



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE PÉRDIDA DE  
ENERGÍA EN CONTRACCIONES SÚBITAS DE TUBERÍAS DE PVC**

**Hans David Estuardo Ortíz Marroquín**

Asesorado por el Ing. Luis Manuel Sandoval Mendoza

Guatemala, enero de 2020



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE PÉRDIDA DE  
ENERGÍA EN CONTRACCIONES SÚBITAS DE TUBERÍAS DE PVC**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

**HANS DAVID ESTUARDO ORTÍZ MARROQUÍN**

ASESORADO POR EL ING. LUIS MANUEL SANDOVAL MENDOZA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, ENERO DE 2020



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Luis Diego Aguilar Ralón
VOCAL V	Br. Christian Daniel Estrada Santizo
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
EXAMINADOR	Ing. José Fernando Samayoa Roldan
EXAMINADOR	Ing. Hugo Leonel Montenegro Franco
EXAMINADOR	Ing. Omar Enrique Medrano Méndez
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez



## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE PÉRDIDA DE ENERGÍA EN CONTRACCIONES SÚBITAS DE TUBERÍAS DE PVC**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 30 de octubre de 2018.

**Hans David Estuardo Ortíz Marroquín**





## **ACTO QUE DEDICO A:**

<b>Dios</b>	En el nombre de Dios, el más benévolo, el más misericordioso.
<b>Mi madre</b>	Thelma Marroquín de León, por haberme apoyado incondicionalmente y estar siempre a mi lado en los momentos fáciles y difíciles de mi existencia.
<b>Mis hermanas</b>	Estefany y Heidi, con quienes a pesar de buenos y malos momentos siempre nos hemos apoyado mutuamente para salir adelante.
<b>Mi tío</b>	Guillermino, quien siempre me dio consejos y sobre todo su amistad y ayuda.
<b>Amigos y compañeros de la carrera</b>	Con quienes compartí muchas situaciones y experiencias en mi paso por esta universidad, con muchos de los cuales hemos formado amistades posiblemente para toda la vida.
<b>Compañeros de cursos y de actividades extracurriculares</b>	Con quienes compartí menos pero de igual forma situaciones que me ayudaron a mejorar como persona ante la sociedad.



## **AGRADECIMIENTOS A:**

<b>Universidad de San Carlos de Guatemala</b>	Por darme la oportunidad de prepararme profesionalmente.
<b>Facultad de Ingeniería</b>	Por darme las herramientas y conocimiento necesario para ser un profesional en mi área de interés.
<b>Mi familia</b>	Por apoyarme en todo momento y por estar a mi lado.
<b>Ing. Luis Sandoval</b>	Por su ayuda brindada mediante asesorías y guía en el desarrollo de este trabajo de graduación.
<b>Amigos y compañeros de la Facultad</b>	Por la ayuda, consejos, comentarios, amistad y convivencia en nuestra etapa como estudiantes en la facultad.
<b>Catedráticos de la Facultad de Ingeniería</b>	Por haberme facilitado conocimiento y consejos de importancia en mi formación como profesional.



# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	V
LISTA DE SÍMBOLOS .....	IX
GLOSARIO .....	XI
RESUMEN.....	XIII
OBJETIVOS.....	XV
INTRODUCCIÓN.....	XVII
1. GENERALIDADES.....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Conservación de la energía.....	1
1.3. Ecuación de Bernoulli.....	4
1.4. Restricciones de la ecuación de Bernoulli .....	5
1.5. Leyes físicas que se aplican al flujo de fluidos .....	6
1.5.1. Principio de continuidad.....	6
1.5.2. Principio de cantidad de movimiento .....	7
1.5.3. Principio de energía.....	9
1.6. Ecuación general de la energía.....	9
1.6.1. Bombas .....	10
1.6.2. Motores y turbinas .....	11
1.6.3. Fricción de fluido.....	11
1.6.4. Válvulas y accesorios .....	11
1.7. Nomenclatura de ganancias y pérdidas de energía .....	14
1.7.1. Número de Reynolds .....	14

2.	PÉRDIDAS EN TUBERÍAS DE PVC.....	17
2.1.	Pérdidas en tuberías de PVC y accesorios .....	17
2.2.	Pérdidas menores .....	18
2.3.	Ecuación utilizada para determinar pérdidas menores.....	18
2.4.	Coeficiente de resistencia .....	19
2.5.	Pérdida en salida de tuberías.....	20
2.6.	Pérdidas en entrada de tuberías .....	22
2.7.	Contracción súbita.....	24
2.8.	Contracción gradual .....	31
3.	EXPERIMENTO Y DETERMINACIÓN DE ECUACIONES EXPERIMENTALES.....	35
3.1.	Diámetros de tubería y ubicación de piezómetros .....	35
3.2.	Equipo y materiales utilizados .....	36
3.3.	Modelo experimental .....	39
3.4.	Limitantes físicas al realizar el experimento .....	40
3.5.	Procedimiento .....	41
3.6.	Realización de cálculos.....	42
3.7.	Ejemplo de cálculo .....	44
3.7.1.	Valores de k teóricos para las contracciones súbitas analizadas.....	47
3.8.	Modelos matemáticos propuestos.....	50
3.8.1.	Modelo matemático 1 .....	50
3.8.2.	Modelo matemático 2 .....	53
3.8.3.	Modelo matemático 3 .....	56
3.8.4.	Modelo matemático 4 .....	59
4.	ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	61
4.1.	Comparación de pérdidas para contracción 1 .....	61

4.2.	Comparación de pérdidas para contracción 2 .....	64
4.3.	Comparación de pérdidas para contracción 3 .....	66
4.4.	Comparación de pérdidas para contracción 4 .....	68
4.5.	Comparación de pérdidas para contracción 5 .....	70
4.6.	Modelos .....	72
CONCLUSIONES .....		75
RECOMENDACIONES .....		77
BIBLIOGRAFÍA .....		79





# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Formas de energía presentes en una tubería .....	3
2.	Conservación de energía en sección de tubería .....	4
3.	Secciones involucradas en la conservación de la energía .....	7
4.	Principio de energía aplicado a un elemento diferencial .....	9
5.	Electrobomba .....	10
6.	Sistema representando la conservación de la energía.....	12
7.	Cambio de dirección y turbulencia .....	12
8.	Representación de sistema y conservación de la energía .....	14
9.	Pérdida de energía en la entrada de un depósito .....	21
10.	Pérdida de energía en la salida de un depósito .....	22
11.	Distintos tipos de entradas .....	23
12.	Representación de una contracción súbita .....	24
13.	Coeficiente de Weisbach y curva de Kisieliev para contracción súbita.....	25
14.	Reducción brusca con diafragma.....	26
15.	Representación del movimiento del flujo en una contracción súbita ....	30
16.	Representación de una contracción gradual .....	31
17.	Coeficiente de resistencia de forma gráfica para un valor de ángulo de cono $< 15^\circ$ .....	32
18.	Coeficiente de resistencia de forma gráfica para un valor de ángulo de cono $\geq 15^\circ$ .....	32
19.	Variables involucradas para determinar el ángulo de reducción gradual $\theta$ .....	34

20.	Modelo físico para el estudio de pérdidas en contracciones bruscas ...	35
21.	Banco hidráulico .....	36
22.	Tablero de piezómetros .....	37
23.	Modelo experimental: tablero con contracciones .....	38
24.	Modelo experimental: tablero con contracciones y piezómetros.....	38
25.	Banco hidráulico conectado al sistema de tuberías de PVC con contracciones súbitas .....	39
26.	Conexión de la toma de presión en una contracción .....	40
27.	Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 1 .....	50
28.	Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 2 .....	51
29.	Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 3 .....	51
30.	Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 4 .....	52
31.	Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 5 .....	52
32.	Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 1 .....	53
33.	Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 2 .....	54
34.	Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 3 .....	54
35.	Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 4 .....	55
36.	Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 5 .....	55
37.	Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 1 .....	56
38.	Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 2 .....	57
39.	Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 3 .....	57
40.	Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 4 .....	58
41.	Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 5 .....	58
42.	Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 1 .....	63
43.	Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 2 .....	65
44.	Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 3 .....	67

45.	Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 4 .....	69
46.	Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 5 .....	71
47.	Gráfico de k en función de la velocidad.....	74

## TABLAS

I.	Dimensionales de viscosidad utilizadas en el Sistema Internacional ...	15
II.	Valores del factor k para distintas relaciones de diámetro .....	21
III.	Viscosidad y coeficiente de resistencia 1 cuando $A_0 < 0,1A_1$ .....	27
IV.	Viscosidad y coeficiente de resistencia 2 cuando $A_0 \geq 0,1A_1$ .....	27
V.	Valores de viscosidad y coeficiente de resistencia cuando $A_0 = A_1$ ...	28
VI.	Viscosidad y coeficiente de resistencia cuando $A_1 \approx 0,60$ .....	28
VII.	Factores de coeficiente de resistencia K para distintas velocidades y relación de diámetros $D_2/D_1$ .....	29
VIII.	Factores de coeficiente de resistencia K para reducción gradual del ángulo $\theta$ , según Kisieliev .....	33
IX.	Diámetros de contracciones utilizadas en el modelo experimental .....	36
X.	Lectura de datos .....	41
XI.	Caídas de presión y caudales .....	42
XII.	Velocidad y energía cinética en secciones de tuberías.....	43
XIII.	Energía cinética para distintos modelos.....	44
XIV.	Pérdidas de energía y factores k.....	47
XV.	Valores de k teóricos.....	478
XVI.	Valores de k teóricos para las contracciones súbitas.....	49
XVII.	Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 1. ....	61

XVIII.	Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 2.....	62
XIX.	Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 3.....	66
XX.	Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 4.....	68
XXI.	Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 5.....	70
XXII.	Modelos para cada contracción súbita con mejor comportamiento .....	72
XXIII.	Modelo para cada contracción súbita con mejor coeficiente k.....	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
<b>Z</b>	Altura o posición del fluido
<b>A<sub>o</sub></b>	Área de paso por diafragma
<b>A</b>	Área de sección transversal
<b>Δ</b>	Cambio o variación
<b>Q</b>	Caudal
<b>Q<sub>promedio</sub></b>	Caudal promedio
<b>Cm</b>	Centímetro
<b>Cm<sup>2</sup></b>	Centímetro cuadrado
<b>Cm<sup>3</sup></b>	Centímetro cúbico
<b>Cm<sup>3</sup>/s</b>	Centímetro cúbico por segundo
<b>β</b>	Coefficiente de Boussinesq
<b>k</b>	Coefficiente de resistencia
<b>a, b</b>	Constantes
<b>C - n</b>	Contracción número n
<b>D</b>	Diámetro
<b>D<sub>1</sub></b>	Diámetro mayor
<b>D<sub>2</sub></b>	Diámetro menor
<b>dA</b>	Diferencial de área
<b>ρ</b>	Densidad del fluido
<b>E</b>	Energía
<b>h<sub>a</sub></b>	Energía agregada
<b>E<sub>c</sub>, E cinética</b>	Energía cinética
<b>h<sub>r</sub></b>	Energía retirada

<b>F</b>	Fuerza
<b>g</b>	Gravedad
<b>ln (V)</b>	Logaritmo natural de la velocidad promedio
<b>m</b>	Masa
<b>N-m/m</b>	Newton por metro sobre metro
<b>N<sub>R</sub></b>	Número de Reynolds
<b>h<sub>L</sub></b>	Pérdidas menores
<b>h<sub>L experimental</sub></b>	Pérdida experimental
<b>γ</b>	Peso específico
<b>P- n</b>	Piezómetro número n
<b>%</b>	Porcentaje
<b>PVC</b>	Policloruro de vinilo
<b>P</b>	Presión en tubería
<b>PLG</b>	Pulgada
<b>D<sub>2</sub>/D<sub>1</sub></b>	Relación de diámetros
<b>A</b>	Sección de área de sección
<b>s</b>	Segundo
<b>Tan θ</b>	Tangente del ángulo teta
<b>t</b>	Tiempo
<b>k<sub>experimental</sub></b>	Valor de coeficiente de pérdida experimental
<b>Δ P</b>	Variación de presión
<b>V</b>	Velocidad
<b>v</b>	Viscosidad cinemática
<b>μ</b>	Viscosidad dinámica

## GLOSARIO

<b>Banco hidráulico</b>	Dispositivo electromecánico que suministra un caudal a un sistema.
<b>Bomba</b>	Dispositivo que agrega energía al fluido presente en un sistema.
<b>Coefficiente de resistencia</b>	Valor numérico relacionado a qué tanta energía se pierde en un accesorio o elemento.
<b>Conservación de la energía</b>	Cantidad de energía necesaria para mover un fluido de un punto a otro.
<b>Contracción súbita</b>	Cambio brusco de una sección transversal de un mayor diámetro a uno menor.
<b>Ecuación de Bernoulli</b>	Principio de continuidad, expresión que relaciona un volumen constante en dos puntos diferentes de una sección longitudinal.
<b>Energía</b>	Capacidad de la materia de producir trabajo.
<b>Energía cinética</b>	Energía relacionada al movimiento, velocidad y masa de un cuerpo.

<b>Energía de flujo</b>	Cantidad de trabajo necesario para mover un fluido a través de una sección transversal.
<b>Energía potencial</b>	Energía relacionada a la posición de un cuerpo respecto a otro.
<b>Fricción</b>	Resistencia de un fluido al movimiento.
<b>Flujo</b>	Movimiento de un fluido.
<b>Número de Reynolds</b>	Número que indica el tipo de comportamiento de un fluido.
<b>Pérdidas menores</b>	Pérdidas debidas a accesorios y elementos presentes en un sistema de tuberías.
<b>Piezómetro</b>	Elemento utilizado para medir la presión en una sección transversal.
<b>Relación de diámetros</b>	Parámetro utilizado para determinar el coeficiente de resistencia en un accesorio.
<b>Turbulencia</b>	Cambios espacio-temporales rápidos de presión y velocidad en el comportamiento de un flujo.
<b>Válvula</b>	Elemento que controla la dirección del fluido generando turbulencia.
<b>Viscosidad</b>	Medidas de resistencia a las deformaciones graduales.



## RESUMEN

En la presente investigación se han determinado los modelos matemáticos para calcular la pérdida de energía en contracciones súbitas de tuberías de PVC, lo anterior se ha realizado ensayando un modelo experimental que involucra los elementos necesarios para obtener los datos apropiados y posteriormente determinar modelos matemáticos.

En el capítulo 1 se pueden encontrar elementos que agregan o retiran energía de un sistema y también las leyes físicas que condicionan las pérdidas de energía, mientras que en el capítulo 2 se profundiza en la teoría relacionada a las pérdidas menores, sus elementos y condiciones, haciendo énfasis en la contracción súbita.

Por su parte, en el capítulo 3 se realizan ensayos de los cuales se obtienen datos para obtener 4 modelos matemáticos de los cuales resultan la pérdida y el factor de resistencia. En el capítulo 4 se determina la pérdida de energía haciendo uso de cada uno de los modelos matemáticos determinados previamente, los valores de pérdida calculados son comparados con el valor de pérdida experimental presentado al realizar los ensayos.

Así mismo, se puede observar el comportamiento de cada uno de los modelos matemáticos propuestos y cómo es que estos varían del comportamiento observado experimentalmente, siendo de esta forma posible determinar qué modelos matemáticos propuestos se acercan más al comportamiento real del experimento realizado.



El experimento ha sido realizado en las instalaciones del Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Universidad de San Carlos de Guatemala, y los resultados obtenidos obedecen a las condiciones y limitantes presentadas en las instalaciones y las características del modelo experimental construido.

Los resultados obtenidos varían de acuerdo a los presentados por algunos autores, lo cual contribuye en el tema de las contracciones súbitas, en el que no existe demasiada teoría o experimentos al respecto.



# OBJETIVOS

## General

Determinar los modelos matemáticos para calcular la pérdida de energía en contracciones abruptas de PVC haciendo uso de un modelo experimental.

## Específicos

1. Realizar ensayos para obtener los valores reales de pérdidas en una contracción súbita.
2. Comparar y analizar los modelos matemáticos obtenidos con las ecuaciones similares utilizadas para determinar las pérdidas por contracción abrupta.
3. Construir un modelo experimental que relacione, para varias contracciones en serie, la pérdida de energía con la velocidad de flujo y la relación de diámetros.



## INTRODUCCIÓN

El uso de sistemas de tuberías de PVC en distribuciones de agua es algo común y vital en la actualidad, existiendo una gran variedad de accesorios de material PVC utilizados para obtener distintas configuraciones que son de utilidad en instalaciones domiciliarias e industriales.

Las contracciones súbitas son accesorios frecuentemente utilizados en instalaciones domiciliarias e industriales, sin embargo no existe abundantes estudios que analicen el comportamiento del flujo a través de estos accesorios, por lo cual es necesario analizar el comportamiento y determinar modelos matemáticos que ayuden a comprender el comportamiento presentado en las contracciones súbitas.

El comportamiento del flujo transportado a través de contracciones súbitas de PVC ha sido tratado con un modelo experimental en serie y con piezómetros colocados en puntos estratégicos que facilitan la toma de datos, aunque no se tiene control directo sobre las velocidades a las cuales está sometido el modelo experimental. De esta forma se han obtenido datos numéricos que luego del análisis correspondiente finalizan en los modelos matemáticos propuestos.

Al no existir demasiada información y estudios relacionados a las pérdidas de energía en contracciones súbitas de PVC, se ha desarrollado el presente trabajo con la finalidad de dar un aporte y complemento a los estudios ya realizados, así también se invita a futuros investigadores a continuar con el desarrollo del tema propuesto, pudiendo tomar como base el presente trabajo e inclusive mejorarlo.





# 1. GENERALIDADES

## 1.1. Introducción

En el presente capítulo se pretende buscar la fácil comprensión de los temas básicos para comprender el comportamiento de las pérdidas de energía en contracciones súbitas en material de PVC cuando transportan el flujo del agua.

Se analizará la energía perdida en distintas secciones de un sistema de tubería de PVC, por lo cual se procede a analizar las expresiones básicas y necesarias para poder cuantificar la energía presente en dicho sistema. Los capítulos posteriores tratarán sobre los temas específicos y las ecuaciones necesarias para determinar las pérdidas en contracciones súbitas.

## 1.2. Conservación de la energía

La energía no se crea ni se destruye, simplemente cambia de una forma a otra dentro un sistema determinado. Esto lo establece la ley de conservación de la energía. Lo establecido en el enunciado anterior se puede transmitir a un sistema de tuberías en el cual existen diversos elementos que pueden ingresar o retirar energía del mismo, tales como accesorios o bombas hidráulicas.

Para flujo en tuberías se toman en consideración tres formas de energía:

- Energía cinética: energía que se debe a la velocidad del flujo. Está determinada por la siguiente expresión:

$$Energia\ Cinetica = \frac{\gamma v^2}{2g}$$

Ec.1

Donde:

$\gamma$  = peso del fluido

$v$  = velocidad del fluido

$g$  = velocidad del fluido

- Energía potencial: energía que se debe a la elevación en la cual se encuentra el fluido respecto a un nivel de referencia determinado.

$$Energia\ Potencial = \gamma z$$

Ec.2

Donde:

$\gamma$  = peso específico del fluido

$z$  = altura o posición del fluido respecto a un nivel de referencia

- Energía de flujo: representa la cantidad de trabajo que es necesario para mover el fluido a través de cierta sección transversal en una tubería contra la presión  $p$ . También es llamada energía de presión o trabajo de flujo.

$$Energia\ de\ flujo = \frac{\gamma p}{\gamma}$$

Ec.3

Donde:

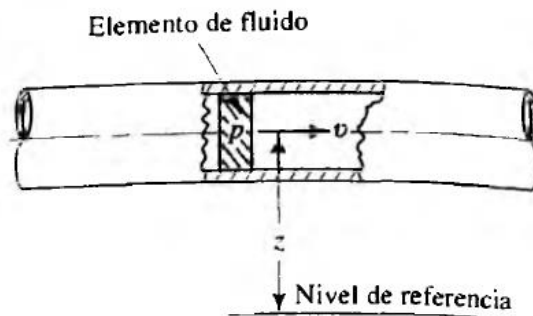
$\gamma$  = peso del fluido

$p$  = presión en tubería (contraria al movimiento del fluido)

$\gamma$  = peso específico del fluido

Es conveniente determinar la nomenclatura  $p$ ,  $z$  y  $v$  para identificar energía de flujo, energía potencial y energía cinética, respectivamente, en las ecuaciones correspondientes para simplificar el análisis. También es importante notar que algunos autores identifican estos tres tipos de energía como carga de presión, carga de velocidad y carga de elevación. A la suma de las cargas anteriores se le denomina carga total. Las tres formas de energía expuestas anteriormente se pueden apreciar en la figura 1.

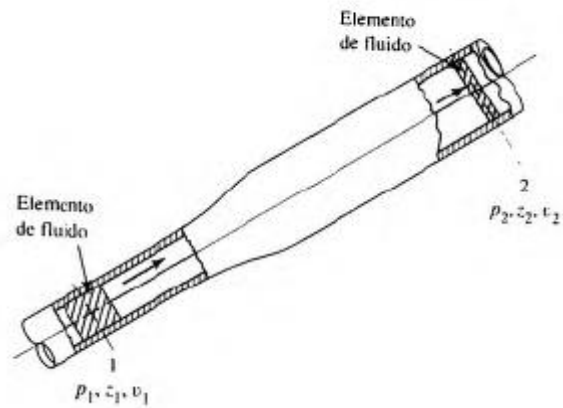
Figura 1. **Formas de energía presentes en una tubería**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 166.

Tomando en cuenta el concepto de conservación de la energía en dos secciones distintas de una tubería se obtiene la conservación de las tres formas de energía expuestas en las ecuaciones 1, 2 y 3. En la figura 2 se puede apreciar de mejor forma el análisis de conservación de energía a lo largo de una tubería.

Figura 2. **Conservación de energía en sección de tubería**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 167.

### 1.3. Ecuación de Bernoulli

La energía debe ser igual en el punto 1 y punto 2.

$$E_1 = E_2$$

$$E_{Cinética_1} + E_{Potencial_1} + E_{Flujo_1} = E_{Cinética_2} + E_{Potencial_2} + E_{Flujo_2}$$

$$\frac{w v_1^2}{2g} + wZ_1 + \frac{wp_1}{\gamma} = \frac{w v_2^2}{2g} + wZ_2 + \frac{wp_2}{\gamma}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

Ec.4

La ec. 4 representa el principio de conservación de energía siempre y cuando no existan adiciones o extracciones de energía entre las secciones 1 y 2 mostradas en la figura 2. A la ec. 4 se le conoce como ecuación de Bernoulli y representa la conservación de energía entre dos secciones de una tubería en la

cual se transporta un fluido. Dicha ecuación no toma en cuenta adiciones o extracciones de energía entre las secciones consideradas.

En la ecuación de Bernoulli cada uno de los términos representa una forma de energía que posee el fluido por unidad de peso dentro del sistema. Por unidad de peso la energía se expresa como energía por unidad de peso, siendo N-m/m en el Sistema Internacional, sin embargo, para simplificar aun más el análisis se toma en cuenta la presencia del término del peso  $w$  en la expresión, eliminándolo, y de esta forma se obtienen la unidad de medida para la energía como una altura, siendo esta metro (m) o pie (p) según el sistema en el cual se trabaje.

#### **1.4. Restricciones de la ecuación de Bernoulli**

La ecuación de Bernoulli tiene un amplio uso para determinar cómo varían los valores de carga de elevación, carga de presión y carga de velocidad cuando un flujo fluye a través del sistema. Sin embargo dicha ecuación no considera pérdidas o adiciones de energía entre dos secciones diferentes de una tubería, por lo cual la carga total permanece constante. A continuación se presentan algunas restricciones para dicha ecuación:

- No se consideran dispositivos mecánicos que retiren o agreguen energía al sistema entre las dos secciones analizadas.
- No se toman en cuenta pérdidas de energía debido a la fricción del fluido y las paredes internas de la tubería.
- Es aplicable solo para fluidos incomprensibles.
- No se consideran transferencias de calor en relación al fluido.

Es difícil el cumplimiento de las restricciones anteriores, sin embargo la ecuación de Bernoulli es de uso práctico en la solución de problemas ya que presenta un error mínimo en muchas situaciones.

## 1.5. Leyes físicas que se aplican al flujo de fluidos

A continuación se ven los principios que rigen el comportamiento de los fluidos en condiciones normales.

### 1.5.1. Principio de continuidad

Un fluido circulará de forma constante de la sección 1 a la sección 2 como indica la figura 2, lo cual es conocido como flujo estable, esto siempre y cuando no se agrega o retira fluido en ningún momento. Tomando en cuenta la densidad del flujo, área y velocidad de las secciones 1 y 2, entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Ec.5

Donde:

$A_1, A_2$  = área de secciones 1 y 2

$v_1, v_2$  = velocidades en la sección 1 y 2

La ecuación 5 es llamada ecuación de continuidad y relaciona las densidades, áreas y velocidades de dos secciones en una tubería que transporte determinado fluido.

### 1.5.2. Principio de cantidad de movimiento

La fuerza  $F$  y la razón de cambio de movimiento  $mv$  están relacionadas por la segunda ley de Newton por medio de la siguiente ecuación:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

Ec.6

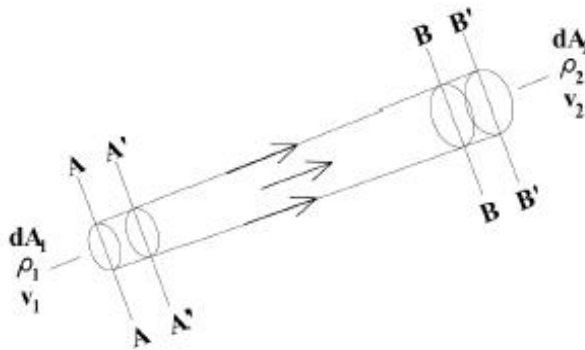
Donde:

$F$  = fuerza

$mv$  = masa multiplicada por la velocidad del flujo

Al aplicar la ecuación 7 a un flujo presente en una tubería como el de la figura 3.

Figura 3. Secciones involucradas en la conservación de la energía



Fuente: TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdidas de energía en cruces de tuberías*. p. 18.

En la figura 3 el tubo de corriente contiene cierta cantidad de masa entre las áreas transversales  $AA'$  y  $BB'$ . Con el paso del tiempo la cantidad de masa anterior se ha desplazado a una posición diferente. Siendo un flujo permanente entonces no existe cambio en la cantidad de movimiento en cualquier punto

dentro del tubo de corriente. La cantidad de movimiento permanece constante entre las secciones AA' y BB' y se puede determinar de la siguiente forma:

$$\Sigma_{B'B'}^{B'B'} dm v - \Sigma_{A'A'}^{A'A'} dm v$$

La expresión anterior en términos de  $\rho, dA$  y  $v$  se escribe:

$$F = \beta_2 \rho_2 dA_2 v_2^2 - \beta_1 \rho_1 dA_1 v_1^2$$

Ec.7

Donde:

$\beta$  = coeficiente de Boussinesq

$\rho$  = densidad del flujo

$dA$  = diferencial de área

$v$  = velocidad del fluido

$F$  = fuerza aplicada

La ecuación 7 es utilizada en volúmenes de control en donde se permite analizar la cantidad de movimiento presente en secciones distintas tal como lo ejemplifica la figura 3.

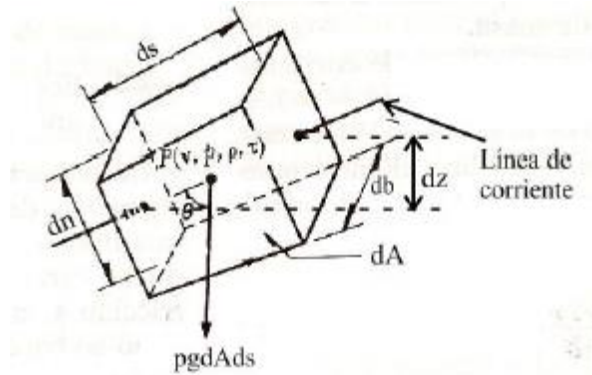
El análisis de cantidad de movimiento engloba fuerzas totales y condiciones externas, sin embargo no considera los cambios internos de energía en el sistema. La ecuación 6 debe ser aplicada en el inicio y final de un tramo establecido previamente. La cantidad de movimiento también es llamada cantidad de impulso en distintos textos.



### 1.5.3. Principio de energía

Este principio se aplica considerando un flujo idealizado de un elemento diferencial de masa a lo largo de una línea de corriente.

Figura 4. Principio de energía aplicado a un elemento diferencial



Fuente: TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdidas de energía en cruces de tuberías*. p. 19.

Es importante notar que el principio de la conservación de la energía considera los cambios internos de energía y no las fuerzas totales y condiciones externas. Al desarrollar el principio de energía se hace uso de la ecuación de Bernoulli, lo cual se desarrolla en la siguiente sección.

### 1.6. Ecuación general de la energía

Para describir la ecuación general de la energía para un sistema como el de la figura 2, se deben considerar otros factores tales como la incorporación de dispositivos que pueden añadir o extraer energía del sistema.

### 1.6.1. Bombas

Las bombas son, por lo general, dispositivos que agregan energía a un fluido y por ende al sistema en el cual dicho fluido se encuentre. Básicamente una bomba contiene en su interior un eje rotatorio que convierte la energía eléctrica o energía liberada en la combustión en energía cinética y luego esta es transferida al fluido aumentando de esta forma la presión. Las bombas son utilizadas, en la mayoría de casos, cuando se requiere llevar un fluido ascendentemente de un punto a otro.

Actualmente en el mercado local se encuentran bombas de varias marcas y con muchas características, sin embargo se pueden clasificar en dos grandes grupos: motobombas y electrobombas. La diferencia entre ambas se encuentra principalmente en el principio de su funcionamiento, el cual debe ser acorde al trabajo que efectuará. Para sistemas relativamente pequeños se utiliza una electrobomba, mientras que para sistemas más complejos son utilizadas las motobombas.

Figura 5. **Electrobomba**



Fuente: *Electrobomba*. <http://www.sodimac.com.pe/sodimac-pe/product/321869/Electrobomba-Centrifuga-1-HP/321869>. Consulta: 2 de junio de 2019.

### **1.6.2. Motores y turbinas**

Los motores y turbinas son dispositivos que extraen la energía de un fluido y lo convierten, por medio de un pistón o un eje de rotación, en otra forma de trabajo. Son principalmente utilizados cuando se desea obtener energía eléctrica como resultado del movimiento de grandes cantidades de un fluido.

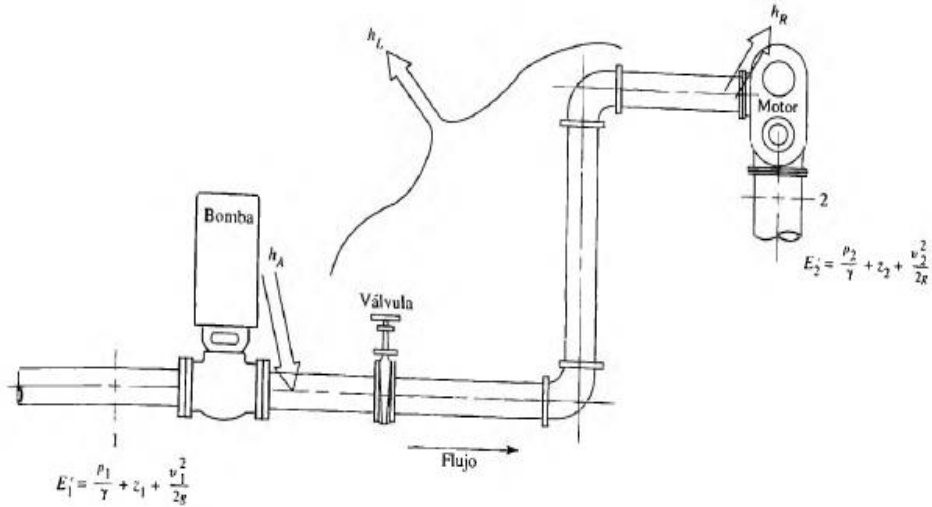
### **1.6.3. Fricción de fluido**

Un fluido presentará una fricción al momento de fluir, por lo cual parte de la energía del sistema se convertirá en energía térmica y se disipará a través de las paredes de la tubería. La cantidad de energía perdida dependerá de las propiedades del fluido y su velocidad, longitud, diámetro y de la superficie interna de la tubería.

### **1.6.4. Válvulas y accesorios**

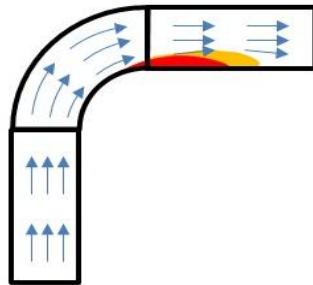
Los elementos que controlan la dirección del flujo generarán turbulencia, la cual a su vez generará energía térmica. A este tipo de pérdidas se le conoce como pérdidas menores.

Figura 6. **Sistema representando la conservación de la energía**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 203.

Figura 7. **Cambio de dirección y turbulencia**



Fuente: *Cambio de dirección y turbulencia*. <http://es.betamachinery.com/services/flow-induced-turbulence-fit-analysis>. Consulta: 2 de junio de 2018.

Al considerar el principio de conservación de la energía tomando en cuenta las pérdidas vistas anteriormente.

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + h_A - h_R - h_L = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

Ec.8

Donde:

$h_A$  = energía agregada

$h_R$  = energía retirada

$h_L$  = pérdidas menores

$w$  = peso del fluido

$p$  = presión en tubería (contraria al movimiento del fluido)

$\gamma$  = peso específico del fluido

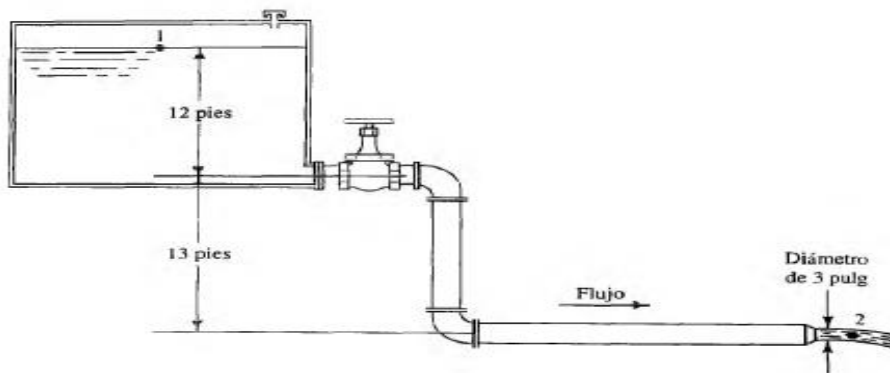
$z$  = altura o posición del fluido respecto a un nivel de referencia

Las unidades utilizadas son N-m/N o simplemente metros en el Sistema Internacional. Un aspecto importante de la Ec.8 es que está escrita en la dirección del flujo, lo cual significa que se empieza desde el lado izquierdo hacia el lado derecho de la ecuación, de esta forma los signos ayudan a manejar de una mejor manera la presencia de energía agregada o eliminada del sistema en la sección 1 antes de que se alcance la sección 2, en donde se tiene una cantidad diferente de energía por unidad de peso, tal como indican los términos expresados del lado derecho de la ecuación 7.

Dicha situación también se puede apreciar en la figura 4, en la cual se consideran energía agregada y perdida por medio de los distintos dispositivos y accesorios presentes en el sistema, con lo cual se puede ver cómo la ecuación general de la energía considera todas las ganancias y pérdidas de energía.

Se puede considerar con un valor de cero determinado término de la ecuación general de la energía cuando un sistema como el de la figura 4 no considera determinada energía agregada, perdida o bien presenta determinadas condiciones en las cuales alguno o varios términos se pueden considerar cero, lo cual es algo normal en la solución de problemas que involucren dicha ecuación.

Figura 8. **Representación de sistema y conservación de la energía**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 204.

### 1.7. **Nomenclatura de ganancias y pérdidas de energía**

Si en un sistema pueden llegar a existir varios tipos de ganancias y pérdidas de energía debidas a diversos elementos, estas pérdidas se pueden clasificar haciendo uso de la siguiente nomenclatura. Dicha nomenclatura es también utilizada por varios autores.

$h_A$  = Energía agregada al fluido por medio de un dispositivo mecánico.

$h_R$  = Energía removida del fluido por medio de un dispositivo mecánico.

$h_L$  = Energía perdida del sistema debido a fricción en tuberías, válvulas y accesorios.

#### 1.7.1. **Número de Reynolds**

El número de Reynolds es un valor adimensional relacionado al cálculo de las pérdidas de energía por fricción, ya que las pérdidas dependen de si el flujo es laminar o turbulento. El número de Reynolds es utilizado para determinar el

tipo de comportamiento del fluido analizado. Para clasificar el fluido en laminar o turbulento se consideran cuatro variables que son la densidad del fluido, su viscosidad, el diámetro de la tubería y la velocidad promedio del flujo estudiado, dichos valores se consideran en la ecuación 7.

$$N_R = \frac{vD\rho}{\eta}$$

Ec.9

Donde:

$N_R$  = número de Reynolds

$v$  = velocidad promedio del flujo

$D$  = diámetro de tubería

$\rho$  = densidad del fluido

$\eta$  = viscosidad

La ecuación 8 está considerada para secciones transversales circulares. El valor numérico obtenido como resultado de utilizar la ecuación 7 será un valor adimensional. Las dimensionales de las variables involucradas se muestran en la tabla I.

Tabla I. **Dimensionales de viscosidad utilizadas en el Sistema Internacional**

Cantidad	Unidades del SI
Velocidad	m/s
Diámetro	m
Densidad	kg/m <sup>3</sup> o N·s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup>
Viscosidad dinámica	N·s/m <sup>2</sup> o Pa·s o kg/m·s
Viscosidad cinemática	m <sup>2</sup> /s

Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 230.

Los siguientes valores son utilizados para clasificar un flujo como laminar o turbulento según el valor de número de Reynolds que se obtenga al utilizar la ecuación 9.

$N_R < 2\,000$ , el flujo es laminar.

$N_R > 4\,000$ , el flujo es turbulento.

Cuando el número de Reynolds se encuentre entre 2 000 y 4 000 no se sabe exactamente qué tipo de comportamiento adoptará el fluido, en dado caso se hace uso del diagrama de Moody para poder determinarlo, sin embargo es importante aclarar que para el tema abordado en el presente trabajo se considerarán únicamente flujos laminares, por lo cual no se entrará en detalles sobre el desarrollo del diagrama de Moody y su utilización.



## **2. PÉRDIDAS EN TUBERÍAS DE PVC**

### **2.1. Pérdidas en tuberías de PVC y accesorios**

Las pérdidas para tuberías de PVC debidas a la fricción y accesorios se encuentran ubicadas en distintos tramos del sistema de tuberías, por lo cual cada uno de estos valores se debe analizar por separado y de forma ordenada para poder obtener la pérdida de energía total. Es también importante notar que para estos tipos de pérdidas se deben tomar en cuenta las características relacionadas a cada una de ellas. En el caso de la pérdida de energía debida a fricción se deben tomar en cuenta los siguientes parámetros mensurables:

- Longitud de tubería
- Diámetro de tubería
- Velocidad promedio del flujo
- Viscosidad
- Densidad del flujo

Por otra parte, para la pérdida de energía debida a los accesorios se deben considerar los siguientes parámetros:

- Coeficiente de resistencia
- Velocidad promedio del flujo

Para las pérdidas debidas a accesorios existen variaciones en el análisis debido a los distintos tipos de accesorios utilizados.

## 2.2. Pérdidas menores

Las pérdidas ocasionadas por los distintos accesorios que modifican y regulan el paso del flujo son conocidas como pérdidas menores, dichas pérdidas son considerablemente menores que las pérdidas por fricción que ocurren en las tuberías, por lo cual, en algunas situaciones, son despreciables pero es aconsejable considerarlas para comprender de mejor forma cómo se comporta un sistema de distribución en su totalidad.

También deben ser tomados en cuenta otros dispositivos que, como ya se mencionó en el capítulo anterior, agreguen o retiren energía en forma considerable, tales como las bombas o turbinas.

Las pérdidas menores son ocasionadas por accesorios que modifican y regulan el paso del flujo en las distintas direcciones que un sistema de tuberías lo necesite. A continuación se pueden apreciar los principales accesorios que provocan pérdidas menores.

## 2.3. Ecuación utilizada para determinar pérdidas menores

En el presente trabajo se hará especial énfasis en las pérdidas ocasionadas por accesorios, por lo cual se considera la ecuación 10, la cual representa la pérdida de energía en un accesorio.

$$h_L = k(v^2/2g)$$

Ec.10

Donde:

$h_L$  = pérdida debida a accesorios

$v$  = velocidad promedio del flujo

$g$  = valor de la gravedad

$k$  = coeficiente de resistencia

En el Sistema Internacional el término  $v^2/2g$  se expresa en N-m/N de fluido en movimiento o simplemente como  $m$ , de igual forma como se expresa en la ecuación general de la energía.

La ecuación 8 es utilizada para determinar la pérdida de energía debida a accesorios o bien para determinar las pérdidas menores. Dicha expresión está en función del coeficiente de resistencia  $k$ , el cual varía en función de qué tipo de accesorio es el que se está analizando. El valor del coeficiente de resistencia varía para distintos accesorios utilizados.

El valor del coeficiente de resistencia varía según la geometría y velocidad presente en el accesorio utilizado. También se debe tomar en cuenta que el valor es adimensional, ya que representa constante de proporcionalidad entre la pérdida de energía y la carga de velocidad presente en el accesorio, mientras que la magnitud del mismo depende de la geometría del dispositivo que ocasionará la pérdida de energía.

#### **2.4. Coeficiente de resistencia**

Este es el valor  $k$  que se utiliza en la ecuación 10 para determinar las pérdidas menores presentes en los distintos accesorios utilizados en un sistema de tuberías. Este valor depende de algunas características propias del accesorio y del material del cual esté fabricado. Se pueden resumir en los siguientes parámetros mensurables:

- Geometría
- Número de Reynolds
- Tipo de accesorio
- Configuración particular

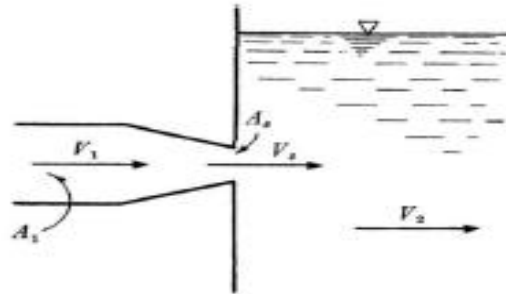
También existen casos particulares donde dicho valor puede ser calculado por medio de las expresiones matemáticas adecuadas o bien haciendo uso de diagramas para obtener un valor aproximado. El coeficiente de resistencia indica qué tanta energía se perderá en determinado accesorio.

## **2.5. Pérdida en salida de tuberías**

Cuando el fluido de una tubería pasa hacia un tanque grande o depósito su velocidad disminuye hasta un valor cercano a cero. En este proceso la energía cinética que el fluido posee en la tubería es disipada dentro del tanque o depósito.

Debido al efecto de ampliación sufrido por la vena líquida se produce una pérdida de energía que está relacionada con qué tan brusca sea la salida del flujo hacia el depósito o tanque. El factor de resistencia  $k$  está ligado directamente a la brusquedad de la salida del flujo. Cuando se presentan entradas redondeadas se producirá una menor pérdida de energía, mientras que cuando la entrada es de borde recto la pérdida de energía será mayor.

Figura 9. **Pérdida de energía en la entrada de un depósito**



Fuente: TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdidas de energía en cruces de tuberías*. p. 53.

El valor del coeficiente de resistencia para la pérdida de energía en la entrada de un depósito es  $k=1$ , sin importar la forma del tubo en el lugar donde se conecta al depósito. Sin embargo, cuando existe diferencia de diámetros en la tubería y la salida que entra al depósito o tanque, en ese caso el coeficiente de resistencia  $k$  toma los valores de la tabla II.

Tabla II. **Valores del factor  $k$  para distintas relaciones de diámetro**

$\frac{A_2}{A_1}$	$K$
0.1	0.83
0.2	0.84
0.3	0.85
0.4	0.87
0.5	0.88
0.6	0.90
0.7	0.92
0.8	0.94
0.9	0.965
1	1.0

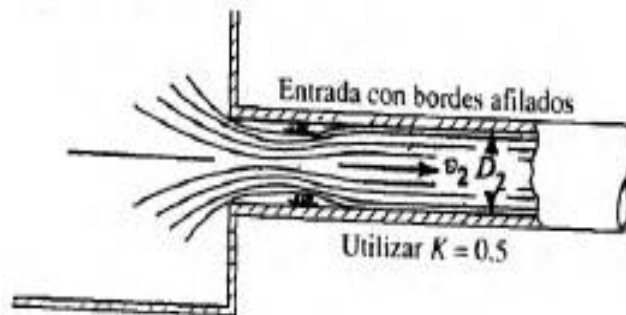
Fuente: TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdidas de energía en cruces de tuberías*. p. 54.

## 2.6. Pérdidas en entrada de tuberías

Cuando un fluido se mueve de un depósito o tanque hacia una tubería el fluido debe acelerar desde una velocidad despreciable hasta la velocidad en la tubería. La energía perdida en esta situación está relacionada a la facilidad con que la aceleración se lleva a cabo, el coeficiente de resistencia también depende de la geometría de la entrada.

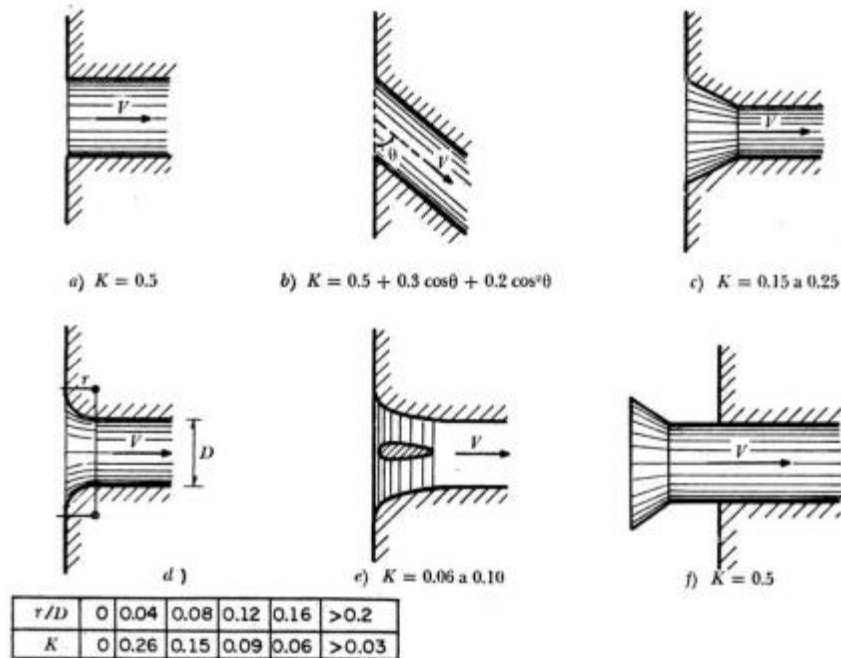
Esta pérdida de energía está ligada al efecto de contracción que sufre la vena líquida y por la formación de zonas de separación de acuerdo a qué tan brusco sea el ingreso del flujo y la turbulencia ocasionada dentro de la tubería. Las entradas con forma redondeada producen pérdidas inferiores a las ocasionadas por entradas de bordes rectos, tal como se ilustra en la figura 10.

Figura 10. **Pérdida de energía en la salida de un depósito**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 293.

Figura 11. Distintos tipos de entradas



Fuente: TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdidas de energía en cruces de tuberías*. p. 36.

Existen varios tipos de condiciones que provocan pérdida de energía en las tuberías, ocasionadas principalmente por una variedad de accesorios utilizados para regular el comportamiento del flujo a través de una tubería. A continuación se enlistan los principales tipos de pérdida provocada por accesorios en un sistema de tuberías de PVC:

- Pérdida en presencia de rejilla
- Pérdida por cambio de dirección
- Pérdida en uniones y bifurcaciones
- Pérdida en válvulas
- Pérdida en expansión súbita
- Pérdida en expansión gradual
- Pérdida en contracción súbita

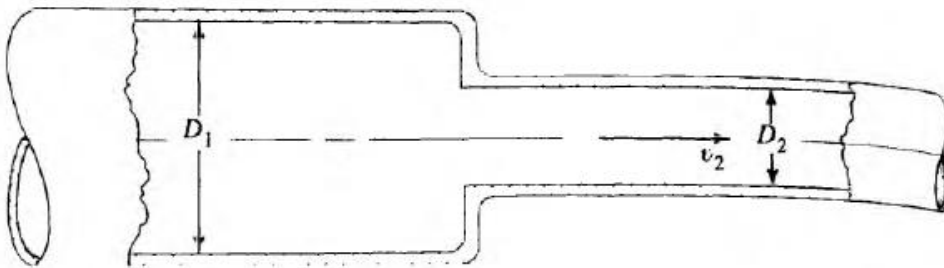
- Pérdida en contracción gradual

De las condiciones anteriores, en el presente trabajo se hará énfasis en la contracción súbita, lo cual se podrá apreciar en las secciones posteriores.

## 2.7. Contracción súbita

La geometría de una contracción súbita es similar a la de una expansión súbita, la principal diferencia radica en la dirección del flujo. En una contracción súbita el flujo se dirige de la tubería de mayor diámetro hacia una de menor diámetro.

Figura 12. **Representación de una contracción súbita**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 288.

La pérdida de energía se calcula por medio de la ecuación 10:

$$h_L = k(v^2/2g)$$

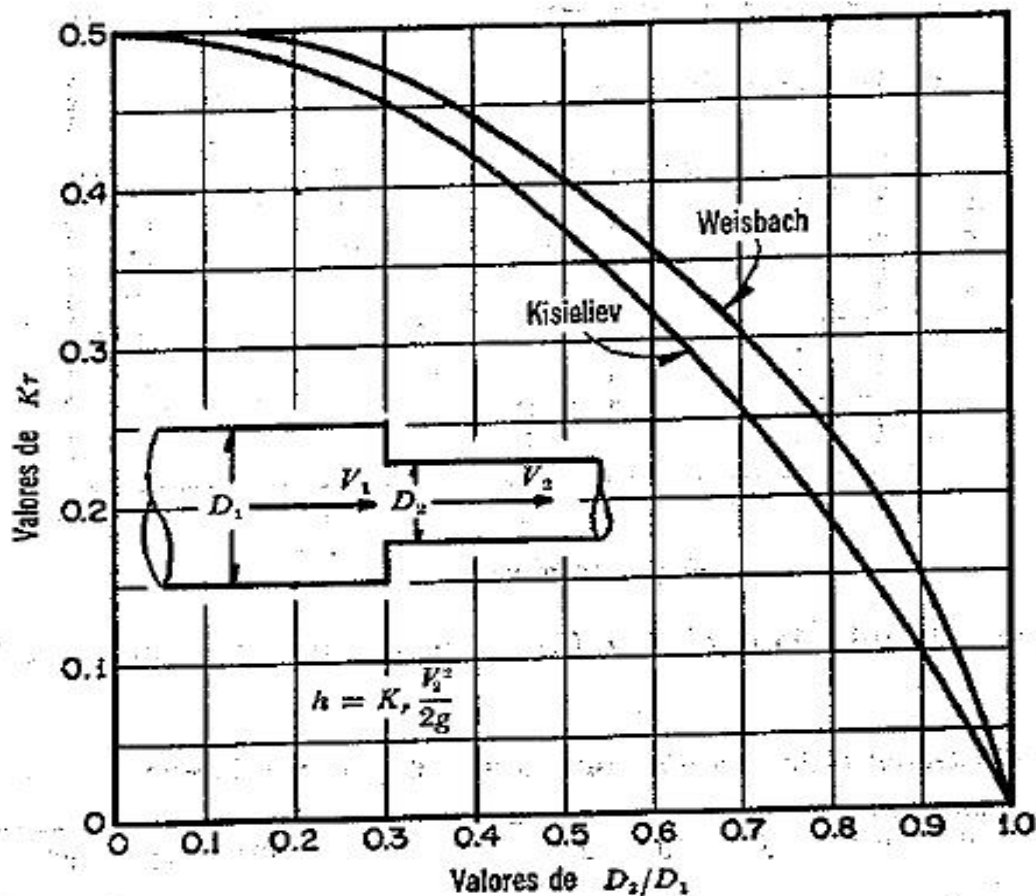
Ec.10



En este caso la velocidad  $v^2$  es tomada aguas debajo de la contracción, por otra parte el coeficiente de resistencia  $k$  depende de la velocidad del flujo y de la relación entre diámetros  $D_2/D_1$ .

En la figura 13 se pueden apreciar los valores de coeficiente de resistencia  $K$  y la relación de diámetros  $D_2/D_1$ . Dicha gráfica pretende dar los valores medios de algunos autores que han estudiado este tipo de condición de pérdida de energía para una tubería.

Figura 13. **Coefficiente de Weisbach y curva de Kisieliev para contracción súbita**



Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 302.

Cuando se presenta una contracción súbita con un diafragma como el de la figura 13, se debe considerar la ecuación 11.

$$K = \left(\frac{A_2}{\mu A_0} - 1\right)^2 + 0,04 \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2$$

Ec.11

Donde:

$k$  = coeficiente de resistencia

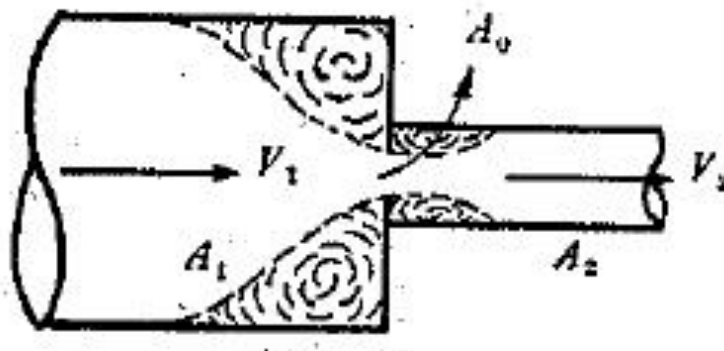
$A_2$  = área en tubería de menor diámetro

$A_0$  = área de paso por el diafragma

$\mu$  = viscosidad

Las variables involucradas se pueden apreciar en la figura 14, la cual muestra las áreas involucradas.

Figura 14. Reducción brusca con diafragma



Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 303.

Haciendo referencia a la figura 14, si los valores de  $A_0 < 0,1A_1$  y el diafragma poseen bordes rectos, entonces los valores de viscosidad  $\mu$  y coeficiente de resistencia  $k$  se toman de la tabla III.

Tabla III. **Viscosidad y coeficiente de resistencia 1 cuando  $A_0 < 0,1A_1$**

$A_0/A_2$	$\mu$	$K$
0.1	0.616	231.7
0.2	0.614	51
0.3	0.612	19.78
0.4	0.610	9.61
0.5	0.607	5.26
0.6	0.605	3.08
0.7	0.603	1.88
0.8	0.601	1.17
0.9	0.598	0.73
1	0.596	0.48

Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 302.

Si  $A_0 \geq 0,1A_1$  y el diafragma tiene bordes rectos, entonces los valores viscosidad  $\mu$  se presentan en la tabla IV.

Tabla IV. **Viscosidad y coeficiente de resistencia 2 cuando  $A_0 \geq 0,1A_1$**

$A_0/A_1$	$\mu$
0.1	0.63
0.2	0.64
0.3	0.65
0.4	0.67
0.5	0.69
0.6	0.72
0.7	0.77
0.8	0.85
0.9	0.92
1	1

Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 302.

Cuando  $A_0 = A_1$  y el diafragma tiene bordes rectos, entonces los valores de viscosidad y coeficiente de resistencia  $k$  se presentan en la tabla V.

Tabla V. **Valores de viscosidad y coeficiente de resistencia cuando  $A_0 = A_1$**

$A_0/A_1$	$\mu$	$K$
0.05	—	1 070
0.1	0.624	226
0.2	0.632	47.8
0.3	0.643	17.5
0.4	0.659	7.8
0.5	0.681	3.76
0.6	0.712	1.79
0.7	0.755	0.80
0.8	0.813	0.29
0.9	0.892	0.09
1.0	1.0	0

Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 303.

Cuando el valor de  $A_1$  es muy grande entonces el valor de la viscosidad  $\mu$  tiende a 0,60, esta condición se presenta en la tabla VI.

Tabla VI. **Viscosidad y coeficiente de resistencia cuando  $A_1 \approx 0,60$**

$A_2/A_0$	$K$
1	0.44
1.25	1.17
1.5	2.25
2	5.44
3	16
5	53.7
10	245.5

Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. P. 303.

Los valores de la tabla VI también se pueden expresar haciendo uso de la ecuación 12.

$$k = \left( \frac{A_2}{\mu A_0} - 1 \right)^2$$

Ec.12

Donde:

$K$  = coeficiente de resistencia

$A_2$  = área en tubería de menor diámetro

$A_0$  = área de paso por el diafragma

$\mu$  = viscosidad

Tabla VII. Factores de coeficiente de resistencia  $K$  para distintas velocidades y relación de diámetros  $D_2/D_1$

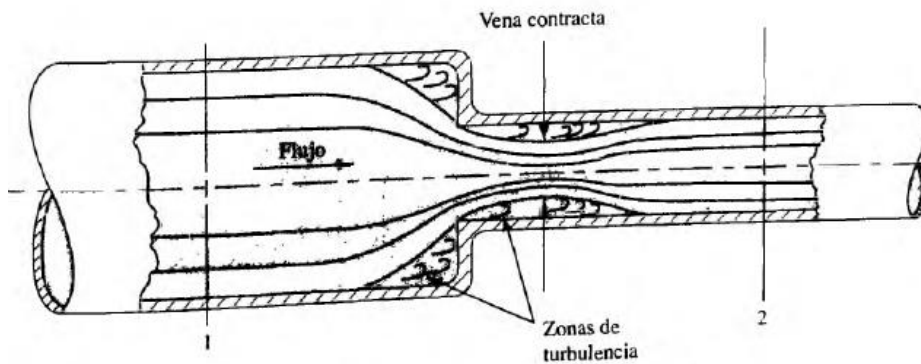
$D_1/D_2$	Velocidad $v_2$								
	0.6 m/s 2 pies/s	1.2 m/s 4 pies/s	1.8 m/s 6 pies/s	2.4 m/s 8 pies/s	3 m/s 10 pies/s	4.5 m/s 15 pies/s	6 m/s 20 pies/s	9 m/s 30 pies/s	12 m/s 40 pies/s
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.1	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06
1.2	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.10	0.11
1.4	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19	0.20
1.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25	0.24
1.8	0.34	0.34	0.34	0.33	0.33	0.32	0.31	0.29	0.27
2.0	0.38	0.37	0.37	0.36	0.36	0.34	0.33	0.31	0.29
2.2	0.40	0.40	0.39	0.39	0.38	0.37	0.35	0.33	0.30
2.5	0.42	0.42	0.41	0.40	0.40	0.38	0.37	0.34	0.31
3.0	0.44	0.44	0.43	0.42	0.42	0.40	0.39	0.36	0.33
4.0	0.47	0.46	0.45	0.45	0.44	0.42	0.41	0.37	0.34
5.0	0.48	0.47	0.47	0.46	0.45	0.44	0.42	0.38	0.35
10.0	0.49	0.48	0.48	0.47	0.46	0.45	0.43	0.40	0.36
$\infty$	0.49	0.48	0.48	0.47	0.47	0.45	0.44	0.41	0.38

Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 289.

La tabla VII muestra valores de  $k$  para distintos valores de relación de diámetros.

La pérdida de energía debida a una contracción súbita es determinada por un mecanismo muy complejo. En la figura 15 se puede observar el comportamiento del flujo al pasar por este accesorio.

Figura 15. **Representación del movimiento del flujo en una contracción súbita**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 289.

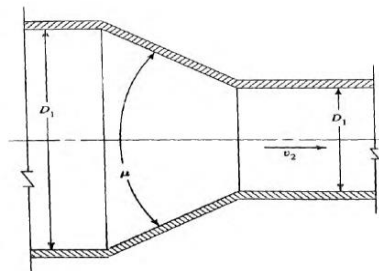
En la figura 15 se puede apreciar las líneas que representan las trayectorias del flujo, llamadas líneas de corriente. Cuando las líneas de corriente se van acercando a la contracción van adoptando una trayectoria curva que continua hasta después de haber pasado por la contracción súbita, de esta forma la sección transversal mínima efectiva, por la cual pasa el flujo, es menor que la sección de la tubería utilizada aguas abajo. La sección donde ocurre se encuentra en el área transversal mínima y es llamada vena contracta.

Después de la vena contracta el flujo desacelera y se expande nuevamente para llenar la sección total de la tubería de menor diámetro, por lo tanto la turbulencia que ocasiona la expansión y contracción del flujo es la que genera la pérdida de energía en una contracción súbita. Es en este tipo de accesorio respecto al cual gira la presente investigación, lo cual se desarrollará con más profundidad en las secciones posteriores.

## 2.8. Contracción gradual

La contracción gradual es similar a una contracción súbita con la diferencia que la primera posee un ángulo de inclinación  $\theta$ , llamado de cono, en el paso de la tubería de mayor diámetro hacia la de menor diámetro. Dicho ángulo da una forma de cono al accesorio.

Figura 16. Representación de una contracción gradual

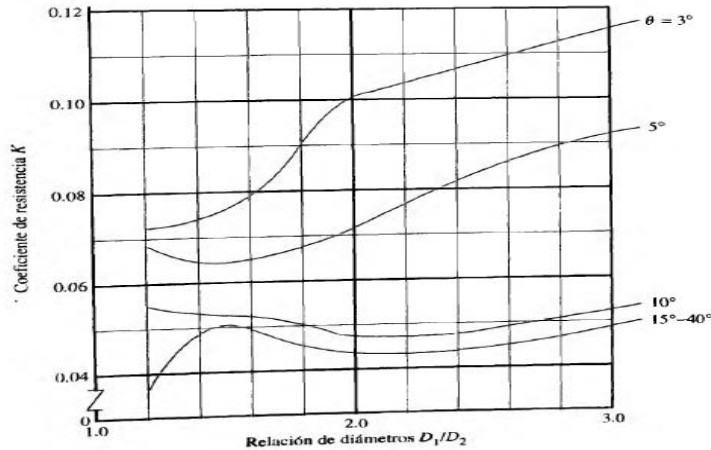


Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 290.

Los parámetros mensurables tales como el ángulo del cono y la relación de los diámetros  $D_2/D_1$  están relacionados para determinar el valor del coeficiente de resistencia. La energía perdida se calcula de igual forma con la ecuación 9, en la cual la velocidad considerada es tomada aguas abajo de la contracción gradual. Por otra parte, cuando el ángulo del cono disminuye a valores menores a  $15^\circ$  entonces el coeficiente de resistencia aumenta.

Lo anterior se puede apreciar en la figura 16, el comportamiento del valor  $k$  se ve afectado debido a la turbulencia ocasionada en la expansión del flujo hacia la tubería de menor diámetro y también debido a efectos de fricción. Este tipo de accesorio representa una leve menor pérdida que en una contracción súbita, siempre dependiendo de la brusquedad con que se efectúa dicha contracción.

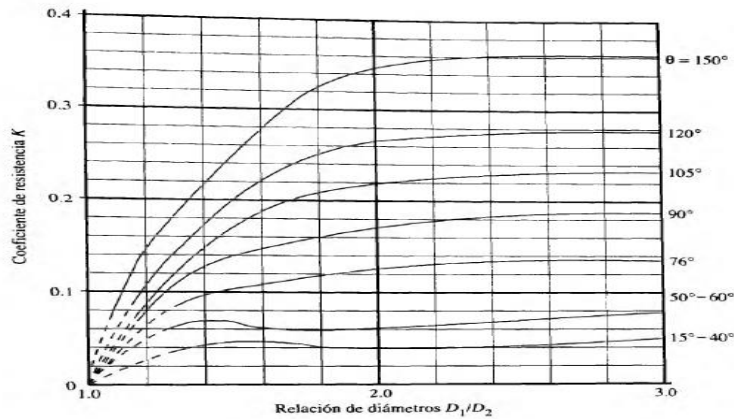
Figura 17. **Coefficiente de resistencia de forma gráfica para un valor de ángulo de cono <math>< 15^\circ</math>**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 291.

Por otra parte, también se considera la figura 18 para determinar los valores de k para ángulos iguales o mayores que 15°.

Figura 18. **Coefficiente de resistencia de forma gráfica para un valor de ángulo de cono  $\geq 15^\circ$**



Fuente: MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos*. p. 290.



Además de los valores de las gráficas anteriores, también se encuentran algunas ecuaciones 10, 11 y 12, las cuales son utilizadas para evitar pérdidas grandes de energía, tomando en cuenta el ángulo de reducción, el cual no debe exceder un valor especificado para obtener un valor de coeficiente de resistencia  $k$  igual a 1.<sup>1</sup>

Tabla VIII. **Factores de coeficiente de resistencia  $K$  para reducción gradual del ángulo  $\theta$ , según Kisieliev**

$\theta$	4 a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°
$K$	0.060												
	0.005	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 301.

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{gD}{V}}$$

Ec.10

Donde:

$\theta$  = valor del ángulo de reducción gradual

$V$  = velocidad promedio del flujo

$g$  = valor de la gravedad

$D$  = valor de diámetro promedio de tubería

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

Ec.11

Donde:

<sup>1</sup> SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. 1997.

$D$  = valor del diámetro promedio

$D_1$  = valor del diámetro mayor

$D_2$  = valor del diámetro menor

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Ec.12

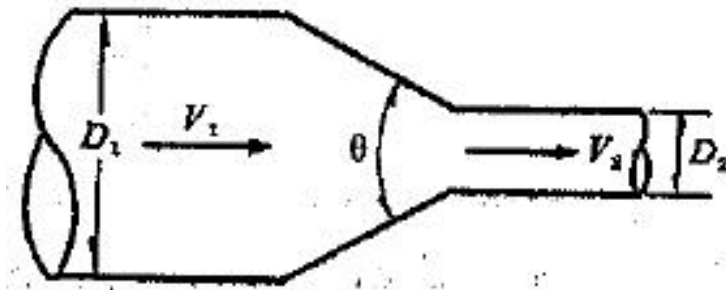
Donde:

$V$  = valor promedio de la velocidad

$V_1$  = valor de la velocidad en tubería de mayor diámetro

$V_2$  = valor de la velocidad en tubería de menor diámetro

Figura 19. **Variables involucradas para determinar el ángulo de reducción gradual  $\theta$**



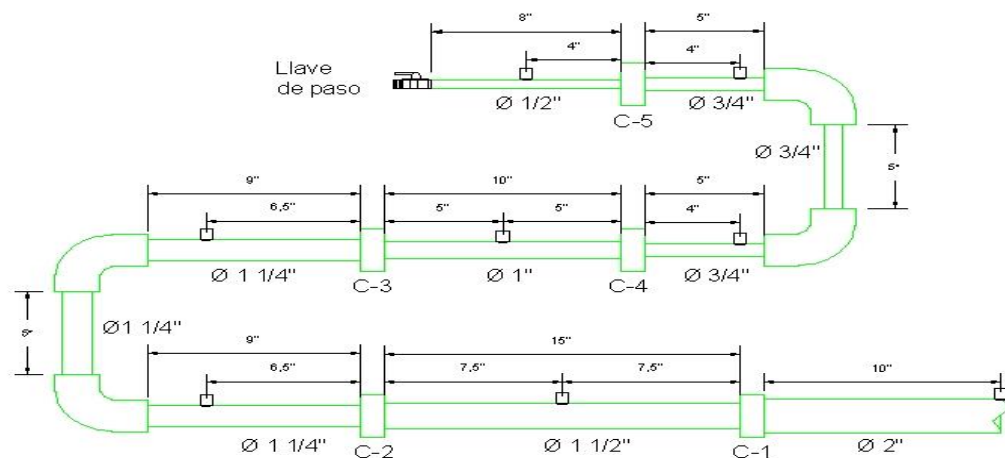
Fuente: SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. p. 301.

### 3. EXPERIMENTO Y DETERMINACIÓN DE ECUACIONES EXPERIMENTALES

#### 3.1. Diámetros de tubería y ubicación de piezómetros

Se han seleccionado los diámetros de tubería de PVC más utilizados comercialmente, siendo el diámetro mayor de 2" y el menor de 1/2", siendo estos los más representativos. En la figura 20 se puede observar la posición de los piezómetros en las tuberías de PVC, estos fueron colocados a una distancia de al menos cinco veces el diámetro de la tubería medida desde la posición de la contracción súbita y fueron fijados por medio de racores de 1/4" de diámetro. Los piezómetros fueron colocados en el otro extremo en el tablero en el cual fue tomada la lectura correspondiente para cada uno de los ocho piezómetros utilizados.

Figura 20. **Modelo físico para el estudio de pérdidas en contracciones bruscas**



Fuente: elaboración propia, utilizando el programa AUTOCAD 2018.

Tabla IX. **Diámetros de contracciones utilizadas en el modelo experimental**

CONT.	D (PLG)	D ENTRADA (PLG)	ÁREA (CM <sup>2</sup> )	D SALIDA (PLG)
1	2 - 1 1/2	2	20,27	1 1/2
2	1 1/2 - 1 1/4	1 1/2	11,40	1 1/4
3	1 1/4 - 1	1 1/4	7,92	1
4	1 - 3/4	1	5,07	3/4
5	3/4 - 1/2	3/4	1,28	1/2

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la tabla IX se presentan los diámetros de las contracciones utilizadas.

### 3.2. **Equipo y materiales utilizados**

Dentro del equipo utilizado para construir el modelo experimental se tiene:

- Banco hidráulico
- Tablero con piezómetros
- Tablero con sistema de tuberías de PVC y contracciones súbitas
- Mangueras con juntas rápidas
- Cronometro digital

Figura 21. **Banco hidráulico**



Fuente: elaboración propia.

Figura 22. **Tablero de piezómetros**



Fuente: elaboración propia.

Para la construcción del tablero de tuberías con contracciones súbitas de PVC se utiliza los siguientes materiales:

- Tablero de madera
- Tuberías de PVC de diámetros comerciales
- Contracciones súbitas de PVC de diámetros diversos
- Racores de 1/8" de diámetro
- Abrazaderas, tornillos y tuercas de diámetros diversos
- Teflón
- Pegamento para PVC

Los diámetros de tuberías y contracciones súbitas utilizados se pueden apreciar en la tabla IX.

Figura 23. **Modelo experimental: tablero con contracciones**



Fuente: elaboración propia.

Figura 24. **Modelo experimental: tablero con contracciones y piezómetros**



Fuente: elaboración propia.

### 3.3. Modelo experimental

El modelo experimental consta de un circuito en serie de tuberías de PVC donde se encuentran las cinco contracciones y de ocho tomas de presión, las cuales están conectadas a los piezómetros, y el banco hidráulico proporciona el flujo constante al sistema. (Ver figura 25).

Se realizaron un total de 13 experimentos, en los cuales se tomó lectura de las diferencias de presión en cada piezómetro y su respectivo caudal.

Figura 25. **Banco hidráulico conectado al sistema de tuberías de PVC con contracciones súbitas**



Fuente: elaboración propia.

Figura 26. **Conexión de la toma de presión en una contracción**



Fuente: elaboración propia.

### **3.4. Limitantes físicas al realizar el experimento**

Al momento de realizar el experimento se presenta como principales limitantes algunas de las características del equipo utilizado en el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Universidad de San Carlos de Guatemala, así también las características del modelo experimental ensayado, en el cual solo se tomó lectura de caídas de presión en los piezómetros y tiempos de llenado para un volumen dado, mientras se variaba el caudal de menor a mayor, no existiendo alguna forma directa de medir la velocidad o caudales en las secciones de tuberías, por lo cual estos y otros parámetros de interés fueron determinados por los cálculos correspondientes.



### 3.5. Procedimiento

Para la toma de datos se realizan los siguientes pasos:

- Encender la bomba y verificar que no exista aire en los piezómetros.
- Abrir la válvula reguladora empezando con un caudal pequeño.
- Dejar que las lecturas de los piezómetros se estabilicen, esto toma unos minutos.
- Anotar las lecturas de los piezómetros.
- Medir el caudal que circula con el método volumétrico de aforo.
- Repetir el procedimiento aumentando el caudal.

Los datos se muestran en la tabla X:

Tabla X. **Lectura de datos**

No.	LECTURA DE PIEZÓMETROS (CM)								TIEMPO DE LLENADO (S)		
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
1	98,00	97,75	97,50	97,00	95,75	94,25	95,00	70,25	23,50	23,19	23,22
2	95,50	95,25	95,00	93,50	91,75	89,00	89,50	59,50	21,18	21,08	21,25
3	107,50	107,25	107,00	105,25	103,25	100,25	102,25	69,75	20,33	20,81	20,85
4	113,00	112,50	112,00	109,75	107,25	103,50	105,00	66,50	19,03	19,07	19,05
5	98,00	97,50	97,00	94,75	92,00	88,00	90,75	51,50	18,95	19,00	18,97
6	96,00	95,25	94,50	91,75	87,75	80,50	87,00	30,50	17,05	17,02	17,15
7	101,25	100,25	99,25	97,00	91,75	81,25	91,00	25,75	15,41	15,36	15,45
8	89,00	87,50	86,00	82,75	75,25	60,00	90,75	0,75	13,48	13,34	13,26
9	101,75	99,50	97,25	92,25	81,25	58,50	121,25	1,00	11,46	11,51	11,69
10	101,00	98,00	95,00	89,75	75,50	45,75	150,75	1,00	10,34	10,23	10,56
11	108,00	104,25	100,25	96,00	78,25	39,00	186,25	5,00	9,66	9,15	9,66
12	116,75	112,75	108,50	106,25	87,25	45,25	190,00	1,25	9,25	9,16	9,72
13	122,25	117,25	112,00	112,25	87,75	36,75	198,00	0,25	8,50	8,25	8,25

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

### 3.6. Realización de cálculos

Los cálculos realizados están basados en la tabla XI, la cual muestra las lecturas tomadas en los piezómetros y los tiempos de aforo volumétrico realizado.

- Paso 1: determinar caída de presión en cada contracción restando la lectura de los piezómetros en cada una de las contracciones.
- Paso 2: determinar el caudal con la fórmula  $q = V/T$ .

Tabla XI. Caídas de presión y caudales

No.	CAÍDAS DE PRESIÓN EN CONTRACCIONES (CM)					CAUDAL (CM <sup>3</sup> /S)			
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>PROMEDIO</sub>
1	0,25	0,25	1,25	1,50	24,75	212,77	215,61	215,33	214,57
2	0,25	0,25	1,75	2,75	30,00	236,07	237,19	235,29	236,19
3	0,25	0,25	2,00	3,00	32,50	245,94	240,27	239,81	242,01
4	0,50	0,50	2,50	3,75	38,50	262,74	262,19	262,47	262,47
5	0,50	0,50	2,75	4,00	39,25	263,85	263,16	263,57	263,53
6	0,75	0,75	4,00	7,25	56,50	293,26	293,77	291,55	292,86
7	1,00	1,00	5,25	10,50	65,25	324,46	325,52	323,62	324,54
8	1,50	1,50	7,50	15,25	90,00	370,92	374,81	377,07	374,27
9	2,25	2,25	11,00	22,75	120,25	436,30	434,40	427,72	432,81
10	3,00	3,00	14,25	29,75	149,75	483,56	488,76	473,48	481,93
11	3,75	4,00	17,75	39,25	181,25	517,60	546,45	517,60	527,21
12	4,00	4,25	19,00	42,00	188,75	540,54	545,85	514,40	533,60
13	5,00	5,25	24,50	51,00	197,75	588,24	606,06	606,06	600,12

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

La tabla XI muestra los resultados de caídas de presión en las contracciones y el caudal promedio calculado.

- Paso 3: se determina la velocidad de sección de tubería con la fórmula  $v = \frac{Q_{promedio}}{A_{sección}}$
- Paso 4: se calcula la energía cinética en las secciones de tuberías con la expresión  $E_{cinética} = \frac{v^2}{2g}$ .

Los resultados de los pasos 3 y 4 se presentan en la tabla XII:

Tabla XII. **Velocidad y energía cinética en secciones de tuberías**

No.	VELOCIDAD EN SECCIONES (CMS)								ENERGÍA CINÉTICA ( $v^2/2g$ , CM)							
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>
1	10,59	18,82	27,10	27,10	42,35	75,28	75,28	169,38	0,06	0,18	0,37	0,37	0,91	2,89	2,89	14,62
2	11,65	20,72	29,83	29,83	46,61	82,87	82,87	186,45	0,07	0,22	0,45	0,45	1,11	3,50	3,50	17,72
3	11,94	21,23	30,57	30,57	47,76	84,91	84,91	191,04	0,07	0,23	0,48	0,48	1,16	3,67	3,67	18,60
4	12,95	23,02	33,15	33,15	51,80	92,09	92,09	207,19	0,09	0,27	0,56	0,56	1,37	4,32	4,32	21,88
5	13,00	23,11	33,28	33,28	52,01	92,46	92,46	208,03	0,09	0,27	0,56	0,56	1,38	4,36	4,36	22,06
6	14,45	25,69	36,99	36,99	57,80	102,75	102,75	231,18	0,11	0,34	0,70	0,70	1,70	5,38	5,38	27,24
7	16,01	28,47	40,99	40,99	64,05	113,86	113,86	256,19	0,13	0,41	0,86	0,86	2,09	6,61	6,61	33,45
8	18,47	32,83	47,27	47,27	73,86	131,31	131,31	295,45	0,17	0,55	1,14	1,14	2,78	8,79	8,79	44,49
9	21,35	37,96	54,67	54,67	85,42	151,85	151,85	341,66	0,23	0,73	1,52	1,52	3,72	11,75	11,75	59,50
10	23,78	42,27	60,87	60,87	95,11	169,09	169,09	380,44	0,29	0,91	1,89	1,89	4,61	14,57	14,57	73,77
11	26,01	46,24	66,59	66,59	104,05	184,97	184,97	416,19	0,34	1,09	2,26	2,26	5,52	17,44	17,44	88,28
12	26,33	46,80	67,40	67,40	105,31	187,21	187,21	421,23	0,35	1,12	2,32	2,32	5,65	17,86	17,86	90,43
13	29,61	52,64	75,80	75,80	118,43	210,55	210,55	473,74	0,45	1,41	2,93	2,93	7,15	22,60	22,60	114,39

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

- Paso 5: se calcula la energía cinética para cada sección y contracción según la forma de cada modelo utilizado  $\Delta\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$  y  $\frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}$ , estas corresponden a los modelos dos y tres, respectivamente.

Tabla XIII. **Energía cinética para distintos modelos**

No.	$\Delta\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ (CM)					$\frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}$ (CM)				
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>
1	-0,12	-0,19	-0,54	-1,97	-11,73	0,03	0,03	0,12	0,55	4,51
2	-0,15	-0,23	-0,65	-2,39	-14,22	0,04	0,04	0,14	0,67	5,47
3	-0,16	-0,25	-0,69	-2,51	-14,93	0,04	0,04	0,15	0,70	5,74
4	-0,18	-0,29	-0,81	-2,95	-17,56	0,05	0,05	0,18	0,83	6,75
5	-0,19	-0,29	-0,81	-2,98	-17,70	0,05	0,05	0,18	0,83	6,81
6	-0,23	-0,36	-1,01	-3,68	-21,86	0,06	0,07	0,22	1,03	8,41
7	-0,28	-0,44	-1,23	-4,52	-26,84	0,08	0,08	0,27	1,26	10,32
8	-0,38	-0,59	-1,64	-6,01	-35,70	0,11	0,11	0,36	1,68	13,73
9	-0,50	-0,79	-2,20	-8,03	-47,74	0,14	0,14	0,48	2,25	18,36
10	-0,62	-0,98	-2,72	-9,96	-59,20	0,17	0,18	0,60	2,79	22,77
11	-0,75	-1,17	-3,26	-11,92	-70,84	0,21	0,21	0,72	3,34	27,25
12	-0,76	-1,20	-3,34	-12,21	-72,57	0,21	0,22	0,73	3,42	27,91
13	-0,97	-1,52	-4,22	-15,45	-91,79	0,27	0,27	0,93	4,32	35,30

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

- Paso 6: se determina la pérdida de energía con la expresión:

$$h_L = \Delta P + \Delta\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

- Paso 7: se determina el valor del coeficiente k con la expresión:

$$k = \frac{h_L}{(v_2 - v_1)^2 / 2g}$$

### 3.7. Ejemplo de cálculo

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación de los pasos anteriores para la toma nueva y contracción uno:

Datos tomados de las tablas anteriores:

$$P_1 = 101,75 \text{ cm} \quad \text{Tiempos de llenado} = 11,46, 11,51, 11,69 \text{ s,}$$

$$P_2 = 99,50 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen} = 5 \text{ L.}$$

Caída de presión a través de la contracción 1:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (101,75 - 99,50) \text{ cm} = 2,25 \text{ cm}$$

Caudales y caudal promedio:

$$Q_{\text{promedio}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3} = \frac{\frac{5000 \text{ cm}^3}{11,46 \text{ s}} + \frac{5000 \text{ cm}^3}{11,51 \text{ s}} + \frac{5000 \text{ cm}^3}{11,69 \text{ s}}}{3} = 427,72 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Velocidad en sección de tubería para análisis de contracción 1. La sección aguas abajo cuenta con un área de  $11,40 \text{ cm}^2$ :

$$v_{\text{aguas abajo}} = \frac{Q_{\text{promedio}}}{A_{\text{sección}}} = \frac{427,72 \text{ cm}^3/\text{s}}{11,40 \text{ cm}^2} = 37,96 \text{ cm/s}$$

La sección aguas arriba cuenta con un área de  $20,30 \text{ cm}^2$ :

$$v_{\text{aguas abajo}} = \frac{Q_{\text{promedio}}}{A_{\text{sección}}} = \frac{427,72 \text{ cm}^3/\text{s}}{20,30 \text{ cm}^2} = 21,35 \text{ cm/s}$$

Cálculo de energía cinética en piezómetros 2 y 1:

$$E_{\text{cinética piezometro 1}} = \frac{v^2}{2g} = \frac{(37,96 \text{ cm/s})^2}{2(981 \text{ cm/s}^2)} = 0,73 \text{ cm}$$

$$E_{\text{cinética piezometro 2}} = \frac{v^2}{2g} = \frac{(21,35 \text{ cm/s})^2}{2(981 \text{ cm/s}^2)} = 0,23 \text{ cm}$$

Cambio de energía cinética en la contracción 1:

$$\Delta\left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = \Delta(0,23 \text{ cm} - 0,73 \text{ cm}) = -0,50 \text{ cm}$$

$$\frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} = \frac{(37,96 \text{ cm/s} - 21,35 \text{ cm/s})^2}{2(981 \text{ cm/s}^2)} = 0,14 \text{ cm}$$

Las formas de calcular la energía cinética son necesarias, ya que se utilizarán para analizar determinados modelos matemáticos posteriormente.

Pérdida de energía en la contracción 1:

$$h_L = \Delta P + \Delta\left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = 2,25 \text{ cm} - 0,50 \text{ cm} = 1,75 \text{ cm}$$

Cálculo del factor k:

Tomando en cuenta la ecuación 10, se obtiene el valor de k de la ecuación, siendo este un valor adimensional.

$$h_L = k\left(\frac{v^2}{2g}\right) \Rightarrow k = \frac{h_L}{E_{\text{cinética piezometro 2}}} = \frac{1,75 \text{ cm}}{0,23 \text{ cm}} = 0,96$$

En la tabla XIV se muestran los resultados para las contracciones analizadas.

Tabla XIV. Pérdidas de energía y factores k

No	PÉRDIDA DE ENERGÍA (CM)					COEFICIENTES K				
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>
1	0,13	0,06	0,71	-0,47	13,02	0,70	0,15	0,78	-0,16	0,89
2	0,10	0,02	1,10	0,36	15,78	0,46	0,03	0,99	0,10	0,89
3	0,09	0,00	1,31	0,49	17,57	0,41	0,01	1,13	0,13	0,94
4	0,32	0,21	1,69	0,80	20,94	1,17	0,37	1,24	0,18	0,96
5	0,31	0,21	1,94	1,02	21,55	1,15	0,37	1,40	0,23	0,98
6	0,52	0,39	2,99	3,57	34,64	1,55	0,56	1,76	0,66	1,27
7	0,72	0,56	4,02	5,98	38,41	1,74	0,65	1,92	0,91	1,15
8	1,12	0,91	5,86	9,24	54,30	2,05	0,80	2,11	1,05	1,22
9	1,75	1,46	8,80	14,72	72,51	2,38	0,96	2,37	1,25	1,22
10	2,38	2,02	11,53	19,79	90,55	2,61	1,07	2,50	1,36	1,23
11	3,00	2,83	14,49	27,33	110,41	2,76	1,25	2,63	1,57	1,25
12	3,24	3,05	15,66	29,79	116,18	2,90	1,32	2,77	1,67	1,28
13	4,03	3,73	20,28	35,55	105,96	2,86	1,28	2,84	1,57	0,93

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

### 3.7.1. Valores de k teóricos para las contracciones súbitas analizadas

Se han calculado los valores de k para las contracciones súbitas de acuerdo a los valores proporcionados en la tabla 10.3.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> MOTT, Robert. *Mecánica de fluidos*. 2015.

Tabla XV. Valores de k teóricos

D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	VELOCIDADES M/S									
	0,6	1,1843	1,2	1,8	2,4	3	4,5	6	9	12
1	0		0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0,03		0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06
1,2	0,07		0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,1	0,11
1,25	k <sub>1</sub>	k	k <sub>2</sub>							
1,4	0,07		0,17	0,17	0,17	0,18	0,18	0,18	0,19	0,2
1,6	0,26		0,26	0,26	0,26	0,26	0,25	0,25	0,25	0,24
1,8	0,34		0,34	0,34	0,33	0,33	0,32	0,31	0,29	0,27
2,0	0,38		0,37	0,37	0,36	0,36	0,34	0,33	0,31	0,29
2,2	2,2		2,2	2,2	2,2	0,38	0,37	0,35	0,33	0,3
2,5	2,5		2,5	2,5	2,5	0,4	0,38	0,37	0,34	0,31
3,0	0,44		0,44	0,43	0,42	0,42	0,4	0,39	0,36	0,33
4,0	0,47		0,46	0,45	0,45	0,44	0,42	0,41	0,37	0,34
5,0	0,48		0,47	0,47	0,46	0,45	0,44	0,42	0,38	0,35
10,0	0,49		0,48	0,48	0,47	0,46	0,45	0,43	0,4	0,36

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la tabla XV los valores de k<sub>1</sub> y k<sub>2</sub> serán calculados por medio de interpolaciones y posteriormente se calculará el valor de k de la misma forma.

Para k<sub>1</sub>:

$$\frac{0,07 - 0,07}{1,4 - 1,2} = \frac{k_1 - 0,07}{1,25 - 1,2} \rightarrow k_1 = 0,07$$

Para k<sub>2</sub>:

$$\frac{0,17 - 0,07}{1,4 - 1,2} = \frac{k_2 - 0,07}{1,25 - 1,2} \rightarrow k_2 = 0,095$$



Para k:

$$\frac{0,095 - 0,07}{1,2 - 0,6} = \frac{k - 0,07}{1,1843 - 0,6} \rightarrow k = 0,0943$$

De una forma similar han sido calculados los demás valores de k para las contracciones súbitas, tomando en cuenta las velocidades de cada contracción súbita en el modelo experimental. Los resultados se muestran en la tabla XVI.

Tabla XVI. **Valores de k teóricos para las contracciones súbitas**

<b>VALORES DE K PARA CONTRACCIONES ANALIZADAS</b>				
<b>CONTRACCIÓN</b>	<b>D<sub>1</sub>/D<sub>2</sub></b>	<b>V (m/s)</b>	<b>k</b>	<b>k<sub>Experimental</sub></b>
C-2	1,2	0,687	0,07	1,07
		0,758	0,07	1,28
C-3	1,25	0,738	0,061	2,11
		1,184	0,094	2,84
C-4	1,33	0,828	0,094	0,10
		1,690	0,135	1,36
		2,105	0,135	1,57
C-5	1,5	1,693	0,215	0,89
		2,080	0,215	0,98
		3,804	0,217	1,23
		4,737	0,215	0,93

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

La contracción súbita 1 no ha sido analizada, ya que se encuentra en un rango de velocidad fuera de los que incluye la tabla 10.3.<sup>3</sup> Al comparar los resultados del factor k calculados con el método de Robert Mott, con los valores de k encontrados de forma experimental, se observa la gran variación, por lo que es necesario establecer nuevos modelos matemáticos para que la determinación de la pérdida en una contracción súbita sea más precisa.

<sup>3</sup> MOTT, Robert. *Mecánica de fluidos*. 2015.

### 3.8. Modelos matemáticos propuestos

A continuación se muestran los modelos matemáticos propuestos.

#### 3.8.1. Modelo matemático 1

En este modelo se ha relacionado la pérdida de energía y la energía cinética de la siguiente forma:

$$h_L = k \left( \frac{v^2}{2g} \right)$$

Donde:

$h_L$  = pérdida en la contracción analizada

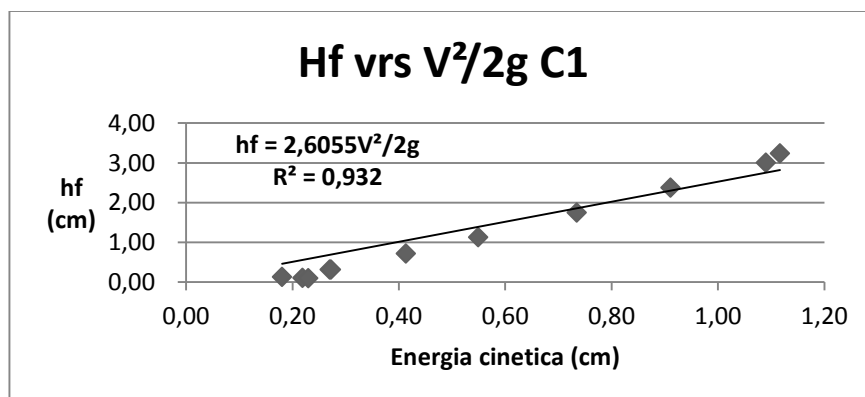
$v$  = velocidad aguas abajo de la contracción analizada

$g$  = gravedad

$k$  = coeficiente de pérdida

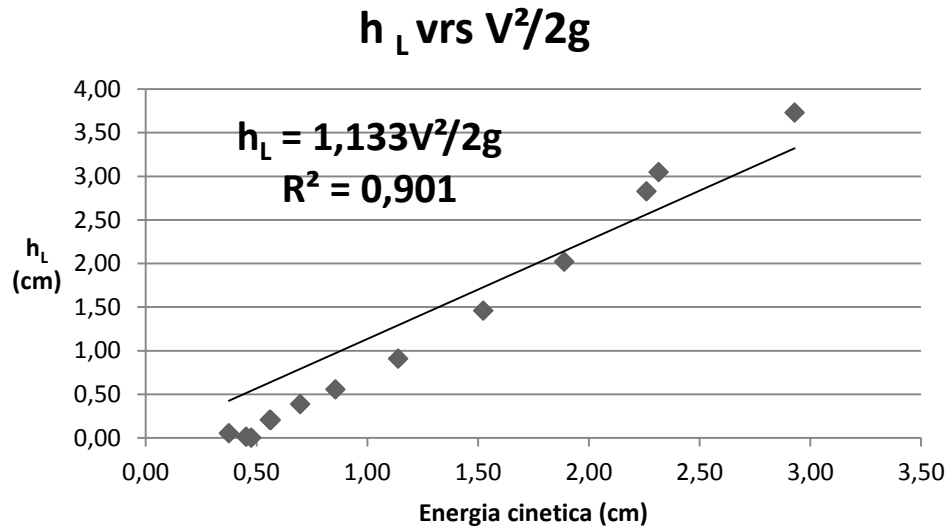
La cual tiene un comportamiento lineal y para las contracciones del sistema presenta los siguientes comportamientos mostrados en las figuras 28 a 32:

Figura 27. Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 1



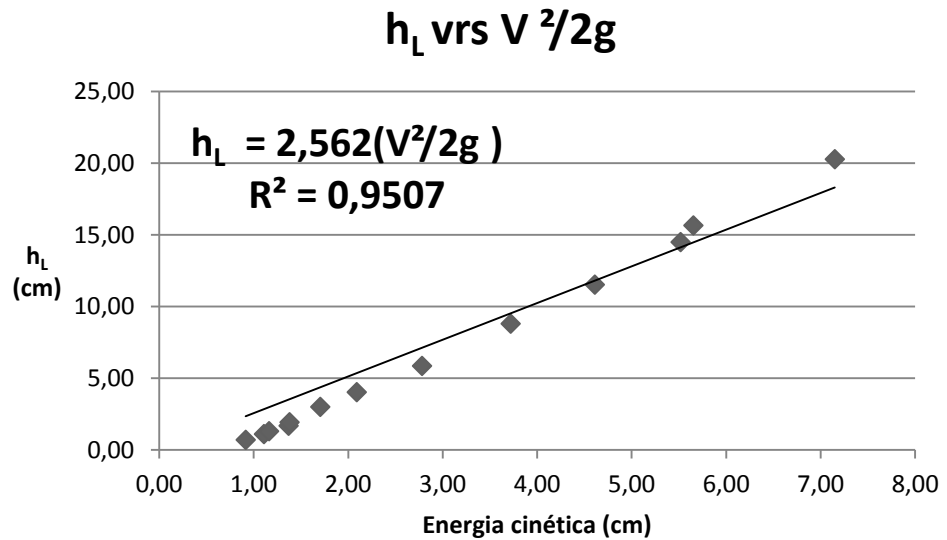
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 28. Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 2



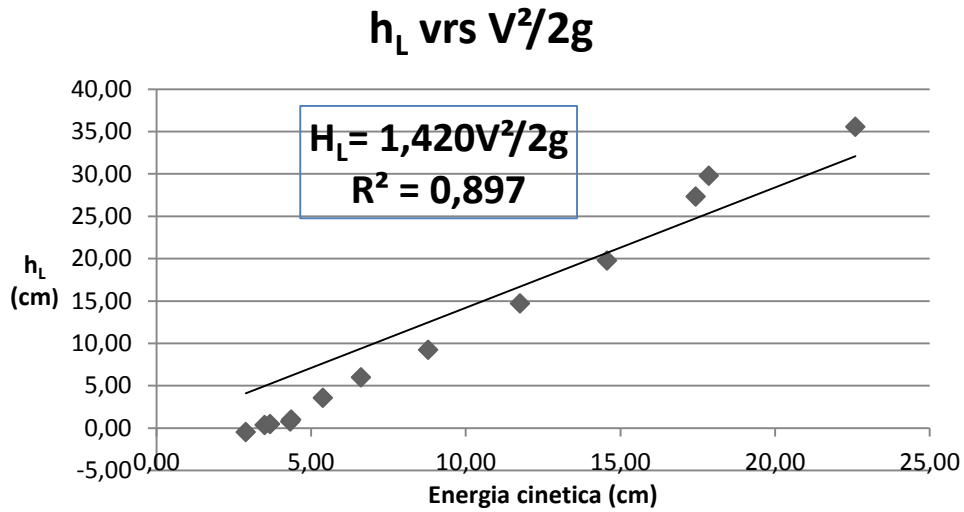
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 29. Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 3



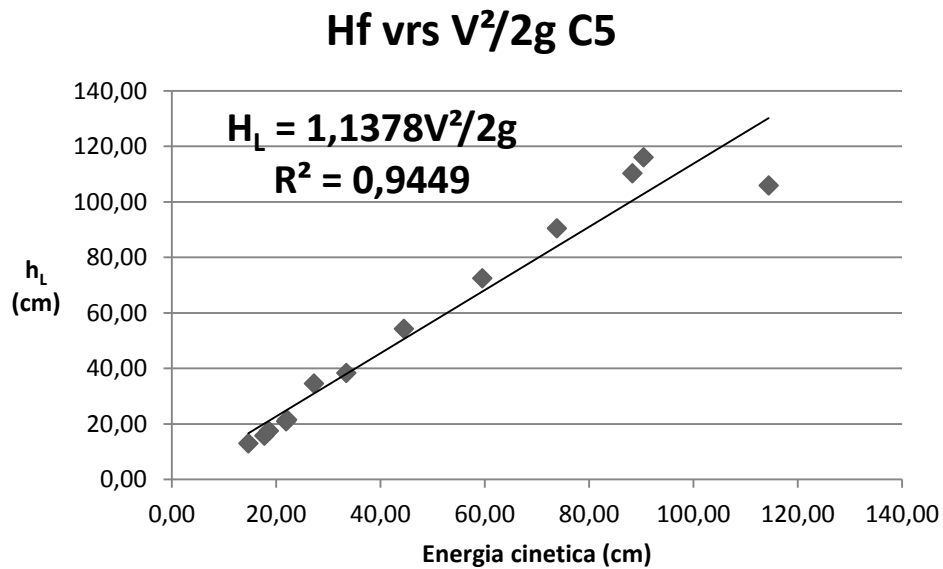
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 30. Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 4



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 31. Gráfica del modelo matemático 1 para la contracción 5



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

### 3.8.2. Modelo matemático 2

En este modelo ha sido relacionada la pérdida de energía y la energía cinética de una forma distinta del modelo matemático 1.

$$h_L = \frac{k(v_2 - v_1)^2}{2g}$$

Donde:

$h_L$  = pérdida en la contracción analizada

$v_2$  = velocidad aguas abajo de la contracción analizada

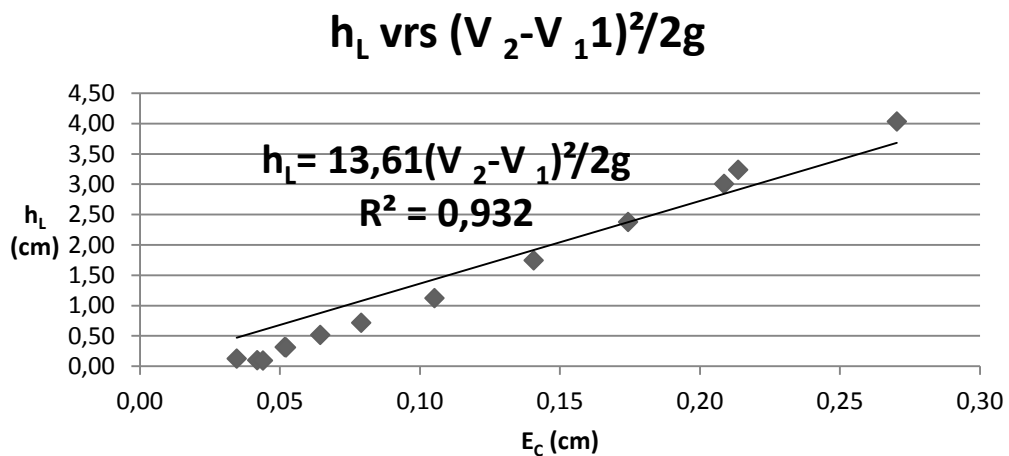
$v_1$  = velocidad aguas arriba de la contracción analizada

$k$  = coeficiente de pérdida

$g$  = gravedad

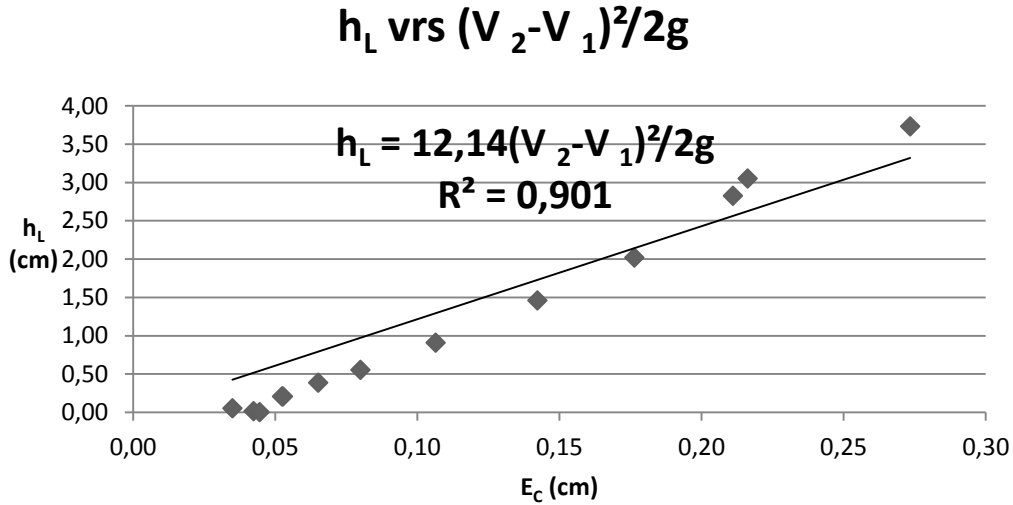
Esta tiene un comportamiento lineal y para las contracciones del sistema presenta los siguientes comportamientos mostrados en las figuras 33 a 37.

Figura 32. Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 1



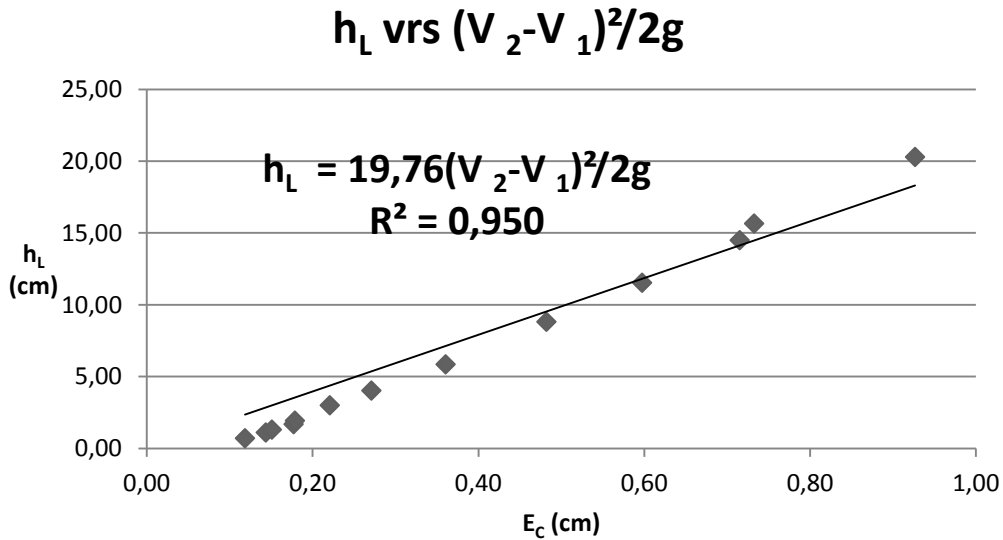
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 33. Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 2



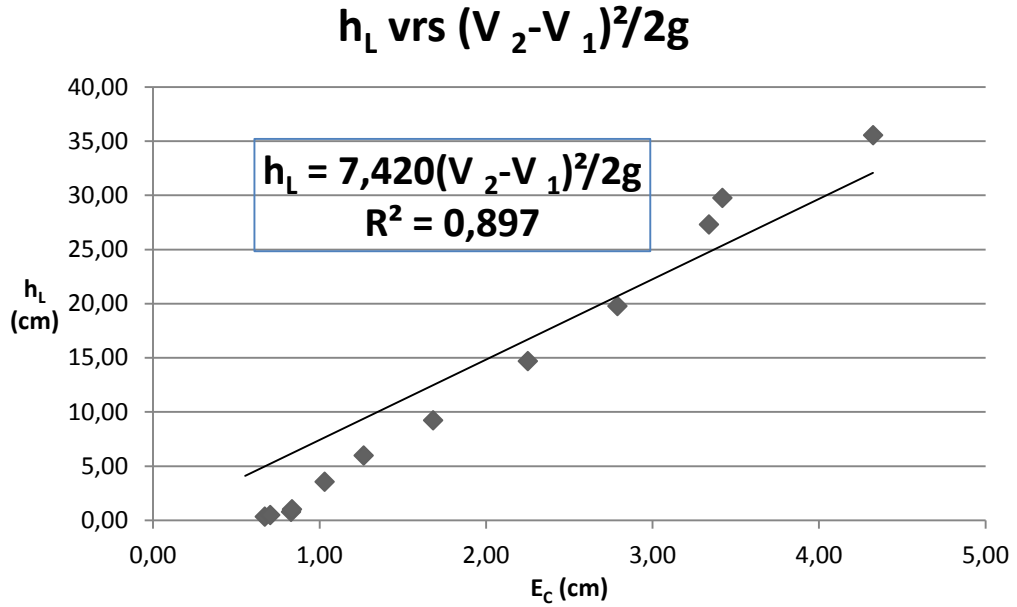
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 34. Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 3



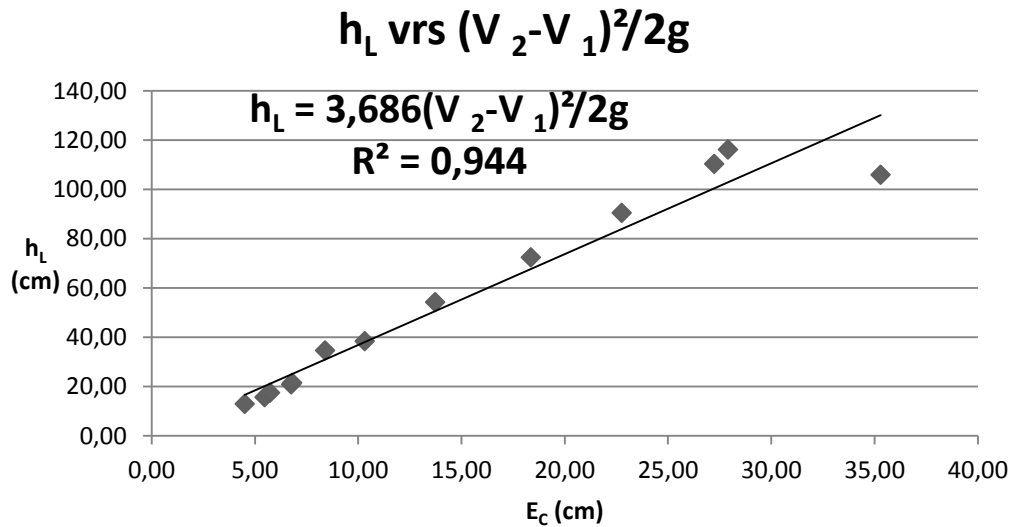
Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 35. Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 4



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 36. Gráfica del modelo matemático 2 para la contracción 5



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

### 3.8.3. Modelo matemático 3

En este modelo el factor de resistencia  $k$  está en función de la velocidad media de la sección aguas abajo de la contracción, la cual tiene un comportamiento logarítmico así:

$$k = a \ln(v) + b$$

Donde:

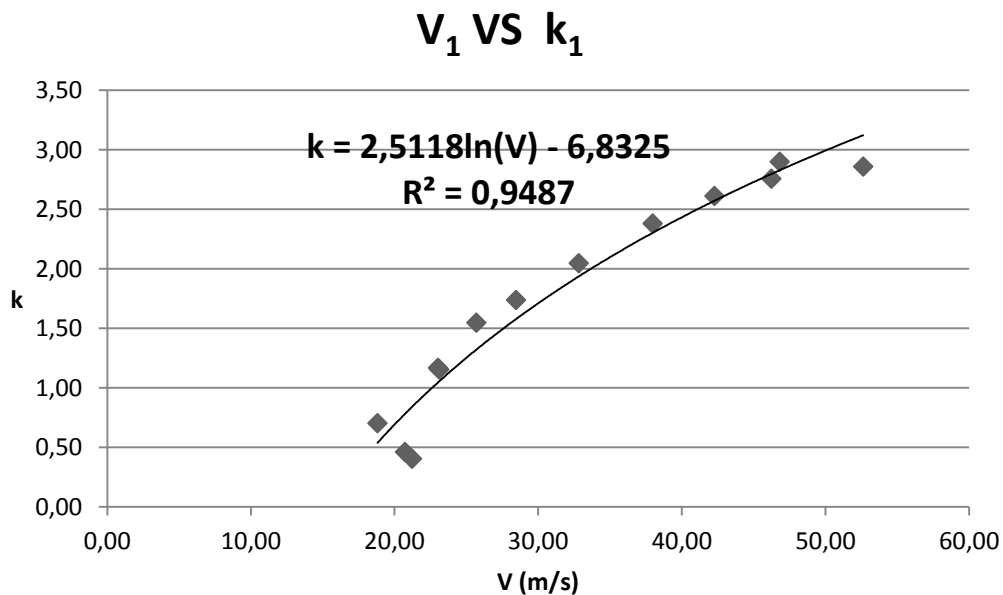
$k$  = coeficiente de pérdida en la contracción analizada

$v$  = velocidad aguas abajo de la contracción analizada

$a, b$  = constantes de regresión

El comportamiento de la correlación se muestra en las figuras 38 a 42:

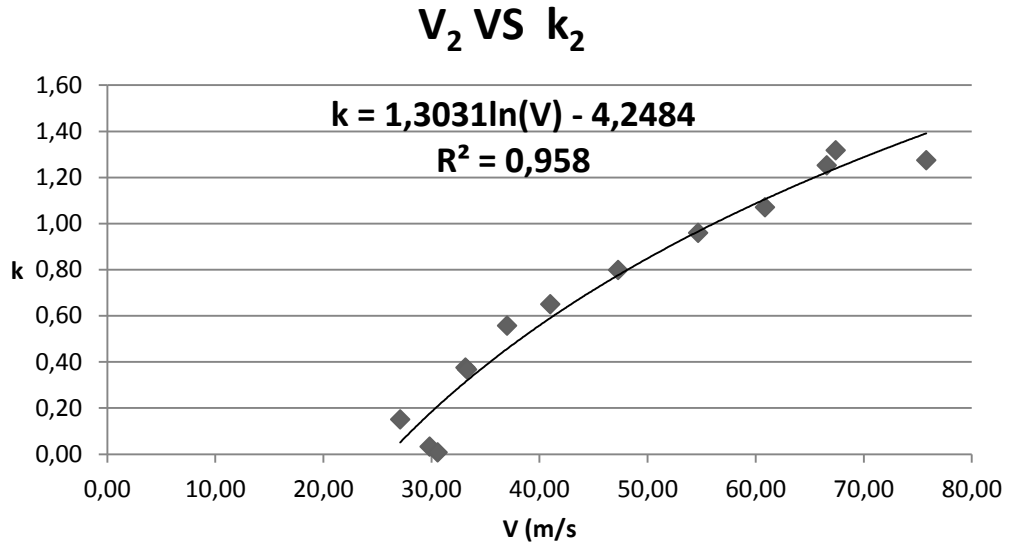
Figura 37. Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 1



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

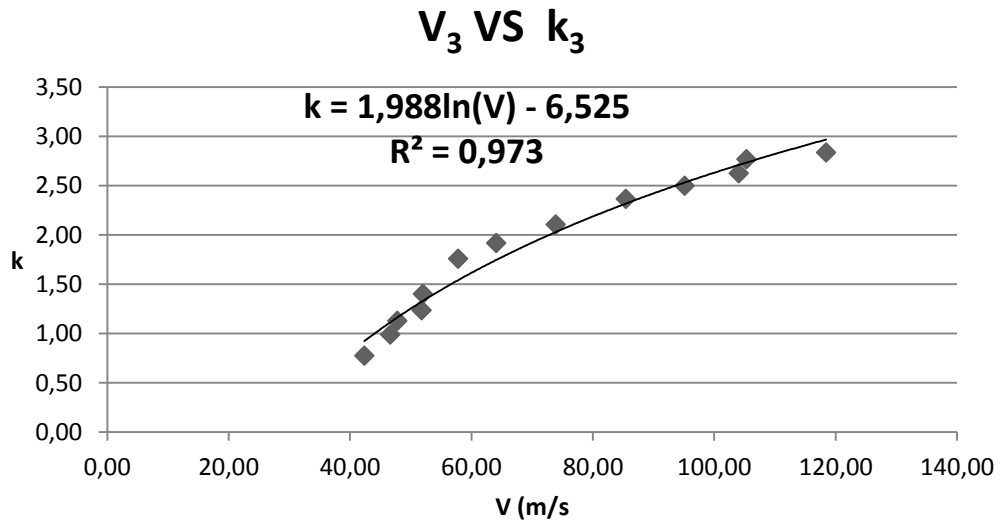


Figura 38. Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 2



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 39. Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 3



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 40. Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 4

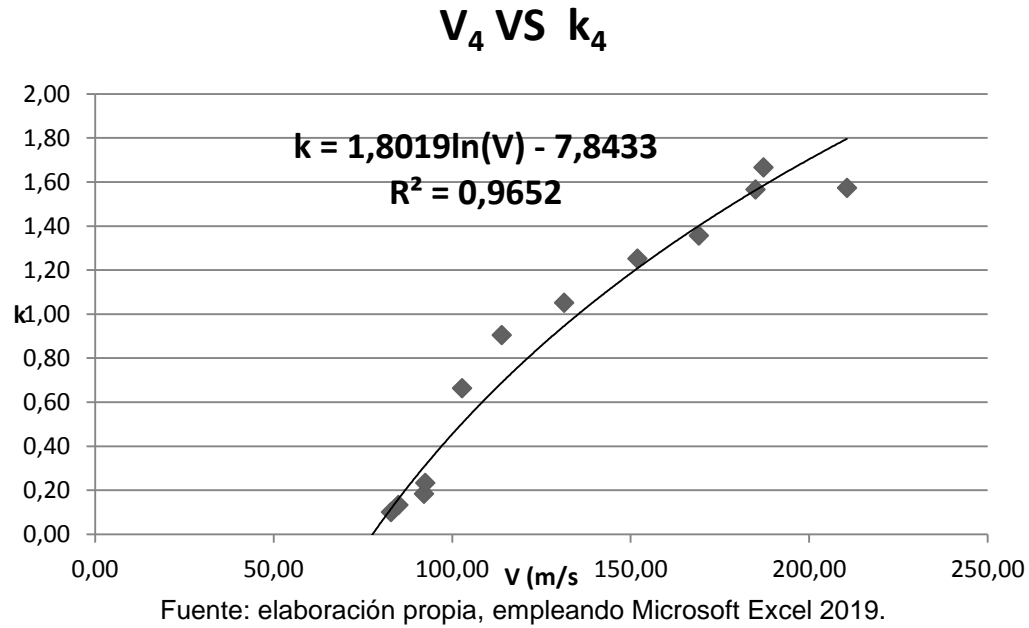
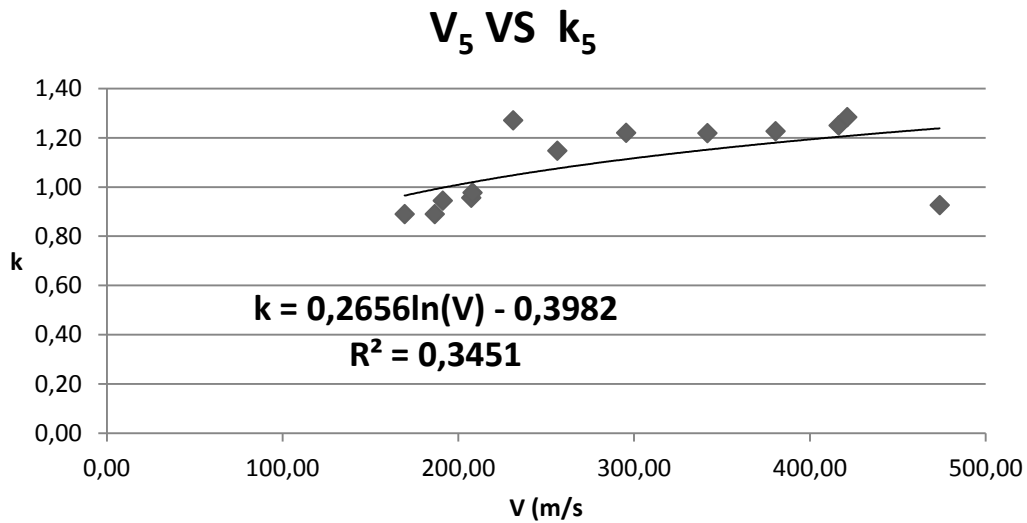


Figura 41. Gráfica del modelo matemático 3 para la contracción 5



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

### 3.8.4. Modelo matemático 4

Este modelo relaciona la relación de diámetros, velocidad y  $k$  de una forma lineal.

$$k = a \left( \frac{D_1}{D_2} \right) + bv$$

Al realizar una regresión lineal con el modelo presentado anteriormente se ha obtenido el siguiente modelo matemático:

$$k = 0,9859 \left( \frac{D_1}{D_2} \right) - 0,000584v$$

Ec. 16

Donde:

$k$  = coeficiente de pérdida en la contracción analizada

$\frac{D_1}{D_2}$  =relación de diámetros

$v$  = velocidad

$a, b$  = constantes de regresión

De los modelos matemáticos propuestos se analiza la pérdida de energía para cada contracción y se compara con la pérdida experimental presentada, las tablas siguientes muestran los resultados.



## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 4.1. Comparación de pérdidas para contracción 1

En las tablas siguientes se presentan las pérdidas de energía de cada uno de los modelos matemáticos propuestos en el capítulo anterior.

Tabla XVII. **Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 1**

No.	D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	Q <sub>P</sub> (cm <sup>3</sup> /s)	Vel. (M/S)		v <sup>2</sup> /2g (Modelo 1)	(V <sub>2</sub> -V <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (Modelo 2)	h <sub>Lexp</sub>
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> (cm)	C <sub>1</sub> (cm)	C <sub>1</sub> (cm)
1	1,33	214,57	10,59	18,82	0,18	0,03	0,13
2	1,33	236,19	11,65	20,72	0,22	0,04	0,10
3	1,33	242,01	11,94	21,23	0,23	0,04	0,09
4	1,33	262,47	12,95	23,02	0,27	0,05	0,32
5	1,33	263,53	13,00	23,11	0,27	0,05	0,31
6	1,33	292,86	14,45	25,69	0,34	0,06	0,52
7	1,33	324,54	16,01	28,47	0,41	0,08	0,72
8	1,33	374,27	18,47	32,83	0,55	0,11	1,12
9	1,33	432,81	21,35	37,96	0,73	0,14	1,75
10	1,33	481,93	23,78	42,27	0,91	0,17	2,38
11	1,33	527,21	26,01	46,24	1,09	0,21	3,00
12	1,33	533,60	26,33	46,80	1,12	0,21	3,24
13	1,33	600,12	29,61	52,64	1,41	0,27	4,03

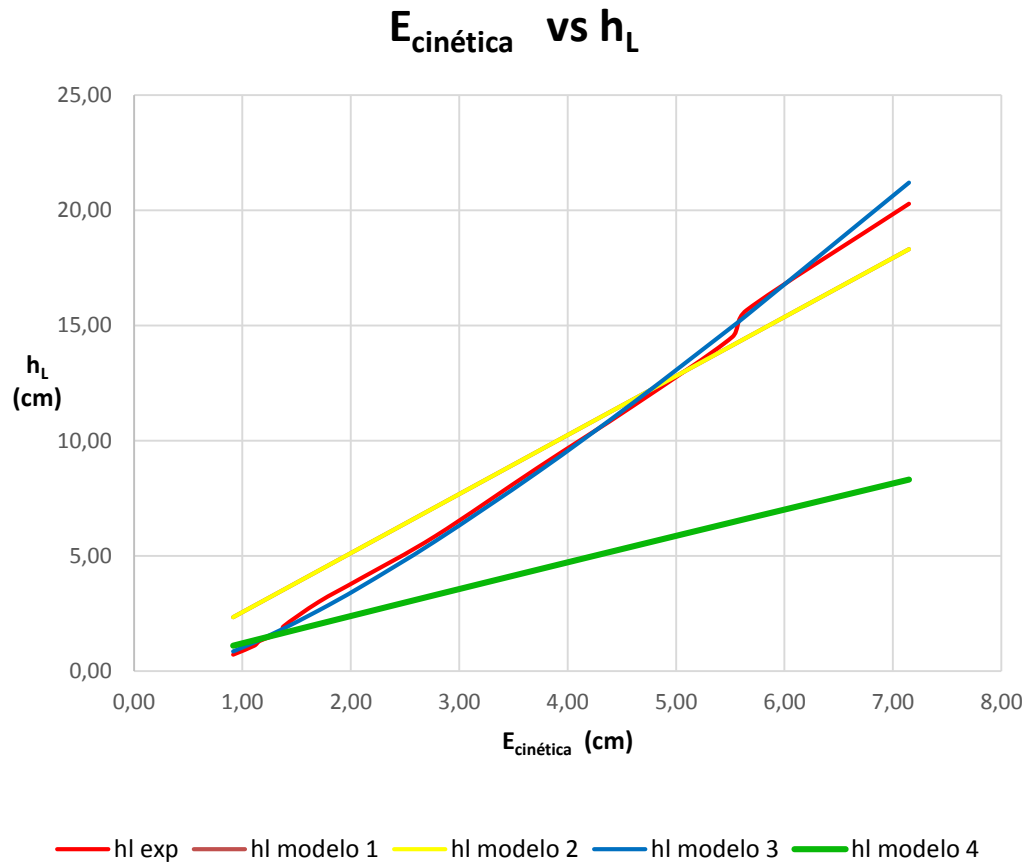
Continuación de la tabla XVII.

No.	$h_L$						% Error			
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3		Mod. 4		Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4
	$k V_2^2/2g$ (cm)	$k(v_2-v_1)^2/2g$ (cm)	k	kEc (cm)	k	kEc (cm)				
1	0,47	0,47	0,54	0,10	1,30	0,24	271,6 %	271,5 %	23,1 %	85,85 %
2	0,57	0,57	0,78	0,17	1,30	0,28	467,3 %	467,2 %	69,9 %	183,49 %
3	0,60	0,60	0,84	0,19	1,30	0,30	543,3 %	543,2 %	107,8 %	221,43 %
4	0,70	0,70	1,05	0,28	1,30	0,35	123,2 %	123,2 %	10,4 %	11,43 %
5	0,71	0,71	1,06	0,29	1,30	0,35	126,1 %	126,0 %	8,4 %	12,86 %
6	0,88	0,88	1,32	0,44	1,30	0,44	68,5 %	68,4 %	14,6 %	15,99 %
7	1,08	1,08	1,58	0,65	1,30	0,54	49,9 %	49,9 %	9,1 %	25,33 %
8	1,43	1,43	1,94	1,06	1,30	0,71	27,3 %	27,2 %	5,4 %	36,74 %
9	1,91	1,91	2,30	1,69	1,29	0,95	9,5 %	9,5 %	3,3 %	45,70 %
10	2,37	2,37	2,57	2,34	1,29	1,17	0,2 %	0,2 %	1,5 %	50,60 %
11	2,84	2,84	2,80	3,05	1,29	1,40	5,5 %	5,5 %	1,5 %	53,31 %
12	2,91	2,91	2,83	3,16	1,29	1,44	10,1 %	10,1 %	2,5 %	55,61 %
13	3,68	3,68	3,12	4,41	1,28	1,81	8,8 %	8,8 %	9,3 %	55,08 %

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

El % de error para cada uno de los modelos ha sido calculado en relación a la pérdida de energía experimental ( $h_L$ ). En la figura 42 se aprecia el comportamiento de los cuatro modelos propuestos y el comportamiento empírico de las pérdidas obtenidas en el experimento para la contracción 1.

Figura 42. **Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 1**



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Las curvas de la figura 42 corresponden a los modelos matemáticos y la representación empírica del experimento realizado. En la parte baja de la figura se observa el color de cada una de las gráficas y qué modelo representa.

Un análisis similar se realiza a cada una de las contracciones analizadas.

## 4.2. Comparación de pérdidas para contracción 2

Se muestran a continuación los valores de perdidas determinados.

Tabla XVIII. Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 2

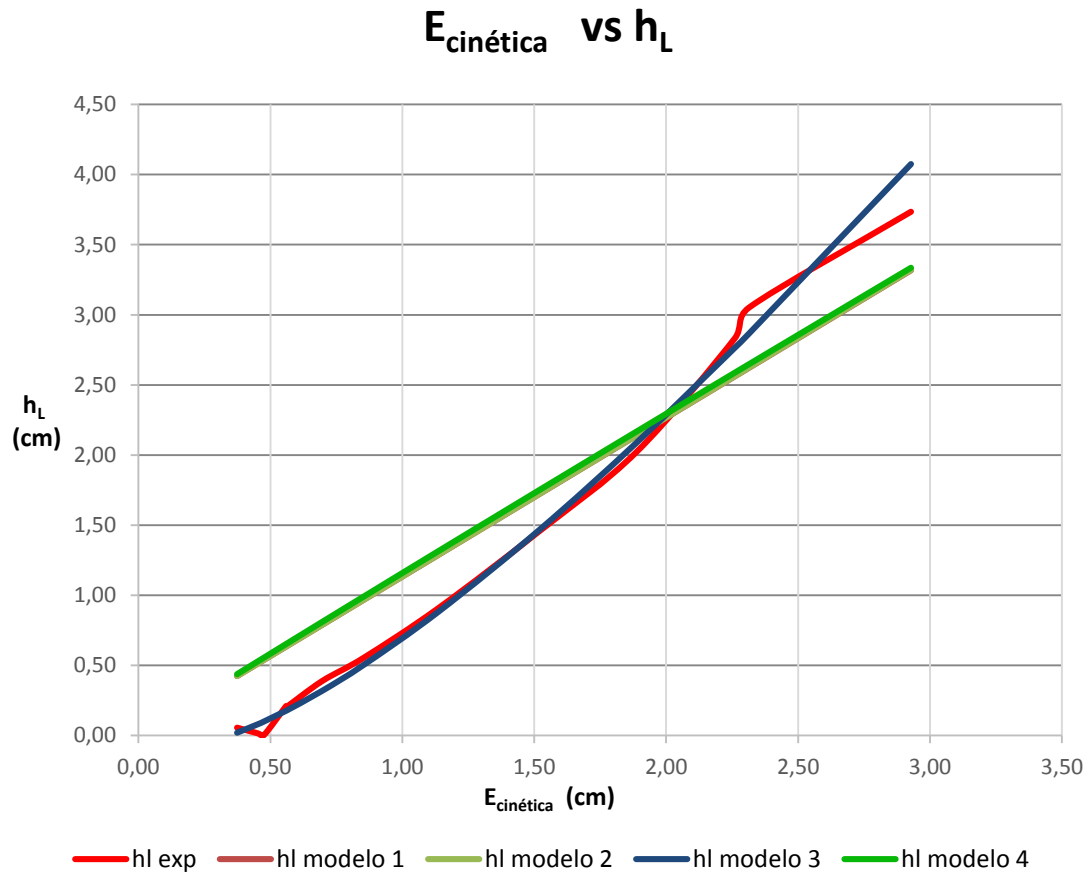
No.	D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	Q <sub>P</sub> (cm <sup>3</sup> /s)	Vel. (m/s)		v <sup>2</sup> /2g (Modelo 1)	(V <sub>2</sub> -V <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (Modelo 2)	h <sub>L</sub> exp
			P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>3</sub> (cm)	C <sub>2</sub> (cm)	C <sub>2</sub> (cm)
1	1,20	214,57	18,82	27,10	0,37	0,03	0,06
2	1,20	236,19	20,72	29,83	0,45	0,04	0,02
3	1,20	242,01	21,23	30,57	0,48	0,04	0,00
4	1,20	262,47	23,02	33,15	0,56	0,05	0,21
5	1,20	263,53	23,11	33,28	0,56	0,05	0,21
6	1,20	292,86	25,69	36,99	0,70	0,07	0,39
7	1,20	324,54	28,47	40,99	0,86	0,08	0,56
8	1,20	374,27	32,83	47,27	1,14	0,11	0,91
9	1,20	432,81	37,96	54,67	1,52	0,14	1,46
10	1,20	481,93	42,27	60,87	1,89	0,18	2,02
11	1,20	527,21	46,24	66,59	2,26	0,21	2,83
12	1,20	533,60	46,80	67,40	2,32	0,22	3,05
13	1,20	600,12	52,64	75,80	2,93	0,27	3,73

No.	h <sub>L</sub>						% Error			
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3		Mod. 4		Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4
	k V <sub>2</sub> <sup>2</sup> /2g (cm)	k(v <sub>2</sub> -v <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (cm)	k	kEc (cm)	k	kEc (cm)				
1	0,42	0,42	0,05	0,02	1,17	0,44	655,0 %	655,2 %	65,8 %	677,78 %
2	0,51	0,51	0,18	0,08	1,17	0,53	3289,6 %	3290,9 %	427,6 %	3387,26 %
3	0,54	0,54	0,21	0,10	1,17	0,55	15566,1 %	15572,2 %	2777,2 %	16011,73 %
4	0,63	0,63	0,31	0,18	1,16	0,65	202,2 %	202,3 %	16,3 %	210,42 %
5	0,64	0,64	0,32	0,18	1,16	0,66	208,1 %	208,2 %	13,2 %	216,45 %
6	0,79	0,79	0,46	0,32	1,16	0,81	103,1 %	103,2 %	18,1 %	108,25 %
7	0,97	0,97	0,59	0,51	1,16	0,99	74,3 %	74,4 %	9,2 %	78,34 %
8	1,29	1,29	0,78	0,88	1,16	1,32	41,8 %	41,8 %	2,9 %	44,57 %
9	1,73	1,73	0,97	1,47	1,15	1,75	18,1 %	18,1 %	0,6 %	19,98 %
10	2,14	2,14	1,11	2,09	1,15	2,17	5,8 %	5,8 %	3,3 %	7,17 %
11	2,56	2,56	1,22	2,76	1,14	2,59	9,5 %	9,5 %	2,3 %	8,62 %
12	2,62	2,62	1,24	2,87	1,14	2,65	14,0 %	14,0 %	6,0 %	13,22 %
13	3,32	3,32	1,39	4,07	1,14	3,33	11,1 %	11,1 %	9,1 %	10,69 %

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.



Figura 43. **Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 2**



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la parte baja de la figura 44 se observa el color de cada una de las gráficas y qué modelo representa.

### 4.3. Comparación de pérdidas para contracción 3

Se muestran las pérdidas determinadas para la contracción 3.

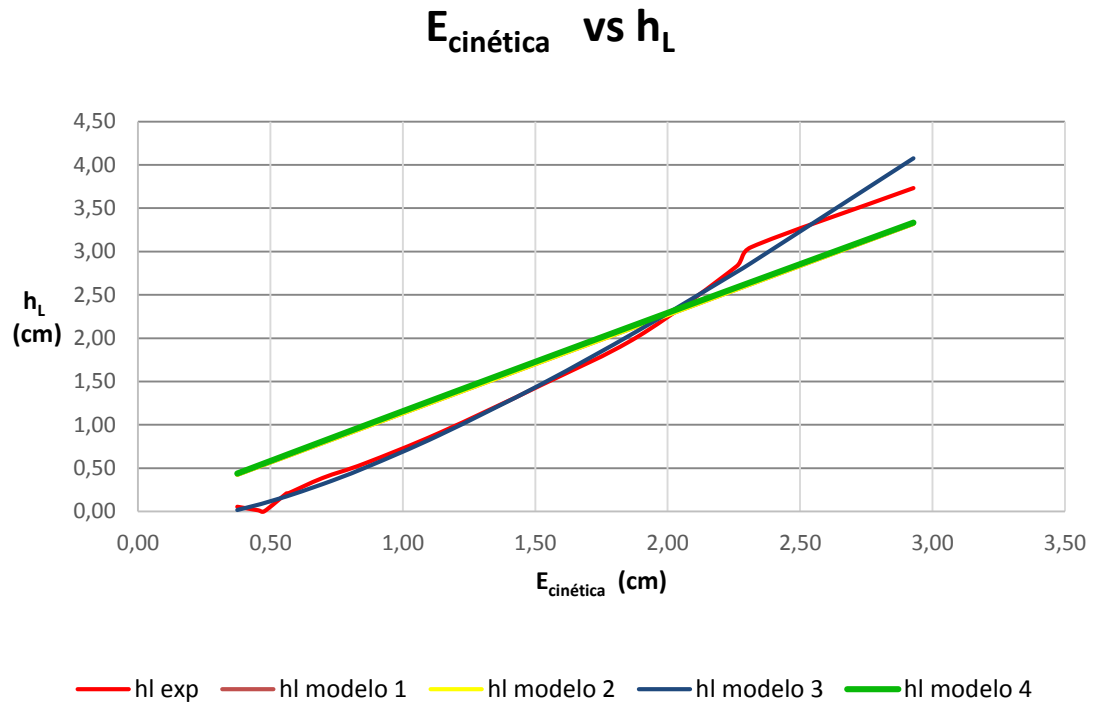
Tabla XIX. **Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 3**

No.	D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	Q <sub>P</sub> (cm <sup>3</sup> /s)	Vel. (m/s)		v <sup>2</sup> /2g (Modelo 1)	(V <sub>2</sub> -V <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (Modelo 2)	h <sub>L</sub> exp
			P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>5</sub> (cm)	C <sub>3</sub> (cm)	C <sub>3</sub> (cm)
1	1,25	214,57	27,10	42,35	0,91	0,12	0,71
2	1,25	236,19	29,83	46,61	1,11	0,14	1,10
3	1,25	242,01	30,57	47,76	1,16	0,15	1,31
4	1,25	262,47	33,15	51,80	1,37	0,18	1,69
5	1,25	263,53	33,28	52,01	1,38	0,18	1,94
6	1,25	292,86	36,99	57,80	1,70	0,22	2,99
7	1,25	324,54	40,99	64,05	2,09	0,27	4,02
8	1,25	374,27	47,27	73,86	2,78	0,36	5,86
9	1,25	432,81	54,67	85,42	3,72	0,48	8,80
10	1,25	481,93	60,87	95,11	4,61	0,60	11,53
11	1,25	527,21	66,59	104,05	5,52	0,72	14,49
12	1,25	533,60	67,40	105,31	5,65	0,73	15,66
13	1,25	600,12	75,80	118,43	7,15	0,93	20,28

No.	h <sub>L</sub>						% Error			
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3		Mod. 4		Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4
	k V <sub>2</sub> <sup>2</sup> /2g (cm)	k(v <sub>2</sub> -v <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (cm)	k	kEc (cm)	k	kEc (cm)				
1	2,34	2,34	0,92	0,84	1,21	1,10	229,60 %	229,5 %	18,6 %	55,36 %
2	2,84	2,84	1,11	1,23	1,21	1,33	158,81 %	158,7 %	12,4 %	21,74 %
3	2,98	2,98	1,16	1,35	1,20	1,40	126,76 %	126,7 %	2,8 %	6,61 %
4	3,50	3,50	1,32	1,81	1,20	1,64	106,99 %	106,9 %	6,8 %	2,88 %
5	3,53	3,53	1,33	1,83	1,20	1,66	82,43 %	82,4 %	5,3 %	14,41 %
6	4,36	4,36	1,54	2,62	1,20	2,04	45,65 %	45,6 %	12,4 %	31,86 %
7	5,36	5,35	1,74	3,65	1,19	2,50	33,40 %	33,3 %	9,2 %	37,78 %
8	7,12	7,12	2,03	5,64	1,19	3,31	21,61 %	21,6 %	3,7 %	43,55 %
9	9,53	9,52	2,32	8,61	1,18	4,40	8,20 %	8,2 %	2,2 %	50,06 %
10	11,81	11,81	2,53	11,67	1,18	5,43	2,47 %	2,4 %	1,2 %	52,93 %
11	14,14	14,13	2,71	14,95	1,17	6,46	2,46 %	2,5 %	3,1 %	55,39 %
12	14,48	14,47	2,73	15,45	1,17	6,62	7,55 %	7,6 %	1,4 %	57,75 %
13	18,32	18,31	2,97	21,21	1,16	8,32	9,68 %	9,7 %	4,6 %	58,99 %

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 44. **Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 3**



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la parte baja de la figura 45 se observa el color de cada una de las gráficas y qué modelo representa cada una de ellas.

#### 4.4. Comparación de pérdidas para contracción 4

Se muestran las pérdidas determinadas para la contracción 4.

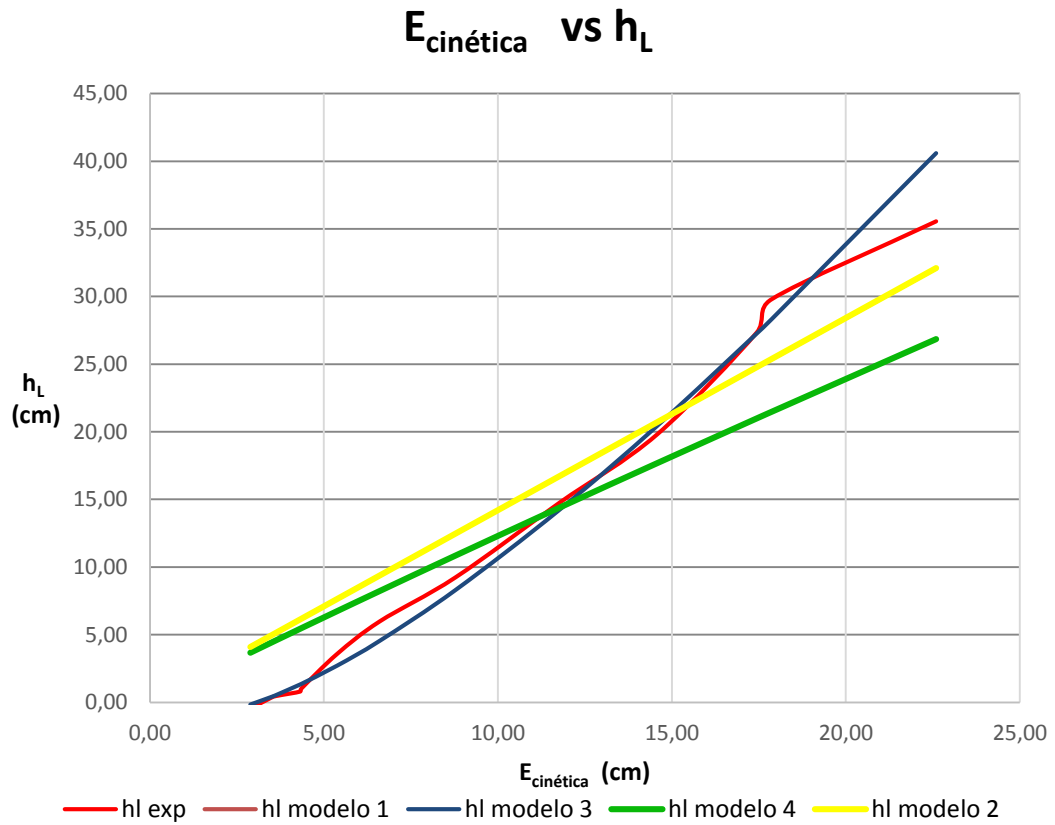
Tabla XX. **Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 4**

No.	D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	Q <sub>P</sub> (cm <sup>3</sup> /s)	Vel. (m/s)		v <sup>2</sup> /2g (Modelo 1)	(V <sub>2</sub> -V <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (Modelo 2)	h <sub>L</sub> exp
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> (cm)	C <sub>4</sub> (cm)	C <sub>4</sub> (cm)
1	1,33	214,57	42,35	75,28	2,89	0,55	-0,47
2	1,33	236,19	46,61	82,87	3,50	0,67	0,36
3	1,33	242,01	47,76	84,91	3,67	0,70	0,49
4	1,33	262,47	51,80	92,09	4,32	0,83	0,80
5	1,33	263,53	52,01	92,46	4,36	0,83	1,02
6	1,33	292,86	57,80	102,75	5,38	1,03	3,57
7	1,33	324,54	64,05	113,86	6,61	1,26	5,98
8	1,33	374,27	73,86	131,31	8,79	1,68	9,24
9	1,33	432,81	85,42	151,85	11,75	2,25	14,72
10	1,33	481,93	95,11	169,09	14,57	2,79	19,79
11	1,33	527,21	104,05	184,97	17,44	3,34	27,33
12	1,33	533,60	105,31	187,21	17,86	3,42	29,79
13	1,33	600,12	118,43	210,55	22,60	4,32	35,55

No.	h <sub>L</sub>						% Error			
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3		Mod. 4		Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4
	k V <sub>2</sub> <sup>2</sup> /2g (cm)	k(v <sub>2</sub> -v <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (cm)	k	KEc (cm)	k	KEc (cm)				
1	4,10	4,10	-0,06	-0,16	1,27	3,66	964,3 %	964,4 %	65,4 %	871,34 %
2	4,97	4,97	0,12	0,41	1,26	4,42	1290,0 %	1290,2 %	13,6 %	1136,17 %
3	5,22	5,22	0,16	0,59	1,26	4,64	968,8 %	969,0 %	20,4 %	849,66 %
4	6,14	6,14	0,31	1,32	1,26	5,43	671,5 %	671,7 %	66,4 %	583,22 %
5	6,19	6,19	0,31	1,37	1,26	5,48	505,7 %	505,8 %	33,7 %	436,24 %
6	7,64	7,64	0,50	2,71	1,25	6,73	113,9 %	114,0 %	24,1 %	88,50 %
7	9,38	9,38	0,69	4,55	1,24	8,23	56,8 %	56,9 %	23,9 %	37,48 %
8	12,48	12,48	0,95	8,31	1,23	10,85	35,0 %	35,0 %	10,1 %	17,39 %
9	16,69	16,69	1,21	14,19	1,22	14,37	13,4 %	13,4 %	3,6 %	2,36 %
10	20,69	20,70	1,40	20,42	1,21	17,67	4,6 %	4,6 %	3,2 %	10,72 %
11	24,76	24,77	1,56	27,26	1,20	20,98	9,4 %	9,4 %	0,3 %	23,22 %
12	25,37	25,37	1,58	28,31	1,20	21,47	14,8 %	14,8 %	5,0 %	27,92 %
13	32,09	32,09	1,80	40,59	1,19	26,85	9,8 %	9,7 %	14,2 %	24,48 %

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 45. **Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 4**



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la parte baja de la figura 46 se observa el color de cada una de las gráficas y el modelo que representa cada una de ellas.

#### 4.5. Comparación de pérdidas para contracción 5

Se muestran a continuación las pérdidas para la contracción 5.

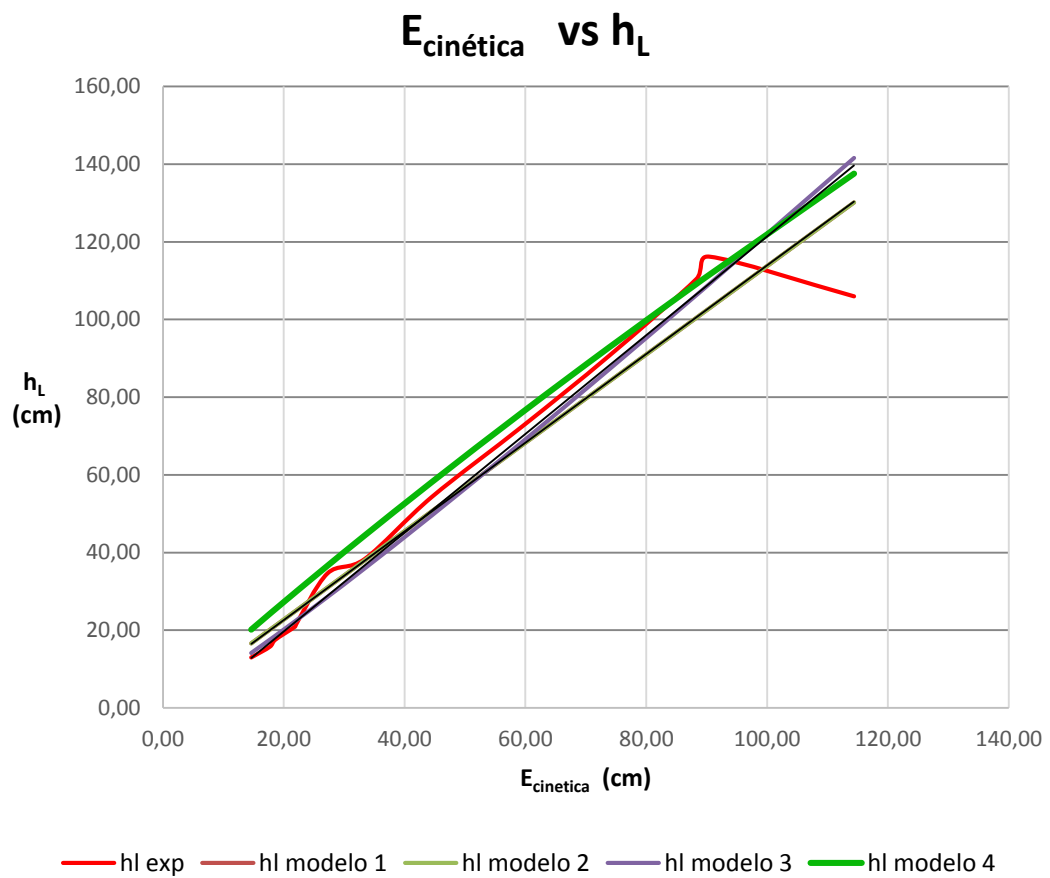
Tabla XXI. **Análisis de pérdidas empíricas y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 5**

No.	D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	Q <sub>PROMEDIO</sub>	Vel. (m/s)		v <sup>2</sup> /2g (Modelo 1)	(V <sub>2</sub> - V <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g (Modelo 2)	h <sub>Lexp</sub>
			P <sub>7</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>8</sub>	C <sub>S</sub>	C <sub>S</sub>
1	1,50	214,57	75,28	169,38	14,62	4,51	13,02
2	1,50	236,19	82,87	186,45	17,72	5,47	15,78
3	1,50	242,01	84,91	191,04	18,60	5,74	17,57
4	1,50	262,47	92,09	207,19	21,88	6,75	20,94
5	1,50	263,53	92,46	208,03	22,06	6,81	21,55
6	1,50	292,86	102,75	231,18	27,24	8,41	34,64
7	1,50	324,54	113,86	256,19	33,45	10,32	38,41
8	1,50	374,27	131,31	295,45	44,49	13,73	54,30
9	1,50	432,81	151,85	341,66	59,50	18,36	72,51
10	1,50	481,93	169,09	380,44	73,77	22,77	90,55
11	1,50	527,21	184,97	416,19	88,28	27,25	110,41
12	1,50	533,60	187,21	421,23	90,43	27,91	116,18
13	1,50	600,12	210,55	473,74	114,39	35,30	105,96

No.	h <sub>L</sub>								% Error			
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3		Mod. 4		Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4		
	k V <sub>2</sub> <sup>2</sup> /2g	k(v <sub>2</sub> -v <sub>1</sub> ) <sup>2</sup> /2g	k	kEc	k	kEc						
1	16,64	16,64	0,96	14,11	1,38	20,18	27,8 %	27,8 %	8,4 %	55,04 %		
2	20,16	20,16	0,99	17,55	1,37	24,27	27,7 %	27,7 %	11,2 %	53,80 %		
3	21,17	21,16	1,00	18,54	1,37	25,43	20,4 %	20,4 %	5,5 %	44,74 %		
4	24,90	24,89	1,02	22,28	1,36	29,71	18,9 %	18,9 %	6,4 %	41,87 %		
5	25,10	25,09	1,02	22,49	1,36	29,94	16,5 %	16,4 %	4,4 %	38,94 %		
6	30,99	30,99	1,05	28,54	1,34	36,61	10,5 %	10,5 %	17,6 %	5,68 %		
7	38,06	38,06	1,07	35,95	1,33	44,47	0,9 %	0,9 %	6,4 %	15,78 %		
8	50,62	50,62	1,11	49,50	1,31	58,12	6,8 %	6,8 %	8,8 %	7,04 %		
9	67,70	67,69	1,15	68,50	1,28	76,12	6,6 %	6,6 %	5,5 %	4,98 %		
10	83,94	83,92	1,18	87,04	1,26	92,70	7,3 %	7,3 %	3,9 %	2,38 %		
11	100,45	100,44	1,20	106,26	1,24	109,10	9,0 %	9,0 %	3,8 %	1,18 %		
12	102,90	102,88	1,21	109,14	1,23	111,49	11,4 %	11,4 %	6,1 %	4,03 %		
13	130,15	130,13	1,24	141,62	1,20	137,52	22,8 %	22,8 %	33,7 %	29,78 %		

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

Figura 46. **Comportamiento empírico y de los modelos matemáticos propuestos para la contracción 5**



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

En la parte baja de la figura 46 se observa el color de cada una de las gráficas y el modelo que representa cada una de ellas.

#### 4.6. Modelos

Los modelos que mejor representan los comportamientos de los datos para cada una de las contracciones súbitas se muestran en la tabla XXVI.

Tabla XXII. **Modelo para cada contracción súbita con mejor comportamiento**

C	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3	MODELO 4
C-1	$h_L = 2,6055 \frac{v_2^2}{2g}$ $R^2 = 0,932$	$h_L = 13,61(v_2 - v_1)^2 / 2g$ $R^2 = 0,932$	$k = 2,5118 \ln(v) - 6,8325$ $R^2 = 0,9487$	$k = 0,9859 \left( \frac{D_1}{D_2} \right) - 0,000584v$ $R^2 = 0,9841$
C-2	$h_L = 1,133 \frac{v_2^2}{2g}$ $R^2 = 0,901$	$h_L = 12,14(v_2 - v_1)^2 / 2g$ $R^2 = 0,901$	$k = 1,3031 \ln(v) - 4,2484$ $R^2 = 0,958$	
C-3	$h_L = 2,562 \frac{v_2^2}{2g}$ $R^2 = 0,9507$	$h_L = 19,76(v_2 - v_1)^2 / 2g$ $R^2 = 0,950$	$k = 1,988 \ln(v) - 6,525$ $R^2 = 0,973$	
C-4	$h_L = 1,420 \frac{v_2^2}{2g}$ $R^2 = 0,897$	$h_L = 7,420(v_2 - v_1)^2 / 2g$ $R^2 = 0,897$	$k = 1,8019 \ln(v) - 7,8433$ $R^2 = 0,9652$	
C-5	$h_L = 1,1378 \frac{v_2^2}{2g}$ $R^2 = 0,9449$	$h_L = 3,686(v_2 - v_1)^2 / 2g$ $R^2 = 0,944$	$k = 0,4456 \ln(v) - 1,3945$ $R^2 = 0,9323$	

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.



Los modelos matemáticos con mejor coeficiente de determinación se muestran en la tabla XXIII.

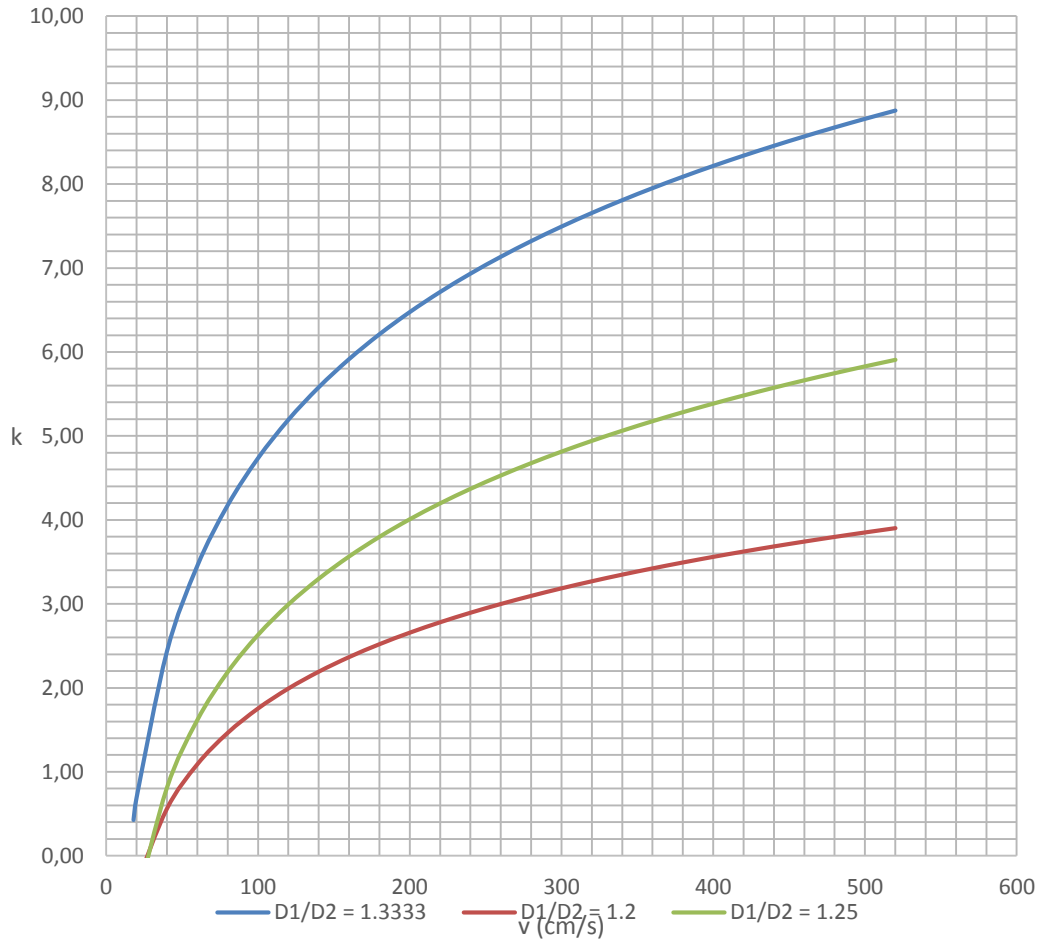
Tabla XXIII. **Modelo para cada contracción súbita con mejor coeficiente k**

MODELO	EXPRESIÓN	COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN
1	$h_L = 2,562 \frac{v_2^2}{2g}$	$R^2 = 0,9507$
2	$h_L = 19,76 \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}$	$R^2 = 0,950$
3	$k = 1,988 \ln(v) - 6,525$	$R^2 = 0,973$
4	$k = 0,9859 \left(\frac{D_1}{D_2}\right) - 0,000584v$	$R^2 = 0,9841$

Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

El siguiente gráfico muestra la variación del coeficiente k en función de la velocidad y relación de diámetros, lo cual es útil para determinar valores de k entre relaciones de diámetro de  $1,20 \leq \frac{D_1}{D_2} \leq 1,33$ . Este se construye con los modelos 3 determinados en el experimento.

Figura 47. Gráfico de k en función de la velocidad



Fuente: elaboración propia, empleando Microsoft Excel 2019.

## CONCLUSIONES

1. Se determinaron cuatro modelos matemáticos para determinar la pérdida de energía en contracciones súbitas de PVC, haciendo uso del análisis y resultados obtenidos por medio de ensayar el modelo experimental correspondiente. Los modelos obtenidos mejoran la precisión en el cálculo de la pérdida de energía respecto del método mostrado en los libros de texto.
2. Se determinaron dos modelos matemáticos en los cuales el valor de  $k$  es constante para cada relación de diámetros, estando entre los valores de 1,13 a 2,60 y el coeficiente de determinación  $R^2$  entre 0,90 y 0,95, para el primer modelo. Y para el modelo dos el factor  $k$  varía entre 3.69 y 19.76, y  $R^2$  entre 0,90 y 0,95.
3. Se dedujo un modelo que relaciona el coeficiente  $k$  en función de la velocidad aguas debajo de la contracción súbita, el cual cumple con la forma  $k = a \ln(v) - b$ , los cuales dieron un coeficiente de determinación más alto que varía entre 0,934 y 0,970, este fue el modelo cuyo cálculo de pérdida de energía es más aproximado a las pérdidas experimentales.
4. Con el método de regresión lineal múltiple de Microsoft Excel se dedujo un modelo que relaciona el factor  $k$  con la velocidad aguas abajo y la relación de diámetros, que a pesar que tuvo un coeficiente de determinación de 0,98, al calcular las pérdidas con los valores de  $k$  generados en este modelo, las mismas difieren en un orden de 55% de

error respecto de las pérdidas experimentales, por lo que este modelo no es confiable.

5. Se ha obtenido el gráfico mostrado en la figura 47, en el cual se puede determinar el valor de  $k$  en función de la velocidad aguas abajo para relaciones de diámetro comprendidas entre 1,33 y 1,20.
6. Se han obtenido las pérdidas reales de un modelo experimental, los datos tomados han sido la base para poder analizar y obtener los modelos matemáticos correspondientes al experimento realizado.
7. Se han analizado y comparado las pérdidas de energía que presentan los modelos matemáticos determinados con la pérdida de energía obtenida con expresiones presentes en libros de texto, los resultados de este análisis se pueden observar en las tablas XVII a XXI. A su vez en las figuras 42 a 46 se muestra el comportamiento gráfico de los modelos matemáticos propuestos y las pérdidas reales presentes en el modelo experimental.
8. Fue construido un modelo experimental, el cual involucra varias contracciones súbitas con distintos valores de relación de diámetros. Este sistema fue elaborado teniendo en cuenta los diámetros comerciales más utilizados. En el mismo se tiene control sobre la velocidad del flujo, relacionándola así con la pérdida de energía y la relación de diámetros.

## RECOMENDACIONES

1. Para construir un modelo experimental similar al analizado en este trabajo de investigación debe tomarse en cuenta la disponibilidad en el mercado de los accesorios y material que se utilizarán, principalmente racores y mangueras de diámetros adecuados para evitar tener problemas de fugas y conexión en los puntos donde van insertados los piezómetros.
2. Se aconseja el uso de niples de acero en lugar de racores como conexión entre las tuberías y los piezómetros, siendo estos de más fácil manipulación, un menor costo y cumpliendo la misma función.
3. Se deben pegar las piezas de PVC de una forma adecuada y así evitar fugas de flujo que puedan afectar el comportamiento del modelo experimental.
4. Al realizar una toma de datos en el modelo experimental, es necesario esperar unos minutos para que el flujo se estabilice y los piezómetros no oscilen, y así se tendrán tomas más precisas.
5. Al variar los caudales se debe realizar de menor a mayor, ya que si no se tiene un adecuado control sobre las presiones que puede soportar el modelo experimental, este podría presentar fugas al estar sometido a una mayor presión.

6. Se invita al estudiante y profesional a continuar con el estudio y desarrollo de este tema, principalmente que para más valores de relaciones de diámetros  $D_1/D_2$  dado que en esta investigación solo se trabajó con cuatro valores.

## BIBLIOGRAFÍA

1. CRANE, D. *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*. México: McGraw-Hill. 155 p.
2. GILES, Ronald. *Mecánica de fluidos e hidráulica*. México: McGraw-Hill, 1994. 428 p.
3. MOTT, Robert. L. *Mecánica de fluidos*. 7ª. Edición. México: Pearson Educación. 2015. 728 p.
4. PONCE VICTORIA, Fernando. *Manual para ensayo de pérdidas de energía en accesorios de tubería del laboratorio de hidráulica*. Ing Civil. Trabajo de graduación. Universidad de San Carlos, 2006. 135 p.
5. SOTELO ÁVILA, Gilberto. *Hidráulica general*. México: Limusa, 1999. 384 p.
6. STREETER, Víctor. *Hidráulica de canales*. México: Limusa. 375 p.
7. TOLENTINO GARCÍA, Karen Itzel. *Pérdida de energía en cruces de tuberías*. División de ingenierías civil y cinemática. UNAM, 2013. 126 p.