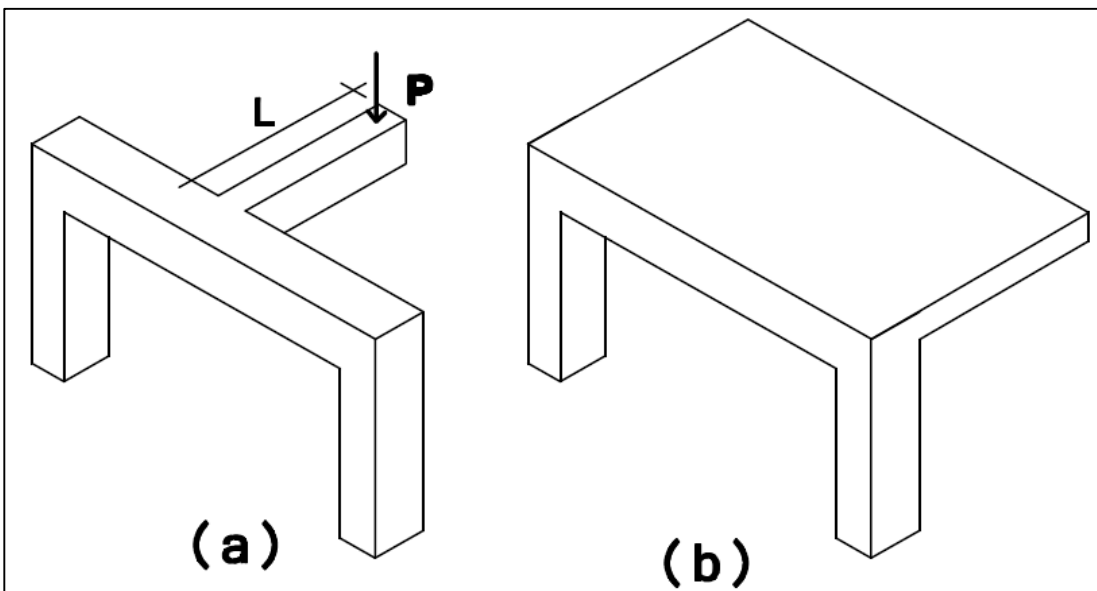
Los esfuerzos de torsión pueden aparecer como resultado de acciones primarias o secundarias.

##### **1.4.1. Torsión por equilibrio**

También se le conoce como torsión primaria, aparece cuando las cargas externas tienen que ser resistidas por elementos diseñados a torsión. En tales casos, la torsión que se requiere para mantener el equilibrio puede ser determinada mediante el uso de condiciones de equilibrio estático. Este se transforma en un problema de resistencia porque la estructura o sus componentes colapsarán si no se suministra la adecuada resistencia a torsión.

En la figura 10 se muestran dos casos típicos de torsión por equilibrio. Suponiendo que la unión viga columna es capaz de restringir la rotación, la viga será la responsable de resistir el esfuerzo torsor, de otra manera el colapso es inevitable.

Figura 10. **Torsión por equilibrio**



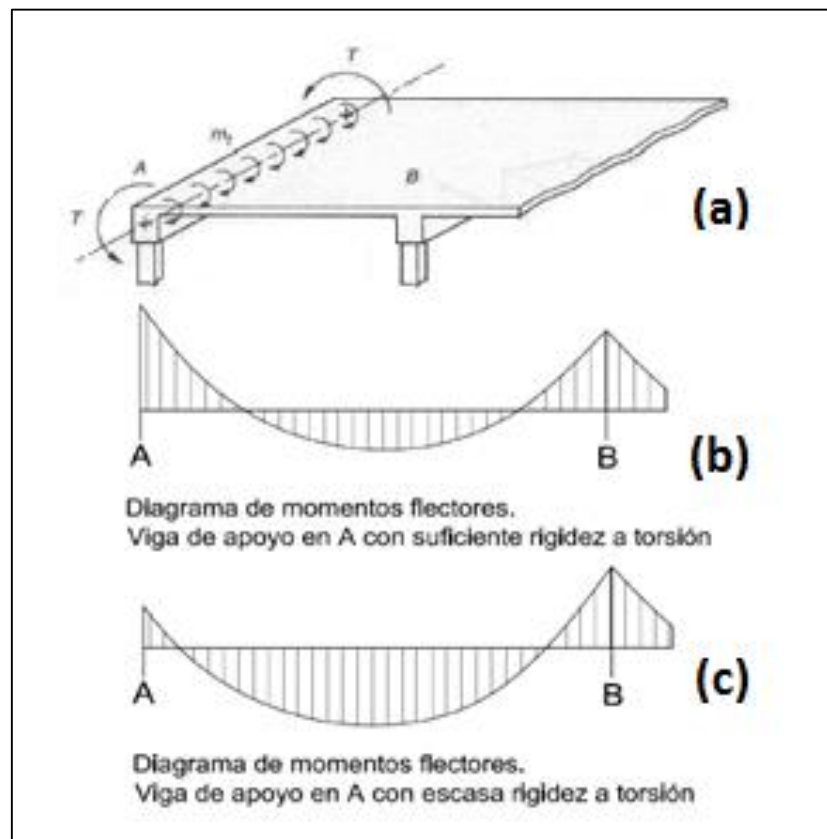
Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

#### 1.4.2. **Torsión por compatibilidad**

En este caso, el momento torsor no puede determinarse únicamente en base al equilibrio estático. La torsión surge como una acción secundaria, necesaria para satisfacer requerimientos de compatibilidad o continuidad estructural de elementos que conforman un sistema hiperestático. Si no se considera dicha continuidad en el diseño probablemente existirá un agrietamiento excesivo, pero no llegaría al caso de colapso de la estructura.

Un ejemplo de torsión secundaria son las losas monolíticas apoyadas en vigas de borde, como se muestra en la figura 11. Si la viga de borde se diseña para resistir torsión, su rigidez permitirá que los momentos torsores en la losa se parezcan a los que se dan en los apoyos rígidos. Por el contrario, si la viga de borde no se diseña adecuadamente para resistir torsión, se producirán grietas excesivas reduciendo la rigidez al giro del apoyo y los momentos flectores en el borde de la losa serán menores, acercándose al caso de un apoyo articulado.

Figura 11. **Torsión por compatibilidad**



Fuente: NILSON, Arthur. *Diseño de estructuras de concreto*. p. 223.

En la torsión por equilibrio, la magnitud del momento torsor es independiente de la rigidez de la viga, depende únicamente de las cargas que lo originan, mientras que en la torsión secundaria la magnitud del momento torsor resultante depende de la rigidez de la viga.

## **1.5. Análisis estructural de vigas bajo efectos de torsión**

El análisis estructural consiste en la determinación de los efectos producidos por fuerzas externas en la estructura, proporciona de forma general reacciones y desplazamientos y de forma específica momentos y deformaciones.

### **1.5.1. Vigas sujetas a torsión por equilibrio**

La forma en la que actúan los esfuerzos de torsión en un elemento puede variar según el uso que se le dé a la estructura, por tal motivo solo se analizan los casos más usuales.

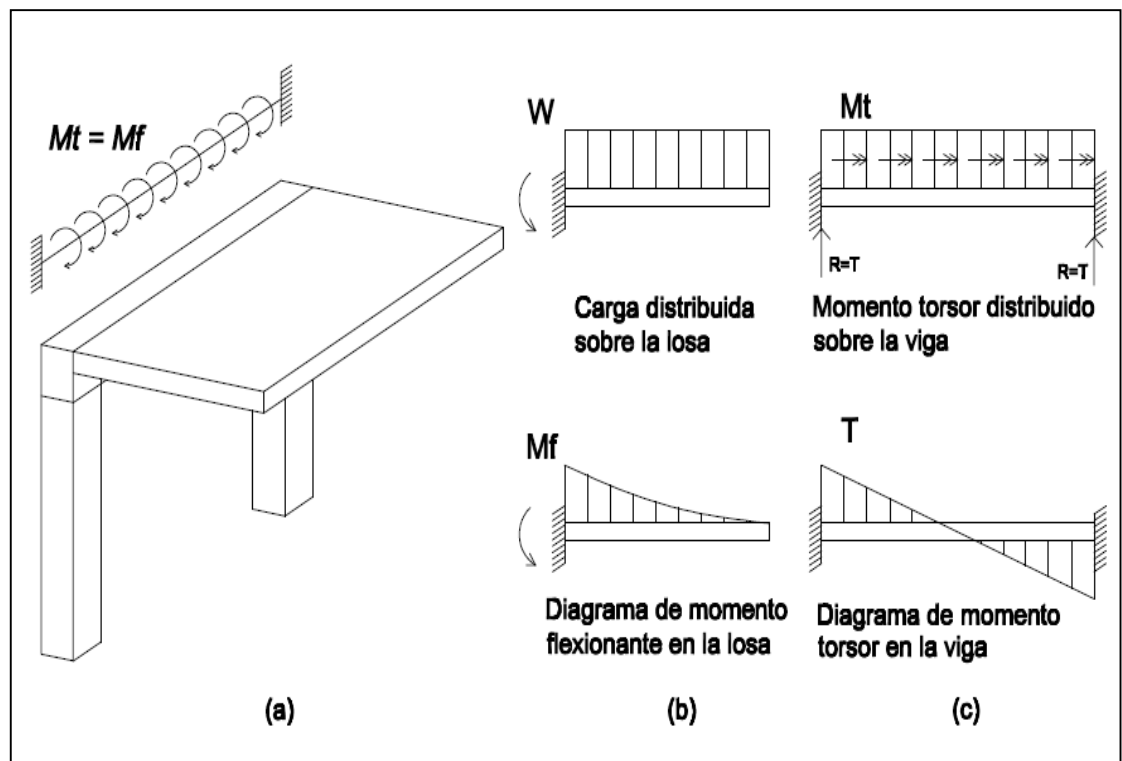
#### **1.5.1.1. Viga soportando una losa en voladizo**

La losa transmite un momento torsor distribuido en toda la longitud de la viga, como se muestra en la figura 12. Para la determinar la magnitud del momento torsor se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Obtener la carga distribuida  $w$  en la losa.
- Obtener el momento flexionante en el extremo empotrado de la losa.
- El momento flexionante calculado, es igual al momento torsor distribuido en el eje central de la viga.

- El momento torsor distribuido en la viga, es análogo a una carga distribuida cuando se hace un análisis por flexión y las reacciones debido a esta carga equivalen a los esfuerzos de torsión en los extremos del elemento.
- El diagrama de torsión es análogo al diagrama de corte cuando se hace un análisis por flexión. La variación de los esfuerzos es lineal con los máximos en los apoyos, cuando el momento torsor aplicado es uniformemente distribuido.

Figura 12. **Viga soportando una losa en voladizo**



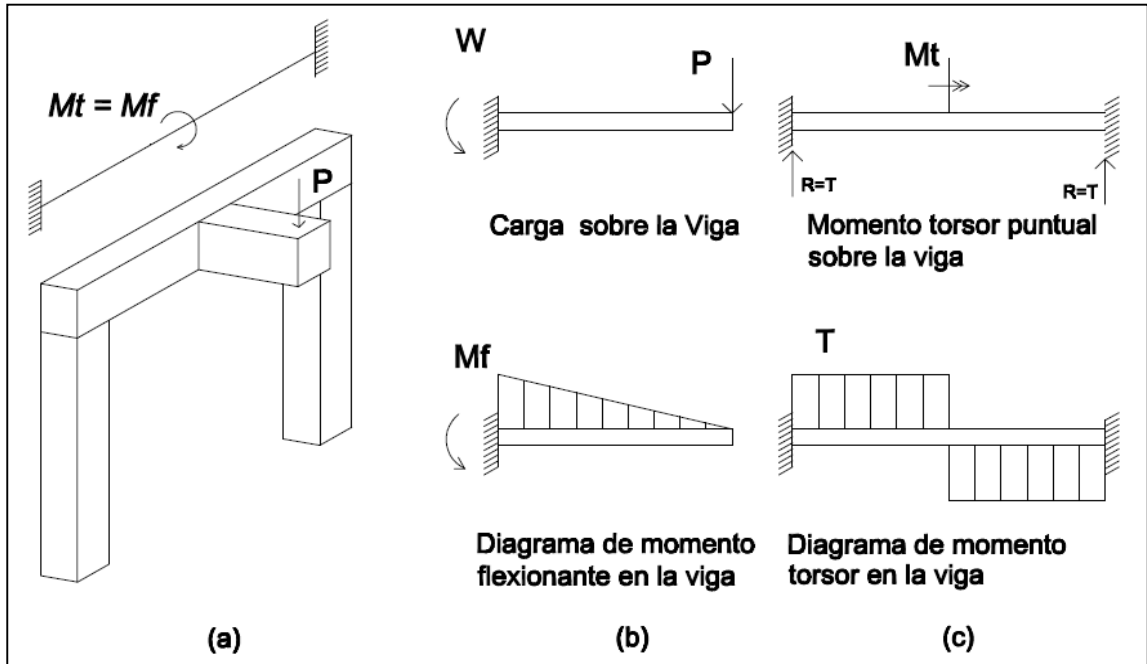
Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 1.5.1.2. Viga soportando una viga en voladizo

La viga en voladizo transmite un momento torsor puntual a la viga principal, ubicado en la unión de estas, como se muestra en la figura 13. Para determinar la magnitud del momento torsor se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Obtener la carga  $P$  de la viga en voladizo.
- Obtener el momento flexionante en el extremo empotrado de la viga en voladizo.
- El momento flexionante calculado es igual al momento torsor puntual en el eje central de la viga.
- El momento torsor puntual en la viga, es análogo a una carga puntual cuando se hace un análisis por flexión y las reacciones debido a esta carga puntual equivalen a los esfuerzos de torsión en los extremos del elemento.
- El diagrama de torsión es análogo al diagrama de corte cuando se hace un análisis por flexión. La variación de los esfuerzos es constante con los máximos en los apoyos, cuando el momento torsor aplicado es puntual.

Figura 13. **Viga principal soportando una viga en voladizo**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 1.5.1.3. Vigas de borde que soportan muros excéntricamente

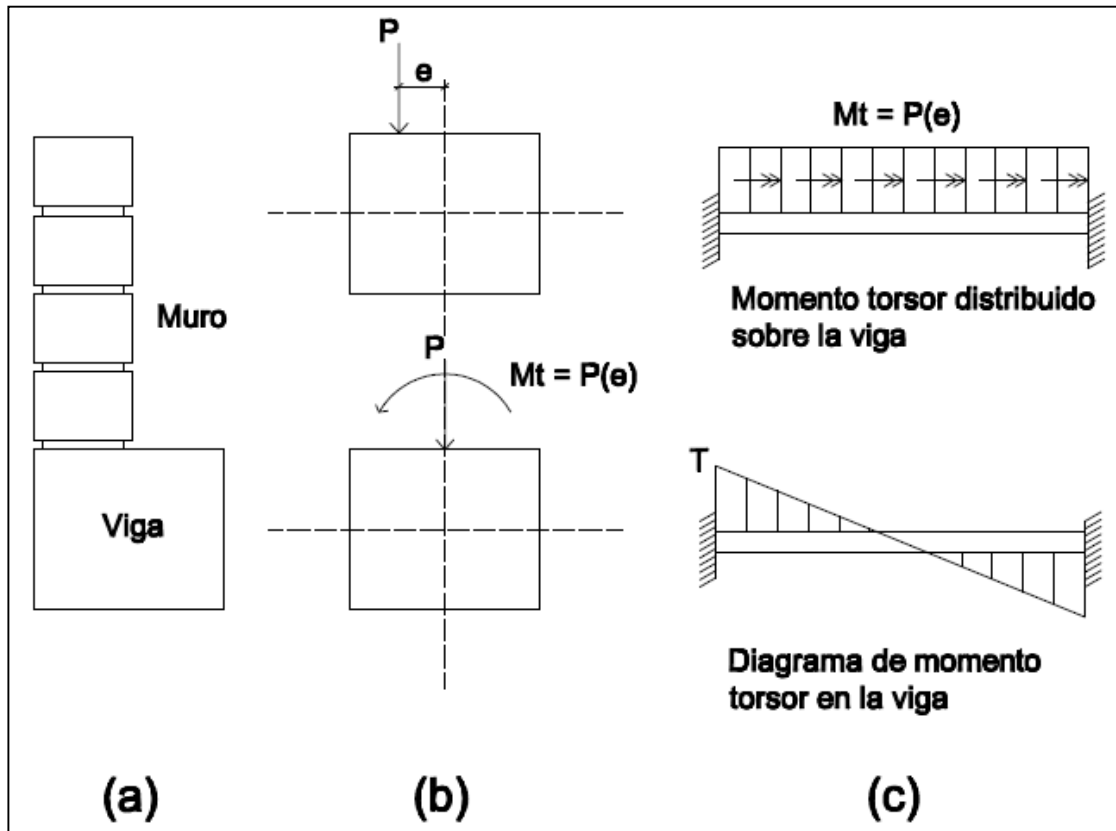
La carga que transmite el muro a la viga no coincide con el eje longitudinal de esta. Dicha carga equivale a una fuerza-par, que actúa en el eje longitudinal de la viga, como se muestra en la figura 14. El momento torsor distribuido en la longitud de la viga se calcula como:

$$T = Pe$$

Donde  $P$ , es la carga que ejerce el muro por unidad de longitud sobre la viga, y,  $e$  es la excentricidad a la que está colocado el muro.



Figura 14. **Viga soportando un muro excéntricamente**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 1.5.2. Vigas sujetas a torsión por compatibilidad

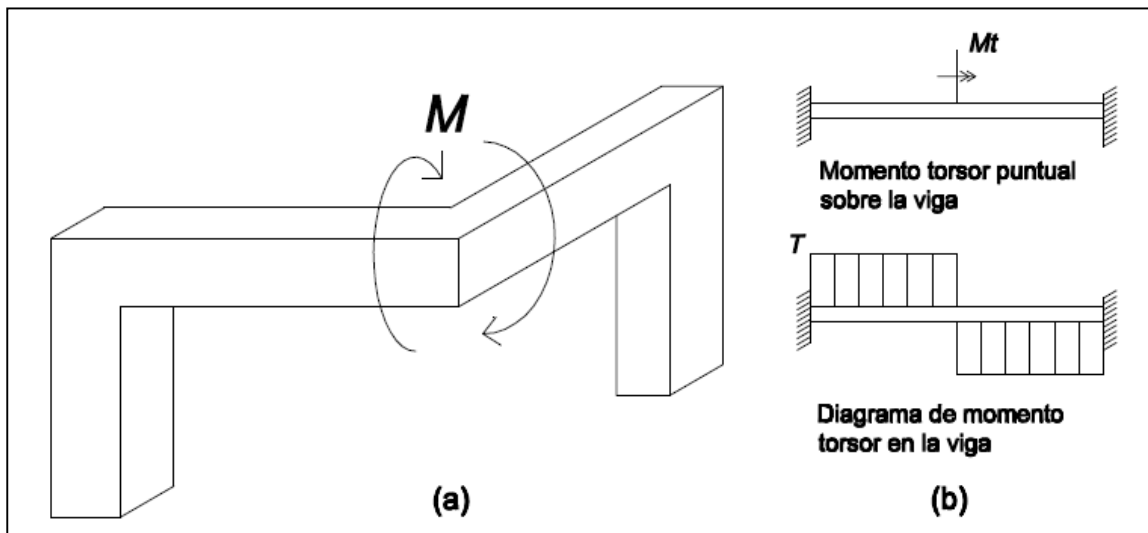
La forma en la que actúan los esfuerzos de torsión en un elemento puede variar según el uso que se le dé a la estructura, por tal motivo solo se analizan los casos más usuales.

### 1.5.2.1. Vigas en voladizo que se intersectan entre ellas mismas

Cuando las vigas se intersectan, en esquinas de edificios por ejemplo, una flexiona y la otra se torsiona, como se muestra en la figura 15. Este es un caso típico de torsión inducida por flexión. La importancia del efecto torsor depende de la facilidad que tengan las ménsulas para girar, que a su vez depende de la rigidez de las ménsulas y de las cargas que le son aplicadas.

El momento torsor inducido es puntual, situado en la intersección de las dos vigas, será mayor en ménsulas relativamente largas y con cargas importantes. El diagrama de momento torsor para estas vigas es constante.

Figura 15. Vigas que se intersectan entre ellas mismas



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### **1.5.2.2. Vigas de borde soportando una losa de piso**

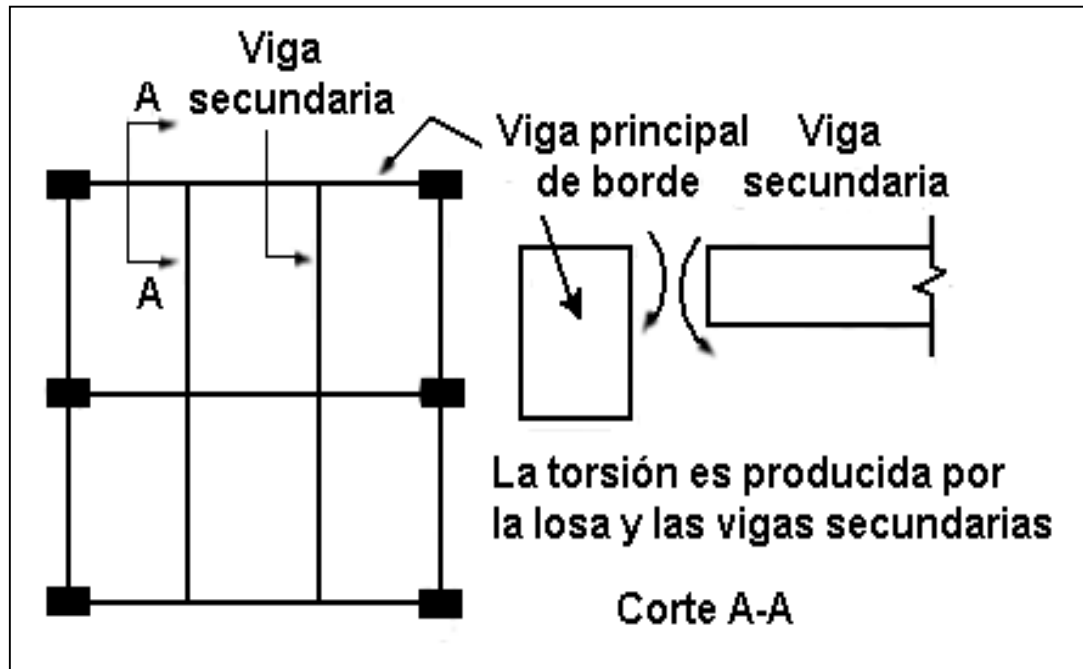
En este caso se debe estimar un valor de momento flector en el apoyo influenciado por la rigidez al giro que presente la viga de apoyo, es decir, el momento torsor que tome la viga estará limitado por su rigidez a torsión. Aunque llegue a determinarse un valor de momento torsor relacionado con el funcionamiento estructural del conjunto, en general, para el diseño se adoptarán valores de torsor que surgen de límites dados por condiciones críticas de fisuración.

En ensayos de sistemas de piso se ha observado que la falla ocurre por torsión de las vigas de borde antes que se alcance la resistencia a la flexión de las losas y de las vigas.

### **1.5.2.3. Vigas de borde soportando una viga secundaria**

Cuando una viga principal de borde forma parte de un sistema de piso se encuentran perpendiculares a ella vigas secundarias, como se observa en la figura 16. La viga de borde restringe parcialmente a las vigas secundarias contra rotación por flexión, o sea que proporciona un semiempotramiento a las vigas secundarias y recibe por condición de equilibrio, un momento torsor.

Figura 16. Vigas de borde en un sistema de piso



Fuente: GONZALES CUEVAS, Oscar. *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*. p. 216.

### 1.6. Aplicación del círculo de Mohr a esfuerzos de torsión

El círculo de Mohr, al representar gráficamente las variaciones de esfuerzos, da una idea más clara del problema que el cálculo analítico. El procedimiento consiste en considerar un elemento diferencial en el que se puedan calcular los esfuerzos producidos por los tres tipos fundamentales de cargas: axial, de flexión y torsión.

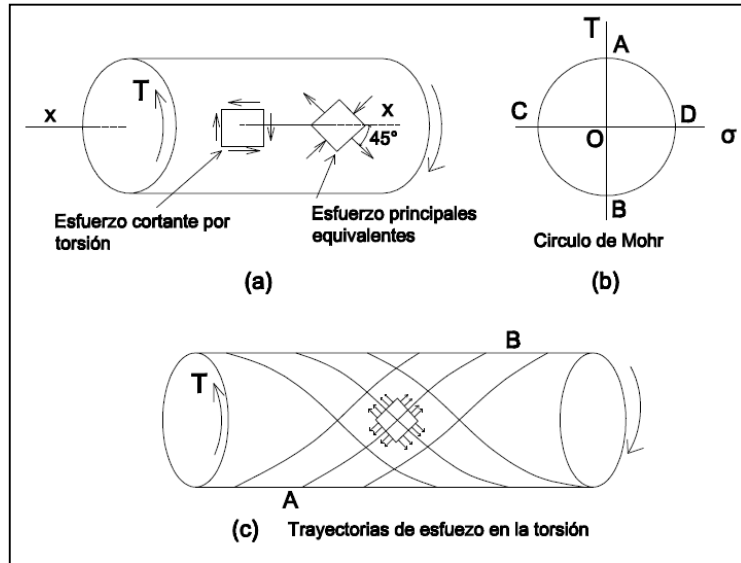
### 1.6.1. Trayectorias de esfuerzos

En la figura 17, se muestra un elemento diferencial en la superficie de un cilindro que está sometido a esfuerzos cortantes de torsión, de manera que se puede notar lo siguiente:

- El círculo de Mohr representa el estado de esfuerzos del cilindro.
- El radio OA del círculo de Mohr representa al eje X.
- La tensión máxima se da en el punto D, y el plano de máxima tensión estará a 45 grados del eje X, en sentido del reloj.
- La compresión máxima se da en el punto C, y el plano de máxima compresión estará a 45 grados del eje x, en sentido contrario del reloj.
- Las líneas en el cilindro de la parte c de la figura, siguen las direcciones de los esfuerzos principales y se llaman trayectorias de esfuerzo. Como se observa, para la torsión son hélices a 45 grados.

No se debe confundir las trayectorias de esfuerzo, con las líneas de esfuerzo cortante. Las trayectorias de esfuerzo indican la dirección de los esfuerzos principales, pero la intensidad del esfuerzo es variable a lo largo de ellas.

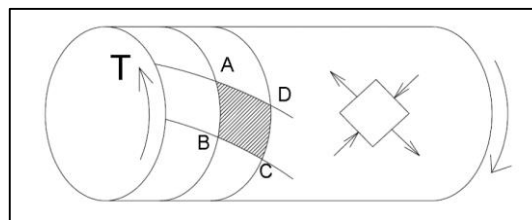
Figura 17. **Trayectoria de esfuerzos por torsión**



Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 314.

El comportamiento de un elemento diferencial en la superficie de un cilindro bajo un momento torsor; en el cual aparecen esfuerzos principales de tensión y compresión inducidos por cortante; también se puede evidenciar al observar el elemento ABCD de la figura 18. Al ocurrir la deformación la diagonal AC se ha alargado, y BD se ha acortado indicando la dirección de los esfuerzos.

Figura 18. **Esfuerzos de tensión y compresión inducidos por cortante**



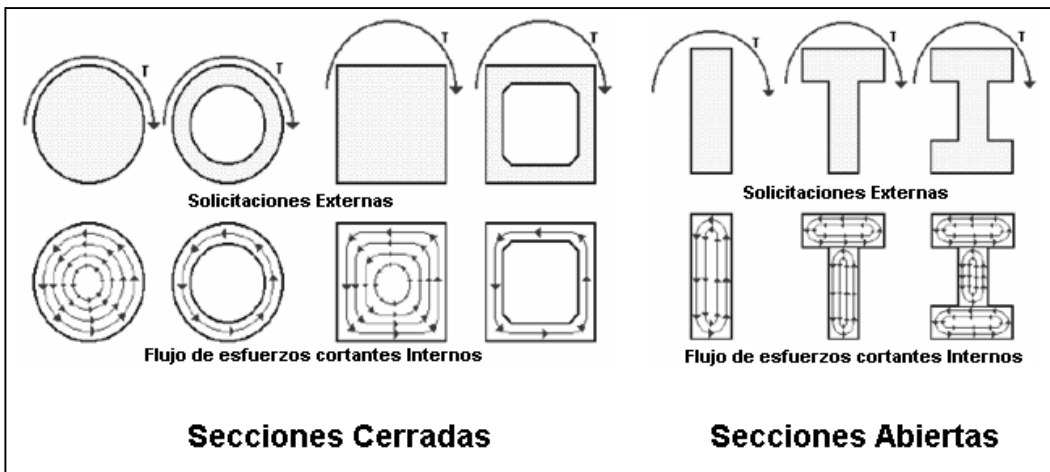
Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 315.

### 1.7. Flujo de esfuerzos cortantes diagonales debido a la torsión

Los momentos torsores que actúan sobre la sección transversal de elementos estructurales son resistidos por el flujo de esfuerzos cortantes diagonales, con dirección opuesta a las solicitaciones.

Existen secciones transversales más eficientes que otras para resistir los momentos torsores, como las secciones circulares y en menor medida las secciones cuadradas, en las que el flujo de cortante se cierra naturalmente por lo que reciben el nombre de secciones cerradas, como se muestra en la figura 19.

Figura 19. Flujo de esfuerzos en secciones cerradas y abiertas



Fuente: ROMO PROAÑO, Marcelo. *Temas de hormigón armado*. p. 429.

Las secciones rectangulares y las secciones compuestas por varios rectángulos que no permitan el cierre natural del flujo de corte son menos eficientes, recibiendo el nombre de secciones abiertas.

## **2. RESISTENCIA Y DEFORMACIÓN**

### **2.1. Torsión pura en vigas**

Este caso es poco frecuente, porque la torsión se presenta casi siempre acompañada de flexión y cortante; sin embargo, para calcular la resistencia de un elemento sujeto a torsión combinada con flexión y cortante, es conveniente conocer el comportamiento de un elemento sujeto a torsión pura.

#### **2.1.1. Análisis en concreto simple**

El comportamiento del concreto reforzado bajo torsión antes del agrietamiento se basa en el estudio del concreto simple, porque el refuerzo en esta etapa no contribuye a resistir las fuerzas.

Si un elemento de concreto simple es sometido a torsión pura y la tensión diagonal resultante excede la resistencia del concreto, se forman grietas a lo largo de líneas a 45 grados como se indicó en el capítulo 1. Estos esfuerzos de tensión diagonal producidos por la torsión son similares a los causados por el cortante, pero se presentan en todas las caras de un miembro, motivo por el cual, se suman a los esfuerzos causados por el cortante en un lado de la viga y se restan a ellos en el otro lado.

El valor del momento torsor que corresponde a la formación de esta grieta diagonal en tensión se conoce como el torque de agrietamiento  $T_{cr}$ .



### 2.1.1.1. Teoría del comportamiento elástico

Fue desarrollada por Saint Venant en 1855, permite calcular la resistencia a torsión de elementos longitudinales con sección rectangular. Esta teoría supone que al aplicar los momentos, las secciones transversales experimentan rotación y alabeo. Para una sección rectangular de concreto, el esfuerzo cortante máximo  $\tau$  se genera en la mitad del lado largo y se puede obtener de:

$$\tau = \psi_t \frac{T}{b^2 h}$$

T es el momento torsor aplicado, h y b son las dimensiones de la sección rectangular, donde  $b < h$ , y  $\psi_t$  es un factor de esfuerzos que es función de h/b, mostrado en la figura 20.

De la sección 1.2.2 se tiene que la relación carga-giro es,

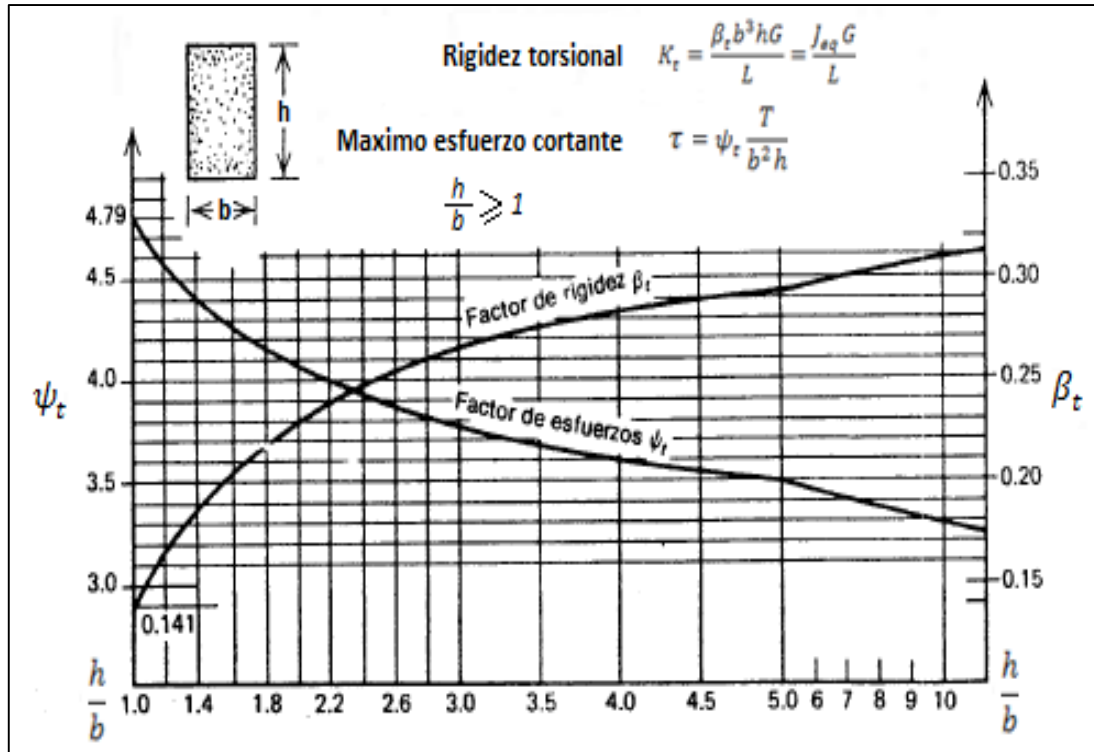
$$\frac{d\theta}{dL} = \frac{T}{G J_{eq}}$$

En este caso  $J_{eq}$ , es el momento polar equivalente de inercia para secciones rectangulares y se puede calcular como:

$$J_{eq} = \beta_t b^3 h$$

En donde  $\beta_t$ , es un coeficiente que depende de la relación de forma h/b de la sección, mostrado en la figura 20.

Figura 20. Factores de esfuerzo y rigidez para secciones rectangulares sujetas a torsión



Fuente: PARK, R.; PAULAY, T. *Estructuras de concreto reforzado*. p. 361.

De los principios de elasticidad es posible aproximar el módulo de rigidez o módulo de elasticidad en cortante para el concreto a partir de la relación,

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} ; \quad E_c = 4700\sqrt{f'_c}$$

En donde  $E_c$  es el módulo de Young para el concreto de peso normal en el sistema internacional, y  $\mu$  es la relación de Poisson que varía de 0,16 a 0,30 para concreto de peso normal.

#### **2.1.1.1.1. Rigidez torsional**

La rigidez torsional de un elemento de longitud  $L$ , se define como la magnitud del momento torsor que se requiere para ocasionar un giro unitario de torsión en su longitud, y se expresa como:

$$K_t = \frac{J_{eq}G}{L}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación para la rigidez a flexión de un miembro con extremo lejano restringido, definida como el momento necesario para provocar un giro unitario, y se expresa como:

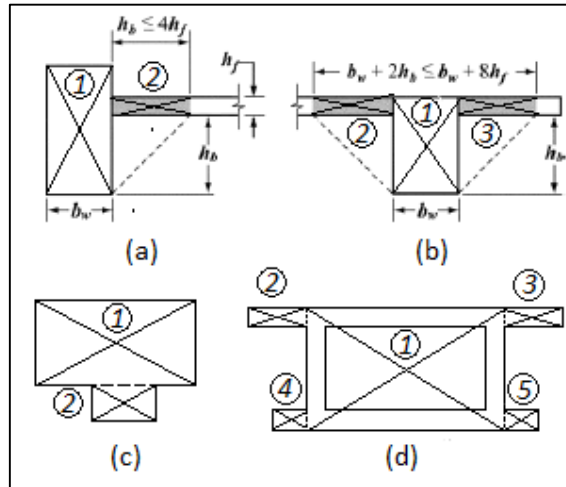
$$K_f = \frac{4EI}{L}$$

#### **2.1.1.1.2. Secciones compuestas**

El comportamiento en secciones compuestas es más complejo, pero una aproximación aceptable para el diseño es suponer una división de la sección en sus rectángulos constituyentes.

Según la sección 13.2.4 del código ACI, para elementos monolíticos o totalmente compuestos, una viga incluye una porción de la losa situada a cada lado de la viga, a una distancia igual a la proyección de la viga hacia arriba o hacia abajo de la losa, la que sea mayor, pero no menor a 4 veces el espesor de la losa. Por lo que la viga de un sistema de piso, debe ser analizada como una sección compuesta. En la figura 21 se muestran algunos casos de secciones compuestas llenas y un caso de sección hueca.

Figura 21. **Subdivisión de secciones compuestas**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Para el cálculo se supone que cada rectángulo resiste una porción de la torsión externa en proporción a su rigidez torsional. El momento torsor y esfuerzo cortante torsional en un rectángulo específico de la sección, se calcula como:

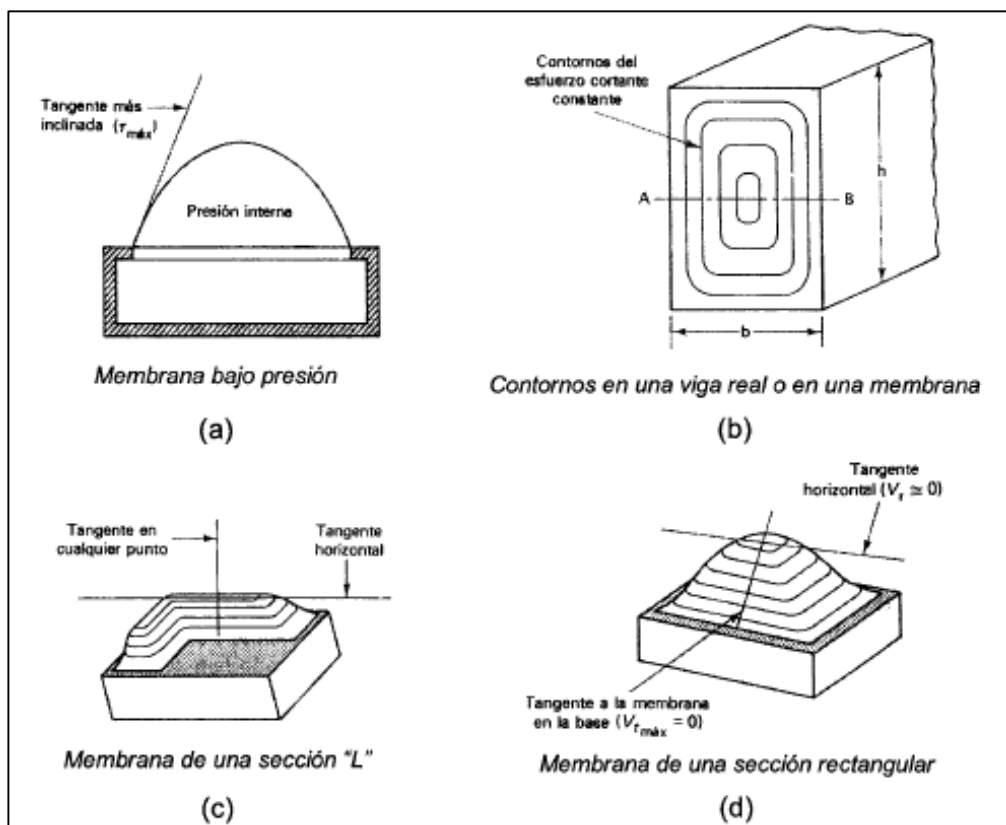
$$T_i = \frac{K_{ti}}{\sum_{i=1}^n K_{ti}} T; \quad \tau_i = \psi_{ti} \frac{T_i}{b_i^2 h_i}$$

### 2.1.1.1.3. Analogía de la membrana de Prandtl

En 1903 el ingeniero L. Prandtl demostró el significado físico de la teoría de Saint- Venant mediante el modelo de la analogía de la membrana. Este modelo establece la relación entre la deformada de la membrana cargada y la distribución de los esfuerzos de torsión en una barra. De la figura 22 se puede observar lo siguiente:

- La tangente a la línea de contorno en cualquier punto de la deformada, indica la dirección del esfuerzo cortante en la sección transversal.
- La pendiente máxima de la membrana en cualquier punto, es proporcional a la magnitud del esfuerzo cortante  $\tau$  en el punto correspondiente al miembro real.
- El momento de torsor que actúa en el miembro real, es proporcional a dos veces el volumen debajo de la membrana deformada.

Figura 22. **Analogía de la membrana en torsión pura**



Fuente: NAWY, Edgar. *Concreto reforzado*. p. 214.

La parte b de la figura 22 muestra que el esfuerzo cortante de torsión es inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de contorno, es decir, cuanto más cerca estén las líneas de contorno, mayor será el esfuerzo. Comprobando que el esfuerzo cortante máximo de torsión ocurre en la mitad del lado más largo de la sección rectangular.

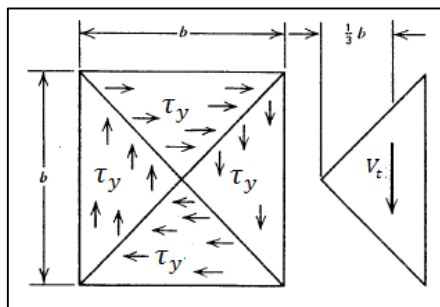
### 2.1.1.2. Teoría del comportamiento plástico

Cuando se alcanza la fluencia a corte sobre toda la sección transversal de un material, el momento torsor en el rango plástico puede ser evaluado fácilmente.

En la figura 23 se observa una sección transversal cuadrada, donde la fluencia por cortante  $\tau_y$ , se ha alcanzado en los todos los cuadrantes, entonces la fuerza cortante total  $V_t$  que actúa en un cuadrante y la torsión total resistida se obtiene de:

$$V_t = b \frac{b}{2} \tau_y = \frac{b^2}{2} \tau_y; \quad T = 4V_t \frac{b}{3} = \frac{2}{3} b^3 \tau_y$$

Figura 23. Fluencia torsional de una sección cuadrada



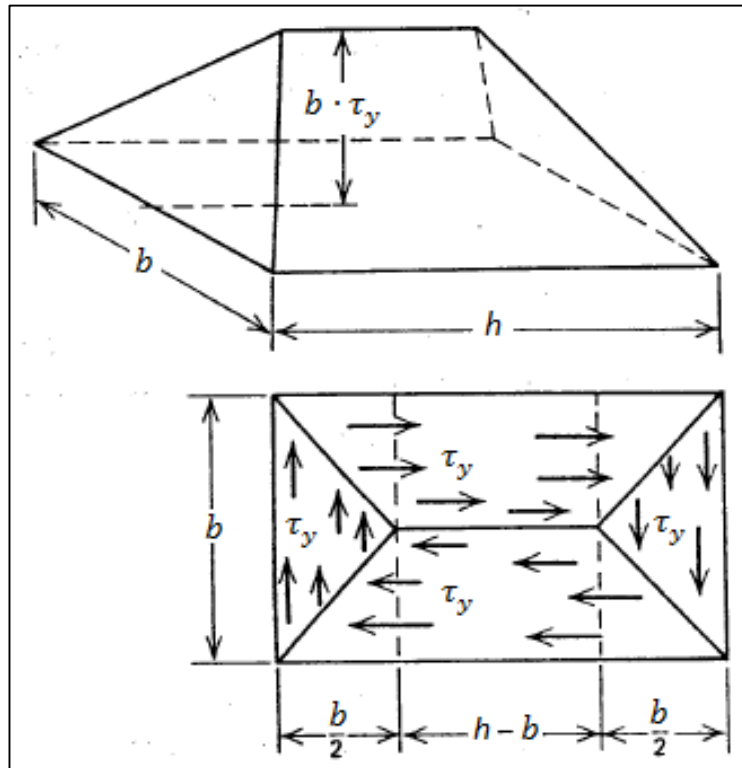
Fuente: PARK, R.; PAULAY, T. *Estructuras de concreto reforzado*. p. 362.

### 2.1.1.2.1. Analogía del montón de arena de Nádai

La analogía del montón de arena fue desarrollada por Nádai, indica que el volumen de arena colocada sobre la sección transversal dada es proporcional a la torsión plástica soportada por esta sección. La superficie sobre la sección rectangular tiene una altura igual al producto del lado corto de la sección por el cortante de fluencia, como se muestra en la figura 24.

$$\text{Altura} = b \cdot \tau_y$$

Figura 24. Analogía del montón de arena de Nádai



Fuente: PARK, R.; PAULAY, T. *Estructuras de concreto reforzado*. p. 363.

En donde  $b$ , es el lado corto de la sección transversal y el volumen de la pirámide sobre la sección cuadrada de la figura 23 es:

$$T = b^2 \frac{b\tau_y}{3} = \frac{b^3}{3} \tau_y$$

El volumen del montón de arena sobre la sección rectangular de la figura 24 es:

$$T = b^2 \frac{b\tau_y}{3} + (h - b)b \frac{b\tau_y}{3} = \frac{b^2}{2} \left( h - \frac{b}{3} \right) \tau_y$$

Despejando para  $\tau_y$  se tiene,

$$\tau_y = \psi_{ty} \frac{T}{b^2 h} ; \quad \psi_{ty} = \frac{2}{1 - x/3y}$$

La diferencia entre esta ecuación y la predicha por el análisis elástico es el factor  $\psi_{ty}$ . Como el concreto no es lo suficientemente dúctil, especialmente en tensión, para que se pueda dar una redistribución plástica perfecta de los esfuerzos cortantes, la resistencia torsional última de una sección de concreto simple estará entre los valores predichos por el análisis elástico y el análisis plástico.

### 2.1.1.3. Teoría de Hsu

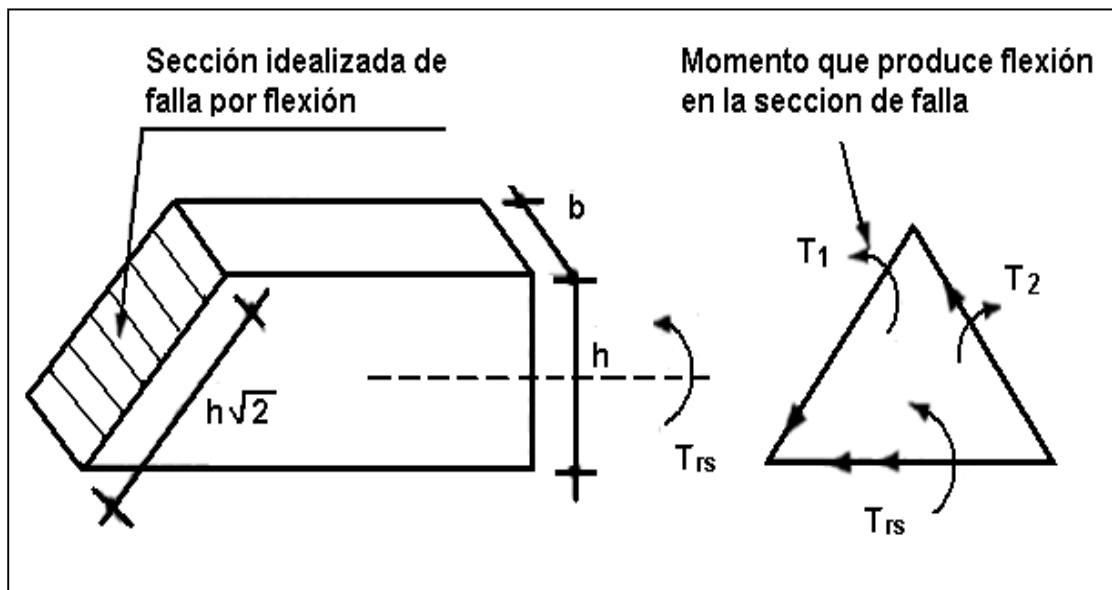
La teoría desarrollada por el Doctor Hsu, se basa en el mecanismo de falla descrito en la sección 1.2.3. Como se verá más adelante estos principios se aplican a la teoría de la flexión asimétrica, para evaluar la resistencia a torsión en concreto reforzado. Esta teoría indica lo siguiente:



- La falla ocurre por flexión en la superficie que se muestra en la figura 25.
- La superficie de falla se idealiza por un plano inclinado a 45 grados con respecto al eje longitudinal del elemento.
- Se supone que la falla se producirá por una componente del momento torsor  $T_2$ , que produce flexión en la sección de la falla.
- La resistencia a torsión puede calcularse a partir de la resistencia a flexión, y puede expresarse con la ecuación para la flexión:

$$M_f = f_{cr}S$$

Figura 25. Teoría de Hsu de falla por flexión



Fuente: GONZALES CUEVAS, Oscar. *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*. p. 224.

El momento  $M_f$  es la componente  $T_2$  que produce flexión en el plano inclinado; por lo tanto,

$$M_f = T_2 = T_{cr} \cos 45^\circ = T_{cr} / \sqrt{2}$$

$S$  es el módulo de sección del plano inclinado. La base de este plano es  $h\sqrt{2}$ , y la altura es  $b$ . Al sustituir las ecuaciones para  $S$  y  $M_f$  se obtiene:

$$S = \frac{h\sqrt{2}b^2}{6} ; \quad T_{cr} = \frac{b^2h}{3} f_{cr}$$

En el plano en que se inicia el agrietamiento existen además de esfuerzos normales de tensión, esfuerzos normales de compresión perpendiculares a los de tensión y de igual magnitud. Experimentalmente se ha observado que para este estado de esfuerzos biaxiales, la resistencia a tensión del concreto se reduce en 15 por ciento, aproximadamente. La ecuación para el torque de agrietamiento se modifica a:

$$T_{cr} = \frac{b^2h}{3} (0,85f_{cr})$$

Si se quiere expresar en términos de la resistencia a compresión del concreto  $f'_c$ , que es el usado normalmente, es necesario conocer la relación única entre estos valores. En forma aproximada se puede establecer la siguiente relación:

$$f_{cr} = 0,64\sqrt{f'_c} ; \quad T_{cr} = 0,18b^2h\sqrt{f'_c}$$

### 2.1.2. Análisis en concreto reforzado

Los miembros de concreto reforzado sometidos a fuerzas de torsión mayores a  $T_{cr}$ , pueden fallar repentinamente si no están provistos de refuerzo por torsión. Colocar este refuerzo no cambia la magnitud de la torsión que causa las grietas diagonales, pero impide que los miembros pierdan su integridad, por lo que pueden resistir momentos de torsión considerables sin fallar. Pruebas experimentales han demostrado que son necesarias barras longitudinales y estribos cerrados para interceptar las numerosas grietas por tensión diagonal que ocurren en todas las caras de las vigas sometidas a torsión.

La inclusión del refuerzo longitudinal y transversal introduce nuevos conceptos en el conjunto de fuerzas y momentos que actúan en la sección de una viga. El momento nominal que resistirá la viga será igual a:

$$T_n = T_c + T_s$$

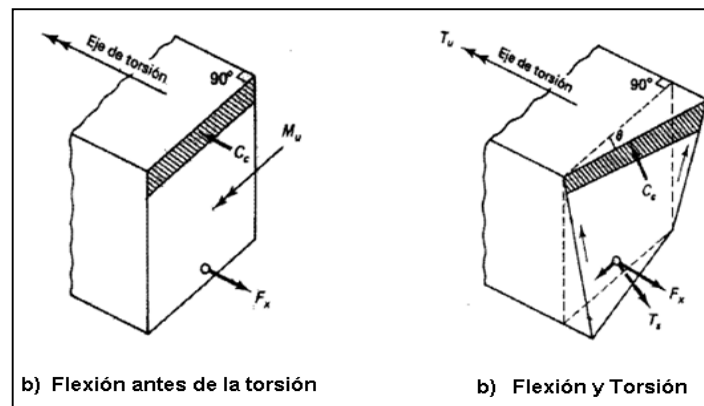
Para evaluar la contribución del refuerzo longitudinal y transversal existen dos teorías con las que se obtienen buenas aproximaciones.

- Teoría de la flexión asimétrica: se basa en el análisis de las deformaciones que ocurren en las secciones transversales de vigas sujetas a torsión más flexión.
- Teoría de la analogía de la armadura en el espacio: es la que actualmente utiliza el Código ACI.

### 2.1.2.1. Teoría de la flexión asimétrica

Inicialmente fue propuesta por Lessig en 1959, posteriormente fue desarrollada por Hsu en 1968. Esta teoría parte de la hipótesis que todo tipo de sección ya sea sólida o hueca, puede ser analizada como si fuera sólida, y establece lo siguiente:

Figura 26. Flexión asimétrica debida a la torsión



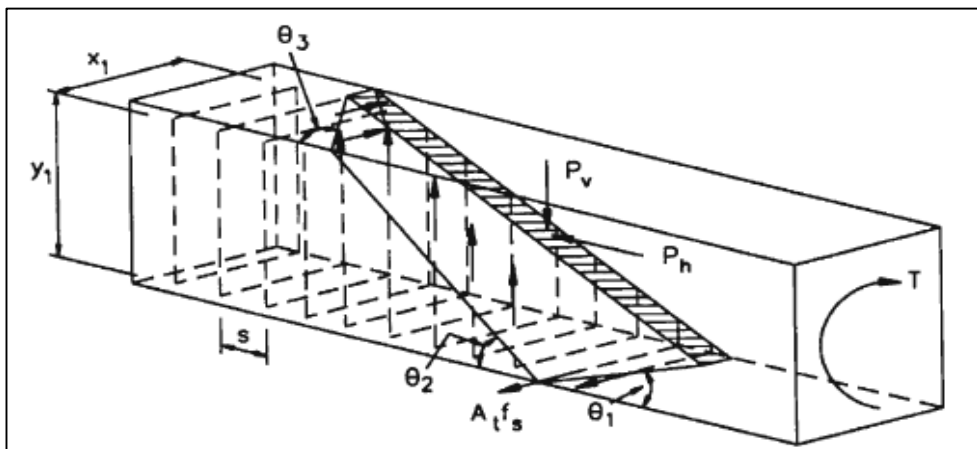
Fuente: NAWY, Edgar. *Concreto Reforzado*. p. 221.

- La superficie de falla de la sección transversal de una viga sujeta a momento flector  $M_f$ , permanece plana después de la flexión, como se muestra en la figura 26.
- Si se aplica un momento torsor  $T$ , se comenzaran a desarrollar grietas en las tres caras de la sección transversal de la viga y esfuerzos de compresión en algunas partes de la cuarta cara a lo largo de la viga.
- Conforme se alcance el estado límite de falla debido a la torsión, resultara una superficie de falla inclinada debido a  $M_f$  y  $T$ .

- El eje neutro de la superficie inclinada y la zona de compresión, tendrán un ángulo  $\theta$  respecto de las secciones transversales originalmente planas, como se muestra en la parte b de la figura 26.
- Antes del agrietamiento, el refuerzo no tiene mayor contribución a la rigidez torsional de la sección.
- Después del agrietamiento se reduce la rigidez de la sección, pero su resistencia a la torsión aumenta dependiendo de la cantidad y distribución del refuerzo.

En la figura 27 se muestra una viga de concreto armado con sección transversal rectangular y refuerzo en el alma constituido por estribos, El momento torsor aplicado es resistido por los brazos horizontales y verticales del estribo, el número de estribos que atraviesan la falla se puede obtener de un análisis de equilibrio estático, los resultados se muestran en la tabla II.

Figura 27. **Fuerzas que se generan a través de las fisuras**



Fuente: HARMSEM, Teodoro. *Diseño de estructuras de concreto armado*. p. 175.

Tabla II. **Análisis para el acero transversal**

Brazos del estribo	T	n	K	T
Horizontal	$T_h = A_t f_s n_h y_1$	$n_h = \frac{x_1 \cot \theta_1}{s}$	$K_1 = \frac{f_s}{f_y} \cot \theta_1$	$T_h = K_1 A_t f_y \frac{y_1 x_1}{s}$
Vertical	$T_v = A_t f_s n_v x_1$	$n_v = \frac{y_1 \cot \theta_2}{s}$	$K_2 = \frac{f_s}{f_y} \cot \theta_2$	$T_v = K_2 A_t f_y \frac{y_1 x_1}{s}$

Fuente: elaboración propia.

El momento torsor total resistido por los estribos es la suma del torque que resiste el brazo vertical y el brazo horizontal del estribo.

$$T_s = \alpha_t A_t f_y \frac{x_1 y_1}{s}$$

El factor  $\alpha_t$  es la suma de  $K_1$  y  $K_2$ , es un valor que se obtiene experimentalmente y se puede aproximar a:

$$\alpha_t = 0,66 + \frac{0,33 y_1}{x_1} \leq 1,50$$

Como se puede observar en la figura 27, la componente vertical  $P_v$  esta en equilibrio con la fuerza de los estribos, pero estos no resisten la componente horizontal  $P_h$ , por este motivo es necesario el uso de refuerzo longitudinal.

Asumiendo que el elemento está sometido a torsión pura y las grietas se forman en el concreto a 45 grados del eje longitudinal, se iguala el volumen de refuerzo longitudinal con el volumen de refuerzo transversal, obteniendo:

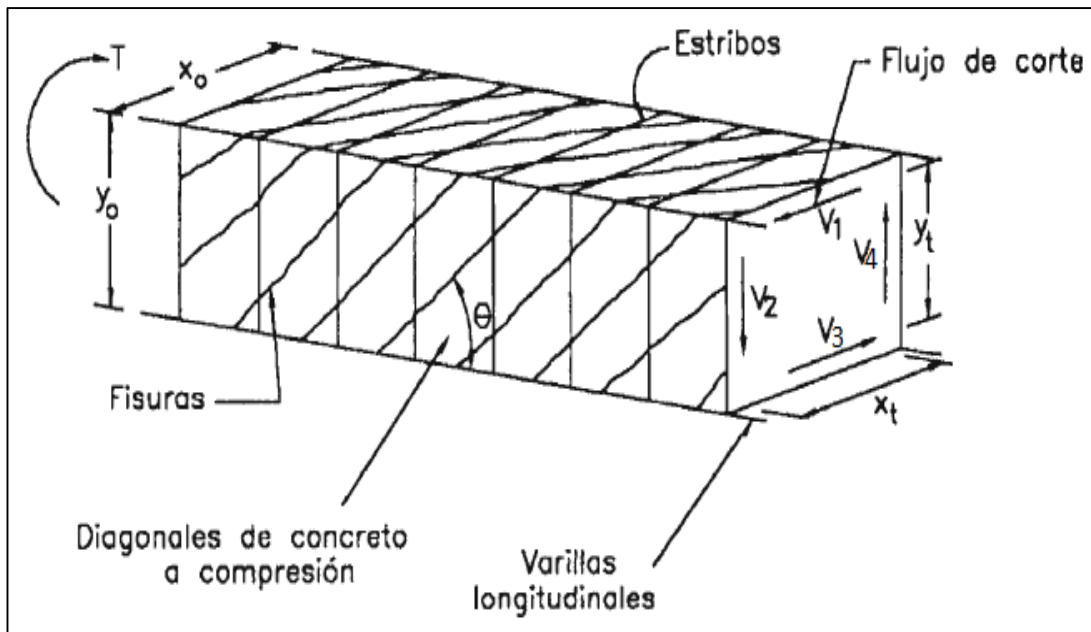
$$A_L = 2A_t \left( \frac{x_1 + y_1}{s} \right)$$

### 2.1.2.2. Teoría de la analogía de la armadura en el espacio

Al contrario de la teoría de la flexión asimétrica, la teoría de la armadura en el espacio asume que los elementos de sección sólida y los de sección hueca, pueden analizarse como si fueran de sección hueca.

La teoría de la armadura en el espacio idealiza el elemento sometido a torsión como una armadura tridimensional similar a la mostrada en la figura 28. La estructura está conformada por varillas longitudinales, estribos y diagonales de concreto a compresión.

Figura 28. Analogía de la armadura en el espacio



Fuente: HARMSEM, Teodoro. *Diseño de estructuras de concreto armado*. p. 178.

En la sección 1.2.4 se obtuvo que el esfuerzo cortante por torsión en un tubo de pared delgada es igual a:

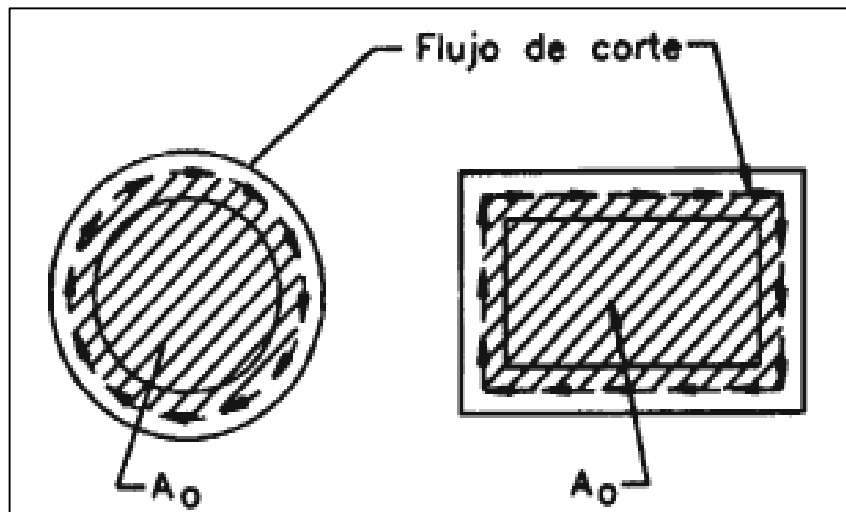
$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A_0t}$$

El término que difiere en este caso es el área de la sección  $A_0$  que es el área encerrada en una frontera imaginaria para secciones llenas, como se muestra en la figura 29 el espesor  $t$  se asume como:

$$t = \frac{A}{P}$$

$A$  y  $P$ , es el área y el perímetro respectivamente de la sección sólida

Figura 29. **Significado del parámetro  $A_0$**



Fuente: HARMSEM, Teodoro. *Diseño de estructuras de concreto armado*. p. 178.



La resistencia a las fuerzas cortantes que actúan en la sección transversal del elemento de la figura 28 puede representarse como la suma de las contribuciones de cada pared del tubo equivalente. Estas fuerzas se estiman a partir de las expresiones:

$$V_1 = V_3 = (\tau t)x_t = \frac{T x_t}{2A_0}; \quad V_2 = V_4 = (\tau t)y_t = \frac{T y_t}{2A_0}$$

Donde  $x_t$  y  $y_t$  es la distancia horizontal y vertical, entre las resultantes verticales y horizontales del esfuerzo cortante. En la figura 30 se muestra el diagrama de cuerpo libre de dos cortes de la pared lateral izquierda del elemento de la figura 28. En el primero se descompone la fuerza  $V_2$  en sus componentes,  $D_2$  y  $N_2$ .

$$D_2 = f_{cd} y_0 \cos\theta \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{V_2}{\sin\theta} \Rightarrow f_{cd} = \frac{T}{2A_0 t \cos\theta \sin\theta}$$

Donde  $f_{cd}$ , es el esfuerzo de compresión en la diagonal de concreto.

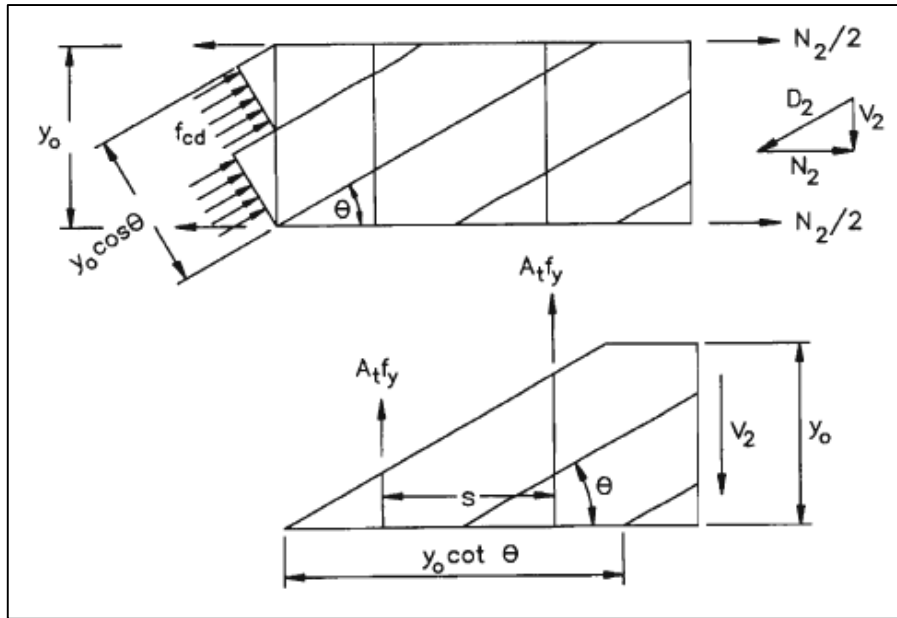
La componente  $N_2$  es equilibrada por la fuerza en las varillas longitudinales. Considerando la armadura completa se tiene:

$$N = A_L f_y = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) = (V_1 \cot\theta + V_2 \cot\theta + V_3 \cot\theta + V_4 \cot\theta)$$

Combinando esta expresión con la anterior se obtiene:

$$A_L f_y = \frac{P_h T \cot\theta}{2A_0}; \quad T = \frac{2A_0 A_L f_y}{P_h \cot\theta}; \quad P_h = 2(x_0 + y_0)$$

Figura 30. Diagramas de cuerpo libre de las fuerzas que actúan en la analogía de una armadura en el espacio



Fuente: HARMSEM, Teodoro. *Diseño de estructuras de concreto armado*. p. 179.

La fuerza en los estribos se determina empleando el segundo corte mostrado en la figura 30. El número de estribos que atraviesan el corte es:

$$n_2 = \frac{y_0 \cot \theta}{s} ; \quad V_2 = A_t f_{yt} n_2$$

Combinando las 3 ecuaciones anteriores para  $D_2$ ,  $N$  y  $V_2$ , se obtiene la fuerza en los estribos como:

$$A_t f_{yt} = \frac{T s}{2 A_o \cot \theta} ; \quad T = \frac{2 A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta$$

## **2.2. Teoría de flexión más torsión**

Para determinar si el momento flexionante disminuye la resistencia a torsión, muchos autores han efectuado numerosos ensayos en vigas de concreto armado expresando los resultados en forma de diagramas de interacción flexión-torsión. Este comportamiento es posible analizarlo con la analogía de la armadura en el espacio.

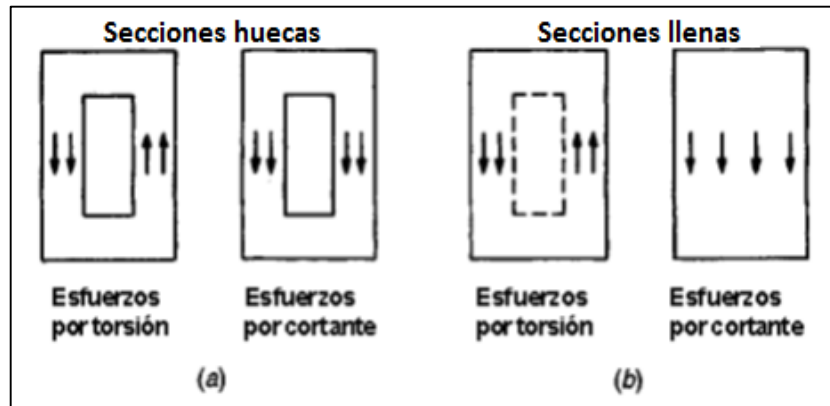
Al analizar el diagrama de fuerzas de la figura 30, se encontró que en la sección transversal actuaba una fuerza longitudinal  $N$  que es resistida por el acero longitudinal. Si actúa un momento flexionante junto con el torsionante, el primero produce tensiones en una cara de la viga y compresiones en la cara opuesta. En la cara donde se producen tensiones, el acero longitudinal requerido por flexión debe sumarse al requerido por torsión, mientras que en la cara opuesta, las fuerzas de compresión producidas por la flexión permiten reducir el acero longitudinal por torsión.

## **2.3. Teoría de torsión más cortante**

La fuerza cortante no puede existir en un elemento a menos que exista también momento flector, por lo que la interacción torsión-cortante se estudia siempre con la acción simultáneamente de momento flector.

Tanto la fuerza cortante como el momento torsor producen esfuerzos cortantes en la viga; en un lado se suman y en el otro se restan, como se muestra en la figura 31.

Figura 31. Adición de esfuerzos por torsión y cortante



Fuente: NILSON, Arthur. *Diseño de estructuras de concreto*. p. 230.

El esfuerzo cortante nominal producido por una fuerza de corte  $V$  y el esfuerzo cortante producido por la torsión son:

$$\tau_v = \frac{V}{bd} ; \quad \tau_t = \frac{T}{2A_0t}$$

Para secciones huecas estos esfuerzos deben sumarse en un lado del elemento. Para una sección transversal de concreto fisurada asumir:

$$A_0 = 0,85A_{oh} \text{ y } t = \frac{A_{oh}}{P_h}$$

El esfuerzo cortante máximo puede expresarse como:

$$\tau = \tau_v + \tau_t = \frac{V}{bd} + \frac{TP_h}{1,7A_{oh}^2}$$

Donde  $A_{oh}$ , es el área encerrada por el eje del estribo y  $P_h$ , es el perímetro del eje del estribo.

Para un elemento con una sección sólida,  $\tau_t$  se distribuye principalmente alrededor del perímetro, tal como lo representa la analogía del tubo hueco, pero toda la sección transversal contribuye a soportar  $\tau_v$ . Esto muestra que los esfuerzos torsionantes se dan en la superficie de la viga.

Resultados experimentales demuestran que la ecuación para secciones huecas es algo conservadora para secciones sólidas, se puede lograr una mejor representación del esfuerzo cortante máximo mediante la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los esfuerzos cortantes nominales como:

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{V}{bd}\right)^2 + \left(\frac{TP_h}{1,7A_{oh}^2}\right)^2}$$

### **3. DISEÑO A TORSIÓN SEGÚN DISPOSICIONES DEL ACI 318-08**

#### **3.1. Antecedentes**

En 1971 el código introduce por primera vez los requisitos para el diseño a torsión. Se realizó un cambio de formato en el documento de 1977 y este permaneció sin modificaciones hasta 1989. El código en su primera generación de requisitos se aplicaba solamente a elementos de concreto armado no pretensados y el procedimiento de diseño era análogo al procedimiento de diseño por corte.

En 1995 se realizó una revisión en los requisitos y actualmente se continúa utilizando. De forma conservadora se adoptó por despreciar el núcleo de la sección transversal de las vigas macizas, porque cerca del núcleo los esfuerzos son muy pequeños, también porque después que la viga de concreto armado se ha agrietado en torsión, su resistencia torsional es provista básicamente por los estribos cerrados y las barras longitudinales ubicadas cerca de la superficie del elemento.

En el código del 2008, las disposiciones para el diseño por torsión permaneces esencialmente sin cambios, excepto por la incorporación del factor de modificación  $\lambda$ , que tiene en cuenta las propiedades mecánicas reducidas del concreto de peso liviano, relativa al concreto de peso normal de igual resistencia a la compresión. En la tabla III se muestran algunos valores de  $\lambda$  para el uso de concretos de peso liviano.

Tabla III. Valores para  $\lambda$  según ACI 8.6.1

Descripción	$\lambda$
Concreto liviano de arena de peso normal	0,85
Otros concretos de peso liviano	0,75
Concreto de peso normal	1,00
Si se especifica la resistencia a tracción por hendimiento del concreto de peso liviano, $f_{ct}$	$\lambda = \frac{f_{ct}}{6,7\sqrt{f'_c}} \leq 1$ (S.I.)

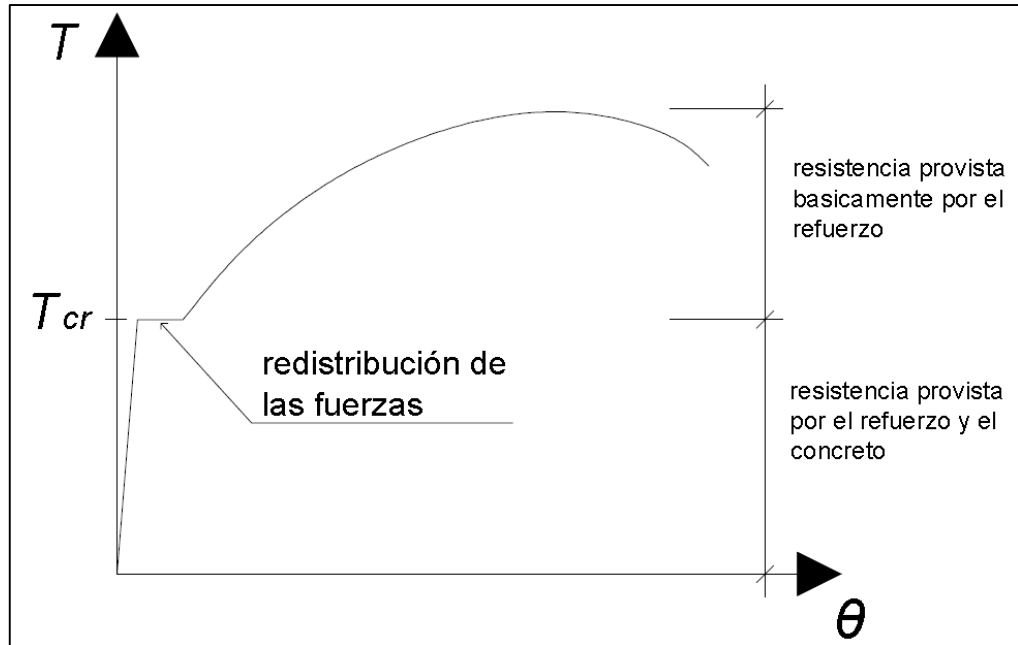
Fuente: elaboración propia.

### 3.2. Diseño por torsión

El código en su sección 11.5, presenta los requisitos para el diseño por torsión, basado en la analogía de una cercha espacial o armadura espacial para un tubo de pared delgada, la cual fue descrita en la sección 2.1.2.2. Estos requisitos fueron propuestos tomando en cuenta lo siguiente:

- Una viga sometida a torsión se idealiza como un tubo de pared delgada y se desprecia el núcleo de la sección transversal de una viga sólida.
- Se supone que la resistencia es proporcionada por la capa exterior de la sección transversal del elemento.
- Después del agrietamiento, la resistencia del concreto disminuye cerca de la mitad de su resistencia no fisurada, ocurre una redistribución de la resistencia interna del elemento y su resistencia torsional es provista básicamente por el refuerzo. Esta redistribución se puede verificar en un gráfico momento torsor - giro; como se observa en la figura 32.

Figura 32. **Gráfico momento torsor-rotación para una viga de concreto armado sujeta a torsión**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

- Los estribos se diseñan de manera que estén en fluencia cuando se alcance el momento torsor máximo.
- Se asume que la armadura longitudinal llega a la tensión de fluencia cuando se alcance el momento torsor máximo.
- El enfoque se aplica a concreto armado y concreto pretensado.
- En un elemento hueco con paredes continuas,  $A_0$  incluye el área del hueco.



- Se eliminó la interacción elíptica entre la resistencia a cortante del concreto  $V_c$  y la resistencia a torsión soportada por el concreto.
- La resistencia a torsión soportada por el concreto se toma como nula.
- El coeficiente de reducción  $\phi$  para torsión es igual a 0,85.

### 3.3. Umbral de torsión

Es necesario establecer fronteras para determinar en qué situaciones se pueden despreciar los efectos de torsión, el código establece esta frontera en un 25 por ciento del torque de agrietamiento.

#### 3.3.1. Criterios para el torque de agrietamiento

- La torsión se puede despreciar si el momento torsor mayorado  $T_u$  es menor que un cuarto del torque de agrietamiento  $T_{cr}$ .
- El torque de agrietamiento  $T_{cr}$  corresponde a un esfuerzo principal de tensión  $\tau$  igual a  $0,33\lambda\sqrt{f'_c}$ .
- Antes del agrietamiento, el espesor  $t$  de la pared del tubo y el área  $A_0$  de la sección se relacionan con la geometría de la sección no agrietada en base a las siguientes suposiciones:

$$t = 0,75 \frac{A_{cp}}{P_{cp}} ; \quad A_0 = \frac{2}{3} A_{cp}$$

- Al remplazar  $t$  y  $\tau$  en la ecuación  $T = 2A_0\tau t$  se obtiene el torque de agrietamiento como:

$$T_{cr} = 0,33\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$$

- El umbral de torsión se establece como:

$$T_u \leq \phi \frac{1}{4} T_{cr}; \quad T_u \leq \phi 0,083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$$

### 3.4. Cálculo del momento torsional mayorado

El momento torsional mayorado actuante en un elemento sujeto a torsión se obtiene del análisis estructural del mismo. Se debe determinar si se trata de torsión por equilibrio o por compatibilidad.

#### 3.4.1. Criterios para equilibrio y compatibilidad

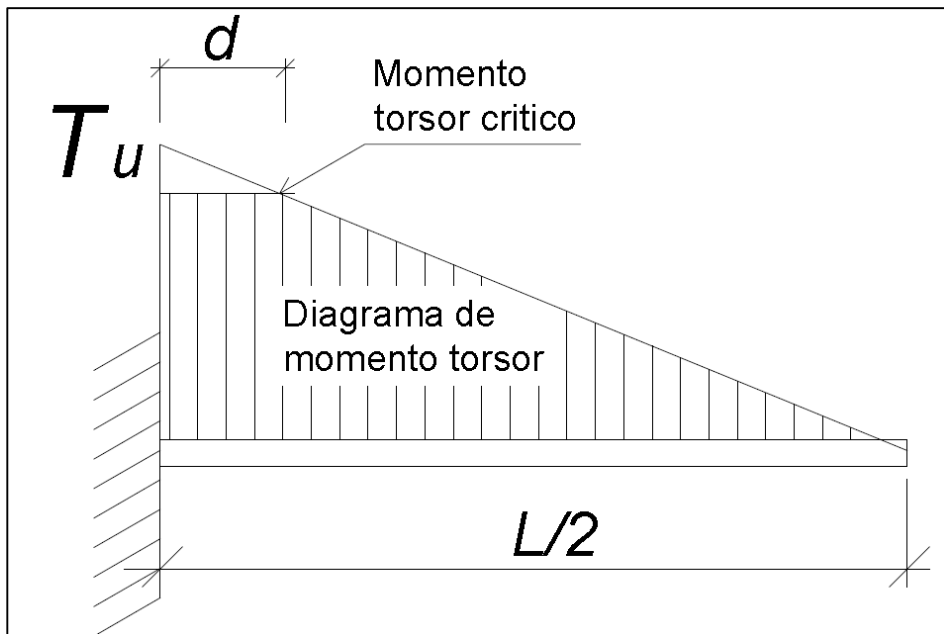
- Si en un elemento ocurre torsión por equilibrio, el momento torsional  $T_u$  no se puede reducir porque no existirá una redistribución de fuerzas internas en la estructura, entonces se debe diseñar para la totalidad del momento torsional último.
- Si en el elemento se presenta torsión por compatibilidad, es posible realizar una redistribución de fuerzas internas y reducir el momento torsional último. No es necesario que los elementos se diseñen para un momento torsor mayor que el producto entre el torque de agrietamiento y el factor de reducción, pero se debe verificar el diseño de los demás

elementos de la estructura tomando en cuenta la redistribución de las fuerzas internas que se puedan dar.

$$\phi 0,33 \lambda \sqrt{f_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right)$$

- Si no se establece un análisis exacto, se permite tomar las cargas torsionales de la losa como uniformemente distribuidas a lo largo de la viga, y las secciones que se ubican una distancia menor a  $d$  de la cara de un apoyo, deben ser diseñadas por lo menos para  $T_u$  calculado a una distancia  $d$ , como se muestra en la figura 33.

Figura 33. **Momento torsor crítico a una distancia  $d$**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 3.5. Resistencia al momento torsional

La resistencia al momento torsional es proporcionada básicamente por el refuerzo.

#### 3.5.1. Criterio de $A_0$ y $A_{0h}$

- La resistencia a la torsión de diseño debe ser mayor o igual que la resistencia a la torsión requerida:

$$\phi T_n \geq T_u$$

- La expresión para calcular la resistencia nominal al momento torsional en términos de la fluencia de los estribos fue descrita en la sección 2.1.2.2.

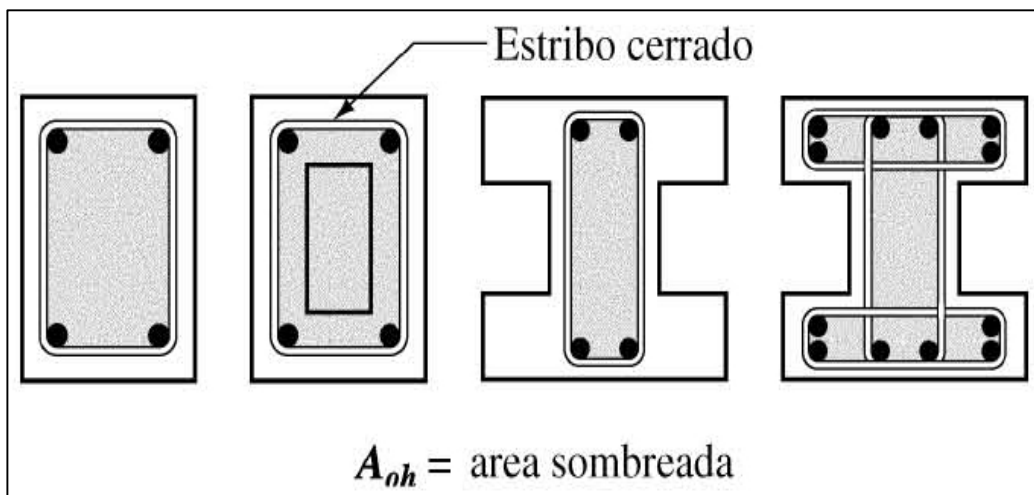
$$T = \frac{2A_0A_t f_{yt}}{s} \cot\theta$$

- La definición de  $A_0$  corresponde a la sección no fisurada.
- La resistencia nominal a la torsión  $T_n$  se alcanza después que el hormigón se ha agrietado y después que el elemento de concreto ha sufrido una considerable rotación por torsión.
- Bajo grandes giros es posible que el hormigón se descascare, por eso se ignora el recubrimiento del concreto.
- Después del agrietamiento, el área encerrada por el flujo de corte queda definida por las dimensiones  $x_0$  y  $y_0$  que forman el área  $A_{0h}$ , y no hasta el

centro de las paredes del tubo que forman el área  $A_0$  como se suponía antes del agrietamiento.

- $A_{0h}$ , es el área encerrada por el eje de la armadura transversal cerrada más externa dispuesta para resistir torsión, como se ilustra en la figura 34.
- El área  $A_0$  se puede determinar haciendo un análisis exacto o suponer que es igual a  $0,85A_{0h}$ .
- El ángulo  $\theta$  de las diagonales comprimidas de concreto está comprendido entre 30 y 60 grados para concreto no pretensado, se sugiere usar un valor de 45 grados.

Figura 34. Definición de  $A_{0h}$



Fuente: comentario ACI 318-08. p. 181.

### 3.5.2. Criterio para el cálculo del área de acero longitudinal $A_L$

- Al igualar T, en las ecuaciones obtenidas en la sección 2.1.2.2 para la armadura transversal y longitudinal, se obtiene la armadura longitudinal para resistir torsión en función de la armadura transversal.

$$\frac{2A_0A_t f_{yt}}{s} \cot\theta = \frac{2A_0A_L f_y}{P_h \cot\theta} ; \quad A_L = \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \left(\frac{f_{yt}}{f_y}\right) \cot^2\theta$$

### 3.5.3. Criterio para momento torsional y cortante

- Para reducir el agrietamiento del concreto y para impedir el aplastamiento de las diagonales de concreto, se establece un límite superior para la máxima tensión debida al corte y torsión, análogo al de corte solamente.
- En las secciones macizas, las tensiones debidas al corte actúan en toda la sección, mientras que las tensiones debidas a la torsión son resistidas exclusivamente por un tubo de pared delgada.
- Se especifica para las secciones macizas una interacción elíptica entre las tensiones debidas al corte y las tensiones debidas a la torsión, como se vio en la sección 2.3.
- Para las secciones huecas, las tensiones debidas al corte y a la torsión se suman en un lado de la pared, como se vio en la sección 2.3.
- Para secciones huecas y solidas los esfuerzos cortantes por torsión y corte, no pueden ser mayores que el esfuerzo cortante que produce el

agrietamiento por el corte, más  $0,66\sqrt{f'_c}$ , como lo indican las siguientes ecuaciones:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66\sqrt{f'_c}\right) ; \text{ Secciones solidas}$$

$$\left(\frac{V_u}{b_w d}\right) + \left(\frac{T_u P_h}{1,7 A_{oh}^2}\right) \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66\sqrt{f'_c}\right) ; \text{ Secciones huecas}$$

- Los estribos calculados para torsión y cortante se suman. Como los estribos por cortante están en términos de todas las ramas del estribo mientras que los estribos por torsión están en función de una sola rama, se deben sumar como:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s}$$

#### 3.5.4. Criterio para momento torsional y flexión

- El refuerzo longitudinal requerido por torsión se suma en cada sección al refuerzo requerido por flexión.
- La tensión longitudinal que ocasiona la torsión, en la zona de compresión por flexión, permite una reducción del acero longitudinal requerido para la torsión en esa zona en una cantidad igual a:

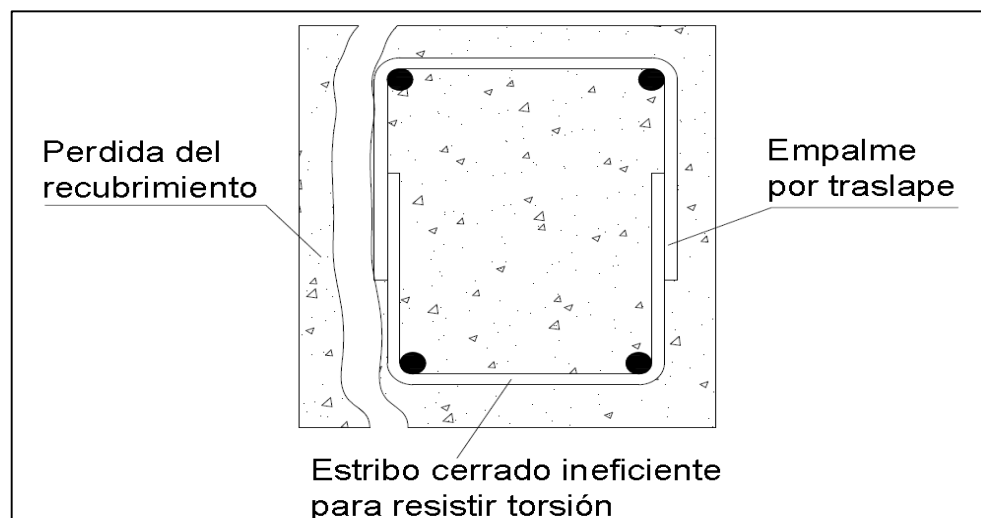
$$\frac{M_u}{0,9d f_y}$$

### 3.6. Detalles del refuerzo para torsión

Se debe proporcionar refuerzo longitudinal y transversal para resistir los esfuerzos diagonales de tensión producidos por la torsión. Los requisitos para el armado se basan en lo siguiente:

- Los estribos deben ser cerrados para proporcionar la capacidad a tensión requerida a través de las grietas diagonales en todas las caras de la viga.
- A medida que se llega al momento torsor máximo, el recubrimiento del concreto se descascara y los empalmes por traslape en el estribo son ineficientes, produciendo una falla prematura por torsión. A diferencia de los estribos colocados por cortante, para torsión no se permite usar estribos cerrados formados por un par de estribos en U, esto se ilustra en la figura 35.

Figura 35. **Estribos cerrados formados por dos estribos en U**

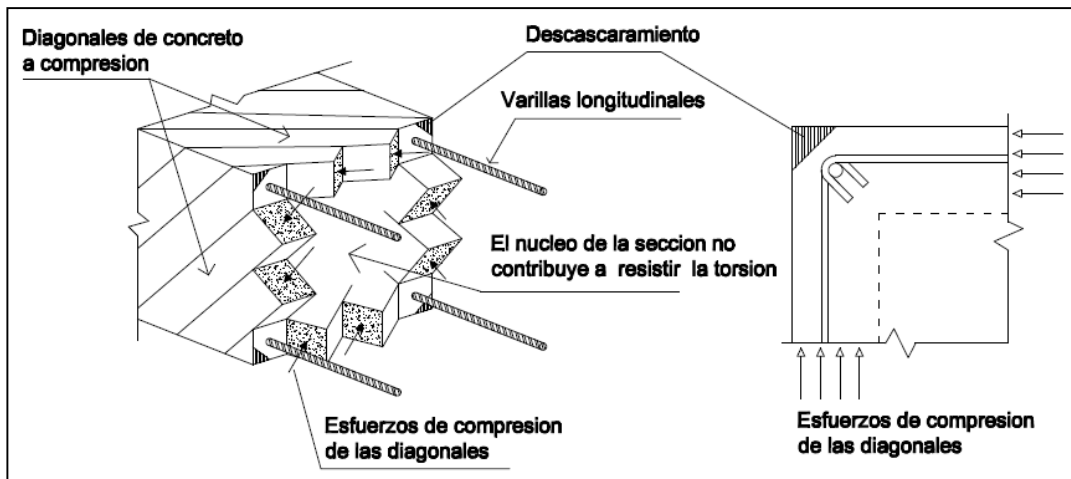


Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.



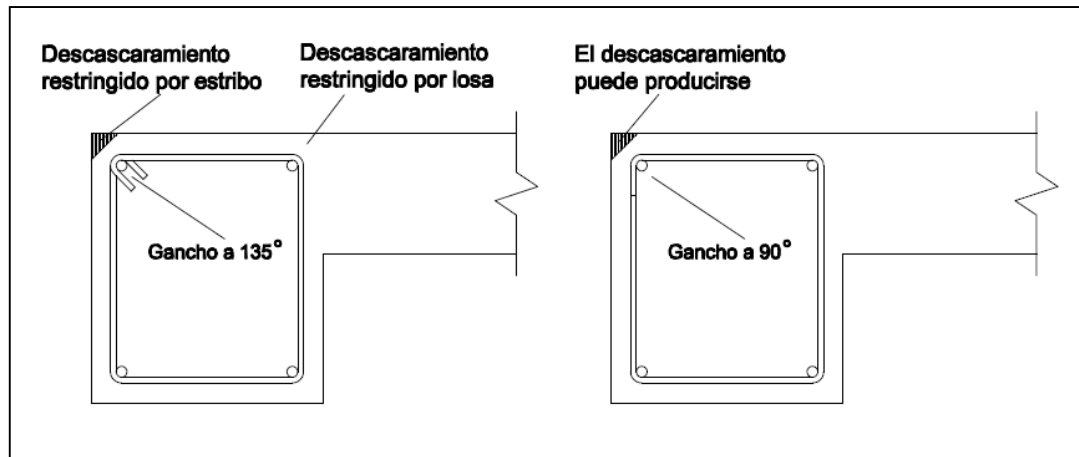
- Cuando ocurre la falla en una viga rectangular las esquinas pueden descascararse debido a los esfuerzos de compresión de las diagonales de concreto que cambian de dirección en la esquina, por eso se deben anclar los estribos al núcleo de concreto, como se ilustra en la figura 36.

Figura 36. **Esfuerzos de compresión de las diagonales de concreto en una viga de sección rectangular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

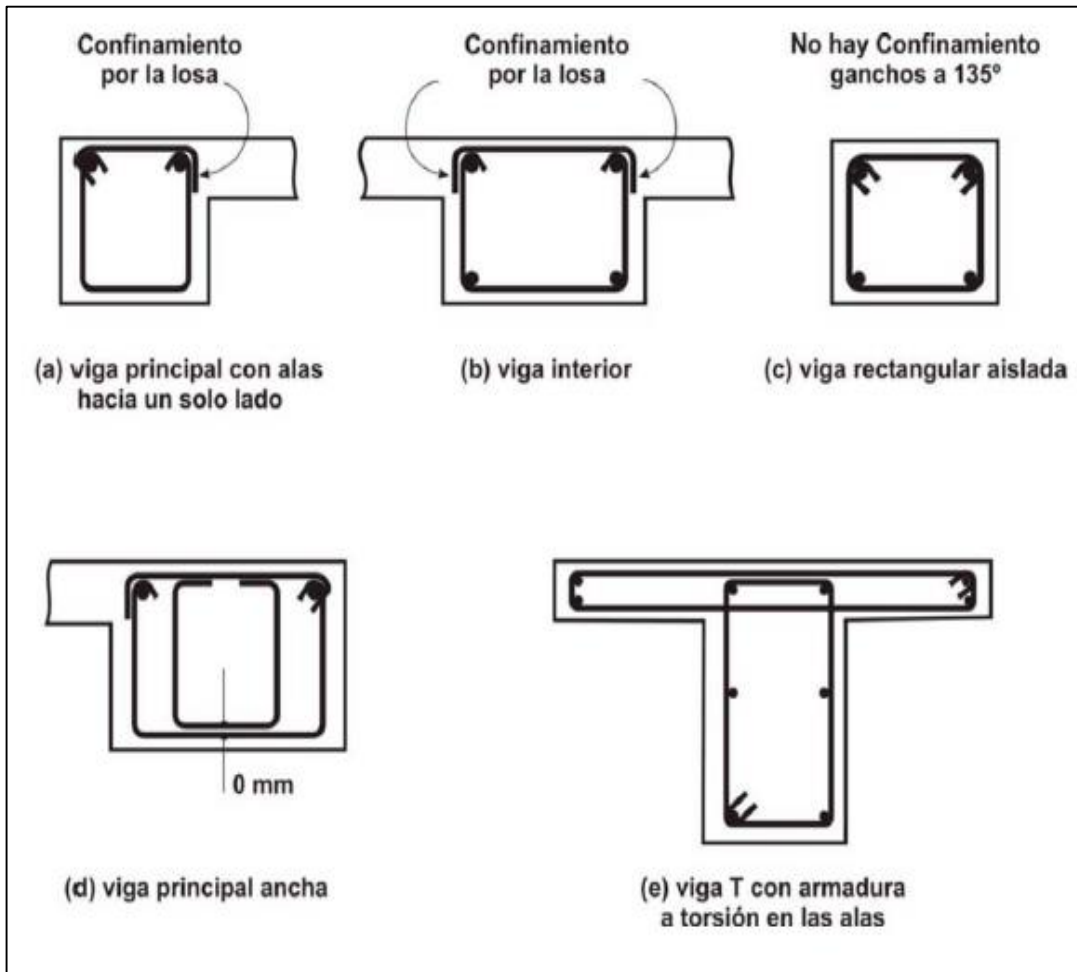
Figura 37. **Descascaramiento de la esquina en vigas de sección rectangular**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

- Para evitar el descascaramiento en la esquina de la sección de la viga el estribo debe tener ganchos a 135 grados alrededor de la barra longitudinal, a menos que el concreto este restringido por una losa, como se ilustra en la figura 37. En la figura 38 se ilustran algunos casos para colocar los estribos considerando los ganchos a 135 y 90 grados según corresponda.

Figura 38. Estribos para resistir torsión



Fuente: NILSON, Arthur. *Diseño de estructuras de concreto*. p. 233.

### 3.7. Refuerzo mínimo para torsión

Se definen los criterios proporcionados por el código ACI para determinar el refuerzo mínimo longitudinal y transversal en un elemento solicitado a torsión, flexión y cortante.

### 3.7.1. Criterio para el refuerzo transversal y longitudinal por torsión

- Para asegurar la ductilidad de los elementos de concreto armado, al igual que para flexión y corte, se especifica el refuerzo mínimo transversal y longitudinal para torsión, que se debe colocar siempre que  $T_u > \phi T_{cr}/4$
- Es usual que los elementos solicitados a torsión también están solicitados simultáneamente a corte, por lo que el área mínima para estribos se especifica para torsión y corte.

$$(A_v + 2A_t) = 0,062\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{0,35b_w s}{f_{yt}}$$

- Se especifica un área mínima para refuerzo longitudinal, en función del refuerzo transversal.

$$A_{L,min} = \frac{0,42\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y}; \quad \frac{A_t}{s} \geq \frac{0,175b_w}{f_{yt}}$$

### 3.8. Espaciamiento del refuerzo para torsión

Se especifican los espaciamientos máximos a los cuales se debe colocar el refuerzo transversal en un elemento diseñado por torsión. Estos criterios previenen la excesiva pérdida de rigidez y controlan el ancho de fisuras en el elemento.

### **3.8.1. Criterio para el espaciamiento de los estribos**

- El espaciamiento de los estribos se limita para prevenir la excesiva pérdida de la rigidez torsional después del agrietamiento y controlar el ancho de fisuras, no debe exceder el menor valor entre  $P_h/8$  y 300 mm.
- Las barras longitudinales requeridas por torsión se deben distribuir alrededor del perímetro de los estribos cerrados para que sea efectiva. El espaciamiento entre barras no debe exceder de 300 mm y el diámetro debe ser de al menos 0,042 veces el espaciamiento entre estribos, pero no menos de diámetro No. 10.
- La longitud de desarrollo que se requiere para el refuerzo torsional, es mayor que el usado para el refuerzo por cortante y flexión debido a que las fisuras por tensión diagonal debidas a la torsión se desarrollan en un patrón helicoidal.

### **3.9. Procedimiento para el diseño de una viga a torsión**

Un procedimiento general para el diseño a de vigas a torsión se presenta a continuación:

#### **3.9.1. Análisis estructural**

Determinar el esfuerzo cortante  $V_n$ , momento flexionante  $M_n$  y momento torsor  $T_n$ , que debe resistir la viga.

### 3.9.2. Datos

Proponer la sección de la viga, la resistencia del concreto y la del refuerzo, es decir,  $h$ ,  $b$ ,  $f'_c$  y  $f_y$ .

### 3.9.3. Análisis por flexión

Los pasos a seguir para el diseño por flexión se muestran en la tabla IV.

Tabla IV. Pasos para el diseño por flexión

Paso	Descripción	Ecuación
1	Calcular la cuantía balanceada	$\rho_{bal} = \frac{0,85\beta_1 f'_c}{f_y} \left( \frac{600}{600 + f_y} \right)$
2	Cuantía y área de acero máxima permitida	$\rho_{max} = 0,5\rho_{bal}$ $A_{S_{max}} = \rho_{max}bd$
3	Momento máximo que puede soportar la sección de la viga propuesta	$M_{u_{max}} = \phi A_{S_{max}} f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$ $a = \frac{A_{S_{max}} f_y}{0,85 f'_c b}$
4	Si $\phi M_n \leq M_{u_{max}}$ , solo necesita refuerzo a tensión, si no se cumple, se deberá agrandar la sección o colocar refuerzo a compresión.	
5	Si se cumple lo anterior el área de acero requerida a tensión para $\phi M_n$ se obtiene de	$M_u = \phi A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$ $a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b}$
6	Chequear el área de acero mínimo	$A_{s,min} = \frac{0,25\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \geq \frac{1,4}{f_y} bd$

Fuente: elaboración propia.

### 3.9.4. Tipo de torsión

Establecer si se trata de torsión por equilibrio o torsión por compatibilidad.

- Si se trata de torsión por compatibilidad según la sección 11.5.2.2  $T_u$  se puede reducir a:

$$0,33\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$$

- Si se trata de torsión por equilibrio se diseña para  $T_u$  calculado.

### 3.9.5. Chequeo del diseño por torsión

Determinar si es necesario colocar refuerzo adicional requerido por torsión, ver tabla V.

Tabla V. Chequeo del diseño por torsión

Paso	Descripción	Ecuación
1	Calcular área de la sección	$A_{cp} = bh$
2	Calcular el perímetro de la sección	$P_{cp} = 2(b + h)$
3	Umbral de torsión, según sección 11.5.1. del código se permite despreciar los efectos de torsión si	$T_u \leq \phi 0,083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$
4	Si no se cumple se debe colocar refuerzo por torsión	

Fuente: elaboración propia.

### 3.9.6. Chequeo de la sección transversal

Calcular las propiedades de la sección transversal de la viga, utilizar la tabla VI.

Chequear que la sección transversal de la viga de concreto sea lo suficientemente grande, como para soportar el momento torsor  $T_u$  y el cortante  $V_u$ , ver tabla VII.

Tabla VI. **Propiedades de la sección**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Calcular la distancia $x_1$	$x_1 = b - \left( \text{rec} + \frac{d_{bt}}{2} \right)$
2	Calcular la distancia $y_1$	$y_1 = h - \left( \text{rec} + \frac{d_{bt}}{2} \right)$
3	Calcular el área $A_{oh}$	$A_{oh} = x_1 y_1$
4	Calcular el área $A_o$	$A_o = 0,85 A_{oh}$
5	Calcular el perímetro $P_h$	$P_h = 2(x_1 + y_1)$

Fuente: elaboración propia.



Tabla VII. **Chequeo de la sección**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Calcular el cortante que soporta el concreto, según sección 11-2 del código	$V_c = 0,17\lambda\sqrt{f'_c}bd$
2	Según sección 11.5.3.1 del código, chequear si se cumple	$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2}$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66\sqrt{f'_c}\right)$
3	Si no se cumple se deberá agrandar la sección de la viga	

Fuente: elaboración propia.

### 3.9.7. Refuerzo transversal por torsión y cortante

Determinar el refuerzo transversal por torsión, ver tabla VIII.

Tabla VIII. **Refuerzo transversal por torsión**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Utilizar el torque nominal obtenido del análisis estructural	$T_n$
2	Según la sección 11.5.3.6 del código	$\theta = 45^\circ$
3	Obtener $A_t/s$ de la ecuación dada en la sección 11.5.3.6 del código	$T_n = \frac{2A_0 A_t f_{yt}}{s} \cot\theta$
4	El área de acero por unidad de longitud $A_t/s$ esta dado para una rama del estribo	

Fuente: elaboración propia.

Determinar el refuerzo transversal por cortante requerido, ver tabla IX.

Tabla IX. **Refuerzo transversal por cortante**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Chequear si es necesario el refuerzo por cortante, se tiene que cumplir que	$V_u > \frac{1}{2}V_c$
2	Si se requiere refuerzo por cortante $V_s$ se calcula como	$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi}$
3	Obtener $A_v/s$ de la ecuación dada en la sección 11.4.7.2 del código	$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s}$
4	El área de acero por unidad de longitud $A_v/s$ esta dado para las dos ramas del estribo	

Fuente: elaboración propia.

### 3.9.8. Diseño de los estribos

Determinar el área de acero transversal total y calcular la separación de los estribos, ver tabla X.

Tabla X. **Diseño de los estribos**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Según la sección 11.5.3.8 del código el área de acero total para los estribos se puede calcular como	$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s}$
2	Determinar el área transversal de la varilla propuesta para los estribos	$A_{bt}$
3	Encontrar la separación a la que se deben colocar los estribos	$s = \frac{2(A_{bt})}{A_{v+t}/s}$
4	Chequear separación máxima de los estribos, según sección 11.5.6 del código usar el menor de	$\frac{P_h}{8}$ 300mm
5	Chequear el área mínima del estribo, según sección 11.5.5.2 del código se tiene que cumplir que	$(A_v + 2A_t) = 0,062\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}$ $\geq \frac{0,35b_w s}{f_{yt}}$

Fuente: elaboración propia.

### 3.9.9. Diseño del refuerzo longitudinal

Determinar el área de acero longitudinal por torsión que se debe adicionar al requerido por flexión, ver tabla XI

Tabla XI. **Diseño del refuerzo longitudinal**

Paso	Descripción	Ecuación
1	Según la sección 11.5.3.7 del código el área de acero longitudinal se calcula como	$A_L = \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \left(\frac{f_{yt}}{f_y}\right) \cot^2 \theta$
2	Chequear el área de acero longitudinal mínima según la sección 11.5.5.3	$A_{L,min} = \frac{0,42\sqrt{f'_c}A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y}$
3	Chequear que	$\frac{A_t}{s} \geq 0,175b_w/f_{yt}$
4	El acero longitudinal debe repartirse en todo el perímetro del estribo, debe colocarse en las 4 esquinas y en las distancias verticales entre ellas.	
5	Las varillas colocadas en las dos esquinas superiores, según la sección 11.5.3.9 se permite reducir el área de refuerzo a torsión en una cantidad	$\frac{M_u}{0,9df_y}$
6	Las varillas en las esquinas superiores e inferiores requeridas por torsión se suman a las requeridas por flexión.	

Fuente: elaboración propia.

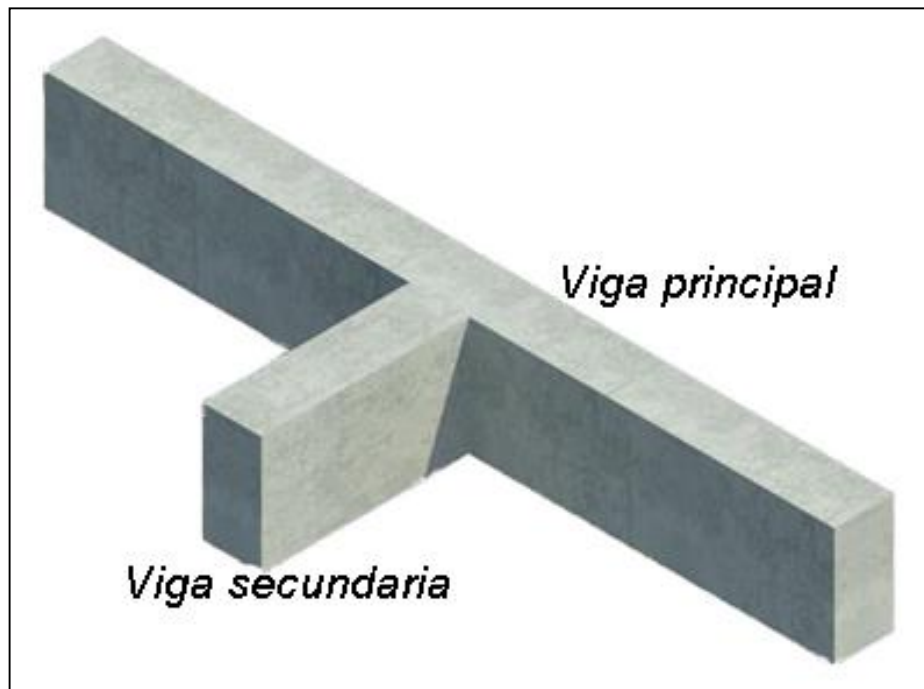


## 4. MÉTODO DE ENSAYO

### 4.1. Descripción del ensayo

Se requiere diseñar una viga de tal manera que sea solicitada esencialmente por esfuerzos de torsión. Una manera práctica de llevar dichas solicitaciones a la realidad es aplicando una fuerza puntual perpendicular y excéntrica al eje longitudinal. Esta fuerza puntual  $P$  será la responsable del momento torsor y de los esfuerzos de corte y flexión.

Figura 39. **Modelo del elemento**

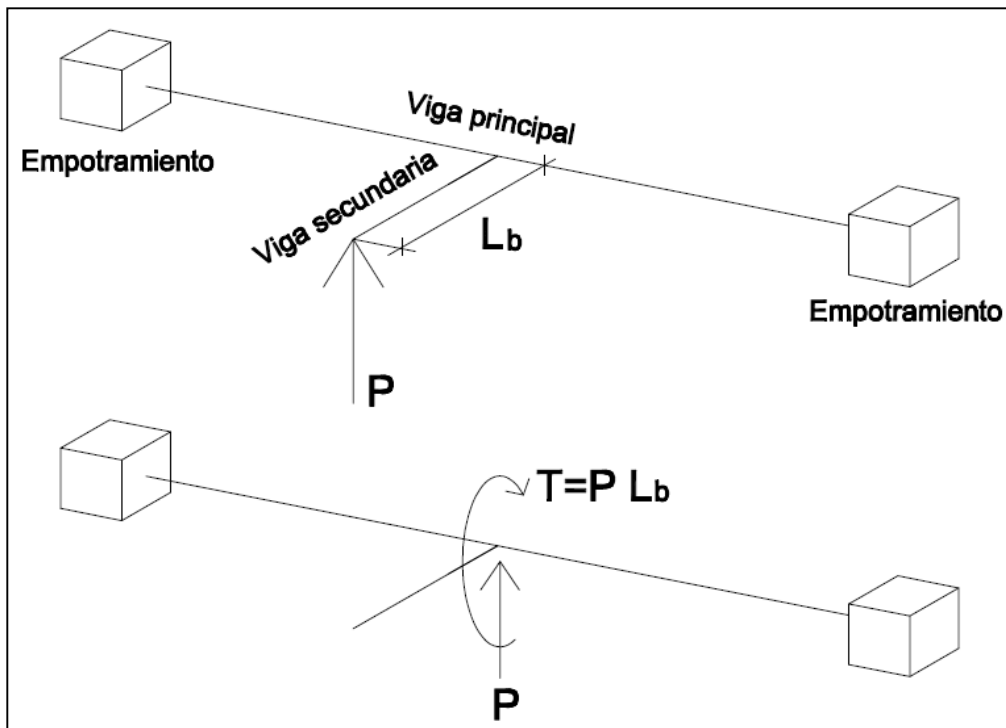


Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Para que la fuerza sea excéntrica, se debe aplicar a una distancia  $L_b$  del eje longitudinal del elemento, proporcionando el brazo de palanca para el momento torsor. Se propone construir la viga bajo observación a la cual se le llamará principal, y perpendicular al eje longitudinal de esta, una viga secundaria. El modelo se muestra en la figura 39.

Con esta configuración es posible someter la viga principal a una fuerza par, que será igual a una fuerza  $P$  y un momento torsor  $M_t = P(L_b)$ , aplicado al centro del eje longitudinal de la viga principal. Para que se pueda desarrollar el par torsor, los extremos de la viga principal deberán estar restringidos contra rotación y traslación. La estructura idealizada se muestra en la figura 40.

Figura 40. **Modelo idealizado**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Cuatro partes fundamentales a considerar para obtener resultados satisfactorios de las propiedades que estarán bajo observación son: extremos restringidos, unión entre las vigas, viga principal y viga secundaria.

#### **4.1.1. Extremos restringidos**

Se deberá simular empotramientos en cada extremo de la viga, para evitar que exista rotación y traslación en los extremos de la viga.

Se propone colocar bloques en la parte superior e inferior de cada extremo del elemento y aplicarles fuerza a compresión. Los bloques pueden ser de concreto u otro material que presente poca deformación ante esfuerzos de compresión. También se propone colocar una placa de elastómero en la superficie del bloque para que el elemento se acomode.

#### **4.1.2. Unión entre vigas**

El nudo es una parte muy importante a tomar en cuenta en el diseño, este debe transmitir las fuerzas sin presentar fallo. Prestar atención en el armado y hacer los anclajes correctos para las barras de la viga secundaria que estarán expuestas a fuerzas de tensión y compresión.

#### **4.1.3. Viga principal**

Este elemento es el que estará bajo observación, la falla debe presentarse después de aplicar el par torsor de diseño, para ello se debe realizar un diseño por torsión, flexión y corte, prestando atención en el corte que se genera en los extremos y cerca del nudo.



#### **4.1.4. Viga secundaria**

Este elemento se comporta como una viga en voladizo, tiene que ser capaz de soportar los esfuerzos de flexión y corte que le serán inducidos. El diseño tiene que proporcionar bastante rigidez para evitar deformaciones excesivas por flexión.

#### **4.2. Material y equipo a utilizar**

- Máquina para ensayos (marco)
- Gato hidráulico con capacidad de 10 toneladas
- Bomba para el gato hidráulico
- Cuatro bloques de concreto con dimensiones que dependen del elemento a ensayar
- Cuatro placas de elastómero con dimensiones que dependen del bloque de concreto a utilizar
- Tres deformómetros con aproximación de 0,01 mm

#### **4.3. Procedimiento para el ensayo**

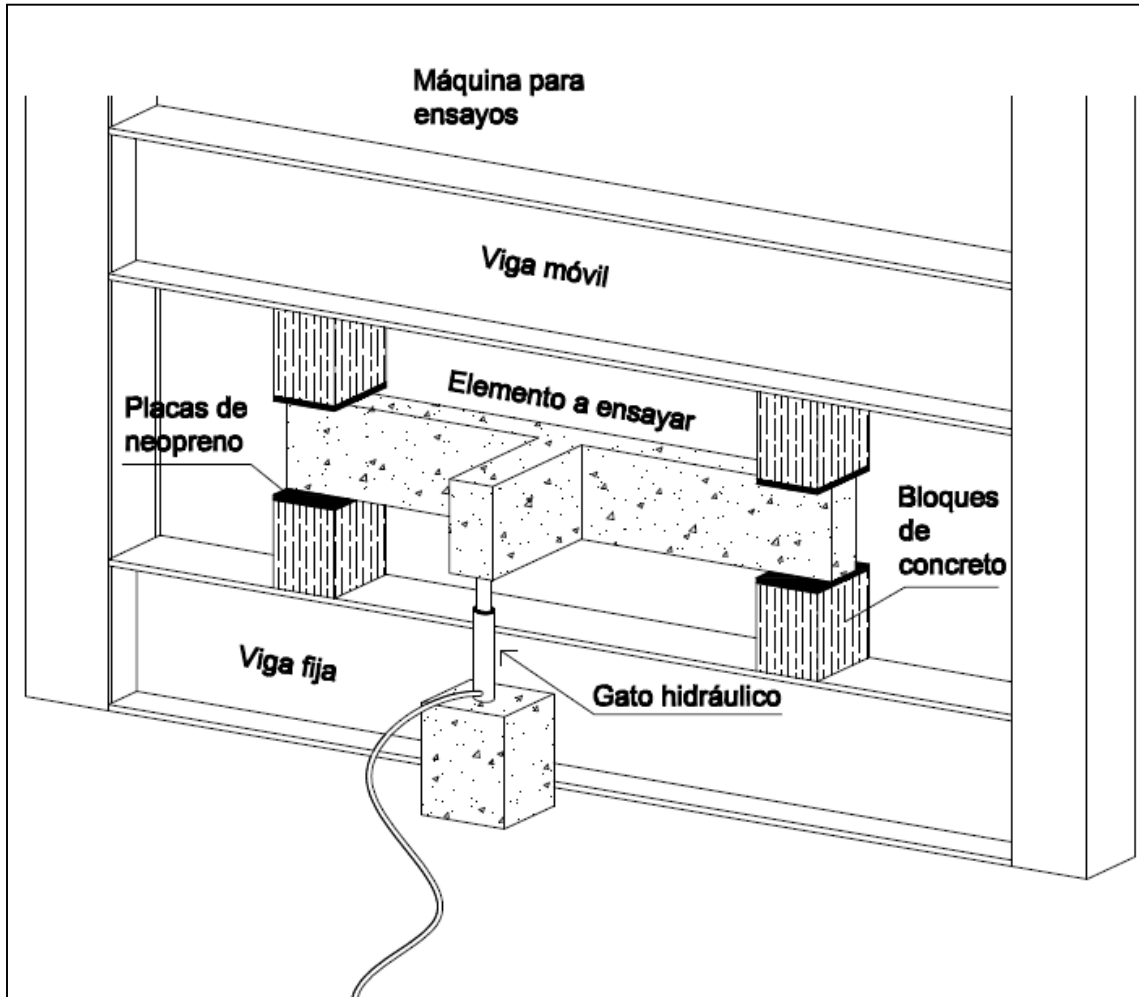
- Colocar dos bloques de concreto con sus placas de elastómero sobre la viga fija de la máquina de ensayo, separados a una distancia igual a la longitud efectiva del elemento.

- Colocar el elemento a ensayar sobre los bloques, cuidando que este quede centrado en el marco y los bloques queden en los extremos del elemento y a la misma distancia.
- Colocar los otros dos bloques con las placas de elastómero sobre el elemento, de manera que exista verticalidad con los primeros dos bloques.
- Colocar el gato hidráulico en el extremo de la viga secundaria y verificar que todo el sistema quede completamente nivelado en los dos sentidos del plano horizontal.
- Aplicar fuerza de compresión en los bloques superiores con la viga móvil de la máquina para ensayos.
- Colocar los deformómetros
- Aplicar carga con el gato hidráulico de forma gradual, a cada incremento de carga se toma lectura en los deformómetros.

#### **4.4. Esquema del método propuesto para el ensayo**

En la figura 41 se muestra el esquema de cómo colocar el elemento en la máquina para ensayos y el gato hidráulico al elemento.

Figura 41. Esquema del ensayo



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL



### 5.1. Propuesta

Determinar el comportamiento de dos vigas de concreto armado con diferente sección transversal ante esfuerzos principalmente de torsión, la variación entre cada elemento es la base de su sección transversal la cual estará en función de su altura. Con lo anterior se podrá comprobar la rigidez de cada elemento verificando si este cambio en la geometría ayudará a mantener dicha rigidez durante la aplicación de la carga.

Considerar los estribos, estos serán diferentes en cada elemento, comprobando que estribo es más eficiente para evitar pérdidas de las aristas del elemento.

Los requerimientos de la sección transversal y los estribos propuestos para cada elemento se muestran en la tabla XII.

Tabla XII. **Variaciones en cada elemento**

Parámetro	Elemento 1	Elemento 2
Altura (h)	$h = 2b$	$h = 1,5b$
Estribos		

Fuente: elaboración propia.

La altura para los dos elementos será la misma, se propone que sea de 300 mm, porque valores más grandes causarían problemas con el peso de elemento y valores menores problemas con el armado.

No es necesario que los elementos tengan una longitud grande, bastará con que se puedan desarrollar los esfuerzos torsores dentro de su longitud. Los elementos tendrán las dimensiones que se indican en la tabla XIII.

Tabla XIII. **Dimensiones de las vigas**

<b>Dimensiones</b>	<b>Elemento 1</b>	<b>Elemento 2</b>
Altura (h)	300 mm	300 mm
Base (b)	150 mm	200 mm
Longitud viga principal (L)	2 m	2 m
Longitud viga secundaria (l)	0,60 m	0,60 m
Longitud del brazo ( $L_b$ )	0,60 m	0,60 m

Fuente: elaboración propia.

## 5.2. **Diseño del elemento 1**

Primero es necesario establecer en qué valor de carga va a fallar el elemento. En base a las dimensiones propuestas se deberá chequear según la sección 11.5.3.1 del código, que la sección transversal cumpla con la desigualdad planteada.

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66 \sqrt{f'_c}\right)$$

Como se comprobara más adelante, el valor que hace que se cumpla la desigualdad es un  $T_u$  de aproximadamente 4 kN-m. Por cuestiones prácticas para calcular el momento torsor se despreciara el momento contrario ocasionado por el peso de la viga secundaria, entonces se tiene:

$$T_u = \frac{(P_u * L_b)}{2}; \quad P_u = \frac{2T_u}{L_b} = \frac{8 \text{ kN} - \text{m}}{0,6 \text{ m}} = 13,33 \text{ kN} \cong 13,40 \text{ kN}$$

Esto quiere decir que la fuerza  $P$  que se debe aplicar con el gato hidráulico no debe ser mayor a 13,40 kN para que no se sobrepasen los esfuerzos de corte en la sección del elemento. Entonces este valor es un buen parámetro para realizar el diseño del elemento.

Para fines del ensayo no se usarán factores de mayoraje para carga viva y muerta. Estos factores sirven para mantener una holgura en cuanto a la incerteza del valor de la carga que actuara en el elemento, pero en este caso el valor de la carga estará controlado.

Una vez determinada la fuerza  $P_u$ , se realiza el análisis estructural para determinar los esfuerzos de corte y flexión actuantes.

### 5.2.1. Análisis estructural

La longitud efectiva para el elemento será la longitud de la viga menos 250 milímetros de empotramiento en cada apoyo.

$$L_{ef} = L - 2(0,25) = 2\text{m} - 2(0,25\text{m}) = 1,5 \text{ m}$$

El cortante y momentos flexionantes por carga muerta se indican en la tabla XIV. La carga distribuida por unidad de longitud debido al peso del elemento se calcula como:

$$W_{CM} = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,15\text{m} \times 0,3\text{m} \times 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1058 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 1,058 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Tabla XIV. **Análisis por carga muerta**

<b>Viga principal</b>		
	<b>Ecuación</b>	<b>Valor</b>
Mf <sub>(-) Izq</sub>	$\frac{WL^2}{12} + \frac{(W \times l)L}{8}$	$\frac{1,058(1,5)^2}{12} + \frac{(1,058 \times 0,6)(1,5)}{8} = 0,32 \text{ kN} - \text{m}$
Mf <sub>(-) Der</sub>	$\frac{WL^2}{12} + \frac{(W \times l)L}{8}$	$\frac{1,058(1,5)^2}{12} + \frac{(1,058 \times 0,6)(2)}{8} = 0,32 \text{ kN} - \text{m}$
Mf <sub>(+)</sub>	$\frac{WL^2}{24} + \frac{(W \times l)L}{8}$	$\frac{1,058(1,5)^2}{24} + \frac{(1,058 \times 0,6)(1,5)}{8} = 0,22\text{kN} - \text{m}$
V <sub>(Izq)</sub>	$\frac{WL}{2} + \frac{(Wl)}{2}$	$\frac{1,058(1,5)}{2} + \frac{1,058(0,6)}{2} = 1,11 \text{ kN}$
V <sub>(Der)</sub>	$\frac{WL}{2} + \frac{(Wl)}{2}$	$\frac{1,058(1,5)}{2} + \frac{1,058(0,6)}{2} = 1,11 \text{ kN}$
<b>Viga secundaria</b>		
Mf <sub>(-) Izq</sub>	$\frac{Wl^2}{2}$	$\frac{1,058(0,6)^2}{2} = 0,19\text{kN} - \text{m}$
Mf <sub>(-) Der</sub>	0	0
V <sub>(Izq)</sub>	Wl	1,058(0,6) = 0,64 kN
V <sub>(Der)</sub>	0	0

Fuente: elaboración propia.

El cortante y momentos flexionantes debido a la carga puntual se indican en la tabla XV.

Tabla XV. **Análisis por carga puntual aplicada**

<b>Viga principal</b>		
	<b>Ecuación</b>	<b>Valor</b>
$Mf_{(+)} \text{ Izq}$	$\frac{(P)L}{8}$	$\frac{13,40(1,50)}{8} = 2,51 \text{ kN} - \text{m}$
$Mf_{(+)} \text{ Der}$	$\frac{(P)L}{8}$	$\frac{13,40(1,50)}{8} = 2,51 \text{ kN} - \text{m}$
$Mf_{(-)}$	$\frac{(P)L}{8}$	$\frac{13,40(1,50)}{8} = 2,51 \text{ kN} - \text{m}$
$V_{(\text{Izq})}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{13,40}{2} = 6,70 \text{ kN}$
$V_{(\text{Der})}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{13,40}{2} = 6,70 \text{ kN}$
<b>Viga secundaria</b>		
$Mf_{(-)} \text{ Izq}$	$PL_b$	$13,40(0,6) = 8,04 \text{ kN} - \text{m}$
$Mf_{(-)} \text{ Der}$	0	0
$V_{(\text{Izq})}$	P	13,40 kN
$V_{(\text{Der})}$	P	13,40 kN

Fuente: elaboración propia.

El corte y momentos flexionantes totales se indican en la tabla XVI.



Tabla XVI. **Corte y momentos totales en elemento 1**

<b>Viga principal</b>		
	<b>suma</b>	<b>Total</b>
Mf <sub>(+)</sub> Izq	-0,32 + 2,51	2,19 kN – m
Mf <sub>(+)</sub> Der	-0,32 + 2,51	2,19 kN – m
Mf <sub>(-)</sub>	0,22 – 2,51	-2,29 kN – m
V <sub>(Izq)</sub>	1,11 – 6,70	-5,59 kN
V <sub>(Der)</sub>	-1,11 + 6,70	5,59 kN
<b>Viga secundaria</b>		
Mf <sub>(-)</sub> Izq	-0,19 + 8,04	7,85 kN – m
Mf <sub>(-)</sub> Der	0 + 0	0
V <sub>(Izq)</sub>	-0,64 + 13,40	12,76 kN
V <sub>(Der)</sub>	0 + 13,40	13,40 kN

Fuente: elaboración propia.

### 5.2.2. **Diseño del acero de refuerzo por flexión corte y torsión para la viga principal**

Los datos para el diseño se muestran en la tabla XVII y el diseño completo se muestra de la tabla XVIII a la tabla XXV.

Tabla XVII. Datos del diseño

$\phi = 0,9$	Recubrimiento = 40 mm
$\beta_1 = 0,85$	$d_b \#2 = 6,4$ mm
$f'_c = 28$ Mpa	$d_b \#3 = 9,5$ mm
$f_y = 420$ Mpa	$d = 300 - 40 = 260$ mm

Fuente: elaboración propia.

Tabla XVIII. Diseño por flexión

Paso	Ecuación	Valor
1	$\rho_{bal} = \frac{0,85(0,85)(28)}{(420)} \left( \frac{600}{600 + 420} \right)$	0,028333333
2	$\rho_{max} = 0,5(0,028333333)$ $A_{S_{max}} = 0,014166667(150)(260)$	0,014166667 552,50 mm <sup>2</sup>
3	$M_{u_{max}} = 0,9(552,5)(420) \left( 260 - \frac{65}{2} \right)$ $a = \frac{552,5(420)}{0,85(28)(150)} = 65,00$ mm	47512237,50 N – mm 47,51 kN – m
4	Como $2,29 \leq 47,51$ , solo necesita refuerzo a tensión	
5	$2,29 \times 1000^2 = 0,9(A_s)(420) \left( 260 - \frac{a}{2} \right)$ $a = \frac{A_s(420)}{0,85(28)(150)}$	Requerido por flexión $A_s = 23,42$ mm <sup>2</sup>
6	$A_{s,min} = \frac{0,25\sqrt{28}}{420} (150)(260) \geq \frac{1,4}{420} (150)(260)$	Colocar 130 mm <sup>2</sup>

Fuente: elaboración propia.

$$T_u = \frac{(PL_b)}{2} = \frac{(13,40 \text{ kN})}{2} \times (0,6 \text{ m}) = 4,02 \text{ kN} - \text{m}$$

Tabla XIX. **Chequeo del momento torsor aplicado**

Paso	Ecuación	Valor
1	$A_{cp} = (150)(300)$	45000 mm <sup>2</sup>
2	$P_{cp} = 2150+300$	900 mm <sup>2</sup>
3	$T_u \leq 0,85(0,083)(1)\sqrt{28} \left( \frac{45000^2}{900} \right)$	839959,90 N – mm 0,84 kN – m
4	Como 4,02 kN – m $\geq$ 0,84 kN – m; es necesario refuerzo por torsión.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XX. **Propiedades de la sección**

Paso	Ecuación	Valor
1	$x_1 = 150 \text{ mm} - \left( 40 \text{ mm} + \frac{6,4 \text{ mm}}{2} \right)$	85,90 mm
2	$y_1 = 300 \text{ mm} - \left( 40 \text{ mm} + \frac{6,4 \text{ mm}}{2} \right)$	235,90 mm
3	$A_{oh} = 85,9(235,9)$	20263,81 mm <sup>2</sup>
4	$A_o = 0,85(20263,81)$	17224,24 mm <sup>2</sup>
5	$P_h = 2(85,9 + 235,9)$	643,60 mm

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXI. **Chequeo de la sección transversal**

Paso	Ecuación	Valor
1	$V_c = 0,17(1)\sqrt{28}(150)(260)$	35082,66 N 35,08 kN
2	$\sqrt{\left(\frac{5,59 \times 1000}{150(260)}\right)^2 + \left(\frac{(4,02 \times 1000^2)643,60}{1,7(20263,81)^2}\right)^2}$ $\leq 0,85 \left(\frac{35\ 082,66}{150(260)} + 0,66\sqrt{28}\right)$	3,71 N/mm <sup>2</sup>  ≤ 3,73 N/mm <sup>2</sup>
3	La sección es suficientemente grande para soportar los esfuerzos de torsión, como se supuso anteriormente un valor mayor para P <sub>u</sub> hará que no se cumpla la desigualdad pues esta se encuentra en el límite.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXII. **Refuerzo transversal requerido por torsión**

Paso	Ecuación	Valor
1	$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{4,02}{0,85}$	4,73
2	$\theta$	45°
3	$4,73 \times 1000^2 = \frac{2(17224,24)(A_t)(420)}{s} \cot(45)$	$\frac{A_t}{s} = 0,33 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$
4	$A_t/s$ esta dado para una rama del estribo	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXIII. **Refuerzo transversal requerido por corte**

Paso	Ecuación	Valor
1	$V_u > \frac{1}{2} V_c; 2,24 > \frac{1}{2} (35,08)$	$2,24 < 17,54$
2	No es necesario el refuerzo por cortante	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXIV. **Diseño de los estribos**

Paso	Ecuación	Valor
1	$\frac{A_{v+t}}{s} = 2(0,33) + 0$	$0,66 \text{ mm}^2/\text{mm}$
2	$A_{bt}$ varilla #2	$32,17 \text{ mm}^2$
3	$s = \frac{2(32,17)}{0,66}$	$97,48 \text{ mm}$
4	Separación máxima $643,6/8 = 80,45 \text{ mm};$ $300 \text{ mm}$	colocar @ $80 \text{ mm}$
5	$(A_v + 2A_t) = 0,062\sqrt{28} \frac{150(80)}{420}$ $\geq \frac{0,35(150)(80)}{420}$	$0 + 2(32,17) > 9,37$ $0 + 2(32,17) > 10;$ Ok.

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXV. **Diseño del refuerzo longitudinal**

Paso	Ecuación	Valor
1	$A_L = (0,33)(643,6) \left(\frac{420}{420}\right) \cot^2 45$	212,39 mm <sup>2</sup>
2	$A_{L,min} = \frac{0,42\sqrt{28}(45000)}{420} - (0,33)(643,60) \left(\frac{420}{420}\right)$	25,73mm <sup>2</sup>
3	$(0,33 \geq 0,175(150)) / 420 = 0.06$	OK
4	El acero longitudinal por torsión se debe repartir en las cuatro esquinas de la sección transversal de la viga y en las barras superiores se debe adicionar el acero requerido por flexión.	
5	Área de acero en la cama inferior; $212,39 \text{ mm}^2 / 2 = 106,20$	Colocar 2 #3; $A_s = 142 \text{ mm}^2$
6	Área de acero en la cama superior; $106,20 + 23,42 = 129,62 \text{ mm}^2$	Colocar 2 #3; $A_s = 142 \text{ mm}^2$ Con esto también se cumple con el acero mínimo por flexión que se debe colocar.

Fuente: elaboración propia.

### 5.2.3. **Diseño del acero de refuerzo por corte y flexión para la viga secundaria**

Los datos son los mismos que para la viga principal, el diseño se muestra en las tablas XXVI y XXVII.

Tabla XXVI. **Diseño por flexión**

Paso	Ecuación	Valor
1	$\rho_{bal} = \frac{0,85(0,85)(28)}{(420)} \left( \frac{600}{600 + 420} \right)$	0,028333333
2	$\rho_{max} = 0,5(0,028333333)$	0,014166667
3	$A_{S_{max}} = 0,014166667(150)(260)$	552,50 mm <sup>2</sup>
4	$M_{u_{max}} = 0,9(552,5)(420) \left( 260 - \frac{65}{2} \right)$ $a = \frac{552,5(420)}{0,85(28)(150)} = 65,00 \text{ mm}$	47512237,50 N – mm 47,51 kN – m
5	Como $7,85 \leq 47,51$ , solo necesita refuerzo a tensión	
6	$7,85 \times 1000^2 = 0,9(A_s)(420) \left( 260 - \frac{a}{2} \right)$ $a = \frac{A_s(420)}{0,85(28)(150)}$	$A_s = 81,37 \text{ mm}^2$
7	$A_{s,min} = \frac{0,25\sqrt{28}}{420} (150)(260) \geq \frac{1,4}{420} (150)(260)$	Colocar 130 mm <sup>2</sup>

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXVII. **Refuerzo transversal requerido por corte**

Paso	Descripción	Ecuación
1	$V_u > \frac{1}{2} V_c$ ; $13,40 > \frac{1}{2}(35,08)$	$13,40 < 17,54$
2	No es necesario el refuerzo por cortante	

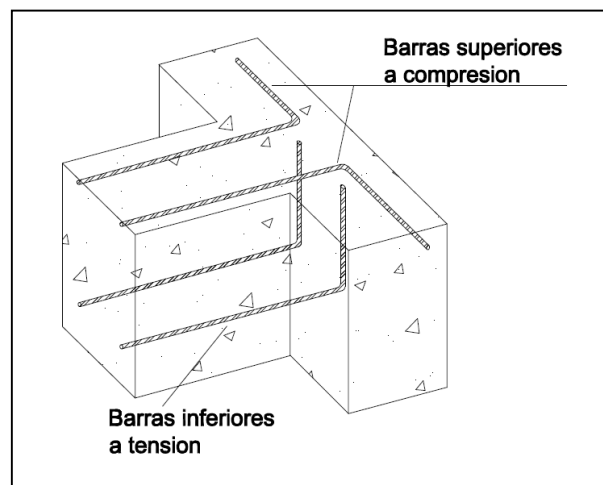
Fuente: elaboración propia.

#### 5.2.4. Diseño del nudo y los apoyos

En el nudo, los anclajes de las barras superiores e inferiores se deben de colocar de la siguiente manera:

- Barras superiores: estas trabajaran a compresión por lo que deben tener ganchos a 90 grados colocados en sentido paralelo a las barras longitudinales de la viga principal, como se observa en la figura 42.
- Barras Inferiores: estas trabajaran a tensión, por lo que deben tener ganchos a 90 grados colocados en sentido perpendicular a las barras longitudinales de la viga principal, como se observa en la figura 42.

Figura 42. Anclaje de barras en el nudo



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

El confinamiento se realizara de acuerdo al diseño, y en las áreas cercanas a los apoyos y al nudo se colocaran estribos a cada 40 milímetros.



### 5.3. Diseño del elemento 2

Se utilizara el mismo volumen de acero de refuerzo que en el elemento 1. También se debe chequear la sección 11.5.3.1 del código. Como se comprobará más adelante el valor que hace que se cumpla estos criterios es un  $T_u$  de aproximadamente 6,60 KN-m, y la fuerza P de diseño se obtiene de:

$$T_u = \frac{(P * L_b)}{2}; \quad P = \frac{2T_u}{L_b} = \frac{2 \times 6,60 \text{ kN} - \text{m}}{0,60 \text{ m}} = 22 \text{ kN}$$

#### 5.3.1. Análisis estructural

La longitud efectiva para el elemento será la longitud de la viga menos 400 milímetros de empotramiento en cada apoyo.

$$L_{ef} = L - 2(0,40) = 2\text{m} - 2(0,40\text{m}) = 1,20\text{m}$$

El procedimiento para calcular el corte y momentos flexionantes totales es el mismo que para el elemento 1 y se muestran en la tabla XXVIII.

Tabla XXVIII. **Corte y momentos totales para el elemento 2**

<b>Viga principal</b>		
	<b>suma</b>	<b>Total</b>
$Mf_{(+)}_{Izq}$	$-0,30 + 3,30$	3,00 kN – m
$Mf_{(+)}_{Der}$	$-0,30 + 3,30$	3,00 kN – m
$Mf_{(-)}$	$0,21 - 3,30$	-3,09 kN – m
$V_{(Izq)}$	$1,27 - 11,00$	-9,73 kN
$V_{(Der)}$	$-1,27 + 11,00$	9,73 kN
<b>Viga secundaria</b>		
$Mf_{(-)}_{Izq}$	$-0,25 + 13,20$	12,95 kN – m
$Mf_{(-)}_{Der}$	$0 + 0$	0
$V_{(Izq)}$	$-0,85 + 22,00$	21,15 kN
$V_{(Der)}$	$0 + 22,00$	22,00 kN

Fuente: elaboración propia.

### 5.3.2. **Diseño del acero de refuerzo por flexión corte y torsión para la viga principal**

El diseño se muestra de la tabla XXIX a la tabla XXXVI.

Tabla XXIX. **Diseño por flexión**

Paso	Ecuación	Valor
1	$\rho_{bal} = \frac{0,85(0,85)(28)}{(420)} \left( \frac{600}{600 + 420} \right)$	0,028333333
2	$\rho_{max} = 0,5(0,028333333)$ $A_{S_{max}} = 0,014166667(200)(260)$	0,01416667 736,67 mm <sup>2</sup>
3	$Mu_{max} = 0,9(736,67)(420) \left( 260 - \frac{65}{2} \right)$ $a = \frac{736,67(420)}{0,85(28)(200)} = 65,00 \text{ mm}$	63349936,65 N – mm 63,35 kN – m
4	Como $3,09 \leq 63,35$ , solo necesita refuerzo a tensión	
5	$3,09 \times 1000^2 = 0,9(A_s)(420) \left( 260 - \frac{a}{2} \right)$ $a = \frac{A_s(420)}{0,85(28)(200)}$	Requerido por flexión $A_s = 31,61 \text{ mm}^2$
6	$A_{s,min} = \frac{0,25\sqrt{28}}{420} (200)(260) \geq \frac{1,4}{420} (200)(260)$	Colocar 173,00 mm <sup>2</sup>

Fuente: elaboración propia.

$$T_u = \frac{(PL_b)}{2} = \frac{(22,00 \text{ KN})(0,6 \text{ m})}{2} = 6,60 \text{ kN – m}$$

Tabla XXX. **Chequeo del momento torsor aplicado**

Paso	Ecuación	Valor
1	$A_{cp} = (200)(300)$	60000 mm <sup>2</sup>
2	$P_{cp} = 2(200 + 300)$	1000 mm <sup>2</sup>
3	$T_u \leq 0,85(0,083)(1)\sqrt{28} \left( \frac{60000^2}{1000} \right)$	1343935,84 N – mm 1,34 kN – m
4	Como 6,60 KN – m $\geq$ 1,34 kN – m; Es necesario refuerzo por torsión.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXI. **Propiedades de la sección**

Paso	Ecuación	Valor
1	$x_1 = 200 \text{ mm} - \left( 40 \text{ mm} + \frac{6,4 \text{ mm}}{2} \right)$	135,90 mm
2	$y_1 = 300 \text{ mm} - \left( 40 \text{ mm} + \frac{6,4 \text{ mm}}{2} \right)$	235,90 mm
3	$A_{oh} = 85,9(235,9)$	32058,81 mm <sup>2</sup>
4	$A_o = 0,85(20263,81)$	27249,99mm <sup>2</sup>
5	$P_h = 2(135,9 + 235,9)$	743,60 mm

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXII. **Chequeo de la sección transversal**

Paso	Ecuación	Valor
1	$V_c = 0,17(1)\sqrt{28}(200)(260)$	46776,88 N 46,78 kN
2	$\sqrt{\left(\frac{9,73 \times 1000}{200(260)}\right)^2 + \left(\frac{(6,60 \times 1000^2)743,60}{1,7(32058,81)^2}\right)^2}$ $\leq 0,85 \left(\frac{46\ 776,88}{200(260)} + 0,66\sqrt{28}\right)$	2,81 N/mm <sup>2</sup>  ≤ 3,73 N/mm <sup>2</sup>
3	La sección es suficientemente grande para soportar los esfuerzos de torsión. Se aprecia que la sección es bastante holgada respecto a la desigualdad propuesta por el código, ya que en este caso se basa en el área de acero del elemento 1.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXIII. **Refuerzo transversal requerido por torsión**

Paso	Ecuación	Valor
1	$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{6,60}{0,85}$	7,76 kN – m
2	$\theta$	45°
3	$7,76 \times 1000^2 = \frac{2(27249,99)(A_t)(420)}{s} \cot(45)$	$\frac{A_t}{s} = 0,34 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$
4	$A_t/s$ esta dado para una rama del estribo	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXIV. **Refuerzo transversal requerido por corte**

Paso	Ecuación	Valor
1	$V_u > \frac{1}{2}V_c; 9,73 > \frac{1}{2}(46,78)$	$9,73 < 23,39$
2	No es necesario el refuerzo por cortante	

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXV. **Diseño de los estribos**

Paso	Ecuación	Valor
1	$\frac{A_{v+t}}{s} = 2(0,34) + 0$	$0,68 \text{ mm}^2/\text{mm}$
2	$A_{bt}$ varilla #2	$32,17 \text{ mm}^2$
3	$s = \frac{2(32,17)}{0,68}$	$94,62 \text{ mm}$
4	Separación máxima $743,6/8 = 92,95;$ 300mm	colocar @ 90 mm
5	$(A_v + 2A_t) = 0,062\sqrt{28} \frac{200(80)}{420}$ $\geq \frac{0,35(200)(80)}{420}$	$0 + 2(32,17) > 12,50;$ $0 + 2(32,17) > 13,33;$ Ok.

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXXVI. **Diseño del refuerzo longitudinal**

Paso	Ecuación	Valor
1	$A_L = (0,34)(743,6) \left(\frac{420}{420}\right) \cot^2 45$	252,82 mm <sup>2</sup>
2	$A_{L,min} = \frac{0,42\sqrt{28}(60000)}{420} - (0,34)(743,60) \left(\frac{420}{420}\right)$	64,67 mm <sup>2</sup>
3	$(0,34 \geq 0,175(200)) / 420 = 0,083$	OK
4	El acero longitudinal por torsión se debe repartir en las cuatro esquinas de la sección transversal de la viga y en las barras superiores se debe adicionar el acero requerido por flexión.	
5	Área de acero en la cama inferior; $252,82/2 = 126,41\text{mm}^2$	Colocar 2 #3; $A_s = 142 \text{ mm}^2$
6	Área de acero en la cama superior; $126,41 + 31,61 = 158,00 \text{ mm}^2$	Colocar 2 #3; $A_s = 142 \text{ mm}^2$ Se encuentra dentro de un rango aceptable.

Fuente: elaboración propia.

### 5.3.3. **Diseño del acero de refuerzo por corte y flexión para la viga secundaria**

No es necesario detallar el diseño, este elemento chequea con el área de acero longitudinal mínimo, al igual que en el elemento 1.

### 5.3.4. **Diseño del nudo y los apoyos**

La separación de los estribos será de acuerdo al diseño y en las áreas cercanas a los apoyos y al nudo se colocarán estribos a cada 40 milímetros. Los anclajes serán iguales a los del elemento 1.

#### 5.4. Resumen del diseño de los elementos

En la tabla XXXVII se comparan los aspectos más importantes en el diseño de de la viga principal de ambos elementos.

Tabla XXXVII. Comparación en el diseño de ambos elementos

Propiedad	Elemento 1	Elemento 2
$M_u$	2,29 kN – m	3,09 kN – m
	Dif = 26%	
$V_u$	5,59 kN	9,73 kN
	Dif = 43%	
$T_u$	4,02 kN – m	6,60 kN – m
	Dif = 39%	
$A_s$	mínimo	mínimo
$\frac{A_t}{s}$	0,33	0,34
	Dif = 3%	
$\frac{A_v}{s}$	0	0
	-	
S	80 mm	90 mm
	Dif = 11%	
$A_l$	212,39 mm <sup>2</sup>	252,82 mm <sup>2</sup>
	Dif = 16%	
$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1,7 A_{oh}^2}\right)^2}$ $\leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0,66 \sqrt{f'_c}\right)$	3,71 ≤ 3,73	2,81 ≤ 3,73
	Holgura = 0,5%	Holgura = 25%
Cama superior $A_{s+1}$ (requerida) $A_{s+1}$ (a colocar)	119,09 142,00	158,00 142,00
	Holgura = 16%	Holgura = 0%
Cama inferior $A_{s+1}$ (requerida) $A_{s+1}$ (a colocar)	106,20 142,00	126,41 142,00
	Holgura = 25%	Holgura = 11%

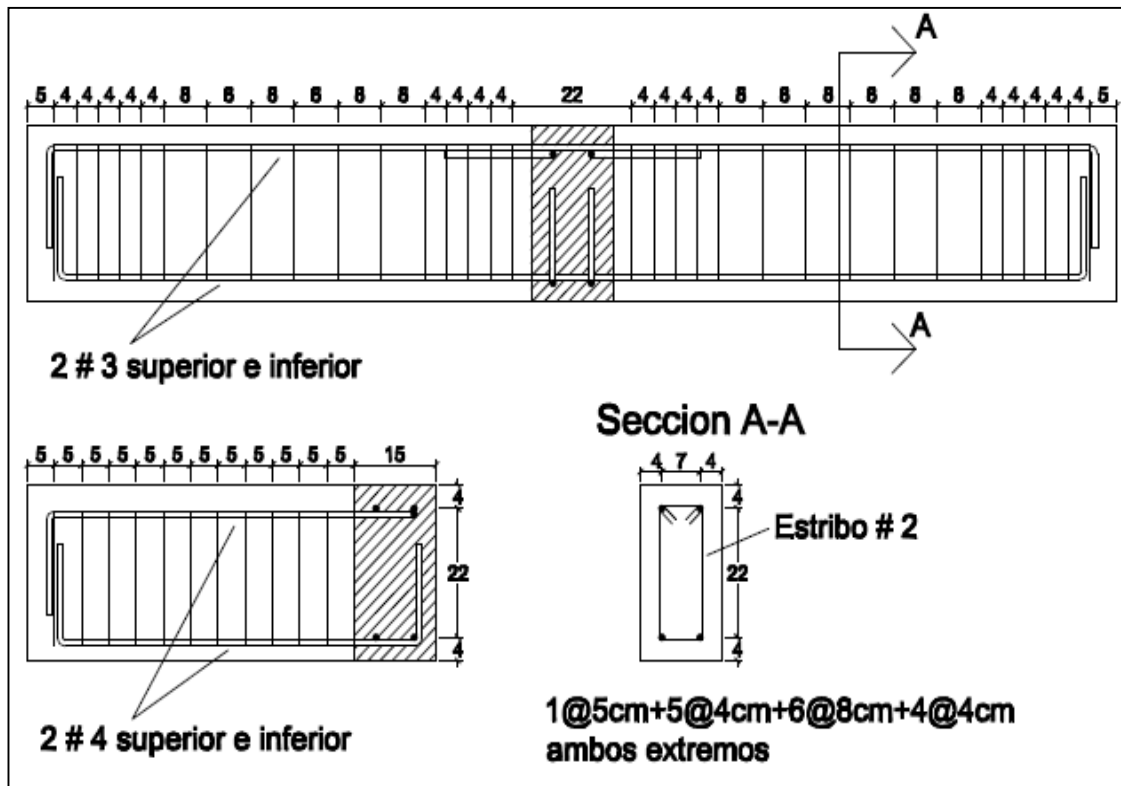
Fuente: elaboración propia.



## 5.5. Esquema del armado de los elementos

En la figura 43 se muestra el armado del elemento 1. El armado en el elemento 2 es el mismo pero la separación de 8 cm cambia a 9 cm y la forma del estribo también es distinta como se indico anteriormente.

Figura 43. Armado del elemento 1



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

## 5.6. Construcción y ensayo de los elementos

El inicio del proceso de construcción del elemento son los estribos, luego se procede a amarrarlos en las barras longitudinales. En la figura 44 se muestran los estribos utilizados para cada elemento.

Figura 44. Estribos de los elementos



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

El proceso de amarrado de los estribos es sencillo solo se debe de cuidar que el gancho de este quede rotado. La colocación del estribo en las barras longitudinales para ambos elementos se muestra en la figura 45.

Figura 45. Colocación del estribo



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

Algunos detalles más como amarre de estribos, confinamiento y ganchos de anclaje, se muestran en la figura 46, 47 y 48.

Figura 46. **Amarre de estribos**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

Figura 47. **Detalle de armado**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

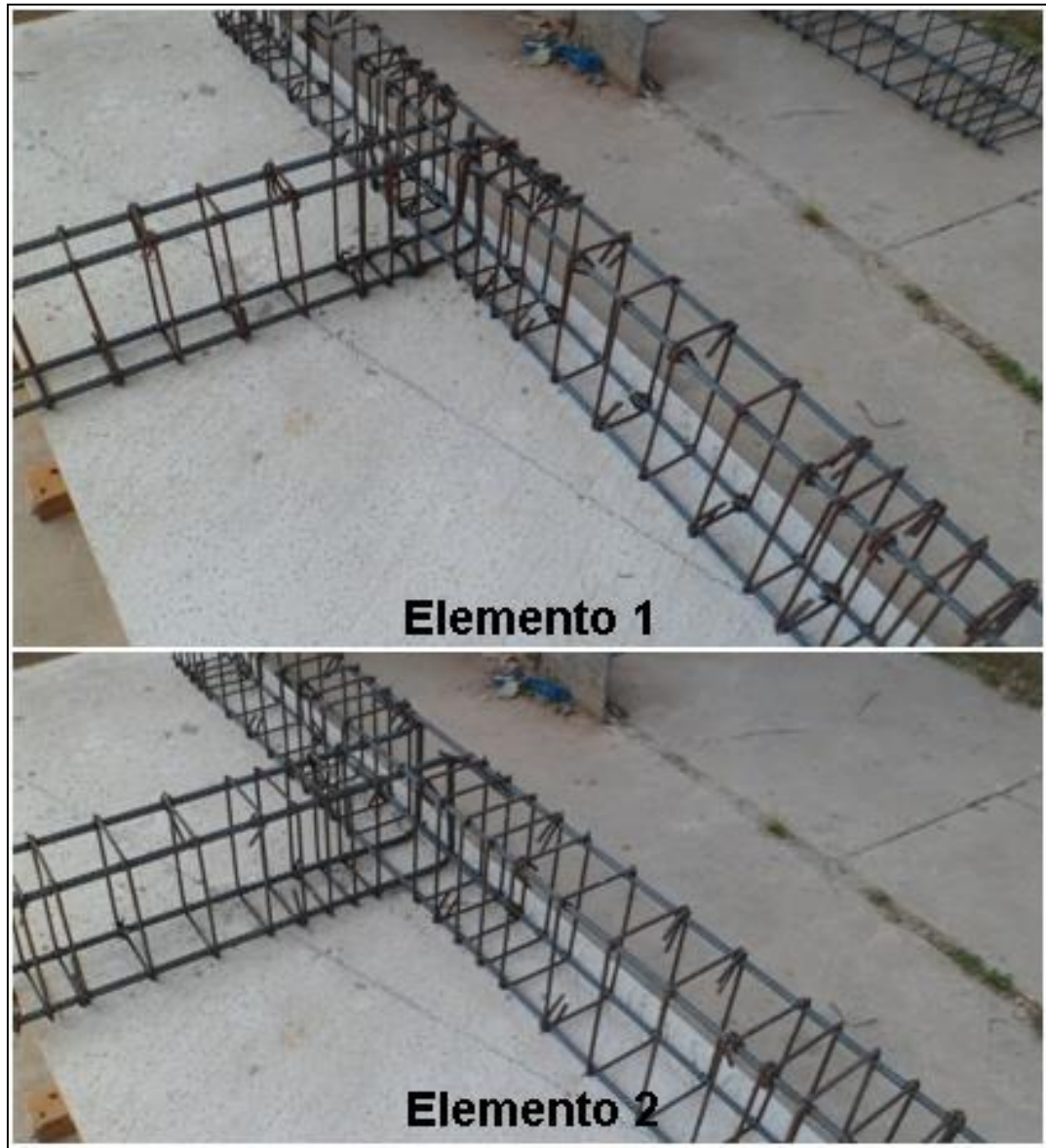
Figura 48. Armado del nudo



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

El armado de ambos elementos se observan en la figura 49, solamente basta construir la formaleta o cimbra que será la que de forma al concreto mientras este alcanza resistencia propia, esta se realizará con madera.

Figura 49. **Armado de los elementos**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

Los elementos antes de ser ensayados se muestran en la figura 50, se esperó que la resistencia del concreto alcanzara los 28 días.

Figura 50. **Elementos a ensayar**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

La forma en la que se colocaron los elementos para proceder a aplicar carga se muestra en la figura 51.

Figura 51. **Elemento 1 al inicio del ensayo**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC

## 6. RESULTADOS OBTENIDOS DEL ENSAYO

### 6.1. Propiedades del concreto

Parte fundamental del diseño de los elementos es el concreto, a continuación se muestran resultados de las pruebas realizadas a las muestras de concreto fresco y endurecido.

#### 6.1.1. Peso específico del concreto

Datos obtenidos:

$$W_{\text{tara}} = 3\,625 \text{ kg}; \quad W_{\text{tara+concreto}} = 20\,024 \text{ kg}$$

$$\gamma_c = \frac{W_{\text{tara+concreto}} - W_{\text{tara}}}{V_{\text{tara}}} = \frac{(20,024 - 3,625)\text{kg}}{7 \text{ lts} \times \frac{1\text{m}^3}{1000} \text{ lts}} = 2\,342,71 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

#### 6.1.2. Consistencia del concreto

Prueba realizada mediante el cono de Abrams, Los asentamientos para una mezcla a mano y de consistencia blanda, generalmente se encuentra entre 50 y 100 mm.

Asentamiento obtenido 95 mm.



### 6.1.3. Resistencia a compresión de los testigos

En la tabla XXXVIII se muestran los resultados de los cilindros ensayados a los 28 días.

Tabla XXXVIII. Resultados de ensayo a compresión de testigos

No. cilindro	Edad en días	Cilindro representativo de la fundición	Peso en kg	Diámetro en cm	Altura en cm	Carga en lb	Resistencia MPa	Resistencia en lb/plg <sup>2</sup>
1	28	Viga	12,12	14,90	29,30	90 941	23,20	3 370,00
2	28	Viga	12,07	15,18	29,33	94 282	23,20	3 370,00

Fuente: Sección de concretos, Centro de Investigaciones de Ingeniería USAC.

### 6.1.4. Resumen de las pruebas

En la tabla XXXIX se muestra el chequeo de las propiedades del concreto utilizado en los elementos.

Tabla XXXIX. **Propiedades teóricas y experimentales del concreto**

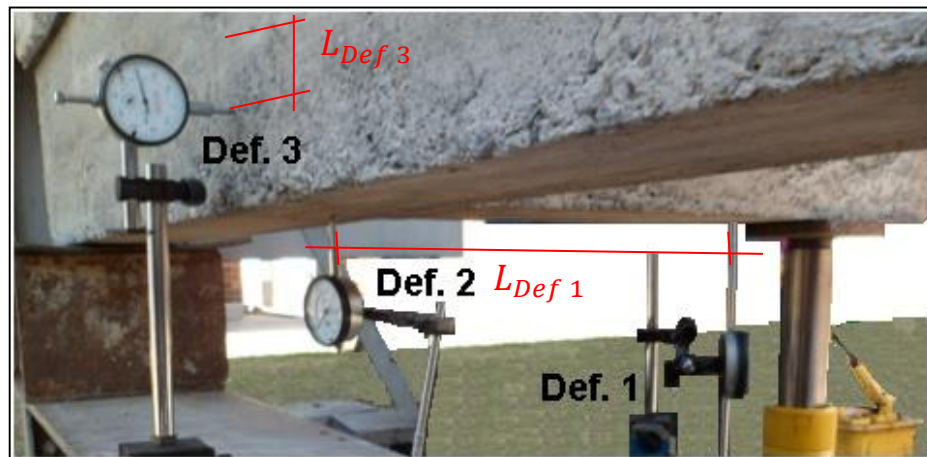
No.	Descripción	Valor experimental	Valor teórico
1	Peso específico	2 343 kg/m <sup>3</sup>	2300 – 2350 kg/m <sup>3</sup>
2	Asentamiento	95 mm	50 – 100 mm
3	Resistencia a la compresión	23,20 Mpa	28 Mpa

Fuente: elaboración propia.

## 6.2. Lectura de los deformómetros y ángulos de giro

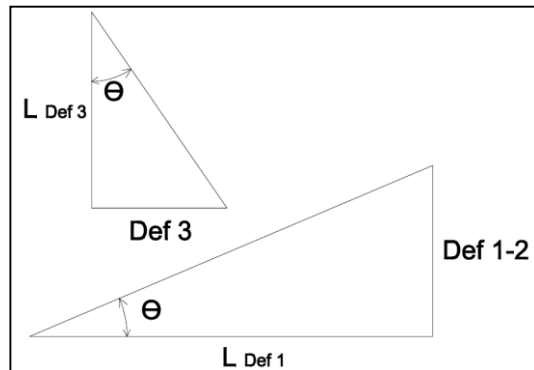
Para la realización del ensayo se utilizaron tres deformómetros colocados como se indica en la figura 52.

Figura 52. **Colocación de deformómetros**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

Figura 53. **Relaciones trigonométricas para los deformómetros**



Fuente: elaboración propia, con base al programa AUTOCAD 2014.

La lectura del deformómetro 2 indica la deformación por flexión de la viga principal, para calcular el ángulo de giro se le resta a la lectura dada por el deformómetro 1. El ángulo de giro del elemento también se evalúa desde otra posición utilizando las lecturas del deformómetro 3. Las relaciones trigonométricas se muestran en la figura 53.

Tabla XL. **Lecturas de los deformómetros para el elemento 1**

<b>Pu (KN)</b>	<b>Def. 1 (mm)</b>	<b>Def. 2 (mm)</b>	<b>Def. 1-2 (mm)</b>	<b>Def. 3 (mm)</b>
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,15	0,32	0,03	0,29	0,05
2,29	0,65	0,05	0,60	0,15
3,44	1,18	0,06	1,12	0,33
4,59	1,78	0,08	1,70	0,48
5,74	2,36	0,10	2,26	0,63
6,88	2,78	0,38	2,40	0,79
8,03	3,53	0,61	2,92	1,04
9,18	4,16	0,69	3,47	1,27
10,32	4,68	0,76	3,92	1,42
11,47	5,23	0,86	4,37	1,60
12,62	5,90	0,97	4,93	1,83
13,77	6,20	1,02	5,18	2,06
14,91	6,53	1,04	5,49	2,36
16,06	7,40	1,12	6,28	2,72
17,21	9,66	1,19	8,47	3,05
18,35	10,83	1,30	9,53	3,43
19,50	14,27	1,57	12,70	5,08
20,65	17,28	1,73	15,55	5,66
21,80	22,71	2,02	20,69	7,19
20,65	22,71	2,02	20,69	7,19
22,94	27,11	2,67	24,44	7,95

Fuente: elaboración propia.

Las lecturas obtenidas de cada deformómetro, para el elemento 1 se muestran en la tabla XL y para el elemento 2 en la tabla XLI.

Tabla XLI. Lecturas de los deformómetros para el elemento 2

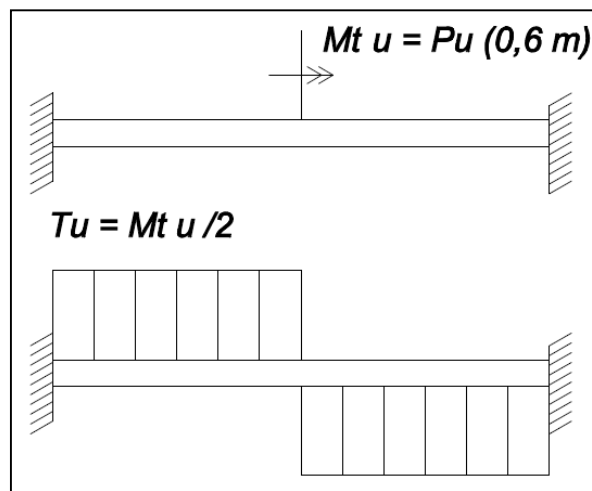
<b>Pu (KN)</b>	<b>Def. 1 (mm)</b>	<b>Def. 2 (mm)</b>	<b>Def. 1-2 (mm)</b>	<b>Def. 3 (mm)</b>
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,15	0,01	0,00	0,01	0,00
2,29	0,03	0,03	0,00	0,03
3,44	0,04	0,03	0,01	0,05
4,59	0,33	0,03	0,30	0,10
5,74	0,74	0,04	0,70	0,10
6,88	1,15	0,15	1,00	0,13
8,03	1,54	0,15	1,39	0,13
9,18	1,97	0,18	1,79	0,13
10,32	2,30	0,18	2,12	0,18
11,47	2,80	0,18	2,62	0,20
12,62	3,27	0,19	3,08	0,20
13,77	3,73	0,20	3,53	0,20
14,91	4,22	0,23	3,99	0,25
16,06	4,78	0,23	4,55	0,25
17,21	5,26	0,23	5,03	0,30
18,35	5,81	0,23	5,58	0,36
19,50	6,62	0,23	6,39	0,41
20,65	7,32	0,24	7,08	0,43
21,80	7,82	0,30	7,52	0,51
22,94	8,50	0,33	8,17	0,53
24,09	9,20	0,36	8,84	0,58
25,24	9,25	0,41	8,84	1,02
26,39	11,48	0,51	10,97	1,22
27,53	14,31	0,88	13,43	4,80
28,68	14,93	1,19	13,74	5,44
29,83	16,87	1,42	15,45	5,99
30,97	54,42	5,49	48,93	6,48

Fuente: elaboración propia.

El momento torsor actuante aplicado  $Mt_u$  se obtiene multiplicando  $Pu$  por el brazo de 0,6 metros,  $T_u$  se obtiene del diagrama de momento torsor de la figura 54 como:

$$T_u = \frac{Mt_u}{2}$$

Figura 54. Diagrama de momento torsor



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Los ángulos de giro para el elemento 1 se obtienen de:

$$\theta_{1-2} = \tan^{-1} \frac{\text{Def. 1} - 2}{465} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180}; \quad \theta_3 = \tan^{-1} \frac{\text{Def. 3}}{86} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180}$$

Y para el elemento 2 se obtienen de:

$$\theta_{1-2} = \tan^{-1} \frac{\text{Def. 1} - 2}{460} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180}; \quad \theta_3 = \tan^{-1} \frac{\text{Def. 3}}{110} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180}$$

Los ángulos de giro para el elemento 1 se muestran en la tabla XLII y para el elemento 2 en la tabla XLIII.

Tabla XLII. **Momento torsor y ángulo de giro para el elemento 1**

$M_{tU}$ (kN-m)	$T_U$ (kN-m)	$\theta_{1-2}$ Rad x10-3	$\theta_3$ Rad x10-3	$\theta_{prom}$ Rad x10-3
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,69	0,34	0,63	0,59	0,61
1,38	0,69	1,29	1,77	1,53
2,06	1,03	2,40	3,84	3,12
2,75	1,38	3,66	5,61	4,64
3,44	1,72	4,86	7,38	6,12
4,13	2,06	5,16	9,16	7,16
4,82	2,41	6,28	12,11	9,19
5,51	2,75	7,47	14,77	11,12
6,19	3,10	8,43	16,54	12,48
6,88	3,44	9,39	18,60	14,00
7,57	3,79	10,61	21,26	15,94
8,26	4,13	11,15	23,92	17,53
8,95	4,47	11,80	27,46	19,63
9,64	4,82	13,51	31,59	22,55
10,32	5,16	18,20	35,43	26,82
11,01	5,51	20,50	39,85	30,18
11,70	5,85	27,29	59,00	43,15
12,39	6,19	33,43	65,77	49,60
13,08	6,54	44,47	83,39	63,93
12,39	6,19	44,47	83,39	63,93
13,77	6,88	52,52	92,18	72,35

Fuente: elaboración propia.

Tabla XLIII. **Momento torsor y ángulo de giro para el elemento 2**

<b>Mt<sub>U</sub> (kN-m)</b>	<b>T<sub>U</sub> (kN-m)</b>	<b>θ<sub>1-2</sub> Rad x10-3</b>	<b>θ<sub>3</sub> Rad x10-3</b>	<b>θ<sub>prom</sub> Rad x10-3</b>
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,69	0,34	0,02	0,00	0,01
1,38	0,69	0,01	0,23	0,12
2,06	1,03	0,03	0,46	0,25
2,75	1,38	0,66	0,92	0,79
3,44	1,72	1,53	0,92	1,22
4,13	2,06	2,17	1,15	1,66
4,82	2,41	3,02	1,15	2,09
5,51	2,75	3,90	1,15	2,53
6,19	3,10	4,61	1,62	3,11
6,88	3,44	5,70	1,85	3,77
7,57	3,79	6,69	1,85	4,27
8,26	4,13	7,67	1,85	4,76
8,95	4,47	8,68	2,31	5,49
9,64	4,82	9,89	2,31	6,10
10,32	5,16	10,94	2,77	6,85
11,01	5,51	12,13	3,23	7,68
11,70	5,85	13,89	3,69	8,79
12,39	6,19	15,39	3,93	9,66
13,08	6,54	16,34	4,62	10,48
13,77	6,88	17,76	4,85	11,30
14,45	7,23	19,22	5,31	12,27
15,14	7,57	19,22	9,24	14,23
15,83	7,92	23,84	11,08	17,46
16,52	8,26	29,20	43,61	36,40
17,21	8,60	29,85	49,37	39,61
17,90	8,95	33,57	54,44	44,00
18,58	9,29	105,98	58,81	82,40

Fuente: elaboración propia.



Para el elemento 1 se obtuvieron lecturas en el proceso de descarga del gato hidráulico, el procedimiento fue el mismo que para la carga, los resultados se tabulan en la tabla XLIV.

Tabla XLIV. **Datos de descarga para el elemento 1**

$Mt_U$ (kN-m)	$T_U$ (kN-m)	$\theta_{1-2}$ Rad x10-3	$\theta_3$ Rad x10-3	$\theta_{prom}$ Rad x10-3
13,77	6,88	52,52	92,18	72,35
11,01	5,51	52,12	92,18	72,15
8,26	4,13	45,14	87,49	66,32
5,51	2,75	37,78	78,40	58,09
2,75	1,38	31,42	65,77	48,59
0,00	0,00	19,63	48,69	34,16
0,00	0,00	18,98	46,63	32,80

Fuente: elaboración propia.

### 6.3. Aspectos observados durante la aplicación de carga

- Algunos aspectos importantes observados se muestran en la tabla XLV.
- La carga en la que apareció la primera fisura se tomo después de su aplicación, la incerteza de la magnitud del momento es de 0,69 kN-m que corresponde a la variación gradual a la que se aplicaron.
- No se utilizó microscopio para identificar el momento en que apareció la primera fisura, fue tomada hasta que fue apreciable por el ojo.

Tabla XLV. **Observaciones durante la aplicación de la carga**

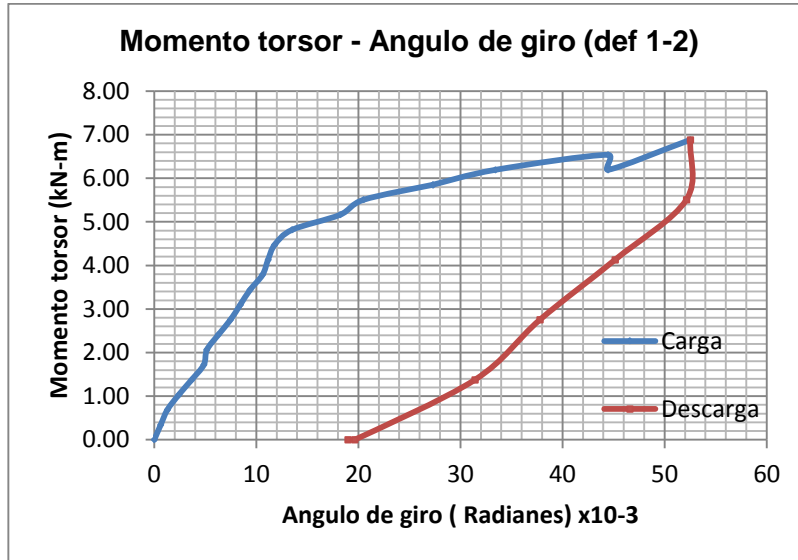
No.	Descripción	Elemento 1	Elemento 2
1	Tu (primera grieta)	3,79 kN-m	7,92 kN-m
2	Tu (ultimas grietas)	5,85 kN-m	8,26 kN-m
3	Tu (carga ultima)	6,89 kN-m	9,29 kN-m
4	Descripción de las grietas durante la aplicación de la carga	Después de la primera fisura, el resto fue apareciendo conforme se aplicaba la carga esto se llevó a cabo lentamente. En ningún momento se dio una pérdida en la integridad del elemento	Después de la primera fisura, el resto fue apareciendo conforme se aplicaba la carga esto se llevó a cabo rápidamente. En ningún momento se dio una pérdida en la integridad del elemento
5	Tipo de falla	Dúctil	Dúctil
6	Integridad de los apoyos	Se presentaron algunas fisuras pero no existió pérdida en la integridad de los apoyos	Se presentaron algunas fisuras pero no existió pérdida en la integridad de los apoyos
7	Carga inicial en los apoyos	44 kN	67 kN
8	Carga final en los apoyos	133 kN	102 kN

Fuente: elaboración propia.

#### 6.4. Gráficos momento torsor-ángulo de giro

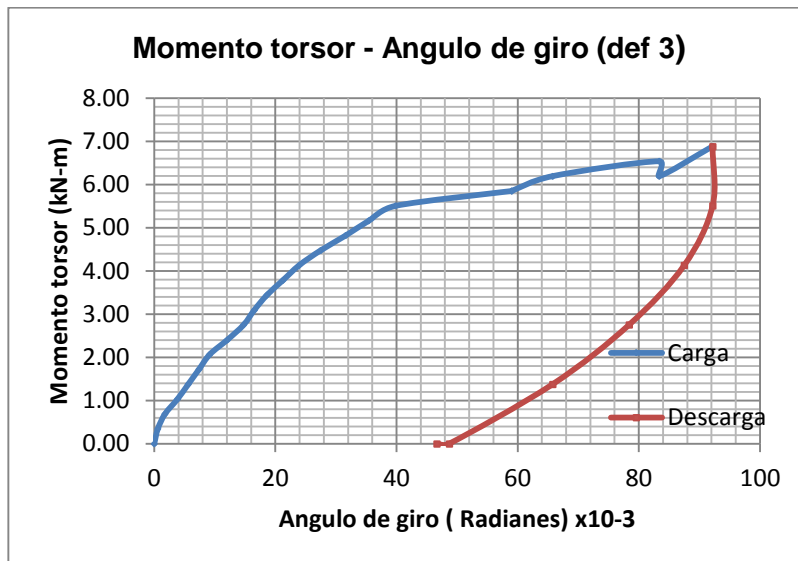
Con los datos de las tablas XLII, XLIII y XLIV se muestran los gráficos momento torsor-ángulo de giro para cada elemento. Los gráficos para el elemento 1 se muestran en la figura 55, 56 y 57. Para el elemento 2 en la figura 58, 59 y 60.

Figura 55. Curva con datos del deformometro 1-2 para el elemento 1



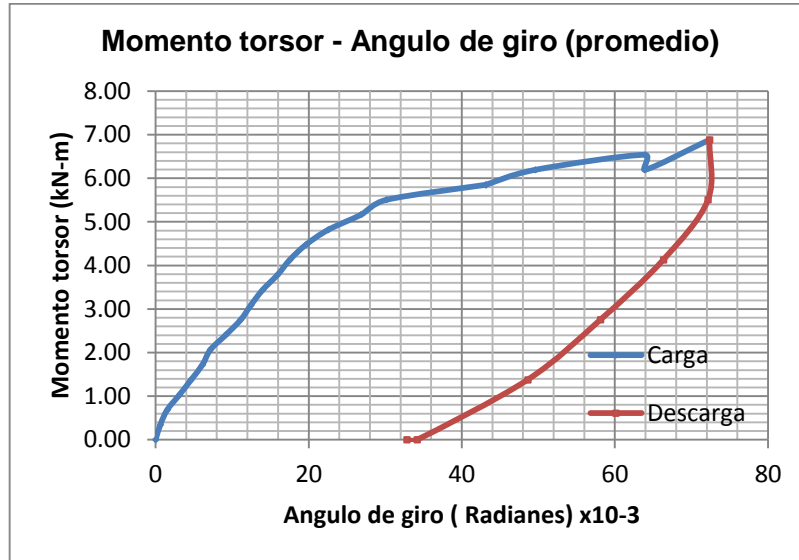
Fuente: elaboración propia.

Figura 56. Curva con datos del deformometro 3 para el elemento 1



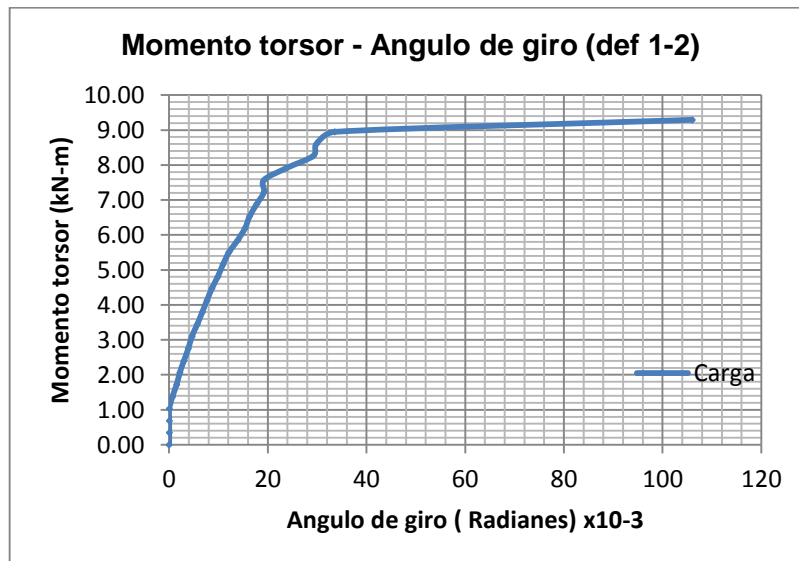
Fuente: elaboración propia.

Figura 57. Curva con datos promedio para el elemento 1



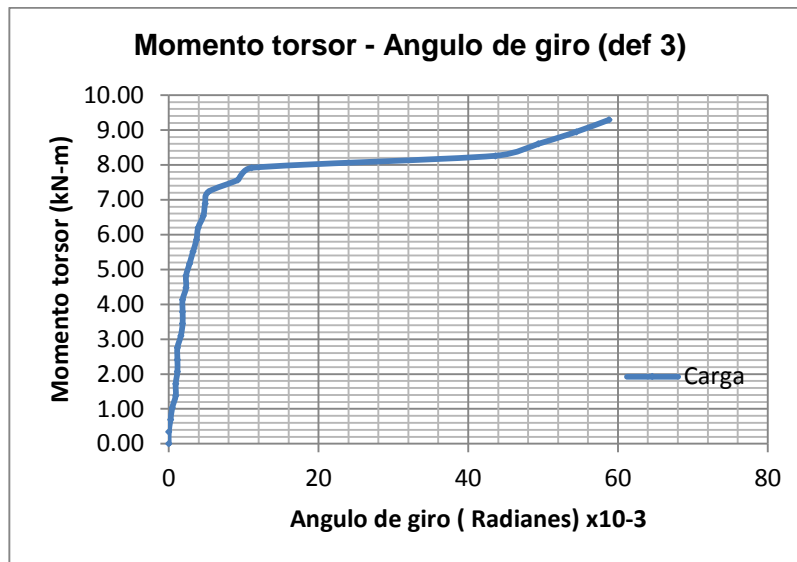
Fuente: elaboración propia.

Figura 58. Curva con datos del deformometro 1-2 para el elemento 2



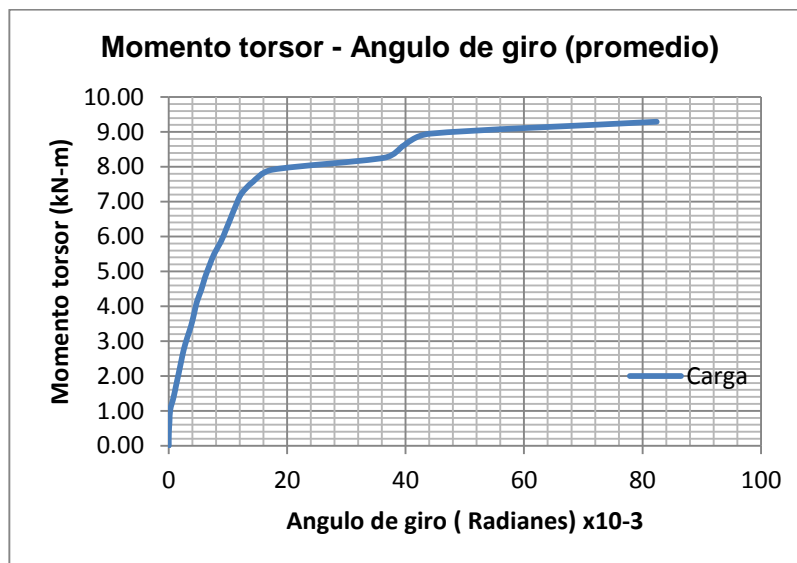
Fuente: elaboración propia.

Figura 59. **Curva con datos del deformometro 3 para el elemento 2**



Fuente: elaboración propia.

Figura 60. **Curva con promedio para el elemento 2**

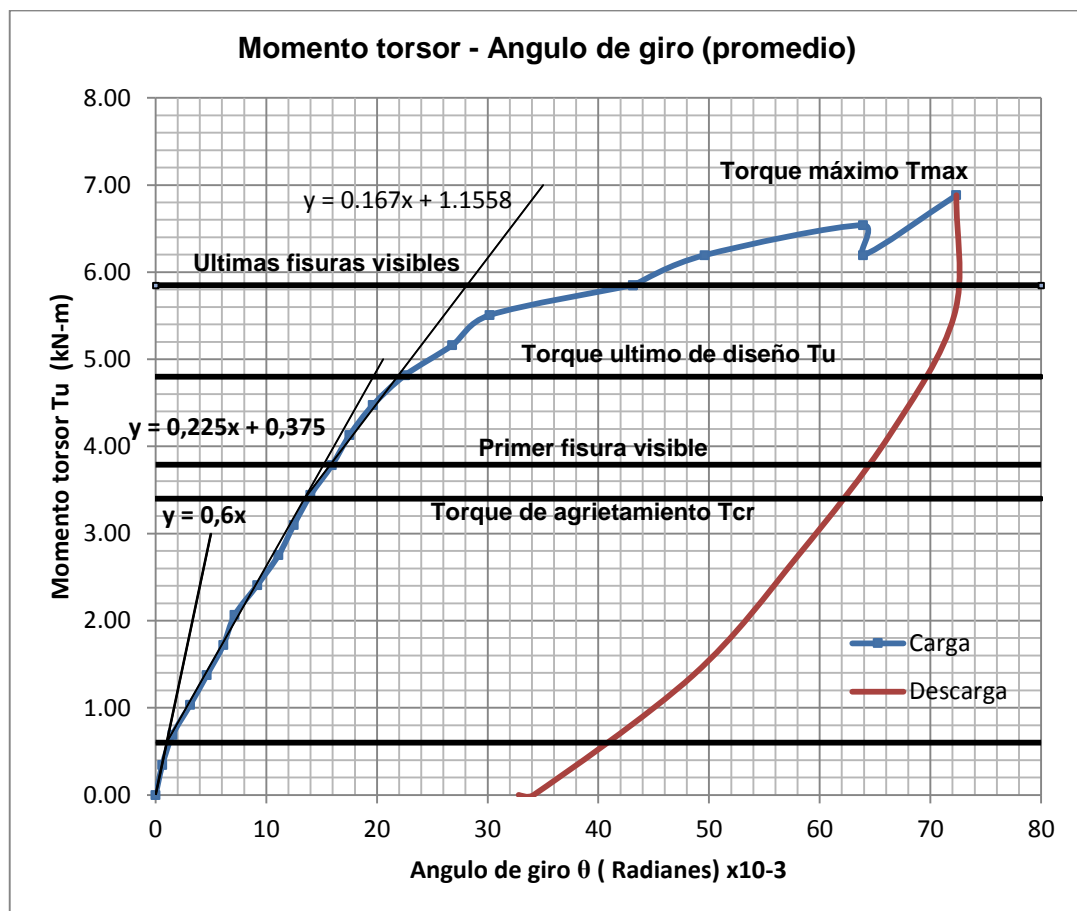


Fuente: elaboración propia.

### 6.5. Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro, para el elemento 1

En la figura 61 se muestra las aproximaciones a funciones lineales mediante líneas de tendencia, de la curva momento torsor-giro para el elemento 1. Esto con la finalidad de obtener la razón de cambio promedio o pendiente de estas.

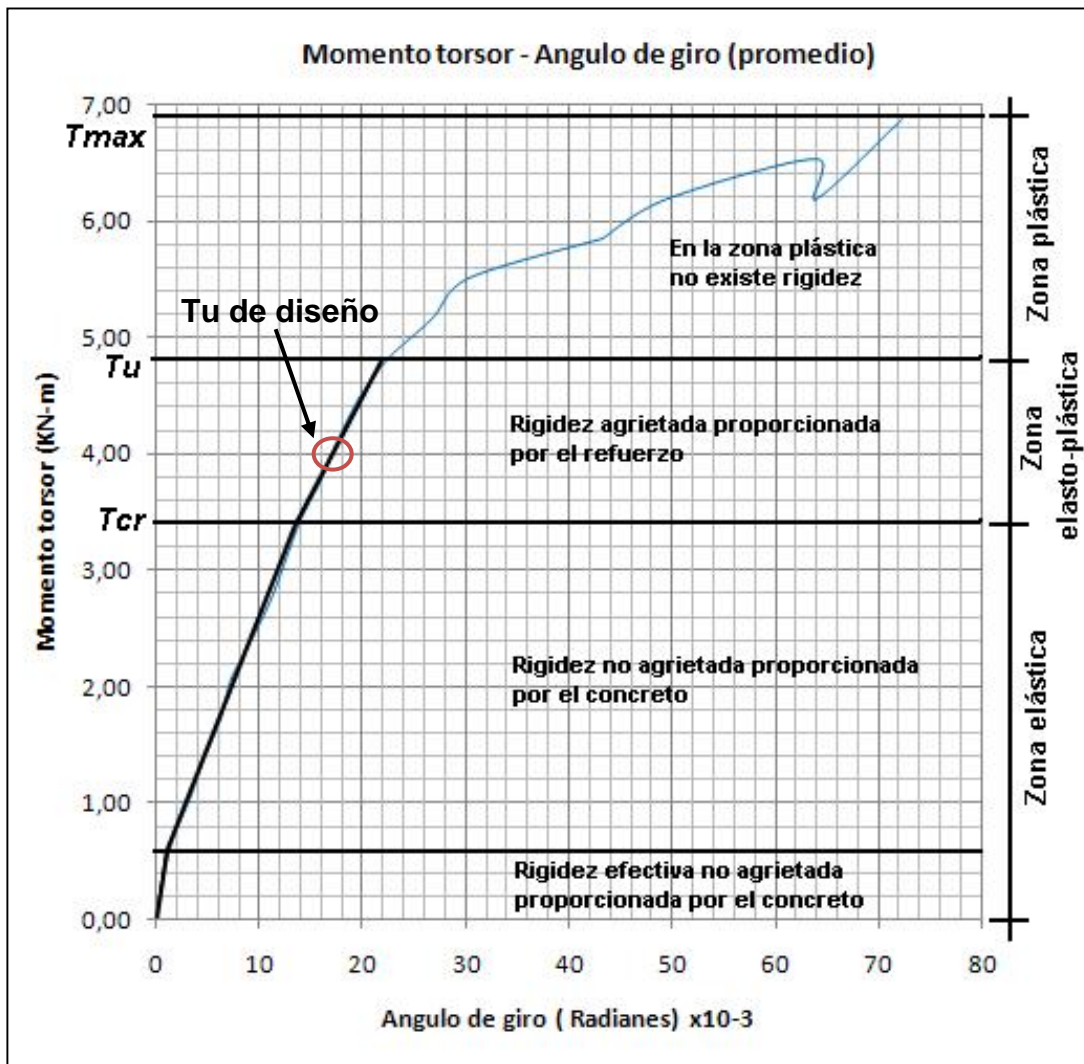
Figura 61. Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro para el elemento 1



Fuente: elaboración propia.

En términos generales y como sistema estructural el comportamiento del elemento se puede dividir en tres etapas. Como se muestra en la figura 62 existe un comportamiento elástico, elasto-plástico y plástico.

Figura 62. Zonas de trabajo del elemento 1



Fuente: elaboración propia.

### 6.5.1. Zona elástica

La elasticidad es la propiedad mecánica de un material a la cual las deformaciones causadas por el esfuerzo desaparecen al removérsele. El acero al evaluarlo independientemente tiene bastante resistencia en el rango elástico, mientras que el concreto es imperfectamente elástico pero bajo cargas pequeñas y de corta duración el material puede ser considerado elástico. En este caso el elemento está conformado de acero y concreto, pero las propiedades pueden ser evaluadas como un conjunto.

Según la figura 62 se determinó que existen dos etapas dentro de la zona elástica, inicialmente el elemento cuenta con rigidez infinita y esta va disminuyendo conforme se aplica la carga, hasta llegar a cero. La primera etapa corresponde a una sección no agrietada de concreto simple, la cual presenta una rigidez grande bajo esfuerzos relativamente pequeños, en este caso hasta un momento de 0,6 kN-m. La teoría de la elasticidad para determinar los esfuerzos cortantes y la rigidez no agrietada de un elemento, únicamente es capaz de predecir valores en esta etapa.

Después que el momento supera los 0,6 kN-m se comienza a dar una redistribución de las partículas en el material debido al flujo de esfuerzos cortantes inducidos en la sección transversal del elemento, dando lugar a una notable pérdida de rigidez en el elemento. Esta constituye la segunda etapa dentro del rango elástico, usualmente es la que se conoce y corresponde a una sección no agrietada en concreto reforzado. La pendiente de esta línea indica la rigidez no agrietada de un elemento bajo torsión.



En esta etapa se comienzan a dar los esfuerzos normales de tensión y compresión inducidos por el cortante; al llegar a la resistencia máxima de tensión en el concreto se comienzan a formar las fisuras; este punto se conoce como el torque de agrietamiento, en este caso se observa en 3,40 kN-m. La primera fisura visible fue hasta 3,79 kN-m.

Después que el elemento se agrieto en torsión el concreto deja de contribuir en la resistencia a tensión del elemento y el refuerzo toma estos esfuerzos, la contribución del concreto se mantiene solamente en los puntales de compresión, puesto que la capacidad que tiene a compresión es mucho mayor que la de tensión.

#### **6.5.2. Zona elasto-plástica**

Esta es la zona de transición entre la zona elástica y plástica del elemento, es la etapa en la que el refuerzo y puntales a compresión del concreto trabajan dentro del rango elástico. El torque de diseño  $T_u$  de un elemento debe estar en este rango, en este caso se observa que va de 3,40 a 4,80 kN-m y el torque de diseño es de 4,02 kN-m.

Esta etapa corresponde a una sección agrietada de concreto reforzado en torsión y la pendiente de la recta indica la rigidez agrietada del elemento.

#### **6.5.3. Zona plástica**

La plasticidad es la propiedad mecánica que le permite a un material deformarse permanente sin llegar a la ruptura.

En el caso del elemento analizado conformado de concreto y acero de refuerzo, la zona plástica depende básicamente de este último, porque es el que se encuentra esforzado por tensión. El acero puede mostrar un efecto de endurecimiento por deformaciones plásticas inducidas, logrando incrementar la rigidez del elemento, pero esto solo ocurrirá si realmente el refuerzo llega a su deformación plástica.

En la zona plástica del elemento esta próxima la falla y se pueden dar dos casos. El primero es por fluencia del acero de refuerzo provocando una falla dúctil, indicando que el elemento fue subreforzado con lo cual, aparecerán grietas excesivas sin que exista pérdida de la integridad del elemento. El segundo caso muy poco frecuente y consiste en la falla por aplastamiento de las diagonales a compresión del concreto, indicando que el elemento fue sobre-reforzado, dando como resultado la pérdida de la integridad del elemento.

Esta zona en nuestro caso inicia en 4,80 kN-m, después de este torque se da un giro apreciable y se observa que las últimas fisuras aparecen a 5,85 kN-m. Valores mayores de carga solo hacen que el elemento presente fisuras más evidentes pero aun presenta resistencia.

Por último al seguir aplicando carga el elemento llego a  $T_u$  de 6,88 kN-m. Perdió toda su rigidez y fue incapaz de resistirse a las deformaciones, llegando al punto de cero rigidez.

Como se observa en la figura 61, en el proceso de descarga el elemento no regreso a su estado inicial, se dio una deformación permanente de  $32,80 \times 10^{-3}$  radianes, y si se observa la deformación a la cual se supone el elemento entro a la zona plástica de  $22,00 \times 10^{-3}$  radianes se ve que existe concordancia.

#### 6.5.4. Rigidez antes del agrietamiento

Como se indicó en el capítulo dos, la rigidez torsional de un elemento de longitud  $L$ , se define como el valor del momento torsor requerido para ocasionar un giro unitario de torsión en su longitud, esto se aplica tanto al cálculo teórico como experimental.

##### 6.5.4.1. Cálculo experimental

Del gráfico de la figura 61 se observan las ecuaciones de las rectas:

$$Y = (0,6x)(1 \times 10^3); \quad Y = (0,225x)(1 \times 10^3) + 0,375$$

El ángulo de giro no agrietado  $\theta$  se obtiene de:

$$0,6 = (0,6x)(1 \times 10^3); \quad x = \theta' = 0,001 \text{ rad} \cong 0,06 \text{ grados}$$

$$3,80 = (0,225x)(1 \times 10^3) + 0,375; \quad x = \theta = 0,0152 \text{ rad} \cong 0,87 \text{ grados}$$

La pendiente es igual a la rigidez efectiva del elemento, se obtiene de:

$$K'_t = 0,6 \times 10^3 = 600 \text{ kN} - \text{m}$$

$$K_t = 0,225 \times 10^3 = 225 \text{ kN} - \text{m}$$

#### 6.5.4.2. Cálculo teórico

La rigidez es igual a:

$$\theta = 1 = \frac{T L}{G J_{eq}}; \quad T = K_t = \frac{G J_{eq}}{L}$$

Con la finalidad de establecer concordancia con el módulo de elasticidad del concreto establecido por el código, la resistencia máxima de ruptura del concreto se multiplicará por 0,85.

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} = \frac{4\,700 \sqrt{0,85(23,2)}}{2(1 + 0,30)} = 8\,027.46 \text{ Mpa}$$

$$J_{eq} = \beta_t b^3 h = 0,23 \times (0,15\text{m})^3 \times 0,30\text{m} = 2,33 \times 10^{-4} \text{m}^4$$

$$K'_t = \frac{G J_{eq}}{L} = \frac{\left(8\,027,46 \times 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}\right) (2,33 \times 10^{-4} \text{m}^4)}{1,50/2 \text{ m}} = 2\,494 \text{ kN} - \text{m}$$

El ángulo de giro se obtiene de:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T L}{G J_{eq}} = \frac{(3,80 \text{ kN} - \text{m})(1,50/2 \text{ m})}{\left(8\,027.46 \times 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}\right) (2,33 \times 10^{-4} \text{m}^4)} = 1,52 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ &= 0,087 \text{ grados} \end{aligned}$$

### 6.5.5. Rigidez después del agrietamiento

El cálculo teórico de la rigidez después del agrietamiento depende también del refuerzo y puede no ser preciso, motivo por el cual, el cálculo de la rigidez se evalúa experimentalmente y se toma directamente del gráfico.

#### 6.5.5.1. Calculo experimental

Del gráfico se observa que la ecuación de la recta es:

$$Y = (0,167x)(1 \times 10^3) + 1,155$$

La pendiente es igual a la rigidez del elemento:

$$m = K_t = 0,167 \times 10^3 = 167 \text{ kN} - \text{m}$$

La relación de rigideces experimentales es igual a:

$$\frac{K'_t \text{ antes del agrietamiento}}{K_t \text{ despues del agrietamiento}} = \frac{600}{167} = 3,59$$

$$\frac{K_t \text{ antes del agrietamiento}}{K_t \text{ despues del agrietamiento}} = \frac{225}{167} = 1,35$$

### 6.5.6. Torque de agrietamiento $T_{cr}$

Del análisis realizado se obtuvo el  $T_{cr}$  experimental igual a 3,40 kN-m, para el cálculo teórico se tiene:

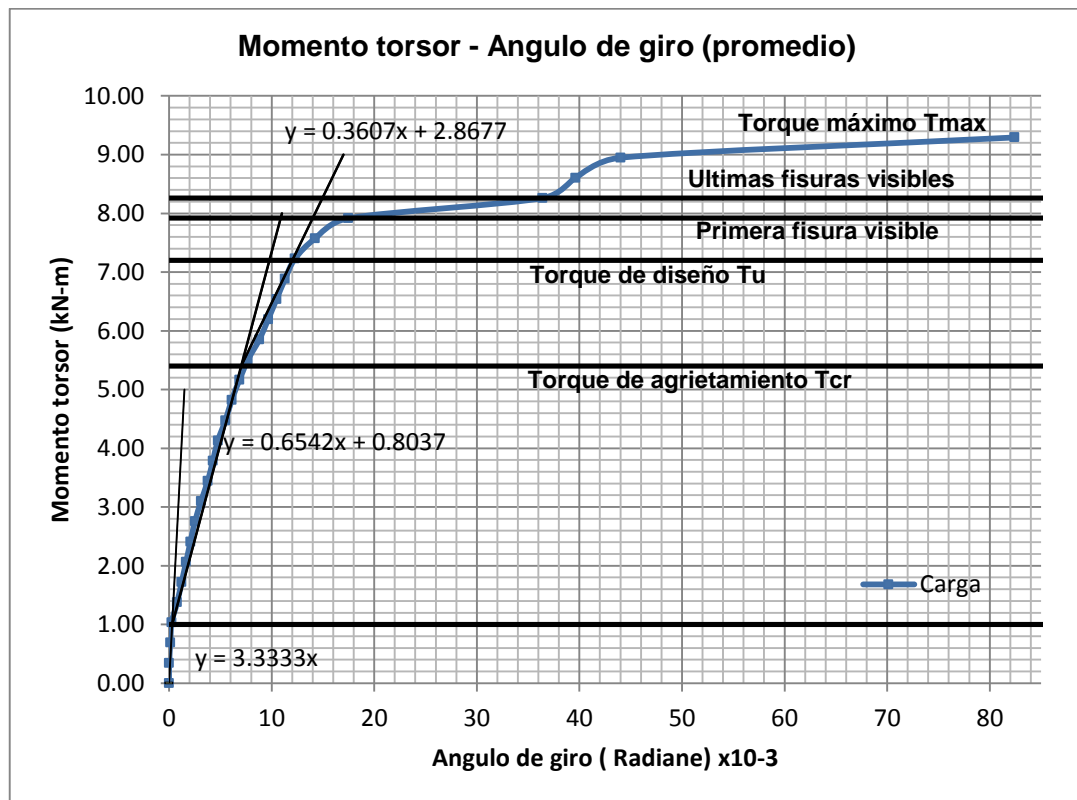
$$T_{cr} = 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \left( \frac{A^2_{cp}}{P_{cp}} \right)$$

$$= 0,33(1)\sqrt{0,85(23,2)}\left(\frac{45\,000^2}{900}\right) = 3\,297\,235,09 \text{ N} - \text{mm} ; T_{cr} = 3,30 \text{ kN} - \text{m}$$

### 6.6. Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro, para el elemento 2

En la figura 63 se muestra las aproximaciones a funciones lineales mediante líneas de tendencia, de la curva momento torsor – giro para el elemento 2.

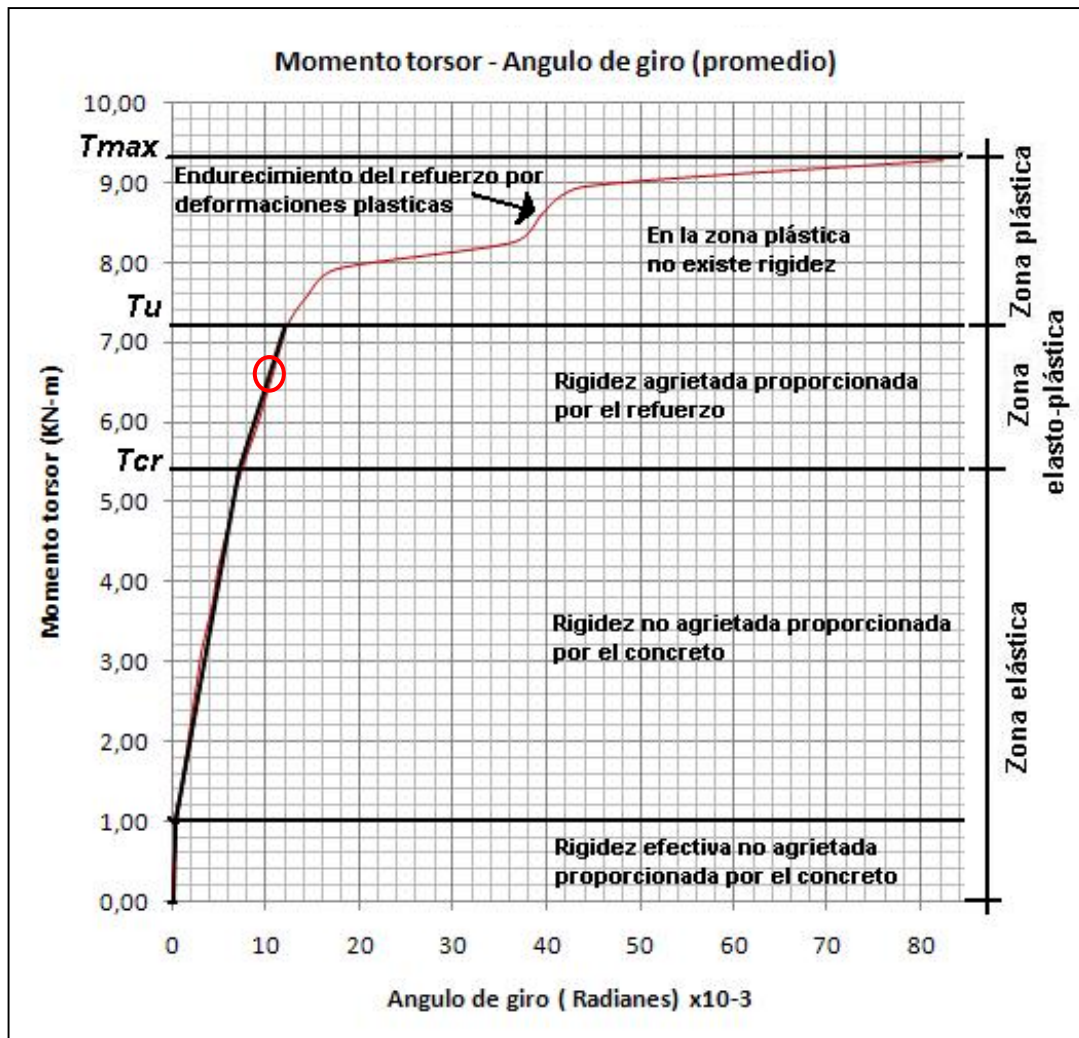
Figura 63. Análisis del gráfico momento torsor-ángulo de giro para el elemento 2



Fuente: elaboración propia.

Las zonas de trabajo del elemento 2 se observan en la figura 64.

Figura 64. Zonas de trabajo del elemento 2



Fuente: elaboración propia.

### **6.6.1. Zona elástica**

La primera etapa corresponde a la rigidez efectiva de una sección no agrietada de concreto simple, esta rigidez se mantiene constante hasta un torque de 1 kN-m aproximadamente.

En la segunda etapa comprende de 1 kN-m hasta llegar al torque de agrietamiento en 5,40 kN-m. La primera fisura fue observada a 7,92 kN-m.

### **6.6.2. Zona elasto-plástica**

Esta es la zona de transición entre la zona elástica y plástica del elemento, en este caso se observa que va de 5,40 a 7,20 kN-m, el torque de diseño es de 6,60 kN-m. La rigidez corresponde a una sección agrietada de concreto reforzado en torsión.

### **6.6.3. Zona plástica**

Esta zona corresponde a valores mayores de 7,20 kN-m hasta llegar al torque máximo.

En este caso se observa lo comentado para el elemento 1, el refuerzo es esforzado por tensión hasta sus deformaciones plásticas produciéndose un efecto de endurecimiento, dando como resultado un incremento en la rigidez del elemento, esto ocurre aproximadamente en 8,26 kN-m. El torque máximo se dio en 9,29 kN-m.



#### 6.6.4. Rigidez antes del agrietamiento

El procedimiento para calcular la rigidez a torsión antes del agrietamiento del elemento 2 es el mismo que para el elemento 1. Se muestran los resultados experimentales y teóricos.

##### 6.6.4.1. Cálculo experimental

Del gráfico de la figura 63 se observan las ecuaciones de las rectas:

$$Y = (3,333x)(1 \times 10^3)$$

$$Y = (0,654x)(1 \times 10^3) + 0,803$$

El ángulo de giro no agrietado  $\theta$  se obtiene de:

$$1 = (3,333x)(1 \times 10^3); \quad x = \theta' = 3 \times 10^{-4} \text{ rad} \cong 0,02 \text{ grados}$$

$$5,40 = (0,654x)(1 \times 10^3) + 0,803; \quad x = \theta = 7 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 0,40 \text{ grados}$$

La pendiente es igual a la rigidez del elemento y es igual a:

$$K'_t = 3,333 \times 10^3 = 3\,333,00 \text{ kN} - \text{m}$$

$$K_t = 0,654 \times 10^3 = 654 \text{ kN} - \text{m}$$

##### 6.6.4.2. Cálculo teórico

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} = \frac{4\,700\sqrt{0,85(23,2)}}{2(1 + 0,30)} = 8\,027.45 \text{ Mpa}$$

$$J_{eq} = \beta_t b^3 h = 0,195 \times (0,20\text{m})^3 \times 0,30\text{m} = 4,68 \times 10^{-4} \text{m}^4$$

$$K'_t = \frac{G J_{eq}}{L} = \frac{(8\,027,45 \times 10^3 \frac{KN}{m^2})(4,68 \times 10^{-4} m^4)}{1,20/2 \text{ m}} = 6\,261,00 \text{ kN} - \text{m}$$

El ángulo de giro se obtiene de:

$$\theta = \frac{T L}{G J_{eq}} = \frac{(5,40 \text{ KN} - \text{m})(1,20/2 \text{ m})}{(8\,027,45 \times 10^3 \frac{KN}{m^2})(4,68 \times 10^{-4} m^4)} = 8,62 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$= 0,05 \text{ grados}$$

### 6.6.5. Rigidez después del agrietamiento

El procedimiento para calcular la rigidez a torsión después del agrietamiento del elemento 2 es el mismo que para el elemento 1. Se muestran los resultados experimentales.

#### 6.6.5.1. Cálculo experimental

Del gráfico se observa que la ecuación de la recta es:

$$Y = (0,360x)(1 \times 10^3) + 2,867$$

La pendiente es igual a la rigidez del elemento:

$$m = K_t = 0,360 \times 10^3 = 360 \text{ kN} - \text{m}$$

La relación de rigideces experimentales es igual a:

$$\frac{K'_t \text{ antes del agrietamiento}}{K_t \text{ despues del agrietamiento}} = \frac{3,333}{360} = 9,26$$

$$\frac{K_t \text{ antes del agrietamiento}}{K_t \text{ despues del agrietamiento}} = \frac{654}{360} = 1,82$$

#### 6.6.6. Torque de agrietamiento $T_{cr}$

Del análisis realizado se tiene que el  $T_{cr}$  experimental es igual a 5,40 kN-m para el cálculo teórico se tiene:

$$T_{cr} = 0,33\lambda\sqrt{f_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right)$$
$$= 0,33(1)\sqrt{0,85(23,2)} \left( \frac{60\,000^2}{1000} \right) = 5\,275\,576,147 \text{ N} - \text{mm} ; \quad T_{cr} = 5,28 \text{ kN} - \text{m}$$

## 7. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO PRESENTADO POR LAS VIGAS ENSAYADAS

### 7.1. Comparación de los resultados experimentales y los teóricos según el ACI para cada viga

En la tabla XLVI se comparan los resultados teóricos con los experimentales para ambos elementos, según el código ACI.

Tabla XLVI. **Comparación de parámetros teóricos y experimentales para ambos elementos**

Descripción	Elemento 1		Elemento 2	
	Teórico	Experimental	Teórico	Experimental
$T_{Cr}$	3,30 kN-m	3,40 kN-m	5,28 kN-m	5,40 kN-m
	Dif = 3 %		Dif = 2 %	
$T_{diseño}$	4,02 kN-m	4,80 kN-m	6,60 kN-m	7,20 kN-m
	Dif = 16 %		Dif = 8 %	
$T_{Maximo}$	-	6,89 kN-m	-	9,29 kN-m
$K'_t$ no agrietada	2 494 kN-m	600 kN-m	6 261 KN-m	3333 kN-m
	Dif = 76 %		Dif = 47 %	
$K_t$ no agrietada	-	225 kN-m	-	654 kN-m
$K_t$ agrietada	-	167 kN-m	-	360 kN-m
$\frac{K'_t \text{ no agrietada}}{K_t \text{ agrietada}}$	3,59		9,26	
$\frac{K_t \text{ no agrietada}}{K_t \text{ agrietada}}$	1,35		1,82	

Fuente: elaboración propia.

### 7.1.1. Comparación del torque último y el torque de agrietamiento de cada viga

En la tabla XLVII se observan los resultados experimentales y el porcentaje de diferencia entre ambos elementos.

Tabla XLVII. Comparación experimental entre ambos elementos

Torque (experimental)	Elemento 1	Elemento 2
$T_u$	4,80 kN – m	7,20 kN – m
	Dif = 33 %	
$T_{cr}$	3,40 kN – m	5,40 kN – m
	Dif = 37 %	

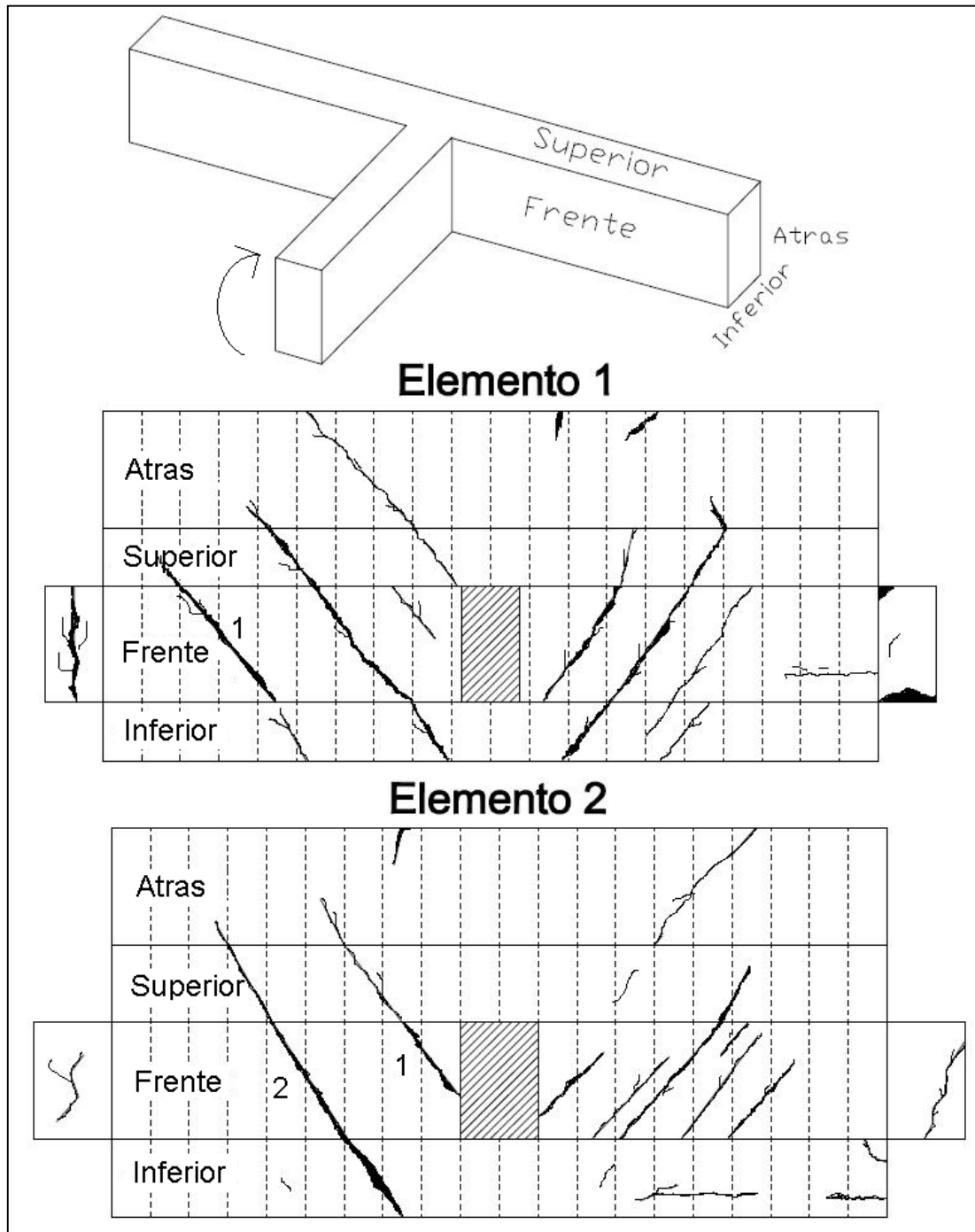
Fuente: elaboración propia.

### 7.1.2. Análisis de las grietas presentadas en cada viga

En la figura 65 se muestra un bosquejo de las grietas que presentaron los elementos, se colocan las cuatro caras del elemento como si se extendiera el área superficial sobre el plano. Las líneas punteadas indican separaciones a cada 100 milímetros.

Ambos elementos presentaron fisuras con un patrón semejante, aunque en el elemento 2 la simetría entre los extremos no es tan marcada como en el elemento 1. El ángulo que presentan las fisuras con el eje longitudinal del elemento es de aproximadamente 45 grados como lo sugiere el código ACI.

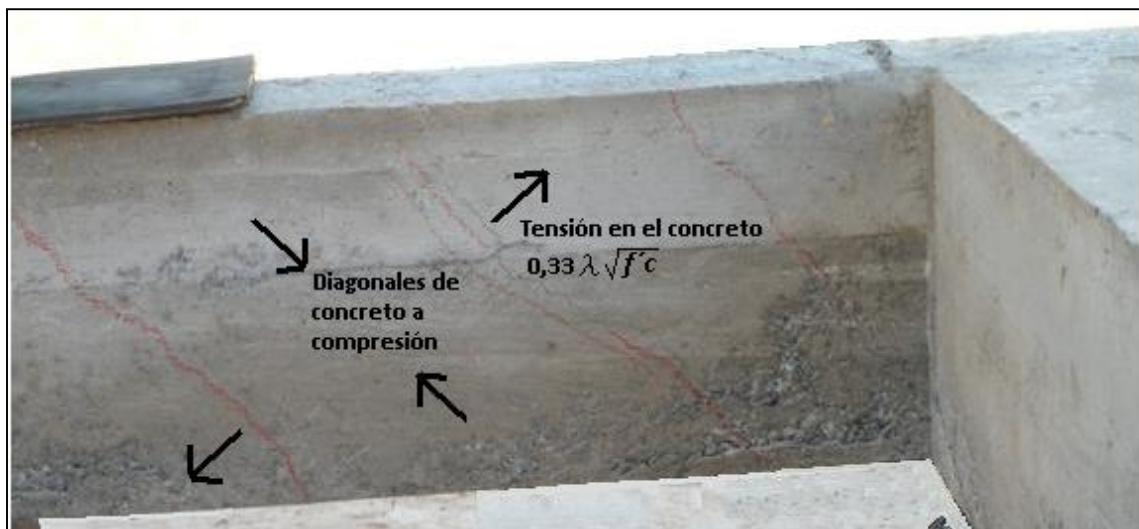
Figura 65. Fisuras presentadas por los elementos



Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

Al observar la figura 66 se evidencia lo mencionado en el capítulo 1, las grietas aparecen debido a esfuerzos de tensión en el concreto. También se puede observar que no existió aplastamiento en las diagonales de concreto a compresión, por lo que el diseño del elemento es sub-reforzado, produciendo una falla dúctil, como se esperaba.

Figura 66. **Esfuerzos de tensión y compresión inducidos por torsión en el elemento 1**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

En la figura 67 se puede apreciar que las últimas fuerzas aplicadas por el gato hidráulico ya no son perpendiculares al elemento, con lo que se reduce la magnitud de estas, pero para fines de cálculo se despreciara esta reducción. De la misma figura también se puede apreciar que la viga secundaria del elemento no presento falla alguna por cortante.

Figura 67. **Aplicación de la carga al elemento 1**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

En los apoyos también existieron fisuras a causa del momento flector inducido en esta porción de la viga que actuó como columna corta. En la figura 68 se muestra un apoyo del elemento 1 antes de alcanzar el momento torsor máximo.

La fisura en el medio de la sección transversal se debe a corte por fricción inducido por el momento torsor que tiende a aplastar el concreto con direcciones contrarias a los lados de la sección transversal del elemento. En la figura 69 se muestra esta porción de viga bajo los esfuerzos mencionados, incluyendo la fuerza axial aplicada por el marco.



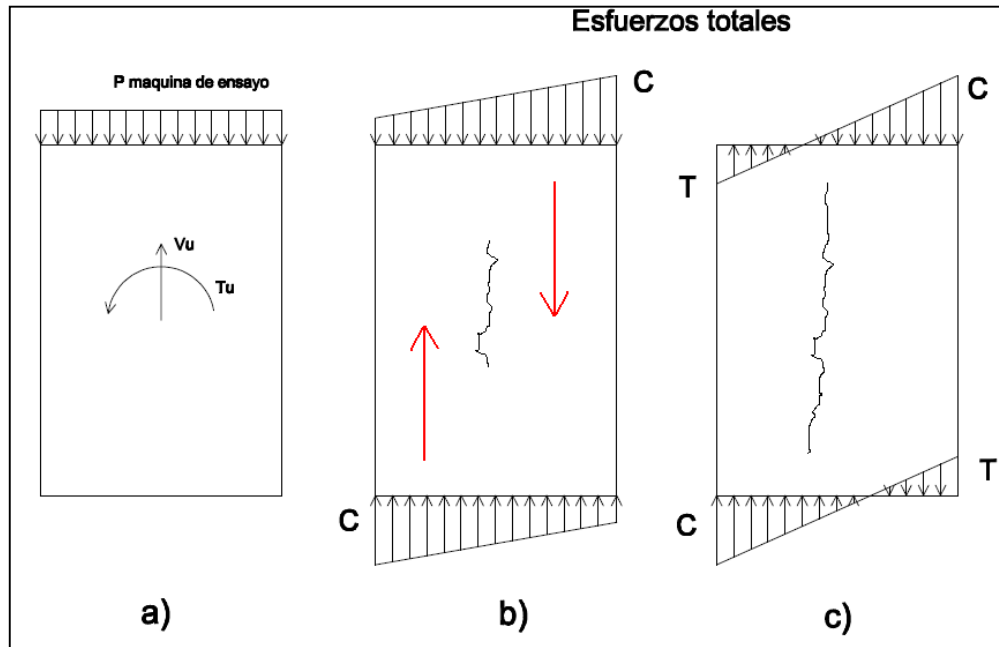
Figura 68. **Comportamiento de los apoyos del elemento 1**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

La parte b de la figura 69 indica los esfuerzos iniciales en los que solo existe compresión. Mientras el momento torsor sea pequeño, en la sección no existirá tensión. Suponiendo que no se encuentra restringida la sección, al incrementarse el momento torsor existirán fuerzas de tensión. La parte c de la figura indica el alabeo que se genera en una sección bajo esfuerzos de torsión, en este caso como se encuentra restringida, tiende a aplastar el concreto de ambos lados en direcciones contrarias, generando un corte directo en la sección.

Figura 69. Esfuerzos en los apoyos



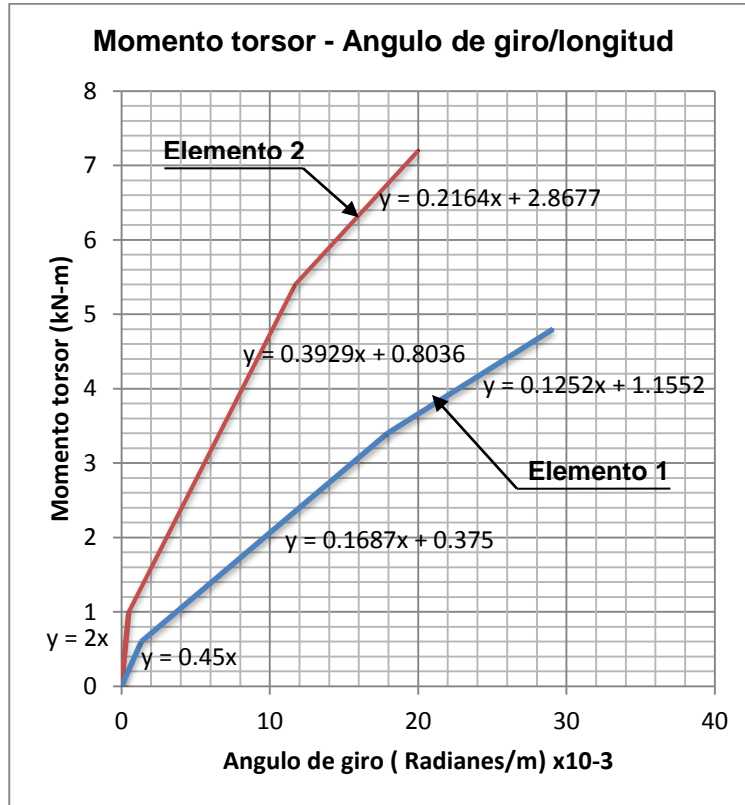
Fuente: elaboración propia, con base al programa AutoCAD 2014.

### 7.1.3. Comparación de la rigidez a torsión que presento cada elemento

Con la finalidad de poder evaluar y comparar la diferencia de rigidez entre cada elemento es necesario calcular el ángulo de giro por unidad de longitud, ya que cada elemento tenía una longitud diferente. En la figura 70 se muestra el gráfico momento torsor - ángulo de giro/longitud y en la tabla XLVIII se indica la diferencia de rigidez entre elementos. Para este caso la pendiente del gráfico indica la rigidez  $J_{eq}G$  de los elementos como se indica a continuación:

$$m = \frac{T}{\theta/L} = \frac{TL}{\theta} = J_{eq}G$$

Figura 70. Comparación entre elementos



Fuente: elaboración propia.

Tabla XLVIII. Comparación de la rigidez entre elementos

Rigidez	Elemento 1	Elemento 2
$[J_{eq}G]'$ no agrietada	2000 kN – m <sup>2</sup>	450 kN – m <sup>2</sup>
	Dif = 78 %	
$[J_{eq}G]_{no\ agrietada}$	392 kN – m <sup>2</sup>	168 kN – m <sup>2</sup>
	Dif = 57 %	
$[J_{eq}G]_{agrietada}$	216 kN – m <sup>2</sup>	125 kN – m <sup>2</sup>
	Dif = 42 %	

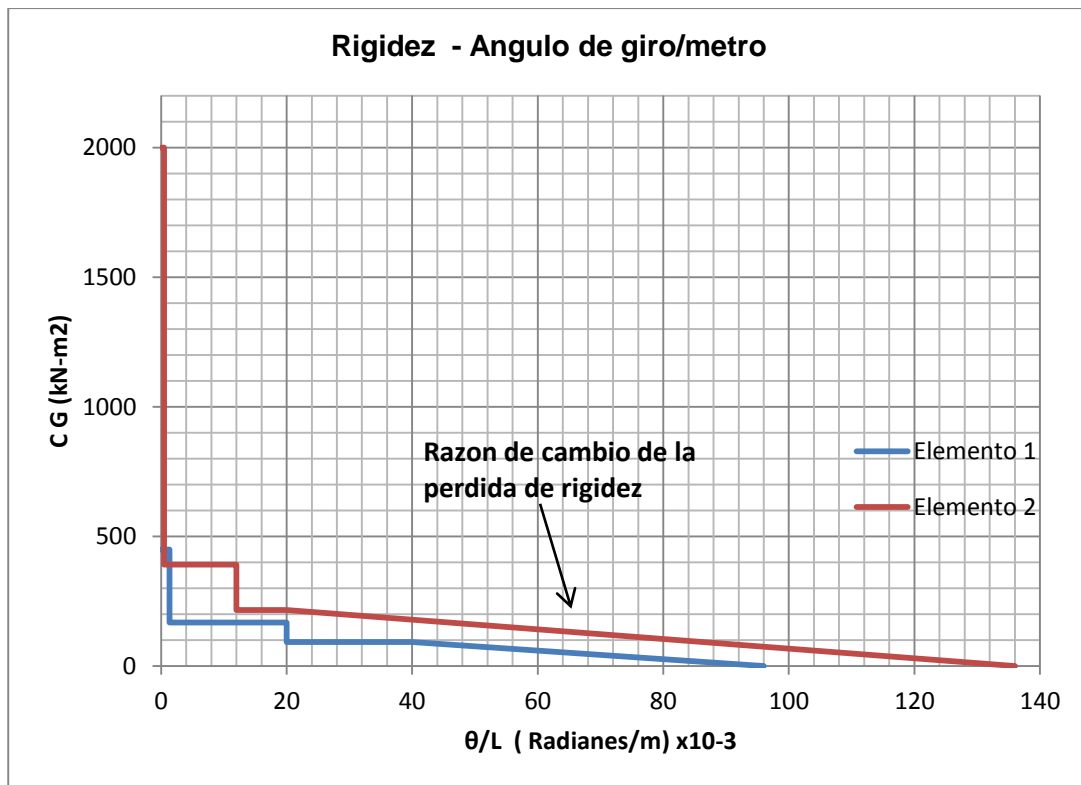
Fuente: elaboración propia.

#### 7.1.4. Capacidad de giro

Es notable como el elemento 2 al tener mayor base en su sección transversal y cuantía de acero menor, es más rígido. Tiene muy poca capacidad de giro en comparación al elemento 1. En la figura 71 se muestra un gráfico rigidez – giro para ambos elementos, en  $\theta$  igual a cero se asume que la rigidez es infinita y en su deformación máxima la rigidez es cero.

Se observa que existe la misma razón de cambio a la cual ambos elementos llegan a  $T_{max}$  y reducen su rigidez a cero.

Figura 71. Giro y rigidez en los elementos



Fuente: elaboración propia.

En la figura 72 se observa la deformación lateral del elemento 2, tomando en cuenta que es más rígido que el elemento 1.

Figura 72. **Deformación del elemento 2**



Fuente: Sección de Estructuras, Centro de Investigaciones de Ingeniería, USAC.

## **7.2. Conclusión de los resultados**

Con base en los resultados obtenidos en ambos elementos se presentan conclusiones específicas para cada propiedad analizada en el desarrollo experimental.

### **7.2.1. Comparación de resultados teóricos y experimentales**

A continuación se hace una comparación entre los resultados teóricos y experimentales de la rigidez efectiva no agrietada, torque de agrietamiento y torque de diseño, para ambos elementos.

#### **7.2.1.1. Rigidez efectiva no agrietada**

La diferencia de rigidez efectiva no agrietada entre los resultados teóricos y experimentales fue de aproximadamente un 76 % para el elemento 1 y 47 % para el elemento 2.

En el inicio de la aplicación de la carga, el comportamiento para este sistema puede ser evaluado de forma teórica utilizando la mitad del módulo de elasticidad del concreto, como se indica a continuación:

$$G_{eq} = \frac{0,5 E_c}{2(1 + \mu)}; \quad K_t = \frac{J_{eq} G_{eq}}{L}$$

Con este ajuste se obtienen valores aproximados a la rigidez que presento cada elemento.

### **7.2.1.2. Torque de agrietamiento $T_{cr}$**

La diferencia entre los resultados teóricos y experimentales fue de 3 % para el elemento 1, siendo mayor el experimental. De acuerdo a la limitación del área de la sección transversal del elemento que indica la ecuación 11-18 del código ACI, y de la tabla 37, no existe holgura.

La diferencia entre resultados para el elemento 2 fue de aproximadamente 2 % siendo mayor el experimental, existiendo una holgura de la sección transversal de 25 %.

Como se observa, la diferencia de resultados en cada elemento es la misma, independientemente de la holgura que existía en la sección transversal. Esto ocurre porque en esta etapa los esfuerzos cortantes por torsión y corte no han sobrepasado el esfuerzo de corte en el concreto que produce las fisuras, este límite se empieza a exceder cuando se sobrepasa el torque y cortante de diseño, por lo que el torque de agrietamiento es independiente de estos límites en la sección transversal.

### **7.2.1.3. Torque de diseño $T_u$**

La diferencia entre los resultados teóricos y experimentales para el elemento 1 fue de aproximadamente un 16 %, quiere decir que el elemento resistió más del momento para el cual estaba diseñado. Esta diferencia se debe en primer lugar al factor de reducción  $\phi$  de 0,85 para este caso, y también porque contaba con una holgura de 21 % de acero de refuerzo. Esta holgura en el acero de refuerzo permitió al elemento soportar más, pero la primera fisura fue visible poco antes del torque de diseño ya que no tenía holgura en cuanto a

su sección transversal, con lo que se demuestra los buenos resultados que predice la ecuación 11-18 del código ACI.

La diferencia entre resultados para el elemento 2 fue de aproximadamente 8 %, quiere decir que elemento resistió poco más del momento para el que fue diseñado. Esto debido únicamente al factor de reducción  $\phi$ , porque no existía holgura apreciable en el acero de refuerzo. La primera fisura fue visible a un momento mayor al torque de diseño, puesto que la sección transversal contaba con una holgura del 25 %.

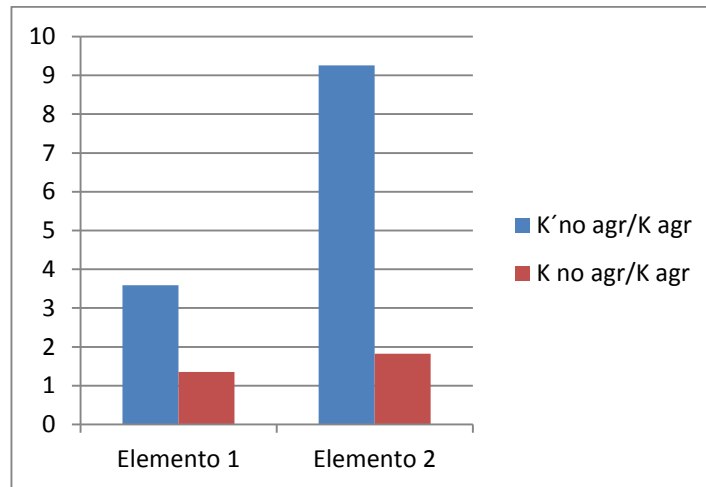
Con lo anterior se observa que ambos elementos cumplieron con el diseño propuesto por el código ACI, también se demuestra lo importante que es cumplir con las limitaciones de la sección transversal del elemento dadas por la ecuación 11-18 del código, puesto que aunque se agregue mas refuerzo del solicitado, existirá agrietamiento antes de que llegue al torque de diseño si la sección transversal no es capaz de soportar los esfuerzos cortantes por torsión y corte.

### **7.2.2. Relación entre rigidez agrietada y no agrietada de cada elemento**

De los datos de la tabla 46 se muestra el grafico de la figura 73, en la que se indica la relación entre rigideces de cada zona de trabajo para cada elemento.



Figura 73. **Comparación de la reducción de rigidez en cada etapa del elemento**



Fuente: elaboración propia.

La primera relación indica la rigidez inicial en comparación a la que resulta después del agrietamiento, pero dicha rigidez no es tomada en cuenta porque solamente es constante en los inicios de la aplicación de la carga.

La segunda relación de rigidez indica la reducción que existe después del agrietamiento. Se observa que el elemento 1 casi mantiene el mismo valor, mientras que en el elemento 2 la reducción fue casi de la mitad de su valor. Esto se puede atribuir a que los dos elementos contaban con el mismo volumen de acero de refuerzo, por lo que el elemento 2 poseía menor cuantía.

Si se requiere aumentar la rigidez a torsión después del agrietamiento, es necesario aumentar la cuantía.

### **7.2.3. Comparación de resultados experimentales entre elementos**

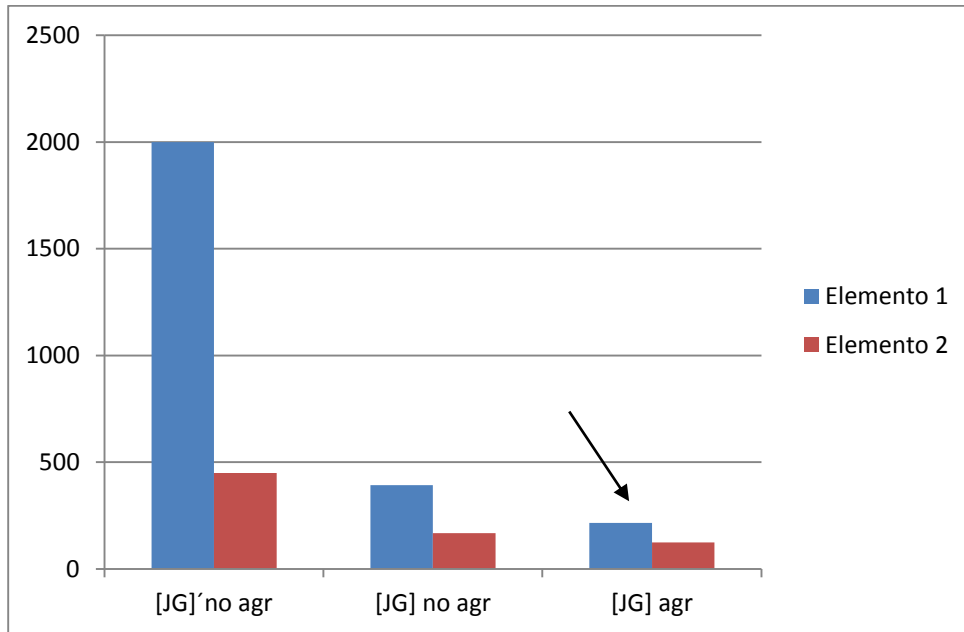
A continuación se presenta una comparación entre cada elemento de los resultados experimentales obtenidos. Los aspectos considerados son: rigidez no agrietada y rigidez agrietada.

#### **7.2.3.1. Comparación de rigidez**

De los datos de la tabla XLVIII se muestra el gráfico de la figura 74 en donde se compara la rigidez de cada elemento antes y después del agrietamiento. Inicialmente la rigidez está influenciada por la sección transversal del elemento. Al aumentar la base de la sección transversal aumenta el momento polar de inercia y se opone mejor al giro.

Después del agrietamiento la rigidez está influenciada por el refuerzo, en este caso el elemento 1 continua presentando menor rigidez, por lo que al limitar la base de la sección transversal de un elemento también se limita la resistencia proporcionada por el refuerzo, puesto que el elemento 1 contaba con mayor cuantía.

Figura 74. Relación de rigidez entre elementos

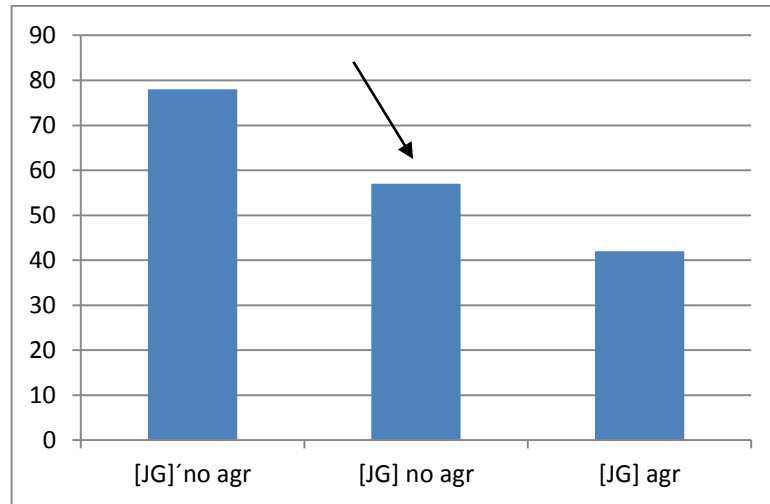


Fuente: elaboración propia.

Esto indica que la capacidad que tiene un elemento de oponerse a momentos torsores, está directamente relacionada a la base de la sección transversal de este.

En la figura 75 se muestra la diferencia en porcentaje que existe por cada rigidez en los elementos.

Figura 75. **Porcentaje de diferencia de rigidez entre elementos**



Fuente: elaboración propia.

La diferencia obtenida para la rigidez no agrietada es proporcional al momento polar de inercia de cada elemento, que para el caso de estos dos elementos es de:

$$\% \text{ Dif} = \frac{J_{eq-2} - J_{eq-1}}{J_{eq-2}} = \frac{(4,68 - 2,33) \times 10^{-4} \text{m}^4}{4,68 \times 10^{-4} \text{m}^4} = 50\%$$

### 7.2.3.2. **Torque de agrietamiento $T_{cr}$ y torque de diseño $T_u$**

El elemento 2 presentó 33 % más de resistencia que el elemento 1, a menores deformaciones y sin presentar fisura evidente hasta después del torque de diseño  $T_u$ . La diferencia en porcentaje a la cual se dio el agrietamiento fue de 37 %.

Esto indica la eficiencia que obtuvo este elemento 2 para soportar esfuerzos torsores, con lo que es factible utilizar una altura de viga igual a 1,5 veces su base.

El elemento 2 se deforma menos que el elemento 1 a valores menores al torque de diseño  $T_u$ , y presenta más deformación que el elemento 1 cuando llega al torque máximo.

## CONCLUSIONES

1. Las vigas de concreto armado solicitadas por torsión también deben diseñarse por corte y flexión, obteniendo excelentes resultados en cuanto a resistencia, por los requisitos de diseño propuestos por el código. Estableciendo que para resistir torsión es necesario colocar refuerzo transversal y longitudinal, el cual tiene que sumarse al requerido por corte y flexión respectivamente.
2. Los resultados presentados pertenecen a ensayos de torsión por equilibrio, en la que el momento torsor tiene que ser resistido únicamente por el elemento.
3. Antes del agrietamiento el concreto es el único que resiste los esfuerzos cortantes por torsión, después del agrietamiento estos esfuerzos son transmitidos al refuerzo longitudinal y transversal. En ambos casos el material es esforzado por tensión.
4. El torque de agrietamiento y el torque de diseño fueron mayores en el elemento 2, indicando que la capacidad que tiene un elemento de oponerse a momentos torsores, está directamente relacionada a la base de su sección transversal, por lo tanto es factible utilizar una altura en la sección transversal de la viga de 1,5 veces su base.
5. No existió pérdida de las aristas en los elementos, por lo tanto, la colocación y los estribos son eficientes para resistir torsión.

6. El elemento 2 presento 33 % más de resistencia que el elemento 1, a menores deformaciones y sin presentar fisura evidente hasta después del torque de diseño  $T_u$ .
7. Las fisuras presentadas en ambos elementos cumplen con lo establecido en el diseño, estas se forman con ángulos de  $45^\circ$  respecto del eje longitudinal del elemento y se desarrollan en todas las caras.

## RECOMENDACIONES

1. El código predice resultados satisfactorios en cuanto a la resistencia de los elementos, pero debe prestarse atención a la deformación que presenten ya que podría ser un problema si es excesiva, debido a las fisuras que se puedan presentar.
2. Para evaluar la rigidez a torsión en elementos sujetos a torsión por compatibilidad, es necesario realizar otro tipo de ensayos en la que se pueda dar la redistribución de fuerzas en los elementos implicados. Este problema de torsión es específico de vigas de borde en sistemas de piso; si se asume que la viga no cuenta con rigidez, podrían existir problemas por la deformación que se presente, aunque no llegaría a colapso.
3. Un elemento falla inicialmente debido a los esfuerzos normales de tensión que superan la capacidad a tensión del concreto, de acuerdo a las fisuras que presentaron los elementos, es posible reforzarlos utilizando fibras de carbono u otro material resistente a tensión, colocadas perpendicular a las fisuras presentadas, en este caso el torque nominal se calcularía como:

$$T_n = T_c + T_s + T_{fb}$$

En el que  $T_{fb}$  será el torque resistido por la fibra colocada.





## BIBLIOGRAFÍA

1. American Concrete Institute. *Requisitos de reglamento para concreto estructural*. Versión en español: ACI 318S-08, 2008. 518 p.
2. CORZO ÁVILA, Mario. *Notas de concreto armado 2*. Guatemala: s.n., 2012. 210 p.
3. F.R. SHANLEY. *Mecánica de materiales*. México: McGraw-Hill. 1971. 285 p.
4. GARCÍA, Juan Ortega. *Concreto armado II*. Perú: s.n. ,1190 .384 p.
5. GERE, James M. *Mecánica de materiales*. 6a ed. México: Thomson, 1990. 840 p.
6. HARMSEM, Teodoro E. *Diseño de estructuras de concreto armado*. 3a ed. Perú: Fondo editorial PUCP, 2002. 673 p.
7. JIMÉNEZ, Pedro; GARCÍA, Álvaro; MORÁN, Francisco. *Hormigón armado*. 14a ed. México: Gustavo Gili, 2000. 846 p.
8. McCORMAC, Jack. *Diseño de concreto reforzado*. 4a ed. México: Alfaomega, 2002. 728 p.
9. NAWY, Edward G. *Concreto reforzado, un enfoque básico*. 2a ed. México: Prentice-Hall. 1990. 743 p.

10. NILSON, Arthur. *Diseño de estructuras de concreto*. 12a ed. Colombia: McGraw-Hill, 2001. 722 p.
11. PARK, T.; PAULAY, T. *Estructuras de concreto reforzado*. México: Limusa, 1988. 796 p.
12. PROAÑO, Marcelo Romo. *Temas de hormigón armado*. Ecuador: Escuela politécnica del ejército, 2008. 467 p.
13. PYTEL, Andrew; SINGER, Ferdinand L. *Resistencia de materiales, introducción a la mecánica de sólidos*. 4a ed. México: Harla, 1994. 584 p.