

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**  
ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA



**LA APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS Y FACTORES QUE INFLUYEN EN  
LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE  
PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Leonel Humberto Ajanel Torres

Asesora:

Dra. Amalia Geraldine Grajeda Bradna

Guatemala, noviembre de 2012



**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**  
ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA



**LA APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS Y FACTORES QUE  
INFLUYEN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA  
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Tesis presentada al Consejo Directivo de la Escuela de Formación de  
Profesores de Enseñanza Media de la Universidad de San Carlos de Guatemala

Leonel Humberto Ajanel Torres

Previo a conferírsele el grado académico de:

Licenciado en la Enseñanza de la Matemática y Física

Guatemala, noviembre de 2012



### Autoridades generales:

Dr. Carlos Estuardo Gálvez Barrios	Rector Magnífico de la USAC
Dr. Carlos Guillermo Alvarado Cerezo	Secretario General de la USAC
Dr. Oscar Hugo López Rivas	Director de la EFPEM
Lic. Danilo López Pérez	Secretario Académico de la EFPEM

### Consejo Directivo:

Lic. Saúl Duarte Beza	Representante de Profesores
Dr. Miguel Ángel Chacón Arroyo	Representante de Profesores
M.A. Dora Isabel Águila de Estrada	Representante de Profesionales Graduados
PEM. Ewin Estuardo Losley Johnson	Representante de Estudiantes
Br. José Vicente Velasco Camey	Representante de Estudiantes

### Tribunal Examinador:

Lic. Saúl Duarte Beza	Presidente
Lic. Edwin Estuardo Marroquín	Secretario
Lic. Héctor Edmundo Morales Chacón	Vocal

Guatemala, 18 de Septiembre de 2012

Dr. Miguel Ángel Chacón Arroyo  
Coordinador  
Unidad de Investigación  
EFPEM

Estimado Dr. Chacón:

Por este medio le informo que, en cumplimiento del nombramiento de asesor dado por la Secretaría Académica de la EFPEM, he asesorado el proceso de ejecución de la investigación y elaboración del informe final al joven Leonel Humberto Ajanel Torres, Carné: 200010147, alumno de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

El proceso desarrollado por el estudiante Ajanel Torres culmina en el informe final de la investigación: La aplicación de estrategias y factores que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

Este informe final responde a los lineamientos que ha establecido EFPEM para elaborar informes finales en la opción investigación científica, además me es grato informar que es de alta calidad académica, por lo que solicito se autorice pueda continuar el proceso para sustentar el examen privado de tesis.

Sin otro particular, agradeciendo la confianza, me suscribo de usted

Atentamente.

  
Dra. Amalia Geraldine Grajeda Bradna  
Asesora

El infrascrito Secretario Académico de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media de la Universidad de San Carlos de Guatemala,

### CONSIDERANDO

Que el trabajo de graduación (Tesis) denominado: **“La aplicación de estrategias y factores que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos”** del estudiante **Leonel Humberto Ajanel Torres**, carné No. 200010147, de la carrera Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física y el tribunal examinador ha dictaminado favorablemente sobre el mismo, por este medio.

### AUTORIZA

La impresión de la tesis indicada, debiendo para ello proceder conforme el normativo correspondiente.

Dado en la ciudad de Guatemala a los cinco días del mes de noviembre del año dos mil doce.

“ID YENSEÑAD A TODOS”



Lic. Danilo López Pérez  
Secretario Académico EFPEM



c.c. Archivo

## Dedicatoria

- A Dios: Padre, Hijo y Espíritu Santo creador de todo cuanto existe. Gracias por haberme dado la sabiduría para realizar este trabajo. A ti se la gloria y la honra.
- A mi esposa: Evelin Xiomara Hernández Jiménez, por su ayuda, colaboración, paciencia y por su amor incondicional.
- A mis hijas: Mélani Victoria y Evelyn Estefanía, porque son la fuente de motivación en mi vida profesional.
- A mis padres: Por el gran esfuerzo que realizaron brindándome una Educación en Valores.
- A mis hermanos y hermanas: David, Rosario, Raúl, Eliseo, Ester y Ericka; con mucho amor.
- A mis Suegros: Con especial afecto, gracias por sus oraciones.
- A mi Casa de estudios: Universidad de San Carlos de Guatemala que me vio nacer como profesional.
- A mi Escuela: Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media, donde he aprendido todo lo que soy como docente.



## Agradecimientos

- A mi asesora: Dra. Amalia Geraldine Grajeda Bradna: Por haberme compartido sus conocimientos académicos, por haberme brindado su atención en todo momento y por toda su ayuda. ¡Gracias!
- Dr. Miguel Ángel Chacón Arroyo: Por su recomendaciones y exhortaciones.
- Lic. Saúl Duarte Beza: Por sus consejos y su valiosa colaboración en la realización de esta investigación.
- Lic. Hasler Calderón: Por su apoyo moral y recomendaciones pertinentes.
- Lic. Pedro Echeverría: Por sus recomendaciones.
- A mis amigos y compañeros: Edwin Prado y Lissette Hernández: Por su apoyo moral y valiosa cooperación.
- A Flor de María Virula: Por su paciencia y amabilidad.
- A todas aquellas personas que de alguna u otra forma intervinieron en la realización de este trabajo.

¡Gracias!

## ÍNDICE

Contenido	Página
Introducción.....	1
 <b>CAPÍTULO I</b> <b>PLAN DE LA INVESTIGACIÓN</b>  	
1.1. Antecedentes.....	4
1.2. Planteamiento y definición del problema. ....	11
1.3. Objetivos.....	14
1.4. Justificación.....	15
1.5. Tipo de investigación.....	16
1.6. Hipótesis. ....	16
1.7. Variables. ....	16
1.8. Metodología. ....	19
1.8.1. Técnicas.....	19
1.8.2. Instrumentos.....	19
1.9. Sujetos de la investigación. ....	19
1.9.1. Población.....	19
1.9.2. Muestra.....	20
 <b>CAPÍTULO II</b> <b>FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b>  	
2.1. ¿Qué es Matemática? .....	22
2.2. Reseña histórica. ....	23
2.3. Enseñanza. ....	26
2.4. Aprendizaje. ....	27
2.5. La enseñanza de la Matemática. ....	27
2.5.1. Competencia. ....	29
2.5.2. ¿Qué es competencia Matemática? .....	29
2.6. La resolución de problemas matemáticos.....	31
2.6.1. Antecedentes históricos de la resolución de problemas.....	31
2.7. ¿Qué es un problema? .....	35
2.7.1. Diferencia entre ejercicio y problema.....	37
2.7.2. Tipos de problemas .....	39
a) Problemas por resolver .....	39

b) Problemas por demostrar .....	40
c) Problemas no estructurados. ....	40
d) Problemas estructurados. ....	41
2.8. Métodos de resolución de problemas.....	41
2.8.1. El método de George Polya.....	41
a) Comprender el problema.....	42
b) Concebir un plan .....	43
c) Ejecutar el plan.....	44
d) Mirar hacia atrás.....	44
2.8.2. El método de Miguel de Guzmán.....	44
a) Familiarizarse con el problema.....	45
b) Buscar estrategias.....	45
c) Llevar adelante la estrategia .....	45
d) Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.....	46
2.8.3. El método de Bransford y Stein.....	46
2.8.4. El trabajo de Alan Schoenfeld .....	47
2.9. La resolución de problemas en la Psicología. ....	48
2.9.1. Los aportes de John Dewey en la Resolución de problemas. ....	48
2.9.2. El modelo de Wallas para resolver problemas. ....	49
2.9.3. El modelo de Mayer para resolver problemas. ....	49
2.10. Planteamiento de problemas matemáticos. ....	50
2.11. Estrategias de resolución de problemas.....	51
2.11.1. Las estrategias de resolución de problemas en Matemática.....	52
2.11.2. Clasificación de las estrategias de resolución de problemas.....	52
a) Estrategias cognitivas.....	52
b) Estrategias metacognitivas.....	53
c) Estrategias reflexivas e irreflexivas.....	53
d) Estrategias generales y específicas.....	53
2.12. Las estrategias de resolución de problemas matemáticos y su aplicación.....	54
2.12.1. Demostración directa.....	54
2.12.2. Argumentar por contradicción o reducción al absurdo.....	55
2.12.3. Buscar un patrón.....	55
2.12.4. Considerar casos extremos.....	56
2.12.5. Descomponer el problema.....	57
2.12.6. Ensayo y error.....	58
2.12.7. Elegir una notación adecuada.....	59
2.12.8. Utilizar simetría.....	60
2.12.9. Formular un problema equivalente.....	61
2.12.10. Generalizar.....	62
2.12.11. Hacer dibujos o diagramas .....	64
2.12.12. Hacer una lista o tabla.....	64
2.12.13. Plantear ecuaciones.....	65
2.12.14. Trabajar hacia atrás.....	67
2.12.15. Usar fórmulas.....	67

2.12.16. Usar una computadora.....	68
2.12.17. Utilizar las propiedades de los números.....	69
2.13. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas. ....	69
2.13.1. Las creencias en la resolución de problemas.....	70
2.13.2. El papel de la inteligencia en la resolución de problemas.....	71
2.13.3. Conocimientos previos y experiencia previa.....	72
2.13.4. Metacognición en la resolución de problemas.....	72
2.13.5. La ansiedad.....	73
2.13.6. La ansiedad matemática.....	73
2.13.7. Habilidad en el cálculo mental.....	74
2.13.8. La memoria.....	74
2.13.9. La motivación.....	74
2.13.10. La concentración en el proceso .....	74
2.13.11. La creatividad.....	75
2.13.12. El gusto por los retos .....	75
2.14. La enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas....	75
2.14.1. Objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas.....	76
2.15. La evaluación de la resolución de problemas matemáticos.....	77
2.15.1. Algunos instrumentos para la evaluación de la resolución de problemas. ....	77
a) Lista de cotejo .....	78
b) Escala de valoración .....	78

### **CAPÍTULO III PRESENTACIÓN DE RESULTADOS**

3.1. Estrategias de resolución de problemas matemáticos. ....	81
3.2. Aprendizaje de la resolución de problemas. ....	98
3.3. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas. ...	102

### **CAPÍTULO IV DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

4.1. Estrategias de resolución de problemas matemáticos.....	117
4.2. Aprendizaje de la resolución de problemas.....	120
4.3. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.....	121

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

A. Conclusiones... ..	126
B. Recomendaciones. ....	127
REFERENCIAS.....	129
Apéndice. ....	144
Anexos.....	167

## ÍNDICE DE TABLAS

No.	Nombre de la tabla	Pág.
1.	Estrategias de resolución de problemas/Definición de estrategias de resolución de problemas.....	81
2.	Estrategias de resolución de problemas/Conocimiento sobre las distintas estrategias que se utilizan en la resolución de problemas.	82
3.	Estrategias de resolución de problemas/Conocimiento de los métodos para resolver problemas .....	83
4.	Estrategias de resolución de problemas/Enseñanza de problemas y de las estrategias de resolución a estudiantes. ....	84
5.	Estrategias de resolución de problemas/Enseñanza de la utilización de estrategias de resolución de problemas en la formación docente universitaria.....	84
6.	Estrategias de resolución de problemas/Importancia de la enseñanza de la resolución de problemas, según los docentes.....	85
7.	Estrategias de resolución de problemas/Aspectos que los docentes evalúan en la enseñanza de la resolución de problemas. ....	85
8.	Estrategias de resolución de problemas/Frecuencia de la enseñanza de Resolución de problemas según los docentes. ....	86
9.	Estrategias de resolución de problemas/Inclusión de la Resolución de problemas en los contenidos del curso de Matemática por unidad temática. ....	86
10.	Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Conocimientos previos de los estudiantes acerca de los contenidos que se aplican en la resolución de problemas.....	102
11.	Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Sentimientos manifestados ante la imposibilidad de resolver un problema.....	103

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

No.	Nombre de la gráfica	Pág.
1.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Ensayo y error. ....	87
2.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Fórmulas o ecuaciones.....	88
3.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Propiedades de los números.....	89
4.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Hacer una lista o tabla de datos .....	90
5.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Hacer dibujos, gráficas o diagramas .....	91
6.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Buscar patrones.....	92
7.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Utilizar variables.....	93
8.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Descomponer el problemas .....	94
9.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Utilizar simetría.....	95
10.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/Trabajar hacia atrás .....	96
11.	Utilización de estrategias de resolución de problemas/ Comprobación de la solución de un problema. ....	97
12.	Aprendizaje de la resolución de problemas/Soluciones correctas de los problemas.....	98
13.	Aprendizaje de la resolución de problemas/Soluciones incorrectas de los problemas.....	99
14.	Aprendizaje de la resolución de problemas/Problemas sin resolver.....	100
15.	Aprendizaje de la resolución de problemas/Resultado de la prueba aplicada a docentes y estudiantes .....	101
16.	Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/Gusto por la resolución de problemas.....	104
17.	Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Dedicación de tiempo necesario para resolver un problema.....	105
18.	Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Orden y organización del proceso de resolución de problemas.....	106

19. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Creencia sobre la utilidad de la resolución de problemas en la vida y en el futuro.....	107
20. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Nerviosismo durante la resolución de problemas.....	108
21. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/Concentración sobre lo que pide el texto de un problema	109
22. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Cansancio mental durante el proceso de resolución de problemas. ..	110
23. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Insistencia por resolver un problema con grado de dificultad.....	111
24. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Seguridad sobre la respuesta correcta de un problema.....	112
25. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Razonamiento y análisis previo de un problema, antes de realizar cualquier cálculo. ....	113
26. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Conocimientos previos para resolver problemas.....	114
27. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Generación de ideas para resolver un problema. ....	115
28. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas/ Conocimiento de cómo empezar a resolver un problema.....	116

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años el Ministerio de Educación a través de la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA- ha evaluado a los estudiantes graduandos de las diferentes carreras del Ciclo Diversificado en Guatemala en las asignaturas de Lenguaje y Matemática, los resultados obtenidos, de manera general, no han sido satisfactorios. En Matemática, los porcentajes de logro son deficientes y poco han mejorado desde la primera evaluación realizada en el año 2006. Tal es el caso de los resultados obtenidos por las estudiantes graduandas de Magisterio del Instituto Normal para Señoritas Centro América –INCA- Jornada Vespertina en la evaluación realizada en el año 2011 con un porcentaje de logro del 6.45% en la prueba de Matemática. Los resultados a nivel nacional fue de 7.48% lo cual indica que, en general, los estudiantes carecen de las habilidades, destrezas y conocimientos en Matemática.

En relación con la formación docente de nivel medio, es de suma importancia que los docentes en servicio, conozcan la problemática y la comunidad educativa en general para tomar acciones concretas y mejorar la situación de la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia, puesto que los estudiantes de Magisterio son los futuros maestros que tendrán la ardua tarea de enseñar a pensar y a desarrollar las competencias matemáticas en los niños de los primeros grados de la educación formal y de ello dependerá en gran manera, la habilidad que tendrán estos estudiantes en los grados superiores como estudiantes y en su futuro en el campo laboral o profesional.

De acuerdo a Gutiérrez, S. (2012). Los instrumentos de evaluación utilizado por la -DIGEDUCA- se fundamentan en los niveles de aprendizaje de



Marzano y precisamente el nivel que no logran alcanzar las alumnas del –INCA– es el Nivel de Utilización que consiste en aplicar los conocimientos para investigar, experimentar y resolver problemas. Además, el nuevo Currículo Nacional Base para la formación inicial docente del nivel primario (2006) establece entre otras competencias, desarrollar en los estudiantes, la habilidad de resolver problemas matemáticos en situaciones de la vida diaria; sin embargo, las estudiantes evaluadas en los últimos años, no han logrado esta competencia, según los resultados de las evaluaciones publicadas por la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa del Ministerio de Educación.

Asimismo, la resolución de problemas ha sido durante las últimas décadas, objeto de estudio e investigación por profesionales de la Matemática Educativa en diferentes países de América y España; sin embargo, en Guatemala poco se conoce sobre el tema y por consiguiente no se le ha prestado la atención necesaria.

Dado que uno de los objetivos fundamentales de la Matemática es principalmente, resolver problemas, no tendría sentido práctico aprender una diversidad de operaciones y leyes matemáticas sin ningún sentido; así también, muchos estudiantes desconocen la aplicación que tiene la Matemática, porque no reciben la enseñanza necesaria para resolver problemas. Los estudiantes no están teniendo un aprendizaje significativo.

Es así como esta investigación surge con el interés de describir la situación actual de la Educación Matemática, específicamente lo referido a la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, la aplicación de estrategias y otros factores que influyen el proceso de su aprendizaje, en estudiantes graduandas del Instituto Normal para Señoritas Centro América de la Jornada Vespertina.

La investigación se llevó a cabo en 8 secciones de estudiantes de Sexto

Magisterio Primaria y Preprimaria en donde se evaluó el proceso de resolución de problemas y las estrategias que utilizan; así como los factores que influyen en dicho proceso de resolución de los problemas matemáticos; de la misma manera se trabajó con los profesores que imparten el curso en las distintas secciones de la Jornada Vespertina de dicha Institución. Los resultados obtenidos permiten tener una perspectiva general de la situación de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente del proceso de resolución de problemas y la utilización de estrategias para mejorar la situación de la enseñanza de la Matemática en el Instituto, a la vez que se contribuirá al mejoramiento del rendimiento escolar en general.

## **CAPÍTULO I**

### **PLAN DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **1.1. Antecedentes**

La enseñanza - aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos ha sido objeto de investigación en las últimas décadas por profesionales de la Matemática y Psicólogos. Entre estas investigaciones destacan las siguientes:

- Silva Laya, M., Rodríguez Fernández, A. y Santillán González, A. (2009) titulado “Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to. Grado de primaria”. Investigación institucional de la Universidad Iberoamericana de México, cuyos objetivos principales fueron: Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver problemas matemáticos y detectar errores y dificultades en el método y las estrategias que emplean los alumnos para resolver problemas. En la investigación se utilizó un diseño mixto con un enfoque cualitativo tomando una muestra de 57 estudiantes de 6º grado de Primaria. Entre las conclusiones obtenidas resaltan las siguientes: los conocimientos previos [definiciones, propiedades y teoremas matemáticos] son herramientas claves para el éxito en la resolución de problemas; además, se determinó que proporciones importantes de estudiantes no cuentan con los conocimientos previos suficientes para resolver los problemas matemáticos. El análisis de las estrategias de resolución de problemas, indicó que hay una mayor incidencia de procedimientos reflexivos que irreflexivos; sin embargo, su frecuencia fue mucho menor al tratarse de los problemas más difíciles, específicamente los de geometría. Finalmente se concluye, que si no se

comprenden los problemas y no se tiene un plan justificado, los estudiantes realizan las operaciones con los datos proporcionados y plantean una solución aunque ésta no tenga sentido.

- Agudelo, G., Bedoya, V. y Restrepo, A. (2008) en el trabajo de Tesis “Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos” para optar al grado de Licenciatura en Pedagogía Infantil de la Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia; investigaron la relación entre la aplicación de las estrategias heurísticas de Polya y el mejoramiento de la capacidad de resolver problemas matemáticos con estudiantes de 5º. Grado de Primaria utilizando un método cuasiexperimental y de tipo cuantitativo. El objetivo principal fue utilizar el método heurístico de Polya para mejorar la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de quinto grado; los principales hallazgos fueron: la comprensión lectora influye en la resolución de problemas: a mayor comprensión lectora, mayor es la capacidad para resolver problemas; los estudiantes que aplican el método de Polya resuelven problemas de forma reflexiva y no mecánica.
- Say Tzul, A. D. (2005) en su Tesis para optar el grado de Licenciado en Pedagogía y Ciencias de la Educación de la Facultad de Humanidades de la Universidad de San Carlos de Guatemala, con el título “Correspondencia entre la actitud y el aprendizaje de las matemáticas”. Cuyo objetivo general es: Determinar si la actitud de rechazo hacia las áreas numéricas que presenta el alumno, incide grandemente en el aprendizaje de la naturaleza de contenido de la unidad de Lógica Matemática y uno de sus objetivos específicos es: Determinar la actitud que presentan los estudiantes hacia las áreas numéricas. En esta investigación se tomó como muestra a 45 estudiantes de Segundo Básico del Instituto de Educación Básica, utilizando un método cualitativo-cuantitativo. Entre las principales conclusiones cabe destacar las siguientes: la actitud incide en otros contenidos programáticos, los cuales incide en el aprendizaje, y existe una actitud de rechazo hacia los

contenidos programáticos de las áreas numéricas por parte del estudiantado.

- Ossma Sierra, Y. P. y Teherán Villa, N del S. (2003) en su trabajo de grado titulado “Estrategias metacognitivas para la comprensión y resolución de problemas aditivos en el sistema numérico de los enteros en estudiantes de 7º. del Colegio Dulce Nombre de Jesús de Sincelejo” para optar al grado de Licenciado en Matemáticas, cuyo objetivo general fue: posibilitar la comprensión y resolución de problemas aditivos en el sistema de los enteros, en estudiantes de 7º. Grado del Colegio Dulce de Nombre de Jesús de Sincelejo, a través de la incorporación y desarrollo de estrategias metacognitivas para ayudarlos en su proceso de razonamiento; y uno de los objetivos específicos fue desarrollar con los estudiantes estrategias metacognitivas en los procesos de resolver problemas aditivos a fin de incorporarlos en sus actividades de aprendizaje.

En dicha investigación se utilizó una metodología descriptiva y tipo cualitativo, tomando una muestra de 5 estudiantes que presentaban dificultad en la adición de los números enteros y especialmente en la resolución de problemas. Entre sus principales conclusiones se puede resaltar las siguientes: Los estudiantes se motivan o interesan en la resolución de problemas, cuando son invitados a desarrollar estrategias como: graficar, usar diagramas y en especial al dramatizar, hacer simulacros o ejemplificar una situación problema, y los estudiantes se inclinan a la metodología tradicional y la dependencia hacia el docente es persistente.

- Arriola, P. y Saz, M.A. (2010) en “Percepción de los estudiantes graduandos sobre las evaluaciones nacionales 2009”. Investigación institucional de la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa del Ministerio de Educación de Guatemala; investigación con enfoque cualitativo y cuantitativo cuyo fin es “generar información que aporte insumos para el abordaje de la mejora en dos vías (estudiantes-MINEDUC) de este proceso [evaluación].

Como instrumento se utilizó un cuestionario y entrevista a un grupo focal. La muestra la constituyó 865 estudiantes de nueve establecimientos, ocho de la ciudad capital y uno de Quetzaltenango. El grupo focal lo constituyó seis estudiantes quienes participaron en las evaluaciones nacionales de la ciudad capital. Los hallazgos importantes son: el 21.19% de los estudiantes expresaron que les faltó desarrollar la habilidad que implicaba destrezas de pensamiento para resolver la prueba. Esta habilidad consiste en la capacidad de administrar nociones, representaciones y utilizar procedimientos matemáticos para comprender e interpretar el mundo real. Además, sólo el 9.05% de los estudiantes consideran que dominan todos los temas evaluados. En cuanto a los conocimientos previos, el porcentaje más alto es Álgebra con un 38.42%.

- Castillo Valdez, I. A. (2011) en su trabajo de tesis titulado “Estrategias de aprendizaje que utilizan los estudiantes del colegio Discovery y su relación con el Rendimiento académico en Matemática” para optar al grado de Licenciada en Educación y Aprendizaje de la Facultad de Humanidades, Departamento de Educación de la Universidad Rafael Landívar. El objetivo general de la investigación fue: determinar la relación que existe entre las estrategias de aprendizaje que utilizan los alumnos del ciclo básico del Colegio Discovery y el rendimiento académico que obtienen en la clase de Matemática, y entre los objetivos específicos: Establecer el nivel de uso de cada una de las estrategias y conocer si existe diferencia en el uso de las estrategias de acuerdo al grado que cursa el alumno. Como conclusión general de esta investigación se llegó a que “existe correlación significativa entre el uso de las Estrategias de Adquisición de Conocimientos, las Estrategias de Recuperación de la Información y Estrategias de Apoyo al Procesamiento y el rendimiento académico obtenido por los alumnos en la asignatura de Matemática. El incrementar el uso de las estrategias facilitará al alumno el aprendizaje de los conocimientos”.

- Roque Carrera, M. F. (2005) en su tesis titulada “Factores que influyen en el rendimiento de la Matemática en el estudiante del Ciclo Básico, del Instituto Oficial Mixto Básico Leonidas Mencos Ávila. Tiquisate, Escuintla” para optar al grado de Licenciada en Pedagogía y Ciencias de la Educación, del Departamento de Pedagogía, Facultad de Humanidades de la Universidad de San Carlos. El objetivo de la investigación es: Identificar los factores que influyen en el rendimiento del aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del Instituto Oficial Mixto Leonidas Mencos Ávila, de Tiquisate. La investigación es descriptiva y de tipo cualitativo-cuantitativo. Se tomó una muestra de 156 alumnos de los tres grados de Educación Básica y tres maestros. De esta investigación se determinó que el bajo rendimiento en el área de Matemática se debe a: la metodología utilizada por el docente al impartir sus clases y el número de estudiantes por salones de clase.
- Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005) en el trabajo titulado “El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos” investigación institucional de la Universidad de Extremadura, España, cuyo objetivo es poner de manifiesto la importancia del papel que desempeñan los afectos en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático. En la investigación se tomó como muestra a 346 alumnos de los grados de 3º. y 4º. Curso de Educación Secundaria Obligatoria, tanto en escuelas estatales como privadas. En este estudio se empleó una metodología descriptiva de tipo cualitativo-cuantitativo. Las principales conclusiones obtenidas son: el 51.7% de los estudiantes les interesa y atraen el curso de Matemática, el 77.7% de los estudiantes eligen esta materia como clase preferida, los estudiantes consideran que la resolución de problemas exige perseverancia y paciencia. El nivel de ansiedad matemática es superior en las chicas que en los varones, las actitudes y las reacciones emocionales de los estudiantes hacia la matemática y su aprendizaje varían en función del sexo.
- Iriarte Pupo, A. y Sierra Pineda, I. (2011). En la investigación titulada

“Estrategias Metacognitivas en la Resolución de Problemas Matemáticos”  
Investigación institucional del Sistema de Universidades Estatales del Caribe Colombiano - Sue Caribe cuyo objetivo es determinar la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 5<sup>o</sup> de la institución educativa Normal Superior de Sincelejo.

En la investigación se tomó como muestra a 2 docentes en servicio y 338 estudiantes, el grado quinto de la IENSS, teniendo seis grupos en la jornada matinal y cuatro grupos en la Jornada Vespertina, para un total de 338 estudiantes. Para la elección de los grupos experimentales y control, fueron escogidos de manera aleatoria los siguientes: grupo 5<sup>o</sup> B, Jornada Matutina (Control), el grupo 5<sup>o</sup> F Jornada Matutina (control), el grupo 5<sup>o</sup> C Jornada Vespertina (Experimental) y el grupo 5<sup>o</sup> A Jornada Vespertina (Experimental). En el estudio se tomaron dos grupos experimentales, a ambos se les intervino con la estrategia didáctica con enfoque metacognitivo, a uno de ellos se le aplicó pretest y postest, al otro sólo el postest. Se tomaron a su vez dos grupos de control, los cuales no fueron intervenidos con la estrategia, sin embargo, a uno de ellos se le aplicó el pretest y postest, al otro solo el postest. Los grupos experimentales y de control se escogieron de manera aleatoria. Los principales hallazgos son: la preparación de los docentes en la aplicación en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, contribuye al desarrollo de competencias metacognitivas en el aula, aportado al aprendizaje autónomo de los estudiantes; el manejo de estrategias metacognitivas caracterizada por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo, que es parte fundamental en el proceso de resolución de problemas; el conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos que articulen estrategias cognitivas y metacognitivas y el contexto, permite que el



estudiante desarrolle la competencia de resolver problemas desde la matematización de sus realidades.

- Martínez Barragán, L., Negrete Agámez, M. y Sierra Pineda, I. (2011).en el trabajo titulado “Estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos, desarrollo de habilidades metacognitivas en educación infantil”; investigación institucional de la Universidad de Córdoba, cuyo objetivo general es determinar la influencia de una estrategia basada en la enseñanza de heurísticos para la resolución de problemas matemáticos en el desarrollo de habilidades metacognitivas en niños entre los 9 y 11 años de edad del Centro Educativo Besito Volao de la ciudad de Montería. La metodología empleada fue cuantitativa, con un diseño cuasiexperimental de grupos equivalentes (control y experimental). La muestra fueron niños y niñas que se encuentran en el rango de edades entre los 9 y 11 años. La muestra se seleccionó de forma no probabilística, conformada por grupos intactos, correspondientes a los estudiantes de ambos grupos de grado cuarto, a los cuales se les aplicó una prueba de equivalencia, para garantizar que ambos grupos iniciaran el experimento en igualdad de condiciones en cuanto a las competencias de comprensión lectora, análisis lógico matemático y comprensión algorítmica de las cuatro operaciones matemáticas básicas.

Las principales conclusiones fueron: los bajos niveles de desarrollo de las habilidades metacognitivas en la población infantil evidenciados en la preprueba especialmente las referidas al conocimiento y planificación de la tarea y de las estrategias de resolución de problemas, obedecen, por un lado, a que los estudiantes se dedican únicamente a realizar simples ejercicios, que no constituyen para los mismos, tareas intelectualmente exigentes (término adoptado por González, 1998), lo cual a su vez implica que los procesos que orientan los maestros para enfrentar este tipo de tareas se enfoquen en la enseñanza de algoritmos o técnicas los cuales son

aplicados por los estudiantes como una secuencia automatizada de acciones. El estudio muestra que los estudiantes no son conscientes de las estrategias que usan al resolver problemas matemáticos, en consecuencia y como es de esperarse, es poca la actividad de monitoreo y evaluación que realizan sobre estas, de igual manera es deficiente su capacidad para evaluarlas o adaptarlas según los contextos de la tarea, lo cual destaca la validez del programa de intervención que tiene en cuenta los aspectos, tanto condicionales referidos al conocimiento como los procedimentales referidos a la regulación para desarrollar las habilidades metacognitivas.

Asimismo se encontró que las estrategias de resolución de problemas que conocían los estudiantes partícipes del proyecto, no eran suficientes para enfrentar eficientemente diferentes tipos de problemas; es decir, que ante situaciones nuevas en los que los algoritmos aprendidos no les ofrecían la solución, se sentían perdidos y frustrados, lo anterior valida el éxito del programa, puesto que al enseñarles estrategias heurísticas los estudiantes contaron con un variado menú de posibilidades para planificar, monitorear y evaluar su estrategia, dependiendo de las características de la tarea. La enseñanza de estrategias heurísticas favorece el desarrollo de las habilidades metacognitivas, al ofrecer a diferencia de los algoritmos, solo posibles caminos de resolución de problemas, los cuales para llegar a ser efectivos requieren la participación activa del estudiante en la reflexión de aquellas que se ajusten a las necesidades de la tarea, la planificación y toma de decisiones, para armar su estrategia particular y finalmente la evaluación permanente de su proceso.

## 1.2. Planteamiento y definición del problema

La Ley de Educación de Guatemala establece una educación basada en principios humanos, científicos, formar integralmente al educando, prepararlo para el trabajo, fomentar y cultivar sus cualidades física e intelectuales. Es por

ello, la importancia de tener una educación de calidad y una formación sólida, constante y permanente. Sin embargo, el sistema educativo no está alcanzando sus objetivos, puesto que, la calidad de la enseñanza se refleja en muchos de miles de estudiantes que se gradúan cada año, pero con una formación deficiente como lo demuestran los resultados de las evaluaciones realizadas a graduandos por el Ministerio de Educación; cada año los resultados obtenidos permanecen deficientes en Lenguaje y Matemática.

Los resultados de la evaluación en Matemática realizada por el Ministerio de Educación, a través de la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, se presenta en el informe de la evaluación de graduandos, en la cual se da conocer las distintas áreas donde se siguen teniendo deficiencias, entre ellas están:

- La utilización de los números reales para resolver un determinado problema.
- Resolución de problemas de aplicación de porcentajes.
- Resolución de problemas de la vida cotidiana en donde se demuestra la habilidad numérica.

Los temas anteriores referentes a la resolución de problemas son una parte fundamental en la enseñanza de las matemáticas, porque es en este proceso en el cual el estudiante encuentra sentido a la matemática, desarrolla su pensamiento lógico y numérico; además, toma conciencia de la utilidad de esta ciencia, se da cuenta que la matemática no es simplemente operaciones y reglas sin sentido, sino que posee utilidad en su vida diaria y en las diferentes áreas científicas; un estudiante capaz de resolver problemas posee un aprendizaje significativo. Con todo, el resolver problemas matemáticos sigue siendo un área deficiente y para muchos estudiantes es otra dificultad más sumada a la deficiencia en la realización de operaciones.

La sociedad actual está en constante desarrollo científico y tecnológico en donde la enseñanza de la matemática juega un papel fundamental, puesto que esta ciencia es el lenguaje principal de otras, tales como Física, Química, Computación y se aplica además en ciencias como la Economía, Sociología, entre otras.

En todos los campos de la ciencia, en situaciones de la vida diaria, en el trabajo, en los estudios, en el campo educativo y otras actividades, surgen problemas de diversa índole y ¿qué se hace con esos problemas?... pues, resolverlos. En esta área de la Matemática, el estudiante desarrolla sus habilidades numéricas y de pensamiento matemático. Se ha observado que cuando se plantea un problema de aplicación de matemática a estudiantes, desconocen la forma de resolverlo y no logran identificar qué operaciones se debe realizar, trabajan en forma desordenada y algunos apenas leen el enunciado, tienen dificultades para expresar el problema al lenguaje matemático, aunque sea un simple problema aritmético o problema de aplicación de ecuaciones.

Un estudiante que posee dificultades para resolver problemas, le crea frustración y además adopta una actitud negativa ante el curso y supone que la Matemática no es para él, igualmente el estudiante que no puede resolver problemas, difícilmente podrá entender el objetivo principal de esta ciencia. En sus estudios futuros y en el campo laboral, probablemente tenga dificultades para analizar y resolver problemas de situaciones reales. ¿Esto se debe a que el estudiante no tiene definidas las estrategias para resolver problemas? En virtud a lo expuesto anteriormente se plantea el siguiente problema de investigación:

***Los estudiantes no pueden resolver problemas matemáticos, porque carecen de estrategias de resolución de problemas.***

Con esta investigación se responderá a las siguientes interrogantes:

¿Qué estrategias se enseñan actualmente para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos? ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos? ¿Qué factores afectan el aprendizaje de la resolución de problemas?

Al responder estas interrogantes se coadyuvará en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y especialmente en el tema de estrategias de resolución de problemas.

### 1.3. Objetivos

#### 1.3.1. General

Coadyuvar en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática especialmente en la aplicación de estrategias de resolución de problemas.

#### 1.3.2. Específicos

- a) Determinar las estrategias que se enseñan para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.
- b) Determinar las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.
- c) Determinar los factores que afectan el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

#### 1.4. Justificación

El nuevo Currículo Nacional Base para la Formación Inicial de Docentes del Nivel Primario en el área de Matemática hace énfasis en las competencias de análisis, formulación, resolución e interpretación de problemas matemáticos en situaciones de la vida diaria. Esta es una base fundamental para analizar a profundidad las causas por las cuales los estudiantes de Magisterio del Instituto Normal Centro América –INCA- Jornada Vespertina, demuestran una actitud negativa ante el tema de la resolución de problemas de la matemática y muchas estudiantes, ni siquiera hacen el intento por resolverlo. En los últimos informes de evaluación a graduandos según el Ministerio de Educación, las estudiantes del –INCA- han presentado un nivel nulo en el área de resolución de problemas de acuerdo con la Taxonomía de Marzano que el Ministerio de Educación toma como base. Por otro lado, las estudiantes poseen conceptos erróneos de la Matemática y creen que esta ciencia únicamente se reduce a simples realizaciones de cuentas; consideran que la Matemática la conforman únicamente los números naturales y saber contar, desconocen que la Matemática en general tiene muchas aplicaciones en la vida diaria y en las carreras científicas, en el aprendizaje de ciencias como: Física, Química, Biología y todas las ramas de la Ingeniería.

Según Marzano, R. J. y Kendall, J.S. (2007) hay 6 niveles de aprendizaje que son: Recuperación, Comprensión, Análisis, Utilización del conocimiento, Metacognición y Sistema interno. Cada uno de estos niveles se desarrolla por etapas. En Matemática, el nivel de Utilización del conocimiento se da en la resolución de problemas, en donde el estudiante debe aplicar los conceptos, definiciones, operaciones y estrategias; así es como la teoría se lleva a la práctica.

El problema radica en que las graduandas de Magisterio Primaria y Preprimaria, egresan con deficiencias en Matemática y ellas serán las maestras de niños y niñas, lo que incidirá en un futuro cercano, pues también sus alumnos tendrán dificultades con esta ciencia.

Por lo anterior, es importante describir y analizar las causas por las cuales las alumnas del –INCA- Jornada Vespertina, están presentando dichas deficiencias en la resolución de problemas matemáticos.

### 1.5. Tipo de investigación

Por el nivel de profundidad: descriptiva, puesto que pretende dar una descripción y explicación de la situación de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas y no pretende demostrar un hecho o fenómeno en este tema.

Por el grado de aplicabilidad: aplicada, puesto que surge directamente de la práctica educativa y los resultados pueden aplicarse posteriormente.

Por el origen de los datos: mixta, puesto que es de campo y documental.

### 1.6. Hipótesis

Como ya se indicó, la presente investigación es de tipo descriptivo, por lo que no plantea ninguna hipótesis, según Sampieri, R. (2006)

### 1.7. Variables

En esta investigación se analizarán las siguientes variables: estrategias de resolución de problemas matemáticos, aprendizaje de la resolución de problemas y factores que influyen en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERATIVA	INDICADORES	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Estrategias de resolución de problemas matemáticos.	Una estrategia es un “procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento “ad hoc” y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de las acción de búsqueda de la solución” (Campistrous y Rizo, 2000) Citado en Cruz, M. 2002.	Se entenderá por estrategias las siguientes acciones que se pueden utilizar en la resolución de problemas.	1. Busca relaciones entre las cantidades. 2. Enlista datos en una tabla. 3. Representa el problema mediante dibujos o diagramas.	Evaluación a estudiantes y docentes.	Lista de cotejo
		1. Buscar patrones. 2. Hacer una lista o tabla de datos. 3. Realizar figuras, dibujos o diagramas. 4. Descomponer el problema. 5. Usar variables. 6. Utilizar simetría. 7. Ensayo y error 8. Utilizar fórmulas o ecuaciones. 9. Utilizar propiedades de los números. 10. Trabajo hacia atrás.	4. Separa el problema y lo resuelve por partes. 5. Utiliza letras para indicar cantidades desconocidas. 6. Utiliza simetría en figuras geométricas. 7. Realiza varios intentos con valores conocidos para llegar a la solución. 8. Utiliza fórmulas o plantea ecuaciones. 9. Aplica propiedades de los números y las combina. 10. Resuelve el problema de adelante hacia atrás.	Entrevista a estudiantes	Cuestionario
				Entrevista a docentes	Cuestionario



VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERATIVA	INDICADORES	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Aprendizaje de la resolución de problemas.	El aprendizaje es la adquisición del conocimiento de algo por medio del estudio, el ejercicio o la experiencia, en especial de los conocimientos necesarios para aprender algún arte u oficio.	Nota obtenida en una prueba acerca de resolución de problemas en una escala de 0 a 100 puntos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Insatisfactorio: de 0 a 40 puntos</li> <li>• Debe mejorar: de 40 a 60 puntos.</li> <li>• Satisfactorio: de 60 a 80 puntos.</li> <li>• Excelente: de 80 a 100 puntos.</li> </ul>	Evaluación objetiva a docentes y estudiantes.	Prueba Objetiva.
Factores que influyen en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.	Serie de elementos o circunstancias que produce un efecto durante el proceso de resolución de problemas y su aprendizaje.	Actitudes, conocimientos y habilidades que influyen en el proceso de resolución de problemas tales como: <ul style="list-style-type: none"> <li>• interés,</li> <li>• concentración,</li> <li>• gusto por los retos,</li> <li>• ansiedad,</li> <li>• conocimientos previos,</li> <li>• perseverancia,</li> <li>• creatividad.</li> <li>• Inseguridad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realiza más de dos intentos por resolver un problema.</li> <li>• Busca varias formas de resolver el problema.</li> <li>• Utiliza las operaciones y propiedades matemáticas correctamente.</li> <li>• Se aburre fácilmente.</li> <li>• Manifiesta inquietud.</li> <li>• Manifiesta enojo.</li> <li>• No puede plantear los cálculos.</li> <li>• No puede realizar las operaciones.</li> <li>• No tiene los conocimientos matemáticos necesarios.</li> </ul>	Encuesta a estudiantes.	Cuestionario

## 1.8. Metodología

Por el tipo de investigación, el método es Descriptivo, porque los resultados que se obtengan describirán la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje del tema y no pretende demostrar algún fenómeno. Además, se aplican los métodos formales: inductivo y deductivo.

### 1.8.1. Técnicas:

- a) Entrevista semiestructurada a docentes.
- b) Entrevista semiestructurada a estudiantes.
- c) Evaluación a docentes y estudiantes.
- d) Entrevista para evaluar actitudes de los estudiantes.

### 1.8.2. Instrumentos:

- a) Cuestionario a docentes.
- b) Cuestionario a estudiantes.
- c) Lista de cotejo para profesores y estudiantes
- d) Cuestionario.

## 1.9. Sujetos de la investigación

### 1.9.1. Población

La población que se tomó en esta investigación lo constituyeron todos los docentes que imparten las clases de Matemática en las carreras de Magisterio Primaria y Magisterio Preprimaria y todas las estudiantes graduandas de Sexto Magisterio Primaria y Sexto Magisterio Preprimaria correspondiente al ciclo

escolar 2012 del Instituto Normal Centro América, Jornada Vespertina ubicado en la 1a. Calle "C" 2-29 Zona 1 de la ciudad de Guatemala.

### 1.9.2. Muestra

La muestra se calculó con la siguiente ecuación:

$$n = \frac{z^2 pqN}{Ne^2 + z^2 pq} \quad (\text{Rodríguez Moguel, E. A. (2005)})$$

Dónde:

$z = 1.96$  correspondiente a un nivel de confianza de 95%, obtenida de la tabla de distribución normal estándar.

$P = 0.5$  probabilidad de éxito

$q = 0.5$  probabilidad de fracaso.

$N = 385$  tamaño de la población

$e = 0.05$  error de estimación equivalente al 5%

$n = ?$  muestra

$$n = \frac{(1.96)^2 (0.5)(0.5)(385)}{(385)(0.05)^2 + (1.96)^2 (0.5)(0.5)} = 192$$

Ésta corresponde a un porcentaje del 49.9% de la población total.

La muestra por sección fue estratificada en la misma proporción y la selección fue sistemática, se eligieron las alumnas con clave número par tomadas directamente de las listas oficiales del Instituto.

No.	CARRERA	POBLACIÓN POR CARRERA	SECCIONES				MUESTRA POR SECCIÓN				MUESTRA POR CARRERA	%
			A	B	C	D	A	B	C	D		
1	Sexto Magisterio Primaria	194	48	55	50	41	24	27	25	21	97	25.2%
2	Sexto Magisterio Preprimaria	191	49	46	48	48	24	23	24	24	95	24.7%
TOTAL		385									192	49.9%

Fuente: elaboración propia con datos de las listas oficiales del –INCA–, Jornada Vespertina. 2012

Se trabajó con 6 catedráticos de 8 que conforma la población total de profesores que imparten clases de Matemática en las dos carreras del Magisterio.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

#### 2.1. ¿Qué es Matemática?

La Matemática no tiene una definición precisa que abarque todo el campo que ésta estudia. Sin embargo, se puede dar algunas explicaciones como sigue: según el Diccionario general de la lengua española Vox (1997). La **Matemática** Ciencia que estudia las propiedades de los números y las relaciones que se establecen entre ellos.

Asimismo, la Real Academia de la Lengua Española (2011) define la Matemática como: (Del latín. *mathematīca*, y éste del griego τὰ μαθηματικά, derivado de μάθημα, conocimiento) Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.

Algunos matemáticos de renombre han dado sus propias ideas del significado de esta ciencia, entre ellos están:

Whitehead, A. N. “La matemática es, en su significado más amplio, el desarrollo de razonamiento deductivo, formal y necesario”.

Murray, J.A. H. “La matemática, -en sentido estricto- es la ciencia abstracta que investiga deductivamente las conclusiones implícitas en las concepciones elementales de la relaciones espaciales y numéricas.

White, William F. “Las matemáticas, la ciencia de lo ideal, transforma el significado de la investigación, entendiendo y haciendo conocido el mundo real. Lo complejo es expresado en términos de lo más simple. Desde un punto de vista, las matemáticas pueden ser definidas como la ciencia de sustituciones sucesivas de conceptos complejos por otros más simples”

## 2.2. Reseña histórica

Muchos autores han abordado la historia de la Matemática desde distintas perspectivas, algunos enfocados en los matemáticos, otros por los aportes más importantes que se han desarrollado. En esta reseña, se presenta en orden cronológico algunos matemáticos importantes y sus respectivas contribuciones a esta ciencia.

¿Cómo surgió la matemática? la matemática surgió desde que el hombre se vio en la necesidad de contar. En la antigüedad, los hombres utilizaban los dedos, piedras o nudos en cuerdas para contar los objetos y llevar un control de la cardinalidad de los conjuntos de objetos.

10,000 años a.C. en el Próximo Oriente: Las personas en lugar de símbolos utilizaban fichas de arcilla en forma de cono, esfera o forma de huevo, cilindros, discos y pirámides que representaban productos básicos de la época. Estas fichas se utilizaban para llevar registros. Con el paso del tiempo, estas fichas fueron sustituidas por marcas especiales o rayas que posteriormente fue dando lugar a los símbolos para representar las cantidades. Las rayas aún se utilizan actualmente cuando se hace un recuento de objetos, una raya equivale a uno, dos rayas equivale a dos, al acumular cinco, se hacen cuatro rayas atravesada por una diagonal.

En el año 3,150 a.C. La antigua civilización egipcia desarrolló el sistema llamado “sistema de numeración jeroglífico”, utilizaban símbolos para representar los

números 1, 10, 100, 1000, sucesivamente con palos, lazos, figuras humanas, etc. Utilizaron las fracciones de la forma  $1/n$ , pero su sistema de escritura era muy engorroso, por lo que no tuvo buena aceptación en las culturas posteriores.

3,000 años a.C. Los babilonios utilizaron pictogramas para representar las cantidades, luego estos símbolos se transformaron en “cuñas”, los sumerios utilizaron esta forma de representación conocida como escritura cuneiforme. Los babilonios necesitaban representar grandes cantidades, por lo que utilizaron agrupaciones de cuñas para representar estas cantidades y dio origen al sistema sexagesimal, actualmente aún se utiliza este sistema en la medida del tiempo. Los babilonios utilizaban los números en el comercio, la contabilidad diaria y especialmente en la Astronomía, ciencia en la cual tenían ciertos conocimientos. En el Papiro de Rhind, manual de Aritmética destinado a la formación de escribas y oficiales que tenían a cargo llevar el control del comercio, contiene problemas de Aritmética: fracciones, ecuaciones lineales, progresiones y geometría.

En el año 550 a.C. durante el período helenístico, se establece la era pitagórica durante la cual, Pitágoras de Samos establece un movimiento filosófico en donde se destaca el famoso Teorema que lleva su nombre, poseían vastos conocimientos en Aritmética, establecieron la relación entre la Aritmética y la Geometría, estudiaron los números primos y la teoría de la proporcionalidad.

Del año 287 a 212 a. C.: Arquímedes de Siracusa estudió la medida de la circunferencia y cuestiones de Aritmética y Geometría del espacio. Escribió “Sobre equilibrios en el plano”, “La Cuadratura de la parábola”, “Sobre la esfera y el cilindro”, “Medida del círculo y el “Método” descubierto en 1906 por Johan Heiberg.

Del año 276 a 194 a. C.: Eratóstenes de Cirene logró medir la longitud de la circunferencia de la Tierra. A este matemático se le conocen tres aportes: el

primero, la resolución del problema de Delos, el segundo, un escrito sobre las proporciones y tercero, su famosa criba de números primos.

En el año 300 d.C.: El sistema de numeración de los babilónicos es adaptado por los hindúes a la numeración decimal, del cual nace el sistema posicional en los decimales, sistema que se utiliza actualmente. Aparece la "Colección matemática de Pappus de Alejandría.

En el año 900: Comienza la matemática de los árabes: Al-Khuwarizmi compone una aritmética que contribuyó a difundir el sistema decimal de numeración y un tratado que dio nacimiento al Álgebra, en donde resuelve la ecuación de segundo grado en forma numérica.

En el año 1000: El árabe Abu Al-Waffa estudió las funciones circulares. Luego en el año 1545: Se publica un método general para resolver ecuaciones de tercer grado propuesto por el médico y matemático Cardano en su obra Mars magna.

En el año 1550: Ludovico Ferrari quien fue discípulo de Cardano da a conocer el método general de resolución de una ecuación de cuarto grado.

En el año 1614: Napier inventa los logaritmos con el propósito de simplificar los cálculos aritméticos con cifras grandes.

Fue en el año 1619 cuando Descartes crea la Geometría Analítica en donde el filósofo y matemático aplica los símbolos algebraicos a la Geometría utilizando coordenadas que lleva su nombre.

En el año 1642: El matemático Blaise Pascal construye la primera máquina de calcular, conocida como la Pascalina, la cual podía efectuar sumas y restas de hasta 6 cifras, dicha máquina fue mejorada más tarde por Leibniz. A Pascal se le atribuye un triángulo aritmético que lleva su nombre que actualmente tiene muchas aplicaciones, especialmente para desarrollar potencias de binomios.



Durante el año 1684: Se crea, casi simultáneamente, el Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz.

En el año 1777: Leonard Euler matemático suizo, simboliza la raíz cuadrada de -1 con la letra  $i$  (de imaginario). Además de la Matemática, cultivó la Física Matemática, escribe su Opera Omnia.

Del año 1872 a 1895 Georg Cantor de origen ruso y formado en Alemania, crea la Teoría de Conjuntos.

Además en el año 1944 John Vonn Newman trabajó con el economista Oskar Morgenstern y publicaron “Theory of Games and Economic Behavior” que dio lugar a lo que actualmente se conoce como teoría de juegos en el campo de las matemáticas.

Así también el año 1993 Andrew Wiles realizó un intento por demostrar el Último Teorema de Fermat, pero tenía un error y en 1995 logró finalmente, realizar la demostración que por muchos años había sido un gran enigma.

### 2.3. Enseñanza

Para Villalobos, Elvia M. (2003) “La enseñanza es una serie de actividades intencionales y planificadas que se llevan al cabo con el objetivo de conseguir el aprendizaje significativo y estratégico del alumno; no es más que una ayuda para el aprendizaje. Lo fundamental es construir comunidades de aprendizaje”.

La enseñanza como se concibe en la actualidad, el profesor es un guía, un facilitador del aprendizaje, en contraste con la idea tradicional en la que el actor principal del proceso era el profesor. Actualmente, el centro principal de la enseñanza es el alumno. Por tales motivos, la enseñanza actual es guía, orientación y dirección.

La enseñanza es el proceso mental que realiza el alumno para interiorizar la información que le brinda el ambiente físico y sociocultural. El aprendizaje no se adquiere ni se desarrolla, si no se construye. Es el producto de intercambio de contenido que le brinda el contexto con los procesos de construcción genética del conocimiento.

## 2.4. Aprendizaje

Manuel, S y Saavedra, R. (2001) en su Diccionario de Pedagogía define el término como: “proceso mediante el cual se adquiere la capacidad de responder adecuadamente a una situación que puede o no haberse tenido antes; se le considera a la vez como una modificación favorable de las tendencias de reacción, debido a la experiencia previa, particularmente la construcción de una nueva serie de reacciones motoras complejamente coordinadas”. Otra definición es: “actividad mental por medio de la cual, el conocimiento, la habilidad, los hábitos, las actitudes e ideales son adquiridos, retenidos y utilizados, originando progresiva adaptación y modificación de la conducta”.

## 2.5. La enseñanza de la Matemática.

Muchos estudiantes preguntan ¿Quién inventó esta materia? ¿Para qué se enseña Matemática? ¿Para qué realizar ejercicios? y otras cuestiones, algunos docentes han respondido a estas interrogantes, mas no satisface a la mayoría, principalmente a aquellos que tienen dificultades con esta ciencia.

En 1901 el matemático británico John Perry, Citado en Puig, L. y Calderón, J. (1996) escribió una serie de justificaciones para el estudio de la Matemática y estas son:

- Es la causa de intensas emociones y proporciona placer a la mente.
- Desarrolla el cerebro.
- Da lugar a forma lógicas de pensamiento.

- Las herramientas matemáticas sirven de ayuda al estudio de la Física.
- Sirve para aprobar los exámenes.
- Al dar al hombre herramientas mentales tan fáciles de usar como las piernas y los brazos, le permite continuar su educación (desarrollo del alma y del cerebro) a lo largo de la vida, utilizando para este propósito toda su experiencia. Hay una analogía exacta con el poder de educarse a sí mismo a través de la afición a la lectura.
- Enseña al hombre la importancia de pensar las cosas por sí mismo, le libra así del actual y terrible yugo de la autoridad.
- Hace que los hombres de cualquier profesión de ciencia aplicada sientan que conocen los principios sobre los que se funda y según los cuales se desarrolla.
- Da a mentes filosóficas agudas un ideal lógico de perfección, encantador y satisfactorio a la vez, le impide así que intenten desarrollar cualquier tema filosófico desde un punto de vista puramente abstracto, porque lo absurdo de tal intento se hace obvio.

Actualmente, se debe entender que la Matemática se enseñan porque: según Zoltan Diennes “la meta principal de las matemáticas debe ser el desarrollo de ciertas pautas de pensamiento, de ciertas estrategias, que la gente puede desarrollar al enfrentarse a situaciones nuevas en las que nunca se había encontrado antes”.

Otras razones por la que se deben enseñar y aprender matemática son:

- Las necesidades profesionales.
- Que la gente tenga un dominio de su vida personal.
- Requisito previo para aprobar otras asignaturas.

En general, el desarrollo de capacidades formativas tales como: reforzar las facultades mentales entre las cuales están:

- El pensamiento lógico, estructurado, sistemático y analítico.
- La memoria y la imaginación.
- La claridad y la precisión en la expresión,
- la creatividad, la intuición, el desarrollo de la personalidad y las actitudes:
  - pensamiento y conducta independientes y autónomos,
  - actitudes críticas e investigadoras,
  - actitudes de cara a resolver problemas,
  - tener conciencia de uno mismo
  - confianza en sí mismo,
  - puntualidad, exactitud,
  - disciplina y perseverancia en el trabajo;
- disfrute estético y recreativo;
- profundizar en la cultura humana y sus realizaciones.

### **2.5.1. Competencia**

El Currículum Nacional Base para la formación inicial de docentes del nivel primario en Guatemala, define competencia como: "la capacidad o disposición que ha desarrollado una persona para afrontar y dar solución a problemas de la vida cotidiana y a generar nuevos conocimientos".

### **2.5.2. ¿Qué es competencia matemática?**

Según el Programa para la evaluación Internacional de Alumnos (PISA), por sus siglas en inglés, "competencia matemática es la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (OCDE, 2006). Por otra parte, Gutiérrez, L.; Martínez, E. y Nebreda, T. (2008). Indican que "la competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los

números, sus operaciones básicas, los símbolos, las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral”.

Las principales competencias a desarrollar en la enseñanza de la matemática son:

- Pensamiento matemático (Pensar y razonar tipos de enunciados, cuestiones propias de la matemática).
- Argumentación matemática (Demostrar y explicar leyes, reglas y teoremas, expresar argumentos matemáticos).
- Comunicación matemática (Utilizar el lenguaje matemática para expresar en forma oral y escrita, entender expresiones, transmitir ideas matemáticas).
- Modelación (Trabajar con modelos, Interpretar modelos).
- Formulación y resolución de problemas (resolver problemas aplicando estrategias, heurística).
- Representación (codificar, decodificar, e interpretar representaciones, traducir entre diferentes representaciones).
- Uso de símbolos, lenguaje formal y técnico, y operaciones.
- Uso de ayudas y herramientas (aplicación de tecnología, TICs).

Las competencias que evaluó el Ministerio de Educación por medio de la DIGEDUCA en las evaluaciones de Matemática realizadas durante el año 2009 son:

- a) Reproducción, definiciones y cálculo.
- b) Conexiones e integración para la resolución de problemas.
- c) Pensamiento matemático, generalización y comprensión súbita. Citado en Gutiérrez, S. (2009).

## 2.6. La resolución de problemas matemáticos

La resolución de un problema es el proceso que se da desde la presentación de la situación (estado inicial) hasta llegar a la meta, solución o respuesta (estado final) a la situación o cuestión planteada, aplicando métodos y estrategias.

### 2.6.1. Antecedentes históricos de la resolución de problemas

Desde la antigüedad, en Babilonia y Egipto se enseñaba Matemática y por consiguiente, problemas matemáticos. En el papiro de Rhind hallado en las ruinas de Tebas fue un manual de Matemática de los egipcios escrito aproximadamente en el año 1700 a.C. contiene una colección de ejercicios y problemas. En él se encuentra un problema que puede enunciarse como sigue: “Una pirámide. El lado tiene 140 [codos] y la inclinación es de 5 palmos y un dedo [por codo]. ¿Cuál es la altura? (citado en Cruz, M. 2006)

En este problema, se plantea la situación, se indican los datos conocidos y se debe encontrar un dato desconocido. En estos problemas no se utilizaban variables como incógnitas, en su caso, se utilizaban cantidades concretas. Otros dos problemas famosos son los siguientes que Rey Pastor, J y Babini, J. (1985) ilustran:

“Una cantidad y su séptima parte dan 19. Para resolverlo, el calculista toma sucesivamente 7 más 1, es decir 8. Divide 19 por 8 obteniendo  $2 \frac{1}{4} \frac{1}{8}$  y este resultado lo multiplica por 7, obteniendo  $16 \frac{1}{2} \frac{1}{8}$  que es la cantidad buscada. Comprobándolo al agregarle  $2 \frac{1}{8}$  y obtener 19”. Otro problema: “dividir 100 panes entre cinco personas siguiendo una progresión aritmética de manera que la parte de las dos últimas sea  $\frac{1}{7}$  de las partes de las tres primeras, aquí escuetamente el papiro dice: “Toma como diferencia  $5 \frac{1}{2}$ , de donde 23,  $17 \frac{1}{2}$ ,  $12, 6 \frac{1}{2}$ , 1. Aumenta esos números en la proporción  $\frac{1}{3}$  y obtendrás las partes que corresponden a cada persona”. Y la solución es correcta”.

Como puede notarse, estos problemas tienen cierto grado de dificultad, pero el proceso de resolución es puramente aritmético y no se especifican las estrategias utilizadas, únicamente cálculos mentales y conocimiento de las operaciones fraccionarias.

El objetivo de la enseñanza de la resolución de los problemas para los egipcios era la instrucción técnica de los escribas, pocos de estos problemas tenían relación con situaciones reales.

El matemático Pappus en su “Colección Matemática” que consiste en ocho libros hizo comentarios sobre los trabajos de Arquímedes, Euclides, Apolonio y Ptolomeo. El séptimo libro contiene temas de resolución de problemas geométricos y dio inicio a lo que actualmente se conoce como *heurística que Polya* denomina “arte de resolver problemas”. Según Polya (1965) el libro contiene un estudio sobre el análisis y la síntesis como métodos para resolver problemas y hacer demostraciones geométricas.

Arquímedes de Siracusa el más grande de los matemáticos de Grecia, resolvió varios problemas de geometría. En su obra “De la medida del círculo”, el segundo libro de su escrito contiene una serie de problemas, algunos de los cuales, nada fáciles, conducen a problemas del tipo de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

A Diofanto de Alejandría se le atribuye un problema muy conocido que resume partes de su vida, este problema aparece en la Antología Palatina –colección de epigramas en la que aparecen una serie de problemas matemáticos- que circulaba en Alejandría en los tiempos de Diofanto. El enunciado del problema se describe a continuación: “En esta tumba reposa Diofanto. La maravilla es que la tumba cuenta ingeniosamente la duración de su vida. Dios le concedió ser un niño durante una sexta parte de su vida. Añadió una doceava parte antes de vestir sus mejillas con vello. Le encendió la llama del matrimonio después de una

séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo. ¡Ay desdichado niño tardío!, tras alcanzar la medida de la mitad de la vida de su padre, la Parca helada se lo llevó. Y, tras consolar su herida con la ciencia de los números durante cuatro años, acabó su vida. (Antología Palatina. Problema 126. Citado en Puig, L. (2006).)

En la antología no se presenta la solución del problema pero con las herramientas algebraicas que se conocen en la actualidad, se puede plantear una ecuación de primer grado para resolver dicho problema, de la siguiente forma:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 5 + 4 = x$$

La solución de la ecuación anterior es 84, es decir, Diofanto vivió durante 84 años.

Diofanto, además, planteó problemas en su obra *Aritmética* de tipo determinados e indeterminados con soluciones racionales positivos, en dichos problemas utilizó símbolos similares a los actuales; los problemas no tenían orden ni menciona el tipo de problema, los métodos de resolución eran distintos en cada caso aunque se destacaba sus métodos algebraicos. Sus problemas se fundaban en la variedad de propiedades aritméticas.

El matemático Rene Descartes, fundador del racionalismo, creía que para obtener nuevos conocimientos, era necesario ponerlo todo en duda excepto la cognoscibilidad. En la Resolución de Problemas posee dos estudios a saber: El discurso del Método y Las reglas para la dirección del Espíritu. Sus reglas se basaban en las siguientes tres fases: (I) reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple; (II) reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico; y fase (III) reducir cualquier problema a un problema matemático.



Las siguientes son algunas de las reglas que enunció:

Regla I: Dirigir el espíritu de manera que forme juicios sólidos y verdaderos de todos los objetos que se presentan: tal debe ser el fin del estudio.

Regla III: En el objeto que el estudio se propone hay que buscar lo que se pudiera ver claramente, con evidencia, o con certeza. Regla IV: Es necesario ser sistemático; el método es necesario para descubrir la verdad de la naturaleza.

Reglas V y VI: Descomponer los sistemas complejos en componentes simples, dominar las partes simples, y re ensamblar las partes comprensibles en un todo comprensible.

Regla XIII: Cuando se comprende perfectamente una cuestión, es necesario abstraerla de toda concepción superflua, reducirla a sus más simples elementos y subdividirlas en tantas partes como sea posible, por medio de la enumeración.

Regla XV: Es de gran utilidad trazar figuras y representarlas a los sentidos externos, a fin de conservar la atención del espíritu.

Como puede notarse, estas ideas son aplicables actualmente en la teoría de resolución de problemas. Y se entiende como descomponer el problema, analizar el problema, realizar dibujos o esquemas y la aplicación del álgebra.

G. W. Leibniz (1646–1716). cofundador de la dialéctica y creador del cálculo, en su “Arte de Inventar” propuso un método que consistía en analizar términos complejos en función de términos sencillos, lo que se entiende actualmente como descomponer el problema en problemas más sencillos, además sugiere representar dichos términos por medio de símbolos algebraicos. Con estas ideas, Leibniz afirmaba que de esta manera se sigue una lógica deductiva para resolver el problema.

A principios del siglo XX, un grupo de matemáticos influyó en los avances en cuanto a los métodos para enseñar a resolver problemas. El grupo se

denominaba “Bourbaki” el grupo estaba “conformado por A. Weil, J. Delsarte, S. Mandelbrojt, P. Dubreil, J. Dieudonné, R. de Possel, H. Cartan, C. Chevalley y J. Leray. Ellos enarbolaron el lema “Abajo Euclides”, en el sentido de formalizar la Matemática. La obra enciclopédica que llevaron a cabo caló profundamente en los currículos de mediados del siglo pasado”, Cruz, M. (2006).

George Polya (1887–1985). Nació en Budapest, Hungría, escribió *How to Solve It*, obra en la cual desarrolla un método claro y directo para resolver problemas en sentido general por medio de cuatro pasos y un diccionario de heurística. A partir del trabajo de Polya, muchos matemáticos y psicólogos han tratado el tema de resolución de problemas abordando diferentes temáticas y agregando nuevos aportes que constituye actualmente una amplia teoría de resolución de problemas.

## 2.7. ¿Qué es un problema?

Según la Real Academia Española el término problema proviene. (Del lat. problēma, y este del gr. πρόβλημα). **1.** Cuestión que se trata de aclarar. **2.** Proposición o dificultad de solución dudosa. **3.** Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin. **4.** Disgusto, preocupación. **5.** Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

El Diccionario general de la lengua española Vox. (1997) lo define como: **1.** Cuestión discutible que hay que resolver o a la que se busca una explicación. **2.** Cuestión que se plantea para hallar un dato desconocido a partir de otros datos conocidos, o para determinar el método que hay que seguir para obtener un resultado dado. **3.** Circunstancia que dificulta la consecución de algún fin.

En el campo de la Matemática, la definición de este concepto ha sido objeto de análisis por varios investigadores en Educación Matemática, y por matemáticos

notables y cada uno ha dado su explicación de acuerdo con su concepción. Aquí se presentan algunas definiciones más importantes que se tomarán como base para explicaciones ulteriores.

Según Polya, G. (1981) un problema significa “buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata”.

Para Nieto (2004) Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada.

Newell & Simon (1972): explican que “Una persona se enfrenta a un problema cuando quiere algo y no sabe inmediatamente qué tipo de acciones debe realizar para lograrlo” (Citado en Lacasa, P. y Herranz, P. (1995).

Un problema es relativo, es decir, sólo presenta dificultad para quien trata de resolverlo; así, un problema para un estudiante de Primaria probablemente no lo será para un estudiante de Bachillerato.

Un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata. Parra (1990). Citado en Coronel, M.V., Curotto, M.M. (2008)

De las ideas anteriores, se puede decir que un problema es una situación presentada ante la inteligencia humana que necesita resolverse de manera consciente pero que se desconocen los métodos y las estrategias precisas para llegar a la solución.

### **2.7.1. Diferencia entre ejercicio y problema**

Los términos ejercicio y problema se utilizan en el ámbito educativo como sinónimos, sin embargo poseen grandes diferencias, un ejercicio consiste en realizar una serie de operaciones similares para fijar el aprendizaje de las propiedades de los números, dominar la aplicación de un teorema, ley o reglas propias de las Matemática, durante los cuales, el estudiante memoriza dichas propiedades. En este contexto, los ejercicios no llevan al estudiante a desarrollar las competencias necesarias para formar un pensamiento matemático; con esto no se quiere menospreciar el estudio memorístico ya que el estudiante debe formar un lenguaje matemático y tener una serie de herramientas para resolver los verdaderos problemas. Sin embargo, el razonamiento es más importante que una operación meramente memorística.

Según de la Rosa, J. M. (2007), “al resolver ejercicios aplicamos un procedimiento rutinario para llegar a una respuesta. A su vez, el hacer ejercicios ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos, los cuales podrá aplicar cuando vaya a resolver problemas”.

A diferencia de un ejercicio, un problema es un reto a la inteligencia humana, para resolverlo se necesita tener herramientas, tener conocimientos previos, utilizar métodos, técnicas y estrategias de pensamiento para llegar a la solución. Para resolver un problema es necesario meditarlo, reflexionarlo y es aquí en este proceso, cuando el resolutor pone a prueba sus capacidades, desarrolla sus habilidades numéricas y de razonamiento para ser competente en esta área de la Matemática. Cuando se lee un problema las vías de solución no se manifiesta a primera vista, se debe utilizar todos los recursos necesarios para planificar el proceso de resolución. Un problema no se resuelve en segundos, existen

problemas que han tardado años incluso siglos para llegar a la solución, tal es el caso de la demostración del Teorema de Fermat que fue un verdadero problema para los grandes matemáticos de la historia, dicho problema llegó a final término en 1995 por el matemático inglés Andrew Willes.

Según Echenique, G. (2006), “los problemas no se resuelven con la aplicación de una regla o receta conocida a priori. Exigen al resolutor sumergirse en su interior, para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescatar de entre ellos los que pueden serle útiles para aplicar en el proceso de resolución. Puede servirse de experiencias anteriores que hagan referencia a situaciones parecidas, para recordar cuál fue el camino o vía seguida, en caso de poder volver a utilizarlos en esta nueva situación”.

Cuadro Comparativo entre ejercicio y problema

Ejercicio	Problema
Se comprende inmediatamente en qué consiste la tarea o actividad a realizar y qué herramientas se deben utilizar.	Se desconoce a simple vista cómo enfrentarlo y resolverlo, existe poca claridad en lo que consiste la situación.
Consiste en aplicar de forma mecánica los conceptos, propiedades, reglas y leyes que el alumno ya conoce con anterioridad.	Consiste en buscar, indagar, utilizar estrategias además de los procedimientos algorítmicos conocidos.
Es una cuestión cerrada.	Puede ser resuelto por uno o más métodos y estrategias, puede ser cambiado y obtener generalizaciones.
No requiere mucho el uso del razonamiento.	Se utiliza el razonamiento y se desarrolla el pensamiento matemático.
Los ejercicios se realizan.	Los problemas se resuelven.
Se realizan en cierto tiempo determinado.	El tiempo para resolverlo depende del resolutor. Puede ser poco o mucho.
Se pueden crear fácilmente y existen muchos.	No son fáciles de crear, por lo que son escasos.
No involucra la afectividad.	Implican sentimientos de frustración, ansiedad, alegría al resolverlos.

Fuente: De la Rosa, J.M. (2007). *Didáctica para la resolución de problemas* y Echenique, G. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*.

### 2.7.2. Tipos de problemas

Dentro del campo de la Matemática elemental, se puede hacer una clasificación de los tipos de problemas atendiendo a ciertas características.

Polya, G. (1965) en su obra: “Cómo plantear y resolver problemas” distingue entre dos grandes tipos de problemas a saber: los problemas por resolver y los problemas por demostrar.

#### a) Problemas por resolver

Un problemas por resolver es aquel en la cual se debe descubrir algo desconocido que es la incógnita del problema, la incógnita puede ser un número o números, un nombre, una figura geométrica u otro ente. Cabe mencionar que el término incógnita se aplica, por lo general, para resolver problemas que involucren el uso de ecuaciones.

- **Partes de un problema por resolver**

Un problema por resolver consta de las siguientes partes:

- La incógnita: es el objeto desconocido que se debe descubrir, calcular o averiguar en el problema que no necesariamente es un número. Un problema puede tener desde una o varias incógnitas. En algunos problemas para llegar a descubrir la incógnita principal, se debe descubrir anteriormente otras incógnitas secundarias.
- Los datos: es la información concreta que presenta el problema, pueden ser datos cualitativos o cuantitativos. Estos datos permiten llegar a la solución del problema, sin embargo, algunos problemas presentan datos irrelevantes, es decir que no se utilizan para resolver el problema.

- Las condiciones: Las condiciones, son los obstáculos o restricciones que no permiten resolver el problema de manera inmediata, y hace que el problema se considere como tal. El enunciado siguiente no constituye un problema: “Encontrar dos números” pero el siguiente: encontrar dos números cuya suma sea 10, ya posee una condición: la suma de dichos números debe ser 10.
- Un problema puede tener una o varias condiciones. De los ejemplos anteriores: encontrar dos números cuya suma sea 10 y cuyo producto sea 21, posee dos condiciones. De lo anterior, se puede notar que algunos problemas pueden tener más de una solución.

#### a) Problemas por demostrar

Los problemas por demostrar consisten en probar la veracidad o falsedad de una proposición enunciada con claridad, especialmente los teoremas matemáticos. La demostración de un teorema es la comunicación de una verdad matemática, no deberá contener ambigüedades y se deberá estar seguro que es correcto.

- **Partes de un problema por demostrar**

Las partes de un problema por demostrar son la hipótesis y la conclusión. Un problema por demostrar tiene la forma si  $p \rightarrow q$ , donde  $p$  es la hipótesis y  $q$  la conclusión; la hipótesis es la proposición que de antemano se acepta que es verdadera y se debe demostrar por medio de una serie de argumentos válidos que la conclusión también lo es, de esta forma, la proposición condicional será verdadera, y así el problema quedará demostrado.

#### b) Problemas no estructurados

Para Marzano, R. J. y Pickering, D. J. (2005) son aquellos a los cuales una

persona se enfrenta en la vida real, los impedimentos u obstáculos para ser superados son poco claros y requieren recursos no identificados, en algunas ocasiones, el objetivo ni siquiera está claro. Este tipo de problemas pueden tener más de una solución.

### c) Problemas estructurados

Son aquellos que se encuentran en los libros de texto como juegos, rompecabezas; éstos tienen objetivos claros y los recursos para lograr los objetivos son disponibles. Los problemas estructurados, generalmente tienen respuesta correcta.

## 2.8. Métodos de resolución de problemas

Según Nérci, I. (1973) método significa “camino para llegar a un fin” “manera de conducir el pensamiento o las acciones para alcanzar un fin” “planeamiento general de la acción de acuerdo con un criterio determinado y teniendo en vista determinadas metas”

Para Gallo (2000) método es el “camino a seguir, mediante una serie de operaciones y reglas fijadas de antemano, de manera voluntaria y reflexiva, para alcanzar un cierto fin”.

En la resolución de problemas matemáticos, la utilización de un método es fundamental, en este apartado se describirán los más importantes.

### **2.8.1. El Método de George Polya**

George Polya nació el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría, y murió el 7 de septiembre de 1985 en Palo Alto, California, Estados Unidos. En su obra



titulada “Cómo plantear y resolver problemas” describe su método en cuatro pasos los cuales son:

- a) Comprender el problema.
- b) Concebir un plan
- c) Ejecución del plan.
- d) Visión retrospectiva.

#### a) Comprender el problema

La comprensión del problema es la base fundamental para poder aplicar el resto de los pasos. Si no se comprende el problema, no se puede continuar, entonces es necesario en primera instancia entenderlo para luego concebir un plan. En esta parte, es necesario identificar los datos, la incógnita o incógnitas, las condiciones del problema, el objetivo del problema, el tipo de información, etc. Se podrá contestar a las siguientes interrogantes:

¿Se entiende todo lo que dice? ¿Se puede reescribir el problema con otras palabras? ¿Se distingue cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Cuáles son las incógnitas? ¿A qué se quiere llegar? ¿Hay suficiente información? ¿Hay datos o información extraña?

El responder estas preguntas ayudará al estudiante a comprender en gran parte el problema planteado, de esta manera tendrá una perspectiva general del problema. Una de las grandes dificultades de los estudiantes es la no comprensión del problema, esto puede ser porque el problema está mal planteado, contiene terminología que el estudiante desconoce o que sus conocimientos previos son insuficientes.

Es por tanto, necesario tener conocimientos previos para resolver un problema. Así, si un problema se trata de interés simple, el estudiante previamente debe conocer qué es interés simple. Para entender el problema se debe tener

conocimiento lingüístico: conocimiento semántico. Hechos, datos, etc. Comprensión del “lenguaje específico” matemático, conocimiento esquemático, dominio de “herramientas”. Por ejemplo: cómo resolver ecuaciones, propiedades de los números reales, leyes lógicas, etc.

## b) Concebir un plan

En la concepción del plan, Polya sugiere dar respuesta a las siguientes interrogantes:

¿Se ha encontrado con un problema semejante?

¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

¿Conoce un problema relacionado con éste?

¿Conoce algún teorema, que le pueda ser útil?

Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Podría enunciar el problema de otra manera? ¿Podría Plantearlo en forma diferente nuevamente?

Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?

Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita?

¿Puede cambiar la incógnita o los datos o ambos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

### c) Ejecutar el plan

En esta etapa se debe: comprobar los pasos y procedimientos que se utilizan, estar seguro de los pasos seguidos y verificar que sean correctos, argumentar los procedimientos y algoritmos. Durante la ejecución del plan se aplican las diferentes estrategias heurísticas necesarias para resolver el problema.

### d) Mirar hacia atrás.

La última de las etapas del método de Polya es la visión retrospectiva o “mirar hacia atrás” consiste en revisar el problema desde el entendimiento del problema hasta la solución, en esta etapa se realiza las siguientes actividades:

- La verificación de los procedimientos y el uso correcto de las estrategias
- La comprobación de los resultados si concuerda con los datos iniciales y si satisface las condiciones.
- Determinar si el problema se puede resolver de otra manera.
- Analizar si el resultado se puede aplicar en otro problema.
- Se puede generalizar la solución.

La obra de Polya fue la base de muchos otros autores que han estudiado posteriormente, los métodos de resolución de problemas

## 2.8.2. El método de Miguel de Guzmán

Este método propuesto por Miguel de Guzmán en su obra “*para pensar mejor*” consta de cuatro pasos:

- a) Familiarizarse con el problema,
- b) Buscar estrategias,
- c) Llevar adelante la estrategia
- d) Revisa el proceso y sacar consecuencias de él.

a) Familiarizarse con el problema

- Trata de entender a fondo la situación.
- Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.
- Juega con la situación, enmárcala,
- Trata de determinar el aire del problema, piérdete el miedo.

b) Buscar estrategias

- Empieza por lo fácil (simplificar, particularizar).
- Experimenta y busca regularidades (experimentación, ensayo-error).
- Hazte un esquema, una figura, un diagrama (organización).
- Busca una forma alternativa (modificar el problema).
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada (codificación).
- Busca un problema semejante (analogía, semejanza).
- Estudia simetrías y casos límite (exploración).
- Inducción.
- Supongamos el problema resuelto (trabajar marcha atrás).
- Supongamos que no (contradicción).

c) Llevar adelante la estrategia

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior.
- Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.
- ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

d) Revisar el proceso y sacar consecuencias de él

- Examina a fondo el camino que has seguido.
- ¿Cómo has llegado a la solución? O bien,
- ¿por qué no llegaste?
- Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
- Mira si encuentras un camino más simple
- Mira hasta dónde llega el miedo
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

### **2.8.3. El método de Bransford y Stein**

J. D. Bransford y B. S. Stein proponen un nuevo modelo en su libro “Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear”. El método que exponen se resume en las letras de la palabra IDEAL

I = Identificación: es el punto inicial, conocer el problema, identificar datos, analizar el problema detenidamente y comprender cuál es el objetivo.

D = Definición: es aclarar el problema, si está confuso, reescribirlo de otra forma, es precisar el problema y eliminar información innecesaria, definir el problema con toda claridad, hacerlo específico.

E = Exploración: esta etapa consiste en explorar posibles vías de solución del problema. Qué estrategias se pueden utilizar, cuáles se pueden utilizar y cuáles no.

A = Actuación: es ejecutar el plan, aplicar las estrategias elegidas.

L = Logros alcanzados: consiste en verificar si se ha alcanzado el objetivo, si la o las estrategias utilizadas eran las correctas. Si funcionaron las estrategias.

El método proporciona una guía para desarrollar la capacidad para resolver problemas en la vida cotidiana, donde están como caso particular los problemas matemáticos.

#### **2.8.4. El trabajo de Alan Schoenfeld**

Schoenfeld publicó en su libro *Mathematical Problem Solving* en 1985, sus ideas acerca de las heurísticas de Polya, consideró que aparte de las estrategias de resolución, se deben considerar otros aspectos tales como:

- a) Los recursos: son los conocimientos matemáticos generales que se poseen tales como conceptos y algoritmos.
- b) Las heurísticas: es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que se conocen y en capacidad de utilizar.
- c) El control o metacognición: es la capacidad de utilizar lo que se sabe para lograr un objetivo.
- d) Sistema de creencias: son las creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas que pueden afectar de una forma favorable o desfavorablemente el proceso de resolución de problemas.

Estos elementos no son fases para resolver problemas, sino más bien, *factores* que contribuyen el proceso de resolución de problemas, Schoenfeld criticó las estrategias de Polya porque son generales y no todos los problemas necesitan la

utilización de todas las estrategias, cada problema es diferente y por consiguiente utiliza diferentes estrategias para su resolución.

## 2.9. La resolución de problemas en la Psicología

En el campo de la Psicología, se han hecho estudios referentes al proceso de resolución de problemas, puesto que es una actividad que involucra el pensamiento y procesos mentales. Entre éstas están las siguientes que se consideran las ideas más influyentes.

### **2.9.1. Los aportes de John Dewey en la resolución de problemas.**

John Dewey (1933) sugirió los siguientes pasos para la resolución de problemas en forma general:

- a) Reconocer el problema: la persona se da cuenta que hay un problema que debe resolver.
- b) Aclarar el problema: precisar qué resultado debe alcanzarse, qué se sabe o qué recursos hay para resolverlo.
- c) Plantear una hipótesis para resolver el problema: Establecer un curso de acción para resolverlo.
- d) Inferencia de la hipótesis: Uniendo la hipótesis y los hechos relevantes que le son conocidos, la persona infiere lo que se desprende de la hipótesis que él considera.
- e) Verificación de la hipótesis: las conclusiones de la hipótesis se verifican con hechos conocidos o con otros producidos por experimentación, para ver si se confirma o no la hipótesis.

Los asociacionistas entendían que en la resolución de problemas sólo intervenían los procesos mecánicos de las experiencias previas.

Los gestalistas explican que la comprensión de un problema se produce cuando la persona logra concebirlo como un todo y logra establecer las relaciones de las partes con el todo.

### **2.9.2. El modelo de Wallas para resolver problemas.**

Graham Wallas en su obra “The art of thought” presenta un modelo para resolver problemas con consiste en los siguientes pasos:

- a) Preparación: recolección de información e intentos preliminares de solución.
- b) Incubación: dejar el problema de lado para realizar otras actividades.
- c) Iluminación: en esta etapa aparece la clave para la solución (insight)
- d) Verificación: etapa donde se comprueba la solución del problema para asegurarse de su funcionamiento.

### **2.9.3. El Modelo de Mayer para resolver problemas.**

Richard E. Mayer (1991) en su obra “Pensamiento, resolución de problemas y cognición” desde el punto de vista del procesamiento de la información, plantea un modelo para resolver problemas en cuatro componentes:

- a) Traducción del problema: es la habilidad del sujeto para transformar las afirmaciones del enunciado del problema en una representación interna, ésta requiere de conocimiento lingüístico y semántico.
- b) Integración del problema: es la capacidad de integrar cada una de las afirmaciones en una representación coherente de la información este proceso, según Mayer, requiere de conocimiento esquemático, que hace



referencia a la habilidad de los sujetos para reconocer diferentes tipos de problemas, y clasificarlos en tipologías preestablecidas. En esta etapa se debe distinguir entre la información relevante y la irrelevante para la resolución del problema.

- c) Planificación de la solución y supervisión: es la habilidad del sujeto para generar un plan mediante el planteamiento de metas y submetas dentro del problema, y a la habilidad para supervisar o monitorizar los procedimientos. Mayer indica que el conocimiento necesario para la elaboración de planes es el conocimiento de estrategias que ayudan a resolver el problema.
- d) Ejecución de la solución: es la aplicación de las reglas matemáticas siguiendo el plan anteriormente elaborado, proceso que requiere de conocimiento procedimental, necesario para hacer efectivos los procedimientos que se han planificado en la fase anterior.

## 2.10. Planteamiento de problemas matemáticos

Según Stoyanova (1998) el planteamiento de problemas matemáticos es el “proceso por el cual, con base en situaciones concretas, se formulan problemas matemáticos significativos” citado en Penalva (2010). El planteamiento de problemas es la interpretación de situaciones matemáticas. En el proceso de resolución de un problema ocurre el planteamiento de nuevos problemas, éstos pueden ser antes, durante y después del mismo. El planteamiento de problemas puede clasificarse en tres etapas como sigue:

### 2.10.1. Planteamiento de presolución

En esta etapa, se generan problemas originales desde una situación presentada. Comienza cuando se presenta un problema nuevo sin conocimiento previo.

### **2.10.2. Planteamiento en solución:**

Se reformula un problema a partir de la resolución efectuada durante el proceso. Formulación de un problema similar o diferente en el contexto del problema en proceso de resolución, éste puede utilizarse como estrategia para resolver el problema base.

### **2.10.3. Planteamiento postsolución:**

Se modifican los objetivos o las condiciones de un problema ya resuelto para generar nuevos problemas que posteriormente pueden resolverse o no.

## **2.11. Estrategias de resolución de problemas**

Según el Diccionario de la Real Academia Española, el término “estrategia” en Matemática, es un proceso regulable o conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.

Por otro lado, el Diccionario General de la Lengua Española Vox, define el término como una “serie de acciones muy meditadas, encaminadas hacia un fin determinado”.

Una estrategia es “cualquier procedimiento que no es obligatorio y que está orientado a una meta. El rasgo de no obligatoriedad se incluye para distinguir la estrategia de los procedimientos en general. Los procedimientos a diferencia de las estrategias, deben representar el único camino para lograr una meta” (Siegler, 1989) Citado en Lacasa, Pilar y Herranz, Pilar (1994).

Para Lacasa, Pilar y Herranz, Pilar (1994) son “aquellas actividades organizadas que, orientadas hacia una meta, permiten seleccionar la información apropiada y tomar las decisiones más adecuadas para lograrla”.

Por otro lado Campistrous y Rizo (2000) explican que una estrategia es un “procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento “ad hoc” y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución”. Citado en Cruz, M. (2002).

### **2.11.1. Las estrategias de resolución de problemas en Matemática**

En el proceso de resolución de problemas, las estrategias juegan un papel fundamental, cada problema se puede resolver con distintas estrategias, algunos serán útiles y otras no, esto depende de la forma de razonar y de abordar del resolutor. Cabe mencionar que las estrategias no aseguran la consecución del objetivo del problema; es decir, el uso de las estrategias no garantizan la solución del problema, pero son una ayuda valiosa que aplicados en forma correcta, el problema puede ser resuelto.

### **2.11.2. Clasificación de las estrategias de resolución de problemas**

No existe un acuerdo entre los investigadores en relación a la clasificación de las estrategias de resolución de problemas. Sin embargo, algunos han planteado las siguientes que a continuación se presentan.

#### **a) Estrategias cognitivas**

Las estrategias cognitivas se refieren a las acciones o pasos que el estudiante debe realizar para solucionar el problema: por ejemplo: leer el problema,

entender y analizar el problema, planificar, organizar los datos, organizar la información, resolver el problema y verificar el resultado.

#### b) Estrategias metacognitivas

Una estrategia metacognitiva es un análisis consciente de las diferentes estrategias cognitivas que se pueden utilizar en la resolución de un problema. Por ejemplo: la autoinstrucción que consiste en decirse a sí mismo lo que se procede a realizar; el autocuestionamiento que consiste en preguntarse a sí mismo y la comprobación que consiste en la verificación del proceso.

Según Tárraga, R. (2008), “las estrategias metacognitivas difieren de las cognitivas en que enfatizan la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución del problema y el control de estrategias para la regulación y el monitoreo, estando a menudo asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de los procesos”.

#### c) Estrategias reflexivas e irreflexivas

Para Rizo C., C. y Campistrous, L. (1999), “una estrategia es irreflexiva cuando responde a un proceder prácticamente automatizado, sin que pase por un análisis previo de análisis u orientación en el problema. En estos casos se asocia la vía de solución a factores puramente externos. En el caso contrario, o sea, cuando su uso se requiere necesariamente un proceso de análisis previo que permite asociar la vía de solución a factores estructurales y no factores puramente externos, las hemos denominado estrategias irreflexivas”.

#### d) Estrategias generales y específicas

Las estrategias de resolución de problemas pueden ser generales o específicas. Las generales se utilizan en áreas diversas de cualquier contenido; las

estrategias específicas se utilizan sólo en áreas particulares o en ciertos tipos de problemas. Las estrategias generales son útiles cuando se trata de problemas nuevos para el resolutor y por ende la solución no es obvia.

## 2.12. Las estrategias de resolución de problemas matemáticos y su aplicación

En esta sección se presenta un conjunto de estrategias comunes y su aplicación en la resolución de problemas.

### 2.12.1. Demostración directa

Se basa en la implicación  $p \rightarrow q$ , se puede demostrar que si  $p$  es verdadero  $q$  también lo es.

$p$ : es la hipótesis (lo que se supone como verdadero)

$q$ : es la Tesis (lo que se va a demostrar)

Ejemplo:

Demostrar que si  $n$  es un entero impar, entonces  $n^2$  es un entero impar.

Demostración:

$p$ :  $n$  es impar. (Hipótesis)

$q$ :  $n^2$  es impar. (Tesis)

Se demuestra  $p \rightarrow q$ , se parte de que  $p$  es verdadero y se termina demostrando que  $q$  es verdadera.

Si  $n$  es impar entonces  $n = 2k + 1$ , donde  $k$  es un entero.

Se sigue que  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_t) + 1 = 2t + 1$

Por tanto como  $n^2$  es de la forma  $2t + 1$ , entonces  $n^2$  es impar.

### 2.12.2. Argumentar por contradicción o reducción al absurdo

Esta estrategia es fundamental en la demostración de problemas por demostrar, Consiste en suponer que la proposición que se desea demostrar es falsa, y a partir de esta suposición se utilizan propiedades y deducciones matemáticas y luego llegar a una contradicción o algo absurdo, lo cual implica que la proposición inicial es necesariamente verdadera. La ley lógica a aplicar es:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

Ejemplo: Demostrar, sin utilizar calculadora que:  $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$

Resolución:

Supóngase que la expresión es falsa, entonces  $6 - \sqrt{35} \geq \frac{1}{10}$  debe ser verdadera,

Sumando  $\sqrt{35}$  en ambos lados y restando  $\frac{1}{10}$ , se obtiene:  $6 - \frac{1}{10} \geq \sqrt{35}$

Multiplicando ambos lados por 10 y simplificando queda:  $59 \geq 10\sqrt{35}$

Elevando ambos lados al cuadrado, se tiene:  $3481 \geq 3500$ , lo cual es falso.

Por tanto se concluye que  $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$  es verdadera, y queda demostrado.

### 2.12.3. Buscar un patrón

En matemática, un patrón es una relación que existe entre distintas cantidades o formas geométricas que se toma como modelo o punto de referencia para deducir otros valores de la misma especie.

Ejemplo:

¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de 100 lados?

Resolución: dibujar el polígono a mano, trazar todas sus diagonales y luego contar, sería casi imposible.

En esta situación, se comienza con dibujar un cuadrado que tiene 2 diagonales, luego un pentágono que tiene 5 diagonales, luego un hexágono que tiene 10 diagonales y un heptágono que tiene 14.

La información se resume en la siguiente tabla:

No. de lados	Diagonales	Patrón
4	2	
5	5	2 + 3 = 5
6	9	5 + 4 = 9
7	14	9 + 5 = 14
8	?	

Si se cuenta la diferencia entre cada cantidad

y su siguiente se notará el siguiente patrón:

$$5 \text{ lados } 2 + 3 = 5 = \frac{5(5-3)}{2}$$

$$6 \text{ lados } 5 + 4 = 9 = \frac{6(6-3)}{2}$$

$$7 \text{ lados } 9 + 5 = 14 = \frac{7(7-3)}{2}$$

$$8 \text{ lados } 14 + 6 = 20 = \frac{8(8-3)}{2}$$

$$9 \text{ lados } 20 + 7 = 27 = \frac{9(9-3)}{2}$$

$$\cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot$$

$$n \text{ lados. } \dots \dots \dots \frac{n(n-3)}{2}$$

Por medio de inducción, el patrón generalizado es  $\frac{n(n-3)}{2}$ . Por lo tanto, un

polígono regular que tiene 100 lados tendrá

$$\frac{100(100-3)}{2} = 50(97) = 485 \text{ diagonales}$$

**2.12.4. Considerar casos extremos**

Esta estrategia consiste en mantener algunas variables del problema en forma constante mientras que otras varían a los extremos, la utilización de esta

estrategia puede proporcionar información importante que ayudará a resolver el problema.

Al utilizar esta estrategia se debe tener cuidado de no afectar la situación problemática real, de no alterar las variables fundamentales del problema y que dichos cambios no afectan a las otras variables.

Ejemplo:

El profesor de Matemática de Carlos ha realizado cinco exámenes este semestre, la ponderación es de **0** hasta **100** inclusive. Carlos tuvo un promedio de **90** puntos en las cinco pruebas. ¿Cuál fue la puntuación más baja posible?

Resolución.

Generalmente los estudiantes comienzan a resolver este tipo de problemas por la estrategia de Ensayo y error, intentando encontrar el puntaje más bajo posible. Sin embargo, este procedimiento no garantiza la solución del problema.

Considerando el caso extremo. Si Carlos tuvo un promedio general de **90** para las cinco pruebas, el total de sus resultados debe ser de  $5 \times 90 = 450$  puntos. Ahora, téngase en cuenta lo extremo (la nota más alta). La puntuación posible para cada una de las cuatro primeras pruebas, sería de **100** puntos cada una. Se trata de un total de **400**.

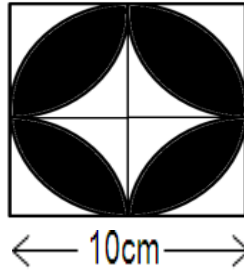
Por lo tanto, la menor puntuación posible en una de las pruebas de Carlos sería de **50** puntos, que es la diferencia entre **450** y **400**.

### **2.12.5. Descomponer el problema**

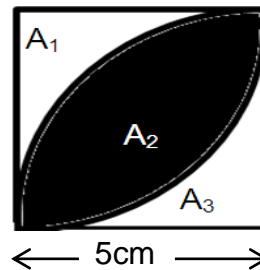
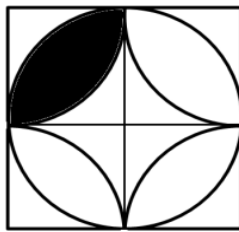
Esta estrategia consiste en separar el problema en subproblemas más simples de resolver y considerarlos en forma independiente, es decir, resolver el problema por partes. Con las soluciones de los subproblemas se puede llegar a obtener la solución general del problema original.



Ejemplo: calcular el área sombreada de la figura, si el lado del cuadrado más grande mide 10cm.



Resolución: para resolver el problema, se establecen submetas que pueden resolverse por partes, se divide un cuadrante del cuadrado en zonas que pueden llamarse  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ; como se muestra a continuación y recordando que el área de un círculo es  $\pi r^2$



Observando que  $A_1 = A_3 = 5^2 - \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 25 - \frac{25\pi}{4}$  y como  $A_1 + A_2 + A_3 = 25$ .

Entonces, despejando  $A_2$  se tiene:  $A_2 = 25 - 2(25 - 25\frac{\pi}{4}) = 25 - 50 + 50\frac{\pi}{4}$  que es equivalente a  $25\frac{\pi}{2} - 25 = 25(\frac{\pi}{2} - 1)$   $\text{cm}^2$ . Por tanto, la parte sombreada es 4

veces  $A_2$ , por lo tanto, el área total sombreada es  $4A_2 = 100(\frac{\pi}{2} - 1) \text{cm}^2 = (50\pi - 100) \text{cm}^2$  que es aproximadamente igual a 57.08 cm

### 2.12.6. Ensayo y error

La utilización de esta estrategia es muy común observar en estudiantes que poseen pocos conocimientos o experiencias en la resolución de problemas, sin embargo, es muy útil. Consiste en elegir algunos valores que satisfagan las condiciones del problema, se pueden seguir los siguientes pasos:

- Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- Verificar con este valor las condiciones indicadas por el problema.
- Probar si se ha alcanzado el objetivo del problema.

Ejemplo: Carlos y Josefina fueron de visita a una granja. Durante la visita vieron un corral con cerdos y gallinas. Carlos contó 18 animales entre gallinas y cerdos, Josefina afirma haber contado un total de 50 patas. ¿Cuántos cerdos y cuántas gallinas había en la granja?

Resolución: la siguiente tabla muestra los valores elegidos al azar que cumplan con las dos condiciones del problema: 18 animales y 50 patas:

CERDOS	PATAS DE CERDOS	GALLINAS	PATAS DE GALLINAS	TOTAL DE PATAS.
14	56	4	8	64
13	52	5	10	62
10	40	8	16	56
9	36	9	18	54
8	32	10	20	52
7	28	11	22	50

Esta última prueba cumple con las condiciones:

Solución: En la granja había 7 cerdos y 11 gallinas.

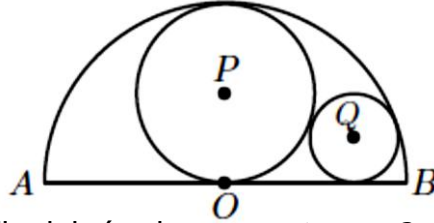
### 2.12.7. Elegir una notación adecuada

Una de las etapas fundamentales en la resolución de problemas verbales geométricos o algebraicos, es traducir el problema al lenguaje matemático utilizando símbolos adecuados.

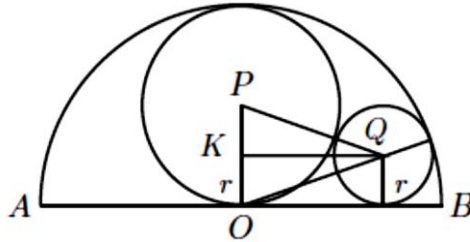
En primera instancia, todos los conceptos claves deben ser identificados y etiquetados y no permitir notaciones que redunden en el análisis del problema. Éstas deben eliminarse.

Ejemplo: El segmento  $\overline{AB}$  es el diámetro de un semicírculo con centro en  $O$ .

Un círculo con centro en  $P$  es tangente a  $\overline{AB}$  en  $O$  y también al semicírculo. Otro círculo con centro en  $Q$  es tangente a  $\overline{AB}$ , al semicírculo y al círculo de centro en  $P$ . Si  $|\overline{OB}| = 1$ , ¿cuál es la medida del radio del círculo con centro en  $Q$ ?



Resolución: sea  $r$  el radio del círculo con centro en  $Q$ ,  $K$  el punto medio de  $\overline{OP}$ .



Al aplicar el Teorema de Pitágoras a los triángulos  $PKQ$  Y  $OKQ$ , se tiene:

$$|\overline{PK}|^2 + |\overline{QK}|^2 = |\overline{PQ}|^2 \quad \text{y} \quad |\overline{OK}|^2 + |\overline{KQ}|^2 = |\overline{OQ}|^2, \text{ donde}$$

$$|\overline{OK}|^2 - |\overline{OQ}|^2 = |\overline{PK}|^2 - |\overline{PQ}|^2, \text{ como } |\overline{OK}| = r, |\overline{OQ}| = 1 - r, |\overline{PK}| = \frac{1}{2} - r$$

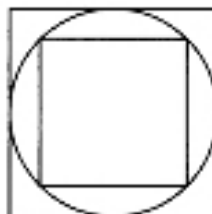
$$\text{y } |\overline{PQ}| = \frac{1}{2} + r, \text{ se tiene que: } r^2 - (1 - r)^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + r\right)^2 \text{ de donde se}$$

$$\text{sigue que: } r = \frac{1}{4}$$

### 2.12.8. Utilizar simetría

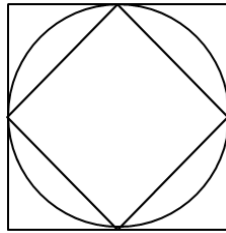
Un objeto es simétrico si hay uno o más "acciones" no triviales que deja el objeto sin cambios.

Ejemplo: Un cuadrado está inscrito en un círculo que se encuentra inscrito en un cuadrado. Encuentra la relación entre las áreas de los dos cuadrados.



Resolución: este problema puede resolverse algebraicamente, sin embargo, la simetría que presenta el problema, permite resolverse de manera más sencilla.

Si se hace girar el cuadrado más pequeño noventa grados en cualquier dirección de las manecillas del reloj de tal manera que sus vértices sean tangentes a círculo, se tiene la siguiente figura.



Con esta nueva figura se puede notar claramente que el área del cuadrado más grande es el doble que el área del cuadrado más pequeño, el problema queda resuelto.

### 2.12.9. Formular un problema equivalente.

En algunos problemas, el recopilar datos, explorar, comprender, relacionar, hacer conjeturas y analizar, no funciona. En estos casos, la estrategia es tratar de reformular el problema en uno equivalente pero más sencillo. La imaginación y la creatividad son los recursos básicos. Algunas técnicas de reformulación del problema implican la manipulación algebraica y trigonométrica, sustitución o cambio de variable, y la reinterpretación del lenguaje del tema.

Ejemplo:

Encuentre todas las soluciones de la ecuación:  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Resolución:

Dividir toda la ecuación entre  $x^2$ :  $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

Agrupando: 
$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

Completar al cuadrado, sumando y restando 2 en el mismo lado:

$$\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Sustituyendo  $y = x + \frac{1}{x}$   $y^2 + y - 1 = 0$

Cuyas raíces son:  $y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Luego:  $x + \frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $x + \frac{1}{x} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) i \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) i$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right) i \quad x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right) i$$

### 2.12.10. Generalizar

Puede parecer paradójico, pero a veces cuando un problema de la vida cotidiana se generaliza, se hace más manejable y comprensible. Este hecho de la vida es muy apreciado por los matemáticos, de hecho, la abstracción y la generalización son las características básicas de la matemática moderna. Un ajuste más general proporciona una perspectiva más amplia, despoja de funciones no esenciales, y proporciona todo un nuevo arsenal de técnicas.

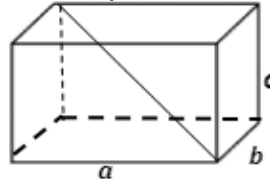
Un intento de generalizar el problema, ayuda a veces porque obliga al resolutor a hacer una descripción de las propiedades críticas y, por tanto alguna información implícita se hace explícita. En Matemática, generalizar es un procedimiento muy potente y que a menudo conduce a nuevos descubrimientos.

Muchas ramas de la Matemática nacieron por la generalización de las anteriores. A primera vista parece ser doloroso aprender una nueva rama de la Matemática, pero si se logra hacerlo se habrá logrado el resultado.

Para Polya (1965), “La generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado”.

Ejemplo:

La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja rectangular es 140cm. y la distancia de una esquina de la caja a la esquina más lejana es 21 cm. ¿cuál es el área total de la caja?



Resolución:

Realizar un dibujo

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  las dimensiones de la caja,  $S$  la suma de las aristas,  $d$  la distancia de una esquina a la más lejana y  $A$ , el área de la caja. Se tiene que:

$$S = 4a + 4b + 4c \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad A = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\frac{S}{4} = a + b + c \quad y \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{S}{4}\right)^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = d^2 + A$$

$$\left(\frac{S}{4}\right)^2 = d^2 + A$$

$$A = \left(\frac{S}{4}\right)^2 - d^2$$

Con esta última ecuación, el problema ha sido generalizado, se puede determinar el área total de un paralelepípedo conociendo la suma de sus aristas y una diagonal.

Sustituyendo los datos para el problema particular, se tiene:

$$A = \left(\frac{S}{4}\right)^2 - d^2 = \left(\frac{140}{4}\right)^2 - (21)^2 = 784 \text{ cm}^2.$$

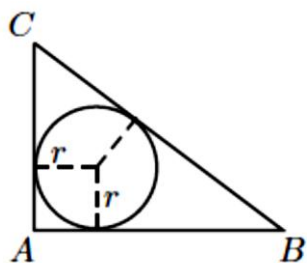
### 2.12.11. Hacer dibujos o diagramas

La utilización de dibujos, figuras, cuadros o esquemas ayuda a visualizar el problema, identificar los datos y las incógnitas, muestra algunas veces las relaciones entre las cantidades; por lo que, siempre que sea posible se deben utilizar no únicamente en problemas de tipo geométrico, sino también en los problemas por resolver. Si los problemas son geométricos, las figuras deben trazarse de manera adecuada y no deben sugerir alguna relación en particular.

Ejemplo:

¿Cuál es la medida del radio del círculo inscrito en un triángulo de lados 3, 4 y 5?

Resolución: en este problema, se debe tomar en cuenta previamente que el triángulo en cuestión es rectángulo, puesto que satisface las medidas de los lados dados, satisfacen el Teorema de Pitágoras. Haciendo un dibujo del problema y asignando una notación adecuada, se tiene:

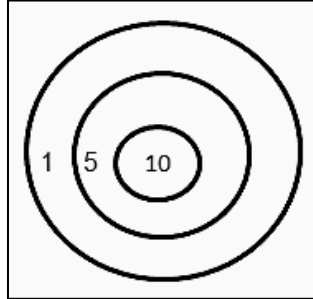


El segmento  $\overline{BC}$  es la hipotenusa cuya longitud es igual a la suma de las longitudes  $|\overline{AB}| - r$  y  $|\overline{AC}| - r$ , donde  $r$  es el radio del círculo inscrito. Entonces  $|\overline{AB}| - r + |\overline{AC}| - r = 7 - 2r = 5$ , de donde se obtiene que  $r = 1$

### 2.12.12. Hacer una lista o tabla

Una lista que muestra la información del problema, puede ayudar mucho en la resolución de un problema determinado y mostrar la solución, esta lista debe llevar un orden y si es posible organizar la información en una tabla de datos.

Ejemplo: Una persona lanza tres dardos uno por uno a una “diana” (tablero de dardos) y cada dardo puede hacer 1, 5 o 10 puntos como se muestra en la figura. La puntuación total es la suma de las puntuaciones de los tres dardos. ¿Cuántas posibilidades de puntuaciones diferentes puede anotar una persona al lanzar tres dardos?



Resolución: Haciendo una lista de todas las posibilidades y colocando los datos en una tabla en forma ordenada, se tiene:

1 punto	5 puntos	10 puntos	Total
3	0	0	3
2	1	0	7
2	0	1	12
1	2	0	11
1	1	1	16
1	0	2	21
0	3	0	15
0	2	1	20
0	1	2	25
0	0	3	30

Observando la tabla anterior se puede ver que al lanzar tres dardos se pueden obtener 10 puntuaciones diferentes.

### 2.12.13. Plantear ecuaciones

La utilización de ecuaciones para resolver problemas, es fundamental, la dificultad que encuentran los alumnos está en transformar el problema al



lenguaje algebraico. En este caso, es necesario que el resolutor tenga conocimientos algebraicos y de transformación de datos reales al lenguaje simbólico. Un mismo problema puede resolverse por distintos tipos de ecuaciones, depende de la habilidad y del conocimiento previo que tenga el resolutor.

Ejemplo:

Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

Resolución:

Denótese por  $x$  el lado del primer cuadrado. Al elevarlo al cuadrado y sumarle 36 se obtiene el número de hombres que hay en la tropa. A este nuevo número se le asigna la letra  $y = x^2 + 36$ . Cuando se le agrega una fila y una columna, el nuevo cuadrado se vuelve  $x + 1$ , pero en este caso le hacen falta 75 hombres para completar el cuadrado. Entonces  $y = (x + 1)^2 - 75$ . De estas dos igualdades se obtiene la ecuación:

$$x^2 + 36 = (x + 1)^2 - 75$$

Cuya solución es  $x = 55$ , que es la medida del lado del cuadrado, pero se desea conocer  $y$ . Sustituyendo  $x = 55$  en  $y = x^2 + 36$  se obtiene:

$$(55)^2 + 36 = 3061$$

Por lo tanto,

En la tropa hay 3,061 hombres.

### 2.12.14. Trabajar hacia atrás

Esta estrategia es muy antigua. Los griegos la utilizaban en problemas de construcción. Se supone un objeto ya construido, y luego se realizaban operaciones hacia atrás comenzando con los últimos datos.

Ejemplo: En un club, la mitad son mujeres, de ellas la cuarta parte son rubias y de estas últimas la mitad tiene los ojos verdes; si las rubias de ojos verdes son cuatro, ¿cuántos integrantes tiene el club?

Resolución:

El club tiene un total de personas que se desconoce: la mitad son mujeres. La mitad de las mujeres son rubias. La mitad de las rubias tienen ojos verdes que son cuatro.

Volviendo hacia atrás: Rubias de ojos verdes = 4, como esta parte es la mitad de las rubias, entonces el total de rubias es  $2 \times 4 = 8$ , como esta parte es la mitad de las mujeres, entonces, el total de mujeres es  $2 \times 8 = 16$ , como esta parte es la mitad de todos los integrantes del club. Entonces, El total de integrantes del club es  $2 \times 16 = 32$  personas.

### 2.12.15. Usar fórmulas

Algunos problemas pueden resolverse utilizando fórmulas conocidas, pueden ser problemas geométricos, problemas de aplicación de la Física o Química. En estos casos, conocer la fórmula o ecuación predeterminada ayudará a resolver el problema.

Por ejemplo: Carlos y José son vendedores que viven en diferentes ciudades, pero por razones de trabajo deben encontrarse en una ciudad que está entre las dos primeras; las tres ciudades se localizan en una misma recta. La distancia entre las dos ciudades de donde parten en automóvil es de 640 Km. Si Carlos viaja a 70 Km/h, y José a 90 Km/h ¿a qué distancia de donde parte Carlos se encuentra la ciudad en la que deben reunirse y en cuántas horas llegarán, si parten al mismo tiempo?

Resolución:

Para resolver este problema se necesita utilizar la fórmula de movimiento rectilíneo uniforme  $d = vt$ , las incógnitas son la distancia que debe recorrer cada uno de los vendedores y el tiempo que les toma recorrer dicha distancia.

Fórmula:  $d = vt$  donde  $d = 640\text{Km}$ , Incógnitas:  $t$  y  $d$ . Distancias:  $d_c = 70t$ ,  $d_j = 90t$ , puesto que empiezan al mismo tiempo, se tardarán el mismo tiempo al encontrarse. Por las condiciones del problema:  $70t + 90t = 640$

Resolviendo:

$$160t = 640. \quad \text{Por lo tanto } t = 4$$

El tiempo que les lleva desplazarse a los vendedores hasta el lugar de encuentro es de 4 horas. Como Carlos viajó a 70 Km./h, entonces recorrió una distancia  $d = vt = (70\text{Km/h})(4\text{h}) = 280\text{Km}$  y José recorrió  $d = vt = (90\text{Km/h})(4\text{h}) = 360\text{Km}$ . Por tanto, la ciudad se encuentra a 280Km desde donde parte Carlos. Y el problema queda resuelto.

### 2.12.16. Usar una computadora

La tecnología, en la actualidad, es una de las herramientas fundamentales en la resolución de problemas, la rapidez con que realiza los cálculos es sorprendente. Problemas que llevarían años de cálculo, una computadora lo puede realizar en pocas horas. Actualmente existen una variedad de programas que realizan operaciones simples y complejas de la matemática, dichos programas realizan

modelos y simulaciones geométricas y de programación. La computadora por lo tanto, es una herramienta fundamental para todo estudiante o profesional de la Matemática y puede utilizarse para resolver problemas desde Aritmética, Algebra, Geometría, Cálculo y otras ramas de la Matemática superior. Los programas más conocidos son: Scientific Notebook, Mathematica, Derive, Cabri, Geogebra, entre otros.

### 2.12.17. Utilizar las propiedades de los números

El conocimiento de las propiedades de los números y de las operaciones permite resolver problemas de manera sencilla, si se aplican correctamente y con creatividad:

Ejemplo: ¿Cuál es la suma de los dígitos del número  $5^{2004} \times 2^{2000}$ ?

Resolución:  $5^{2004} \times 2^{2000} = 5^4 \times 5^{2000} \times 2^{2000} = 5^4(10)^{2000} = 625 \times 10^{2000}$ ,  
 el producto de esta última expresión es 625 seguido de 2000 ceros.  
 Por lo tanto, la suma de los dígitos es  $6 + 2 + 5 = 13$  dígitos.

### 2.13. Factores que influyen en el proceso de la resolución de problemas

En la resolución de problemas matemáticos, existe una serie de factores que influyen de manera positiva o negativa el proceso, estos factores pueden ser de tipo cognitivo o afectivo.

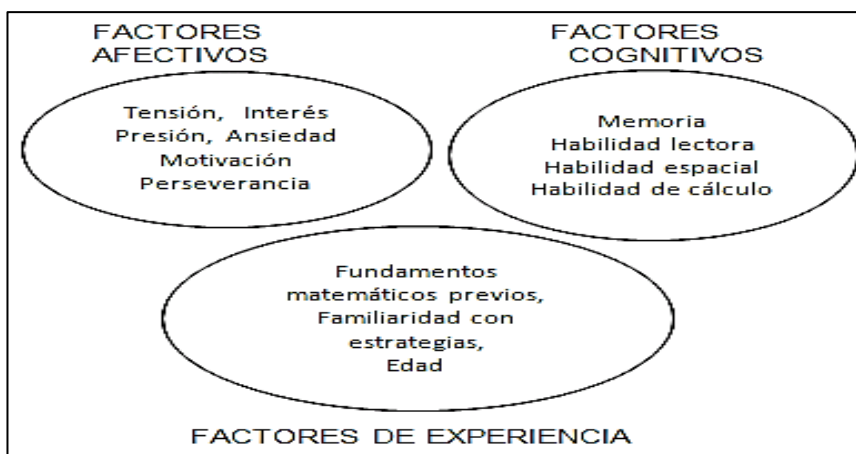
Según Schoenfeld (1985) las estrategias planteadas por Polya son insuficientes para resolver problemas, pues considera que el proceso de resolución de problemas interviene otros factores de carácter emocional, afectivo, psicológico y sociocultural. El autor de *Mathematical Problem Solving* considera que son cuatro los aspectos que intervienen en la resolución de problemas: los recursos

(conocimientos previos), las heurísticas (estrategias cognitivas), el control (estrategias metacognitivas) y el sistema de creencias.

Los recursos son los conocimientos matemáticos que el individuo posee, las estrategias heurísticas son las técnicas, reglas o planteamientos generales que conducen a la solución del problema, el control es la manera de cómo el individuo trata y utiliza la información que posee en el cual interviene conductas tales como planificar, seleccionar metas y submetas y la revisión constante del proceso. Por último, los sistemas de creencias que consisten en una serie de ideas o percepciones que los estudiantes poseen acerca de la matemática.

Charles y Lester (1982) Citado en Casajús L., A. (2005) señalan tres conjuntos de factores que interaccionan en la resolución de problemas los cuales se clasifican en: factores de experiencia, factores afectivos y factores cognitivos.

La siguiente figura muestra los elementos de cada factor.



*Factores influyentes en los procesos de resolución de problemas según Charles y Lester. Citado en Casajús Lacosta, Ángel Ma. (2005)*

### 2.13.1. Las creencias en la resolución de problemas

Según Vila, A. y Callejo, L. (2006) las creencias son “ideas del alumnado asociadas a actividades y procesos matemáticos (ejercicios, problemas, demostraciones y resolución de problema) y a la forma de proceder en el quehacer matemático”. Algunas de estas creencias son, por ejemplo:

- a) La Matemática es de carácter abstracto, no se relacionan con la vida cotidiana o que los conceptos no se aplican en la resolución de problemas.
- b) Los problemas matemáticos deben ser resueltos en menos de diez minutos, de lo contrario no tienen solución.
- c) Sólo genios o superdotados son capaces de descubrir o crear matemática.

Éstas y otras creencias condicionan el proceso de resolución de problemas matemáticos.

### **2.13.2. El papel de la inteligencia en la resolución de problemas**

El grado o nivel de inteligencia es un factor fundamental en el proceso de resolución de problemas como lo exponen diversos estudios:

“los sujetos con alta capacidad intelectual resuelven mejor los problemas que los sujetos con baja capacidad intelectual, bien porque alcanzan la solución más directamente (por ejemplo, Swanson, 1992; Geary & Brown, 1991; Gorodetsky & Klavir, 2003) Geary & Brown, 1991; Gorodetsky & Klavir, 2003) y más a menudo (Davidson & Sternberg, 1984; Davidson, 1986, 1995, Gorodetsky & Klavir, 2003), porque escogen espontáneamente la información relevante y la aplican (Davidson & Sternberg, 1984; Davidson, 1986, 1995), porque dedican más tiempo para planificar el proceso a seguir (Sternberg, 1990a)”  
Citado en Doménech, M. (2004).

De los diversos estudios de los autores anteriores concluyen que los estudiantes con alta capacidad intelectual, tienden a usar estrategias más eficientemente, aprenden nuevas estrategias con mayor facilidad y las aplican rápidamente; asimismo son mejores en la verbalización de sus conocimientos.

### **2.13.3. Conocimientos previos y experiencia previa**

De acuerdo a la enseñanza con enfoque por competencias y la teoría del aprendizaje constructivista, los conocimientos previos y la experiencia previa que tiene un estudiante son fundamentales para la construcción de nuevos conocimientos. En el proceso de resolución de problemas es esencial, puesto que las puede aplicar como herramientas y desarrollar estrategias.

Un problema de aplicación de “Interés simple” será más difícil para alguien que desconozca el concepto que para quien ya haya resuelto ejercicios de cálculo de Interés simple. Una de las estrategias de resolución de problemas es, precisamente la de “resolver un problema similar” que ya se haya resuelto con anterioridad. Por lo tanto. Los conocimientos previos son fundamentales en la resolución de problemas matemáticos, estos conocimientos pueden ser desde una simple operación de suma hasta el desarrollo de operaciones complejas algebraicas o de cálculo.

Los siguientes son algunos temas que se pueden tener como conocimientos previos:

- a) Teoremas, Proporcionalidad.
- b) Leyes y propiedades de los números.
- c) Números reales y Geometría.
- d) Ecuaciones y Patrones numéricos.

### **2.13.4. Metacognición en la resolución de problemas**

La metacognición es un tema complejo que ha sido objeto de estudio en las últimas décadas, pero ¿qué es metacognición?

Para Antonijevick y Chadwick (1981/1982), la metacognición es el grado de conciencia que tenemos acerca de nuestras propias actividades mentales, es decir, de nuestro propio pensamiento y aprendizaje. Citado en Gonzáles, F. (1996)

En educación, “la metacognición consiste en que el individuo conozca su propio proceso de aprendizaje, la programación consciente de estrategias de aprendizaje, de memoria, de solución de problemas y toma de decisiones y, en definitiva, de autorregulación; y así poder transferir esos contenidos a otras situaciones o actuaciones similares.” Jiménez Rodríguez, V. (2004).

En la Resolución de problemas matemáticos, la metacognición juega un papel trascendental, poseer los conceptos, conocer los métodos y las estrategias no bastan para resolver problemas, además de estos, el monitoreo del proceso cognitivo es una etapa fundamental en el proceso, la utilización correcta de la información y en el momento apropiado.

#### **2.13.5. La ansiedad**

La ansiedad es el estado de ánimo de un individuo que se manifiesta como nerviosismo, inquietud, tensión, preocupación, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental. La ansiedad genera bloqueos mentales en los estudiantes.

#### **2.13.6. Ansiedad matemática**

Richardson y Suinn (1972) definen la ansiedad matemática como: “El sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones, tanto cotidianas como académicas” (p. 551). Citado en Cano, F. (2007).



En la resolución de problemas, la ansiedad se presenta cuando el estudiante no comprende el problema o cuando no consigue la estrategia para resolverla.

### **2.13.7. Habilidad en el cálculo mental**

El cálculo mental ayuda a agilizar el proceso y resolver un problema sin calculadora o cuando se está compitiendo en olimpiadas de Matemática. Existen técnicas para realizar cálculos rápidos con algunas cantidades, como por ejemplo los criterios de divisibilidad, productos por potencias de base 10, producto por 11, entre otras.

### **2.13.8. La memoria**

La memoria es importante, si no se recuerdan los procesos no se podrá avanzar a la solución. En el aprendizaje de la Matemática es necesario memorizar símbolos, teoremas, fórmulas geométricas, fórmulas de la Física, leyes y reglas de la Matemática. Todos estos conocimientos se deben tener presentes al resolver problemas. Sin embargo, no se privilegia el uso de la memoria, lo más importante es el razonamiento lógico.

### **2.13.9. Motivación**

El deseo e interés por resolver el problema. Para resolver un problema, se debe tener la disponibilidad para resolverlo, el deseo de rechazo y el desinterés por resolverlo, bloquea al estudiante en el proceso y crea una barrera mental en el momento de resolver el problema.

### **2.13.10. La concentración en el proceso**

La concentración y la eliminación de ruidos pueden coadyuvar el proceso de resolución del problema; consiste en enfocar toda la atención de la mente sobre

un objetivo o tarea que se esté realizando en ese instante, sin tomar en cuenta ningún tipo de interferencia o distracción.

### **2.13.11. Creatividad**

Un elemento esencial en la resolución de problemas es la creatividad, en los ejercicios no se necesita creatividad puesto que es la práctica mecánica de operaciones, pero en la resolución de problemas la creatividad juega un papel importante puesto que éstos son situaciones en las cuales se deben utilizar estrategias y saber utilizarlas.

### **2.13.12. Gusto por los retos**

Algunos problemas matemáticos no son de aplicaciones de la vida diaria, sino simplemente un reto para la inteligencia, por tanto, para resolverlos se debe poseer ese gusto por retar la propia inteligencia.

## **2.14. La enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas**

Según Halmos, "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones." Citado en Nieto (2004).

Evidentemente, el fin último de la Matemática es resolver problemas, aunque muchos profesores de Matemática aún no tengan clara esta idea, por el contrario, consideran aún la Matemática como un conjunto de reglas que los estudiantes tienen que aprender de manera obligatoria para aprobar la asignatura y pasar al siguiente grado inmediato. Por otro lado, la mayoría de estudiantes se preguntan a menudo acerca de la utilidad de la Matemática, en este contexto se puede contestar a esta interrogante.

Nieto (2004) afirma que “todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad” y es que la resolución de problemas no sólo se aplica en el campo de la matemática, sino en todos los campos del saber humano.

En Guatemala, uno de los estándares educativos del Currículo Nacional Base – CNB- del Ciclo Diversificado en Guatemala es la Resolución de problemas, y refiere que “La finalidad de la subárea [matemática] es el de desarrollar en los educandos sus habilidades matemáticas, para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en una variedad de contextos” y es que esta materia, aunque no la única, es la ideal para desarrollar las habilidades en cuánto a razonamiento y llevar el aprendizaje a distintos niveles, desde la memoria hasta la metacognición

#### **2.14.1. Objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas**

Entre los objetivos de la enseñanza de resolución de problemas cabe destacar los siguientes:

- a) Manipular los objetos matemáticos.
- b) Activar la capacidad mental.
- c) Ejercitar la creatividad.
- d) Reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.
- e) Hacer transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- f) Adquirir confianza en sí mismo.
- g) Divertirse con la propia actividad mental.
- h) Prepararse para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- i) Prepararse para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

## 2.15. La evaluación de la resolución de problemas.

En el proceso de la enseñanza de la matemática, se incluyen dentro de los ejercicios asignados a los estudiantes, situaciones prácticas de aplicación de los temas de la unidad y algunos problemas. Sin embargo, no se enseña a resolver dichos problemas y por consiguiente la evaluación de los mismos queda en el olvido y se pasa a la siguiente unidad sin darle la importancia a los problemas matemáticos.

La evaluación de la resolución de problemas matemáticos está en función de los métodos, las estrategias que el estudiante aplica y la solución. Por lo tanto, el profesor debe diseñar los instrumentos necesarios para evaluar. En la mayoría de las ocasiones, el profesor sólo le interesa la solución del problema y no el proceso de resolución. Sin embargo, para que el estudiante adquiera habilidad en la resolución de problemas, se le deben enseñar los métodos y las estrategias de resolución y evaluar dichas estrategias y los procesos que conduce a la solución.

### **2.15.1. Algunos instrumentos para la evaluación de la resolución de problemas**

Para evaluar la resolución de problemas, se debe tener muy claros los objetivos, ¿qué aspectos se evalúa? Por lo general, los docentes únicamente evalúan la solución correcta del problema y dejan a un lado el proceso de resolución que es la parte esencial del proceso. En la evaluación de la resolución de problemas se puede evaluar aspectos cognitivos o metacognitivos, cabe mencionar que la

evaluación de la parte metacognitiva es un tanto compleja dado que son aspectos de control y de regulación sobre los aspectos cognitivos.

a) Lista de cotejo

La lista de cotejo presenta una serie de aspectos o indicadores que el docente desea valorar durante el proceso de resolución marcando con una X la ausencia o presencia del mismo.

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Instrucciones: coloque una X en la casilla “sí” si el aspecto se pudo observar o en la casilla “no” en caso contrario.

No.	Aspectos	sí	no
1	Lee el problema		
2	Reformula el problema.		
3	Identifica datos conocidos y desconocidos		
4	Hace un dibujo, cuadro o diagrama.		
5	Aplica Ensayo y error.		
6	Realiza operaciones correctamente.		
7	Utiliza fórmulas,		
8	Plantea ecuaciones.		
9	Resuelve ecuaciones		
10	Realiza la comprobación		
11	Escribe la solución en forma clara		

b) Escala de valoración

El siguiente instrumento es una escala de valoración para evaluar el proceso de resolución de un problema matemático por medio de indicadores asignándole un valor a cada indicador. En este caso, se evalúa el proceso por bloques o pasos de un método, cada bloque o pasos del método contiene un conjunto de procedimientos que el estudiante debe tener en su trabajo.

NO	INDICADOR	PUNTOS			
1	ANÁLISIS DEL PROBLEMA (Identificación de datos, variables y método a utilizar)	20	10	6	4
2	APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS (Diagramas, dibujos, fórmulas )	20	10	6	4
3	DESARROLLO/PROCEDIMIENTO(resuelva las operaciones correctamente)	20	10	6	4
4	ANÁLISIS DE RESULTADOS (Razonamiento matemático) (Interpretación matemática) (Comprobación de la respuesta)	20	10	6	4
5	CONCLUSIÓN (Conceptos matemáticos) (Interpretación física) (Presentación de la solución)	20	10	6	4
	TOTAL				

Se pueden diseñar distintos instrumentos de evaluación del proceso de resolución de problemas atendiendo a aspectos como los métodos de resolución, el uso de estrategias, las actitudes y otros factores que influyen en el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

Los procesos que se evalúan son, por lo general, los cognitivos que son los que dan un resultado inmediato del aprendizaje del estudiante.

## **CAPÍTULO III**

### **PRESENTACIÓN DE RESULTADOS.**

A continuación se presentan los resultados de esta investigación, la población total es de 385 estudiantes de la cual se extrajo una muestra de 192 estudiantes, lo que equivale al 50% de la población, entre Sexto Magisterio Primaria y Sexto Magisterio Preprimaria. Se entrevistaron y evaluaron a seis profesores que imparten Matemática en los grados mencionados anteriormente, dos profesores no participaron en esta investigación con lo que hace un total de 8 profesores.

Para esta presentación se utilizan tablas, gráficas circulares y gráficas de barras mostrando los porcentajes de utilización de las estrategias, los resultados de la evaluación y los factores que influyen en el proceso de resolución de problemas. Cabe mencionar que debido a las preguntas abiertas, los porcentajes no suman el 100%, puesto que algunos docentes o estudiantes dieron más de una respuesta en cada pregunta. Además, los instrumentos fueron modificados, corregidos y fueron seleccionados únicamente las preguntas que se relacionan con las tres variables en estudio.

Primero se presentan los resultados de la variable: estrategias de resolución de problemas obtenidos de las entrevistas, encuestas y evaluación objetiva aplicada a docente y estudiantes. Las estrategias bajo estudio son: Ensayo y error, Descomponer el problema, Hacer dibujos o diagramas, Hacer una lista o tabla, Utilizar las propiedades y leyes de los números reales, Buscar patrones, Utilizar variables, Usar simetría, Fórmulas o ecuaciones y Trabajo hacia atrás. Cabe mencionar que los problemas evaluados, fueron seleccionados de acuerdo con las posibles estrategias que los estudiantes utilizarían y los contenidos son

Aritmética, Álgebra elemental y Geometría; los tres temas corresponden los contenidos del CNB del Ciclo Básico.

Luego se presentan los resultados de la variable: Aprendizaje de la resolución de problemas, obtenidos de la evaluación objetiva aplicada a docentes y estudiantes, finalmente, los resultados de la variable: factores que influyen en el proceso de resolución de problemas obtenidos de la encuesta a estudiantes. Para la encuesta se utilizó un cuestionario tipo Likert cuya escala ordinal es: mucho, bastante, poco y nada. Esta escala mide la tendencia y la intensidad de los estudiantes a favor o en contra de las preguntas planteadas. Por ser un instrumento cualitativo, no se le aplicó ningún valor numérico.

### 3.1. Estrategias de resolución de problemas.

Tabla No. 1  
Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes y estudiantes del Instituto Normal Centro  
América, J.V. Mayo de 2012

<b>Definición de Estrategia de resolución de problemas.</b>			
Docentes		Estudiantes	
Pasos o formas para resolver un problema	50%	Formas, métodos, ideas o maneras de resolver problemas fácil y rápidamente	55%
Conjunto de procedimientos	33%	Herramientas para resolver problemas	13%
Técnicas o modelos que facilitan la resolución de un problema.	17%	Pasos, procedimientos o técnicas para resolver un problema	10%
Otros	0%	Otros	9%
En blanco	0%	En blanco	13%

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a profesores y Encuesta a estudiantes.

La Tabla No. 1 muestra que el 50% de los docentes afirmó que las estrategias son pasos o formas para resolver un problema, el 33% indicó que las estrategias son un conjunto de procedimientos y el 17% indicó que las estrategias son técnicas o modelos que facilitan la resolución de problemas. La



mayoría de las estudiantes(55%) consideran que las estrategias son formas, métodos, ideas o maneras de resolver problemas fácil y rápidamente, el 13% considera que son herramientas para resolver problemas; el 5% considera que son pasos o procedimientos, el 5% considera que son técnicas cortas para resolver problemas, otros 9%. El 13% de las estudiantes no respondieron la pregunta planteada.

Tabla No. 2  
Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
América JV, Mayo de 2012

<b>Conocimiento sobre las distintas estrategias que se utilizan en la Resolución de problemas</b>	
Docentes	Estudiantes
<p>Los docentes indicaron que conocen las estrategias siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender o comprender el problema</li> <li>• Analizar</li> <li>• Interpretar</li> <li>• Traducir al lenguaje matemático</li> <li>• Plantear el problema</li> <li>• Realizar cálculos</li> <li>• Ejecutar</li> <li>• Plantear una ecuación</li> <li>• Escribir la solución</li> <li>• Revisar o verificar el proceso.</li> </ul>	<p>En esta pregunta, los estudiantes consideran las siguientes como estrategias:</p> <p>Operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) 16%,  Regla de tres 5%  Lógica o mental 5%  Extraer datos 2%  Otros 10%  En blanco 64%</p>

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes y estudiantes.

En la Tabla No. 2 se pueden observar las estrategias que, según los docentes utilizan. Sin embargo, plantear una ecuación es la única estrategia que indicaron dentro de la lista de este estudio, dos docentes omitieron esta pregunta. Por otro lado, los estudiantes mencionaron únicamente la estrategia extraer datos y razonamiento lógico o mental.

Las operaciones básicas no constituyen estrategias. Cabe resaltar que la mayoría de los estudiantes (64%) desconoce las estrategias de resolución de problemas.

Se puede decir que la mayoría de docentes y estudiantes entrevistados no mencionaron las estrategias de resolución de problemas bajo estudio.

Tabla No. 3  
Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes y estudiantes del Instituto Normal Centro  
América JV, Mayo de 2012

<b>Conocimiento de los métodos para resolver problemas.</b>	
Docentes	Estudiantes
<p>En esta pregunta, la mayoría de los docentes contestó que utilizan los métodos inductivo, deductivo, el análisis y la síntesis; únicamente un docente agregó que utiliza el método gráfico y ecuaciones. Ningún docente mencionó métodos específicos tales como el método de George Polya, el método de Mason Burton y Stacey o el método de Miguel de Guzmán. Además, llama la atención de que uno de los 6 docentes no contestó a la pregunta.</p>	<p>Los estudiantes indicaron que para resolver un problema utilizarían pasos tales como: leer el problema, analizar, pensar o razonar; ordenar datos, plantear, determinar la operación que se utilizará y verificar el proceso, entre otros. Cabe destacar que el 7% de los estudiantes no contestaron a esta pregunta. En esta pregunta, ninguno indicó que utilizaría estrategias de resolución de problemas y nadie mencionó los métodos de Polya, Mason Burton y Stacey o el método de Miguel de Guzmán.</p>

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes y estudiantes.

De acuerdo a la Tabla No. 3 la mayoría, docentes y estudiantes desconocen métodos específicos para resolver problemas matemáticos.

Tabla No 4  
Estrategias de resolución de problemas  
.Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012

<b>Enseñanza de problemas y de estrategias de resolución a estudiantes</b>		
Si	80	42%
No	49	26%
Algunas veces	25	13%
No recuerdo	8	4%
En blanco	30	16%
Total	192	100%

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a estudiantes.

En la Tabla No. 4 se puede observar que el 42% de los estudiantes indicaron que sus maestros les han enseñado a resolver problemas indicando las estrategias. El 26% indican que sus maestros no les han enseñado a resolver problemas indicando las estrategias, el 13% indicó que algunas veces, el 4% indicó que no recuerda y el 16% no respondió a esta pregunta.

Se puede decir que la mayoría de los estudiantes sí les han enseñado problemas indicando las estrategias que existen. Sin embargo, de acuerdo con la Tabla No. 2 las estrategias no fueron mencionadas.

Tabla No. 5  
Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes del Instituto Normal Centro América JV,  
Mayo de 2012

<b>Enseñanza de la utilización de estrategias de resolución de problemas en la formación docente universitaria.</b>								
Frecuencia	Docente 1	Docente 2	Docente 3	Docente 4	Docente 5	Docente 6	TOTAL	%
Siempre			1				1	17%
Algunas veces							0	0%
Pocas veces	1	1		1		1	4	66%
Nunca					1		1	17%

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes.

De acuerdo con la Tabla No. 5 el 17% de los docentes indicó que siempre les enseñaron estrategias de resolución de problemas, la mayoría, el 66% indicaron que pocas veces les enseñaron utilizar estrategias de resolución de problemas y el 17% indicó que nunca les enseñaron a utilizar estrategias.

La mayoría de los profesores afirman que son pocas las veces que les enseñaron a utilizar las estrategias de resolución de problemas. Un docente indicó que nunca le enseñaron a utilizar estrategias de resolución de problemas.

Tabla No. 6

Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes del Instituto Normal Centro América JV,  
Mayo de 2012

<b>Importancia de la enseñanza de la Resolución de problemas, según los docentes.</b>
Lo docentes concuerdan sobre la importancia de la resolución de problemas en cuanto a que desarrolla la habilidad mental, el razonamiento y la inteligencia lógico matemática, y ayudará a los estudiantes a resolver problemas reales en su vida cotidiana.

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes.

De acuerdo con la Tabla No. 6 se puede decir que los docentes están conscientes de la importancia que juega el papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática.

Tabla No. 7

Estrategias de resolución de problemas  
.Estudio realizado con docentes del Instituto Normal Centro América JV,  
Mayo de 2012

<b>Aspectos que los docentes evalúan en la enseñanza de la resolución de problemas.</b>
Los profesores indicaron que evalúan el planteamiento, la operación y la respuesta y ningún docente evalúa la estrategia aplicada para llegar a la solución del mismo. Un catedrático indicó que no evalúa los problemas que les propone a sus estudiantes por el contrario, los acompaña en el proceso.

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes.

Según la Tabla No. 7 es evidente que la evaluación de la resolución de problemas no está muy bien unificado, los aspectos indicados es más para problemas aritméticos de Educación Primaria.

Tabla No. 8  
Estrategias de resolución de problemas  
.Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América JV,  
Mayo de 2012

<b>Frecuencia de la enseñanza de Resolución de problemas, según los docentes</b>								
Frecuencia	Doc.1	Doc. 2	Doc.3	Doc.4	Doc.5	Doc.6	TOTAL	%
En cada periodo de clase	1						1	17%
Una vez a la semana				1	1	1	3	50%
Una vez por unidad		1	1				2	33%
Nunca enseñó a resolver problemas							0	0%

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes.

Según la Tabla No. 8 el 50% de los profesores indicó que enseña a resolver problemas una vez por semana, el 33% una vez por unidad y 17% indicó que en cada período de clase.

La mayoría de los profesores enseñan a resolver problemas a sus alumnos una vez por semana.

Tabla No. 9  
Estrategias de resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes del Instituto Normal Centro América JV,  
Mayo de 2012

<b>Inclusión de la Resolución de problemas en los contenidos del curso de Matemática por unidad temática.</b>								
Frecuencia	Doc. 1	Doc. 2	Doc. 3	Doc. 4	Doc. 5	Doc. 6	TOTAL	%
Siempre	1		1	1			3	50%
Casi siempre					1		1	17%
Algunas veces		1				1	2	33%
Nunca							0	0%

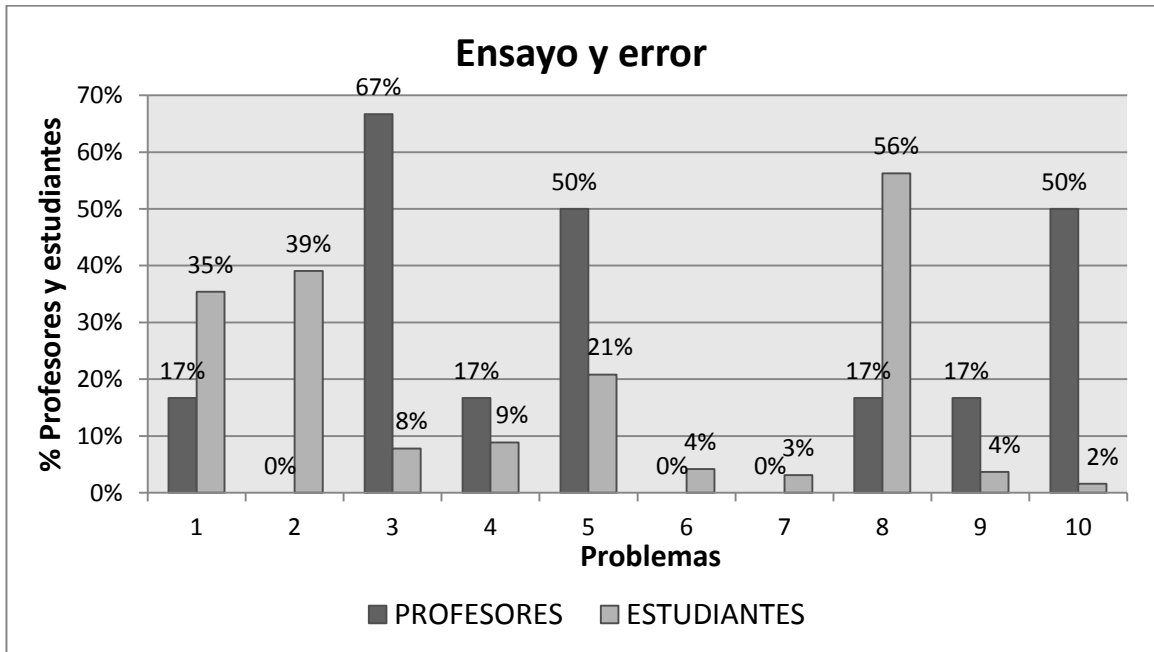
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a docentes.

En la Tabla No. 9 se puede observar que el 50% de los profesores siempre incluyen en su planificación la resolución de problemas, el 33% algunas veces y el 17% indicó que casi siempre incluye la resolución de problemas.

La mayoría de los docentes incluye en su planificación la resolución de problemas.

Gráfica No. 1

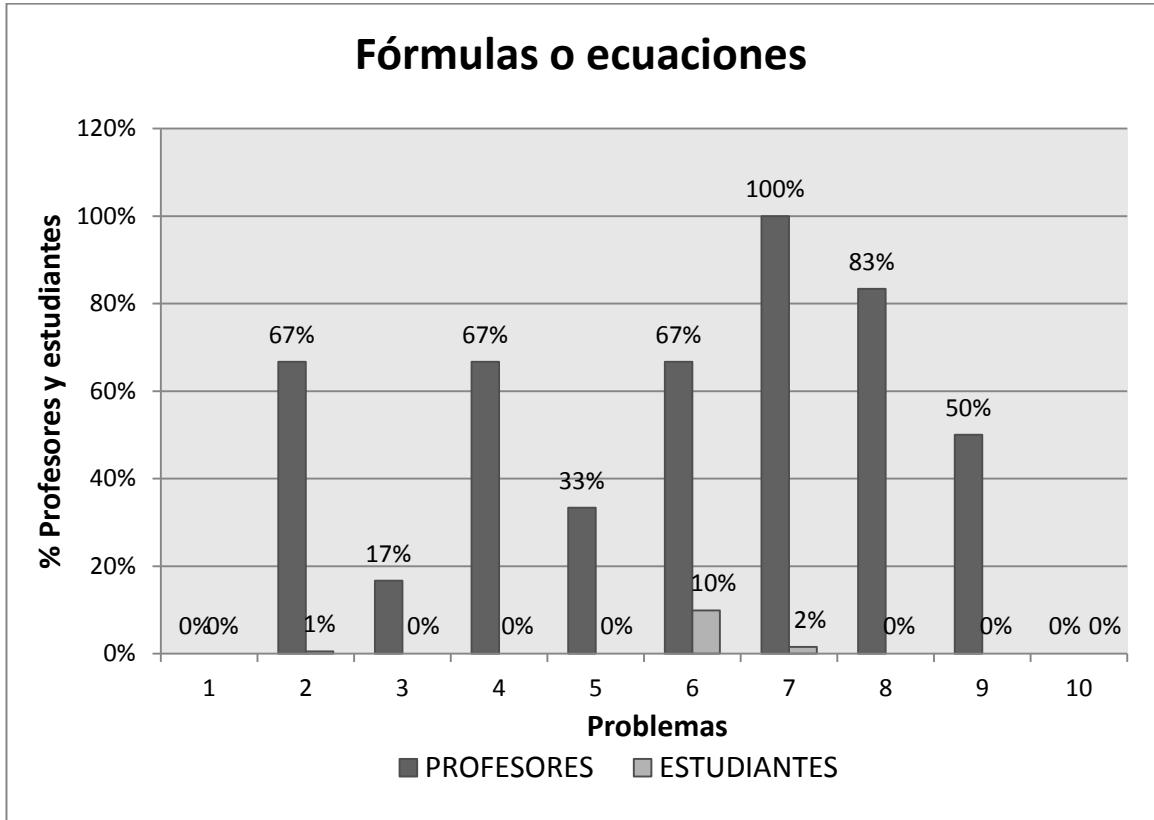
Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

Según muestra la Gráfica No. 1 la estrategia Ensayo y error es utilizada por la mayoría de los docentes, especialmente en los problemas 3, 5 y 10. Por los estudiantes, la mayoría en los problemas, 1, 2 y 8. En general, esta estrategia es utilizada en la mayoría de los diez problemas. Aunque en el resto de los problemas son pocos los que la utilizan.

**Gráfica No. 2**  
**Utilización de estrategias de resolución de problemas**  
 Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012



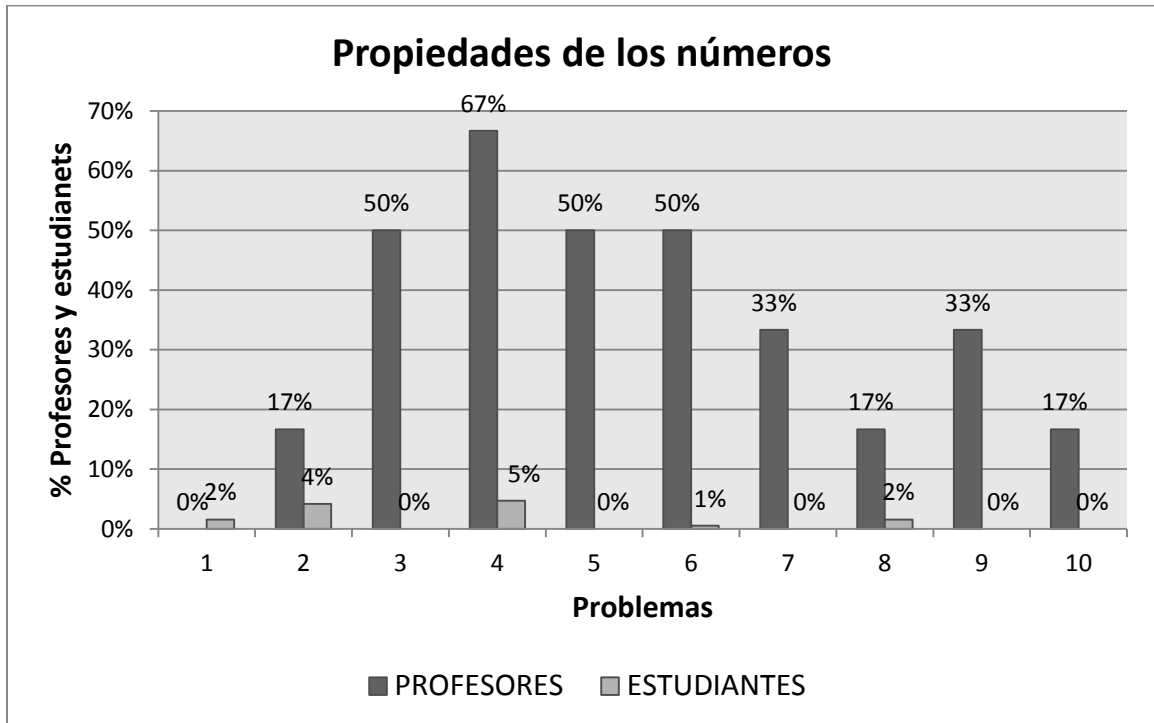
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

La Gráfica No. 2 evidencia que la mayoría de los docentes tienen suficiente conocimientos en cuanto al uso de Fórmulas o ecuaciones en la resolución de problemas puesto que se aplicó en 8 de los 10 problemas; mientras que los estudiantes únicamente una minoría (10%) aplicó Fórmulas o ecuaciones en el problema 6, aunque en los demás problemas había posibilidad de utilizar la estrategia en mención.

Los estudiantes no aplican las Fórmulas o ecuaciones como estrategia para resolver problemas.

## Gráfica No. 3

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

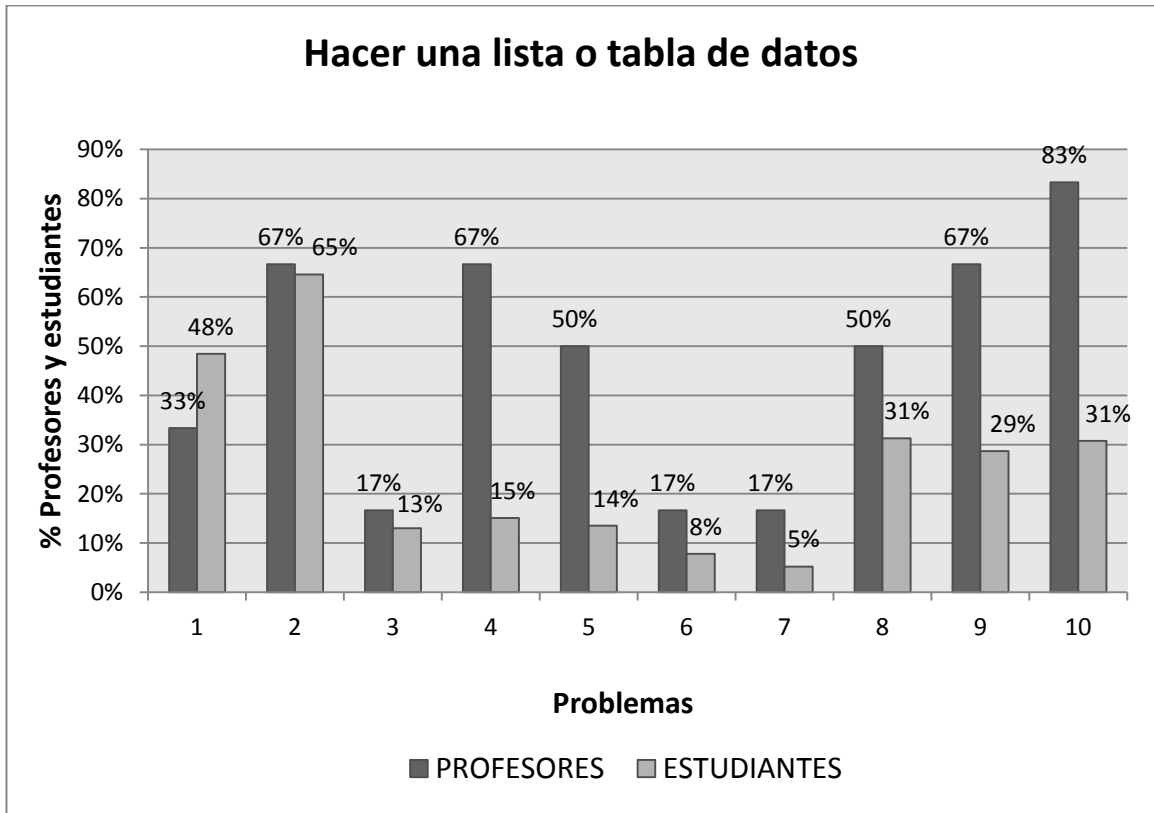
Según la Gráfica No. 3 muestra que los docentes aplican las Propiedades de los números como estrategia para resolver problemas aunque no la mayoría. Por otro lado, los estudiantes no aplican las Propiedades de los números como estrategia de resolución de problemas.

Esto evidencia los pocos conocimientos que poseen de las reglas de las operaciones, las definiciones, teoremas y propiedades de los números.



## Gráfica No. 4

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 4 se puede observar que en los diez problemas, docentes y estudiantes utilizaron la estrategia consistente en Hacer una lista o tabla de datos, aunque los docentes la utilizan con mayor frecuencia que los estudiantes, los profesores utilizaron más esta estrategia en los problemas 2, 4, 9 y 10. Y los estudiantes en los problemas 1 y 2.

## Gráfica No. 5

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012



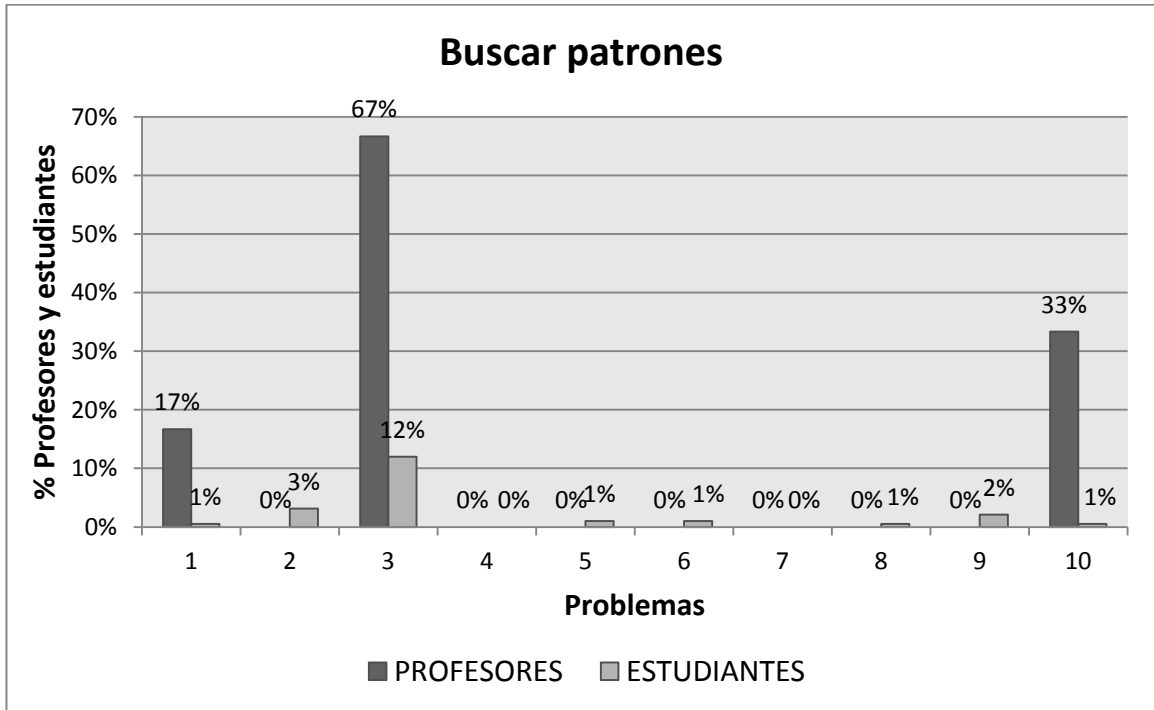
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 5 se puede observar que los profesores no utilizan dibujos, gráficas o diagramas para resolver problemas, únicamente un docente realizó un dibujo en el problema número 10. De igual manera, los estudiantes utilizaron muy poco esta estrategia en casi la mayoría de los problemas.

La estrategia “hacer dibujos, gráficas o diagramas”, es utilizada muy pocas veces, tanto por estudiantes como docentes.

## Gráfica No. 6

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América JV,  
 Mayo de 2012

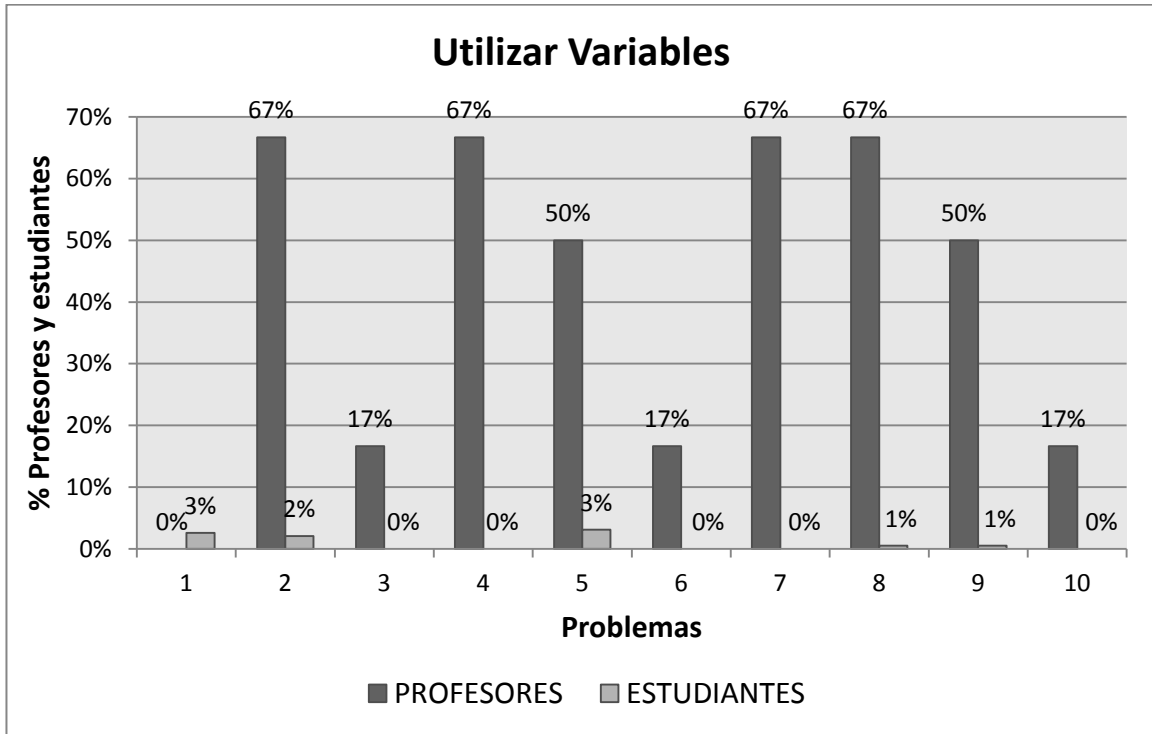


Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 6 se puede observar que la estrategia Buscar patrones es utilizada por un 16% de los docentes en el problema 3, 33% en el problema 10 y 17% en el problema 1. Cabe mencionar que esta estrategia es específica para ciertos tipos de problemas que llevan una secuencia, por lo que no se aplica en todos los problemas, sin embargo para los problemas donde sí se podía aplicar, pocos docentes aplicaron dicha estrategia y por los estudiantes, la utilización de esta estrategia es casi nula. Los estudiantes no utilizan la estrategia Buscar patrones en la resolución de problemas.

## Gráfica No. 7

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América J.V.  
 Mayo de 2012



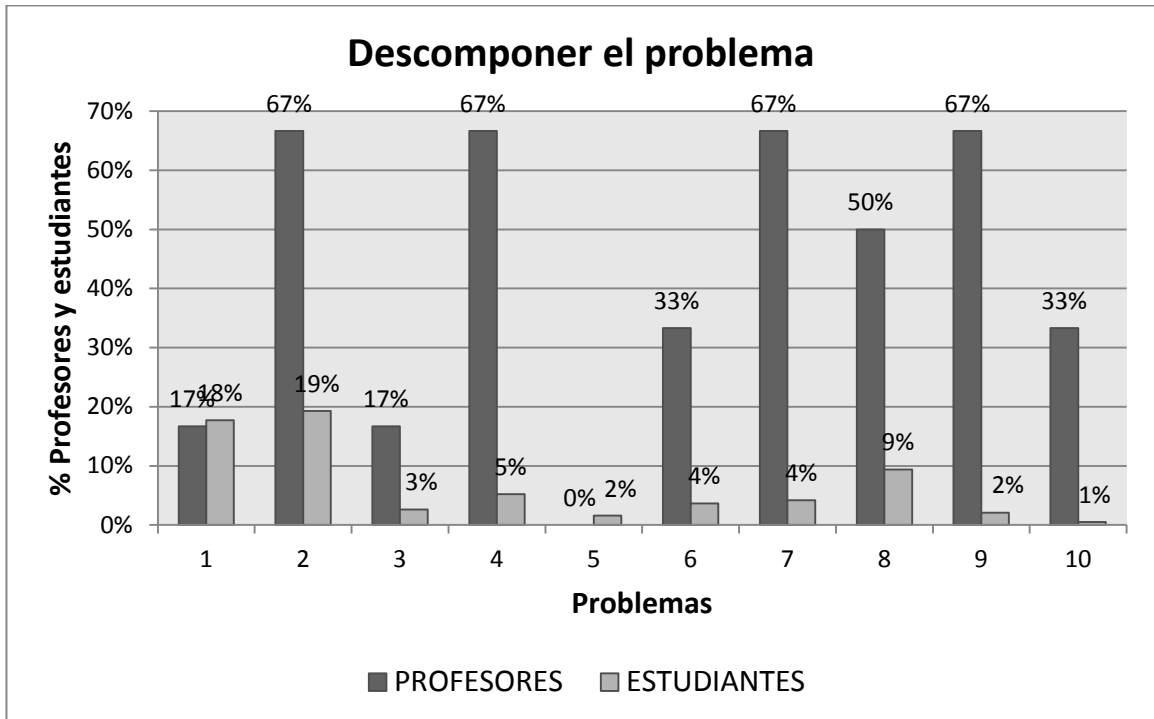
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

De acuerdo a la Gráfica No. 7 en la mayoría de los problemas, los docentes utilizaron Variables como estrategia, en el proceso de resolución de problemas, dicha estrategia la utilizó la mayoría (67%) en los problemas 2, 4, 7 y 8. No obstante los estudiantes la utilización de esta estrategia es casi nula, esto concuerda con la utilización de Fórmulas o ecuaciones (Gráfica No. 2)

Los estudiantes no utilizan Variables como estrategia para resolver problemas.

## Gráfica No. 8

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América J. V.  
 Mayo de 2012

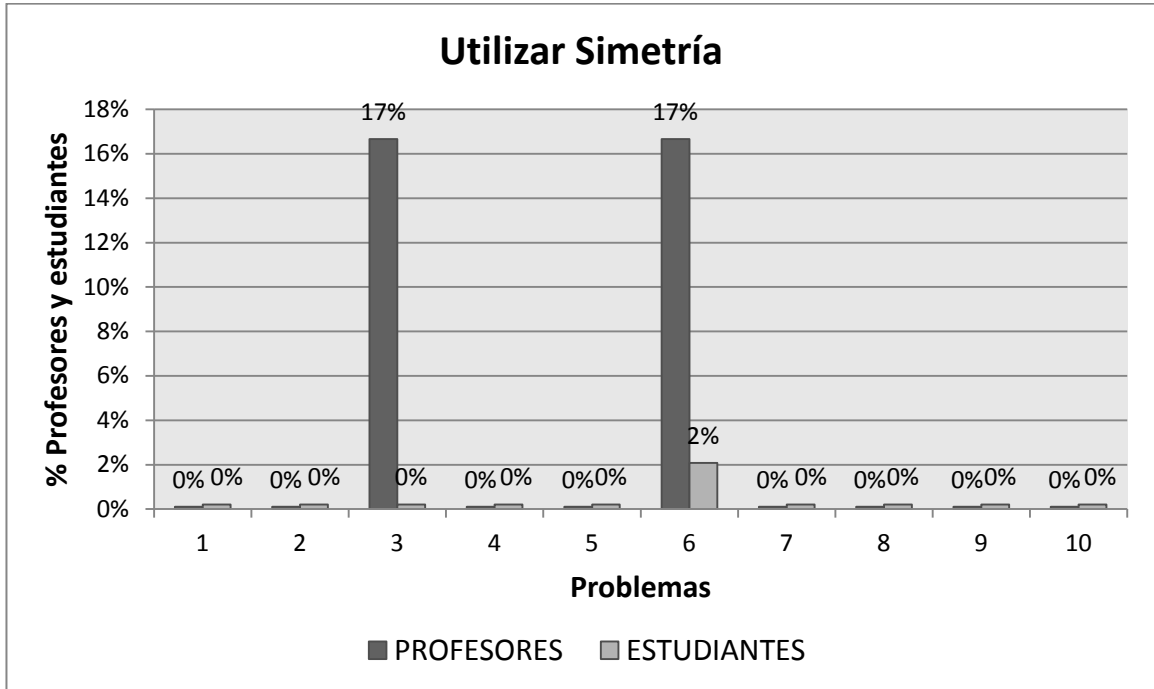


Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

La Gráfica No. 8 muestra que la estrategia Descomponer el problema la aplicaron los docentes en la mayoría de los problemas evaluados, los problemas donde más docentes utilizaron esta estrategia son el 2, 4, 7 y 9 con un porcentaje de 67% de ellos.

Son muy pocos los estudiantes que utilizaron esta estrategia el porcentaje más alto es el de 19% en problema 2, en el resto de los problemas pocos utilizaron esta estrategia. La mayoría de los estudiantes no aplican la descomposición del problema como estrategia de resolución de problemas.

Gráfica No. 9  
 Utilización de estrategias de resolución de problemas  
 .Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
 América J.V.  
 Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

La Gráfica No. 9 se puede observar que la Simetría como estrategia de resolución de problemas es poco utilizado por docentes y estudiantes, únicamente el 17% de los docentes la utilizaron en los problemas 3 y 6, mientras un 2% de los estudiantes la utilizaron en el problema 6. Simetría es una estrategia específica aplicable a ciertos problemas, en este caso a los problemas 3 y 6; de acuerdo con la gráfica un docente aplicó la estrategia y únicamente el 2% de los estudiantes la utilizó.

Con base a estos resultados se puede decir que el conocimiento y la utilización de la Simetría como estrategia de resolución de problemas son casi nulos por docentes y estudiantes.

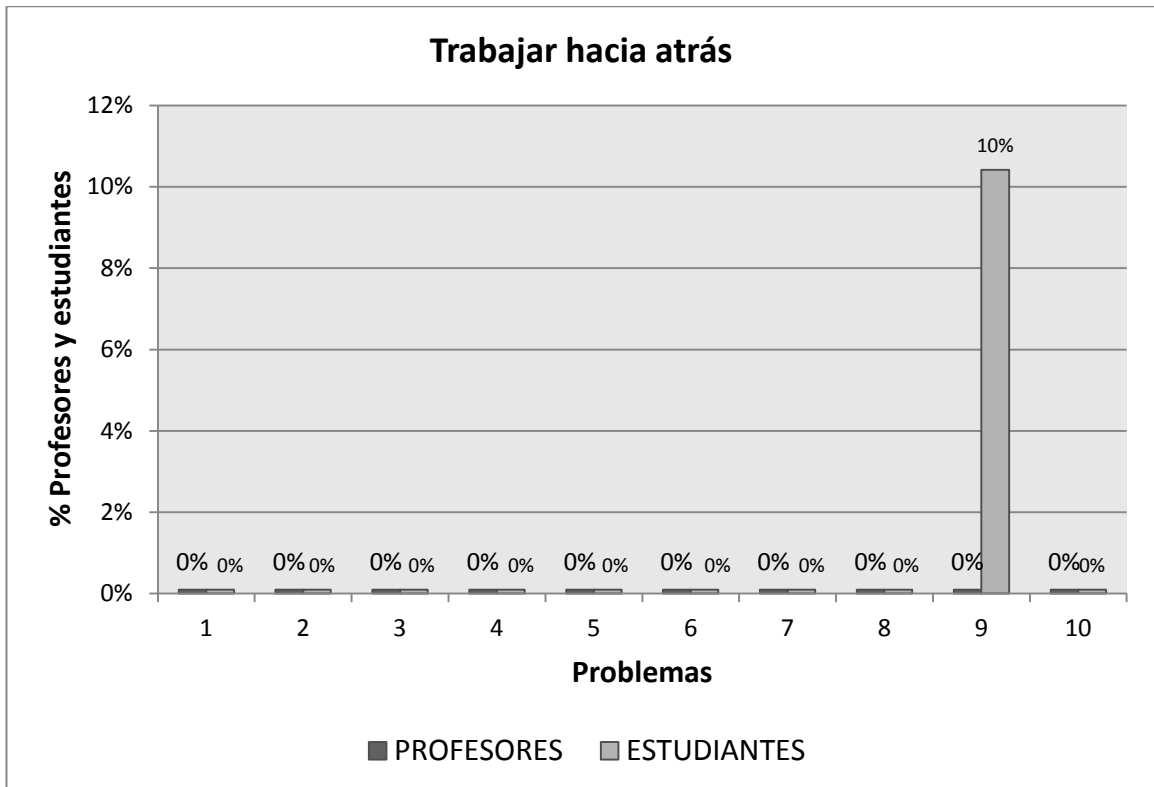
## Gráfica No. 10

## Utilización de estrategias de resolución de problemas

.Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro

América J.V.

Mayo de 2012

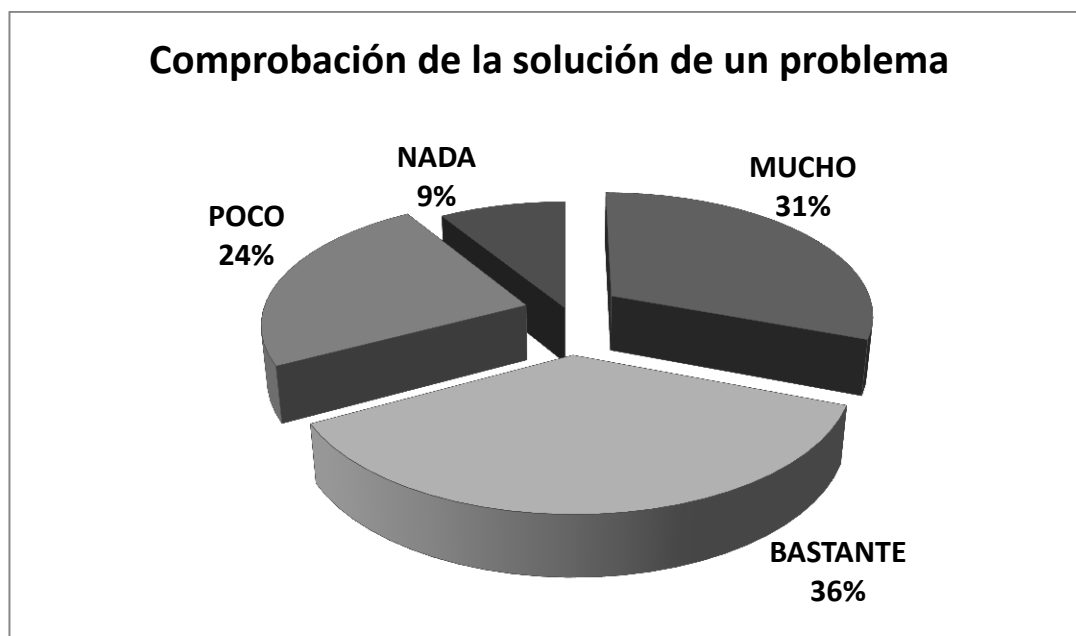


Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 10 se puede notar que la estrategia Trabajo hacia atrás es específica, aplicable a ciertos problemas, en este caso, el problema 9 puede resolverse utilizando dicha estrategia. No obstante, ninguno de los docentes aplicó dicha estrategia y únicamente el 10% de los estudiantes la utilizaron. Cabe mencionar que la solución correcta o incorrecta del problema no depende de la aplicación de la estrategia en cuestión.

## Gráfica No. 11

Utilización de estrategias de resolución de problemas  
.Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro  
América J.V.  
Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

De acuerdo a la Gráfica no. 11 únicamente el 36% de los estudiantes comprueban “bastante” la solución de un problema, el 31% mucho, el 24% poco y el 9% no realiza la comprobación.

Realizar la comprobación es una etapa importante en todo proceso de resolución de un problema matemático, puesto que permite reafirmar la solución del problema para luego dar con más certeza la solución, de esta manera, el aprendizaje será significativo.



### 3.2. Aprendizaje de la resolución de problemas

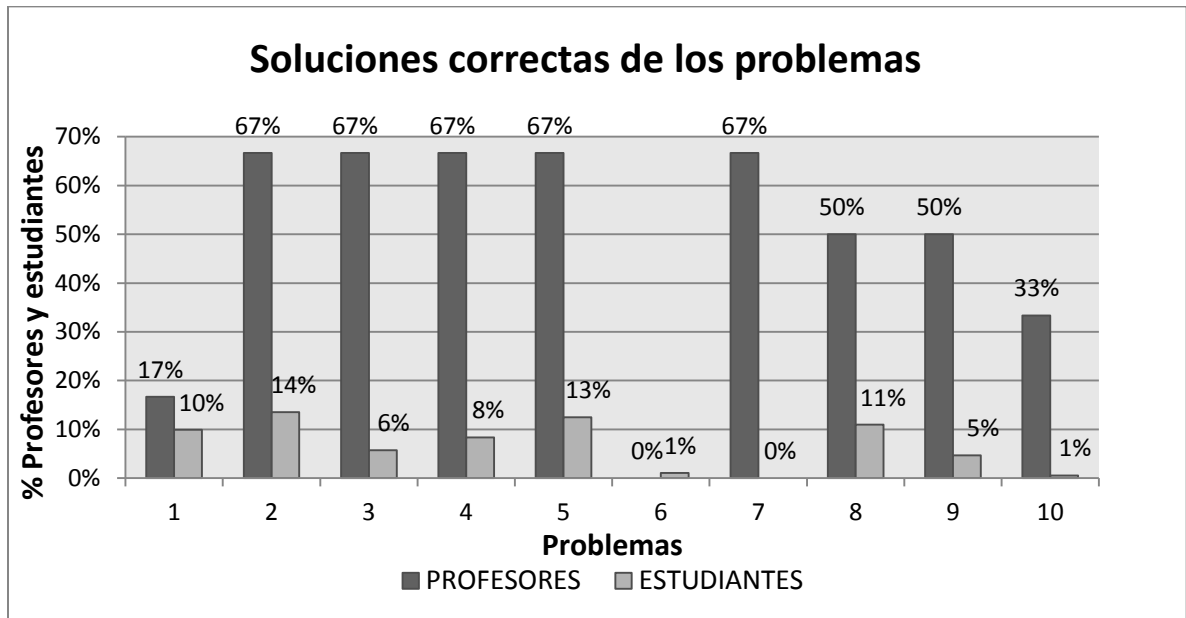
Gráfica No. 12

Aprendizaje de la resolución de problemas

Estudio realizado con estudiantes y docentes del Instituto Normal Centro

América J.V.

Mayo de 2012

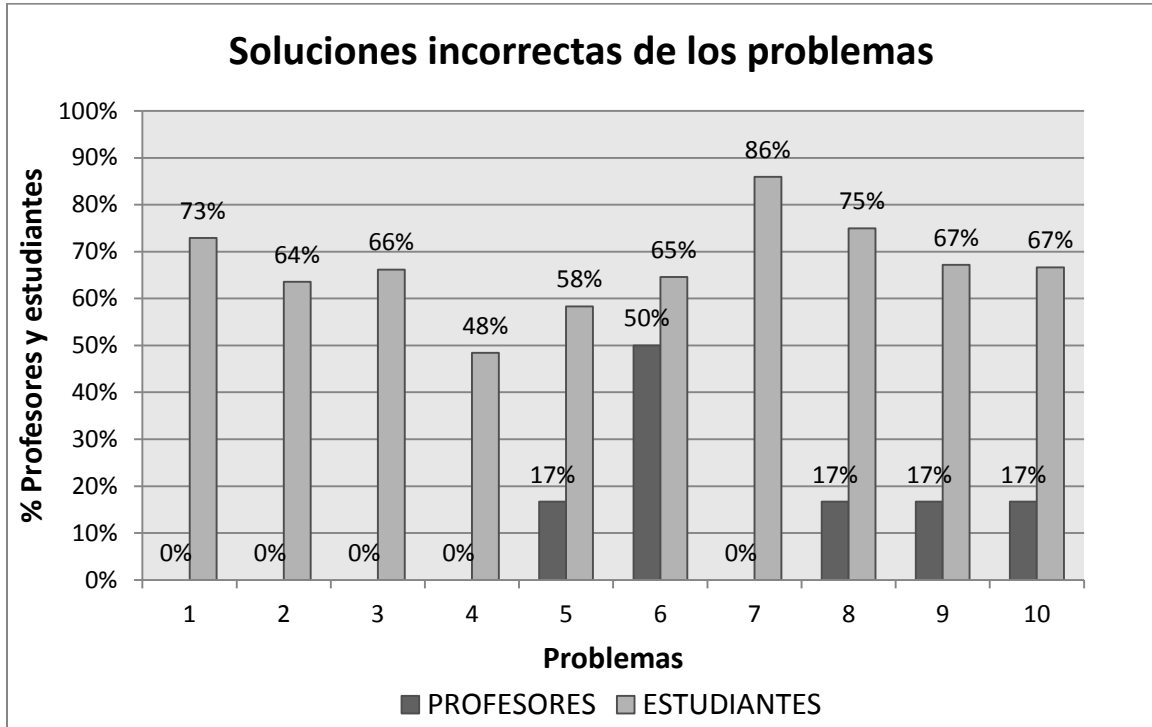


Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

La Gráfica No. 12 muestra los resultados de la prueba objetiva aplicada a docentes y estudiantes que contenía 10 problemas seleccionados en función de las posibles estrategias a utilizar. En esta gráfica se muestran los porcentajes de docentes y estudiantes que resolvieron correctamente los problemas.

La mayoría de los docentes (67%) resolvieron los problemas 2, 3, 4, 5 y 7. El 50% de los mismos resolvieron correctamente los problemas 8 y 9; y los problemas 1, 6 y 10 fueron resueltos correctamente por un porcentaje menor al 33%. La mayoría no resolvió correctamente los problemas, el problema más resuelto es el 2 con un 14% de los estudiantes seguido del problema 5 con un 13% y el resto de los problemas lo resolvieron correctamente un porcentaje inferior al 10% de los estudiantes.

Gráfica No. 13  
Aprendizaje de la resolución de problemas  
Estudio realizado con docentes y estudiantes del Instituto Normal Centro  
América J.V.  
Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

La Gráfica No. 13 muestra los porcentajes de estudiantes que intentaron resolver el problemas mas no hallaron la solución correcta, la gráfica muestra que el 17% de los docentes intentaron resolver los problemas 5, 8, 9 y 10; y el 50% de los mismos el problema 6. Además un porcentaje superior al 50% de los estudiantes, intentaron resolver todos los problemas de la prueba sin tener éxito. Los porcentajes de docentes que muestra con 0% son los problemas en blanco que se mostrará en la siguiente gráfica.

En general, el porcentaje de docentes que dieron soluciones incorrectas 12%, estudiantes 67%. La mayoría de estudiantes dieron soluciones incorrectas a los problemas que los docentes.

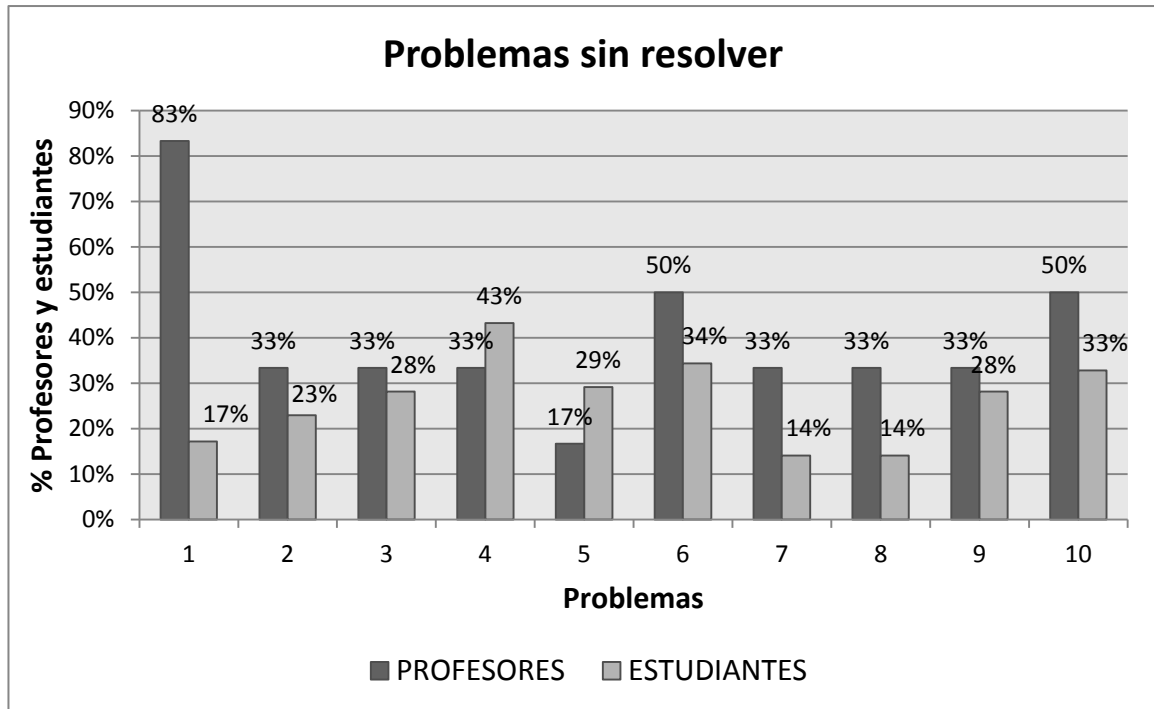
## Gráfica No. 14.

Aprendizaje de la resolución de problemas.

Estudio realizado con docentes y estudiantes del Instituto Normal Centro

América JV,

Mayo de 2012



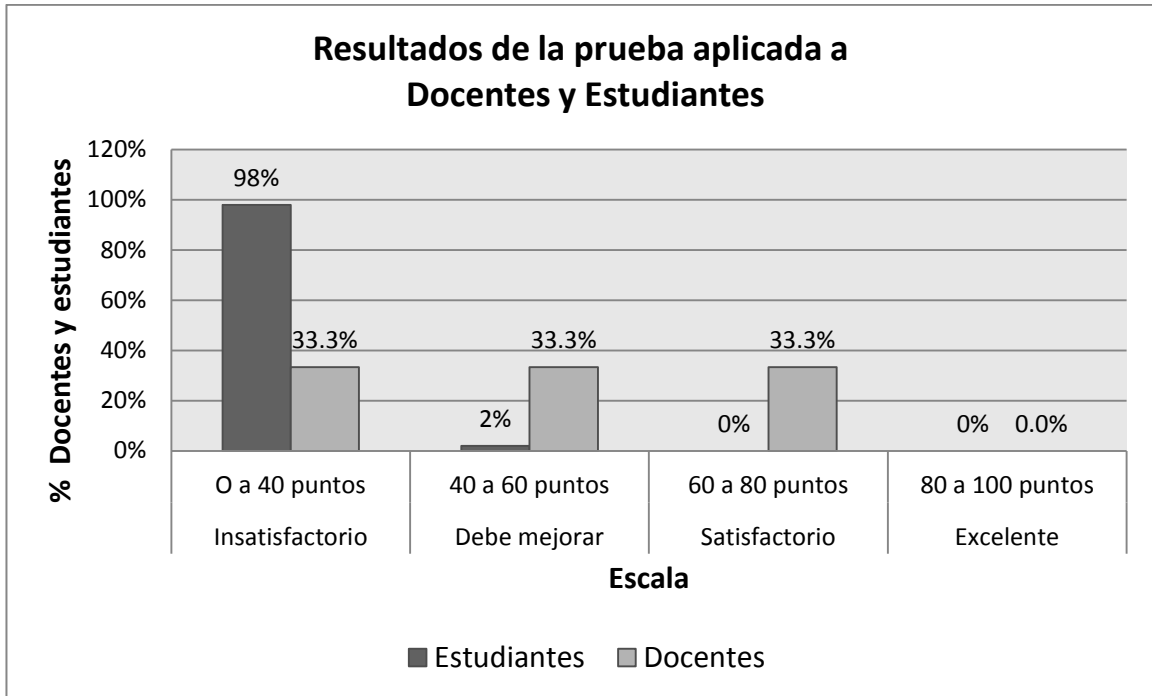
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 14, la mayoría de los docente(83%) no intentaron resolver el problema 1, el 50% no resolvieron los problemas 6 y 10, el 33% no resolvió los problemas 2, 3, 4, 7, 8 y 9; el 17% no resolvió el problema 5.

El 43% de los estudiantes no resolvió el problema 4, el 34% no resolvieron el problema 6, y el resto de los problemas no fueron resueltos entre un 14 y 33% de los estudiantes,

En general, el 40% de los docentes dejaron problemas sin resolver y estudiantes 26%. Los estudiantes dejaron menos problemas en blanco que docentes.

**Gráfica No. 15**  
**Aprendizaje de la resolución de problemas**  
**Estudio realizado con docentes y estudiantes del Instituto Normal Centro**  
**América J.V.**  
**Mayo de 2012**



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de la Prueba de resolución de problemas aplicado a docentes y estudiantes.

En la Gráfica No. 15 se puede notar que el 98% de los estudiantes y el 33.3% de los docentes obtuvieron resultado insatisfactorio; el 2% de los estudiantes y el 33.3% de los docentes obtuvieron un resultado en la cual Deben mejorar, 0% de los estudiantes y 33.3% de los docentes obtuvieron resultados Satisfactorios, por último, Ningún docente y ningún estudiante presentaron resultado Excelente.

El promedio de notas de estudiantes es de 8 puntos y de docentes 48 puntos, en una escala de 0 a 100 puntos.

Como se puede notar, los estudiantes tienen altas deficiencias en el tema de resolución de problemas matemáticos y los resultados obtenidos por los docentes no son lo esperado.

### 3.3. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.

Tabla No. 10

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012

<b>Conocimientos previos de los estudiantes acerca de los contenidos que se aplican en la resolución de problemas</b>
<p>La mayoría de las estudiantes indicaron que los temas o contenidos que han aprendido y que han utilizado para resolver problema son:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Proporcionalidad (regla de tres, porcentajes)</li><li>• Operaciones básicas de números naturales (suma, resta, multiplicación y división)</li><li>• Álgebra, Aritmética, Geometría y Otros.</li></ul>

Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a estudiantes.

De acuerdo con la Tabla No. 10, los temas que fueron mencionados con mayor frecuencia por los estudiantes son: regla de tres, porcentajes, operaciones con números naturales, Álgebra y Geometría.

La mayor parte de estos temas no fueron aplicados de manera correcta, especialmente el tema de Geometría y Fracciones de acuerdo con la evaluación objetiva realizada.

## Tabla No. 11.

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012

<b>Sentimientos manifestados ante la imposibilidad de resolver un problema</b>
<p>Los estudiantes manifiestan distintos sentimientos como consecuencia a la imposibilidad de resolver problemas, entre éstos están:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Malestar en general</li><li>• Frustración</li><li>• Enojo,</li><li>• Incapacidad,</li><li>• Desesperación</li><li>• Tristeza</li><li>• Cansancio y otros.</li></ul>

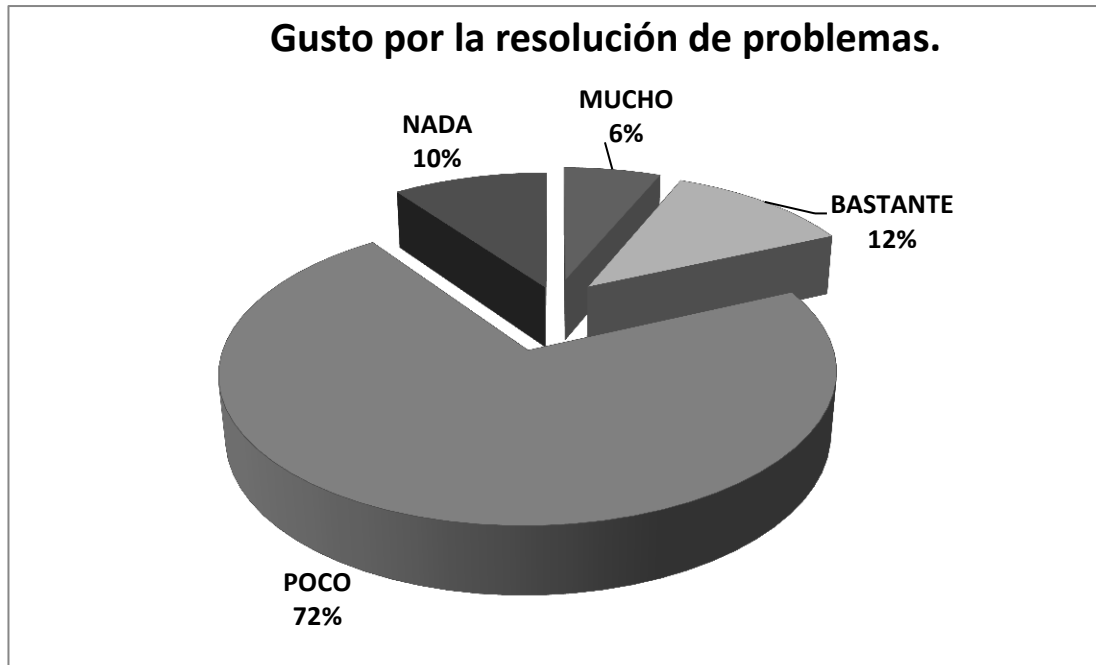
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Entrevista a estudiantes.

De acuerdo con la Tabla No. 11, los sentimientos, en general, influyen durante el proceso de resolución de todo problema matemático. Estos son: Malestar general, Frustración Enojo, Incapacidad, Desesperación Tristeza, Cansancio y otros.

Todos los sentimientos anteriores son negativos debido a la imposibilidad de resolver los problemas.

## Gráfica No.16

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



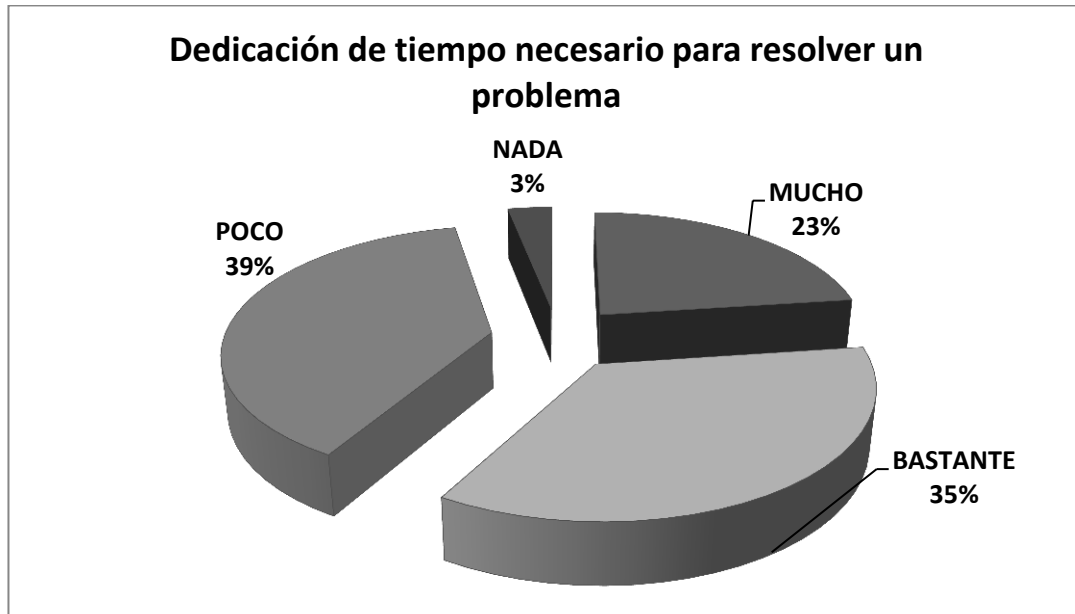
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

La Gráfica No. 16 muestra que el 6% de las estudiantes les gusta mucho resolver problemas matemáticos, el 12% le gusta bastante, el 72% poco les gusta y el 10% no les gusta nada resolver problemas.

Es evidente que es una minoría de los estudiantes que realmente les gusta resolver problemas. La mayoría poco les gusta resolver problemas que puede ser por la falta de práctica, costumbre o el desconocimiento de métodos y estrategias.

## Gráfica No. 17

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 17 se puede observar que el 23% de los estudiantes dedican mucho tiempo para resolver un problema, el 35% le dedica bastante tiempo, el 39% poco tiempo y el 3% no le dedica nada de tiempo.

Son pocos los estudiantes que le dedican mucho tiempo para resolver un determinado problema, la mayoría le dedica poco tiempo, lo cual evidencia el poco interés que le dan a la resolución de problemas.

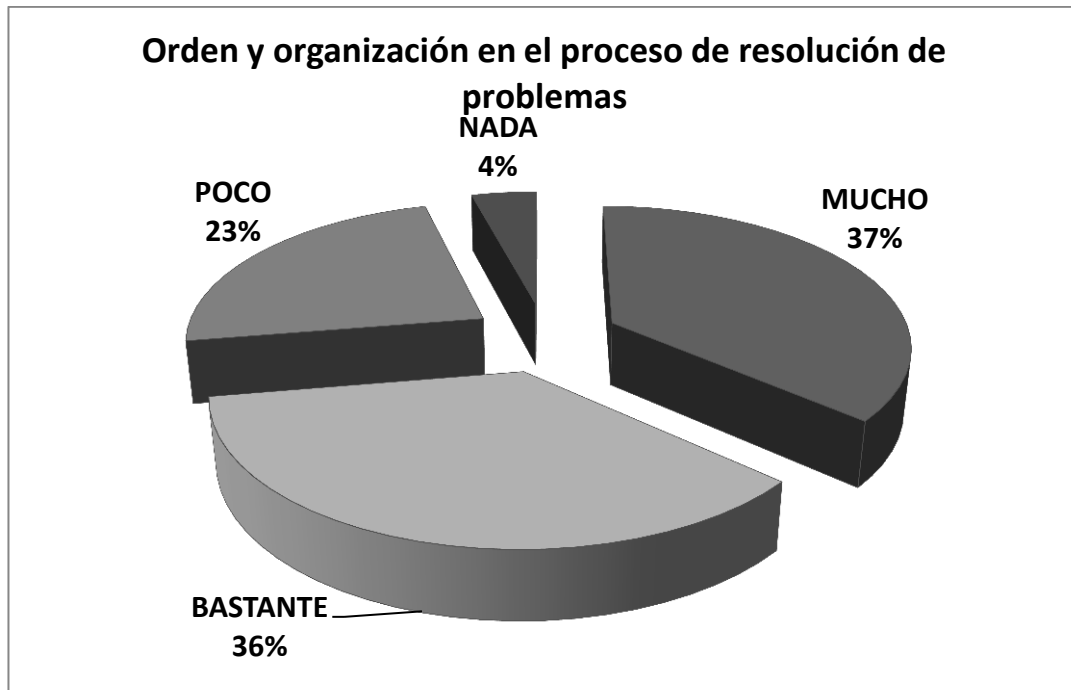


## Gráfica No. 18

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.

Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.

Mayo de 2012



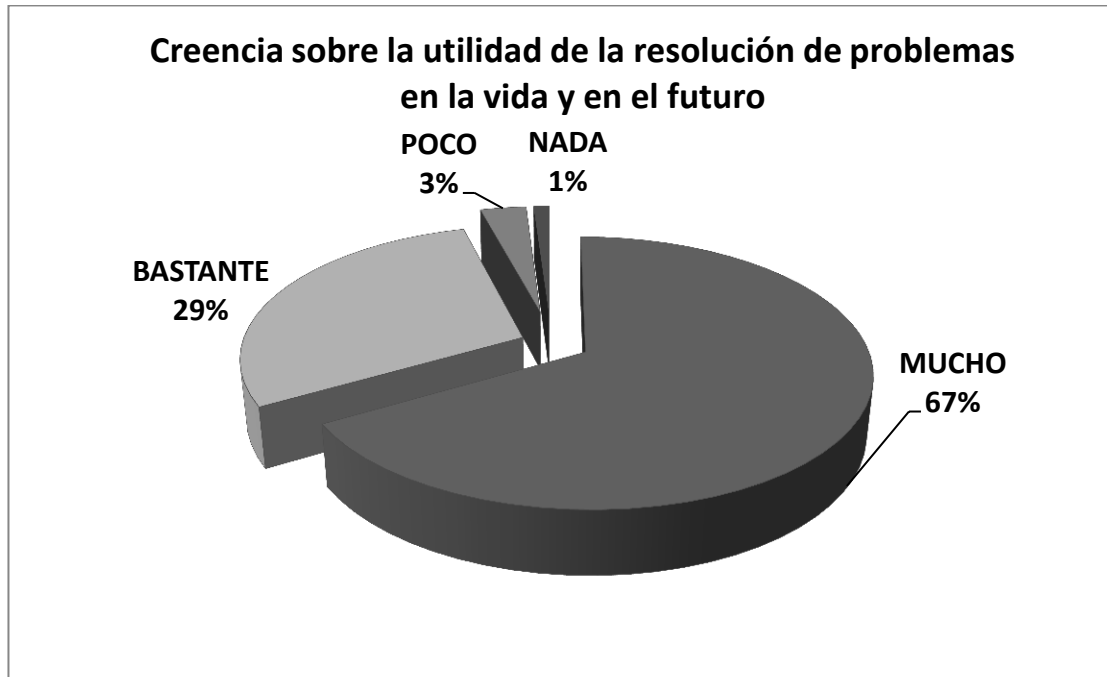
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 18 se observa que el 37% de los estudiantes presentan muy ordenado el proceso de resolución de problemas, el 36% es bastante ordenado, el 23% es poco ordenado y el 4% afirmó que es nada ordenado al resolver problemas.

La mayoría de los estudiantes afirman ser muy ordenados durante el proceso de resolución de problemas, son pocos los que realmente son desordenados.

## Gráfica No. 19

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



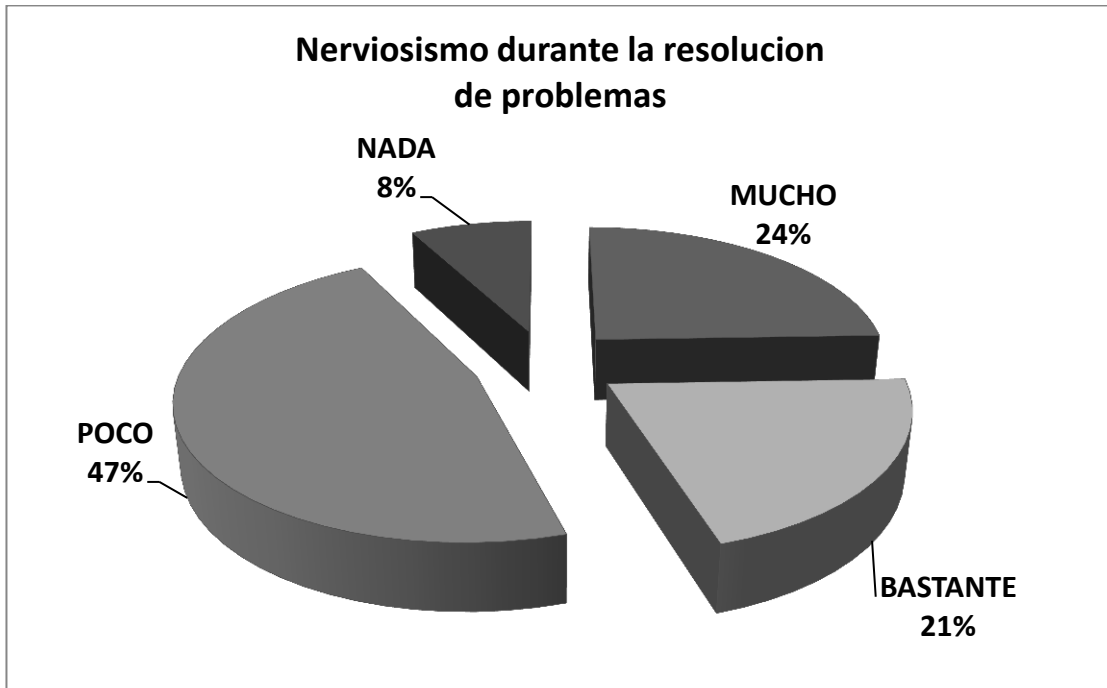
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 19 se puede observar que el 67% de los estudiantes cree que puede ayudarle mucho en la vida diaria y en el futuro la resolución de problemas, el 29% cree que puede ayudarles bastante, el 3% cree que le ayudará poco y el 1% cree que no le ayudará para nada.

La mayoría de los estudiantes cree que la resolución de problemas le ayudará en la vida diaria y en el futuro. Es indica que los estudiantes están conscientes de la importancia de la resolución de problemas.

## Gráfica No. 20

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



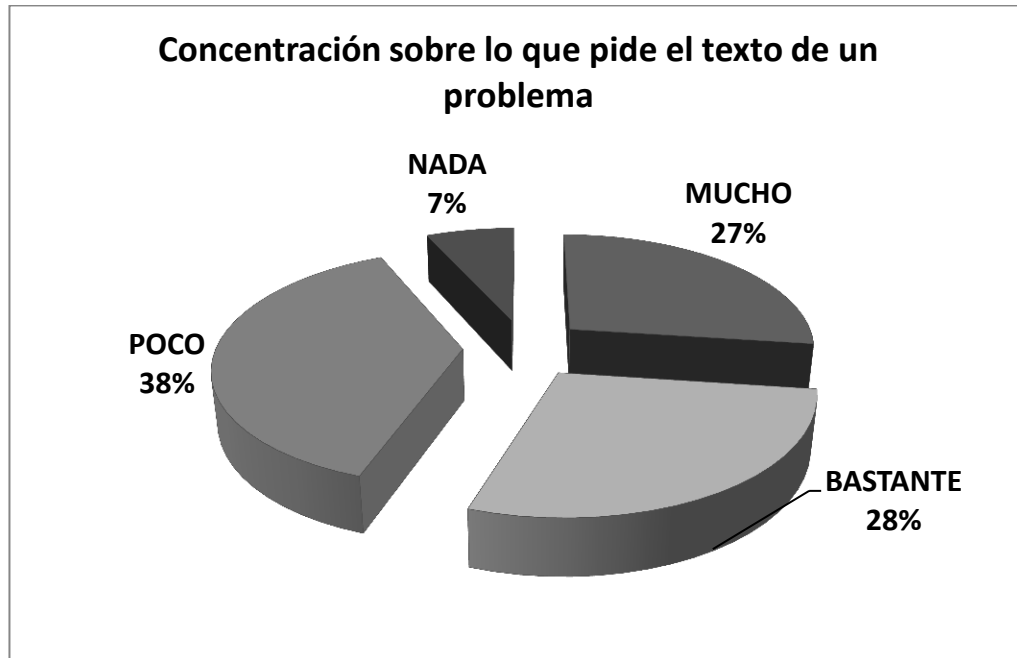
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 20 se puede ver que el 24% de los estudiantes afirmaron que se ponen muy nerviosos, el 21% bastante nerviosos, el 47% se ponen poco nerviosos y el 8% nada nerviosos.

La mayoría de los estudiantes son afectados por los nervios durante la resolución de un problema, son muy pocos los que realmente no les afecta el nerviosismo, esto puede ser debido al miedo de no poder resolver el problema correctamente.

## Gráfica No. 21

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



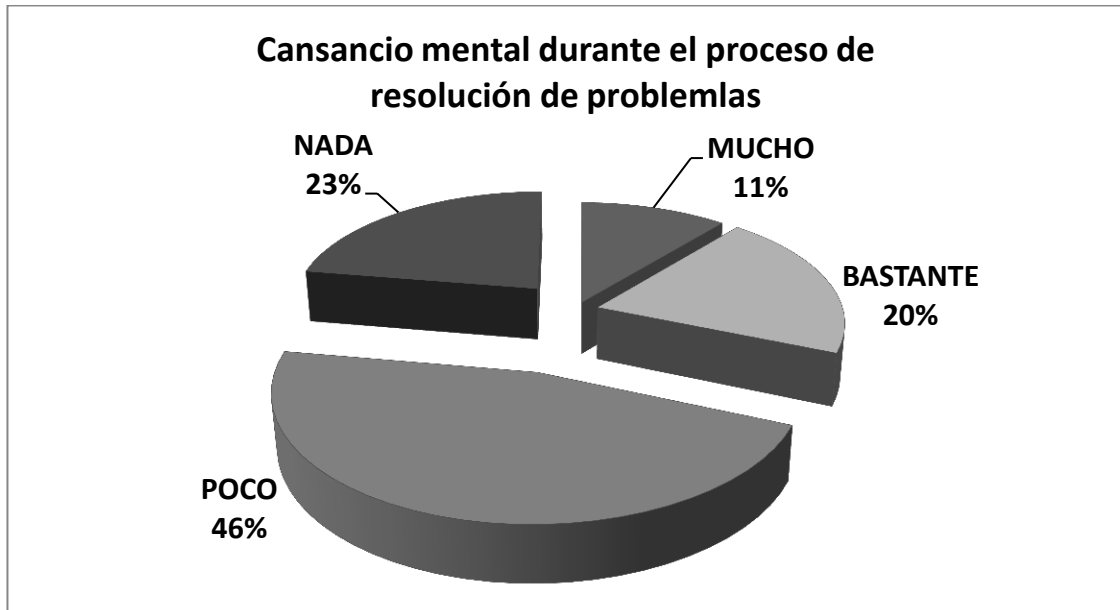
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 21 se puede notar que el 27% de los estudiantes les cuesta mucho concentrarse durante la resolución de un problema, el 28% les cuesta bastante concentrarse, el 38% les cuesta poco concentrarse y el 7% afirmó que no les cuesta nada concentrarse.

La mayor parte de los estudiantes le cuesta mucho o bastante concentrarse con lo que pide el texto de un problema, esto puede ser por la falta de comprensión del mismo problema y del lenguaje que se utiliza o la forma con que se presenta un determinado problema.

## Gráfica No. 22

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



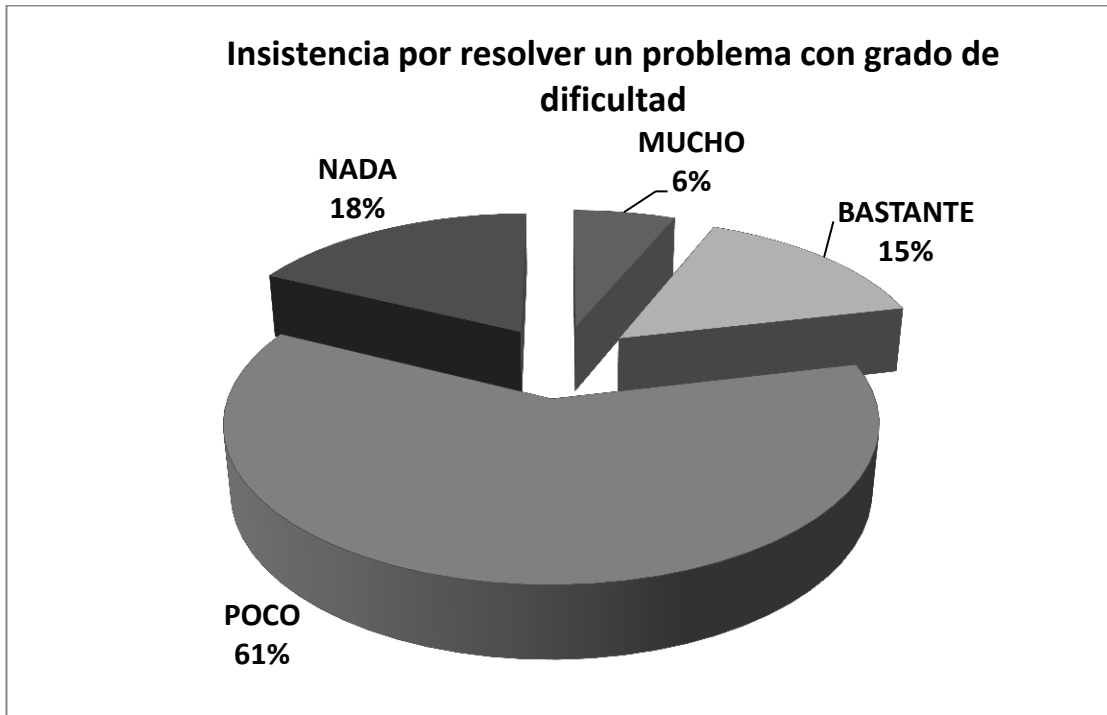
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 22, el 11% de los estudiantes se cansan mucho al resolver problemas, el 20% se cansa bastante, el 46% afirmó que les cansa poco y el 23% afirmó que no les cansa en nada.

La mayoría de los estudiantes se cansa poco durante la resolución de problemas matemáticos, únicamente la minoría le cansa realmente resolver problemas. Resolver muchos problemas es agotador puesto que necesita mucha concentración y tiempo.

## Gráfica No. 23

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



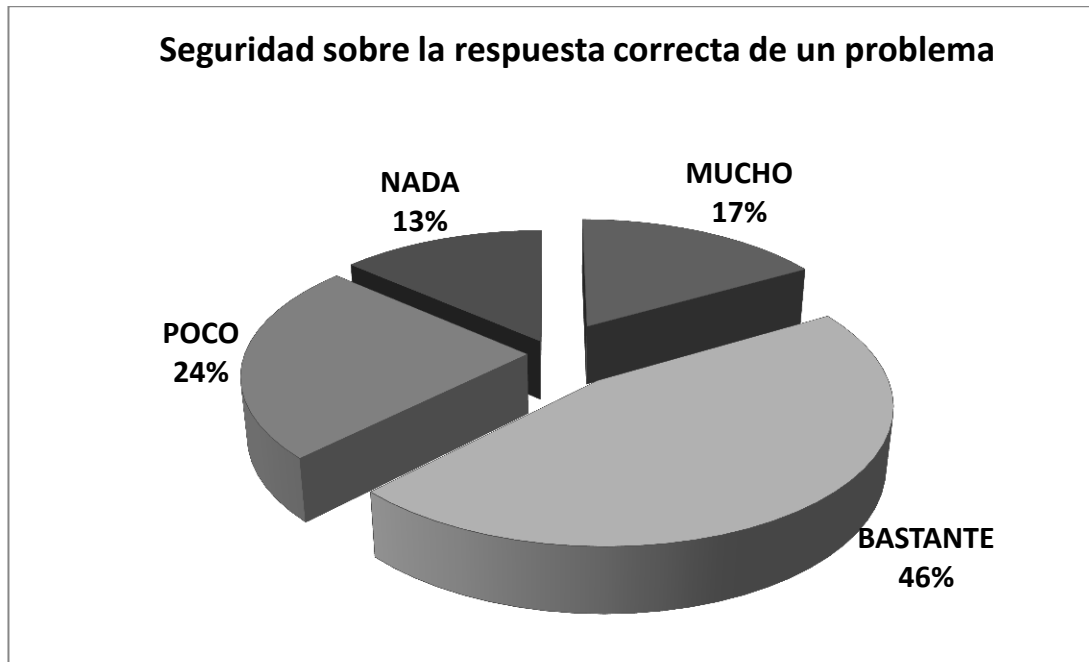
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 23 se puede observar que el 6% de los estudiantes realizan muchos intentos por resolver un problema, el 15% realiza bastantes intentos, el 61% poco intenta resolverlo y el 18% no intenta nada.

La mayoría de los estudiantes realiza pocos intentos por resolver un problema cuando les es difícil, únicamente el 6% sí realiza varios intentos, esto evidencia la falta de interés por resolver el problema, los pocos conocimientos matemático o metodológicos para resolverlo.

## Gráfica No. 24

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



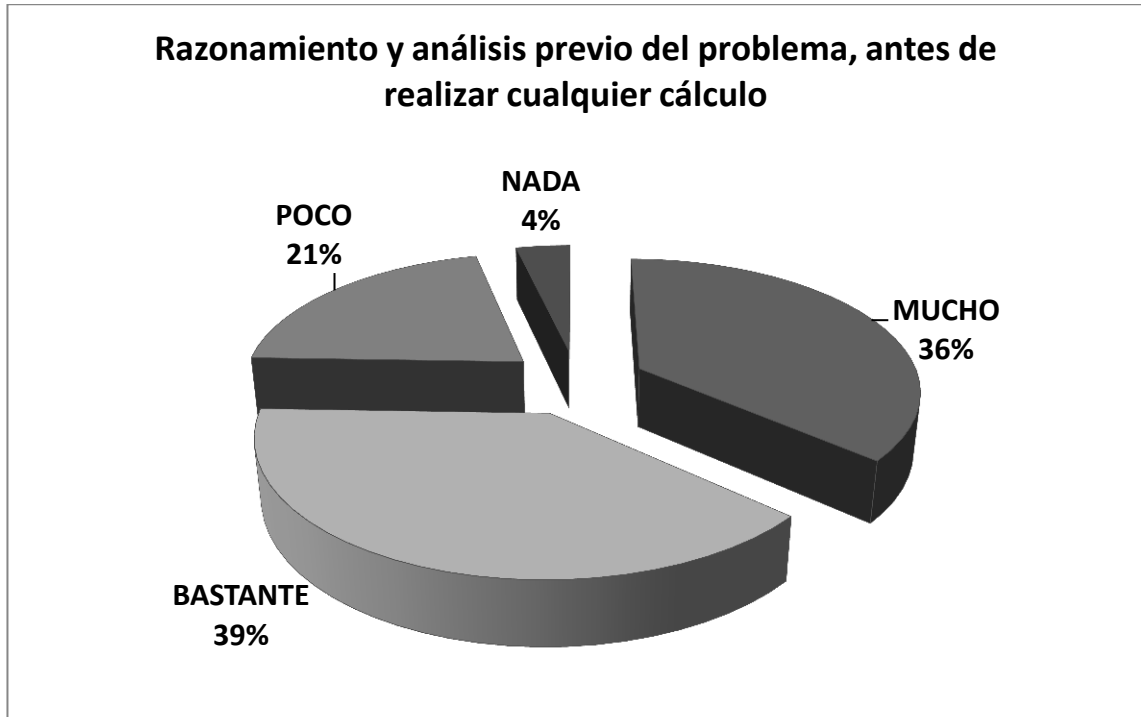
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 24 se puede observar que únicamente el 17% de los estudiantes se sienten muy seguros, el 46% se sienten bastante seguros, el 24% poco seguro y el 13% nada seguros.

Puede decirse que la mayoría de los estudiantes sienten seguridad si realmente han resuelto determinado problema correctamente, aunque esto no indica que el problema esté resuelto correctamente.

## Gráfica No. 25

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 25 el 36% afirmó que razona y analiza mucho el problema antes de efectuar cualquier cálculo, el 39% razona y analiza bastante, el 21% razona y analiza poco y el 4% afirmó que no razón ni analiza los problemas.

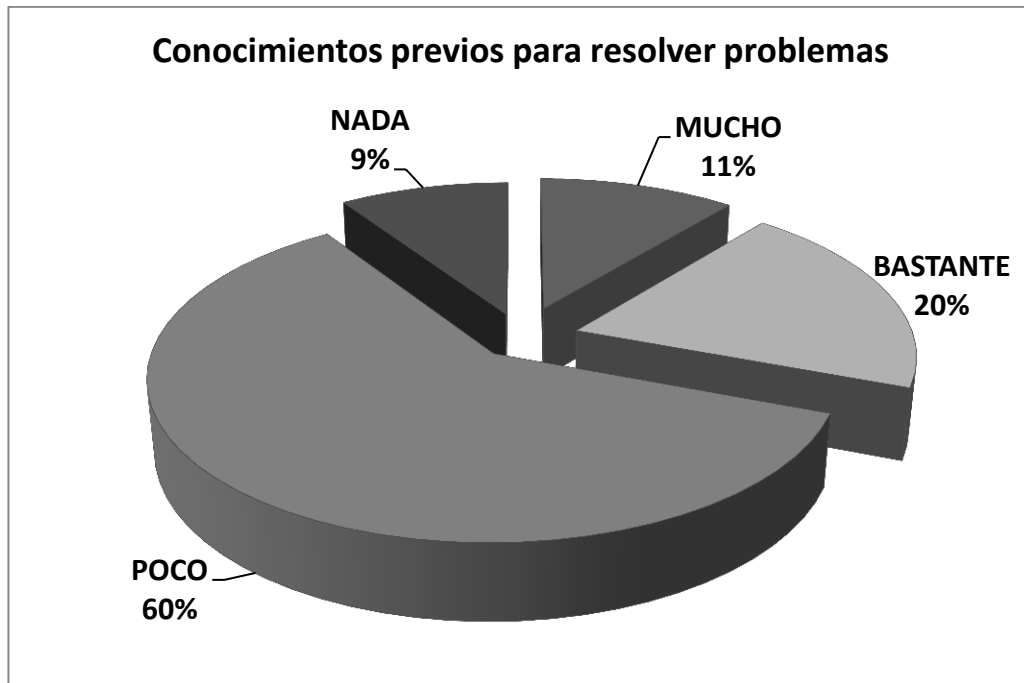
Se puede decir que los estudiantes sí razonan y analizan mucho o bastante los problemas antes de realizar algún cálculo matemático.

Entender el problema es un paso importante, esto permitirá elegir la estrategia adecuada para resolverlo.



Gráfica No. 26

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



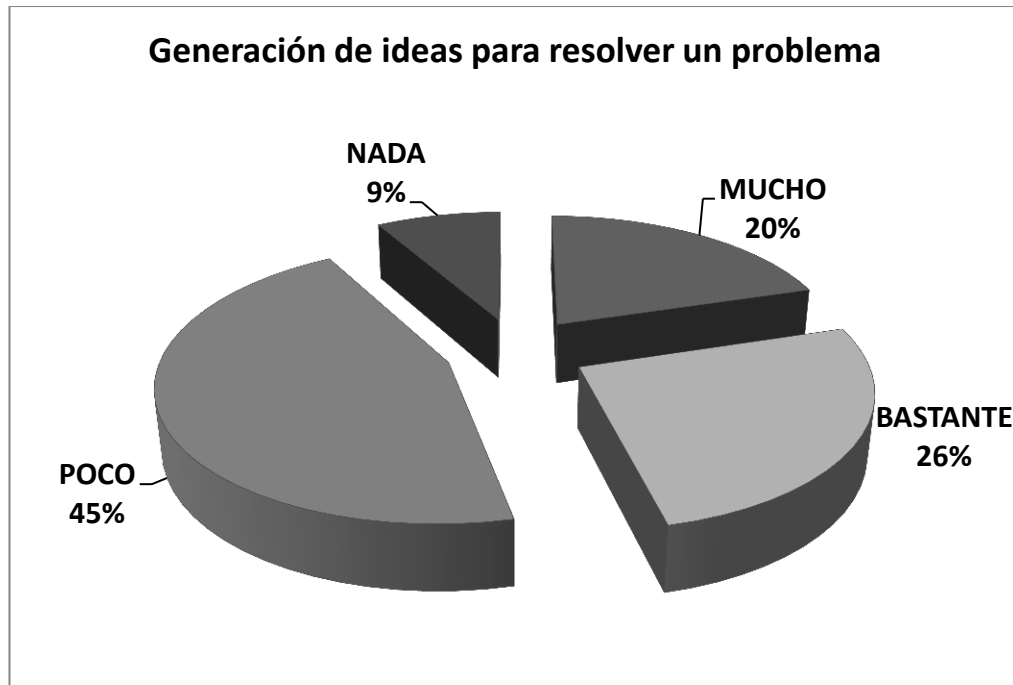
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 26, el 11% de los estudiantes afirma que sabe mucho de la teoría y las operaciones que se aplican en los problemas, el 20% afirma que sabe bastante, el 60% afirma que sabe poco y el 9% afirmó que nada sabe de la teoría y las operaciones que se aplican en determinado problema.

Es certero que mayor parte de los estudiantes, sabe poco de la teoría y las operaciones matemáticas que se deben utilizar en la resolución de un problema, los conocimientos previos son pocos.

## Gráfica No. 27

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



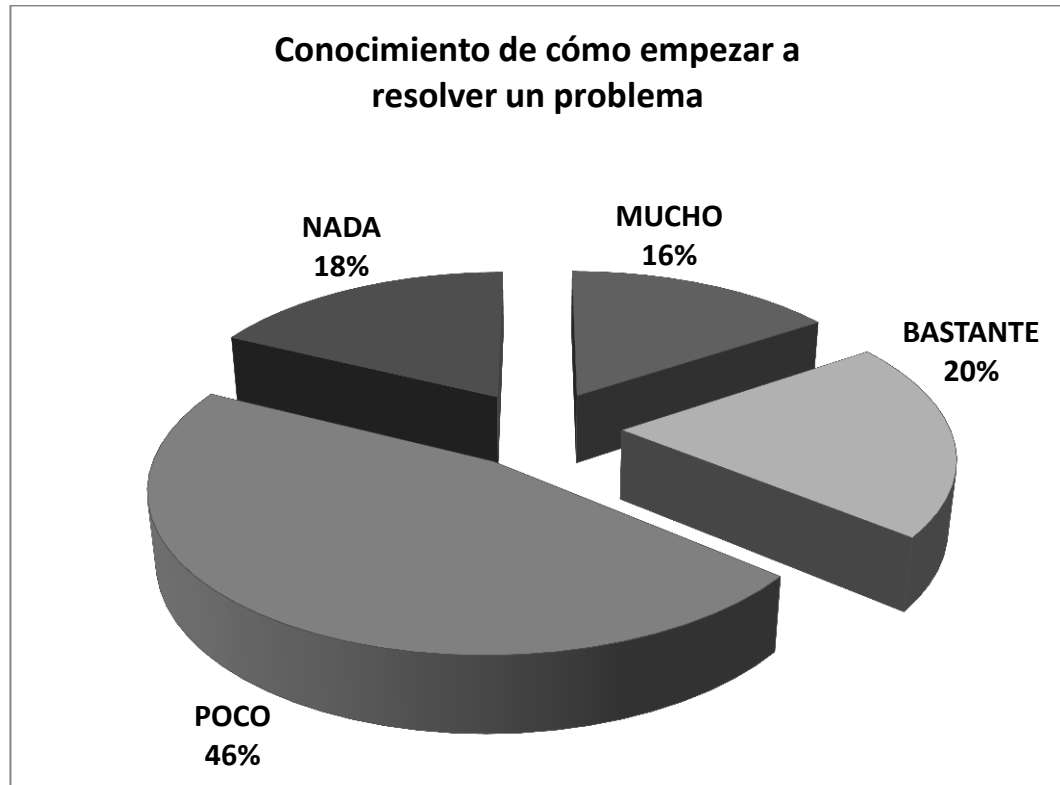
Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 27, el 20% de los estudiantes afirma que le surgen muchas ideas al resolver determinado problema, el 26% afirma que le surgen bastantes ideas, el 45% afirma que les surgen pocas ideas y el 9% no le surgen nada de ideas.

Una gran parte de los estudiantes afirma que les surgen pocas ideas al resolver un problema, lo cual indica que no conocen o no saben por dónde empezar con el problema y desconocen métodos o estrategias a aplicar.

## Gráfica No. 28

Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas.  
Estudio realizado con estudiantes del Instituto Normal Centro América J.V.  
Mayo de 2012



Fuente: elaboración propia obtenida a partir de Encuesta realizada a estudiantes.

En la Gráfica No. 28 se puede notar que únicamente el 16% de los estudiantes sabe mucho por dónde empezar al comenzar a resolver un problema, el 20% sabe bastante por dónde empezar, el 46% sabe poco, y el 18% no sabe por dónde empezar.

La mayoría de los estudiantes no sabe o sabe poco por dónde empezar cuando se le plantea un determinado problema, lo cual indica que desconocen los pasos o procedimientos para resolver el problema.

## **CAPÍTULO IV**

### **DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

Esta investigación se realizó con docentes del área de Matemática y estudiantes de la carrera de Sexto Magisterio Primaria y Sexto Magisterio Preprimaria del Instituto Normal Centro América –INCA- Jornada Vespertina, ubicado en la 1a. Calle "C" 2-29 Zona 1 de la ciudad de Guatemala, con el objetivo de indagar la situación actual de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en dicho Instituto, las estrategias que los estudiantes utilizan, el nivel de aprendizaje de la resolución de problemas, así como los factores que influyen en el proceso de resolución.

#### **4.1. Estrategias de resolución de problemas matemáticos**

Las estrategias de resolución de problemas son operaciones mentales que los estudiantes utilizan para llegar a la solución de un problema. Una estrategia es un “Procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento “ad hoc” y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de las acciones de búsqueda de la solución” (Campistrous y Rizo, 2000) Citado en Cruz, M. (2002). Es decir, son procedimientos que el estudiante utiliza para orientarse en situaciones en donde no se conoce un camino previamente establecido. Dado el carácter orientativo, las estrategias no garantizan la solución del problema, sin embargo, utilizadas de manera consciente conducen al estudiante a la solución, como lo expresa González, G. (2010) las estrategias

“incrementan la probabilidad de llegar a la solución correcta, pero no garantizan que así sea”.

Además de lo expuesto en el párrafo anterior, el Currículo Nacional Base –CNB- para la formación inicial de docente del nivel primario, enfatiza entre otras competencias, desarrollar en los estudiantes la habilidad de resolver problemas en situaciones reales. (MINEDUC. 2006. CNB. Formación inicial de docentes de nivel primario, pág. 118). Dado que esta competencia es amplia y compleja, es una competencia generadora de otras en el desarrollo de distintas habilidades matemáticas en el estudiante. Además, los matemáticos indican que para aprender a resolver problemas, se debe resolver problemas; pero el aprendizaje de la resolución de problemas debe ser un proceso consciente, conociendo distintos métodos de resolución y por supuesto, estrategias; he aquí la importancia de dar a conocer la situación actual de este tema a la comunidad educativa en Guatemala.

De acuerdo con los resultados de esta investigación, se encontró que tanto docentes como estudiantes desconocen las distintas estrategias que se pueden utilizar de manera consciente en el proceso de resolución de problemas matemáticos. La mayoría de las estrategias detectadas fueron aplicadas de manera inconsciente, las estrategias detectadas fueron utilizadas de forma intuitiva y no de manera consciente. Rizo, C y Campistrous, L. (1999) llama a estas estrategias “irreflexivas” puesto que se utilizan sin un análisis previo por el estudiante. Por el contrario si las estrategias son seleccionadas de manera consciente con un objetivo, dichas estrategias son llamadas “reflexivas” en esta investigación, únicamente los docente aplicaron de manera consciente algunas estrategias como la aplicación de ecuaciones.

Asimismo, Reys (1987) citado por Luceño, J. (1999) afirma que las estrategias pueden enseñarse, que éstas son útiles y que enseñando estrategias se enseña a resolver problemas, pero el aprendizaje de dichas estrategias debe comenzar

con los docentes puesto que la mayoría de ellos ignoran las estrategias, los tipos de estrategias, cómo debe enseñarse, así como su verdadero significado.

En cuanto a la utilización de las estrategias generales, la más utilizada por los estudiantes son Ensayo y error pero de forma irreflexiva, esta estrategia es la inmediata a utilizar cuando no se conocen otras mejores, la estrategia que menos utilizaron los estudiantes es el uso de Fórmulas o ecuaciones y Variables especialmente en los problemas de Geometría, por el contrario los docentes utilizaron menos la estrategia de Ensayo y error y prefirieron utilizar ecuaciones en la mayoría de los problemas.

En cuanto a la estrategia que consiste en Realizar dibujos o diagramas, los educandos la utilizaron poco y los docentes no utilizaron dicha estrategia. Polya. G. (1965) recomienda el uso de figuras para resolver problemas aunque éstos no sean geométricos, es decir, que esta estrategia puede utilizarse con cualquier tipo de problema siempre y cuando sea posible.

“Hacer una lista” es una estrategia utilizada por docentes y estudiantes aunque en forma no organizada, no se utilizaron tablas de doble entrada para organizar la información.

Las estrategias específicas: Simetría, Trabajo hacia atrás y Buscar patrones no fueron utilizadas por estudiantes y docentes en los problemas donde era posible aplicarlas. Por otro lado, Descomponer el problema es una estrategia que permite analizar el problema por partes, los estudiantes y docentes aplicaron dicha estrategia aunque de manera intuitiva y los estudiantes fueron desordenados en la utilización de esta estrategia.

Existen algunos problemas teóricos en donde es necesario utilizar las propiedades, leyes y reglas de los números como estrategias: éstas fueron aplicadas en forma correcta por la mayoría de los docentes. Por el contrario, los

estudiantes desconocen la forma de utilizar dichas reglas y leyes como estrategia, esto evidencia deficiencia en el conocimiento de las reglas y leyes de los números y las operaciones.

Finalmente, una etapa fundamental en todo proceso de resolución de problemas matemáticos es la comprobación o verificación de resultados. De acuerdo a la investigación, son pocos los estudiantes que realizan esta etapa del proceso

En términos generales, los docentes enseñan a resolver problemas como complemento de los contenidos alguna vez por semana y las estrategias de resolución de problemas son de poco uso por docentes y estudiantes, no se enseñan especificando los nombres que reciben; las detectadas la mayoría son utilizadas en forma intuitiva, por lo que no resultan efectivas.

#### 4.2. Aprendizaje de la resolución de problemas

Según Paul Halmos, Citado en Nieto, J. (2004) "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones." Por otro lado, Nieto, J. (2004) argumenta que "todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad" y es que la resolución de problemas no sólo se aplica en el campo de la matemática sino en todos los campos del saber humano. Esta habilidad o "arte de resolver problemas" se debe desarrollar en los estudiantes, no sólo en la Matemática, sino en todas las asignaturas.

La prueba objetiva aplicada a docentes y estudiantes contenía 10 problemas seleccionados en función de las posibles estrategias a utilizar y los contenidos son: Aritmética, Algebra y Geometría elemental. La prueba aplicada a docentes, es con dificultad mayor que la prueba a estudiantes, tomando como base que

todo problema debe ser una situación nueva para el resolutor. Por lo que la prueba para estudiantes no podía ser aplicada a los docentes.

No todos los docentes resolvieron los problemas, algunos problemas no fueron resueltos, otros fueron resueltos aplicando estrategias pero no encontraron la solución correcta.

Un alto porcentaje de estudiantes intentó resolver los problemas, pero no encontraron la solución correcta, son pocos los estudiantes que encontraron la solución correcta a los problemas. En general, el promedio de notas de docentes es de 48 puntos y de estudiantes 8 puntos. El porcentaje de docentes que obtuvo resultados en forma satisfactoria es del 33% y nulo por parte de estudiantes. Se puede notar entonces la deficiencia que existe en la Resolución de problemas matemáticos. Estos resultados se puede deber a la falta de conocimientos previos por un lado, de los estudiantes, mas no de los docentes pero el denominador común de estos resultados se debe en gran medida por la falta de práctica y la poca enseñanza de la resolución de problema y por el desconocimiento que se tiene de las distintas estrategias y métodos de resolución. Lo anterior ratifica lo expuesto por Coronel, M.V., Curotto, M.M. (2008). Quienes exponen que “El fracaso de los alumnos en la resolución de problemas se atribuye generalmente a carencias en estrategias y habilidades de resolución, pero también a la ausencia de conocimientos necesarios para abordar este proceso”.

#### 4.3. Factores que influyen en el proceso de resolución de problemas

El proceso de resolución de problemas por ser una actividad intelectual está afectado por una serie de factores que influyen en el proceso, factores de tipo cognitivo y afectivo. Éstos afectan de manera positiva o negativa al estudiante. Según Schoenfeld (1985) las estrategias planteadas son insuficientes para



resolver problemas, pues considera que en el proceso de resolución de problemas intervienen otros factores de carácter emocional, afectivo, psicológico y sociocultural.

En este estudio, se detectaron una serie de factores que influyen en el estudiante durante el proceso de resolución de problemas, estos factores pueden agruparse en dos tipos “factores de tipo afectivo y cognitivo” (Charles y Lester, 1982, citado en Casajús, A. 2005).

Entre los factores cognitivos se puede mencionar el más importante: los conocimientos previos. Los estudiantes poseen niveles bajos de conocimientos matemáticos, específicamente del dominio de las operaciones tales como: fracciones, ecuaciones lineales, proporcionalidad, Geometría y la utilización correcta de las propiedades de los números reales. Los estudiantes tienen conocimiento de los temas en forma general pero no dominan las operaciones que se realizan con cada tema. En el caso de Geometría, varios estudiantes hicieron alusión de este tema, sin embargo, la mayoría no resolvieron los dos problemas de tipo geométrico que contenía la prueba.

Factores afectivos: Schoenfeld, A. (1985) indica que en la resolución de problemas intervienen factores de tipo afectivo. En este estudio se detectaron los siguientes: Frustración, Enojo, Incapacidad, Desesperación y Tristeza; todos éstos se manifiestan en los estudiantes cuando no logran resolver un problemas. Además, Cansancio mental por realizar varios intentos infructuosos, Nerviosismo e Inseguridad: los estudiantes no saben si realmente han resuelto el problema correctamente; Concentración: los estudiantes tienen dificultad al concentrarse y entender lo que dice el texto del problema, en el caso de los problemas verbales.

Otros factores son: el Tiempo, no todos los estudiantes tienen desarrolladas las habilidades por lo que algunos necesitan más tiempo que otros para resolver el problema, esto además depende de la estrategia a utilizar, algunos lo resuelven

en un tiempo mínimo por el tipo de estrategia que utilizan, mientras que otros se tardan más por elegir una estrategia menos efectiva.

El Gusto por los retos o la disposición del estudiante de querer enfrentarse al problema, es otro factor importante. En la resolución de un problema según Echenique, G. (2006). Intervienen aspectos internos tales como “el esfuerzo y la concentración, el interés, el gusto por aceptar retos,..” entre otros. De acuerdo con los resultados de la investigación, no todos los estudiantes tienen el gusto por resolver problemas, y esto se puede deber a la falta de práctica, puesto que no tienen la costumbre de resolver problemas.

Una buena Organización de la información es otro factor que coadyuva para llegar a la solución de todo problema. De acuerdo con los resultados de este estudio, los estudiantes son poco ordenados y organizados en el desarrollo del proceso de resolución de problemas. Esto confirma lo expuesto en Nápoles Valdez, J.E. (2005) quien indica que los estudiantes tienen dificultad para “planificar el proceso de resolución del problema: representación mental del enunciado del problema, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados, verificación de la solución, revisión y supervisión de todo el proceso de resolución”.

Otro factor interesante en este estudio es la Conciencia que los estudiantes tienen acerca de la importancia de la resolución de problemas, ellos consideran que este tema les ayudará en el futuro en la vida diaria y en su campo laboral, esto se evidencia en los intentos que realizan al resolver los problemas, aunque sin éxito, en la mayoría la deficiencia es notoria.

La Creatividad es otro factor poco desarrollado en los estudiantes. “El pensamiento creativo se define como aquel que produce resultados originales y valiosos. Las estrategias recomendadas para el pensamiento creativo incluyen la

dirección del problema para localizar y aceptar los que requieren una solución, la búsqueda de ejemplos contrarios, la búsqueda de interpretaciones alternativas de los fenómenos, la generación de ideas a través de los «torbellinos de ideas» y el descubrimiento de analogías, y la planificación de la dirección del esfuerzo considerando con cuidado muchas opciones”, Mutis, L. (s.f.). El estudio muestra que al resolver un problema, la mayoría de ellos no les surgen ideas para resolver dicho problemas, la Creatividad, en este contexto, implica la elección correcta de las estrategias y el buen uso que se hace de ellas.

La creatividad en la resolución de problemas se puede desarrollar enseñando a los estudiantes con más frecuencia la resolución de verdaderos problemas y trabajar procesos metacognitivos. Las estrategias metacognitivas son aquellas que se utilizan para controlar y regular las cognitivas como lo expone Iriarte, A. y Sierra, I. (2011), “las estrategias metacognitivas hacen parte del proceso, caracterizadas por la toma de conciencia cognitiva de las diferentes estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema”. Las estrategias metacognitivas puede ser un punto de partida para estudios posteriores relacionado con la resolución de problemas.

Finalmente, los estudiantes desconocen la forma de cómo comenzar a resolver un problema, lo que evidencia el desconocimiento de métodos de resolución aunque una gran parte afirme que razonan y analizan el problema antes de empezar a resolver.

Según los objetivos previamente establecidos en esta investigación los cuales son: *determinar las estrategias que se enseñan para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos*, los hallazgos son: los docentes no enseñan de manera específica las distintas estrategias puesto que los mismos desconocen dichas estrategias y la enseñanza de la resolución de problemas es escasa y no se le da la importancia necesaria, Esto debe ser lo contrario, como lo expresa Vila, A. y Callejo, L. (2006, p. 14) “la resolución de problemas es el

corazón mismo de las matemáticas y que en ella debería centrarse la formación de los alumnos”.

El segundo objetivo establecido es *determinar las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos*. Los hallazgos principales en esta investigación son las siguientes: estrategias que los estudiantes utilizan con mayor frecuencia son: Ensayo y error, Lista de datos, Descomponer el problema; con menor frecuencia: Realizar dibujos o diagramas, Utilizar variables; utilización casi nula de las estrategias: Buscar patrones, Simetría, Trabajo hacia atrás y Ecuaciones.

El tercero y último objetivo es *determinar los factores que afectan el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos*. Se determinó que los factores que influyen en la resolución de problemas son de carácter afectivo: Frustración, Enojo, Incapacidad, Desesperación, Tristeza, Cansancio, Nerviosismo, Concentración. Inseguridad; y cognitivos: los conocimientos matemáticos previos. Los estudiantes tienen pocos conocimientos de los siguientes temas: propiedades de los números, operaciones con fracciones, ecuaciones, patrones numéricos y geometría.

En términos generales, el aprendizaje de la resolución de problemas es deficiente, tanto por docente como estudiantes de Sexto Magisterio Primaria y Sexto Magisterio Preprimaria. Como consecuencia inmediata de estos resultados será la baja formación que tendrán los estudiantes de estos futuros docentes, además para su desenvolvimiento en su formación universitaria y campo laboral, en donde es necesario resolver problemas reales que involucra la Matemática.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### A. Conclusiones

1. La resolución de problemas es una competencia que debe desarrollarse en los estudiantes puesto que no sólo permite mostrar la utilidad de la matemática, sino para que sean competentes en situaciones reales de la vida diaria en donde es necesario resolver problemas. En este estudio realizado, los docentes están conscientes de la importancia del papel de la resolución de problemas, a pesar de ello, la misma se ha dejado en segundo plano, no se le ha dado la importancia en cuanto a su enseñanza como contenido y como objetivo de la Matemática, a pesar de que el Currículum Nacional Base enfatice desarrollar en los estudiantes esta competencia. Por tanto, docentes como estudiantes, no tienen sólidos conocimientos del proceso de resolución de problemas matemáticos, así como de los métodos y estrategias de resolución. Son escasas las estrategias que los docentes utilizan de manera consciente, la mayoría de ellas son utilizadas de manera intuitiva. Por otro lado, los estudiantes desconocen por completo las estrategias de resolución de problemas que existen y, que está documentado, aunque en su proceso de resolución de problemas muestran el uso de algunas estrategias, generalmente son utilizadas de manera intuitiva, observando únicamente a sus maestros que resuelve problemas, mostrando su habilidad como conocedores de la Matemática. A los estudiantes se les exigen y se asume que deben ser capaces para resolver cualquier problema que el docente les plantea, cuando no se les ha enseñado cómo resolverlo.

2. El aprendizaje de la resolución de problemas por los estudiantes es deficiente, como resultado de la falta de enseñanza por los docentes, respecto a métodos de resolución; asimismo, del desconocimiento de estrategias y los bajos niveles del dominio de las reglas, leyes y operaciones por los estudiantes. La enseñanza de la Matemática se ha quedado únicamente en un nivel de comprensión, en donde el estudiante, únicamente realiza ejercicios y no ha llegado al nivel de utilización de la información que es donde se debe ser capaz de utilizar la Matemática: en la resolución de problemas. El porcentaje de docentes que aprobó es del 48% y de estudiantes 7%, los cuales son resultados deficientes para ambos.
  
3. En todo proceso de aprendizaje, existen factores que influyen de alguna u otra manera en la resolución de los problemas matemáticos; especialmente, por ser una actividad que requiere análisis y razonamiento, influyen una serie de factores determinantes. En este sentido, los factores que más sobresalen, fueron en su mayoría: el sentimiento de incapacidad para resolver los problemas y para la comprensión de los mismos. Como consecuencia, ante tal frustración manifiestan sentimientos como: enojo, incapacidad, desesperación, tristeza, cansancio, nerviosismo, desconcentración e inseguridad. Además, en los estudiantes influyen de manera significativa en el “arte de resolver” problemas, factores como el tiempo, la creatividad, el análisis previo y el razonamiento.

## B. Recomendaciones

- Enfocar la enseñanza de la matemática tomando como eje principal el desarrollo de la competencia de Resolución de problemas en los estudiantes. Se sugiere que a nivel universitario, se prepare a los futuros Profesores de Enseñanza Media sobre la enseñanza de la resolución de

problemas con énfasis en la aplicación de estrategias, para poder desarrollar en sus futuros alumnos esta habilidad, contribuyendo de esta manera a erradicar el prejuicio de que únicamente unos pocos pueden resolver problemas. Algunos temas se pueden iniciar por medio de un problema, haciendo de la resolución de problemas una metodología de la enseñanza. En el –CNB- de todos los grados y niveles se deben incluir los métodos y las estrategias de resolución de problemas como contenido de la Enseñanza de la Matemática.

- Se debe enseñar a resolver problemas en todo momento: como introducción de un tema nuevo, como motivación de la clase para demostrar las aplicaciones de la matemática, para reafirmar los conocimientos previos; asimismo, en las tareas del aula o de casa y en las pruebas. En general, el estudiante debe saber que la Matemática consiste en resolver problemas y dar soluciones. Y en todo esto, se debe hacer énfasis en la aplicación de métodos y de las distintas estrategias para cada momento, de tal manera que los estudiantes adquieran confianza en sí mismos y puedan notar que cualquier estudiante regular puede resolver problemas.
- Se deben plantear a los estudiantes problemas de acuerdo con su nivel de conocimientos y su capacidad, motivarlos para que no se frustren y puedan controlar sus emociones y sentimientos, de manera que este sistema les ayude de manera positiva y puedan experimentar el gusto por los retos en la resolución de problemas.

## REFERENCIAS

### A. Bibliográficas

- Abrantes, P., Barba C., Segarra, L. I., García, J.A., y Martí, E. (2005). *La resolución de problemas en matemáticas*. Barcelona, España: Grao.
- Andreescu, T., Enescu, B. (2006). *Mathematical Olympiad Treasures*. United States of America: Birkhauser.
- Babini, J. (1967). *Historia de las ideas modernas en matemáticas*. (2ª. Ed.). Argentina: Ed. Unión Panamericana, Washington D. C.
- Bluman, A.G. (2005). *Math word problems demystified*. United State of America: McGraw-Hill.
- Corbalán, F. (2003). “*La matemática aplicada a la vida cotidiana*” (6ª. Ed.). Barcelona, España: Grao.
- Cofman, J. (1994). *What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians*, Oxford, New York: Clarendon Press.
- Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.



- Davidson, J. E. & Sternberg, R. J. (2003). *The psychology of problem solving*. New York: Cambridge University Press.
- De Bono, E. (1991). *El pensamiento lateral: el manual de creatividad*. Buenos Aires: Paidós plural.
- Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer.
- Gutiérrez, L.; Martínez, E. y Nebreda, T. (2008). Las competencias básicas en el área de matemáticas. CUADERNOS DE EDUCACION. Gobierno de Cantabria. España: Consejería de educación
- Halmos, P. (1991). *Problems for Mathematicians Young and Old*, Washington: Math Assoc. Amer.
- Johnson, M. (1999). *How to Solve Word Problems in Algebra*. (2a. Ed.). New York: McGraw-Hill.
- Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems: an instructional design guide*. United States of America: John Wiley and Sons.
- Kalomitsines, S. (2008). *How to solve problems: new methods and ideas*. New York: Nova Science Publishers, Inc.
- Krantz, S. G. (1996). *Techniques of problem solving*. U.S.A.: American Mathematical Society,
- Lacasa, P. y Herranz, P. (1995). *Aprendiendo a aprender: Resolver problemas entre iguales*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Larson, L (1983). *Problem-solving through problems*. New York: Springer-Verlag.
- Marzano, R. J. & Kendall, J.S. (2007). *The new taxonomy of educational objectives*. California, EE.UU. Corwin Press.
- Marzano, R. J. y Pickering, D. J. (2005). *Dimensiones del aprendizaje. Manual para el maestro*. México: ITESO
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison- Wesley Publishers Limited.
- Nápoles Valdez, J.E. (2005). *Aventuras, Venturas y Desventuras de la Resolución de problemas en la escuela*. Argentina: Corriente.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA. U.S. A.: NCTM.
- Nérci, I. G. (1973). *Hacia una didáctica general dinámica*. (2ª. Ed.). Buenos Aires: Kapelusz.
- Nieto, J. (2005). *Olimpiadas matemáticas: el arte de resolver problemas*. Colección Minerva no. 37. Venezuela: CEC, S.A.
- Polya. G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México:Trillas
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. Combined Edition, United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

- Puig, L. y Calderón, J. (1996) *Investigación y Didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia. España: Centro de Publicaciones.
- Posamentier, A. & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions*. California: Corwin press, Inc.
- Posamentier, A. & Schulz. W. (1993). *The art of problem solving: A resource for the mathematics teacher*. California: Corwin Press, Inc.
- Rey Pastor, J y Babini, J (1985). *Historia de las Matemáticas*. (2 Vols.) Barcelona, España: Gedisa.
- Rodríguez Moguel, Ernesto A. (2005). Metodología de la Investigación. Colección Héctor Merino Rodríguez. México: Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- Santos Trigo, L.M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de investigación #28(7). Programa Nacional de Formación de Profesores de Matemática. México: CINVESTAV.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Solow, D. (1993). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. (3ª. Reimpresión). México: Limusa.
- Soto Apolinar, E. (2008). *Enseñanza efectiva de las matemáticas*. México.

- Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10,000 años*. Barcelona, España: Crítica.
- *The Contest Problem Book IV*. Annual High School Examinations, 1973-1982. U.S.A.: The Mathematical Association of America.
- *The Contest Problem Book IX*. American Mathematics Competition 2001–2007, U.S.A.: The Mathematical Association of America.
- Toboso, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos*. Valencia, España: Universitat de Valencia, Servei de Publicacions.
- Vila, A. y Callejo, L. (2006). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias de la resolución de problemas*. (2a. Ed.). Madrid: Narcea Ediciones.
- Villalobos, Elvia M. (2003). *Educación y estilos de aprendizaje-enseñanza*. Vol. 4 Investigación para la docencia. México: Publicaciones Cruz., O. S.A.
- Wickelgren, W. (1974). *How to solve problems: elements of a theory of problems and problem solving*. New York, USA: W. H. Freeman and Company.
- Zeitz, P. (2007). *The art and Craft of solving problems*. (2a. ed.). U.S.A. John Wiley and Sons, Inc.

## B. Diccionarios

- *Diccionario de Matemática*. (2001). Colombia: Norma.
- *Diccionario general de la lengua española Vox* (1997). Title from disc label. Barcelona: Biblograf, S.A.; Tecnolingua, S.L.
- Gallo, R. (2000). *Diccionario de la Ciencia y la Tecnología*, México: Universidad de Guadalajara.
- Apolinar, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. (3ª. Ed.). Versión electrónica. Monterrey N.L. México. Recuperado el 10 de noviembre de 2010 de: <http://www.aprendematematicas.org.mx/>
- Manuel, S. y Saavedra, R. (2001) *Diccionario de Pedagogía*. México: Pax.

## C. Documentales

- Agudelo, G., Bedoya, V. y Restrepo, A. G. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos*, Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de ciencias de la educación.
- Arriola, P. y Saz, M.A. (2010). *Percepción de los estudiantes graduandos sobre las evaluaciones nacionales 2009*. Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa. Ministerio de Educación, Guatemala.

- Casajús L., A. (2005). *La resolución de problemas aritmético-verbales por Alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH)*. Memoria de tesis doctoral. Programa de Doctorat en Didàctica de Matemàtiques i Ciències Experimentals. España: Universitat de Barcelona.
- Castillo Valdez, I.A. (2011). Estrategias de aprendizaje que Utilizan los estudiantes del colegio Discovery y su relación con el Rendimiento académico en Matemática. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Rafael Landívar, Guatemala.
- Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática*. Tesis doctoral no publicada, Instituto Superior Pedagógico de Holguín, Cuba. Localizado en: <http://www.ilustrados.com/documentos/estrategmetacognitivaforproblemas.pdf>
- Doménech, M. (2004). El papel de la inteligencia y de la Metacognición en la resolución de problemas. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Psicología. Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, España.
- Ferrer, M. (2000). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana*. Tesis doctoral no publicada. Instituto superior pedagógico "Frank País García" Facultad de ciencias, Departamento de matemática-computación. Santiago de Cuba.

- Gil, N., Blanco, L., Guerrero, E. (2004). *El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos*. Investigación institucional. Universidad de Extremadura, España. Localizado en: [http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340\\_20.pdf](http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_20.pdf)
- Hernández, F. (1991). *La enseñanza de las ecuaciones lineales, una Propuesta experimental*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad de San Carlos, Facultad de Humanidades, Guatemala.
- Jiménez Rodríguez, V. (2004). *Metacognición y comprensión de la lectura: Evaluación de los componentes estratégicos (procesos y variables) mediante la Elaboración de una escala de conciencia Lectora (escola)*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Psicología: Ecuador.
- Ministerio de Educación de Guatemala (2006). Currículum Nacional Base. Formación inicial de docentes de nivel primario. Guatemala: Tipografía Nacional
- Ossma Sierra, Y. P. y Teherán Villa, N del S. (2003). *Estrategias metacognitivas para la comprensión y resolución de problemas aditivos en el sistema numérico de los enteros en estudiantes de 7º del Colegio Dulce Nombre de Jesús de Sincelejo*. Tesis de Licenciatura no publicada. Facultad de Educación y Ciencias, Universidad de Sucre, Ecuador.
- *Proyecto Educativo Institucional*. (2010). Instituto Normal Centro América, Jornada Vespertina. Guatemala.

- Quintana, E. (2005), *Metacognición, resolución de problemas y Enseñanza de las matemáticas. Una Propuesta integradora desde el enfoque Antropológico*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid. España.
- Roque Carrera, M. F. (2005). *Factores que influyen en el rendimiento de la Matemática en el estudiante del Ciclo Básico, del Instituto Oficial Mixto Básico Leonidas Mencos Ávila. Tiquisate, Escuintla*. Tesis de Licenciatura no publicada. Facultad de Humanidades, Universidad de San Carlos, Guatemala.
- Say Tzul, A. D. (2005). *Correspondencia entre la actitud y el aprendizaje de las matemáticas*. Tesis de Licenciatura Facultad de Humanidades, Universidad de San Carlos, Guatemala.
- Serentill, P.L. (2005). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos con alumnos recién llegados de Ecuador en Secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona, España.
- Silva Laya, M., Rodríguez Fernández, A. y Santillán González, A. (2009). *Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizados por alumnos de 6º grado de Primaria*. Investigación realizada por el Centro de Investigaciones de Modelos Educativos, Universidad Iberoamericana, México.
- Soberanis Gálvez, J. L. (2002). *El constructivismo y sus aplicaciones en la enseñanza de la Matemática de 4º. Grado de Magisterio de Educación Física del Municipio de Salamá, Baja Verapaz*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad de San Carlos, Guatemala.



- Tárrega, R. (2008). ¡Resuélvelo! *Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Universitat de Valencia, España.

#### D. E-gráficas

- Acuña, C. (2003). *Cómo enseñar a resolver problemas a nuestros alumnos*. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. Recuperado el 12 de junio de 2011 de: <http://contexto-educativo.com.ar/2003/3/nota-04.htm> Año 5, N° 27.
- Álvarez, J. (1981). *La resolución de problemas en Psicología*. Revista Latinoamericana de Psicología, Vol. 13, No. 002 pp.247-266 Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia. Recuperado el 10 de agosto de 2010 de: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/805/80513202.pdf>
- Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L.J. y Piedehierro, A. (2009). *Resolución de problemas de matemáticas y control emocional*. M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 151-160). Santander: SEIEM. Recuperado el 3 de mayo de 2011 de: [http://funes.uniandes.edu.co/1641/1/296\\_Caballero2009Resolucion\\_SEIEM13.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1641/1/296_Caballero2009Resolucion_SEIEM13.pdf)
- Carvajal, C. y Barrantes, H. (2008). *¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense*. Cuadernos de investigación y formación en educación Matemática Año 3, Número 4, pp. 83-98. Recuperado el 5 de febrero de 2011 de: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/32/34>

- Coronel, M.V., Curotto, M.M. (2008). *La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje*, *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 7, 2: 463-479. Recuperado el 12 de enero de 2010 de <http://www.saum.uvigo.es/reec>
- De Guzmán, M (1995). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. España, Madrid: Pirámide; Recuperado el 10 de junio de 2010 de: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/resolucion>
- De la Rosa, J.M. (2007). *Didáctica para la resolución de problemas*. Educación primaria. Andalucía, España. Recuperado el 28 de noviembre de 2010 de: <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~cepc3/competencias/mates/primaria/>
- Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa. (2008). *Evaluación de graduandos 2008*, Informe técnico de resultados, Guatemala, 116 p. Recuperado el 5 de ene. 2010. de: <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/Publicaciones.asp>.
- Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa. (2008). *Prueba liberada de Matemática graduandos 2008*. Recuperado el 4 de enero de 2010 de: <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/evaluaciones.asp>
- Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa. (2012). Informe de resultados de la evaluación de graduandos 2011. Guatemala: Ministerio de Educación. Recuperado el 5 de mayo de: <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/>

- Echenique, G. (2006). Matemáticas resolución de problemas, Gobierno de Navarra. Departamento de Educación (1ª. Ed.) España. Recuperado el 4 de febrero de 2010 de: <http://www.educacion.navarra.es/portal/Informacion+de+Interes/Publicaciones/Buscar?letra=m>
- Fernando García Fresneda:(2002). *El Proceso de resolución de problemas: técnicas heurísticas*. Recuperado el 20 de julio de 2001 de: [http://www.profes.net/newweb/mat/apieaula2.asp?id\\_contenido=33848](http://www.profes.net/newweb/mat/apieaula2.asp?id_contenido=33848)
- Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Recuperado el 3 de abril de 2010 de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>
- González, F. (1996), "Acerca de la metacognición", en *Paradigma*, vols. XIV–XXVII, núms. 1–2, pp. 109–135. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: <http://es.scribd.com/doc/47059907/METACOGNICION>
- Gonzáles, G. (2010). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, psicología del razonamiento de los números. DIDAC, 56-67. México: Universidad Iberoamericana. Recuperado el 12 de mayo de 2012 de: <http://www.uia.mx/web/files/didac/56-57.pdf>
- Gutiérrez, S. (2009). *Prueba Liberada de Matemáticas, Graduandos 2009. Forma GRAD1*. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación. Recuperado el 12 de enero de 2012 de: <http://www.mineduc.gob.gt/DIGEDUCA>.

- Gutiérrez, S. (2012). *Prueba Liberada de Matemáticas. Graduandos 2010, Forma A*. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación.
- Iriarte, A. y Sierra, I. (2011), *Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos*. 1ª Ed. Colombia: Fondo editorial Universidad de Córdoba. Recuperado el 2 de abril de 2012 de: <http://edunexos.edu.co/index.php/publicaciones/libros?task=view&id=4&catid=30>
- Larios, E. (2005). *Reseña de Matemática emocional. Los afectos en el Aprendizaje Matemático*. de Inés María Gómez Chacón. Educación Matemática, abril, Vol. 17 No. 001, pp. 185-189. Santillana D.F. México. Recuperado el 6 de mayo de 2011 de: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40517110.pdf>
- Martínez Barragán, L., Negrete Agámez, M. y Sierra Pineda, I. (2011). *Estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos desarrollo de habilidades metacognitivas en educación infantil*. 1ª. Ed. Colombia: Fondo editorial Universidad de Córdoba. Recuperado el 3 de marzo de 2012 de: <http://edunexos.edu.co/index.php/publicaciones/libros?task=view &id=12&catid=30>
- Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas matemáticos*. Taller de formación Matemática. Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004. Recuperado el 12 de octubre de 2010 de: <http://ommcolima.ucof.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf>
- Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE, 2006). *El Programa PISA de la OCDE ¿qué es y para qué sirve?* Recuperado el 10 de diciembre de 2011 de: [www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org).

- Penalva, M. Carmen, Posadas, José Adolfo y Roig, Ana Isabel. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación matemática*, 22(3), 23-54. Recuperado en 14 de octubre de 2012, de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-58262010000300003&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000300003&lng=es&tlng=es) .
- Pérez, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2007). Ansiedad matemática de los alumnos que ingresan en la universidad de granada, pp. 171-180. Recuperado el 12 de marzo de 2011 en: [http://funes.uniandes.edu.co/1250/1/Perez-Tyteca2008Ansiedad\\_SEIEM\\_171.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1250/1/Perez-Tyteca2008Ansiedad_SEIEM_171.pdf)
- Pintado, José M. (2011). *Las Competencias y/o Capacidades básicas*. *Revista Electrónica de Investigación e Innovación Educativa y Socioeducativa*, V. 2, No. 2, Págs. 49-74. Recuperado el 3 de mayo de 2011 en [http://www.in.uib.cat/pags/volumenes/vol2\\_num2/pintado/index.html](http://www.in.uib.cat/pags/volumenes/vol2_num2/pintado/index.html)
- Programa Nacional de Evaluación del Rendimiento Escolar. (2004). *Informe de Resultados del Programa Nacional de Evaluación Del Rendimiento Escolar de 2004*. Guatemala, Recuperado el 8 de febrero de 2009 en: <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/dbresultados.asp>
- Programa Nacional de Evaluación del Rendimiento Escolar. (2001). *Informe de Resultados del Programa Nacional de Evaluación Del Rendimiento Escolar de 2001*. Guatemala, Recuperado el 8 de febrero de 2009 en: <http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/dbresultados.asp>

- Puig, L. (2006). *La resolución de problemas en la historia de las matemáticas*. Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I. España. Recuperado el 4 de junio de 2011 de: [http://www.uv.es/puigl/2004\\_simposioiberoamericano.pdf](http://www.uv.es/puigl/2004_simposioiberoamericano.pdf)
- Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española*.(22.a. Ed.) Consultado el 3 de marzo de 2011 en: <http://www.rae.es/rae.html>
- Rizo C., C y Campistrous, L. (1999) *Estrategias de resolución de problemas en la escuela*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 2. Número 2-3. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México. Recuperado el 15 de julio de 2010 de: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33520304.pdf>
- Santos Trigo, L.M. (2007). *La Educación Matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México. Recuperado el 3 de marzo de 2011 de: <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/670>
- Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de Psicología*, Vol., 26, Nº 1, pp. 143-148. Recuperado el 11 de julio de 2011 de: [http://www.cop.es/delegaci/andocci/files/contenidos/VOL\\_26\\_1\\_11.pdf](http://www.cop.es/delegaci/andocci/files/contenidos/VOL_26_1_11.pdf)

## **Apéndice**

Propuesta didáctica

Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media  
EFPEM



Propuesta

**LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS  
CON APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS ESPECÍFICAS DE  
MANERA REFLEXIVA**

Leonel Humberto Ajanel Torres.

Guatemala, octubre de 2012



## 1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una competencia que los estudiantes deben desarrollar para afrontar situaciones nuevas en la vida cotidiana y darle solución, que consiste en “Identificar, analizar y definir los elementos significativos que constituyen un problema para resolverlo con criterio y de forma efectiva”. Es una competencia fundamental que los estudiantes deben desarrollar en los centros educativos y prepararlos para la aplicación de conocimientos y habilidades matemáticas aprendidas, en situaciones reales.

Sin embargo, *para aprender a resolver problemas es necesario resolver problemas* y, para ser competentes en la resolución de problemas se deben tener una serie de conocimientos previos, conocimientos de métodos de resolución y estrategias de resolución de problemas. Las estrategias son herramientas que contribuyen para la consecución de la solución de un problema, utilizadas de manera adecuada.

La resolución de problemas no es una actividad que pertenece únicamente al aprendizaje de la Matemática, sino que puede enseñarse en distintas áreas del conocimiento: en Lenguaje, Biología, Física, Química, Ciencias Sociales y demás áreas; pero la Matemática es la materia ideal para desarrollar esta competencia.

Además la resolución de problemas puede abordarse como metodología de la enseñanza y como contenido declarativo en la enseñanza de la Matemática, por lo que la resolución de problemas debe ser un eje fundamental en esta materia.

## **2. OBJETIVOS**

### 2.1. General.

Coadyuvar en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, especialmente en la aplicación reflexiva de estrategias de resolución de problemas.

### 2.1. Específicos:

2.1.1. Desarrollar en los estudiantes las habilidades para resolver problemas matemáticos.

2.1.2. Aplicar distintas estrategias de manera reflexiva para resolver problemas

2.1.3. Utilizar la resolución de problemas como metodología para el aprendizaje de la Matemática.

2.1.4. Promover la enseñanza de la Matemática por medio de la resolución de problemas.

2.1.5. Desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes.

## **3. JUSTIFICACIÓN**

La resolución de problemas debería ser el centro principal de la enseñanza de la Matemática en todos los niveles educativos en Guatemala. Ruiz y otros (2003, p. 325) citado en Calvo, M.(2008) explican que la resolución de problemas se

concibe “como generadora de un proceso a través del cual, quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva”. De esta manera, la resolución de problemas puede considerarse como el eje central de la enseñanza en Matemática.

El Curriculum Nacional Base para la formación inicial de docentes de nivel primario describe el área de Matemática como sigue: “El área de matemática tiene la finalidad de afianzar y ampliar las competencias relacionadas con el análisis, razonamiento y comunicación eficaz de las ideas, cuando los y las estudiantes se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en una variedad de contextos. Las competencias propuestas presentan la característica de interrelacionarse con otras áreas y demandan de una relación directa para la resolución de problemas”. Pero para concretar esta competencia, se debe enseñar al estudiante a resolver problemas aplicando métodos de resolución e indicando las posibles estrategias a utilizar. Además, los problemas deben ser tal que los estudiantes desarrollen sus habilidades relacionadas con el análisis y el razonamiento y no únicamente realizar ejercicios mecanizados; los problemas deben ser situaciones nuevas para el estudiante.

Los problemas deben enseñarse en todo momento, para motivar la clase, para presentar un tema nuevo, para evaluar un tema, en las tareas, en el trabajo en clase y en las evaluaciones periódicas. Pero se debe enseñar a resolver previamente con la utilización de las estrategias.

De la Rosa, J. (2007) expone, entre otras, las razones por las cuales se debe enseñar a resolver problemas:

- La resolución de problemas implica poner un mayor énfasis en el desarrollo del aprendizaje que en su memorización.

- La resolución de problemas es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos.
- Solucionar problemas ayuda a que los estudiantes desarrollen hábitos de organización, trabajo y autoevaluación.
- Contribuye al desarrollo de la capacidad para solucionar otros problemas y aplicar dicho aprendizaje para resolver situaciones de la vida cotidiana.
- Fomenta la participación de los alumnos en su propio aprendizaje.
- Ayuda a confiar en sus posibilidades y a desarrollar hábitos de colaboración.

Por otro lado, de acuerdo con la investigación realizada, los docentes indicaron que en su formación universitaria, no se les enseñó a resolver problemas indicando las distintas estrategias que existen. Dado que los mismos son los que se encargan de la enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio, es necesario que los estudiantes del profesorado de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza media tengan sólidos conocimientos en el tema de resolución de problemas, de los métodos y de las estrategias.

## **4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA**

### **4.1. La resolución de problemas matemáticos con aplicación de estrategias específicas de manera reflexiva**

La siguiente propuesta consiste en proporcionar una serie de estrategias específicas a los estudiantes para que las puedan aplicar de manera reflexiva en la resolución de problemas de manera efectiva haciendo énfasis en la forma de utilizar dichas estrategias y mostrando que un mismo problema puede resolverse aplicando distintas estrategias, a la vez, que el estudiante forme conciencia sobre la importancia del tema en la enseñanza de la Matemática en todos los niveles educativos en Guatemala.

La mayoría de los docentes reducen los problemas al planteamiento de una ecuación, sin embargo, deben ser capaces de resolver el mismo problema aplicando otras estrategias, de esta manera, hacer que sus estudiantes, no se limiten a utilizar una única estrategia, sino explotar su creatividad y capacidad de razonamiento en el proceso, de esta manera, reforzarán contenidos previos y finalmente, tener estudiantes competentes en Matemática.

#### 4.2. Enseñanza de las Estrategias básicas de Resolución de problemas

Existe una diversidad de estrategias que se pueden utilizar al resolver problemas,

Polya, G. (1964) en su diccionario de heurística, explica una serie de estrategias para resolver problemas en general. Por otro lado, Posamentier, A. & Krulik, S. (1998) proponen diez estrategias básicas para resolver problemas matemáticos. Estas estrategias las debe aplicar todo estudiantes de nivel medio.

Las estrategias son las siguientes:

- a) Ensayo y error.
- b) Utilizar dibujos o diagramas.
- c) Plantear ecuaciones.
- d) Aplicar Razonamiento lógico
- e) Buscar patrones
- f) Aplicar simetría.
- g) Resolver un problema equivalente.
- h) Hacer una lista o tabla
- i) Trabajar hacia atrás.
- j) Adoptar diferentes puntos de vista.

Se mostrará cómo utilizar cada una de estas estrategias de manera reflexiva, es decir, que el estudiante al elegir una estrategia, sepa evaluar, la efectividad de la misma.

#### 4.2.1. Ensayo y error

Esta estrategia es utilizada comúnmente por estudiantes que poseen pocos conocimientos o experiencias en la resolución de problemas, sin embargo, es muy útil. Consiste en probar algunos valores elegidos de manera arbitraria que satisfagan las condiciones del problema, cuando esta estrategia se utiliza de manera reflexiva, debe entenderse muy bien las condiciones y los objetivos del problema. Se pueden seguir los siguientes pasos:

- a) Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- b) Verificar con este valor las condiciones indicadas por el problema.
- c) Probar si se ha alcanzado el objetivo del problema.

Ejemplo de aplicación:

**Problema:** El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión, afirmó: “Yo tenía  $x$  años el año  $x^2$ ”. ¿En qué año nació De Morgan?

Se debe encontrar el año de nacimiento de De Morgan. El problema dice que vivió en el siglo XIX, lo cual es otra forma de decir que vivió entre 1800 y 1900. De acuerdo con el planteamiento, uno de los años en que él vivió fue un cuadrado perfecto. Utilizando **Ensayo y error** para encontrar un número que sea cuadrado perfecto que esté entre los números 1800 y 1900. Entonces

El único número natural cuyo cuadrado está entre 1800 y 1900 es 43, Por lo tanto, en 1849 De Morgan tenía 43 años. Entonces, para conocer el año en que nació, se resta 43 de 1849:  $1849-43=1806$ .

Solución: De Morgan nació en 1806.

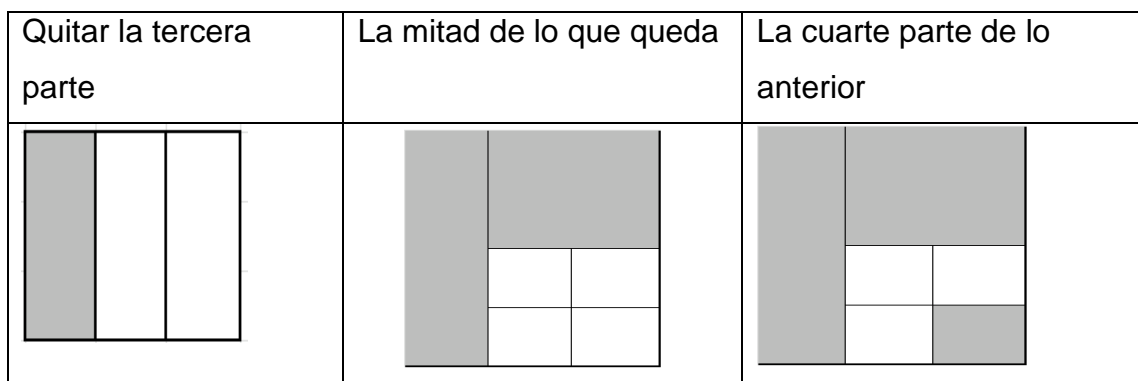
### 4.2.2. Hacer dibujos o diagramas

La utilización de dibujos, figuras o diagramas ayuda a visualizar el problema, identificar los datos, las incógnitas y su relación con otras cantidades. Muestra algunas veces las relaciones entre las cantidades; por lo que, siempre que sea posible se debe utilizar no únicamente en problemas de tipo geométrico sino también en problemas de cualquier tipo, cuando sea necesario. Si los problemas son geométricos, las figuras deben trazarse de manera adecuada y no deben sugerir alguna relación en particular.

Ejemplo de aplicación:

Problema: Un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, luego la mitad del resto y después la cuarta parte de lo que queda y todavía quedan 300 litros de agua. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Aunque este problema se puede resolver aplicando ecuaciones o Trabajo hacia atrás, resulta más sencillo utilizar un dibujo:



Si se observa el dibujo original se divide en 12 cuadraditos iguales, los tres que quedaron no sombreados representan los 300 litros, por lo que cada cuadrado

representa 100 litros,  $100 \times 12 = 1200$  litros, que es la capacidad de estanque lleno.

### 4.2.3. Plantear ecuaciones

La utilización de ecuaciones para resolver problemas, es fundamental, la dificultad que encuentran los alumnos está en transformar el problema al lenguaje algebraico. En este caso, es necesario que el resolutor tenga conocimientos algebraicos y de transformación de datos reales al lenguaje simbólico. Un mismo problema puede resolverse por distintos tipos de ecuaciones, depende de la habilidad y del conocimiento previo que tenga el resolutor.

Ejemplo de aplicación:

La edad de Carla excede en 3 años a la de Daniel y el doble de la edad de Carla más 12 años equivale al triple de la de Daniel. Determina ambas edades.

#### Solución

Datos:

Edad de Carla:  $x$   
Edad de Daniel:  $x - 3$

Planteamiento:

$2(\text{Edad de Carla}) + 12 \text{ años} = 3(\text{Edad de Daniel})$

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 12 = 3(x - 3)$$

$$2x + 12 = 3x - 9$$

$$2x - 3x = -9 - 12$$

$$-x = -21$$

$$x = 21$$

Daniel 18.

Por tanto, Carla tiene 21 años y

### 4.2.4. Razonamiento lógico

De manera formal se puede decir que “el razonamiento lógico es un conjunto de juicios que mantienen entre sí relaciones lógicas de tal forma que partiendo de algunos juicios dados a los que se denominan *premisas se puede* llegar deductivamente a un juicio que no se tenía y que se denomina *conclusión*”.



Sin embargo, en la vida cotidiana todos los días aplicamos el razonamiento lógico pero de manera inconsciente. En la resolución de problemas matemáticos, el razonamiento lógico está presente en todo el proceso, pero considerada como estrategia, puede ayudar a resolver un problema rápidamente sin hacer demasiados cálculos. Pero este razonamiento aplicado en la resolución de problemas requiere de práctica.

Ejemplo de aplicación:

Problema: Tenemos tres cajas, una contiene tornillos, otra tuercas y la otra clavos. El que ha puesto las etiquetas de lo que contenían se ha confundido y no ha acertado con ninguna. Abriendo una sola caja y sacando una sola pieza ¿Cómo se puede conseguir poner a cada caja su etiqueta correcta?

Solución:

La solución del acertijo consiste en leer bien el enunciado: "no ha acertado con ninguna etiqueta". Al tomar una pieza de una de las cajas, conocemos el contenido de esta primera caja. Sabemos además que su etiqueta corresponde con una de las otras cajas y que estas tienen las etiquetas incorrectas. Una de las cajas restantes tendrá la etiqueta de la pieza que conocemos por lo que la despegamos y la colocamos. Dado que sabemos que todas las etiquetas están mal, deducimos que la caja restante (a la que no hemos retirado la etiqueta) la tiene incorrecta y su etiqueta pertenece a aquélla a la que hemos retirado la etiqueta para ponerla en la primera caja, de forma que por eliminación, la última caja contendrá lo que indique la etiqueta de la primera caja.

#### **4.2.5. Buscar un patrón**

En Matemática, un patrón es una relación que existe entre distintas cantidades o formas geométricas que se toma como modelo o punto de referencia para deducir otros valores de la misma especie.

Ejemplo de aplicación:

Problema: Encuentre el dígito de las unidades del resultado de  $8^{19}$ .

Solución: los estudiantes quizás intenten utilizar una calculadora para hacer esta operación, pero el resultado de esta operación contiene demasiados dígitos.

Solución:

Encuéntrese las primeras potencias de 8 y obsérvese el último dígito de cada resultado:

$$\begin{array}{ll} 8^1 = \underline{8} & 8^5 = \underline{32,768} \\ 8^2 = \underline{64} & 8^6 = \underline{262,144} \\ 8^3 = \underline{512} & 8^7 = \underline{2,097,152} \\ 8^4 = \underline{4,096} & 8^8 = \underline{16,777,216}. \end{array}$$

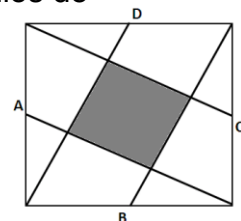
Como puede notarse, los dígitos obedecen a un patrón: 8, 4, 2, 6 8, 4, 2, 6..... el grupo de 4 dígitos se repite. Así que toda potencia de base 8, su último dígito termina en 8 si el exponente es 1, termina en 4 si el exponente es 2, en 2 si el exponente es 3 y en 6 si el exponente es 4; luego se repite. Por lo tanto  $8^8$ ,  $8^{12}$  y  $8^{16}$ , terminan en 6, y siguiendo el patrón, el último dígito de  $8^{19}$  es 2.

#### 4.2.6. Aplicar simetría

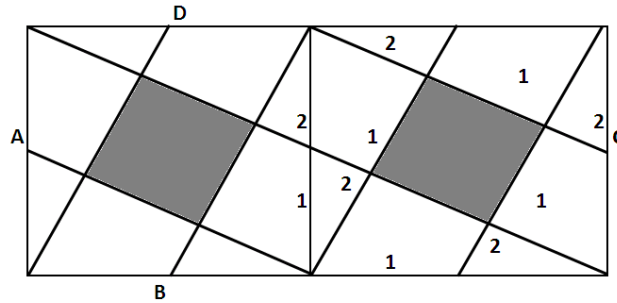
Un objeto es simétrico si hay una o más "acciones" no triviales que deja el objeto sin cambios.

Ejemplo de aplicación

Problema: Un cuadrado tiene 10 cm. de lado. Calcular el área de la zona en negro, de la figura, en la cual A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrado.



Solución: Al principio puede parecer complicado, pero Si se añade otra figura igual, se puede notar que el cuadrado original se ha dividido en 5 Cuadrados pequeños e iguales, porque las regiones 1 y 2 son complementos



Por lo tanto, el área del cuadrado sombreado es:

$$\frac{10^2}{5} = \frac{100}{5} = 20\text{cm}^2$$

#### 4.2.7. Resolver un problema equivalente.

En algunos problemas, el recopilar datos, explorar, comprender, relacionar, hacer conjeturas y analizar, no funciona. En estos casos, la estrategia es tratar de reformular el problema en uno equivalente pero más sencillo. La imaginación y la creatividad son los recursos básicos. Algunas técnicas de reformulación del problema implican la manipulación algebraica y trigonométrica, sustitución o cambio de variable, y la reinterpretación del lenguaje del tema.

Ejemplo de aplicación:

Encuentre todos los valores enteros de  $x$  que satisfagan la ecuación

$$(3x + 7)^{(x^2-9)} = 1$$

Solución. Al ver una expresión lineal elevado a un exponente cuadrático parece requerir

una solución bastante larga y compleja. La solución algebraica tradicional requiere métodos algebraicos avanzados. Sin embargo, se examinará una

versión más simple del **problema equivalente** para averiguar lo que realmente está ocurriendo aquí.

Por ejemplo, véase  $a^b = 1$ . Este problema es un poco más fácil de examinar. La expresión tiene un valor de 1 cuando la base  $a$  es 1, ya que  $1^b = 1$  para cualquier valor de  $b$ . De manera similar, la expresión también tiene el valor 1 cuando el exponente es 0, debido a que  $a^0 = 1$  para cualquier valor de  $a$  distinto de cero. Ahora se tiene un método para atacar el problema original. Pídase a los estudiantes volver al problema original y aplicar lo que encontraron en el análisis de la versión más simple.

Caso I: Mientras que un 1 elevado a cualquier potencia es igual a 1, establezca la base igual a 1:

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 1 \\ 3x &= -6 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Caso II: Considerando que cualquier expresión distinta de cero elevado a la potencia 0 es igual a 1, ponga el exponente igual a 0:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ (x - 3)(x + 3) &= 0 \\ x &= 3 \quad x = -3. \end{aligned}$$

Caso III: Cuando -1 se eleva a una potencia par, también tiene un valor de + 1.

Considere  $3x + 7 = -1$ . Entonces  $x = -\frac{8}{3}$  el cual es no entero.

Caso IV: Cuando la base es 0 y el exponente 0,  $3x + 7 = 0$  nos da que  $x = -\frac{7}{3}$  y  $x^2 - 9 = 0$ ,  $x = \pm 3$ , Este caso es imposible puesto que la expresión  $0^0$  es indefinida.

Por lo tanto, solo hay tres valores enteros de  $x$  para los que la ecuación es correcta, a saber,  $+3, -3, -2$

#### 4.2.8. Hacer una lista o tabla

Una lista que muestra la información del problema, puede ayudar mucho en la resolución de un problema determinado y mostrar la solución, esta lista debe llevar un orden y si es posible organizar la información en una tabla de datos.

Ejemplo de aplicación:

Problema: Una motocicleta comienza su marcha a 30 milla por hora, una hora después un automóvil empieza a perseguirlo viajando a una velocidad de 45 millas por hora. ¿Cuánto tiempo habrá viajado el automóvil cuando alcance a la moto?

Realizando una tabla de datos para ordenar la información:

HORA \ TRANSPORTE	1	2	3	4
MOTOCICLETA	30	60	90	120
AUTOMOVIL	0	45	90	135

Como la motocicleta comenzó una hora antes, en la primera hora, la motocicleta ya habrá recorrido 30 millas mientras que el automóvil cero millas, luego comienza el automóvil a 45 millas la primera hora cuando la motocicleta lleva 60, finalmente, dos horas después de que el auto comenzó a viajar, habrá alcanzado la motocicleta, como muestra la tabla. Por lo tanto, el automóvil alcanzó a la motocicleta en 2 horas.

### 4.2.9. Trabajar hacia atrás

Esta estrategia es muy antigua. Los griegos la utilizaban en problemas de construcción. Se supone un objeto ya construido, y luego se realizaban operaciones hacia atrás comenzando con los últimos datos.

Ejemplo de aplicación:

Problema: La serie de Baseball en Puerto Rico, en la que los Expos jugaron con los Gigantes, atrajo a muchas personas al parque Hiram Bithorn. El primer día fueron 3,000 personas menos que el segundo día. El segundo día fueron 2,000 personas menos que el tercer día. El tercer día fueron 18,678 personas.

¿Cuántas personas fueron el primer día?

Días	Asistencia
Tercer día	18,678
Segundo día	$18,678 - 2,000 = 16,678$
Primer día	$16,678 - 3,000 = 13,678$

Por lo tanto, el primer día asistieron 13, 678 personas.

### 4.2.10. Adoptar diferentes puntos de vista (pensamiento lateral)

Generalmente los problemas que se enseñan a los estudiantes, se resuelven de manera directa aplicando las operaciones que se ajustan al problema. Resolver el problema de esta manera, implica realizar demasiados cálculos, pero algunos problemas se pueden resolver fácilmente si se ven desde otros ángulos, desde otras perspectivas; a este tipo de análisis se le llama pensamiento lateral. Consiste en buscar otras alternativas de solución al problema de manera fácil y

rápida. Por ejemplo, imagine que busca en una calle entre una multitud a un amigo, lo mejor sería pararse en un lugar alto para localizar de manera rápida a su amigo, en vez de buscar entre la multitud.

Ejemplo de aplicación:

Problema: Encuentre el valor de  $x + y$  si 
$$\begin{cases} 123x + 321y = 345 \\ 321x + 123y = 543 \end{cases}$$

Solución:

Para los estudiantes comunes, cuando ven un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, inmediatamente aplican algún método de resolución para resolverlo, así: si se aplica el método de eliminación, el sistema queda resuelto así:

$$\begin{aligned} (321)(123)x + (321)(321)y &= (321)(345) \\ (123)(321)x + (123)(123)y &= (543)(123) \\ 39,483x + 103,041y &= 110,745 \\ 39,483x + 15,129y &= 66,789 \\ 87,912y &= 43,956 \\ y &= 0.5 \\ (123)x + (321)(0.5) &= 345 \\ 123x + 160.5 &= 345 \\ 123x &= 184.5 \\ x &= 1.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x+y=2$ .

Sin embargo, los cálculos fueron demasiados y el tiempo en resolver el problema es considerable. Pero si se adopta otro punto de vista al problema. Observe que el problema pide que se encuentre la suma de  $x+y$  y no de los valores de  $x$  y  $y$ . Ahora, si se suman las dos ecuaciones, queda:

$$444x + 444y = 888$$

Dividiendo entre 444 ambos lados queda:  $x+y=2$ , el problema es simple.

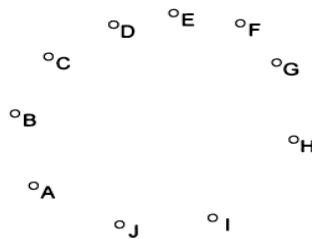
## 5. Aplicación de distintas estrategias a un mismo problema.

En el siguiente ejemplo, se muestra la resolución de un problema en distintas formas con estrategias diferentes.

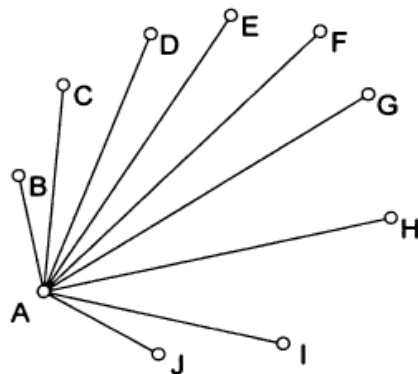
*Problema: En una fiesta se encontraron 10 amigos, todos se saludaron exactamente una vez, con un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos hubo?*

Primera solución:

Visualicemos el problema utilizando un **dibujo** como estrategia. Representemos a los diez amigos por medio de puntos asignándoles una letra del alfabeto: como se muestra:



A partir de "A", tracemos flechas a las otras letras indicando los apretones que realizó la persona "A".





Observe que hay 9 flechas, luego hacemos lo mismo a partir de “B” con C hasta J, trazando 8 flechas, luego C con D hasta J, y así, sucesivamente; desde J ya no se trazan flechas. Si contamos todas las flechas trazadas, tenemos:  $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$  flechas que corresponden a los apretones de manos que hubo en la fiesta.

Segunda solución:

Coloquemos a las personas en una tabla de doble entrada desde A hasta J, como se muestra en la tabla colocando una X en donde se intersectan las mismas letras debido a que una persona no se saluda a sí misma.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

Como cada persona únicamente saluda a otra, entonces tomamos la celda AB, pero excluimos la celda BA, así en toda la tabla. El total de celdas es  $10 \times 10 = 100$ , menos las de la diagonal  $100 - 10 = 90$ , como sólo se saludan una vez entonces dividimos entre 2 que es 45. Que correspondes a los apretones de mano. En forma general para n personas  $\frac{n^2-1}{2}$ , que corresponde a la fórmula  $\frac{n(n-1)}{2}$

Tercera solución:

Pasemos ahora a examinar el problema mediante la **adopción de un punto de vista diferente**. Consideremos la posibilidad de la habitación con 10 personas, cada una de los cuales se dará la mano con 9 personas. Esto parece indicar que hay  $10 \times 9$  o 90 apretones de manos, pero hay que dividir por dos para eliminar

la duplicidad (ya que, cuando A le da la mano a B, también se puede considerar que B estrechó la mano de A), por lo que  $90/2 = 45$  apretones.

Cuarta solución:

Apliquemos un dibujo para resolver el problema, supongamos que los 10 amigos se colocan en una sola fila, cada persona con los nombres A hasta la J.



La persona A saluda a las restantes que quedan atrás desde B hasta la J saludando a 9 amigos, luego sale de la fila, continúa B, saludando a C hasta J saludando a 8 personas; luego C y así, sucesivamente,

Amigos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
apretones	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0



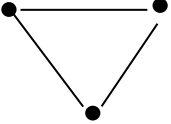
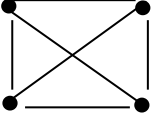
La suma total de los apretones que se dieron es la sumatoria desde 1 hasta 9 que es igual a 45.

Quinta solución:

Vamos a tratar de resolver el problema mediante la **búsqueda de un patrón**. En la tabla que se muestra en la figura, indica el número de apretones de manos que se producen en una habitación cuando aumenta el número de personas.

Número de personas	No. de apretones a medida que aumentan las personas	Total
1	0	0
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45

Sexta solución: Puede hacer dibujos empezando con casos particulares, así:

personas	dibujo	apretones	total
1		0	0
2		1	1
3		3	4
4		6	10

Así, sucesivamente, hasta completar las 10 personas con lo que se llegará a 45 apretones.

Séptima solución:

Algunos estudiantes con más conocimientos, podrían resolver este problema

aplicando la fórmula de teoría combinatoria:  ${}_nC_r = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$  personas.

Para enseñar problemas, se debe tener un banco de problemas organizados por niveles de dificultad, por el tipo de aplicación o de acuerdo al contenido temático.

## 6. REFERENCIAS

- Calvo, M. (2008). *Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas*. Revista *Educación*, año/vol. 32, número 001. Universidad de Costa Rica Ciudad Universitaria Rod, Costa Rica pp. 123-138. Recuperado el 12 de julio de 2012 en: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/440/44032109.pdf>
- Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*, New York: Springer
- Molero, M. y Salvador, A. (s.f.) Resolución de problemas, estrategias heurísticas. Recuperado el 3 de mayo de 2011 en: <http://www2.camino.upm.es/departamentos/matemáticas/Fdistancia/PIE/Problemas/ESTRATEGIAS%20HEUR%C3%8DSTICAS.pdf>
- Larson, L (1983). *Problem-solving through problems*. New York: Springer-Verlag.
- Poblete, M. y Villa, A. (2007). *Aprendizaje Basado en Competencias. Una propuesta para la evaluación de competencias genéricas*. Bilbao: Mensajero.
- Polya. G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Posamentier, A. & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions*. California: Corwin press, Inc.

- Zeitz, P. (2007). *The art and Craft of solving problems*. (2a. ed.). U.S.A. John Wiley and Sons, Inc.
- Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N. (2006). *The IMO Compendium*. A collection of problems suggested for the International mathematical Olympiads 1959-2004. U.S.A.: Springer.

## **Anexos**

Instrumentos utilizados

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Cuestionario a profesores sobre la enseñanza de la resolución de problemas**

Nombre. \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Este cuestionario forma parte de una investigación acerca de la Resolución de problemas y tiene como objetivo: recabar información sobre el conocimiento que tienen los profesores y el uso que le dan a las estrategias de resolución de problemas matemáticos.

INSTRUCCIONES: Responda a las siguientes preguntas con toda sinceridad, ya que su aporte coadyuvará al mejoramiento de la enseñanza de la matemática.

1. ¿Qué métodos conoce para resolver problemas de matemática?

---

---

---

2. ¿Para usted qué son las estrategias de resolución de problemas?

---

---

---

3. Escriba todas las estrategias que conoce para resolver problemas matemáticos

---

---

---

4. ¿Qué importancia tiene para usted la enseñanza de la resolución de problemas?

---

---

---

5. Si enseña a resolver problemas. ¿qué aspectos avalúa?

---



---



---

Para las preguntas 6, 7 y 8; seleccione una opción entre las dadas marcando una "X" en el cuadro.

6. ¿Cuán a menudo enseña a resolver problemas a sus alumnos?

- a) En cada período.       b) Una vez a la semana.   
 c) Una vez por unidad.       d) Nunca enseñó a resolver problemas.

7. Dentro de su planificación anual o de unidad, ¿incluye la resolución de problemas?

- 6.1.1. Siempre       b) Casi siempre   
 c) Algunas veces       d) Nunca.

8. En su formación del profesorado, ¿le enseñaron a utilizar estrategias de resolución de problemas?

2. Siempre       b) Algunas veces   
 c) Pocas veces       d) Nunca

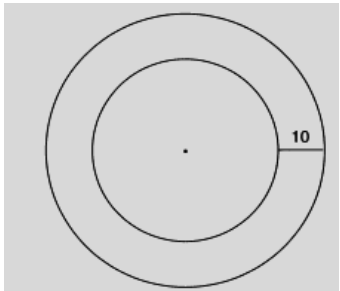
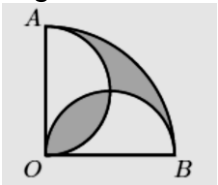


UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
 Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Evaluación a profesores sobre la utilización de estrategias de  
 resolución de problemas.**

Nombre. \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas, dejando clara constancia de todos sus procedimientos, por favor, no borre los intentos que realiza, y escriba explicando paso a paso cómo llegó a la solución. Su aporte coadyuvará el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática.

<p>1. Al finalizar el año 1994 la edad de Rodrigo era un medio de la edad de su abuela. La suma de los años en que nacieron los dos es 3844. ¿Cuántos años tendrá Rodrigo al finalizar el año 2003?</p>	
<p>2. ¿Cuántos números hay entre 1 y 2004 que sólo utilizan dos dígitos diferentes al escribirlos, (por ejemplo 1919).</p>	
<p>3. ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de las dos circunferencias concéntricas que se muestra en la figura?</p>	
<p>4. El arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y radio 16cm: Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada?</p>	
<p>5. En un número de tres cifras, la suma de las mismas es 18. La cifra de las unidades es el doble de la de las decenas. Por último, la diferencia que se obtiene restando el número dado y el formado al invertir el orden de sus cifras es 297. ¿Cuál es el número inicial?</p>	

<p>6. Hay un número racional que tiene 2005 dígitos decimales y tiene el siguiente Patrón: 0.18263171826317182631718263171826317. . . ¿Cuáles son los tres últimos dígitos de este número?</p>
<p>7. Un hombre antes de morir dejó las siguientes instrucciones para la repartición de su fortuna: La mitad a su mujer, <math>1/7</math> de lo que quedaba a su hijo único, <math>2/3</math> de lo que quedaba a su mayordomo, y el resto que son Q. 2,000.00 para su mascota. ¿Cuánto dinero tenía el hombre antes de morir?</p>
<p>8. Con el propósito de obtener fondos para la actividad de la Alerta Mundial contra el SIDA, doña Carmen espera vender 27 cajas de estampas conmemorativas de la actividad. Tiene cajas que contienen estampas doradas y cajas con estampas plateadas. Cada caja de estampas doradas contiene ocho estampas. Las cajas con estampas plateadas contienen nueve estampas. Si se adquirieron cajas con un total de 230 estampas, ¿cuántas cajas de cada tipo se tienen?</p>
<p>9. Para numerar las páginas de un libro se necesitan 2989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?</p>
<p>10. ¿Cuál es el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:</p> $10^x = (10^{2012} + 25)^2 - (10^{2012} - 25)^2$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
 Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Lista de cotejo para la evaluación de estrategias de resolución de problemas aplicado a profesores.**

PROBLEMA	Ensayo Y error	Usa fórmulas	Plantea ecuaciones	Utiliza las propiedades de los números.	Hace una lista	Realiza una tabla	Realiza dibujos o diagramas.	Busca patrones.	Usa variables	Descompone el problema	Usa simetría	Aplica Trabajo hacia atrás.	Total	%
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														

Observaciones:

---



---



---



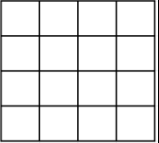
---

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
 Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

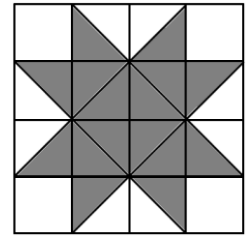
**Evaluación a estudiantes sobre la utilización de estrategias  
 de resolución de problemas.**

Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_  
 Sección: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

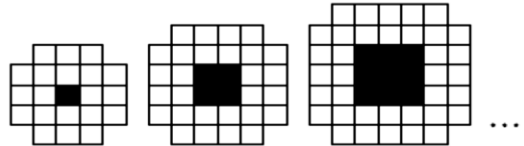
INSTRUCCIONES: Resuelva los siguientes problemas, dejando clara constancia de todos sus procedimientos, por favor, no borre los intentos que realiza, y escriba explicando paso a paso y cómo llegó a la solución. Utilice lapicero.

<p>1. Un almacén distribuye computadores de dos marcas (HP y Dell). Durante el mes de diciembre uno de sus vendedores vendió 60 computadores. Por cada tres computadores de la marca HP vendió dos de la marca Dell. Si recibió una comisión de Q. 100 por cada computador de la marca HP y una comisión de Q. 200 por cada computador de la marca Dell. ¿Cuál es la comisión total que recibió el vendedor en el mes de diciembre?</p>
<p>2. El fin de semana Carlos y Josefina fueron a visitar la granja del abuelo, en un corral había cerdos y gallinas; Josefina contó en total 40 cabezas y Carlos 114 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en la granja?</p>
<p>3. ¿Cuánto es la mitad de <math>4^{2012}</math>?</p>
<p>4. ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños hay en la figura?</p>
<div style="text-align: right;">  </div>
<p>5. Hoy es domingo y Francisco comienza a leer un libro de 290 páginas. Él lee 4 páginas cada día, excepto los domingos, cuando lee 25 páginas. ¿Cuántos días consecutivos le tomará leer el libro completo?</p>

6. En el dibujo, el cuadrado más grande mide 16 cm. de lado y está dividido en 16 cuadrados iguales (cuadrados más pequeños) ¿cuál es el área de la figura sombreada?



7. La siguiente figura muestra los tres primeros diagramas de una secuencia. Si no se toma en cuenta el hueco negro central, ¿cuántos cuadritos se necesitarían para construir el décimo diagrama de la secuencia?



8. Carlos tiene 6 años más que Julio. Hace 4 años la edad de Carlos era el doble de la edad que tenía Julio. ¿Cuántos años tiene Carlos ahora?

9. En la aprobación de un proyecto de ley presentado ante el Congreso de la República, hubo 7 votos a favor de representantes del Partido Patriota más que del Partido UNE y el número de votos a favor del Partido UNE fue el doble de los votos a favor de los representantes del Partido LIDER. Hubo 2 representantes del partido LIDER que votaron a favor de la aprobación del proyecto. ¿Con cuántos votos a favor se aprobó el proyecto?

10. ¿Cuántas cantidades de 4 dígitos se pueden formar con los dígitos: 2, 3, 6 y 7 utilizando cada dígito una sola vez?

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
 Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Lista de cotejo para la evaluación de estrategias de  
 resolución de problemas aplicado a estudiantes**

PROBLEMA	Ensayo Y error	Usa fórmulas	Plantea ecuaciones	Utiliza las propiedades de los números.	Hace una lista	Realiza una tabla	Realiza dibujos o diagramas.	Busca patrones.	Usa variables	Descompone el problema	Usa simetría	Aplica Trabajo hacia atrás.	Total	%
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														

Observaciones:

---



---



---

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Cuestionario a estudiantes sobre los factores que influyen  
en el proceso de la resolución de problemas**

Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_  
Sección: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

INSTRUCCIONES: La siguiente entrevista tiene como finalidad obtener información de su proceso de resolución de problemas matemáticos, por lo que se le pide que conteste con libertad.

- 1) Escriba algunos métodos para resolver problemas matemáticos.

---

---

---

---

- 2) Para usted ¿qué son las estrategias de resolución de problemas?

---

---

---

- 3) Escriba todos los nombres de las estrategias de resolución de problemas que conozca

---

---

---

---

- 4) ¿Sus profesores le han enseñado a resolver problemas indicándole las estrategias que existen?

---

---

---

---

- 5) ¿Qué temas ha aprendido en este año y todos los años anteriores en la clase de matemática que le ha servido para resolver los problemas?

---

---

---

---

- 6) Cuando se le plantea un problema matemático y no logra resolverlo, ¿se da por vencido rápidamente?

---

---

---

---

- 7) ¿Cómo se siente cuando no puede resolver un problema?

---

---

---

---



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 ESCUELA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA  
 Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física.

**Cuestionario a estudiantes sobre los factores que influyen  
 en el proceso de la resolución de problema**

Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_  
 Sección: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Instrucciones: Coloca una X en el cuadro según tu apreciación para cada descripción. Únicamente debes colocar una "X" para cada numeral.

#	Descripción	Mucho	Bastante	Poco	Nada
1	Me gusta resolver problemas matemáticos.				
2	Cuando me plantean un problema, no me importa el tiempo que utilizo, me interesa resolverlo.				
3	Cuando obtengo la solución siempre compruebo las operaciones por si me he equivocado				
4	Procuro presentar el problema bien ordenado para que se pueda corregir sin dificultad.				
5	Aprender a resolver problemas puede ayudarme en la vida diaria y en un futuro.				
6	Me pongo nervioso(a) al resolver problemas.				
7	Me cuesta concentrarme sobre lo que me pide el texto de un problema				
8	Resolver problemas es una actividad que me cansa.				
9	Si el problema me es difícil, lo dejo. Casi no intento resolverlo.				
10	Antes de realizar una operación, razono el problema y lo analizo.				
11	Aunque compruebo un problema no sé si lo he hecho bien o mal				
12	Conozco la teoría y puedo realizar todas las operaciones que se aplican en el problema.				
13	Cuando resuelvo un problema, me surgen varias ideas para resolverlo.				
14	Cuando me plantean un problema, no sé por dónde empezar.				

Adaptación de la encuesta de actitudes sobre resolución de problemas aplicado en ¡Resuélvelo! Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje de Tárraga Mínguez, Raúl (2008)

## GLOSARIO

### **Ad-hoc**

Que está hecho especialmente para un fin determinado o pensado para una situación concreta.

### **Coadyuvar**

Contribuir, asistir o ayudar a la consecución de algo.

### **Criba**

Instrumento para cernir o cribar que está compuesto por un aro o un marco al cual está asegurado un cuero o un tejido agujereado o una tela metálica fina con el fin de separar lo más fino de la harina o de otras sustancias.

### **Factor**

Elemento, circunstancia, influencia, que contribuye a producir un resultado. Cantidad que se multiplica con otra para obtener un producto.

### **Formular**

Expresar algo mediante una fórmula, en especial una ley física, un principio matemático o una composición química. Exponer o expresar una cosa de forma oral o escrita, generalmente con términos claros y precisos

### **Heurística**

Técnica de la indagación y del descubrimiento. En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.

**Insight**

Término utilizado en Psicología proveniente del inglés que se puede traducir al español como "visión interna" o más genéricamente "percepción o "entendimiento". Se usa para designar la comprensión de algo.

**Influir**

Producir [una persona o una cosa] sobre otra, de manera indirecta o insensible, cierta acción o efecto que la hace cambiar o variar.

**Patrón**

Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual.

**Plantear**

Proponer, suscitar o exponer un problema matemático, un tema, una dificultad o una duda. Enfocar la solución de un problema, lléguese o no a obtenerla.

**Segmento de recta**

Intervalo de recta delimitado por dos puntos fijos sobre la misma. El segmento que inicia en el punto  $A$  y finaliza en el punto  $B$  se denota por  $\overline{AB}$ . La medida de la longitud de un segmento se denota como  $AB$ ,  $m(AB)$  o  $|\overline{AB}|$

**Variable**

Factor o característica que puede variar en un determinado grupo de individuos o hechos, en especial cuando se analizan para una investigación o experimento