



CUSACQ
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché

Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché – CUSACQ
Sección Santa María Nebaj
Licenciatura en Pedagogía y Administración
Educativa con Especialidad en Medio Ambiente

Trabajo de Graduación

“Factores que inciden en el bajo rendimiento académico en matemática”.



Juan Enrique Santiago Brito

CUI: 1686409531413

Asesor

Lic. Aroldo Neptali Brito

Colegiado: 10846

Santa María Nebaj, Quiché, marzo del 2,019



CUSACQ
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché

Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché – CUSACQ
Sección Santa María Nebaj
Licenciatura en Pedagogía y Administración
Educativa con Especialidad en Medio Ambiente

Trabajo de Graduación

**Factores que inciden en el bajo rendimiento académico en matemáticas de los
estudiantes del tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural
“PAXIL”.**

Juan Enrique Santiago Brito

CUI: 1686409531413

**Previo a Optar el título de: Licenciado en Pedagogía y Administración Educativa con
Especialidad en Medio Ambiente.**

Santa María Nebaj, Quiché, marzo del 2,019

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA, USAC

Rector: Ing. Murphy Antonio Godínez López
Secretario General: Arq. Carlos Enrique Valladares Cerezo

AUTORIDADES DEL CENTRO UNIVERSITARIO DE QUICHÉ, CUSACQ

CONSEJO DIRECTIVO

Ing. Mario Antonio Godínez López
Lic. José de Jesús Portillo Hernández
Ing. Mec. Carlos Humberto Aroche Sandoval
Br. Víctor Hugo Mayen García
Br. Javier Augusto Castro Vásquez

Director del Centro Universitario de Quiché –CUSACQ-
Ing. Porfirio Alejandro Marroquín Quiñonez

Coordinador Académico CUSACQ
Lic. Esteban Enrique Barreno Vicente

Coordinador de la carrera de Licenciatura en Pedagogía y Administración Educativa con
Especialidad en Medio Ambiente, CUSACQ
Sección Santa María Nebaj
Ms. Carlos Fernando Afre Arévalo

TRIBUNAL QUE APLICÓ EL EXAMEN DE TRABAJO DE GRADUACIÓN

Presidente: Lic. Edgar Raúl Arévalo Afre

Secretario: Ing. Carlos Manuel Tzoc Zapeta

Vocal I: Lic. Tomás Aroldo Racancoj

Asesor del trabajo de graduación

Lic. Aroldo Neptali Brito

Las opiniones y doctrinas sustentadas en el presente informe es responsabilidad exclusiva del autor; Artículo 31 del Reglamento de exámenes teóricos y profesionales del Centro universitario de Quiché –CUSACQ- de la Universidad de San Carlos de Guatemala.



USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

CENTRO UNIVERSITARIO DE QUICHE
-CUSACQ-

SECCIÓN
SANTA MARÍA
NEBAJ

Santa María Nebaj, 13 de octubre de 2,018

Lic. Carlos Fernando Afre Arévalo
Coordinador de carrera
Centro Universitario de Nebaj, CUSACQ
Presente

Por este medio hago de su conocimiento que el alumno (a)

Santiago Brito, Juan Enrique

(Apellidos y nombres completos, según DPI)

201241526

Carné No.

Cantón Xolanay, Nebaj, El Quiché

Dirección para notificación

De la Carrera de Licenciatura en Pedagogía y Administración Educativa con Especialidad en Medio Ambiente; ha realizado las correcciones sugeridas por un servidor como asesor del informe final de trabajo de graduación titulado: "Factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural "PAXIL" en el área de Matemáticas"

Por tanto se le brinda Dictamen Favorable para que pueda continuar con el desarrollo de la investigación nombrándole el revisor correspondiente.

Atentamente.

Lic. Aroldo Neptalí Brito

Asesor

Colegiado activo No. 10846

3ra. Av. 0-14 Zona 5
Santa Cruz del Quiche, Quiche
Telefax: 7755-1273
cusacq@usac.edu.gt



USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

CENTRO UNIVERSITARIO DE QUICHE
-CUSACQ-

SECCION
SANTA MARIA
NEBAJ

Lic. Carlos Fernando Afre Arévalo
Coordinador Académico
Presente

Hago de su conocimiento que el alumno (a)

Juan Enrique Santiago Brito

(Apellidos y nombres completos, según DPI)

201241526

Carné No.

Cantón Xolanay, Nebaj, El Quiché

Dirección para notificación

55220599

Teléfono

de Licenciatura en Pedagogía y Administración

Educativa con Especialidad en Medio Ambiente; ha realizado las correcciones sugeridas por un servidor como revisor del informe final de trabajo de graduación titulado: "Factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del ciclo básico".

Por tanto, se le brinda Dictamen Favorable para que proceda con la tramitación correspondiente previo a la solicitud de examen privado.

Atentamente:

Lic. Hugo Leonel Blanco Aguilar
Col. 25167

3ra. Av. 0-14 Zona 5
Santa Cruz del Quiche, Quiche
Telefax: 7755-1273
cusacq@usac.edu.gt



USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

CENTRO UNIVERSITARIO DE QUICHE
-CUSACQ-

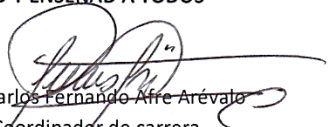
SECCION
SANTA MARIA NEBAJ

Santa María Nebaj, El Quiché, 06 de abril de 2019
Orden de impresión Sec. Nebaj No. 25 -2019

EL INFRASCRITO COORDINADOR DE CARRERA DE LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA Y ADMINISTRACIÓN EDUCATIVA CON ESPECIALIDAD EN MEDIO AMBIENTE DE LA SECCIÓN UNIVERSITARIA DE SANTA MARÍA NEBAJ, EL QUICHÉ, DEL CENTRO UNIVERSITARIO DE QUICHE "CUSACQ", DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA.

Con base en el dictamen favorable emitido por el asesor y revisor del trabajo de graduación intitulado **"Factores que Inciden en el Bajo Rendimiento Académico en Matemática"** presentado por el (la) estudiante: **Juan Enrique Santiago Brito** con registro académico: **201241526** y CUI: **1686409531413** en donde se hace constar que se ha cumplido con las recomendaciones y observaciones pertinentes; por tanto esta Coordinación de carrera **AUTORIZA LA IMPRESIÓN DEL TRABAJO DE GRADUACIÓN.**

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"


Ms. Carlos Fernando Afre Arévalo
Coordinador de carrera

3ra. Av. 0-14 Zona 5
Santa Cruz del Quiche, Quiche
Telefax: 7755-1273
cusacq@usac.edu.gt

Dedicatoria

A Dios:

Dador de vida, fuente de sabiduría por permitirme lograr llegar hasta este momento especial en mi vida profesional.

A mis padres:

Por darme el regalo de la vida, a mi madre por darme su apoyo y cariño en todo este proceso educativo, a mi padre por guiarme, ayudarme con consejos de perseverancia.

A mis hermanos:

Especialmente a Olga, por su apoyo incondicional en los momentos de desesperación y ansiedad, brindándome como siempre consejos que me han servido para llegar hasta este momento, te amo enormemente hermana.

A mis compañeros:

Gracias por su ayuda, apoyo y compañía a lo largo de esta preparación académica que hemos tenido.

A mis amigos (as):

Por su amistad, cariño, por el apoyo moral, incondicional, por las palabras de ánimo cuando estaba por rendirme en este camino para titularme, Edy Roberto, Hugo Galindo y Pedro Abraham muchísimas gracias.

Agradecimientos sinceros

Al CUSACQ y sus autoridades:

Agradezco infinitamente por darme la oportunidad, de pertenecer a la familia de la USAC.

Al asesor y revisor del trabajo de graduación:

Por el apoyo, la atención y motivación que me brindaron por la paciencia, por enseñarme a no renunciar en ningún momento en el transcurso de la tesis, mil gracias.

Al Colegio “PAXIL”

Por abrirme las puertas para poder desarrollar la investigación, teniendo como objetivo apoyar de algún modo el desarrollo integral de los jóvenes y señoritas.

A los estudiantes, personal docente y administrativo y padres de familia del Colegio

Por la atención brindada, confianza y ayuda durante el proceso de investigación

Índice

Índice de tablas.....	
Resumen/Abstract.....	
Introducción.....	i
Capítulo I. Marco conceptual.....	1
1.1. Planteamiento del problema.	1
1.2. Preguntas de investigación.....	2
1.2.1. Pregunta principal.....	2
1.2.2. Preguntas secundarias.....	2
1.3. Justificación.....	3
1.4. Alcances y límites.....	4
1.4.1. Alcances.	4
1.4.2. Límites.	5
1.5. Objetivos.....	5
1.5.1. Objetivo General.	5
1.5.2. Objetivos Específicos.	5
1.6. Operacionalización de las variables.....	6
1.7. Aporte.....	7
Capitulo II. Marco Teórico.....	8
2.1. Estado del Arte.....	8
2.2. Fundamentación teórica.....	12
2.2.1. Rendimiento académico.....	12
2.2.1.1. ¿Qué es rendimiento académico?	12
2.2.2. Bajo rendimiento académico.....	12

2.2.2.1.	<i>¿Qué es bajo rendimiento académico?</i>	12
2.2.2.2.	<i>Indicadores de bajo rendimiento académico</i>	13
2.2.3.	Fracaso escolar	18
2.2.3.1.	<i>¿Qué es fracaso escolar?</i>	18
2.2.3.2.	<i>Indicadores de fracaso escolar</i>	18
2.2.4.	Teorías sobre rendimiento académico y fracaso escolar	19
2.2.5.	Adolescencia	20
2.2.5.1.	<i>Adolescencia y rendimiento académico</i>	20
2.2.6.	Variables del rendimiento académico	21
2.2.7.	Aprendizaje significativo	22
2.2.7.1.	<i>Procesos de aprendizaje</i>	23
2.2.8.	Estrategias y metodologías de aprendizaje	27
2.2.8.1.	<i>¿Qué es estrategia de aprendizaje?</i>	27
2.2.8.2.	<i>¿Qué es metodología de aprendizaje?</i>	27
2.2.8.3.	<i>Clasificación de las estrategias</i>	28
2.2.9.	Hábitos de estudio	29
2.2.10.	Métodos de evaluación	31
2.2.10.1.	<i>Observación</i>	32
2.2.10.2.	<i>Entrevista</i>	32
2.2.10.3.	<i>Encuesta</i>	32
2.2.10.4.	<i>Test</i>	33
2.2.10.5.	<i>Portafolio</i>	33
2.2.11.	Clima escolar	33
2.2.11.1.	<i>¿Qué es clima escolar?</i>	33

2.2.11.2.	<i>Tipología y dimensiones del clima escolar</i>	34
2.2.11.2.1.	<i>Tipos de clima escolar</i>	34
2.2.11.2.2.	<i>Dimensiones del clima escolar</i>	36
2.2.11.2.3.	<i>Clima escolar y rendimiento escolar</i>	38
2.2.12.	Inteligencia y aptitudes.....	38
2.2.12.1.	<i>Relación entre rendimiento académico, inteligencia y aptitudes</i>	39
2.2.13.	Problemas de conducta y rendimiento académico.....	39
2.2.13.1.	<i>La personalidad y la identidad social</i>	40
2.2.13.2.	<i>Expresiones emocionales</i>	41
2.2.13.3.	<i>Patologías de emociones y bajo rendimiento académico</i>	42
2.2.14.	Bajo rendimiento académico y familia.....	43
2.2.14.1.	Características del ámbito familiar.....	43
2.2.14.2.	Factores familiares y su incidencia en el bajo rendimiento académico.....	45
2.2.15.	Formas de medir el rendimiento académico.....	47
2.2.16.	El área de Matemática.....	48
2.2.16.1.	<i>Generalidades del área de matemáticas</i>	48
2.2.16.2.	<i>Componentes del área de matemáticas</i>	50
Capítulo III. Marco Metodológico		53
3.1. Metodología.....		53
3.2. Instrumentos de investigación de campo.....		53
3.2.1. La observación.....		53
3.2.2. La entrevista.....		54

3.2.3.	La encuesta.....	54
3.2.4.	Proceso de validación de los instrumentos.....	55
3.3.	Unidad (Universo).....	55
3.4.	Muestra y caracterización de la misma.....	56
3.5.	Procedimiento para la selección de la muestra.....	56
3.6.	Desarrollo de la investigación.....	57
3.7.	Procedimiento para el análisis de datos.....	58
Capítulo IV. Presentación, análisis y discusión de resultados		60
4.1.	Presentación, análisis y discusión de encuestas.....	60
4.2.	Discusión y análisis de entrevistas.....	71
4.2.1.	Hallazgos.....	76
4.2.2.	Problemática detectada.....	77
4.2.3.	Discusión de resultados.....	77
Conclusiones.....		83
Recomendaciones.....		84
Apéndice		
Referencias bibliográficas.		

Índice de tablas

Tabla 1. Operacionalización de las variables.....	6
Tabla 2. Establecimientos de tercero básico evaluados por año según departamento.....	14
Tabla 3. Estudiantes de tercer básico evaluados por años, según departamento.....	15
Tabla 4. Porcentaje de logro en matemáticas por año, según departamento.....	16
Tabla 5. Porcentaje de logro en matemáticas de tercer básico por años, según municipio del departamento de Quiché.....	17
Tabla 6. Logro nacional según establecimiento.....	17
Tabla 7. Universo Colegio PAXIL 2018.....	56

RESUMEN

La investigación tiene como fin determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico del Colegio Bilingüe PAXIL en el área de matemáticas; algo fundamental para la superación y crecimiento profesional de los estudiantes; busca mejorar las competencias de los estudiantes en razonamiento y cálculo lógico. Investigaciones desarrolladas demuestran que varios son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de cada estudiante en el área de matemáticas. Para el desarrollo de la investigación se utilizaron variables que resultaron de los objetivos específicos tales como: el proceso de formación de los estudiantes, las causas del bajo rendimiento académico, los factores del bajo rendimiento académico, el mejoramiento del rendimiento académico y la metodología de enseñanza en el área de matemáticas. Para la construcción de la investigación se tomó como muestra a 38 estudiantes de tercero básico, 8 docentes y 36 padres de familia, el tipo de investigación que se utilizó fue activa con enfoque acción. Busca generar impacto en la vida de cada estudiante durante el tiempo que estudie, esto es indiscutible y se reconoce la importancia de la investigación para los estudiantes, docentes y padres de familia del centro educativo, el resultado permitirá mejorar el desenvolvimiento de cada estudiante durante su preparación académica. La teoría diseñada enmarca conceptos que se atribuyen a los factores que inciden en el bajo rendimiento académico, indicando a su vez la relación que existe entre los resultados de la investigación y la teoría planteada.

ABSTRACT

The aim of this research is to determine which factors lead to low academic performance by students in the third year of basic, or junior high school, at the Bilingual PAXIL School, specifically in the subject area of mathematics, which is fundamental for the advancement and professional growth of students, as it attempts to hone their reasoning and calculation skills. The studies already conducted indicate that there are a variety of factors responsible for a student's poor academic performance in mathematics. In the development of the study, variables were used that emerged from specific objectives, such as the student's academic background, different causes of low academic performance, improvement in academic performance, and teaching methodology. The study was designed around a sample of 38 students in the third year of junior high, 8 teachers, and 16 parents. The research methodology used was an active methodology with a focus on action; the study sought to create change in the life of each student during the time they were being studied. For that reason, the importance of the study for the students, teachers, and parents is indisputable and should be recognized. The results will help students develop more affectively during their academic formation. The theory designed in the study incorporates concepts that stem from factors resulting in low academic performance, demonstrating the relationship between the study's results and the proposed theory.

Introducción

El bajo rendimiento académico es un problema común al igual que alarmante, independientemente del sector educacional que sea, ningún centro educativo es ajeno a esto ya sea público o privado, ambos enfrentan similares dificultades en cuanto al nivel de aprendizaje de sus estudiantes. Por tanto, el proyecto de investigación que se realizó tuvo como fin principal conocer cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de jóvenes y señoritas del tercer grado del ciclo básico en el área de matemáticas, y cómo repercute esto en su vida estudiantil. La investigación se realizó en el Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” establecimiento que funciona en Jornada Matutina en las instalaciones de la Casa de la Cultura Nebajense, en el cantón Simocol del municipio de Nebaj, departamento de Quiché.

Como se mencionó la investigación buscó obtener información para luego establecer por qué las estadísticas indican que existe un bajo rendimiento educativo. Y por qué nuestro departamento y nuestro municipio se encuentran en los últimos lugares de los resultados de las evaluaciones nacionales sobre rendimiento académico especialmente en la asignatura de matemáticas. En el 2013 el Ministerio de Educación, desarrolló de manera censal una evaluación a los estudiantes de tercero básico teniendo como propósito evidenciar si los estudiantes estaban alcanzando las competencias básicas para la vida, participaron 191,089 estudiantes de todo el país, los resultados nacionales indicaron que de 100 estudiantes solo 18 alcanzan el logro en matemática.

El capítulo uno, lo constituye la construcción del problema de estudio, en la que se hace una descripción del marco conceptual, el cual hizo referencia a los antecedentes, la importancia, el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos generales y específicos, las preguntas de investigación, de la misma manera los alcances y límites. El objetivo principal es determinar los

factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas, se toma esta área porque permite conocer el desempeño de los estudiantes en cuanto a la adquisición de conocimientos, ejecución de algoritmos simples y complejos, pensamiento matemático y resolución de problemas.

El capítulo dos describe la elaboración del marco teórico que sirve para sentar las bases teóricas del presente estudio, se tomó en cuenta la información de otras investigaciones y teorías, permitiendo tener un conocimiento amplio sobre cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas, del Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, teniendo en cuenta que el bajo rendimiento académico es un problema que surge por múltiples causas, donde se ven implicados diversos factores entre los cuales destacan, los factores psicológicos, los factores sociales, encontrando que, lo que provoca el bajo rendimiento académico es el desinterés de los estudiantes por la materia, paralelo a ello los resultados indicaron que los estudiantes demuestran desinterés porque la clase es poco dinámica por la falta de una metodología de enseñanza que motive a los estudiantes a interesarse más por el área de matemáticas.

El capítulo tres, establece la metodología que se utilizó en la investigación, la cual fue activa con enfoque acción, que está dirigida a la aplicación inmediata en resolver un problema particular en este caso la investigación buscó establecer por qué existe bajo rendimiento académico, se delimitó la investigación en el Colegio Bilingüe Intercultural Paxil del cantón Simocol, el tipo de muestra utilizada fue de tipo aleatoria estratificada y se tomó el 100% de los estudiantes del tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, el 100% de los padres de familia de los estudiantes del tercer grado básico, y el 100% de docentes, todo esto implicó realizar el trabajo de

campo en el que se utilizaron como instrumentos de investigación las encuestas a estudiantes, entrevista a padres de familia y a docentes.

Finalmente en el capítulo cuatro, se plasman los resultados obtenidos durante la investigación, el análisis y la discusión de los datos obtenidos, las explicaciones, conclusiones y recomendaciones sobre el tema de estudio. Adicionalmente, en los anexos se han insertado una réplica de la encuesta aplicada a estudiantes, como también la guía de entrevistas realizadas a docentes y padres de familia del establecimiento.

El aporte final de esta investigación fue la elaboración y entrega de un documento que contiene algunas estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas, dirigida para el docente que imparte el curso de matemática, en el Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, del cantón Simocol, municipio de Nebaj, Quiché, con la finalidad de reforzar los conocimientos del docente sobre las formas dinámicas de enseñanza de los contenidos del área de matemáticas, de tercer básico.

Capítulo I

Marco Conceptual

1.1. Planteamiento del problema

Año con año gran cantidad de estudiantes con mucho esfuerzo escalan distintos niveles educativos, tales como nivel primario y medio (ciclo básico y diversificado) esto para ampliar sus conocimientos, del mismo modo mejorar su nivel educativo y por tanto su calidad de vida. El Ministerio de Educación, a cada año aplica pruebas estandarizadas en las áreas de matemáticas y de lenguaje a los estudiantes que culminan el ciclo diversificado, de la misma forma aplica pruebas de forma censal a los estudiantes de sexto primaria, tercero básico, con el propósito de estar al tanto e informar a la comunidad educativa y población sobre el rendimiento educativo de los estudiantes que egresan de estos grados y para prever estrategias de mejora en el proceso educativo. Al desarrollar estas pruebas diagnósticas se evidencian las dificultades educativas de los estudiantes. Durante el año 2013 el Ministerio de Educación desarrolló una evaluación a los estudiantes de tercero básico el cual “fue censal, y su propósito fue evidenciar si los estudiantes estaban alcanzando las competencias básicas para la vida. Al finalizar su formación en el Ciclo de Educación Básica del Nivel de Educación Media, para identificar y comparar las brechas que existen en los aprendizajes. En la evaluación del año 2013 participaron 191,089 estudiantes de todo el país” (DIGEDUCA, 2013) los resultados nacionales indican que de 100 estudiantes solo 15 alcanzaron el logro en lectura y 18 en matemática, esto pareciera un problema no relevante, porque cada país tiene problemas de rendimiento educativo, sin embargo en nuestro país, departamento y en nuestro municipio este problema se evidencia a través del promedio, deserción escolar, apatía en clases, la inasistencia, incumplimiento en la entrega de tareas y ausencia escolar. La investigación pretende conocer por qué pasa esto, por qué los resultados de las evaluaciones son poco aceptables. Se tomó

como objeto de estudio a los estudiantes de tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” que brinda educación básica, está ubicado en el cantón Simocol del municipio de Nebaj, departamento de Quiché. Esta investigación analizará los problemas de aprendizaje de los alumnos, a partir de la revisión de los datos obtenidos en evaluaciones nacionales, y se centrará en los resultados de aprendizaje de los alumnos del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” de tercero básico. Se tendrá como enfoque el análisis de la situación actual, la exploración de datos obtenidos en estudios recientes. Teniendo como fin principal responder a la interrogante ¿Cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” en el área de Matemáticas?

1.2. Preguntas de investigación

1.2.1. Pregunta principal

¿Cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” en el área de Matemáticas?

1.2.2. Preguntas secundarias

- ¿Cómo se desarrolla la formación de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” del municipio de Nebaj?

- ¿Cuáles son las causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” del municipio de Nebaj?
- ¿Qué metodología utiliza el docente en el área de matemáticas en el Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”?
- ¿Qué estrategias son factibles para mejorar el rendimiento educativo de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” del municipio de Nebaj?

1.3. Justificación

Los reportes que realiza el Ministerio de Educación referente a los estándares educativos en el área de Matemáticas, DIGEDUCA en su informe general del año 2017 reveló que en la evaluación que se realizó en el año 2013 de 100 estudiantes que se evaluaron solo 18 alcanzan el logro en matemáticas, esto equivale al 12.19%, lo cual indica que el departamento de Quiché, obtuvo un resultado bajo en comparación con la última evaluación, esto motiva a una serie de acciones de parte del Ministerio de Educación por medio de programas para hacer más eficiente el desempeño educativo, por lo anterior se evidencia que el proceso educativo del ser humano es un proceso social y por tanto hay que tener en cuenta el contexto en el que se desarrolla ya sea familiar, entre un grupo de amigos, en la calle y a través de los medios de comunicación que existen hoy en día. Sin embargo, la investigación trató el contexto del centro educativo en sí, ya que en la mayor parte de centros educativos tanto públicos como privados

los estudiantes, docentes y directores enfrentan varias dificultades educativas entre ellas que los estudiantes padecen de problemas de conducta, en lo emocional y en lo intelectual reflejándose en su desempeño educativo. Por esta situación se decidió describir los factores que inciden en el bajo rendimiento académico, para tener un panorama de los efectos que producen y así formular soluciones o alternativas de solución, para contrarrestar el bajo rendimiento académico que viene afectando a nuestro municipio, departamento y país. Es importante resaltar que a través de esta investigación se busca determinar el por qué del bajo rendimiento educativo en los establecimientos públicos y privados en el área de matemáticas ya que no se están obteniendo los resultados según los informes estadísticos del MINEDUC. Las posibles soluciones tienen como meta que los estudiantes evidencien mejores resultados permitiendo un beneficio para ellos, ya que a medida que estén mejor preparados, mejorarán sus condiciones de vida. Se seleccionó al Colegio PAXIL por el tipo de enfoque que tiene, el cual está basado en la cosmovisión maya, principios humanos y por ser un establecimiento privado.

1.4. Alcances y límites

1.4.1. Alcances.

Estudio realizado en el Colegio Bilingüe Intercultural Paxil del municipio de Nebaj departamento de Quiché, con estudiantes de tercer grado básico, docentes y director. Se tuvo como alcance recopilar y evaluar la información por qué existe bajo rendimiento académico en el área de matemáticas en los estudiantes del Colegio Bilingüe Intercultural Paxil. Para ser socializados y justificados con la dirección del establecimiento para que se tenga en cuenta en la creación de nuevas políticas educativas, cuyos beneficiarios serán los adolescentes y profesores del colegio.

1.4.2. Límites.

Falta de colaboración de parte de algunos docentes y tiempo para realizar la observación y encuestas al igual que la falta de fuente bibliográfica relacionada al tema de investigación.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General.

- Determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.

1.5.2. Objetivos Específicos.

- Describir los procesos que se desarrollan en la formación de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.
- Identificar las causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.
- Identificar la metodología utilizada por los docentes en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”

- Formular soluciones que contribuyan a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.

1.6. Operacionalización de las variables

Objetivos específicos	VARIABLES o elementos de estudio	MÉTODOS y técnicas a utilizar	Instrumentos para recolección de datos	Resultados esperados
Determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.	Factores del bajo rendimiento académico	Observación Entrevista Encuesta	Cuaderno de notas Guía de entrevistas Cuestionarios	Describir los factores que inciden en el bajo rendimiento académico en el área de Matemáticas.
Describir los procesos que se desarrollan en la formación de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.	Proceso de formación de los estudiantes	Observación Entrevista Encuesta	Cuaderno de notas Guía de entrevistas Cuestionarios	Determinar los procesos que se desarrollan para la formación de los estudiantes en el área de Matemáticas
Identificar las causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.	Causas del bajo rendimiento académico	Observación Entrevista Encuesta	Cuaderno de notas Guía de entrevistas Cuestionarios	Registrar las causas que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes en las áreas de Matemáticas para buscar mejoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje
Identificar la metodología utilizada por los docentes en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”	Metodología de Enseñanza	Observación Entrevista Encuesta Conversaciones informales	Cuaderno de notas Guía de entrevistas Cuestionarios	Determinar la metodología utilizada por el docente en la enseñanza de las matemáticas.
Formular soluciones que contribuyan a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el área de Matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”.	Mejoramiento del rendimiento escolar	Entrevista Encuesta Conversaciones informales	Guía de entrevistas Cuestionarios	Contribuir con propuestas alternativas de solución al mejoramiento del bajo rendimiento académico en las áreas de Matemáticas.

Santiago J. (2018) Cuadro de variables. Nebaj, Quiché, Guatemala.

1.7. Aporte

De la investigación realizada en el Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”, sobre los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de tercer grado básico en el área de matemáticas, y de acuerdo a los resultados obtenidos en el trabajo de campo a través de los instrumentos aplicados, se evidenció que el bajo rendimiento académico existe, dentro del cual intervienen muchos factores desde la situación económica de los padres y su implicación en la educación de sus hijos, también influye la metodología empleada por el docente, además resalto mucho la falta de interés de los estudiantes en no poner atención en clases, no practican, no preguntan y no entregan sus tareas. Tomando en cuenta estos indicios el aporte es la elaboración de un manual de estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas, dirigida al docente de matemáticas del Colegio Bilingüe Intercultural PAXIL, que conlleva una serie de estrategias de enseñanza, contenidos, actividades y ejercicios referentes al curso, la finalidad de este aporte es apoyar la labor docente, promoviendo la motivación e interés en los estudiantes y así mejorar su preparación académica, éste documento a la vez quedará para los docentes que ingresen en un futuro a dicho establecimiento a trabajar el área de matemáticas. Después de la elaboración del manual se acciono, se le solicito al director un tiempo determinado para trabajar con los docentes, para presentarles el aporte y su contenido, del mismo modo se dio una clase modelo trabajando algunos contenidos y ejercicios utilizando las estrategias del manual.

En cuanto al Centro Universitario de Quiché CUSACQ, docentes y estudiantes de la misma serán beneficiados indirectamente con este material, ya que aunque ellos ya estén en otro nivel dicho material lo pueden implementar en otros niveles educativos.

Capítulo II

Marco Teórico

2.1. Estado del arte

El rendimiento académico es un tema muy sonado en la actualidad y preocupante tanto para los padres, los docentes y hasta incluso por los estudiantes, este problema es a nivel local, departamental y nacional, se buscan nuevas maneras de mejorar la educación pero aún hace falta mucho por hacer.

En un estudio de tipo descriptivo realizado por Murillo, E. (2013) “Factores que inciden en el Rendimiento Académico en el área de Matemáticas de los estudiantes de noveno grado en los Centros de Educación Básica de la Ciudad de Tela, Atlántida, San Pedro Sula, Honduras”. Tesis de Maestría en formación de formadores de docentes de educación básica. Universidad Pedagógica Nacional. Francisco Morazán. Se planteó como objetivo “Determinar si la metodología, evaluación y capacitación son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes de noveno grado en los centros de Educación Básica de la Ciudad de Tela, Atlántida. La metodología utilizada fue de enfoque cuantitativo, tipo de estudio descriptivo, diseño no experimental. El universo lo conformaron los estudiantes que cursan el noveno grado en los centros de educación básica de la Ciudad de Tela, Atlántida. La población de estudio la conformaron 300 estudiantes. La muestra estuvo constituida por subgrupos de la siguiente manera 169 estudiantes, entre los cuales 96 pertenecen al sexo femenino, y 73 al sexo masculino, entre las edades de 12 a 16 años, el tipo de muestra fue probabilística. Los resultados obtenidos de la investigación evidenciaron que existe una serie de factores que median y condicionan para que este se refleje en las calificaciones de los estudiantes entre los cuales destacan la actitud del

docente, el interés de los estudiantes, la metodología utilizada por el docente y entre otras la forma de evaluar. La información que brindó esta investigación es realmente valiosa.

Pacheco, L. (2013) “Clima escolar: percibido por alumnos (as) y profesores (as) a partir de las relaciones sociales que predominan en las aulas de clase del instituto polivalente Dr. Doroteo Varela Mejía de Yarumerla la Paz, Tegucigalpa”. Tesis de Master en estudios de género y educación. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazan. El objetivo de esta tesis es “Conocer la percepción que tienen los alumnos/as y profesores/as sobre el clima escolar a partir de las relaciones sociales, personales que predominan en las aulas de clase del instituto Polivalente Dr. Doroteo Varela Mejía de Yarumela, La paz. La metodología utilizada fue con enfoque cuantitativo, tipo de estudio descriptivo, no experimental, el diseño fue de carácter Transeccional o Transversal descriptivo. La población fue de 1050 personas, de estas 994 fueron estudiantes, 78 profesores/as, 9 docentes, 19 que labora en servicio civil. La muestra fue probabilística, dividido en tres grupos: grupo A, Alumnos y alumnas que estudian en el Instituto Polivalente Dr. Doroteo Varela Mejía, 300 estudiantes; grupo B, alumnos y alumnas que presentan problemas de indisciplina, 68 alumnos y alumnas, fue muestra homogénea; y grupo C, autoridades educativas y docentes de las diferentes especialidades pedagógicas y técnicas que trabajan en la institución fueron 14, de estos 3 son varones y 11 son mujeres. Se obtuvieron como resultados que las relaciones sociales predominantes en las aulas son de vital importancia para los sujetos investigados, ellos la vinculan con la comunicación, el respeto mutuo, la igualdad de oportunidades, dicho de otra manera los estudiantes consideraron que los profesores se preocupan y se interesan en los procesos de enseñanza-aprendizaje, implicando la implementación de prácticas metodológicas innovadoras. Mientras que los

profesores participantes en esta investigación tienen una percepción negativa de las relaciones sociales. Esta investigación provee información importante a este trabajo respecto al tema del clima escolar.

Quim, M. & Santos, J. (2015). “Factores Asociados de Tercero Básico 2013. Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación, un estudio realizado por la MINEDUC-DIGEDUCA, en el que se clasificaron las variables en dos grupos las que son del centro educativo y las que son inherentes a los estudiantes. El objetivo de este informe es dar conocer las competencias genéricas y específicas que logran alcanzar los estudiantes tanto en lectura como en matemática. La metodología utilizada para este informe fue la de Modelos Jerárquicos Lineales (HLM, por sus siglas en inglés), con la intención de determinar el efecto de las variables sobre el rendimiento escolar en el Ciclo de Educación Básica del año 2,013. La población que se evaluó fue de 191,412 estudiantes provenientes de establecimientos públicos y privados, que representan una tasa neta de cobertura del 44%. Los principales hallazgos del estudio tanto en lectura como en Matemáticas mostraron que la varianza de los resultados es mayor entre los estudiantes que dentro de las escuelas.

Enríquez, C. L., Segura, A. M., y Tovar, J. R. (2013). Factores de riesgo asociados a bajo rendimiento académico en escolares de Bogotá. Investigaciones Andina, Fundación Universitaria del Área Andina, Pereira, Colombia. El objetivo de este estudio fue determinar los factores de riesgo que se asocian con el bajo rendimiento académico, en niños escolares de dos Instituciones Educativas Distritales (IED) de Bogotá. La metodología utilizada en el estudio fue corte transversal donde se caracterizó la población

escolar y realizó análisis bivariado utilizando regresión logística, para explorar la asociación entre posibles factores de riesgo y el bajo rendimiento académico, medido a través de la evaluación final en el área de matemáticas. La población lo conformó 601 escolares de los grados de primero a quinto, de dos Instituciones Educativas Distritales en la localidad de Kennedy en la Ciudad de Bogotá, D.C. (Colombia); Los resultados obtenidos en la investigación afirmaron que son 4 los factores que determinan el riesgo del bajo rendimiento académico y son: presentar historia de ausentismo o problemas disciplinarios, presentar estado de privación socio afectiva y problemas de maltrato, pertenecer a un hogar con tres o más niños menores de cinco años o ser un niño frecuentemente enfermo.

Quim, M. Santos, J. y Cruz, A. (2015) informe departamental y municipal de tercero básico 2013. Guatemala. Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación. –DIGEDUCA- (2013) informe departamental y municipal de tercero básico en la que se muestran cantidades y porcentajes de establecimientos evaluados por departamento; además, cantidades y porcentajes de estudiantes evaluados por sexo, área, sector, jornada y plan de los años 2,006, 2009 y 2013. El objetivo de este informe es tener un parámetro a nivel departamental y nacional para buscar mejorar cada año, tal como ha sucedido con algunos municipios que presentan un avance sustantivo de sus resultados absolutos con el devenir de los años. La población y muestra fueron los estudiantes de tercero básico, de los departamentos de Guatemala, en los años 2006, 2009 y 2013. Los resultados son realmente alarmantes ya que Nebaj en matemáticas y lectura, está casi entre los últimos lugares.

2.2. Fundamentación teórica

2.2.1. Rendimiento académico

2.2.1.1. ¿Qué es rendimiento académico?

El rendimiento académico es un término muy complejo, utilizado de gran manera y un tema que ha sido objeto de investigación en diferentes lugares. Muchos autores le han dado una definición, todos se encausan hacia un mismo fin, pero para que sea más comprensible según la definición de Jiménez (2000) (como se citó en Edel, R, 2003) el rendimiento escolar es un “nivel de conocimientos demostrado en un área o materia comparado con la norma de edad y nivel académico”, al rendimiento académico también se le ha dado el nombre de rendimiento escolar, podemos decir entonces que el rendimiento académico o escolar es la forma en como el estudiante ha asimilado de buena manera la enseñanza-aprendizaje, donde alcanza la preparación mínima en una determinada área o nivel, donde se ven cambios en sus hábitos, adquisición de nuevas y mejoras en sus destrezas, habilidades, actitudes, aspiraciones, ideales e intereses; en general donde se le atribuyen aspectos cualitativos y cuantitativos evidenciándose en gran parte a través de sus promedios o alguna otra forma de acreditación.

2.2.2. Bajo rendimiento académico

2.2.2.1. ¿Qué es bajo rendimiento académico?

El bajo rendimiento académico o bajo rendimiento escolar es visto como la carencia de alcance en relación a los objetivos planteados por la institución educativa o bien objetivos prefijados en alguna área o nivel académico. El bajo

rendimiento académico es un tema muy sonado y preocupante en muchos centros educativos, se cree que es originado por varios factores, desde los aspectos socioeconómicos, psicológicos, culturales y familiares.

El problema del bajo rendimiento académico es algo que no se le ha podido dar una solución de erradicación por su complejidad, a pesar del esfuerzo de varios actores, como docentes, padres de familia y hasta incluso el MINEDUC, a través de la implementación de programas para fortalecer la calidad educativa, es poco el resultado que se ha visto

2.2.2.2. Indicadores de bajo rendimiento académico

Los siguientes datos que se presentan han sido adquiridos del informe departamental y municipal, de tercer básico 2,013 de la Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa-DIGEDUCA, donde se encuentran informaciones sobre las cantidades y porcentajes de establecimientos evaluados por departamento; además, cantidades y porcentajes de estudiantes evaluados por: sexo, área, sector, jornada y plan de los años 2006, 2009 y 2013, específicamente en los cursos de Matemáticas y Comunicación y Lenguaje. Pero para esta investigación solo se tomará en cuenta el departamento del Quiché y el municipio de Nebaj.

Tabla 2

Establecimientos de tercero básico evaluados por años, según departamento

No.	Departamento	2006	%	2009	%	2013	%
1	Alta Verapaz	102	2.96	215	4.18	315	4.83
2	Baja Verapaz	61	1.77	79	1.54	164	2.51
3	Chimaltenango	157	4.55	214	4.16	275	4.22
4	Chiquimula	100	2.90	154	2.99	205	3.14
5	Ciudad Capital	456	13.23	655	12.73	632	9.69
6	El Progreso	63	1.83	72	1.40	99	1.52
7	Escuintla	185	5.37	256	4.98	256	3.93
8	Guatemala	475	13.78	748	14.54	812	12.45
9	Huehuetenango	149	4.32	235	4.57	393	6.03
10	Izabal	109	3.16	164	3.19	233	3.57
11	Jalapa	79	2.29	120	2.33	163	2.50
12	Jutiapa	121	3.51	178	3.46	209	3.20
13	Petén	139	4.03	213	4.14	309	4.74
14	Quetzaltenango	213	6.18	310	6.03	369	5.66
15	Quiché	120	3.48	202	3.93	285	4.37
16	Retalhuleu	94	2.73	121	2.35	178	2.73
17	Sacatepéquez	127	3.68	168	3.27	209	3.20
18	San Marcos	244	7.08	335	6.51	465	7.13
19	Santa Rosa	88	2.55	135	2.62	198	3.04
20	Sololá	93	2.70	164	3.19	209	3.20
21	Suchitepéquez	150	4.35	184	3.58	272	4.17
22	Totonicapán	67	1.94	131	2.55	152	2.33
23	Zacapa	55	1.60	91	1.77	120	1.84
	Total	3,447	100	5,144	100	6,522	100

Referencia. Ministerio de Educación, Dgeduca, 2014. La tabla muestra los establecimientos de tercero básico evaluados por año según departamento.

Tabla 3.

Estudiantes de tercero básico evaluados por años, según departamento

No.	Departamento	2006	%	2009	%	2013	%
1	Alta Verapaz	5,310	4.23	7,061	4.17	9,679	5.06
2	Baja Verapaz	2,280	1.81	2,340	1.38	3,568	1.86
3	Chimaltenango	4,765	3.79	6,394	3.77	7,615	3.98
4	Chiquimula	2,912	2.32	3,491	2.06	3,942	2.06
5	Ciudad Capital	17,573	13.99	30,561	18.04	28,415	14.84
6	El Progreso	1,864	1.48	2,268	1.34	2,749	1.44
7	Escuintla	7,116	5.66	9,390	5.54	9,175	4.79
8	Guatemala	17,522	13.94	25,233	14.89	26,995	14.10
9	Huehuetenango	5,547	4.41	7,179	4.24	10,031	5.24
10	Izabal	3,337	2.66	4,132	2.44	4,752	2.48
11	Jalapa	2,786	2.22	3,221	1.90	3,654	1.91
12	Jutiapa	4,790	3.81	5,774	3.41	6,346	3.32
13	Petén	4,118	3.28	5,068	2.99	6,707	3.50
14	Quetzaltenango	8,295	6.60	11,023	6.51	11,203	5.85
15	Quiché	4,721	3.76	5,820	3.43	8,038	4.20
16	Retalhuleu	3,574	2.84	4,215	2.49	4,907	2.56
17	Sacatepéquez	3,526	2.81	4,527	2.67	5,084	2.66
18	San Marcos	9,021	7.18	10,401	6.14	12,785	6.68
19	Santa Rosa	3,705	2.95	4,311	2.54	5,280	2.76
20	Sololá	3,133	2.49	4,526	2.67	5,729	2.99
21	Suchitepéquez	5,057	4.02	6,119	3.61	7,309	3.82
22	Totonicapán	2,726	2.17	3,866	2.28	4,503	2.35
23	Zacapa	1,973	1.57	2,519	1.49	2,946	1.54
	Total	125,651	100	169,439	100	191,412	100

Referencia. Ministerio de Educación, Dgeduca, 2014. La tabla muestra los estudiantes de tercero básico evaluados por años, según departamento.

Tabla 4.

Porcentaje de Logro en Matemáticas por años, según departamento

No.	Departamento	2006	2009	2013
1	Alta Verapaz	17.85%	14.12%	12.29%
2	Baja Verapaz	14.80%	14.67%	13.24%
3	Chimaltenango	19.47%	16.87%	23.47%
4	Chiquimula	19.55%	15.42%	15.15%
5	Ciudad Capital	29.02%	24.45%	26.78%
6	El Progreso	19.26%	15.52%	15.91%
7	Escuintla	21.33%	14.61%	16.09%
8	Guatemala	26.05%	26.40%	28.32%
9	Huehuetenango	20.34%	16.98%	15.83%
10	Izabal	19.07%	16.67%	13.71%
11	Jalapa	21.29%	14.69%	10.51%
12	Jutiapa	20.13%	14.97%	11.94%
13	Petén	15.17%	14.04%	12.17%
14	Quetzaltenango	20.12%	17.27%	18.55%
15	Quiché	19.67%	14.64%	12.19%
16	Retalhuleu	21.69%	18.75%	16.39%
17	Sacatepéquez	21.98%	17.32%	25.03%
18	San Marcos	16.49%	13.75%	11.40%
19	Santa Rosa	20.53%	14.66%	11.86%
20	Sololá	15.34%	14.10%	9.91%
21	Suchitepéquez	17.06%	15.30%	13.89%
22	Totonicapán	16.40%	10.08%	11.13%
23	Zacapa	19.15%	16.08%	13.85%
24	Nacional	21.41%	18.61%	18.35%

Referencia. Ministerio de Educación, Dgeduca, 2014. La tabla muestra el porcentaje de logro en matemáticas por años, según departamento.

Tabla 5.

Porcentaje de Logro en Matemáticas de tercero básico por años, según municipios de Quiché

No.	Municipios	Logro en Matemáticas año 2006	Logro en Matemáticas año 2009	Logro en Matemáticas año 2013
1	Chiché	25.00%	16.05%	27.59%
2	Chinique	17.65%	22.52%	24.83%
3	Zacualpa	30.61%	29.13%	20.83%
4	Santo Tomas Chichicastenango	11.74%	15.16%	20.24%
5	Santa Cruz del Quiché	20.68%	15.35%	18.87%
6	San Pedro Jocopilas	27.42%	43.12%	18.80%
7	Nacional	21.41%	18.61%	18.35%
8	San Antonio Ilostenango	15.15%	13.75%	18.33%
9	Pachalum	20.17%	28.78%	16.08%
10	Chicamán	33.73%	17.50%	12.90%
11	Departamental	19.67%	14.64%	12.19%
12	San Juan Cotzal	18.99%	7.22%	11.73%
13	San Andrés Sajcabajá	15.19%	16.26%	11.66%
14	Joyabaj	26.74%	19.92%	10.39%
15	Cunén	13.45%	13.97%	10.12%
16	Canillá	22.22%	8.00%	9.92%
17	San Bartolomé Jocotenango	0.00%	27.59%	9.68%
18	Patzité	26.92%	27.27%	9.23%
19	Ixcán	10.40%	10.14%	7.37%
20	San Miguel Uspantán	21.40%	10.18%	6.39%
21	Chajul	44.44%	10.10%	6.38%
22	Sacapulas	6.88%	16.20%	6.29%
23	Nebaj	29.71%	10.10%	5.52%
24	Playa Grande	N/A	N/A	N/A

Referencia. Ministerio de Educación, Dgeduca, 2014. La tabla muestra el Porcentaje de Logro en Matemáticas de tercero básico por años, según municipios de Quiché

Tabla 6.

Logro nacional según establecimiento

No.	Tendencia del establecimiento	2006	2009	2013
1	Logro en lectura	0.00%	0.00%	3.57%
2	Logro en Matemáticas	5.26%	11.11%	3.57%

Referencia. Ministerio de Educación, Dgeduca, 2014. La tabla muestra el logro del establecimiento a nivel nacional.

2.2.3. Fracaso escolar

2.2.3.1. ¿Qué es fracaso escolar?

Cuando se habla de un estudiante que fracasa en la escuela se hace mención a un estudiante que repite de grado, que tiene sobreedad o deserta, que queda excluido del sistema educativo formal. Pero, en realidad ¿Qué es el fracaso escolar? Según la Enciclopedia de Pedagogía Practica, Parte 2: El niño en la escuela (2006) “El niño tiene dificultades escolares cuando sus rendimientos en el aprendizaje, a partir de un determinado momento, están por debajo de sus capacidades intelectuales” (p. 379).

De lo anterior, el fracaso escolar hoy en día es uno de los más grandes problemas que enfrenta la mayoría de los centros educativos, es importante entonces considerar que esta problemática se da por diversas situaciones tanto sociales, familiares, pedagógicas y limitaciones físicas del alumno. Según “El pedagogo García, V. (1911-1998) (citado en la Enciclopedia de Pedagogía Practica, Parte 2: El niño en la escuela 2006) decía: “Calificar con el mismo nivel a todos los alumnos es una injusticia. El fracaso escolar nace de convertir los exámenes en sanción social y no en acción pedagógica” (p. 378).

2.2.3.2. Indicadores de fracaso escolar

Según las noticias de Prensa libre dice que:

De acuerdo con estadísticas del Ministerio de Educación (MINEDUC), la matrícula a escala nacional comenzó en el año 2017 con tres millones 887 mil 264 estudiantes. Sin embargo, en los primeros cuatro meses desertaron

13 mil seis. De esa cifra, dos mil 551 dijeron que no les interesa continuar sus estudios, tres mil 404 fueron trasladados; 968, por migración temporal; 663, por trabajo; 593, por la distancia que deben recorrer para llegar al centro educativo; 428, por falta de recursos; y 268, por enfermedad. (Alvizurez Y. y corresponsales, 23-05-2017)

2.2.4. Teorías sobre rendimiento académico y fracaso escolar

El rendimiento académico refleja la disposición con la que el estudiante recibe, aprovecha, pone en práctica los conocimientos adquiridos durante un lapso de tiempo, el rendimiento académico no solo significa tener una alta y mejor acreditación en determinadas áreas o nivel, sino la forma en como estos hacen cambios en la conducta y la vida en sí del estudiante. Dentro de los factores que influyen de buena manera en el rendimiento académico de un alumno es la relación que existe entre docente-alumno, respeto, disciplina en el desarrollo de las clases, el tiempo disponible y la explicación de los contenidos, el tipo de tarea que se asigna, la mecánica de revisión, la capacidad mental del alumno, el interés y esfuerzo que demuestra para el aprendizaje de las diversas materias, el esfuerzo, en fin pueden agregarse otros aspectos que benefician a la misma.

Por el otro lado, está el fracaso escolar que sería todo lo contrario del buen rendimiento académico, en donde el estudiante ha tenido un bajo o nulo desempeño en las metas y perfiles deseados o establecidos por el centro educativo o los docentes, el fracaso escolar abarcaría, la no aprobación de un grado, deserción escolar, la poca asimilación de los contenidos, promedios bajos, sobreedad, repitencia escolar. Se debe

tomar en cuenta que el fracaso escolar es originado por varios factores, como: la adolescencia, los malos hábitos de estudio, la falta de motivación personal y familiar, falta de organización del tiempo y espacio, factor socioeconómico, aptitudes diferentes, etc. (Lamas, H. 2015).

2.2.5. Adolescencia

2.2.5.1. Adolescencia y rendimiento académico

La Organización Mundial de la Salud -OMS, define “la adolescencia como el periodo de crecimiento y desarrollo humano que se produce después de la niñez y antes de la edad adulta, entre los 10 y los 19 años”. Adolescencia es una etapa difícil por la que atraviesan los jóvenes y señoritas, una etapa donde se experimentan muchos cambios tanto físicos, sociales y psicológicos, en la que busca su identidad propia, su independencia y el deseo de probar sus capacidades. El o la adolescente cambia sus interés de un momento a otro ya que su personalidad aún no se encuentra definida, se hace más vulnerable ante tantas situaciones de la vida, sus emociones pasan de un extremo a otro, empiezan a sentir atracción física por el sexo opuesto, en cada actividad que realizan encuentran satisfacción o insatisfacción, aumentan su autoestima o baja su autoestima, en esta etapa es cuando se consideran autosuficientes, tal como lo establece Elking, D. (1931) (citado en la Enciclopedia de Pedagogía Practica, Parte 2: El niño en la escuela 2006) definió el egocentrismo adolescente como una característica del pensamiento, en la cual los jóvenes tienden a centrarse en sí mismos y excluir a los demás, creyendo que sus pensamientos, sentimientos o experiencias son únicos (p. 366).

En base a la publicación del Equipo de Terapia y Mas, (05/06/2014) sobre el fracaso escolar en la adolescencia, indican que cada persona es única y cada caso de fracaso académico es multifactorial y que existen dos factores personales fundamentales en el rendimiento académico a los que les afectan las crisis de la adolescencia: la falta de motivación hacia el estudio y la baja autoestima. La primera se refiere a la energía con que se le impulsa a la vida estudiantil, por lo regular la motivación tiende a ser extrínseca, es decir una motivación que viene de afuera, en la cual las personas que lo rodean cumplen un papel fundamental; y la segunda se refiere a la forma de como el adolescente se acepta y se valora, en este punto al joven se le exige más en el ámbito educativo, todas estas exigencias traen consigo mucha ansiedad en el adolescente lo cual lo limita a poner más de su parte en su nivel de estudio.

2.2.6. Variables del rendimiento académico

El término variable hace alusión a aquello que varía o que está en un constante cambio, según publicación de García, A. L. (2016), variables que influyen en el rendimiento académico se enumeran y se describen las siguientes:

- Variables demográficas: tiene que ver con la variable del sexo, la edad del estudiante, su estado civil, becas aportadas.

- Variables Cognoscitivas: hace referencia a las capacidades y habilidades que este tenga para transmitir y recibir los conocimientos, al cual se incluyen sus estilos de aprendizaje.
- Variables actitudinales: refleja las variables afectivas, como la motivación, las técnicas de estudio que utiliza el estudiante, la organización de su tiempo, el interés hacia el estudio y autoestima.

2.2.7. Aprendizaje significativo

Se concibe el aprendizaje como un cambio de conducta ya sea físico o mental. En cuanto al aprendizaje significativo se relaciona, de manera fundamental la nueva información con lo que el alumno ya sabe, es decir se parte desde los conocimientos del estudiante, incorporando nueva información. La más grande ventaja del aprendizaje significativo es que será retenido durante un mayor tiempo, además producirá cambios de manera cualitativa, es posible que se olviden algunos detalles pero la mayor parte quedará grabada en la memoria de los estudiantes.

En el aprendizaje significativo el alumno no se limita únicamente a recibir nuevos conocimientos, sino que busca la manera de que sea constructivo para él; es decir, al recibir los nuevos conocimientos, pronto los relaciona con los que ya posee, para hacer más amena su preparación. (Enciclopedia de Pedagogía Práctica 2005-2006).

2.2.7.1. Procesos de aprendizaje

El aprendizaje es una actividad que se realiza con el fin de adquirir nuevos conocimientos y que producen un cambio de comportamiento en el ser humano a través de una experiencia. Según el Diccionario de la Real Academia Española, versión online (citado en el módulo, Metodología del Aprendizaje, MINEDUC de la Dirección General de Gestión de Calidad Educativa- DIGECADE, 2010) define el aprendizaje como “el proceso por el cual las personas adquieren cambios en su comportamiento, mejoran sus actuaciones, reorganizan su pensamiento o descubren nuevas maneras de comportamiento y nuevos conceptos e información”. El aprendizaje está siempre presente en la vida del ser humano ya que día a día aprenden.

Con respecto a los procesos de aprendizaje, el módulo, Metodología del Aprendizaje, MINEDUC- DIGECADE (2010) lo define como “las actividades que realizan los y las estudiantes para alcanzar los indicadores de logro, que evidencian cuán competentes son para resolver los problemas de la vida cotidiana.

En el artículo de Yáñez, M. P. (2016) “El proceso de aprendizaje: fases y elementos fundamentales” en la que tienen como referencia a (Pozo y Monereo, 1999), quien puntualiza nueve etapas del proceso de aprendizaje, las cuales se describen a continuación.

2.2.7.1.1. *Motivación*: es lo que mueve al ser humano a realizar algo, no se aprende, sino que surge de cada persona, es fundamental en el estudio, ya que el alumno motivado estudia de forma efectiva. La motivación puede ser intrínseca y extrínseca; la primera viene del interior, consiste en que el estudiante muestra más interés en lo que está aprendiendo, alcanza mayor complacencia en lo que hace, se siente capaz y tiene más confianza en sí mismo, es persistente, eleva su autoestima y su creatividad, mientras que la segunda motivación se basa en estímulos externos que le son otorgados a través de las recompensas o el castigo.

Según la guía completa para el crecimiento personal “Psicología para todos” en su capítulo 5, p. 145 (s.f.), mencionan 3 puntos para motivar a la gente: a) cultivar la motivación intrínseca, dejándoles tareas que promuevan la curiosidad; b) Conocer los motivos de la gente; c) Determinar metas específicas, los objetivos deben ser claros y explícitos que estimulen la creatividad.

2.2.7.1.2. *Interés*: es la inclinación siempre positiva que un estudiante muestra por las cosas que hace, el gusto por aprender, exigen más aprendizaje, estudia sin importarle el tiempo, las bajas calificaciones lo impulsan más a estudiar; el interés es lo que mueve al estudiante para alcanzar su objetivo.

2.2.7.1.3. *Atención:* es referido a la capacidad mental que le permite al estudiante centrarse y concentrarse de manera espontánea o voluntaria hacia un aspecto de su entorno sin tener en cuenta el resto. Cuando un alumno presta atención pregunta las cosas si no las entiende, está siempre atento a las explicaciones del profesor y toma nota de ello, evita cualquier tipo de distracción, su participación es siempre de forma activa.

2.2.7.1.4. *Adquisición:* es la fase del proceso en la que el estudiante se pone en contacto con los contenidos de la asignatura, adquiere nuevos conocimientos, la retención de esta información dependerá de la importancia y uso que se le dé.

2.2.7.1.5. *Comprensión e interiorización:* están muy relacionadas con la comprensión crítica del estudiante, lo significativo que se enseña-aprende influye en este proceso, ya que el estudiante relaciona el contenido con lo que ya sabe y emite su juicio con respecto a ello, recordando siempre lo que aprende en determinado momento, adueñándose de la misma.

2.2.7.1.6. *Asimilación:* esta fase afectará básicamente el comportamiento del estudiante, porque todo lo asimilado y guardado lo puede poner en práctica en su vida diaria. Citaremos una definición de Wikipedia (s.f), un concepto psicológico introducido por Jean Piaget “para

explicar el modo por el cual las personas ingresan nuevos elementos a sus esquemas mentales preexistentes”. Por lo tanto la asimilación entonces es muy importante en la forma de cómo el estudiante aprende acerca del mundo que le rodea.

2.2.7.1.7. *Aplicación:* aquí el estudiante pone en práctica todo lo aprendido, ya sea para su bien personal, familiar o profesional; pero cuando un conocimiento no es asimilado de forma correcta puede crear frustración en el estudiante.

2.2.7.1.8. *Transferencia:* se refiere a la adquisición y aplicación de los conocimientos aprendidos, para facilitar aprendizajes posteriores que se puedan dar o, cuando en el aula surja un conflicto, el estudiante con los nuevos conocimientos procurará darle una posible solución.

2.2.7.1.9. *Evaluación:* según Cronbach, (1984) (citado por Ruano, R.A. 2002, en el libro Evaluación Educativa) define la evaluación como el “proceso mediante el cual el profesor y el alumno juzgan si han logrado los objetivos de enseñanza”, para muchos docentes esta fase es la última dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, lo más correcto es tener la evaluación siempre presente, debe ser continua y darse en sus momentos respectivos, diagnóstica, formativa y sumativa.

2.2.8. Estrategias y metodologías de aprendizaje

2.2.8.1. ¿Qué es estrategias de aprendizaje?

Es la forma en como el docente enseña y como el alumno aprende, en la que crean un ambiente adecuado para el aprendizaje, con respeto y aprecio mutuo de acuerdo a su contexto. Según el módulo, Metodología del Aprendizaje, MINEDUC-DIGECADE (2010), hacen alusión a que las estrategias pueden ser: impuestas o inducidas. Las estrategias impuestas son dirigidas por el o la docente; mientras que las estrategias inducidas son las que le permiten al estudiante construir su propio aprendizaje (p. 13).

2.2.8.2. ¿Qué es metodología de aprendizaje?

La palabra método se refiere a los procedimientos para alcanzar los objetivos propuestos; y aprendizaje es un proceso mediante el cual se adquieren nuevos conocimientos, habilidades o destrezas.

En cuanto a la metodología del aprendizaje, publicado por Casarez, A. (2009), dice que la metodología del aprendizaje es el “Estudio de técnicas, procedimientos y recursos enfocados a la mejora y optimización de nuestra capacidad para obtener nuevos conocimientos y habilidades.” Entonces se puede decir, que esto se refiere a los procedimientos o técnicas utilizados por el docente para desarrollar su quehacer educativo. Dentro de las metodologías más usadas se mencionan las siguientes: planificación, clases magistrales, trabajos grupales/individuales, evaluación de tipo sumativa; las que son conocidas pero que se utilizan muy poco: evaluación diagnóstica y formativa, entre otros.

2.2.8.3. Clasificación de las estrategias

Las estrategias son las acciones que están dirigidas a un objetivo de aprendizaje, son muy importantes para determinar, qué es lo que se necesita mejorar en la tarea educativa. Anónimo (s.f.) Estrategias de aprendizaje A continuación se presentan las siguientes clasificaciones:

2.2.8.3.1. Estrategias de ensayo

Es aquella estrategia en la que se da la repetición activa de los contenidos, copiar materiales de objeto de aprendizaje, centrándose en las partes claves de él, tomando notas de la misma y subrayándolas.

2.2.8.3.2. Estrategias de elaboración:

Es cuando se hacen conexiones entre lo nuevo y lo familiar, es decir donde el alumno relaciona la nueva información con lo que ya sabe, describiéndola, resumiendo y parafraseando la información.

2.2.8.3.3. Estrategias de organización

Esta estrategia pretende agrupar la información, de modo que sea muy fácil recordarla, elaborando esquemas, cuadros sinópticos, mapas conceptuales, haciendo resúmenes, subrayando datos importantes.

2.2.8.3.4. *Estrategias de control de la comprensión*

Está destinada a controlar la actividad mental del estudiante, relacionado con la metacognición (que se refiere a la capacidad del ser humano para reflexionar sobre sus procesos de pensamiento y aprendizaje), significa estar muy consciente de lo que se desea lograr. En esta estrategia entra en juego la planificación mediante el cual los estudiantes dirigen y controlan su aprendizaje, estableciendo sus metas, programando su tiempo; la regulación, dirección y supervisión es un segundo punto importante, en la que el alumno formula sus propias preguntas, modifica y busca sus otras estrategias alternas en caso de que las anteriores no sean eficaces; y por último está la evaluación, en la que se verifica el proceso de aprendizaje, en la que se valora si se han conseguido los objetivos propuestos.

2.2.8.3.5. *Estrategias de apoyo o afectivas*

Está de apoyo al aprendizaje, no están dirigidas al aprendizaje de los contenidos sino a las condiciones donde se produce el aprendizaje, en esta estrategia entra en juego la motivación, atención, concentración, manejo de la ansiedad y del tiempo.

2.2.9. Hábitos de estudio

Según la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM, (s.f.) el hábito es algo que se adquiere de otras personas o de la propia experiencia y que se vuelve una práctica y costumbre en la frecuencia con que se va utilizando. Existen hábitos buenos y

malos, los hábitos malos como ejemplo: tomar en cuenta el hecho de fumar, de hablar demasiado, ser vulgar, comerse las uñas, entre otros; dentro de los buenos hábitos se encuentra la puntualidad, la responsabilidad, el orden, la limpieza.

Hablar de los hábitos de estudio es hablar de aquellas conductas que los estudiantes practican con frecuencia para incorporar saberes a su mente, pero también determinan el mejor lugar y el momento para estudiar. En la vida del estudiante los hábitos de estudio son la mejor clave para alcanzar el éxito y el mejor rendimiento académico.

La UNAM (s.f.) y Gabinete psicopedagógico UGR (s.f.), resalta algunos ejemplos de buenos hábitos de estudio propuestos a continuación.

- Organizar el tiempo: hacer un plan o agenda de actividades diarias.
- Poner atención: cuando el maestro imparte sus clases es importante prestarle toda la atención, de la misma manera se pueden tomar notas importantes de lo que él explica.
- Estudiar todos los días: buscar un lugar ordenado y momento del día para estudiar, evitando las distracciones como la televisión, ruidos.
- Utilizar técnicas para estudiar: como métodos de estudio, organización del lugar de trabajo, aprendizaje lector, utilización de diccionarios enciclopédicos, realizar trabajos escritos, elaborar fichas, entre otros.

- Actitud positiva: a pesar de las adversidades de la vida es muy importante contar con esta actitud, con esto se vencerán los malos hábitos como: el miedo, la ansiedad y la derrota.
- Potenciar la memoria al máximo: significa estar muy concentrado en el estudio.
- Acercarse a los profesores: pedirles lecturas complementarias y materiales con ejercicios, para reforzar lo aprendido.
- Investigar lo aprendido: no significa dejar de confiar en lo que el docente ha enseñado sino de complementar lo aprendido.
- Lecturas rápidas: obtener una visión completa del texto.
- Subrayado de ideas centrales: analizar lo que el autor quiere decir y resaltar la información más relevante.

Ejemplos de malos hábitos, que los estudiantes deben evitar o corregir:

- Aprender todo en un día antes del examen.
- Memorizar el contenido de los libros, sin comprender.
- Estudiar acostado.
- Faltar o no prestar atención a la clase.
- Estudiar escuchando música a todo volumen.

2.2.10. Métodos de evaluación

Son los procedimientos que se utilizan para obtener la información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ruano (2002). En el libro Evaluación Educativa propone a continuación algunas formas que se pueden utilizar en un trabajo de campo,

aunque en esta ocasión son más recomendados para la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2.10.1.Observación

Según el libro de Evaluación educativa (2002), la observación se utiliza constantemente para describir en forma integral las actitudes, los comportamientos individuales o grupales, los conocimientos, formas de aprender, grado de motivación, calidad y grado de aprendizaje de los estudiantes. La observación se puede dar de forma espontánea o sistematizada, para ello es muy importante también utilizar algunas técnicas de observación como lo son: la lista de cotejo, escala de rango, entre otros.

2.2.10.2.Entrevista

Es una herramienta para el docente, le permite conocer a sus estudiantes, sus dificultades, para que se intente la forma adecuada de apoyarles. Aunque también este tipo de herramienta lo puede realizar un psicólogo o el orientador del establecimiento, siempre con la intención de conocer el aprendizaje que ha adquirido el estudiante hasta el momento, se deben hallar la lógica de sus acciones para ver que se puede hacer para ayudarlo o no.

2.2.10.3.Encuesta

Consiste en una serie de preguntas abiertas, cerradas o semiabiertas, por medio de las cuales se recolecta información respecto a un área determinada del proceso de enseñanza-aprendizaje o algún aspecto del entorno.

2.2.10.4. Test

En nuestro medio son conocidos como exámenes, se refieren a las hojas de trabajo con una serie de preguntas que determinan lo que los estudiantes han aprendido, al cual se le da una calificación. Los test pueden ser de tipo objetivo (preguntas de selección múltiple, falso verdadero, complementación) y, subjetivas (ensayo).

2.2.10.5. Portafolio

Es la utilización de un folder o una bolsa en la que se recopilan las muestras de los trabajos que los estudiantes han realizado y que muestran sus aprendizajes, las habilidades y sus logros durante un tiempo determinado o un año escolar.

2.2.11. Clima escolar

2.2.11.1. ¿Qué es clima escolar?

Barreto y Álvarez (2017) en su estudio clima escolar y rendimiento académico en estudiantes de preparatoria aducen que: dentro de un centro educativo se establecen reglas, se cuenta con un pensum de estudios, existe una comunidad educativa, que está conformada por los padres de familia, docentes, educandos; la forma en que todos estos elementos se relacionan en este ambiente crean lo que es el clima escolar; es la forma en como el docente-alumno se relacionan entre si y como implican las reglas y el pensum de estudios dentro de la misma. El clima escolar sin duda alguna influye en el comportamiento de los estudiantes, ya sea de forma positiva o negativa.

Un clima escolar positivo se basa en una calidad de relación de los estudiantes con el docente o con quienes se relaciona, donde el respeto, la comunicación, la confianza, la cooperación, la responsabilidad, la organización, el trabajo en equipo se dan de manera mutua, eficacia en la enseñanza; en general el buen clima escolar depende en gran medida de la forma en como el estudiante se siente a gusto con el trato que recibe, el entorno donde se desenvuelve y como este se siente involucrado dentro de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

En tanto, el clima escolar negativo sería todo lo contrario a lo descrito anteriormente, ya que se notaría la presencia de actitudes indiferentes y autoritarias de parte del docente, en la que el estudiante solo se limita a recibir instrucciones, entregar tareas que podrían no estar acordes a los contenidos, en la que el docente no se interesa por dialogar sobre las deficiencias del estudiante. Y, claro con todo esto el estudiante se distanciará emocional y psicológicamente, los elementos de este clima le impedirán un adecuado desarrollo de su proceso enseñanza-aprendizaje

2.2.11.2. Tipología y dimensiones del clima escolar

2.2.11.2.1. Tipos de clima escolar

Pacheco (2013), en su tesis de maestría, cita a varios autores quienes hacen clasificaciones de diversas formas, pero para esta investigación se cita la siguiente clasificación propuesta por Bris, (2000) combinando diversos criterios afirmando los siguientes tipos de clima:

- *Clima participativo:* se refiere al espacio que se le da al estudiante de participar de forma activa y responsable en su proceso enseñanza-aprendizaje, motivándolo a tomar sus propias decisiones.
- *Clima de comunicación:* es el factor clave en la vida de la escuela, en el cual existe la buena comunicación docente-estudiante, en la que el estudiante de forma natural y fluida comunica todo lo que le gusta y le disgusta, donde el docente escucha de forma atenta o a la viceversa, para buscarle formas de mejora a los procesos.
- *Clima comprometido:* el estudiante-docente pone en juego todas sus energías para lograr sus metas, dando más de lo esperado, apoyando a los demás a crear un ambiente positivo, impulsando a sus compañeros a ser comprometidos con lo que se desea conseguir.
- *Clima abierto:* prevalece la democracia y se estimula la participación de los involucrados.
- *Clima de confianza:* el docente debe darle la confianza idónea a sus estudiantes, para que ellos en determinado momento puedan buscarlo y confiar en el hablando de lo que le molesta o le gusta.

- *Clima enriquecedor*: un espacio que le permite crecer al estudiante, estimulándole su mente, dándole una riqueza en cuanto a conocimientos pero también a experiencias.
- *Clima innovador*: se ve la participación activa y entusiasta de los involucrados, abriéndoles el espacio para proponer siempre nuevas ideas y motivadoras.
- *Clima transformador*: que realice cambios significativos en los estudiantes, respecto a sus conductas, sentimientos y educación pero sin que cambien su esencia.

2.2.11.2.2. Dimensiones del clima escolar

Según Blanco Bosco, (2007) (citado por Pacheco, (2013)) dentro de su clasificación de dimensiones en el clima del aula se extrae la siguiente:

- *Dimensión motivacional*: se entiende como el nivel de complacencia con la que cuentan los alumnos y los maestros con relación a la situación de su aprendizaje, como las ganas de aprender y enseñar.

Por otro lado, Moreno, C., Díaz, A., Cuevas, C., Nova, C., y Bravo, I. (2011), en la Revista Electrónica de Psicología Iztacala, Vol. 14 No. 3 (2011), señala las siguientes dimensiones:

- *Dimensión Relaciones:* evalúa la relación que existe entre los estudiantes, cómo están integrados, cómo se apoyan entre sí para un bien común dentro del salón de clases.
- *Dimensión autorrealización:* tiene que ver con el logro positivo de sus aspiraciones, donde se valora la importancia otorgada al estudiante de realizar sus tareas en clases y como también en las asignaturas.
- *Dimensión Estabilidad:* aprecia las actividades, las estructuras referentes al cumplimiento de objetivos como lo son la planificación, la organización, claridad, coherencia y labor en la clase.
- *Dimensión Cambio:* evalúa el nivel de algún cambio, un suceso y variación razonable en cuanto a las actividades de clase.

2.2.11.2.3. Clima escolar y rendimiento escolar

Una pequeña investigación realizada en Nuevo León, México, denominada clima escolar y rendimiento académico en estudiantes de preparatoria, Barreto y Álvarez (s.f). Propone argumentos muy sólidos y fuertes del cual se extractó lo siguiente “Las relaciones de los estudiantes con sus pares y con maestros, son las que más influyen de forma importante en el logro educativo (Guerrero, De Fraine, Cueto y León, 2011)”. Es importante resaltar que en algunos casos los estudiantes pasan la mayor parte del tiempo en el aula, rodeado de sus compañeros, instruido por el docente; el docente por lo regular conoce a los estudiantes, mejor que sus padres, por tanto, se puede decir que si el docente los conoce bien, sabe cuáles son sus deficiencias, pero además de ello les apoya, les brinda la confianza, pero sobre todo el respeto, y los impulsa por apostar en su educación, con todo esto el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos será aún mejor.

2.2.12. Inteligencia y aptitudes

La aptitud se refiere a la capacidad que tiene una persona o el estudiante para poder realizar de forma adecuada un determinado quehacer o tarea, va muy relacionada con la inteligencia. (Wikipedia s.f)

La inteligencia es un término muy complejo definir, pero se puede decir que se trata de un conjunto de capacidades que le permiten a la persona desenvolverse con

éxito en un determinado ambiente, solucionando problemas, pensando racionalmente y aprendiendo nuevas estrategias por medio de la experiencia. Según la Guía completa para el crecimiento personal, “Psicología para todos” tomo 2, p. 316 (s.f.), hay muchos tipos de test de inteligencia, de la cual se han obtenido varias puntuaciones respecto a la inteligencia, pero nada de esto se puede tomar al pie de la letra, ya que la inteligencia no tiene que ver únicamente con una puntuación, sino con la capacidad global de como la persona se adapta a la vida, como se relaciona con los que le rodea y de cómo alcanza sus objetivos.

2.2.12.1. Relación entre rendimiento académico, inteligencia y aptitudes

Todos los estudiantes son inteligentes y tienen las aptitudes necesarias para desenvolverse en cualquier lugar, el problema por el cual el estudiante tiene bajas notas o que no rinde en sus estudios no significa que no sea inteligente, sino más bien se ha desarrollado en un ambiente culturalmente restringido (padres analfabetos, poca disponibilidad de libros u otros materiales didácticos) mientras que un estudiante con puntuaciones altas, en el influye: ambientes más privilegiados y estimulantes que lo ayudan a desarrollar más su inteligencia. (Psicología para todos, Tomo 2. Cap. 11, La inteligencia un Concepto Polémico. s.f.).

2.2.13. Problemas de conducta y rendimiento académico

En el artículo de Bravo, (2012) menciona que el bajo rendimiento académico y los problemas conductuales de los niños o adolescentes constituyen un enorme

problema, no sólo para los estudiantes sino también para los docentes y los padres de familia.

Salas y Valdivia (2016) dicen que los problemas de conducta son aquellos comportamientos no comunes, pero que son repetitivos, persistentes e inadecuados que se dan entre los estudiantes-adolescentes, como agresiones, mentiras, berrinches, ansiedad, depresión, enojo, miedo excesivo, provenientes a veces de situaciones familiares, biológicos, psicológicos y sociales. Cuando no se le da una orientación adecuada al estudiante mientras se tiene estos problemas todo esto puede acarrear un bajo rendimiento en sus estudios y sus habilidades personales.

Se debe tomar en cuenta que los problemas de conducta se pueden dar desde la niñez, pero en muchas ocasiones son más visibles en la etapa de la adolescencia en diferentes aspectos.

Muchas veces este egocentrismo es lo que promueve a que el estudiante tenga algunos problemas de conducta, ya que no acepta los puntos de vista y apoyo de los que le rodea, se sienten autosuficientes, volviéndose muy curiosos y atrevidos por probar cosas nuevas que lo pueden llevar a la ruina o al éxito.

2.2.13.1. La personalidad y la identidad social

Rosalba (2016) hacen referencia que la personalidad son todos los rasgos individuales que tiene una persona y que lo diferencian de otras, como su forma de pensar, actuar y de ver la vida. Mientras, que la identidad consiste en una serie

de conductas, habilidades y creencias que tiene dentro de la sociedad, de cómo se relaciona con su familia y el medio que lo rodea.

La juventud atraviesa una crisis de identidad, en la etapa de la adolescencia surgen las preguntas ¿Quién soy yo?, tomando en cuenta sus propios sentimientos, emociones, pensamientos y deseos; el desarrollo de la personalidad del adolescente es un proceso progresivo, cambiante y muy diferente en cada persona.

2.2.13.2. Expresiones emocionales

Las expresiones emocionales son la forma en como el ser humano demuestra, oculta o regula sus diferentes sentimientos.

Las emociones se experimentan inesperadamente como respuesta a un determinado estímulo, ya sea de forma positiva o negativa, entre las que se mencionan: el enojo, los estados afectivos, la alegría, el miedo, el amor, el respeto, la confianza. Las emociones que el ser humano siente juegan un papel muy importante, pero es realmente curioso que el ser humano en variadas ocasiones no expresa sus emociones como tal sino que trata de ocultarlas, mostrando algo diferente de lo que realmente siente.

En la Página Clicpsicologos blog (2012), psicólogo online, se encontró la siguiente información en la que el propio Charles Darwin “sugirió que las expresiones humanas de emoción son respuestas innatas, no aprendidas,

constituidas por un complejo conjunto de movimientos, principalmente de los músculos faciales”.

Cuando una persona no expresa sus emociones tiende a tener baja autoestima, no tiene buena relación con los que le rodea, experimentan estados de ansiedad y depresión; ¿Por qué una persona no expresa sus emociones? No las expresa por las siguientes posibles razones: por falta de costumbre ya que probablemente la cultura donde se desenvuelve es muy reservada; porque ellos tienen miedo a la reacción de los demás; creen que los demás ya lo saben y que no hay necesidad de decirles lo que uno siente; también puede darse en el caso de que ni siquiera uno mismo sabe lo que siente o porque tiene una dependencia emocional.

2.2.13.3. Patologías de emociones y bajo rendimiento académico

El término patología según la Real Academia Española, le da dos significados: “uno lo presenta como la rama de la medicina que se enfoca en las enfermedades del ser humano y, el otro, como el grupo de síntomas asociadas a una determinada dolencia”. Partiendo de esta definición se puede decir entonces que, la patología de las emociones tiene que ver con las enfermedades emocionales que tiene el estudiante; algunos comportamientos/prácticas que conducen o que muestran en el estudiante que están enfermos emocionalmente son las siguientes: disgustos y depresión exagerados, agresividad, ansiedad, desconfianza, egoísmo y avaricia, fantasear despierto, el miedo y la vergüenza excesiva, angustia, sentimientos de sentirse amenazado e hipocondría. Todas

estas van afectando los sentimientos, pensamientos, comportamientos del estudiante, incluso hasta el rendimiento del estudiante en el quehacer educativo, las enfermedades emocionales son una muestra de que algo no anda bien en el estudiante, además, que cada una de ellas tiene especial relación con alguna de las partes del cuerpo humano, que a la vez pueden traer consigo enfermedades físicas, como el sobrepeso, tensión en el cuello y la espalda, dolores de cabeza, estreñimiento, alergias, insomnio, entre otros. Por lo tanto, estos pueden ser una dificultad en el aprendizaje de los estudiantes, y por consiguiente un bajo rendimiento académico. (Florin, 2014).

2.2.14. Bajo rendimiento académico y familia

La familia es el núcleo básico de la comunidad humana, formada por un hombre (el padre), una mujer (la madre) y por ende los hijos que nacen de esta unión. Es considerada como la primera escuela del niño, porque es allí donde se brinda una base sólida para afrontar en un futuro la vida adulta, se les inculcan los valores de la vida, el trabajo, el sacrificio y esfuerzo para tener una vida digna; la familia es fundamental en la vida estudiantil de los niños, niñas, jóvenes y señoritas.

2.2.14.1. Características del ámbito familiar

Familia solo hay una, pero es por diversos factores que se presentan en la vida, se puede subdividir en varios tipos, de acuerdo a ciertas características. Por su parte Corbin (2,018), sobresalen varias, a continuación se describen algunas:

- *Familia nuclear (biparental)*: figura un padre y una madre, en la que ambas personas se involucran en la educación de sus hijos, se preocupan por el bienestar de ellos, tanto físico, mental, emocional y material; aunque no cuentan con los suficientes recursos para satisfacer las mismas buscan la manera de darle lo mejor a sus hijos e hijas.
- *Familia monoparental*: se refiere a que solo uno de los padres se hace cargo de criar a los hijos, en la cual solo está la madre o el padre, cumpliendo dos roles, ya sea por motivos de fallecimiento, divorcio o porque ha sido una madre soltera, para lo cual ella o él tiene que ver la manera de ayudar a sus hijos e hijas a salir adelante y que tengan lo necesario.
- *Familia adoptiva*: hace referencia a los padres que en determinado momento adoptan un hijo o hija, desempeñan el papel de ser educadores, pero realmente no son los padres biológicos.
- *Familia de padres separados*: se da en el caso de que los padres se separan por alguna crisis en su relación, a pesar de que no viven juntos no dejan de cumplir con sus deberes como padres, se distribuyen sus funciones.

- *Familia compuesta*: se refleja cuando ambos padres tienen otra pareja, que en lugar de dos se vuelven cuatro, (padre y pareja, madre y pareja), por lo que el hijo o la hija comparten con ambos y con los hermanastros/as si en caso se llegan a tener.
- *Familia extensa*: se caracteriza porque la formación de sus hijos e hijas está a cargo de otros familiares diferentes al núcleo familiar, ya sean los abuelos, tíos, primos u otros que viven en la misma casa.

2.2.14.2. Factores familiares y su incidencia en el bajo rendimiento académico

Puede haber un sinnúmero de factores que inciden en el bajo rendimiento académico, a continuación se describen algunas: (Ruiz, 2001) y (Enríquez, Segura, y Tovar, (2013).

- *Económicos*: vivir en la pobreza o que los padres no cuenten con una estabilidad laboral, tener un pago injusto que no alcanza para cubrir la canasta básica, esto suele darse más en las familias monoparentales. Cuando esto pasa el estudiante ni siquiera tiene para cubrir los gastos de alguna tarea, esto lo estimula a trabajar para satisfacer sus necesidades básicas, restándole importancia a sus estudios o desertar definitivamente.
- *Formación académica de los padres*: la triste realidad es que muchos padres no tuvieron la oportunidad de asistir a la escuela, al darse estos casos, desconocen los procesos educativos y su importancia, solo dominan su

idioma materno y aunque tengan la buena intención de apoyar a sus hijos no saben cómo orientarlos y ayudarlos con las tareas de la escuela o en alguna dificultad que tengan; o en otro caso le restan importancia a la educación, lo que genera un bajo rendimiento en los estudiantes.

- *Problemas intrafamiliares:* en tiempos anteriores y más en la actualidad este problema sigue afectando a los niños, niñas, jóvenes y señoritas, estas complicaciones les roban la paz, prefieren buscar la tranquilidad y el desahogo de estos problemas con sus amigos, en otras actividades que por lo regular no son beneficiosas para su bienestar, hacen a un lado sus estudios, y los padres los desatienden.
- *El trabajo:* a cierta edad el joven o la señorita se vuelven una pieza importante dentro de la familia, les delegan responsabilidades de adultos, como ayudar en los quehaceres de la casa, a sufragar los gastos de la casa o de sus propios estudios, mientras más trabajan más desatienden los estudios a tal grado de abandonarlos, ya que prefieren obtener dinero, viendo el estudio como una mala inversión.
- *La salud:* hablar de salud no solo significa la ausencia de enfermedades, sino el bienestar físico, mental y emocional de las personas, en muchas familias algunas enfermedades pueden afectar la vida de la familia y el

rendimiento de los estudiantes, pero también puede afectar la enfermedad alcohólica, el consumo de algún estupefaciente.

- *Familias numerosas*: todavía prevalecen las familias numerosas, muchas veces de tipo monoparental, los riesgos de esta familia es que a los jóvenes y señoritas se les limita la educación, ya sea porque tiene que cuidar a sus hermanitos o que tiene que salir a trabajar para contribuir con los gastos de la familia, entre más hijos son menos las probabilidades que se tiene de estudiar, a veces existe desigualdad, se le da más importancia a los hombres y a las mujeres se les limita, pero puede también darse a la viceversa.

2.2.15. Formas de medir el rendimiento académico.

Hablar de medir el rendimiento académico es algo muy complicado, ya que para hacer esto, se tendrían que tomar muchos factores en cuenta para evaluar, el entorno donde se desenvuelve, sus particularidades personales, emocionales, contenidos y asignaturas y demás, sin embargo esto debe de estar siempre en la planificación de un centro educativo y en la del docente.

eHOW en español, (2017) indica que para hacer una medición se podrían tomar en cuenta las siguientes maneras de hacerlo en conjunto:

- *Una prueba estandarizada de logros*: las tendría que realizar una persona experta en la materia, como las que el MINEDUC aplica cada año a los estudiantes de

centros educativos tanto privados como oficiales, este tipo de prueba es muy valioso y fiable, lo malo es que no toma en cuenta las particularidades de un estudiante, es decir uno de ciudad o del área rural y las condiciones en la que se desenvuelve.

- *Pruebas Estatales:* que cada departamento o establecimiento estandarice su propio test, puede ser una gran guía para ver que tanto han aprendido los estudiantes en un lapso de tiempo, basándose realmente en los contenidos propuestos en el CNB.
- *Encuestas informales:* son una buena herramienta para verificar lo que han aprendido los estudiantes.
- *Calificaciones:* son un indicador del éxito o fracaso académico, ya que a cada cierto tiempo se le aplica a los estudiantes pruebas o se les asigna tareas para verificar que tanto aprendieron y que es lo que debería de retroalimentarse, el único inconveniente es que solo son calificaciones las que lo demuestran, un estudiante puede tener una buena calificación, por el hecho de que es tan bueno memorizando datos relacionados a las pruebas.

2.2.16. El área de Matemáticas

2.2.16.1. Generalidades del área de matemáticas

Ibo Bonilla Oconitrillo. (s.f) resalta que existen muchas definiciones respecto a la ciencia de las matemáticas, a continuación citamos las siguientes:

Según, el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE): Es la ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. Estudio de la cantidad considerada en abstracto o aplicada.

René Descartes: "La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles."

Galileo Galilei: "Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo". "Las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza"

De estas tres definiciones se afirma entonces que matemáticas, es una ciencia que estudia las cantidades, los números, las relacionales y propiedades abstractas como las figuras geométricas, los símbolos. Las matemáticas por lo regular se da en la educación formal de las personas; pero el impacto que tiene dentro de la cultura y la sociedad se manifiesta de gran manera, en la vida cotidiana de las personas, a través de las compras, las ventas, pago de impuestos, la economía, la interpretación de gráficos, calcular, medir, diseñar, localizar lugares o simplemente al saber la hora. No importa el lugar donde la gente vive todos coinciden con la práctica de estas actividades.

Según el Ministerio de Educación. (2010), afirma que en la actualidad hablar de las matemáticas va más allá de la ciencia de los números, la aritmética, la geométrica, el álgebra y propiedad de los conjuntos, el cálculo, la estadística y

probabilidad, lógica matemática. El currículo actual no se aleja de las tecnologías presentes, sino más bien buscan utilizarlas de manera común en las aulas para fortalecer el aprendizaje y proveer a los estudiantes oportunidades de trabajo, comunicación y aprovechamiento del tiempo; además considera a las Matemáticas como integradoras de saberes, enfoques, métodos, y aún de valores y actitudes para que su aporte al Currículo sea significativo.

Por todo lo anterior radica su importancia de ser uno de los cursos bases que se le deben impartir a los estudiantes desde el nivel primario, básico y diversificado; por la magnitud de utilidad que tiene en la vida de las personas, al mismo tiempo porque esta contribuye a la formación integral de las personas. Los docentes que imparten este curso procuran presentar e impartir el curso de manera atractiva y práctica, aunque no todos los estudiantes aprenden de la misma manera.

2.2.16.2. Componentes del área de matemáticas

El Curriculum Nacional Base de Guatemala del nivel medio, ciclo básico, del área de matemáticas (2010) establece los siguientes cinco componentes y sus descripciones:

...Formas, patrones y relaciones: contiene el estudio de los patrones y las relaciones entre formas, figuras planas y sólidas, variables y operaciones entre ellas. Ayuda a que los estudiantes desarrollen estrategias de observación, clasificación y análisis para establecer

propiedades y relaciones entre distintos elementos geométricos, trigonométricos y algebraicos. (p.47).

...*Modelos matemáticos*: consiste en la aplicación de las Matemáticas a otras ciencias y a la resolución de problemas cotidianos personales y comunitarios. Dentro de los modelos matemáticos que se desarrollan se encuentran las formulas, gráficas, tablas, relaciones, funciones, ecuaciones, modelos concretos, simulación por computadora, etcétera. Este componente tiene como propósito el resolver problemas, evaluar conjeturas o atender situaciones problemáticas del entorno. (p.47).

...*Conjuntos, sistemas numéricos y operaciones*: estudian los conjuntos numéricos de racionales, enteros, irracionales y reales. Los estudiantes lograrán definir los elementos de cada conjunto, sus formas de representación y conversiones entre ellas, el orden y las operaciones con reglas, propiedades, relaciones y posibilidades de aplicación. Además del estudio del sistema decimal, se desarrollará la lectura y escritura en diferentes sistemas como el binario y el vigesimal. (p. 47).

...*Incertidumbre, investigación y comunicación*: desarrolla en los estudiantes la posibilidad de “manejar” gran parte de la información del contexto cotidiano que ellos y ellas deben analizar para conocer

una situación y emitir juicios. La lectura y uso de gráficas, el estudio de las probabilidades, la recolección y el análisis de datos, son contenidos que permiten evaluar las comunidades, tomar decisiones y resolver problemas. (p.47).

...Etnomatemática: la orientación del componente incluye la observación, descripción y comprensión de las ideas matemáticas de Pueblos y comunidades a las que el estudiante pertenece y de otros Pueblos y comunidades para lograr una visión enriquecida de los problemas y de las formas de resolverlos. (p.47)

Capítulo III

Marco Metodológico

3.1. Metodología

“La metodología consisten en exponer, por etapas, los pasos, las actividades o acciones que se emprenderán, para ejecutar el proceso de la investigación” (Piloña, 2010, pág. 260).

El tipo de investigación que se realizó fue una investigación activa con enfoque cualitativo y cuantitativo. La cual estuvo dirigida a la “aplicación inmediata para resolver un problema particular y no al desarrollo de la teoría; trato de resolver problemas en términos aplicabilidad local y no universal. (Piloña, 2010, pág. 10). En este caso la investigación únicamente procuro establecer por qué existe bajo rendimiento escolar en el Colegio Paxil.

3.2. Instrumentos de investigación de campo

La investigación de campo “Se realiza sobre la base del contacto directo en el lugar del suceso o fenómeno estudiado” (Piloña, 2010, pág. 75). La intención de la investigación de campo es recolectar datos e informaciones del problema planteado, para luego darle una respuesta. Los instrumentos utilizados por el investigador en el Colegio PAXIL durante la investigación de campo fueron las siguientes:

3.2.1. La observación

Definida como “la acción o actitud de aplicar atentamente los sentidos a un objeto o fenómeno para adquirir un conocimiento claro y conciso del mismo” (Piloña, 2010, pág. 75). La observación utilizada fue directa ya que permitió registrar conductas perceptibles, en cuanto al grado de participación fue no participante, ya que solo se

dedicó a juzgar lo observado, el medio utilizado para registrar los datos fue un cuaderno de notas, esto con el fin de tener una idea amplia sobre el problema a investigar.

3.2.2. La entrevista

Conocida como “un proceso por medio del cual dos o más personas entran en estrecha relación verbal, con el objeto de obtener información fidedigna y confiable sobre todo o algún aspecto del fenómeno que se estudia” (Piloña, 2010, pág. 78). La entrevista estuvo dirigida a padres de familia y docentes, fue estructurada y dirigida, tuvo preguntas abiertas en relación al fenómeno estudiado, con el fin de obtener datos detallados, el entrevistado tuvo la libertad de expresarse en lo que le pareciera más importante, ya que fue una entrevista focalizada por el hecho de que cuestiona. Se utilizó para ello una guía de entrevistas.

3.2.3. La encuesta

La encuesta es “una técnica mediante el cual se adquiere información de un grupo o parte de la población” (Piloña, 2010, pág. 81). La encuesta estuvo dirigida 38 estudiantes considerados como la muestra de la investigación, los cuales fueron estudiantes del tercer grado básico del Colegio Paxil. El instrumento estuvo conformado por un cuestionario de preguntas cerradas sobre la vida estudiantil, social y familiar, siempre basados en los factores que inciden en el bajo rendimiento educativo de los estudiantes.

3.2.4. Proceso de validación de los instrumentos

La validación de los instrumentos se realizó de la manera siguiente: se tomó a un grupo de personas con características similares al Colegio Paxil, en este caso al colegio Evangélico Bethania, a quienes se les pasó un tipo de instrumento con la intención de poder verificar que tan funcional podrían ser, como el nivel del lenguaje y la posible exclusión de algún ítem que no tiene concordancia con el objeto de estudio, para que luego se pudieran hacer las modificaciones pertinentes y así tener un mejor resultado. Para la elaboración de las preguntas se tomó como referencia la Escala de Likert, la que permite por medio de varias opciones de respuesta medir y conocer las afirmaciones de los encuestados.

3.3. Unidad (Universo)

La población en términos de estadística y demografía es entendida como objeto de análisis contabilizado en determinado momento, definido también como “los elementos de la misma naturaleza que tienen la característica que se va a investigar” (Fleishmann, 1997, pág. 17).

La investigación sobre los factores que inciden en el bajo rendimiento académico se realizó en el Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, ubicada en el cantón Simocol del municipio de Nebaj, departamento de Quiché, que funciona en las instalaciones del Instituto Mixto Diversificado Ixil IMDI, a un costado del Ministerio Público salida a San Juan Cotzal y San Gaspar Chajul. El idioma que predomina es el Ixil, la accesibilidad hacia el colegio es práctico se puede llegar a pie, en moto taxi, motocicleta o carro. Se seleccionó el colegio PAXIL por el tipo de enfoque que tiene, el cual está basado en la cosmovisión maya, y los principios

humanos, como también por ser un establecimiento privado que funciona en Jornada Matutina.

A continuación se describen a los sujetos.

Tabla 7

Universo Colegio PAXIL 2018

Nombre	Hombres	Mujeres	Total
Estudiantes de primero, segundo y tercero básico	59	86	145
Personal docente	6	2	8
Personal administrativo (Directora y Secretaria)	0	2	2
Total universo	65	90	155
Porcentaje			100%

Fuente: Universo “Personal Administrativo, Colegio Bilingüe Intercultural PAXIL, municipio de Nebaj 2018”.

3.4.Muestra y caracterización de la misma

La muestra es definida como “un conjunto de medidas o el recuento de una parte de los elementos que pertenecen a la población” (Fleishmann, 1997, pág. 17). La muestra en este caso puede considerarse como una parte o cantidad pequeña que se considera representativa de la población y que se toma o se separa de ella con ciertos métodos para someterla a estudio, análisis o experimentación, la muestra estuvo constituida por los siguientes: por el 100% de los alumnos del tercer grado básico equivalente a 38 estudiantes lo que representa el 26% del universo, 36 padres de familia que representa el 100% que tienen hijos en tercer grado básico, 100% de los docentes y directora.

3.5.Procedimiento para la selección de la muestra

La muestra se obtuvo de manera estratificada porque se tomaron diversos estratos o grupos de personas del establecimiento, como: estudiantes, personal docente y administrativo

y padres de familia, esto dependió de la necesidad del fenómeno estudiado; fue aleatoria o probabilística, ya que todos los sujetos de la población tuvieron la misma oportunidad de ser seleccionados, aunque por la complejidad del tema se seleccionó a los estudiantes de tercero básico intencionalmente, a los docentes y directora por igual.

3.6.Desarrollo de la investigación

En su carácter con un diseño investigación–acción, el trabajo destinado al procesamiento de los datos siguió rigurosamente cada uno de los procedimientos, se tuvo una recopilación inicial y consecutiva sobre los factores que inciden en el bajo rendimiento académico en el área de matemática, posteriormente se tuvo una medición sobre la muestra, utilizando los respectivos instrumentos conforme se desarrollaban las diversas actividades programadas.

La Observación: permitió recabar información valiosa con respecto a la conducta de los estudiantes referente al aprendizaje de la matemática, lo cual fue el problema de investigación, además sirvió para observar la forma de enseñanza-aprendizaje en el aula del centro educativo.

La Encuesta: estuvo orientada a estudiantes de tercer grado básico con el fin de recabar datos sobre los factores que inciden en el bajo rendimiento académico en el área de matemática, se optó por utilizar la encuesta, por ser confiable y fidedigna, porque arroja información verídica sobre la problemática de estudio.

La Entrevista: siendo “un proceso por medio del cual dos o más personas entran en estrecha relación verbal, con el objeto de obtener información fidedigna y confiable sobre todo o algún aspecto del fenómeno que se estudia” (Piloña, 2010, pág. 78). Se aplicó a docentes,

padres de familia y directora, para indagar sobre sus conocimientos respecto a los factores que inciden en el bajo rendimiento académico en el área de matemática, con el fin de conocer acerca de qué y cómo se está desarrollando el proceso de enseñanza aprendizaje e indagar sobre el uso de estrategias de enseñanza aprendizaje. En la investigación se optó por la entrevista estructurada, con una guía de preguntas abiertas a utilizar por el investigador. La entrevista fue grabada en audio y transcrita posteriormente.

3.7.Procedimiento para el análisis de datos

Según Ávila Baray, H.L (2006) el procedimiento de análisis de datos es la que se realiza concluidas las etapas de colección y procesamiento de datos. En esta etapa se determina como analizar los datos y que herramientas de análisis son adecuadas para este propósito. El procedimiento utilizado para el análisis de datos fue:

- Limpieza de datos: conocido como el acto de descubrimiento, corrección o eliminación de registros de datos erróneos de una tabla o base de datos, permitió identificar datos incorrectos y no pertinentes, que luego fueron modificados o eliminados, por no tener una relación directa con el tema de estudio.
- Seriación: consistió en enumeraron las encuestas para una mejor tratamiento de los datos a tabular.
- Codificación: proceso mediante el que se asignó un código o un valor numérico a cada respuesta del instrumento utilizado.

- Tabulación: se realizó después de haber codificado las respuestas, consistió en la elaboración de los cuadros estadísticos, que dan origen a los resultados de la investigación, en esta parte se expresó el valor de cada respuesta por medio de tablas.
- Graficación: en esta parte se expresó por medio de graficas circulares los resultados los cuadros estadísticos, arrojando los porcentajes correspondientes.
- Análisis e Interpretación: consistió en la selección y discusión de los resultados obtenidos de las encuestas y entrevistas.

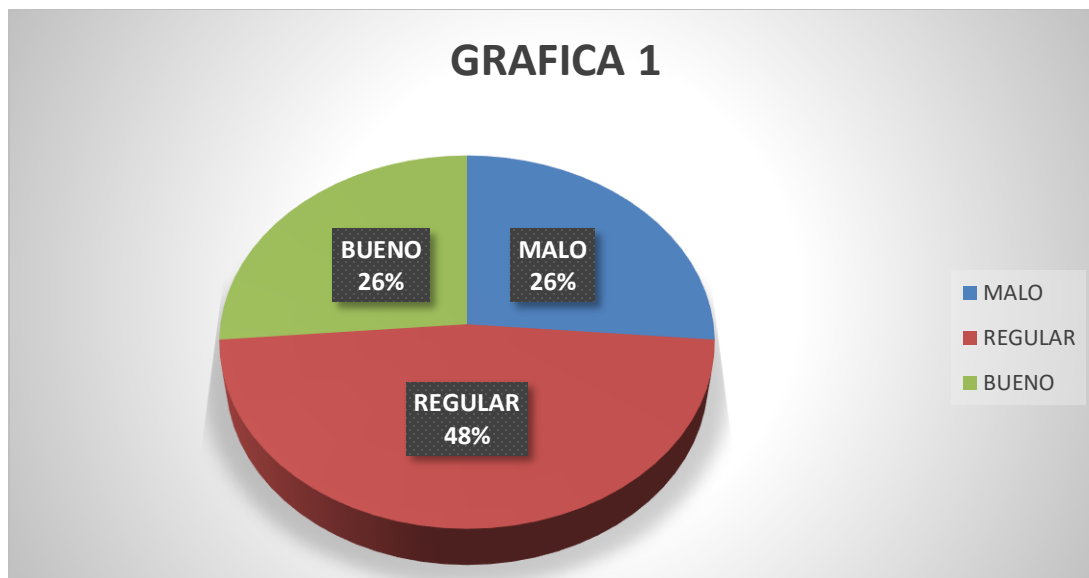
Capítulo IV

Presentación, análisis y discusión de resultados

4.1. Presentación, análisis y discusión de encuestas.

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron durante la investigación que se realizó en el Colegio “PAXIL”, cada pregunta está acompañada con su gráfica en la que se refleja la información obtenida, posteriormente la explicación de los resultados para tener mayor comprensión de la gráfica. Se aplicó a los estudiantes encuestas, mientras que a los docentes y padres de familia se les aplicó una entrevista, a continuación se describen los resultados obtenidos.

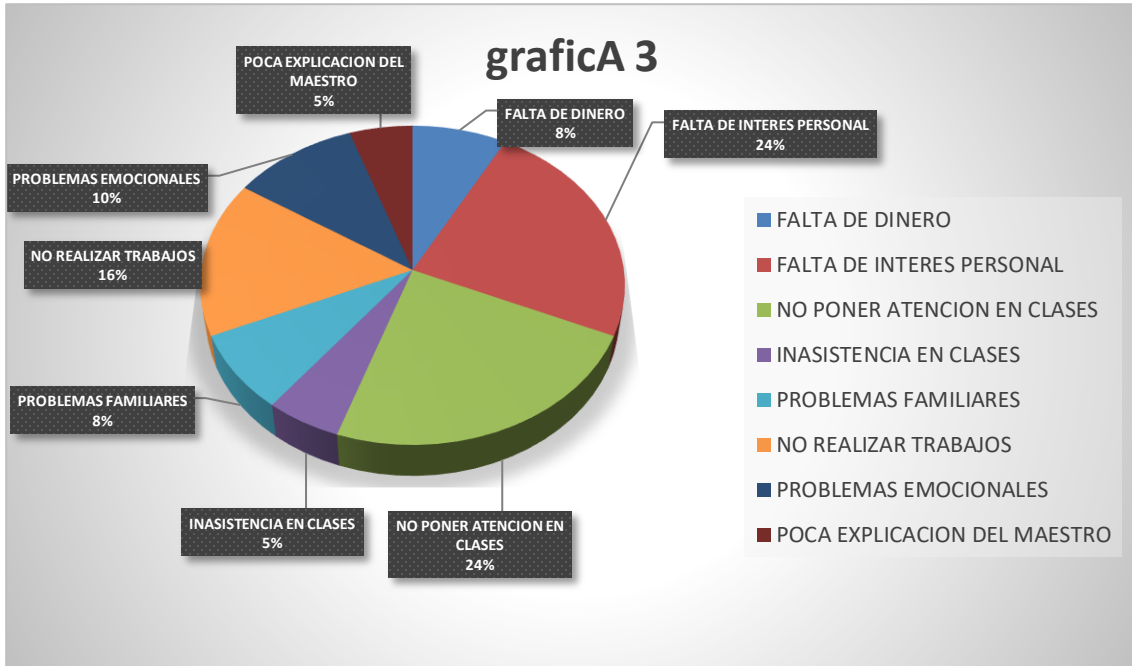
1. ¿Cómo considera usted su rendimiento académico en este presente ciclo escolar en el área de matemáticas?								
Estratos	Malo	%	Regular	%	Bueno	%	Total	Total %
Estudiantes	10	26	18	48	10	26	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

Tomando en cuenta las respuestas de los estudiantes en cuanto a su rendimiento académico en relación al área de matemáticas durante el ciclo escolar 2018, la gráfica representa que el 48% de estudiantes considera que su rendimiento académico es regular, indicando que es porque no prestan la suficiente importancia al área, el 26% indicó que su rendimiento académico es bueno, porque les gusta el curso, y un 26% dice que su rendimiento académico es malo, porque no entienden los temas, esto los lleva a no practicar por falta de interés. Se infiere que los alumnos tienen un rendimiento académico irregular.

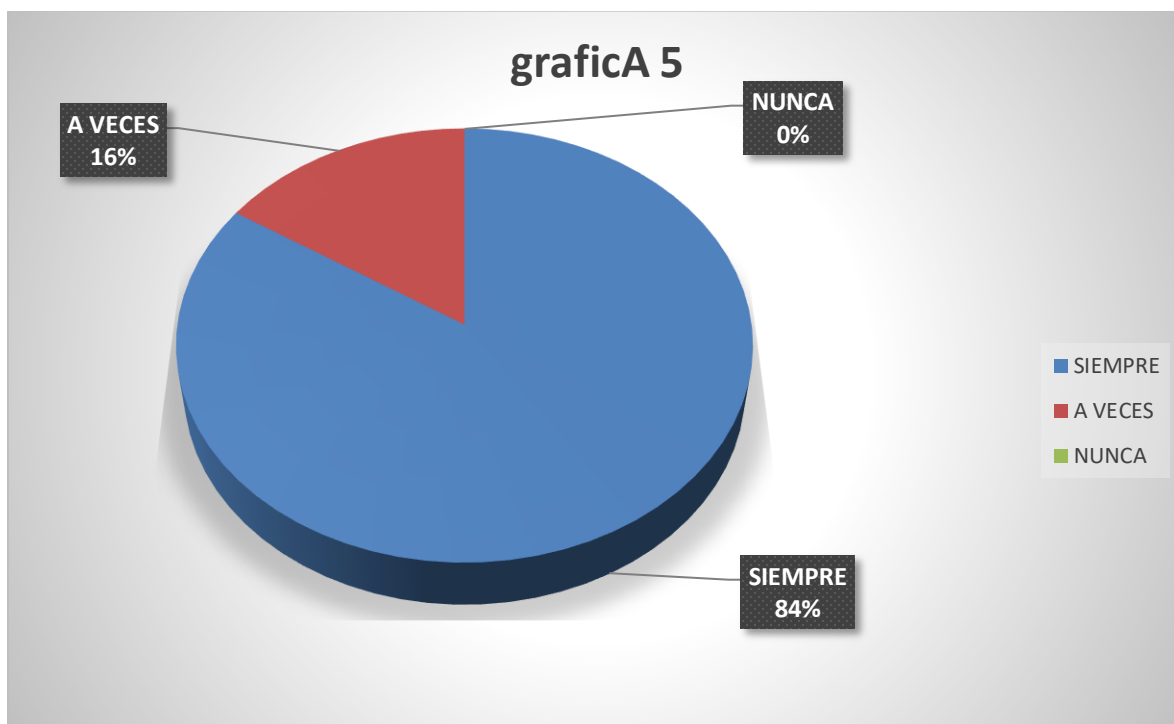
2. ¿Cuál considera que es la causa por la que un estudiante tiene un bajo rendimiento en el área de matemática?																		
	Falta de dinero	%	Falta de interés	%	No poner atención en clases	%	Inasistencia en clases	%	Problemas familiares	%	No realizan trabajos	%	Problemas emocionales	%	Poca explicación del maestro	%	Total	Total %
Estudiantes	3	8	9	24	9	24	2	5	3	8	6	16	4	10	2	5	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

De los estudiantes encuestados el 8% respondió que tiene un bajo rendimiento en el área de matemáticas por falta de dinero, de la misma manera un 24% por falta de interés, un 24% por no poner atención en clases, un 5% por inasistencia a clases, un 8% por problemas familiares, un 16% por no realizar trabajos, un 10% por problemas emocionales y de igual manera un 5% por poca explicación del profesor. Se infiere que los alumnos no rinden porque no ponen atención y por falta de interés.

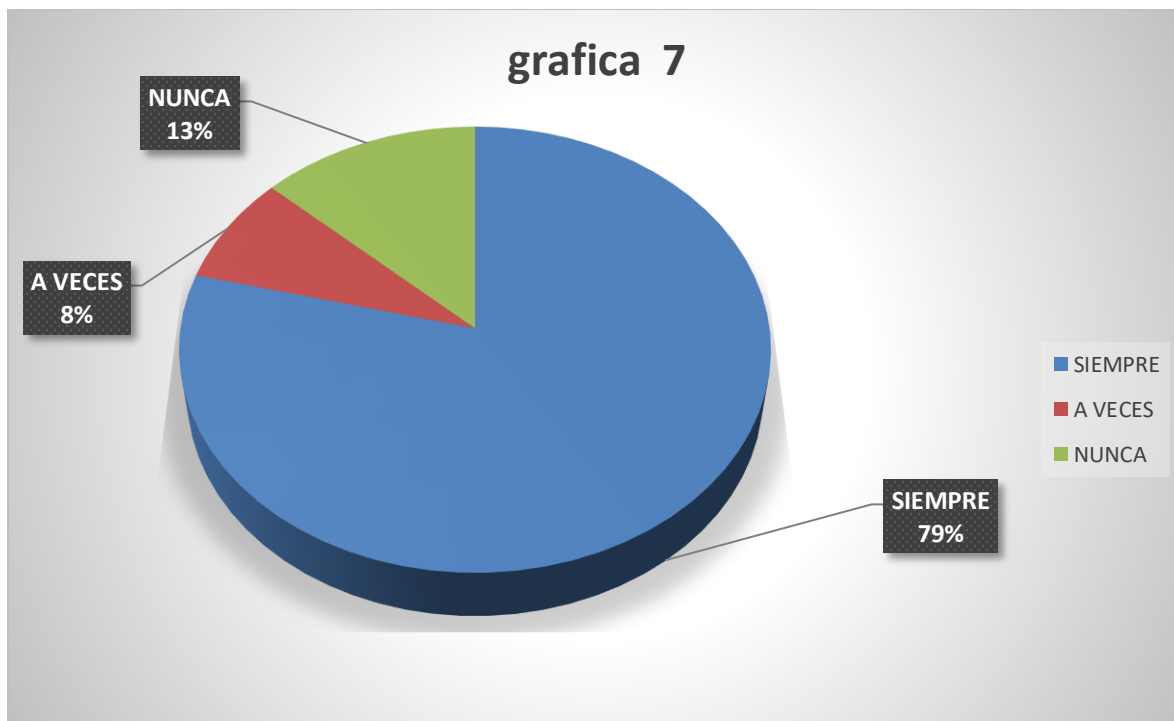
3. ¿Cree usted que su profesor que comparte el curso de matemáticas explica bien el contenido de la clase planificada?								
Estratos	Siempre	%	A veces	%	Nunca	%	Total	Total %
Estudiantes	32	84	6	16	0	0	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

Del total de alumnos encuestados, el 84% manifestó que siempre, mientras un 16% expresó que a veces, por lo que podemos deducir que el docente se prepara y explica bien el área de matemáticas.

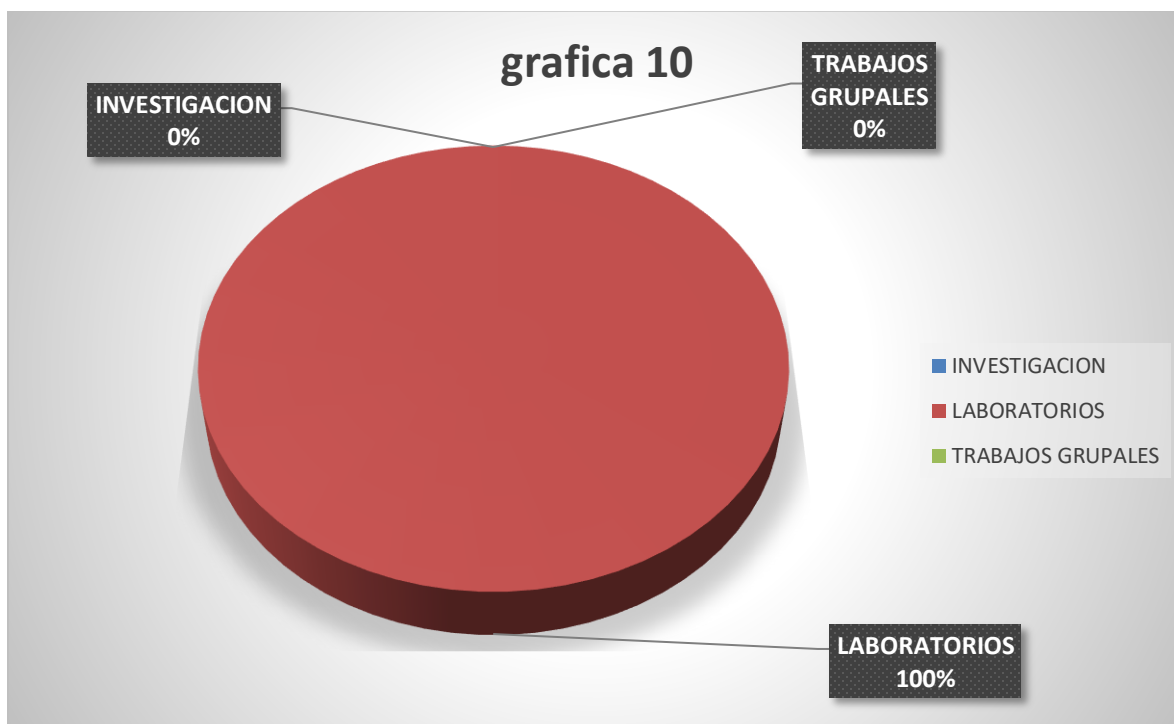
4. ¿El docente del curso de Matemática le aclara sus dudas cuando usted le consulta?								
Estratos	Siempre	%	A veces	%	Nunca	%	Total	Total %
Estudiantes	30	79	3	8	5	13	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

De los estudiantes encuestados el 79% respondió la opción siempre, el 8% indicó que a veces. El 13% respondió que nunca, por lo que concluimos que el docente que imparte el curso de matemáticas siempre aclara las dudas de los estudiantes cuando ellos se lo han solicitado.

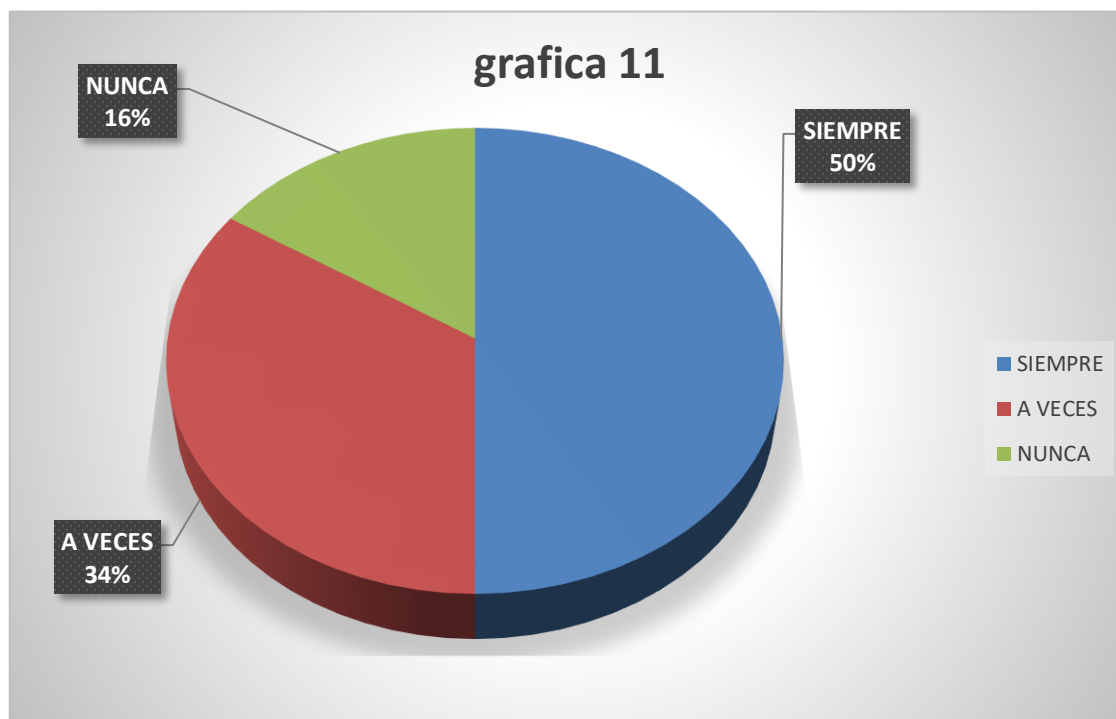
5. ¿Qué trabajos o actividades realiza con más frecuencia en el curso de Matemáticas?								
Estratos	Investigación	%	Trabajos grupales	%	Laboratorios	%	Total	Total %
Estudiantes	0	0	0	0	38	100	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

Se les preguntó a los estudiantes sobre el tipo de trabajos o actividades que realizan con más frecuencia en el curso de matemáticas. El 100% respondió que los trabajos o actividades que realizan con más frecuencia en el curso son laboratorios.

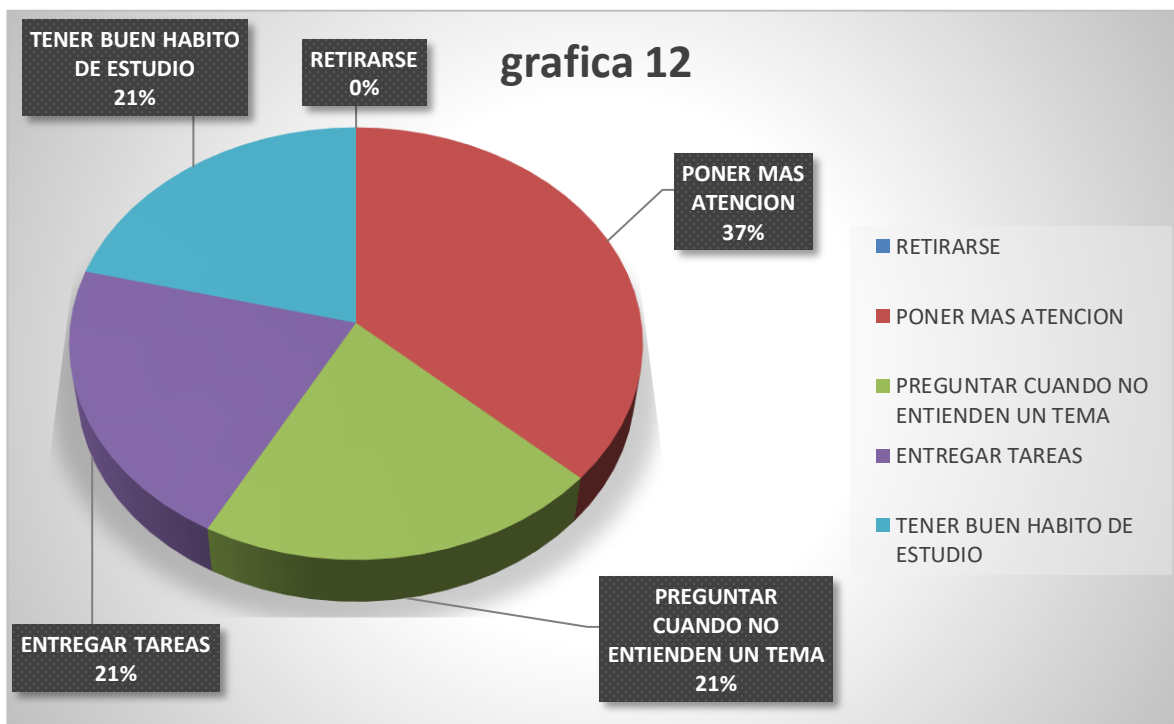
6. ¿Recibe apoyo moral y emocional de parte de sus padres cuando lo necesita?								
Estratos	Siempre	%	A veces	%	Nunca	%	Total	Total %
Estudiantes	19	50	13	34	6	16	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

Se les preguntó a los estudiantes, si reciben apoyo moral y emocional de sus padres cuando lo necesitan. El 50% dijo que sí recibe apoyo moral y emocional de parte de sus padres, el 34% respondió que a veces recibe apoyo moral y emocional de parte de sus padres cuando lo han necesitado, y un 16% de los estudiantes dijeron que nunca reciben apoyo moral y emocional de parte de sus padres cuando ellos lo han necesitado. Por lo que se infiere que la mayoría de estudiantes reciben apoyo de sus padres.

7. ¿Qué deberían hacer los estudiantes que tienen bajo rendimiento académico para mejorar?												
	Retirarse	%	Poner más atención	%	Preguntar cuando no entienden un tema	%	Entregar sus tareas	%	Tener un buen habito de estudio	%	Total	Total %
Estudiantes	0	0	14	37	8	21	8	21	8	21	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

El 37% de los estudiantes respondió que, para mejorar su rendimiento académico deben de poner más atención. El 21% indicó que para mejorar el rendimiento académico es necesario que los estudiantes pregunten cuando no entienden algún tema. El 21% respondió que para mejorar el rendimiento académico deben de entregar las tareas que se les asigna. Otro 21% de los estudiantes expresó que es fundamental tener un buen hábito de estudio para superar el bajo rendimiento académico. Por lo que se interpreta que los estudiantes deben cambiar de actitud para mejorar su rendimiento académico.

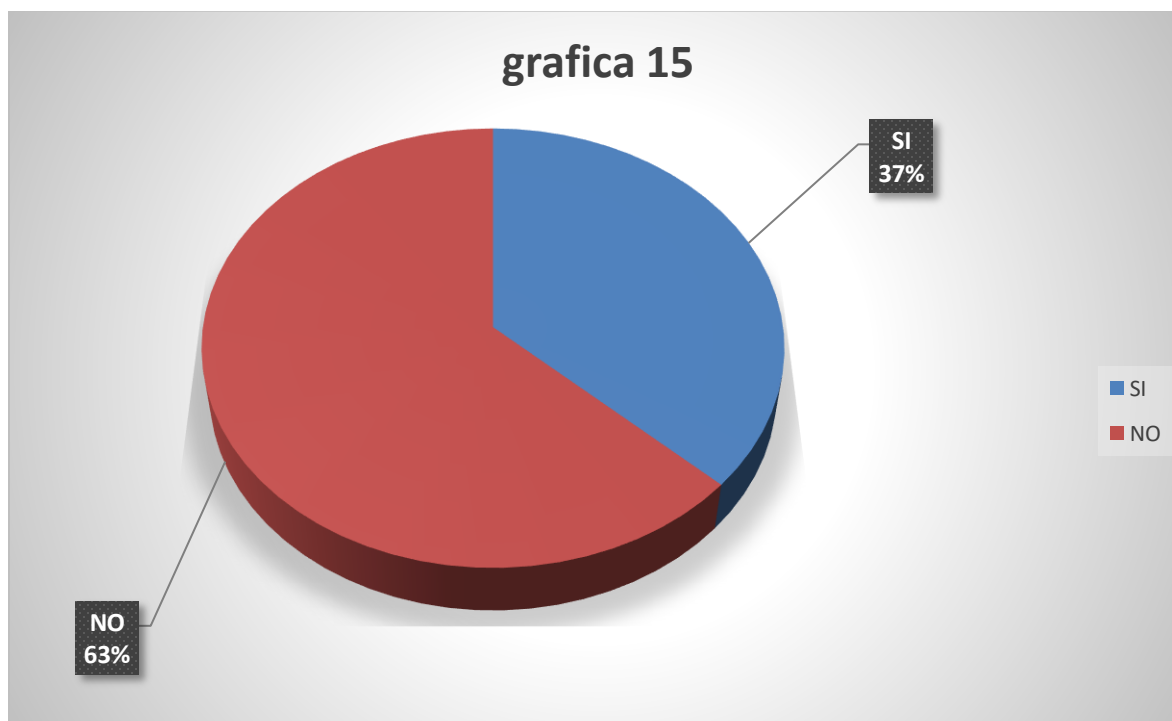
8. ¿El docente se auxilia de la tecnología para explicar el contenido de matemática?								
Estratos	Siempre	%	A veces	%	Nunca	%	Total	Total %
Estudiantes	15	40	10	26	13	34	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

El 40% de los estudiantes encuestados indicó que el docente siempre se auxilia de la tecnología para explicar el contenido de matemáticas. El 34% indicó que el docente nunca se auxilia de la tecnología para explicar el contenido de matemáticas. El 26% expresó que solo a veces el docente hace uso de la tecnología para explicar el contenido de matemática. Por lo que se infiere que el docente hace poco uso de tecnología en el curso de matemáticas.

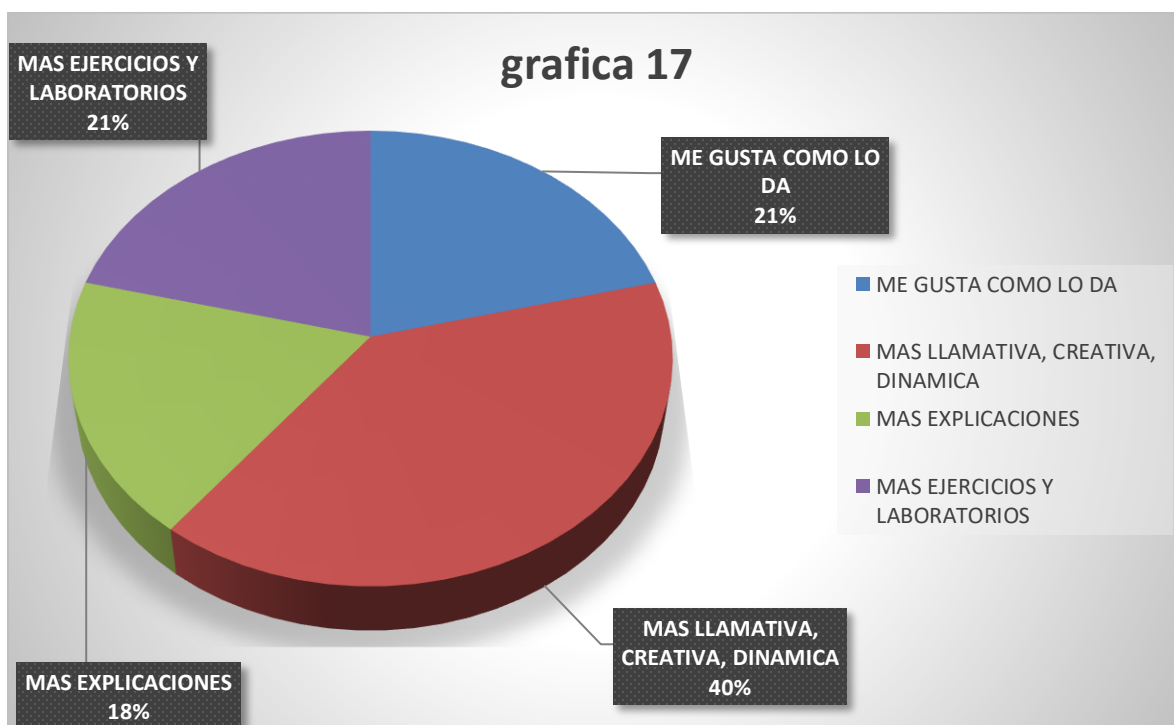
9. ¿Aparte de sus catedráticos ha solicitado apoyo a otras personas para comprender el contenido del curso de matemática?						
Estratos	Si	%	No	%	Total	Total %
Estudiantes	14	37	24	63	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

De los estudiantes encuestados, el 37 % respondió que sí ha solicitado apoyo a otras personas como: otros maestros, padres, hermanos, amigos y primos para comprender mejor el contenido del curso de matemáticas y un 63 % respondió que no ha solicitado apoyo, porque le da miedo y pena; y a otros por falta de interés. Mientras que el 30% no respondió. Por lo que, se entiende que no solicitan apoyo a otras personas para comprender la matemática.

10. ¿Cómo le gustaría que fuera la forma de recibir clases de matemáticas?										
	Me gusta como lo da	%	Más creativa y dinámica	%	Más explicaciones	%	Más ejercicios y laboratorios	%	Total	Total %
Estudiantes	8	21	15	40	7	18	8	21	38	100



Fuente: elaboración propia con base a información obtenida de campo en mayo de 2018

De los estudiantes entrevistados, 21% respondió que le gusta como el profesor imparte el curso de matemáticas. El 40% pide que la clase se desarrolle de forma más creativa dinámica, esto para mantener el interés de los estudiantes. El 21% respondió que le gustaría que el profesor a cargo del curso de matemáticas le deje más trabajos y ejercicios. El 18% respondió que le gustaría que se dieran más explicaciones en la relación a la temática. Por lo que se infiere que los docentes deben cambiar su metodología de trabajo.

4.2. Discusión y análisis de entrevistas

A continuación se presentan los resultados de la discusión y análisis de datos de la información obtenida durante las entrevistas realizadas a padres de familia y docentes, del Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, del municipio de Nebaj, Departamento de Quiché.

Entrevistas a catedráticos

1. ¿Cómo ve dentro de su establecimiento el rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas?

Durante las entrevistas los docentes indicaron que el rendimiento académico de los estudiantes referente al área de matemáticas es bajo, opinando que, una de las razones es que la mayor parte de estudiantes vienen de diferentes establecimientos del nivel primario, por consiguiente no tiene las bases que se necesita al momento de ingresar al nivel básico.

2. ¿Qué dificultades encuentra en los estudiantes en el aprendizaje de contenidos del área de matemática?

Según respuestas obtenidas una de las dificultades es que la mayor parte de estudiantes no domina las operaciones básicas y esto perjudica el desarrollo de los contenidos de matemáticas. Al no entender las propiedades y algoritmos de cada operación, reduce el interés de cada estudiante, con solo el hecho de no comprender de donde se obtiene el resultado de cada operación.

3. ¿Qué metodologías recomendaría para trabajar el área de Matemática?

En relación a esta pregunta los docentes adujeron que recomiendan, realizar trabajos en grupos, auxiliarse de una cañonera para realizar presentaciones relacionadas a los

contenidos matemáticos que se den, talleres de desenvolvimiento, trabajo en parejas y más operaciones para que los estudiantes practiquen.

4. ¿Explique cómo ve el apoyo moral y emocional que reciben los estudiantes de parte de sus padres?

Según expuesto por los docentes, el apoyo moral y emocional que reciben los estudiantes es poco, ya que la mayoría de padres se ve solo a principios de año y en la entrega de boletines de cada bimestre. Solo una parte se interesa en apoyar a sus hijos velando si realizan sus tareas y si realmente asisten a clases, por otra parte algunos padres son de las aldeas por lo tanto no pueden darle el apoyo moral y emocional a sus hijos.

5. ¿Cuál sería su papel para que los estudiantes ya no sigan teniendo un bajo rendimiento académico?

Según indicaron los docentes, el papel que tienen en la vida de los estudiantes durante el tiempo que les den clases; es la de ser un amigo, un hermano y un padre, esto con el fin de crear un ambiente de confianza para poder aconsejar y orientar a cada uno de los estudiantes cuando se requiera durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. De la misma manera ser un maestro dinámico y actualizado.

6. ¿Cuáles considera que sean las actividades más frecuentes que se deben tomar en cuenta para trabajar el área de Matemáticas?

Las actividades que consideran los docentes durante el desarrollo de las clases de matemáticas son: desarrollar más ejercicios en clase, actividades lúdicas, talleres, laboratorios, resolución de ejercicios relacionados con las actividades cotidianas.

7. ¿En el establecimiento existe recurso pedagógico para desarrollar las matemáticas?

En el establecimiento no se tiene recurso pedagógico enfocado al área de matemáticas. Exteriorizaron que cada docente se agencia del material que considera pertinente para impartir sus clases.

Entrevistas a padres

1. ¿Considera que el rendimiento académico de su hijo en la actualidad es adecuado?

Una parte de padres considera que el rendimiento de su hijo es adecuado, sin embargo no saben si su hijo e hija cumple con sus tareas ya que no les preguntan, la razón es porque están trabajando y algunos viven en la aldea. Otra parte indica que el rendimiento académico de sus hijos no es el adecuado, puesto que no les gusta estudiar y presentan poco interés en seguir estudiando, a pesar de que los padres se los exigen.

2. ¿Cree que le dificulta a su hijo e hija la asignatura de matemáticas? ¿Por qué?

La mayoría de respuestas de los padres de familia fue que sí le dificulta el curso de matemáticas a sus hijos, la causa es que no se les enseña bien durante la primaria, al igual que los docentes no utilizan técnicas y estrategias innovadoras al dar sus clases. También indicaron que a los estudiantes se les dificulta concentrarse por la edad que tienen.

3. ¿Cree que los problemas familiares afectan de alguna forma el rendimiento de su hijo e hija en el área de matemáticas? ¿Cómo?

En relación a esta interrogante los padres manifestaron que los problemas familiares si afectan el rendimiento académico de sus hijos, notándose en su estado anímico,

desconcentración en sus estudios, falta de interés durante el desarrollo de las clases, falta de apetito.

4. ¿Será que las actividades que realizan su hijo fuera de la jornada de estudio afectan su rendimiento en el área de matemáticas?

En cuanto a esta interrogante hay discrepancia porque algunos padres expresaron que sus hijos solo se dedican a estudiar por tanto no realizan ninguna actividad después de las clases, más que realizar sus tareas educativas y practicar. Otros indican que afectan pero en una mínima parte, porque primero realizan sus tareas del colegio, luego ya se les asigna otra tarea.

5. ¿Usted ayuda a su hijo e hija para mejorar su rendimiento en el área de matemáticas cuando se lo solicita? ¿Cómo?

En cuanto a esta interrogante, los padres dijeron que ayudan a mejorar el rendimiento de sus hijos, sin embargo solo es por medio de orientaciones y consejos, porque no saben leer, algunos que si saben, no logran comprender las matemáticas. Un porcentaje muy bajo ayuda a sus hijos revisando sus cuadernos y verificando que hagan las tareas que el docente ha asignado.

6. ¿Cómo se siente usted cuando su hijo e hija obtiene una nota menor de 60 puntos en el área de Matemáticas?

Las respuestas fueron que al momento de que sus hijos obtienen una nota menor que 60, se sienten tristes, decepcionados, con una incomodidad al igual que molestos puesto

que sus hijos solo se dedican a estudiar, y en cierta manera preocupados porque se les inculca valores de responsabilidad.

7. ¿Qué acciones realiza la familia en relación a los estudios y deberes escolares de su hijo e hija?

Las acciones que más realizan los padres de familia es la de orientar, aconsejar, llevando a sus hijos a la reflexión sobre la inversión que se está haciendo en sus estudios. También la familia al notar que sus hijos tienen bajo rendimiento en sus estudios, limita las actividades que distraen, buscando ayuda con algún familiar u otra persona que tenga conocimientos en matemáticas.

8. ¿Qué piensa sobre el tipo de educación que se brinda en el Colegio Paxil?

Los padres con sus repuestas consideran que el tipo de educación que el colegio ofrece es bueno, por la filosofía que tienen, se practica la equidad de género y está muy relacionado a la cosmovisión maya.

9. ¿Qué es lo que su hijo e hija debería de hacer como estudiante para mejorar su rendimiento en el área de matemáticas?

Lo que recomiendan los padres que deberían hacer sus hijos para que mejoren su rendimiento académico es: poner más atención en clases, darle más importancia a sus estudios, practicar y repasar lo que los maestros les enseñan, cambiar de amistades. Por otra parte que los docentes se actualicen en técnicas y estrategias para enseñar porque cada estudiante es distinto, por tanto necesita una instrucción diferente.

4.2.1. Hallazgos

De los resultados obtenidos en el Colegio Bilingüe Intercultural Paxil, los estudiantes consideran que su rendimiento académico es regular, solo un porcentaje considera que es bueno, enumerando que las causas por las cuales tienen un bajo rendimiento en el área de matemáticas es porque no ponen atención en clases, por falta de interés personal, por no realizar sus trabajos, por problemas emocionales, inasistencias a clases, problemas familiares, falta de dinero y poca explicación del docente. Con respecto a esta última causa, existen una contradicción porque la mayoría de estudiantes manifestaron a una de las interrogantes que el docente siempre les explica bien el contenido de las clases, además él siempre aclara las dudas cuando se le consulta, y que las actividades que realizan con frecuencia son la resolución de laboratorios.

En los hogares muchos de los jóvenes reciben apoyo moral y emocional de parte de sus padres, un mínimo porcentaje indicó que no recibe apoyo moral y emocional. Los estudiantes creen que para mejorar su rendimiento académico deben preguntar cuando no entienden un tema, poner más atención, entregar tareas y tener un buen hábito de estudio.

Al concluir, a muchos jóvenes les gustaría aprender las matemáticas de forma más creativa y dinámica a través de más ejercicios, laboratorios y que les gustaría recibir más explicaciones de los contenidos del área de matemáticas ya que los mismos son muy complejos.

4.2.2. Problemática detectada

- Falta de interés de los estudiantes por estudiar.
- Poca explicación del docente.
- Falta de apoyo moral y emocional de parte de los padres.
- Las clases de matemáticas se dan de forma tradicional.
- Falta de materiales pedagógicos para desarrollar la matemática.

4.2.3. Discusión de resultados

Durante la investigación de los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de estudiantes del tercer grado básico del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL” tuvo como fin principal investigar que causa el bajo rendimiento académico de los estudiantes, para lo cual se tomaron en cuenta el proceso de formación de los estudiantes, las causas del bajo rendimiento académico, los factores del bajo rendimiento académico, el mejoramiento del rendimiento académico y la metodología de enseñanza, para dar una respuesta a tal investigación

Según las entrevistas desarrolladas en cuanto al proceso de formación de los estudiantes se evidenció que es deficiente; padres y docentes están de acuerdo que el nivel académico de los estudiantes en la actualidad no es aceptable, que está bajo, reflejándose desde el comportamiento de los estudiantes dentro de las aulas, al igual que en sus calificaciones, sin embargo no se trata de decir que se debe a la mala enseñanza del docente, ni a la falta de control y supervisión del docente y de padres

o al marcado desinterés de los estudiantes; más bien son responsabilidades compartidas.

La mayor parte de los padres dijeron que desconocen el proceso educativo de sus hijos, la causante es que viven en aldeas lejanas, mientras que otros indicaron que no saben leer, pero que siempre apoyan a sus hijos con consejos para que no decaigan y otra parte indica que siempre andan al tanto del proceso educativo de sus hijos. Los docentes por su lado indican que la mayor parte de estudiantes demuestran poco interés e importancia hacia los temas de estudio, no practican, no entregan tareas, no preguntan, por lo tanto obtienen bajas calificaciones. No se debe descartar que cada persona es diferente, se tiene distintas formas de aprender, en definitiva distintos estilos de aprendizaje. Este proceso de formación puede ir mejorando con la implementación de actividades complementarias a su formación curricular tales como: estrategias de aprendizaje, desarrollo de habilidades de razonamiento lógico, capacidades y fortalecimiento de valores, con el fin de promover el involucramiento del estudiante, despertando su interés por medio de una metodología activa, atractiva e interesante durante el ciclo estudiantil.

Lo que respecta a las causas del bajo rendimiento académico, los bajos resultados de las evaluaciones que se realizan a nivel nacional, departamental y local, dan lugar a críticas sobre el sistema educativo de Guatemala, específicamente de parte de los padres y entre docentes, al desarrollar las entrevistas se evidenció que la enseñanza de las matemáticas es considerada de mucha importancia al igual que compleja, en base a la realidad que viven en la actualidad los padres y docentes indican que no es por desconocer el valor de las matemáticas, pero antes de cualquier

enseñanza de áreas de conocimiento es necesario que cada estudiante adquiriera valores morales los cuales van a honrar y determinar su rendimiento académico.

Es notorio que los estudiantes tienen ideas falsas en cuanto a su rendimiento académico, debido que han perdido el sentido de responsabilidad, respeto, disciplina, honestidad; a través de la información obtenida de padres y docentes se concluye que la mayor parte de estudiantes demuestran apatía por estudiar, prestan poca atención al profesor, les da igual si ganan o pierden, consideran que estudiar es aburrido, no saben para que están estudiando, son irrespetuosos entre ellos mismos, son deshonestos ya que por alcanzar una buena nota tienden a copiarse en los exámenes por cualquier medio. Por eso la falta de valores es una de las causas del bajo rendimiento académico y a medida que se vaya superando esta falta de valores se logrará mejorar el rendimiento académico, porque los sentimientos morales le dan sentido y orientación a la vida.

En consiguiente, los docentes afirman que los estudiantes desde la primaria vienen con deficiencias educativas, la mayor parte de docentes utiliza contenidos de libros de texto que no tienen relación con los contenidos establecidos en el CNB o seleccionan los más fáciles, de la misma manera su forma de dar clases es de tipo tradicionalista el cual se centra nada más en que el docente es siempre el emisor y los estudiantes son los receptores, desde la primaria los estudiantes no son capaces de dominar las operaciones básicas, y así siguen hasta llegar al ciclo básico. Lo anterior es difícil de cambiar porque el estudiante ya ha sido condicionado y ha perdido el

interés por el curso de matemáticas, por la razón que lo encuentra difícil y complicado.

En cuanto a los factores que inciden en el bajo rendimiento son una cuestión fundamental, especialmente en nuestro sistema educativo guatemalteco, donde los últimos datos oficiales ponen de manifiesto que de 100 estudiantes del ciclo básico evaluados solo 18 alcanzan el nivel de logro, lo cual revela que no son capaces de alcanzar las competencias básicas. El resultado de la investigación reflejó que efectivamente son diversos los factores que provocan el bajo rendimiento académico, una razón complicada y compleja.

En respuesta a la interrogante, por qué se produce el bajo rendimiento académico, en un porcentaje elevado de estudiantes, las respuestas son simples ya que cuando un estudiante no consigue el nivel medio de aprendizaje de la clase, la situación se perpetúa bimestre tras bimestre, por lo tanto es fácil que acabe perdiendo el interés en el contenido y en las explicaciones. Los padres y docentes resaltan tres tipos de factores que determinan el bajo rendimiento académico, uno de ellos es el factor socio-familiar lo cual se origina por la influencia de los padres y el entorno que rodea al estudiante como el grado académico de los padres, la situación económica, el apoyo e implicación en la educación de sus hijos. Del mismo modo repercuten los factores personales como los ya mencionados que en sentido generalizado son la motivación y el autoconcepto; y, como otro grupo de factores resalta el factor académico lo cual es la calidad de enseñanza que se da en el establecimiento, la metodología que se emplea sin descartar las competencias de los docentes.

Respecto al mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes, los docentes y padres de familia resaltan una preocupación ya que las notas obtenidas por los estudiantes no son las deseadas. Los estudiantes que van mal están resignados a seguir mal consideran que no pueden ya mejorar su situación, sin embargo los padres indican que si es posible, primero es entender la necesidad de una metodología de enseñanza dinámica, considerando que la forma de enseñanza en la actualidad sigue siendo tradicionalista, que es necesario que los docentes se auxilien de técnicas y estrategias de enseñanza, más por el tipo de área que es el de matemáticas.

Los docentes y padres opinan que para mejorar el nivel educativo también será necesario que los estudiantes tengan el interés y la voluntad, porque aunque tenga el apoyo de sus padres e incluso el docente implemente una metodología más dinámica y atractiva, esto no tendrá ningún sentido siempre que exista el desinterés en el estudiante hacia el curso de matemáticas.

En lo que respecta a la metodología de enseñanza, el trabajo que realiza el maestro en el aula, posibilita establecer elementos que definen la forma de aprendizaje de los estudiantes frente al área de matemáticas lo cual es fundamental, a través de esta investigación se evidenciaron varios aspectos que determinan que los estudiantes del tercer grado básico del colegio PAXIL, tiene un enmarcado desinterés hacia el área de matemáticas lo cual provoca apatía, poca participación, baja autoestima, y esto de alguna manera influye para no alcanzar los logros en porcentajes en relación a los estándares programados, una de las principales dificultades que se debe de enfrentar es la forma de enseñanza.

Por medio de las entrevistas desarrolladas a docentes y padres de familia, se comprobó que no se tiene una metodología y mucho menos una estrategia de aprendizaje innovadora y atractiva durante el desarrollo de cada clase, más bien se continua con el modelo tradicional, el cual es de explicación de parte del docente, como también tareas como laboratorios o ejercicios a resolver, el docente es el protagonista y el estudiante queda como un actor receptivo y repetitivo.

Es necesario recordar que una metodología de aprendizaje es un método o un procedimiento que sirve y es utilizado para alcanzar los objetivos propuestos relacionados en un área que se enseña, el docente por ejemplo si desea que sea significativo el aprendizaje debe de tener una metodología para poder enseñar, es preciso que dentro de su metodología planifique sus clases, que se agencie en la utilización de estrategias tales como trabajos grupales e individuales, evaluaciones diagnósticas, sumativas y formativas.

CONCLUSIONES

- Los factores que determinan el bajo rendimiento de los estudiantes son: el factor socio-familiar, el grado académico de los padres, la situación económica, su implicación en la educación de sus hijos, el factor personal como la motivación y el autoconcepto; y el factor académico como la calidad de la enseñanza de parte del establecimiento y la metodología que se emplea.
- El proceso de formación de los estudiantes no es el adecuado, por lo tanto el rendimiento es malo.
- Las causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes son por falta de interés personal, no practican, no preguntan y no entregan sus tareas.
- En el establecimiento no existe estrategias especiales para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- La metodología de enseñanza utilizada en el establecimiento sigue siendo tradicionalista, ya que está basada en la explicación y en la resolución de ejercicios simples, esto podría tener relación con los resultados obtenidos que enmarcan el desinterés de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas.
- No existe material didáctico adecuado para desarrollar las matemáticas, al igual que recursos pedagógicos específicos para el área de matemáticas.

RECOMENDACIONES

- Que el establecimiento involucre a los padres de familia en el proceso educativo de sus hijos y que no les dejen la mayor responsabilidad a los docentes.
- Que el establecimiento implemente en su plan anual de actividades talleres y capacitaciones dirigidas para una formación integral de los estudiantes en el área de matemáticas.
- Que los docentes promuevan programas dirigidos a los estudiantes para motivarlos e involucrarlos más en su preparación académica referente al área de matemáticas, tanto fuera como dentro del centro educativo.
- El docente de matemáticas del establecimiento Paxil debe ser abierto y creativo en facilitar los contenidos del área de matemáticas buscando soluciones o alternativas para generar un espacio de confianza.
- A la directora que vele porque los docentes sean innovadores, que utilicen una metodología adecuada, haciendo uso de herramientas pedagógicas, para proporcionar la atención adecuada a los estudiantes.
- A los docentes que se capaciten en metodología moderna para desarrollar el área de matemáticas.
- A los docentes que implementen las estrategias didácticas que aparecen en el aporte pedagógico que se deja para el área de matemáticas.

APÉNDICE

Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro universitario de Quiché-CUSACQ
Sección Santa María Nebaj
ENCUESTA

Respetables jóvenes y señoritas: El estudiante de la Universidad de San Carlos de Guatemala, está realizando una investigación con la finalidad de “Determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas y Comunicación y Lenguaje, del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”. Por lo que a continuación se le presentan una serie de preguntas, por favor responda con la mayor sinceridad y confianza, marcado con una (X) la respuesta que considere. Si no entiende alguna pregunta, puede pedirle a la persona que está encuestando para que le explique, gracias por su colaboración.

1. ¿Cómo considera usted su rendimiento académico en este presente ciclo escolar en el área de matemáticas?
Malo Regular Bueno
¿Por qué? _____
2. ¿Cuáles considera que son las causas por las que un estudiante tiene un bajo rendimiento en el área de matemática?
Falta de dinero Falta de interés personal No poner atención en clases
Inasistencia en clases Problemas familiares No realizan sus trabajos
Problemas emocionales Poca explicación del maestro
Otro _____
3. ¿Cree usted que sus profesores que comparten el curso de matemáticas explican bien el contenido de la clase planificada?
Siempre A veces Nunca
4. ¿El docente del curso de Matemática le aclara sus dudas cuando usted le consulta?
Siempre A veces Nunca
5. ¿Qué trabajos o actividades realiza con más frecuencia en el curso de Matemáticas?
Investigación Laboratorios Trabajo grupales
Otros explique _____
6. ¿Recibe apoyo moral y emocional de parte de sus padres cuando lo necesita?
Siempre A veces Nunca
7. ¿Qué deberían hacer los estudiantes que tienen bajo rendimiento académico para mejorar?
Retirarse Poner más atención preguntar cuando no entienden un tema
Entregar sus tareas Tener un buen habito de estudio
Otro _____
8. ¿El docente se auxilia de la tecnología para explicar el contenido de matemática?
Siempre A veces Nunca
9. ¿Aparte de sus catedráticos ha solicitado apoyo a otras personas para comprender el contenido curso de matemática?
¿Cómo? _____
10. ¿Cómo le gustaría que fuera la forma de recibir clases de matemáticas?

Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro universitario de Quiché-CUSACQ
Sección Santa María Nebaj

ENTREVISTA

Respetables catedráticos/as: El estudiante de la Universidad de San Carlos de Guatemala, está realizando una investigación con la finalidad de “Determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas y Comunicación y Lenguaje, del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”. Por lo que se le ruega responda con la mayor sinceridad y confianza la siguiente entrevista, gracias por su colaboración.

1. ¿Cómo ve dentro de su establecimiento el rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas?
2. ¿Qué dificultades encuentran en los estudiantes en el aprendizaje de contenidos del área de matemática?
3. ¿Qué metodologías recomendaría para trabajar el área de Matemática?
4. ¿Explique cómo ve el apoyo moral y emocional que reciben los estudiantes de parte de sus padres?
5. ¿Cuál sería su papel para que los estudiantes ya no sigan teniendo un bajo rendimiento académico?
6. ¿Cuáles considera que sean las actividades más frecuentes que se deben tomar en cuenta para trabajar el área de Matemáticas?
7. En el establecimiento existe recurso pedagógico para desarrollar las matemáticas.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro universitario de Quiché-CUSACQ
Sección Santa María Nebaj

ENTREVISTA

Respetable padre/madre: El estudiante de la Universidad de San Carlos de Guatemala, está realizando una investigación con la finalidad de “Determinar cuáles son los factores que inciden en el bajo rendimiento académico de los estudiantes del tercer grado básico en el área de Matemáticas y Comunicación y Lenguaje, del Colegio Bilingüe Intercultural “PAXIL”. Por lo que se le ruega responda con la mayor sinceridad y confianza la siguiente entrevista, gracias por su colaboración.

1. ¿Considera que el rendimiento académico de su hijo en la actualidad es adecuado?
2. ¿Cree que le dificulta a su hijo e hija la asignatura de matemáticas? ¿Por qué?
3. ¿Cree que los problemas familiares afectan de alguna forma el rendimiento de su hijo e hija en el área de matemáticas? ¿Cómo?
4. ¿Será que las actividades que realiza su hijo fuera de la jornada de estudio afectan su rendimiento en el área de matemáticas?
5. ¿Usted ayuda a su hijo e hija para mejorar su rendimiento en el área de matemáticas cuando se lo solicita? ¿Cómo?
6. ¿Cómo se siente usted cuando su hijo e hija obtiene una nota menor de 60 puntos en el área de Matemáticas?
7. ¿Qué acciones realiza la familia en relación a los estudios y deberes escolares de su hijo e hija?
8. ¿Qué piensa sobre el tipo de educación que se brinda en el Colegio Paxil?
9. ¿Qué es lo que su hijo e hija debería de hacer como estudiante para mejorar su rendimiento en el área de matemáticas?

Reunión de presentación con directora



Entrevista docente de Matemáticas



Entrevista a docentes



Entrevista a padres



Encuesta a estudiantes



Desarrollo y aplicación de proyecto de investigación



Referencias Bibliográficas

Acuarela de Palabras. (s.f) Capacidad, aptitud e inteligencia. Recuperado de <https://acuarela.wordpress.com/2010/05/06/capacidad-aptitud-e-inteligencia/>

Alcalide, M. (2 junio de 2009). Influencia del rendimiento y autoconcepto en hombres y mujeres. *Revista Electronica de Investigacion y Docencia (REID)*. 27-44. Recuperado de <http://www.ujaen.es/revista/reid/revista/n2/REID2art2.pdf>

Alvizurez Y. y corresponsales. (23 de mayo de 2017). Guatemala. Miles de niños abandonan la escuela. Prensa libre. Recuperado de <https://www.prensalibre.com/ciudades/guatemala/desercion-escolar-miles-de-nios-abandonan-la-escuela>

American Psychological Association (2010). Manual de Publicaciones de la American Psychological Association (6 ed.). México, D.F.: Editorial El Manual Moderno. Recuperado de <http://www.uees.edu.sv/editorial/publicaciones/Normas%20APA%20Sexta%20Edici%C3%B3n.pdf>

Anónimo. (s.f.) Capitulo 1 adolescencia, educación y rendimiento académico. Recuperado de <http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/22277/Capitulo1.pdf>

Anónimo. (s.f.) Estrategias de aprendizaje. Recuperado de www.udesarrollo.cl/udd/CDD/articulo/files/Estrategias_Aprendizaje.doc

Anónimo. (s.f.) Estrategias de aprendizaje. Recuperado de <https://www.estrategiasdeaprendizaje.com/#estrategiasdeaprendizaje>

Anónimo (s.f). El enfoque constructivista de Piaget. Capítulo 5. Recuperado de http://www.ub.edu/dppsed/fvillar/principal/pdf/proyecto/cap_05_piaget.pdf

Anónimo. (s.f.) II. Expresión de emociones. Recuperado de <http://lorien.die.upm.es/juancho/pfcs/GMS/cap2.pdf>

Ávila Baray, H.L. (2006). Introducción a la Metodología de la Investigación. Edición Electrónica, texto completo en www.eumed.net/libros/2006c/203/

Barreto, F. J. y Álvarez, J. (2017). Clima Escolar y Rendimiento Académico en Estudiantes de Preparatoria. *Daena: International Journal of Good Conscience*. 12(2)31-44. Recuperado de [http://www.spentamexico.org/v12-n2/A2.12\(2\)31-44.pdf](http://www.spentamexico.org/v12-n2/A2.12(2)31-44.pdf)

Bericat, E. (2012) Emociones. Sociopedia.isa. Universidad de Sevilla, España. Recuperado de <http://www.sagepub.net/isa/resources/pdf/Emociones.pdf>

Bravo, L. (13 de abril de 2012). El bajo rendimiento escolar y los problemas de conducta. *Educarchile*. Recuperado de <http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137578>

Casarez, A. (9 de octubre de 2009). Metodología del aprendizaje, Semestre 1, tarea. Bitácora de Lenguas Modernas ALPHA 0.0.0. Recuperado de <http://delenguasmodernas.blogspot.com/2009/10/definicion-de-metodologia-del.html>

Clicpsicologos. (16 de abril de 2012). La expresión de las emociones. Recuperado de <https://clicpsicologos.wordpress.com/2012/04/16/la-expresion-de-las-emociones/>

Corbin, J. A. (2018). Los 8 tipos de familias y sus características. Página psicología y mente. Recuperado de <https://psicologiaymente.net/social/tipos-de-familias>

Coba, E. (s.f.). Emociones normales y patológicas. Psicopedia.org. Recuperado de <http://psicopedia.org/6005/cuando-las-emociones-se-convierten-patologicas/>

Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA– (2015). *Informe departamental y municipal de tercero básico 2013*. Guatemala. Recuperado de:

http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/documents/informes/2013/Informe_Departamental_IIB2013.pdf

Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA- (2015). *Informe de resultados por establecimiento*. Guatemala, Recuperado de Edel. R. (2003 diciembre-julio) El Rendimiento Académico: Concepto, Investigación Y Desarrollo. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 1(2) p. 0. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/551/55110208.pdf>

Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA- (2009). Informe de factores asociados, ciclo básico, nivel medio. Guatemala. Recuperado de http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/documents/informes/INFORME_FA_IIB2009.pdf

Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA- (2013). *Informe de resultados de la Evaluación Nacional de tercero básico*. Guatemala. Recuperado de http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/documents/informes/2013/Informe_IIB2013.pdf

Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA- (2013). Factores asociados de tercero básico. Guatemala. Recuperado de http://www.mineduc.gob.gt/digeduca/documents/informes/basicos/FACTORES_ASOCIADOS_IIB2013.pdf

eHOW en español. (21 febrero, 2017). ¿Cómo medir el rendimiento académico? Recuperado de http://www.ehowenespanol.com/medir-rendimiento-academico-como_133272/

Enciclopedia de Pedagogía Práctica (2005-2006). *Escuela para maestros*. Colombia. Lexus.

Enríquez, C. L., Segura, A. M., y Tovar, J. R.. (2013). Factores de riesgo asociados a bajo rendimiento académico en escolares de Bogotá. *Investigaciones Andina*, 15(26) 654-666. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/2390/239026287004.pdf>

Fernández, Y. O. (2011 junio – enero). Variables que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes Universitarios. *Investigación Educativa* 15 (27) 165-179). Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/publicaciones/inv_educativa/2011_n27/a11v15n27.pdf

Florín, P. (07 de enero de 2014). Enfermedades emocionales y físicas: ¿Están conectadas? Recuperado de <https://laopinion.com/2014/01/07/enfermedades-emocionales-y-fisicas-estan-conectadas/>

Gabinete psicopedagógico UGR (s.f.). Hábitos de estudio. Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/~ve/pdf/estudio.pdf>

García. A. L. (23 de octubre de 2016). Variables que influyen en el rendimiento académico. Recuperado de <https://prezi.com/aggcuxap8pqw/variables-que-influyen-en-el-rendimiento-academico/>

González, A. J. (s.f.) Indicadores del rendimiento escolar: relación entre pruebas objetivas y calificaciones. *Revista de Educación*. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre287/re28702.pdf?documentId=0901e72b813c2ff8>

Guerrero, G., De Fraine, B., Cueto S. y León, J. (2011). El efecto del clima escolar en los resultados cognitivos y socio-emocionales de los estudiantes al final de la educación secundaria. El caso de instituciones educativas urbanas en Lima. *Sociedad de Investigación Educativa Peruana*. Recuperado de <http://www.siep.org.pe/wp-content/uploads/216.pdf>

Hernández, C. A., Rodríguez, N., y Vargas, A. E. (2012 septiembre - julio). Los hábitos de estudio y motivación para el aprendizaje de los alumnos en tres carreras de ingeniería. *Revista de la educación superior*. 3(163) 67-87. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=60425380005>

Ibo Bonilla Oconitrillo. (s.f) ¿Qué es matemática? Etimología y definiciones por matemáticos y filósofos famosos. Recuperado de http://www.iboenweb.com/ibo/docs/que_es_matematica.html

Lamas, H. (2015). Sobre el rendimiento escolar. *Propósitos y Representaciones*, 3(1), 313-386. doi: <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2015.v3n1.74>.

Mendoza, A. A. (2013) propuesta para la medición del rendimiento académico de los estudiantes de las universidades utilizando análisis envolvente de datos (DEA). Recuperado de <https://www.acofipapers.org/index.php/acofipapers/2013/paper/viewFile/321/168>

Ministerio de Educación- Dirección General de Gestión de Calidad Educativa- DIGECADE. (2010). *Currículo organizado en competencias. Metodologías de aprendizaje*. Guatemala. Recuperado de <http://uvg.edu.gt/educacion/maestros-innovadores/documentos/aprendizaje/Metodologia.pdf>

Ministerio de Educación. (2010). Currículo Nacional Base, Tercero Básico. Matemáticas. Guatemala. Recuperado de http://www.mineduc.gob.gt/DIGECUR/?p=CNB.asp&t=Currículo_Nacional_Base_CNB

MINEDUC y DIGEDUCA. (8 de junio de 2015). ¿Cómo estamos en educación? Recuperado de <http://www.uvg.edu.gt/ie/doc/IE-doc-1.pdf>

Ministerio de Educación. (2016). *Indicadores educativos de Guatemala*. Recuperado de http://www.empresariosporlaeducacion.org/sites/default/files/Contenido/Recursos/Documentos/Documentos%20Guatemala/indicadores_educativos_de_guatemala_2016_0.pdf

Moreno, C., Díaz, A., Cuevas, C., Nova, C., y Bravo, I. (2011). Clima Social Escolar En El Aula Y Vínculo Profesor-Alumno: Alcances, Herramientas De Evaluación, Y Programas De Intervención. *Revista Electrónica De Psicología Iztacala*. 14(3) 70-84. Recuperado de: <http://revistas.unam.mx> y revistas.unam.mx/index.php/repi/article/download/27647/25599

Murillo. E. G. (2013). *Factores que inciden en el Rendimiento Académico en el área de Matemática de los estudiantes de noveno grado en los Centros de Educación Básica de la Ciudad de Tela, Atlántida*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Francisco Morazán. Recuperado de: <http://www.cervantesvirtual.com/obra/factores-que-inciden-en-el-rendimiento-academico-en-el-area-de-matematicas-de-los-estudiantes-de-noveno-grado-en-los-centros-de-educacion-basica-de-la-ciudad-de-tela-atlantida/>

Organización Mundial de la Salud. (s.f). *Desarrollo en la Adolescencia*. Recuperado de http://www.who.int/maternal_child_adolescent/topics/adolescence/dev/es/

Pacheco, L. S. (2013). *Clima Escolar: Percibido por alumnos (as) y profesores (as) a partir de las relaciones sociales que predominan en las aulas de clase del Instituto Polivalente Dr. Doroteo Varela Mejía de Yarumerla La Paz*. Tesis de Postgrado. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa, M.D.C. Recuperado de <http://repositorio.upnfm.edu.hn:8081/xmlui/bitstream/handle/12345678/342/Liliam%20Suyapa%20Pacheco%20Castillo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Palacios, J. R. y Andrade, P. (2007 diciembre – octubre). *Desempeño académico y conductas de riesgo en adolescentes*. *Revista de Educación y Desarrollo*. Recuperado de http://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/7/007_Palacios.pdf

Piloña, G. A. (2010) *Guía práctica sobre Métodos y técnicas de investigación documental y de campo*. Guatemala.

Psicología para todos (s.f.). *Guía Completa para el Crecimiento Personal. Tomo 1 y Tomo 2*. Barcelona España. Océano.

Rosalba J. (2016). *Diferencia entre personalidad e identidad*. Recuperado de <http://ross24806.wixsite.com/psicologiandoconross/single-post/2016/1/26/Diferencias-entre-Personalidad-e-Identidad>

Ruano. R. (2002). *Evaluación Educativa*. Guatemala.

Ruiz, C. (2001). Factores familiares vinculados al bajo rendimiento. *Revista Complutense de Educación*. 12(1)81-113. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/38820954.pdf>

Salas, M., y Valdivia, C., (2016). *Rendimiento académico y problemas emocionales y conductuales en niños de instituciones educativas estatales*. Tesis de Licenciatura. Universidad Católica de Santa María. Arequipa-Perú. Recuperado de <http://tesis.ucsm.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/UCSM/5458/76.0291.PS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Santiuste, Y. (s.f.) Emociones y patología. Recuperado de <http://www.lineaalba.com/descargas/Emociones.pdf>

Saura, J. P. y De las Bayonas, A. G. (s.f.). Análisis de la relación que hay entre el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos y su rendimiento escolar. Investigación. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre291/re2911200477.pdf?documentId=0901e72b81376b2b>

Terapiaymás. (05 de junio del 2014). El fracaso escolar en la adolescencia. Recuperado de <https://www.terapiaymas.es/fracaso-escolar-adolescencia/>

Universidad Nacional Autónoma De México (s.f.). *Hábitos de estudio*. Mexico. Recuperado de <http://prepa8.unam.mx/academia/pit/Habitos%20de%20estudio.pdf>

Yáñez, M. P. (2016 junio-enero). El proceso de aprendizaje: fases y elementos fundamentales. *Revista san Gregorio*, Volumen 1, (11) 70-81, ISSN 1390-7247 recuperado de <http://oaji.net/articles/2016/3757-1472501941.pdf>

Wikipedia (s.f.). Definición de aptitud. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Aptitud>

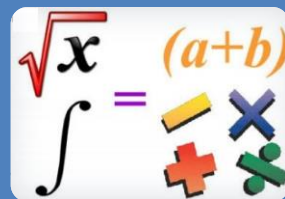
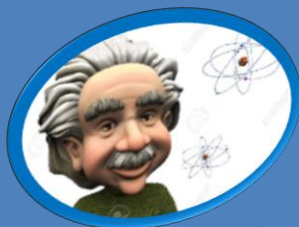
APOORTE PEDAGÓGICO

CUSACQ

TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché

MANUAL DE ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA Y ADMINISTRACIÓN EDUCATIVA CON
ESPECIALIDAD EN MEDIO AMBIENTE



MANUAL DE ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



CUSACQ
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala
Centro Universitario de Quiché

ÍNDICE

Presentación.....	1
Orientación para el uso del manual.....	2
Objetivos.....	3

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS DE ENSEÑANZA

1. Explicar los temas con claridad.....	5
2. Permitir intercambio de ideas.....	5
3. Hacer devoluciones de trabajos.....	6
4. Realizar evaluaciones sobre el proceso de formación.....	6
5. Fomentar la autosuficiencia.....	6
6. Hacer el contenido atractivo.....	7
7. No premiar a los estudiantes.....	7
8. Crear y promover trabajo en equipo.....	8
9. Recordar que es mejor calidad antes de cantidad.....	8
10. Enseñar y modelar el proceso de pensamiento y resolución.....	8
11. Menos calificación y más crítica constructiva.....	9
12. Cambiar la manera de pensar.....	9
13. Contar historias.....	9
14. Brindar asesorías.....	10
15. Trabajar con las emociones.....	10
16. Ilustraciones.....	10
17. El debate.....	11
18. El taller.....	12
19. Clases prácticas.....	13
20. Resolución de ejercicios y problemas.....	13
21. Aprendizaje cooperativo.....	14
22. Simulación pedagógica.....	15
23. Elegir un buen libro de texto.....	15
24. Organizar lo que se va explicar.....	16
25. Emplear una velocidad de exposición adecuada.....	16
26. Dar clases y no dictar.....	17

CONTENIDOS EDUCATIVOS

1. Multiplicación de polinomio y propiedades.....	19
2. División de polinomios y sus propiedades.....	23
3. Factorización.....	28
4. Función cuadrática.....	35

5. Función lineal.....	41
6. Ecuaciones simultáneas con tres incógnitas.	50
7. Trigonometría.....	54
8. Funciones trigonométricas.....	55
Bibliografía.....	62

Presentación

Se le llama manual a toda guía de instrucciones que sirven para el uso, en la corrección de problemas o el establecimiento de un procedimiento de trabajo, mientras que el concepto de estrategia hace referencia a las actividades y prácticas pedagógicas, los procesos formativos, métodos y recursos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El manual de estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas, es un manual de gran relevancia a la hora de transmitir una información en este caso de contenidos matemáticos, los cuales sirven para que los estudiantes puedan desenvolverse en una situación determinada, en sentido general es un producto que se ofrece a la enseñanza. El objetivo de este manual es ser una herramienta que el docente debe de conocer y emplear para concretar sus procesos de enseñanza, así establecer los procedimientos o el conjunto de pasos o habilidades que el estudiante debe de adquirir y emplear de forma intencional como un instrumento para la solución de problemas y demandas académicas.

A continuación hay una recopilación de estrategias al momento de enseñar, al igual que contenidos, ejercicios y actividades que pueden aplicarse a la enseñanza de las matemáticas, lo cual es un aporte más de los estudiantes tesistas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, y busca apoyar el aprendizaje de los estudiantes del sistema educativo. Esperando que este material sirva como referencia tanto a los profesores como estudiantes a los primeros para que tengan un medio que permita orientar una mejor manera y con mayor sencillez a sus estudiantes, y a los segundos para que cuenten con elementos para sobresalir en el proceso de aprendizaje.

Orientación para el uso del manual

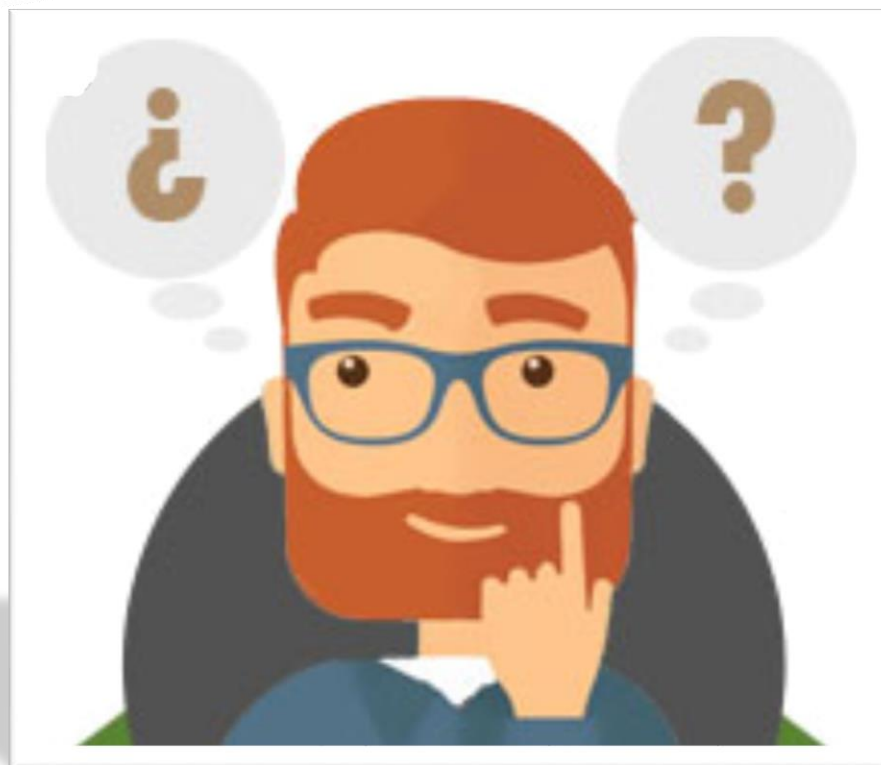
El presente manual es una herramienta de apoyo preparado para los maestros de matemáticas, en él se desarrollan estrategias de enseñanza, es necesario que los maestros lo integren dentro de su planificación de clases, innovando y enriqueciendo su metodología, para poder generar conocimientos permanentes en cada estudiante. Los indicativos para utilizar el siguiente manual son:

- ✓ Leer cada estrategia de enseñanza.
- ✓ Comprender cada estrategia de enseñanza.
- ✓ Implementar cada estrategia según lo requiera el contenido planificado.
- ✓ Tomar como ejemplos los ejercicios matemáticos
- ✓ Hacer que los estudiantes resuelvan las operaciones en forma ordenada
- ✓ Dar ejercicios o ejemplos sencillos pero que estimulen el razonamiento.

Objetivo

Brindar al docente una colección de estrategias didácticas para la enseñanza del área de matemáticas a jóvenes del ciclo básico.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS DE ENSEÑANZA



1. Explicar los temas con claridad

Para todo estudiante no existe nada peor que sentirse perdido en clase. No tener idea del tema que están dando, ni saber qué es lo próximo que van a dar, los desanima enormemente. Por lo tanto el docente tiene la tarea de presentar desde el primer día un plan de estudio, las unidades que van a dar, y comprometerse a hacer lo mismo cada vez que va a comenzar un tema nuevo y sobre todo buscar el lenguaje correcto para que los estudiantes lo asimilen con facilidad. De este modo los estudiantes saben qué se espera de ellos y qué deben hacer para tener éxito en esa clase.



Imagen 1. Profesor explicando trazoide <https://www.google.com>

2. Permitir intercambio de ideas



Imagen 2. Docente de matemáticas animadas <https://www.google.com>

Asistir a clase para ser un agente pasivo ya no es una posibilidad sin embargo en la actualidad los estudiantes eligen seguir siendo pasivo y receptivos. No así en las redes sociales ya que es aquí donde los estudiantes están acostumbrados constantemente a dar su opinión y comentar sobre todo. Por ello esta dinámica debe aprovecharse en el área educativa. Los profesores tienen que dar un paso atrás de tanto en tanto para permitir que se generen intercambios de idea ente los alumnos. La ida y vuelta permite que aprendan del otro y es una buena oportunidad para que el docente observe si realmente comprendieron los conceptos y contenidos que está dando, la responsabilidad del docente es motivar a los estudiantes a emitir sus opiniones, dudas e inquietudes, teniendo en cuenta que en su mayoría tendrá temor a hacerlo, por tanto darles la posibilidad de hacerlo por medio de algo escrito.

3. Devolver los trabajos

Por el factor tiempo siempre es más sencillo llevarse a la casa las tareas, corregirlas y devolverlas al otro día con la calificación, sin embargo no es la opción más efectiva. Para que los estudiantes sepan si realmente están avanzando y mejorando, como docentes se tiene la responsabilidad de devolverlas tareas que hicieron. Una manera es hablando con el grupo entero y proceder a señalarles las debilidades que aún tienen, lo que se llama retroalimentación.



Imagen 3. Dibujo docentes y estudiante
<https://www.google.com>

4. Realizar evaluaciones sobre el proceso de formación



Imagen 4. Profesor dibujo
<https://www.google.com>

Además de los tradicionales exámenes y pruebas para evaluar y evidenciar lo aprendido, se debe realizar evaluaciones para analizar el proceso de formación de los estudiantes. Comparar el desempeño que están teniendo con las metas que deberían ir cumpliendo según los objetivos plantados desde el principio. Al hacerlo con frecuencia se podrá adaptar los materiales y la velocidad con la que se avanza. Incluso es prudente pedirles a los estudiantes que evalúen tu forma de actuar.

5. Fomentar la autosuficiencia

Se debe brindar oportunidades a los estudiantes para que aprendan a organizarse, a crear su propio plan de acción y a evaluar su propio trabajo. Al ser conscientes de su forma de pensar y de actuar a nivel académico, conseguirán modificar conductas y conseguir mayores logros, en lugar de estar encima de ellos y obligarlos a hacerlo.

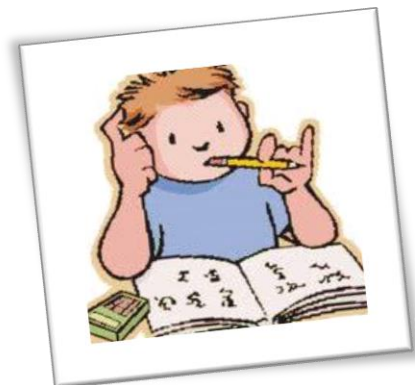


Imagen 5. Niño estudiando
<https://www.google.com>

6. Hacer el contenido atractivo

La principal pregunta que surge en los estudiantes de este nivel es: “¿para qué estudio algo que no voy a utilizar nunca?”. Como docentes el deber es demostrar para qué les va a servir lo que están aprendiendo y cómo pueden ponerlo en práctica, con un poco de investigación y planeamiento se puede asociar los temas de actualidad que pueden interesar a los alumnos con lo que se ve en clase. Por ejemplo, aprovechando el tema de las olimpiadas se puede introducir el estudio de los ángulos, investigando en qué ángulo debe patear una pelota para entrar a la portería, o quizá utilizar algún otro juego que les llama tanto la atención.



Imagen 6. Maestro explicando

<https://www.google.com>

7. No premiar a los estudiantes

La idea de los estudiantes es que las matemáticas son aburrida, como docentes no hay por qué dar lugar a esta idea de que las matemáticas son tan aburridas, y que se debe motivar a los estudiantes con un premio. Si se hace lo que indica la literal (f) no se necesitará motivar con un premio. Además, en esta etapa los estudiantes deben entender que poner atención, les beneficia en sus calificaciones, y por tanto, en su futuro.



Imagen 7. Maestro aconsejando

<https://www.google.com>

8. Crear y promover trabajo en equipo

En este nivel educativo y más a esta edad, los adolescentes suelen escuchar más a sus compañeros que a los adultos en este caso el profesor. En tal sentido, es necesario determinar quiénes son los estudiantes a quienes les gusta más la materia, porque pueden ser de mucha ayuda para explicar y ayudar personalmente a sus demás compañeros.



Imagen 8. Niños trabajando en equipo animado
<https://www.google.com>

9. Recordar que es mejor calidad antes de cantidad

Es mejor dejar menos trabajos y tareas pero que tengan mayor importancia en cuanto al aprendizaje y práctica del contenido. Mucho trabajo sin sentido solo logrará cansar al alumno, es importante analizar y cambiar la idea de que las matemáticas son para hacer sufrir a los estudiantes sobrecargándolos con ejercicios, laboratorios que al final no entendieron y solo copiaron de otros compañeros.



Imagen 9. Dibujo devolver tareas
<https://www.google.com>

10. Enseñar y modelar el proceso de pensamiento y resolución



Imagen 10. Estudiantes secundario dibujo
<https://www.google.com>

Muchas veces se cae al error de dar las respuestas, o valorar más al alumno que llega a ellas, sin explicar cómo lo hizo. Ya que en algunos casos por conseguir una buena nota los estudiantes prefieren copiarle a demás compañeros los ejercicios y problemas. Por eso es importante que todos sean capaces de lograr un entendimiento del proceso, aunque no sea la respuesta exacta.

11./Menos calificación y más crítica constructiva

Es significativo para los estudiantes durante su formación académica una explicación en qué se equivocó y cómo puede enmendar el error, que una simple calificación. Recordemos que una buena calificación no es igual a un aprendizaje significativo.



Imagen 11. Dibujo profesor explicando
<https://www.google.com>

12.Cambiar la manera de pensar



Imagen 12. No premiar a los estudiantes
dibujo <https://www.google.com>

Una excelente forma de aprendizajes significativos son los problemas: en vez de dejarle como tarea a los estudiantes 100 problemas o ejercicios para que aprendan a resolverlos, es mejor pedirles que investiguen o que redacten 10 problemas relacionadas a las situaciones cotidianas personales. Al hacer esto el estudiante tendrá que investigar, analizar para encontrar la solución del problema, de esta manera le

será mucho más sencillo entender el proceso, y la importancia de las matemáticas.

13. Contar historias

Las historias son una excelente forma de atraer la atención de los alumnos, además sirven de background (Conjunto de conocimientos y experiencias que constituyen el bagaje de una persona) para cualquier operación matemática, dándole sentido a lo que se está aprendiendo.

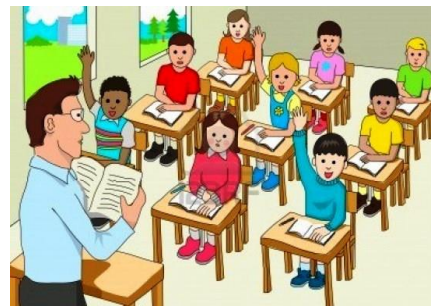


Imagen 13. Docente de matemáticas
<https://www.google.com>

14. Brindar asesorías

Implementar programas tutoriales semanales a los alumnos menos aventajados antes de las evaluaciones. Puedes apoyarte con el numeral (8, 17 y 20) para hacerlo.



Imagen 14. No premiar a estudiantes

<https://www.google.com>

15. Trabajar con las emociones



Imagen 15. Dibujo docentes y estudiantes

<https://www.google.com>

En esta parte es ineludible preguntar a los estudiantes cómo se sienten sobre la clase de matemáticas, es normal que a algunos les aburra y a otros les guste. Lo importante es escuchar dónde está la mayoría, algunos días puede que estén más cansados y otros días más animados. El plan de clase puede adaptarse a las emociones, si los estudiantes están aburridos, intentar una actividad que les pueda divertir más; si están cansados, poner menos trabajo, etc.

16. Ilustraciones

Utilizar la representación visual de los conceptos, objetos o situaciones de una teoría o tema específico (fotografías, dibujos, esquemas, gráficas, dramatizaciones, etcétera).

Los tipos de ilustraciones más usuales son:

- Lógico- matemática: diagramas de conceptos o funciones matemáticas
- Algorítmicas: diagramas que incluyen los pasos para un procedimiento.



Imagen 16. No premiar a los estudiantes

<https://www.google.com>

17.El debate

Consiste en un intercambio informal de ideas e información sobre un tema, realizado por un grupo bajo la dirección del educador. En el debate se presentan posiciones contrarias alrededor de un tema debiendo cada participante defender su punto de vista mediante la lógica, reflexión y la argumentación correcta.

- ✓ El tema debe de presentarse con varios enfoques
- ✓ El director del debate lleva preparadas una serie de preguntas con relación al tema.
- ✓ Los participantes deben de conocer de antemano el tema y debe de analizarse en todos sus aspectos
- ✓ Las preguntas deben de llevar un orden lógico
- ✓ Debe de llegarse a una conclusión

El debate favorece la reflexión y la exposición organizada y coherente de los argumentos propios, estimula la capacidad crítica, por tanto desarrolla la competencia de pensamiento crítico y reflexivo, trabajo colaborativo y comunicación. Esta estrategia requiere que profesor y alumnos tengan un buen dominio del tema.

En este caso debatir sobre la consecución de las distintas respuestas que cada grupo o cada estudiante ha obtenido en la resolución de algún problema.

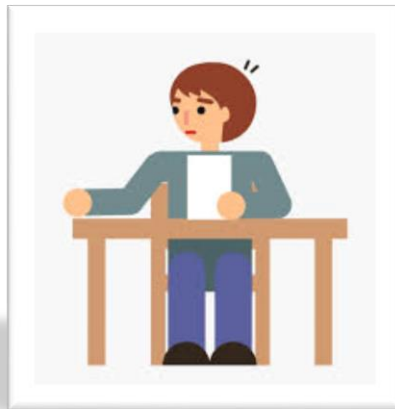


Imagen 17. Dibujo estudiante secundaria <https://www.google.com>

18.El taller

Implica un lugar donde se trabaja y labora. Es una forma de enseñar y aprender mediante la realización de algo, es decir aprender haciendo. En esta estrategia predomina y se privilegia, el aprendizaje sobre la enseñanza. Se trata entonces de aprender haciendo, desarrollando habilidades donde los conocimientos se adquieren a través de una práctica concreta; ejecutando algo relacionado con el objetivo que se pretende alcanzar, en un contexto particular de aprendizaje.

Es una metodología participativa en la que se enseña y se aprende a través de una tarea conjunta. Su metodología descansa en la actividad del estudiante y en la organización basada en pequeños grupos. La utilización de este método tiene como cometido dar respuesta a preguntas planteadas en las consignas de trabajo, teniendo en cuenta la opinión de todos los miembros del grupo, para llegar a una toma de decisiones colectiva. Desarrollando el taller en la práctica de conocimientos para despertar el interés en los estudiantes quienes observan la aplicación de los conocimientos. Esta estrategia promueve el desarrollo de varios saberes: cognitivo, procedimental y actitudinal, por tanto promueven el desarrollo de las competencias genéricas de comunicación, trabajo colaborativo. El taller es la estrategia que más ayuda a conectar la teoría con la práctica, al abordar, desde una perspectiva constructivista, la toma de una decisión, la solución de un problema práctico, la creación de algo necesario entre otros.



Imagen 18. Docentes y estudiantes matemáticas <https://www.google.com>

19. Clases prácticas

El término “clases prácticas” hace referencia a la modalidad organizativa en la que se desarrollan actividades de aplicación de los conocimientos a situaciones concretas y de adquisición de habilidades básicas y procedimentales relacionadas con la materia objeto de estudio. Esta denominación engloba a diversos tipos de organización, como pueden ser las prácticas de laboratorio, prácticas de campo, clases de problemas, etc., puesto que, aunque presentan en algunos casos matices importantes, todas ellas tienen como característica común que su finalidad es mostrar a los estudiantes cómo deben proceder.



Imagen 19. Profesor dibujo
<https://www.google.com>

20. Resolución de ejercicios y problemas



Imagen 20. Niños estudiando
<https://www.google.com>

La estrategia didáctica de resolución de ejercicios y problemas, está fundamentada en ejercitar, ensayar y poner en práctica los conocimientos previos, en la que se solicita a los estudiantes que desarrollen soluciones adecuadas o correctas mediante la ejercitación de rutinas, la aplicación de fórmulas o algoritmos, la aplicación de procedimientos de transformación de la información disponible y la interpretación de los resultados. Es importante destacar que se despierta el interés de los estudiantes al observar las posibles aplicaciones prácticas del conocimiento, asimismo posibilita la participación de todos los alumnos, independientemente de su grado de competencia y habilidad inicial para la tarea, brindando una gama amplia de actividades, con distintos tipos de exigencias y niveles de logros finales, de la misma manera, eleva el nivel de pensamiento reflexivo, lógico e intuitivo y mejora sus capacidades para apropiarse de la construcción de sus aprendizajes.

Los ejercicios y problemas pueden tener una o varias soluciones conocidas por el profesor y su intención principal es aplicar lo aprendido para afianzar conocimientos y

estrategias, reflexionando sobre los contenidos teóricos o para verificar la utilidad de los contenidos. Necesita de la supervisión constante del profesor y desde luego parte de una explicación por parte de él, para que el estudiante alcance el resultado esperado.

21. Aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo es una forma de organización de la enseñanza en pequeños grupos, para potenciar el desarrollo de cada uno con la colaboración de los demás miembros del equipo. El “aprendizaje entre iguales”, como también se le denomina, intensifica la interacción entre los estudiantes de un grupo, de manera que cada uno aprende el contenido asignado, y a su vez se aseguren que todos los miembros del grupo lo hacen.

Cooperar es compartir una experiencia vital de cualquier índole y naturaleza; es trabajar juntos para lograr metas compartidas, resultados que beneficien tanto individual como colectivamente, la interacción será el intercambio con otro, o bien con varios, sobre procesos y resultados de una actividad de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo integra como parte de su modelo a ambos componentes la interactividad y la interacción, garantizando que el aprendizaje en construcción sea significativo.



Imagen 21. Dibujo contexto educativo <https://www.google.com>

22. Simulación pedagógica

Es la representación de una situación de aprendizaje grupal cooperativa mediante la cual se reduce y simplifica en un modelo pedagógico la realidad, existen diferentes tipos de simulación didáctica, pero todas tienen en común ser alternativas dinámicas que implican la activa y emotiva participación del sujeto que aprende en una experiencia de aprendizaje que le va a proporcionar vivencias muy positivas en la construcción, bien de una noción teórica, bien de una habilidad relacionada con el saber hacer, la simulación consiste que mediante un “juego” y de manera abierta y creativa, los participantes asumen la representación de una identidad o rol que no es suyo, y esta experiencia se aborda desde diferentes perspectivas en situaciones objeto de enseñanza.



Imagen 22. No premiara a estudiantes
dibujo <https://www.google.com>

23. Elegir un buen libro de texto

El libro de texto juega un papel muy importante dentro del desarrollo de cualquier curso, no es sencillo elegirlo, sin embargo es importante hacerlo, porque supone evaluar una serie de criterios que deben contener, desde el conocimiento de las competencias y conocimientos con los que ya cuenta el estudiante, como se adecuan los contenidos al currículo vigente, que tan claros y ordenados están los contenidos, cual es el valor que tienen en su nivel de conocimiento, el libro debe presentar propuestas activas, que las ilustraciones, fotos, símbolos, elementos gráficos sean atractivos, que estimulen el trabajo individual, grupal y colectivo, las fuentes que el mismo texto recomienda, el tipo y tamaño de letra debe ser el adecuado.



Imagen 23. Elegir libro
<https://www.google.com>

24. Organizar lo que se va explicar

Como maestro el mayor deseo es proporcionarles a los estudiantes un aprendizaje eficaz y duradero, esto requiere pasión y una cierta metodología, pueden existir muchas metodologías lo más importante es adoptar la que se considere pertinente para llevar a cabo la labor docente. A continuación se presenta 4 momentos para desarrollar una clase, propuesta por el MINEDUC (2018) en cooperación con JICA:



Imagen 24. Organizar clase
<https://www.google.com>

- P**roblema de la clase: presenta los problemas iniciales del curso.
- S**olución: representa la solución de los problemas iniciales
- C**onclusión: se le presenta la idea principal de la clase, tales como definiciones.
- E**jercicios: es para reforzar lo aprendido, son una serie de ejercicios para practicar, pueden ser laboratorios.

25. Emplear una velocidad de exposición adecuada y mirar a los estudiantes cuando se le de clases

La voz es muy importante en la vida cotidiana como también en una exposición, de la voz depende el tipo de información que se recibirá, ante un grupo de estudiantes no se debe hablar de forma apagada, monótona y nerviosa. En general la idea de esta estrategia es procurar hablar lo suficientemente fuerte, nunca grite, mire a los estudiantes a los ojos, no hable mirando al cielo, al escritorio, a sus notas o a su camisa, hable claramente, no se coma palabras, cuidado con las palabras complejas debe practicarlos antes de su clase, al final de la presentación de un breve espacio para manifestar que no está desesperado por terminar.



Imagen 25. Docente explicando
<https://www.google.com>

26. Dar clases y no dictar

Saber cómo conectar a los estudiantes a las clases es fundamental para sacarles el máximo rendimiento de sus habilidades y destrezas. En determinados momentos y dependiendo de los cursos se pueden dar de forma teórica en la que es imprescindible dictarles contenido, pero en el curso de matemáticas lo recomendable es hacerlas más práctica, en la que los estudiantes aprendan haciendo, resolviendo problemas, ejercicios, ya sea en forma grupal o individual.



Imagen 25. Docente explicando
<https://www.google.com>

CONTENIDOS EDUCATIVOS



1. Multiplicación de polinomios

La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto, que sea respecto del multiplicando, en un valor absoluto y signo, lo que el multiplicador es respecto de la unidad positiva.

El multiplicando y multiplicador son llamados factores del producto.

Ley conmutativa de la multiplicación:

El orden de los factores no altera el producto. Esta propiedad, demostrada en aritmética, se cumple también en álgebra. Así el producto de **ab** puede escribirse **ba**; el producto **abc** puede escribirse también **bac** o **acb**.

Ley asociativa de la multiplicación:

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo. Así en el producto **abcd**, tenemos: **abcd = a X (bcd) = (ab) X (cd) = (abc) X d**

Ley de signos

Es decir

$$\begin{aligned} (+ a) X (b) &= + ab \\ (- a) X (+ b) &= - ab \\ (+ a) X (- b) &= - ab \\ (- a) X (- b) &= + ab \end{aligned}$$

+ por -	da +
- por -	da +
+ por -	da -
- por +	da -

Ley de exponentes

Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores

Así, $a^4 X a^3 X a^2 = a^{4+3+2} = a^9$

Ley de los coeficientes

El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

Así, $3a X 4b = 12ab$

→ $3a X 4b = 3 X 4 X a X b = 12ab$

Regla para multiplicar polinomios

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplos

1) Multiplicar $6y^2+2x^2-5xy$ por $3x^2-4y^2+2xy$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5xy + 6y^2 \\ 3x^2 + 2xy - 4y^2 \\ \hline 6x^4 - 15x^3y + 18x^2y^2 \\ \quad 4x^3y - 10x^2y^2 + 12xy^3 \\ \quad \quad - 8x^2y^2 + 20xy^3 - 24y^4 \\ \hline 6x^4 - 11x^3y \qquad \qquad + 32xy^3 - 24y^4 \quad R// \end{array}$$

2) Multiplicar $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{5}ab$ por $\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{4}b^2$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{5}ab + \frac{1}{2}b^2 \\ \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 \\ \hline \frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{20}a^3b + \frac{3}{9}a^2b^2 \\ \quad - \frac{1}{6}a^3b + \frac{1}{10}a^2b^2 - \frac{1}{4}ab^3 \\ \quad \quad - \frac{1}{12}a^2b^2 + \frac{1}{20}ab^3 - \frac{1}{8}b^4 \\ \hline \frac{1}{4}a^4 - \frac{19}{60}a^3b - \frac{47}{120}a^2b^2 + \frac{1}{5}ab^3 - \frac{1}{8}b^4 \quad R// \end{array}$$

3) Multiplicar $x^{a+2} - 3x^a - x^{a+1} + x^{a-1}$ por $x^{a+1} + x^a + 4x^{a-1}$

$$\begin{array}{r} x^{a+2} - x^{a+1} - 3x^a + x^{a-1} \\ x^{a+1} + x^a + 4x^{a-1} \\ \hline x^{2a+3} - x^{2a+2} - 3x^{2a+1} + x^{2a} \\ \quad x^{2a+2} - x^{2a+1} - 3x^{2a} + x^{2a-1} \\ \quad \quad 4x^{2a+1} - 4x^{2a} - 12x^{2a-1} + 4x^{2a-2} \\ \hline x^{2a+3} \qquad \qquad \qquad -6x^{2a} - 11x^{2a-1} + 4x^{2a-2} \quad R// \end{array}$$

p

Ejercicios

2. $3a^3-5a+2a^2-4$ por a^2+a^3-2a+1

$$\begin{array}{r} 3a^3+2a^2-5a-4 \\ a^3+a^2-2a+1 \\ \hline 3a^6+2a^5-5a^4-4a^3 \\ +3a^5+2a^4-5a^3-4a^2 \\ -6a^4-4a^3+10a^2+8a \\ +3a^3+2a^2-5a-4 \\ \hline 3a^6+5a^5-9a^4-10a^3+8a^2+3a-4 \end{array}$$

1. $x^4-x^3+x^2-x+1$ por x^3-2x^2+3x+6

$$\begin{array}{r} x^4-x^3+x^2-x+1 \\ x^3-2x^2+3x+6 \\ \hline x^7-x^6+x^5-x^4+x^3 \\ -2x^6+2x^5-2x^4+2x^3-2x^2 \\ +3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+3x \\ +6x^4-6x^3+6x^2-6x+6 \\ \hline x^7-3x^6+6x^5+x^2-3x+6 \end{array}$$

4. $m^4-2m^3n+3m^2n^2-4n^4$ por $n^3-5mn^2+3m^2n-m^3$

$$\begin{array}{r} m^4-2m^3n+3m^2n^2-4n^4 \\ -m^3+3m^2n-5mn^2+n^3 \\ \hline -m^7+2m^6n-3m^5n^2+4m^3n^4 \\ +3m^6n-6m^5n^2+9m^4n^3-12m^2n^5 \\ -5m^5n^2+10m^4n^3-15m^3n^4+20mn^6 \\ +m^4n^3-2m^3n^4+3m^2n^5-4n^7 \\ \hline -m^7+5m^6n-14m^5n^2+20m^4n^3-13m^3n^4-9m^2n^5+20mn^6-4n^7 \end{array}$$

3. $5y^4-3y^3+4y^2+2y$ por y^4-3y^2-1

5. $x^6-3x^4y^2-x^2y^4+y^6$ por $x^5-2x^3y^2+3xy^4$

$$\begin{array}{r} x^6-3x^4y^2-x^2y^4+y^6 \\ x^5-2x^3y^2+3xy^4 \\ \hline x^{11}-3x^9y^2-x^7y^4+x^5y^6 \\ -2x^9y^2+6x^7y^4+2x^5y^6-2x^3y^8 \\ +3x^7y^4-9x^5y^6-3x^3y^8+3xy^{10} \\ \hline x^{11}-5x^9y^2+8x^7y^4-6x^5y^6-5x^3y^8+3xy^{10} \end{array}$$

6. $a^x - a^{x+1} + a^{x+2}$ por $a+1$

$$\begin{array}{r} a^{x+2}-a^{x+1}+a^x \\ a+1 \\ \hline a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1} \\ +a^{x+2}-a^{x+1}+a^x \\ \hline a^{x+3}+a^x \end{array}$$

7. $x^{n+1}+2x^{n+2}-x^{n+3}$ por x^2+x

$$\begin{array}{r} -x^{n+3}+2x^{n+2}+x^{n+1} \\ x^2+x \\ \hline -x^{n+5}+2x^{n+4}+x^{n+3} \\ -x^{n+4}+2x^{n+3}+x^{n+2} \\ \hline -x^{n+5}+x^{n+4}+3x^{n+3}+x^{n+2} \end{array}$$

8. $m^{a-1}+m^{a+1}+m^{a+2}-m^a$ por m^2-2m+3

$$\begin{array}{r} m^{a+2}+m^{a+1}-m^a+m^{a-1} \\ m^2-2m+3 \\ \hline m^{a+4}+m^{a+3}-m^{a+2}+m^{a+1} \\ -2m^{a+3}-2m^{a+2}+2m^{a+1}-2m^a \\ +3m^{a+2}+3m^{a+1}-3m^a+3m^{a-1} \\ \hline m^{a+4}-m^{a+3}+6m^{a+1}-5m^a+3m^{a-1} \end{array}$$

9. $a^{n+2}-2a^n+3a^{n+1}$ por a^n+a^{n+1}

$$\begin{array}{r} a^{n+2} + 3a^{n+1} - 2a^n \\ a^{n+1} + a^n \\ \hline a^{2n+3} + 3a^{2n+2} - 2a^{2n+1} \\ + a^{2n+2} + 3a^{2n+1} - 2a^{2n} \\ \hline a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n} \end{array}$$

10. $3a^{x-1}+a^x-2a^{x-2}$ por $a^x-a^{x-1}+a^{x-2}$

$$\begin{array}{r} a^x + 3a^{x-1} - 2a^{x-2} \\ a^x - a^{x-1} + a^{x-2} \\ \hline a^{2x} + 3a^{2x-1} - 2a^{2x-2} \\ - a^{2x-1} - 3a^{2x-2} + 2a^{2x-3} \\ + a^{2x-2} + 3a^{2x-3} - 2a^{2x-4} \\ \hline a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4} \end{array}$$

11. $1/4a^2 - ab + 2/3b^2$ por $1/4a - 3/2b$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2 \\ \frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b \\ \hline \frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{4}a^2b + \frac{2}{12}ab^2 \\ - \frac{3}{8}a^2b + \frac{3}{2}ab^2 - \frac{6}{6}b^3 \\ \hline \frac{1}{16}a^3 - \frac{2+3}{8}a^2b + \frac{2+18}{12}ab^2 - b^3 \\ = \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b + \frac{20}{12}ab^2 - b^3 \\ = \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b + \frac{5}{3}ab^2 - b^3 \end{array}$$

12. $2/5m^2+1/3mn-1/2n^2$ por $3/2m^2+2n^2 - mn$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{3}{2}m^2 - mn + 2n^2 \\ \hline \frac{6}{10}m^4 + \frac{3}{6}m^3n - \frac{3}{4}m^2n^2 \\ - \frac{2}{5}m^3n - \frac{1}{3}m^2n^2 + \frac{1}{2}mn^3 \\ + \frac{4}{5}m^2n^2 + \frac{2}{3}mn^3 - \frac{2}{2}n^4 \\ \hline \frac{6}{10}m^4 + \frac{15-12}{30}m^3n - \frac{45+20-48}{60}m^2n^2 + \frac{3+4}{6}mn^3 - \frac{2}{2}n^4 \\ = \frac{6}{10}m^4 + \frac{3}{30}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4 \\ = \frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4 \end{array} \quad 6.$$

2. División de polinomios

La división es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Ley de los signos

La ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación:

Signos iguales dan + y signos diferentes dan -

+ por - da +
 - por - da +
 + por + da +
 - por + da -

Ley de los exponentes

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Sea el cociente $a^5 \div a^3$. Decimos que

$$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

Ley de los coeficientes

El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

En efecto $20a^2 \div 5a = 4a$

Regla para dividir polinomios

- ✓ Se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.
- ✓ Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.
- ✓ Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo

se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.

- ✓ Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.
- ✓ El segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.
- ✓ Se divide el primer término del segundo resto entre el primer del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplos

Dividir $m^6+m^5-4m^4-4m+m^2-1$ entre m^3+m^2-4m-1

$$\begin{array}{r}
 m^6 + m^5 - 4m^4 \quad + m^2 - 4m - 1 \quad \Big| \quad m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
 \underline{-m^6 - m^5 + 4m^4 + m^3} \\
 m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
 \underline{-m^3 - m^2 + 4m + 1} \\

 \end{array}$$

Aquí podemos observar que faltan los términos en m^3 ; dejaremos pues un espacio entre $-m^4$ y $+m^2$ para el término m^3

Dividir $x^{2a+5}-3x^{2a+3}+2x^{2a+4}-4x^{2a+2}+2x^{a+1}$ entre $x^{a+3}-2x^{a+1}$

$$\begin{array}{r}
 x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{a+1} \quad \Big| \quad x^{a+3} - 2x^{a+1} \\
 \underline{-x^{2a+5} \phantom{+ 2x^{2a+4}} + 2x^{2a+3}} \\
 + 2x^{2a+4} - x^{2a+3} \\
 \underline{-2x^{2a+4} \phantom{+ 2x^{2a+3}} + 4x^{2a+2}} \\
 -x^{2a+3} \phantom{+ 2x^{2a+1}} \\
 \underline{+ x^{2a+3} \phantom{+ 2x^{2a+1}} - 2x^{2a+1}} \\
 \phantom{+ x^{2a+3} + 2x^{2a+1}}
 \end{array}$$

Dividir $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \quad \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2 \right. \\
 \underline{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2y - \frac{1}{6}xy^2} \qquad \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y \\
 -\frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \\
 \underline{\frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{8}y^3}
 \end{array}$$

Dividir $x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 7x - 4$ entre $x^2 - 3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 7x - 4 \quad \left| x^2 - 3x + 2 \right. \\
 \underline{-x^5 + 3x^4 - 2x^3} \qquad \qquad \qquad x^3 - 2x + 3 + \frac{20x - 10}{x^2 - 3x + 2} \\
 -2x^3 + 9x^2 + 7x \\
 \underline{+ 2x^3 - 6x^2 + 4x} \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 3x^2 + 11x - 4 \\
 \underline{-3x^2 + 9x - 6} \qquad \qquad \qquad \leftarrow \\
 20x - 10
 \end{array}$$

Quando la división no es exacta es decir el término del residuo es de grado inferior al primer término del divisor, o sea cuando el exponente de una letra en el residuo es menor que el exponente de la misma letra en el divisor y sumamos el cociente en el quebrado que se forma, poniendo por numerador el residuo y por denominador el divisor

Ejercicios

Dividir $5y^8 - 3y^7 - 11y^6 + 11y^5 - 17y^4 - 3y^3 - 4y^2 - 2y$ entre $5y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 2y$

$$\begin{array}{r}
 5y^8 - 3y^7 - 11y^6 + 11y^5 - 17y^4 - 3y^3 - 4y^2 - 2y \quad \left| 5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y \right. \\
 \underline{-5y^8 + 3y^7 - 4y^6 - 2y^5} \qquad \qquad \qquad y^4 - 3y^2 - 1 \\
 -15y^6 + 9y^5 - 17y^4 - 3y^3 \\
 \underline{+15y^6 - 9y^5 + 12y^4 + 6y^3} \\
 -5y^4 + 3y^3 - 4y^2 - 2y \\
 \underline{+5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y}
 \end{array}$$

Dividir $x^{11}-5x^9y^2+8x^7y^4-6x^5y^6-5x^3y^8+3xy^{10}$ entre $x^5-2x^3y^2+3xy^4$

$$\begin{array}{r}
 x^{11} - 5x^9y^2 + 8x^7y^4 - 6x^5y^6 - 5x^3y^8 + 3xy^{10} \quad \left| \begin{array}{l} x^5 - 2x^3y^2 + 3xy^4 \\ x^6 - 3x^4y^2 - x^2y^4 + y^6 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^{11} + 2x^9y^2 - 3x^7y^4} \\
 -3x^9y^2 + 5x^7y^4 - 6x^5y^6 \\
 \underline{+3x^9y^2 - 6x^7y^4 + 9x^5y^6} \\
 -x^7y^4 + 3x^5y^6 - 5x^3y^8 \\
 \underline{+x^7y^4 - 2x^5y^6 + 3x^3y^8} \\
 +x^5y^6 - 2x^3y^8 + 3xy^{10} \\
 \underline{-x^5y^6 + 2x^3y^8 - 3xy^{10}} \\
 \hline
 \end{array}$$

Dividir $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-1$ entre $x^2+2xy+y^2+x+y+1$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2xy + x + y + y^2 + 1 \\ x + y - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 - 2x^2y - xy^2} \quad -x^2 - xy - x \\
 x^2y + 2xy^2 + y^3 - 1 - x^2 - xy - x \\
 \underline{-x^2y - 2xy^2 - y^3} \quad -xy \quad -y^2 - y \\
 -1 - x^2 - 2xy - x - y^2 - y \\
 \underline{+1 + x^2 + 2xy + x + y^2 + y} \\
 \hline
 \end{array}$$

Dividir $m^{a+4}-m^{a+3}+6m^{a+1}-5m^a+3m^{a-1}$ entre m^2-2m+3

$$\begin{array}{r}
 m^{a+4} - m^{a+3} \quad +6m^{a+1} - 5m^a + 3m^{a-1} \quad \left| \begin{array}{l} m^2 - 2m + 3 \\ m^{a+2} + m^{a+1} - m^a + m^{a-1} \end{array} \right. \\
 \underline{-m^{a+4} + 2m^{a+3} - 3m^{a+2}} \\
 m^{a+3} - 3m^{a+2} + 6m^{a+1} \\
 \underline{-m^{a+3} + 2m^{a+2} - 3m^{a+1}} \\
 -m^{a+2} + 3m^{a+1} - 5m^a \\
 \underline{+m^{a+2} - 2m^{a+1} + 3m^a} \\
 m^{a+1} - 2m^a + 3m^{a-1} \\
 \underline{-m^{a+1} + 2m^a - 3m^{a-1}} \\
 \hline
 \end{array}$$

Dividir $x^{2a-2} + x^{2a-3} - 4x^{2a-4} - x^{2a-7}$ entre $-x^{a-3} + x^{a-1} - x^{a-2}$

$$\begin{array}{r}
 x^{2a-2} + x^{2a-3} - 4x^{2a-4} \\
 -x^{2a-2} + x^{2a-3} + x^{2a-4} \\
 \hline
 +2x^{2a-3} - 3x^{2a-4} \\
 -2x^{2a-3} + 2x^{2a-4} + 2x^{2a-5} \\
 \hline
 -x^{2a-4} + 2x^{2a-5} \\
 +x^{2a-4} - x^{2a-5} - x^{2a-6} \\
 \hline
 +x^{2a-5} - x^{2a-6} - x^{2a-7} \\
 -x^{2a-5} + x^{2a-6} + x^{2a-7} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -x^{2a-7} \left| \begin{array}{l} x^{a-1} - x^{a-2} - x^{a-3} \\ \hline x^{a-1} + 2x^{2a-2} - x^{a-3} + x^{a-4} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Dividir $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{30}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \\
 -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2y - \frac{1}{6}xy^2 \\
 \hline
 -\frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 \\
 \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{8}y^3 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2 \\
 \hline
 \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y
 \end{array}$$

Dividir $\frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4$ entre $\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn$

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 - n^4 \\
 -\frac{3}{5}m^4 + \frac{2}{5}m^3n - \frac{4}{5}m^2n^2 \\
 \hline
 \frac{1}{2}m^3n - \frac{65}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 \\
 -\frac{1}{2}m^3n + \frac{1}{3}m^2n^2 - \frac{2}{3}mn^3 \\
 \hline
 -\frac{3}{4}m^2n^2 + \frac{1}{2}mn^3 - n^4 \\
 \frac{3}{4}m^2n^2 - \frac{1}{2}mn^3 + n^4 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \frac{3}{2}m^2 - mn + 2n^2 \\
 \hline
 \frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2
 \end{array}$$

3. Factorización

Descomponer en factores o factorar una expresión es convertirla en el producto indicado de sus factores.

Factores

Se llaman factores o divisores de una expresión a las expresiones que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

Factorar común monomio

Es un término o elemento que se repite en todos los términos de la expresión.

Factorar

$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2) \text{ R.}$$

Los coeficientes 18, 54 y 36 tienen como factores en común 18, 9, 6, 3. Se toma 18 por ser el máximo común divisor. Y de las letras los factores en común son m, y² (siempre se ha de tomar de las letras en común el que tenga el menor exponente)

Factorar

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3) \text{ R.}$$

Los coeficientes 6, 9, 12 y 3 tienen como factores en común 12, 9, 6, 4, 3. Se toma 3 por ser el factor común. De las letras los factores en común son m, x al exponente 1 y y³ que está elevado al exponente 3 (siempre se ha de tomar de las letras en común el que tenga el menor exponente tal fue el caso de x)

Factor común polinomio

En este caso el factor que se halla repetido es una expresión de dos o más términos.

Se escribe el polinomio factor común como coeficiente de otro paréntesis en el cual se coloca todos los cocientes de dividir la expresión entre el polinomio factor común.

Descomponer

$$x(a+b) + m(a+b) = \frac{x(a+b)}{(a+b)} = x \quad y \quad \frac{m(a+b)}{(a+b)} = m \quad \therefore x(a+b) + m(a+b) = (a+b)(x+m) \text{ R.}$$

Vemos que el binomio (a+b) está repetido en las dos expresiones, por consiguiente él es el factor común, y la factorización queda: (a+b)(x+m)

Descomponer

$$2x(a-1) - y(a-1) = \frac{2x(a-1)}{(a-1)} = 2x \quad y \quad \frac{-y(a-1)}{(a-1)} = -y \quad \therefore 2x(a-1) - y(a-1) = (a-1)(2x-y) \text{ R.}$$

Lo que está repetido es el binomio (a-1); con lo que la factorización queda: (a-1)(2x-y)

$$a(x+1) - x - 1 = (x+1)(a-1)$$

Aparentemente no existe factor en común pero si encerramos entre paréntesis el segundo binomio tendremos $a(x+1) - 1(x+1)$, con lo que queda claro que el factor común es $(x+1)$; con lo que la factorización queda: $(x+1)(a-1)$

Igual que el caso anterior encerramos entre paréntesis las dos expresiones $2x(x+y+z) - 1(x+y+z)$, con lo que podemos proceder a factorizar; $(x+y+z)(2x-1)$

Descomponer

$$(x-a)(y+2) + b(y+2) = (y+2)(x-a+b)$$

Vemos que el factor común es $(y+2)$, por lo que la factorización queda: $(y+2)(x-a+b)$

Descomponer

$$(x+2)(x-1) - (x+2)(x-3) = (x+2)(x-1-x+3) = (x+2)(+2)$$

Vemos que el factor repetido es el binomio $(x+2)$, por lo tanto la factorización queda de la siguiente manera: $(x+2)(x-1-x+3) = (x+2)(+2)$, ya que las x se eliminan

Descomponer

$$x(a-1) + y(a-1) - a + 1 = (a-1)(x+y-1)$$

Debemos encerrar todos los binomios entre paréntesis, $x(a-1) + y(a-1) - 1(a-1)$, con lo que el factor común es el binomio $(a-1)$, con lo que la factorización queda de la siguiente manera $(a-1)(x+y-1)$

Descomponer

$$(3x+2y)(x+y-z) - 3x - 2y - (x+y-1)(3x+2y) = (3x+2y)(x+y-z-1-x-y+1) = (3x+2y)(-z)$$

Encerramos entre paréntesis las distintas expresiones, con lo que nos quedan de la siguiente forma; $(3x+2y)(x+y-z) - 1(3x+2y) - (x+y-1)(3x+2y)$, vemos que el factor común es $(3x+2y)$, quedando la factorización así: $(3x+2y)(x+y-z-1-x-y+1) = (3x+2y)(-z)$

Ejercicios

1.	$3a^3 - a^2$	7.	$-m - n + x(m+n)$
2.	$15c^3d^2 + 60c^2d^3$	8.	$x(2a+b+c) - 2a - b - c$
3.	$2a^2x + 2ax^2 - 3ax$	9.	$(a+3)(a+1) - 4(a+1)$
4.	$9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$	10.	$5x(a^2+1) + (x+1)(a^2+1)$
5.	$2(x-1) + y(x-1)$	11.	$(a+b-c)(x-3) - (b-c-a)(x-3)$
6.	$a(n+2) + n+2$	12.	$x(a+2) - a - 2 + 3(a+2) - 4(a+2)$

Factor común por agrupación de términos

Para este caso:

- ✓ Debe haber en la expresión un número par de términos mayor que dos
- ✓ Se debe poder formar grupos de igual número de elementos con por lo menos un factor común cada grupo.
- ✓ Extraído el factor común de cada uno de los grupos, lo que quede dentro del paréntesis debe ser igual en cada uno de ellos, sino no sucede esto, entonces la expresión no puede ser factorizada por este método.

Descomponer

$$ax + bx + ay + by = (a+b)(x+y)$$

Agrupamos $(ax+bx)$ y $(ay+by)$ con lo que tenemos como factor común el primer binomio la x , factorizado tenemos: $x(a+b)$ en el segundo binomio el factor común es la y con lo que queda $y(a+b)$, ahora el factor común polinomio es $(a+b)$, con lo que la factorización se convierte en: $(a+b)(x+y)$

Descomponer

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (3m+4)(m-2n)$$

Se forman grupos: $(3m^2+4m)$ y $(-6mn-8n)$, en el primer binomio el factor común es m con lo que la factorización nos queda $m(3m+4)$ en el segundo factor es $(-2n)$ con lo que la factorización queda nos queda $-2n(3m+4)$; ahora el factor común polinomio es $(3m+4)$ con lo que la factorización final es $(3m+4)(m-2n)$

Descomponer

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (x-2)(2x-3y)$$

Se forman grupos: $(2x^2-4x)$ y $(-3xy+6y)$, en el primer factor común es $2x$ con lo que queda, $2x(x-2)$, en el segundo el factor común es $-3y$ con lo que queda, $-3y(x-2)$, ahora el factor común polinomio es $(x-2)$, con lo que la factorización queda: $(x-2)(2x-3y)$.

Descomponer

$$x+z^2-2ax-2az^2 = (1-2a)(3x-4y)$$

Se forman los grupos $(x-2ax)$ como x como factor común, con lo que queda, $x(1-2a)$, y (z^2-2az^2) con z^2 como factor común, con lo que queda, $z^2(1-2a)$; entonces la factorización final queda: $(1-2a)(3x-4y)$.

Descomponer

$$ax - ay + az + x - y + z = (x-y+z)(a+1)$$

Se pueden formar tres grupos de dos términos cada uno o dos grupos de tres términos cada uno, tomaremos dos grupos de tres términos cada uno, $(ax-ay+az)$ con a como factor común con lo que nos queda $a(x-y+z)$, y el otro $(x-y+z)$ con $+1$ como factor común con lo que queda $1(x-y+z)$, con lo que la factorización queda $(x-y+z)(a+1)$

Descomponer

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y = (x^2 - ax + a^2)(x - 2y)$$

Se forman dos grupos de tres términos cada uno ($x^3 - ax^2 + a^2x$) con x como factor común, con lo que queda, $x(x^2 - ax + a^2)$ y $(-2x^2y + 2axy - 2a^2y)$ con $-2y$ como factor común, con lo que queda, $-2y(x^2 - ax + a^2)$, con lo que la factorización final nos queda $(x^2 - ax + a^2)(x - 2y)$

Ejercicios

1.	$x^2 - a^2 + x - a^2x$
2.	$3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
3.	$6ax + 3a + 1 + 2x$
4.	$2am - 2an - 2a - m + n + 1$
5.	$3a^3 - 3a^2b + 9ab^2 - a^2 + ab - 3b^2$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio es un cuadrado perfecto, cuando es el producto de dos binomios iguales.

Entonces un trinomio será cuadrado perfecto, cuando esté formado de la siguiente manera, ordenados sus términos con relación a una literal, tendríamos el primer y el tercer términos cuadrados positivo, y el segundo dos veces el producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.

Algoritmo de la factorización: es la raíz cuadrada del primer término, el signo de segundo término, y la raíz cuadrada del tercer término, todo encerrado entre un paréntesis y este elevado al cuadrado.

- ✓ $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$
- ✓ $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$
- ✓ $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2$
- ✓ $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$
- ✓ $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2$
- ✓ $a^2 + 2a(a - b) + (a - b)^2 = (a + a - b)^2 = (2a - b)^2$
- ✓ $9(x - y)^2 + 2(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2 = [3(x - y) + 2(x + y)]^2 = (3x - 3y + 2x + 2y)^2 = (5x - y)^2$
- ✓ $(x + y)^2 - 2(x + y)(a + x) + (a + x)^2 = [(x + y) - (a + x)]^2 = (x + y - a - x)^2 = (y - a)^2$

Ejercicios

1.	$y^4 + 1 + 2y^2$
2.	$a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
3.	$4 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$
4.	$(m+n)^2 - 2(m+n)(a-m) + (a-m)^2$
5.	$4(1+a)^2 - 4(1+a)(b-1) + (b-1)^2$

Diferencia de cuadrados perfectos

Algoritmo: el primer factor estará formado por la suma de las raíces cuadradas de los dos términos y el segundo factor por la diferencia de estas raíces, teniendo cuidado de que el término cuyo cuadrado es el que tiene signo negativo en los factores que queden con signos alternos.

$$16x^2 - 25y^4 = (4x^2 + 5y^2) (4x^2 - 5y^2)$$

$$49x^2y^6z^{10} - a^{12} = (7xy^3z^5 + a^6) (7xy^3z^5 - a^6)$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right) \left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right)$$

$$a^{2n} - 9b^{4m} = (a^n + 3b^{2m}) (a^n - 3b^{2m})$$

$$4x^2 - (x+y)^2 = [2x+(x+y)] [2x-(x+y)] = (2x+x+y) (2x-x-y) = (3x+y) (x-y)$$

$$(a+x)^2 - (x+2)^2 = [(a+x) + (x+2)][(a+x) - (x+2)] = (a+x+x+2) (a+x-x-2) = (a+2x+2) (a-2)$$

$$(m-n)^2 - 16 = [(m-n)+4][(m-n)-4] = (m-n+4) (m-n-4)$$

Ejercicios

1.	$4x^2 - 81y^4$
2.	$25x^2 - 121$
3.	$\frac{x^6}{49} - \frac{4a^{10}}{121}$
4.	$A^{2n}b^{4n} - 225b^4$
5.	$(2x+3)^2 - (5x-1)^2$
6.	$(2a - c)^2 - (a + c)^2$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Son trinomios los que cumplen con las condiciones siguientes:

- ✓ El coeficiente del primer término es uno.
- ✓ El primer término es una literal cualquiera elevada al cuadrado.
- ✓ El segundo término tiene como coeficiente un número cualquiera que multiplica a la literal elevada a exponente uno.
- ✓ El tercer término es independiente de la literal que aparece en el primero y segundo términos, es una cantidad cualquiera positiva o negativa.

Algoritmo de la factorización:

- ✓ El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de la literal del primer término del trinomio.

- ✓ En el primer factor después de la literal se escribe el signo del segundo elemento del trinomio, y en el segundo factor después de la literal se escribe el signo resultante de aplicar la ley de signos de la multiplicación a los signos del segundo y tercer términos del trinomio.
- ✓ Si los dos factores tienen signos iguales en el segundo elemento, se buscan dos números que multiplicados nos den el tercer elemento del trinomio y sumados nos den el coeficiente del segundo término del trinomio.
- ✓ Si los signos del segundo elemento de los binomios son diferentes, se buscan dos números que multiplicados nos den el tercer término del trinomio y que restados nos den el coeficiente del segundo término del trinomio.
- ✓ Teniendo cuidado de poner el número con mayor valor absoluto en el primer binomio y el de menor valor absoluto en el segundo binomio.

Ejemplos

$$a^2 - 13a + 40 = (a - 8)(a - 5)$$

$$m^2 - 11m - 12 = (m - 12)(m + 1)$$

$$x^2 + 6x - 216 = (x + 18)(x - 12)$$

$$(a+x)^2 - 12(a+x) + 20 = (a+x-10)(a+x-2)$$

$$x^6 + 7x^3 - 44 = (x^3 + 11)(x^3 - 4)$$

$$(5x)^2 - 9(5x) + 8 = (5x - 8)(5x - 1)$$

Ejercicios

1.	$m^2 + 5m - 14$
2.	$c^2 + 5c - 24$
3.	$20 + a^2 + 21a$
4.	$x^2 + 14x + 13$
5.	$x^2 + 15x + 56$
6.	$7a + a^2 - 18$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La diferencia con el caso anterior es que en este trinomio el coeficiente del término cuadrático es un número distinto de uno.

Algoritmo: para la factorizar este trinomio procedemos de la siguiente manera, multiplicamos los tres términos del trinomio por el número coeficiente del término cuadrático, dejando el producto del segundo término solamente indicado.

Para no alterar el valor del trinomio, como lo multiplicamos por el coeficiente del primer término, también lo dividimos entre el mismo coeficiente.

Abrimos los dos paréntesis que van albergar a los dos factores, poniendo en cada uno la raíz cuadrada del primer término.

En el primer paréntesis colocamos el signo que le corresponde al segundo término del trinomio, y en el otro paréntesis el signo correspondiente a aplicar la ley de signos de la multiplicación entre el segundo y tercer signo del trinomio.

Buscamos dos número que multiplicados nos den como producto el tercer término del trinomio, y que sumados o restados nos den el numero original del segundo término del trinomio.

Los números serán sumados cuando los signos de los dos factores sean iguales y restados cuando los signos sean diferentes.

Siempre colocaremos el número mayor en el primer paréntesis y el menor en el segundo.

Luego simplificamos los coeficientes de los factores de los numerados, de tal manera que el denominador se convierta en la unidad.

Una comprobación rápida de que la factorización está bien hecha, es que el producto de los coeficientes deben darnos el coeficiente del término cuadrático y el producto de los términos absolutos debe dar el termino absoluto del trinomio original.

$$6x^2 - 7x - 3 =$$

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 6(7x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x-9)(6x+2)}{(3)(2)} = (2x - 3)(3x + 1)$$

$$7m^2 - 23m + 6 =$$

$$\frac{7(7m^2 - 23m + 6)}{7} = \frac{49m^2 - 7(23m) + 42}{7} = \frac{(7m)^2 - 23(7m) + 42}{7} = \frac{(7m-21)(7m-2)}{7} = (m - 3)(7m - 2)$$

Ejercicios

1.	$4a^2 + 15a + 9$
2.	$10x^2 + 11x + 3$
3.	$9a^2 - 10a + 1$
4.	$5x^2 + 13x - 6$
5.	$12m^2 - 13m - 35$

4. Función cuadrática

Se llama función cuadrática a la función que tiene su variable independiente elevada al cuadrado, esta función tiene por grafica una parábola.

La parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz. La parábola tiene por punto llamado vértice que es el punto extremo de la gráfica y que se encuentra distante del foco y de la recta llamada directriz a esta distancia se le llama parámetro de la parábola. La recta que une el vértice y el foco y que divide a la parábola en dos partes iguales se llama eje principal.

La fórmula simplificada de la parábola es $(x - h)^2 = \pm 4p (h - k)$ cuando la parábola se encuentra en posición vertical, si el parámetro es positivo el vértice se encuentra se halla hacia abajo y la parábola se extiende hacia arriba, si el parámetro es negativo el vértice se halla hacia arriba y la parábola se extiende hacia abajo, siendo (h; k) las coordenadas del vértice, y p el largo del parámetro.

Si la variable que se encuentra elevada al cuadrado es la y entonces tendremos la parábola $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$ cuya posición es horizontal, con el vértice viendo hacia la izquierda y extendiéndose hacia la derecha si el parámetro es positivo, y con el vértice viendo hacia la derecha y extendiéndose hacia la izquierda si el parámetro es negativo.

$$(x - 1)^2 = 4p (y + 3) \quad (x + 2)^2 = -4p (y - 7)$$

Cuando una función cuadrática es igualada a cero se convierte en una ecuación cuadrática. $5x^2 - 8x + 3 = 0$ que en su forma general estará representada por la ecuación literal $ax^2 + bx + c = 0$; en el cual a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término lineal y c es el valor absoluto de la ecuación

Al binomio formado por los términos $(b^2 - 4c)$ se le conoce con el nombre de discriminante por que es el que separa los distintos valores de las raíces de la ecuación si:

$$(b^2 - 4c) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \rightarrow \text{hay dos raíces reales en la ecuación} \\ = 0 \rightarrow \text{hay una sola raíz real en la ecuación} \\ < 0 \rightarrow \text{hay dos raíces imaginarias en la ecuación} \end{array} \right\}$$

4.1 Ecuaciones cuadráticas completas e incompletas

Una ecuación cuadrática puede estar completa o incompleta, está completa cuando tiene sus tres elementos: el cuadrático, el lineal y el absoluto, y es incompleta cuando le falta el lineal o el absoluto.

Ecuación incompleta de la forma $ax^2 = c$

Ejemplo de ecuaciones cuadráticas sin el término lineal: es una ecuación incompleta de la forma $ax^2 = c$

Algoritmo de resolución:

Se efectúan las operaciones indicadas, se despeja la variable y se extrae la raíz cuadrada al término absoluto, quedando dos raíces, una positiva y otra negativa.

Ejemplos:

$$x^2 + 1 = \frac{7x^2}{9} + 3 \rightarrow 9x^2 + 9 = 7x^2 + 27 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = +\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

Eliminamos el denominador nueve, multiplicando todos los términos de la ecuación por nueve, luego reducimos términos semejantes, despejamos la x^2 y extraemos la raíz cuadrada al resultado, asignamos el signo positivo y negativo a la raíz.

$$(x - 5)(x + 5) = -34 \rightarrow x^2 - 25 = -34 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \rightarrow \pm 3\sqrt{-1}$$

Efectuamos la operación indicada, despejamos la x^2 que nos queda igual a -9 extraemos la raíz que será un número imaginario, con lo que la ecuación tiene como respuesta dos raíces imaginarias.

Ejercicios

1.	$(2x - 3)(2x + 3) - 135 = 0$
2.	$3(x + 2)(x - 2) = (x - 4)^2 + 8x$
3.	$5x^2 - 9 = 46$
4.	$(x + 5)(x - 5) = -7$
5.	$7x^2 + 14 = 0$

Ecuación incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$

Ejemplo de ecuaciones cuadráticas sin el término absoluto: es una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$

Algoritmo de la resolución:

Se extrae el factor común de la ecuación, y se igualan los dos factores a cero, con lo que obtenemos las dos raíces de la ecuación.

Ejemplos:

$$5x^2 = -3x \rightarrow 5x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(5x + 3) = 0 \rightarrow x = 0; 5x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Igualamos la ecuación a cero, extraemos el factor común x e igualamos a cero los dos factores, con lo que obtenemos la primera raíz de $x = 0$, y a despejar el otro factor obtenemos la otra raíz que es menos tres quintos.

$$3x - 1 = \frac{5x + 2}{x - 2} \rightarrow (3x - 1)(x - 2) = 5x + 2 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 5x + 2 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 - 2 = 0$$

$$3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x - 7) = 0; 3x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Resolución de ecuaciones de segundo grado completas

Existen tres métodos analíticos de resolución y el método gráfico

Método de factorización

Algoritmo del método de factorización: se efectúan las operaciones indicadas, se iguala a cero la ecuación, se reducen términos semejantes, luego se procede a factorizar el trinomio, los factores obtenidos se igualan a cero y al despejar la variable obtenemos las raíces de la ecuación.

Ejemplos:

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \rightarrow (x + 8)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{matrix} (x+8=0 \rightarrow x=-8) \\ (x-3=0 \rightarrow x=3) \end{matrix}$$

$$14x^2 - 31x - 10 = 0 \rightarrow \frac{(14x-35)(14x+4)}{14} = 0 \rightarrow (2x - 5) \rightarrow (7x + 2) \rightarrow \begin{matrix} (2x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}) \\ (7x+2=0 \rightarrow x=-\frac{2}{7}) \end{matrix}$$

Ejercicios

1.	$x^2 - x - 6 = 0$
2.	$x^2 + 7x = 18$
3.	$8x - 65 = -x^2$
4.	$x^2 = 108 - 3x$
5.	$2x^2 + 7x - 4 = 0$

Método de complementación del cuadrado

Algoritmo del método de complementación del cuadrado: se lleva la ecuación a la forma $ax^2+bx+c=0$; se traslada el término absoluto al otro miembro de la igualdad, se dividen ambos miembros de la igualdad entre el valor del coeficiente del término cuadrático, luego se divide el coeficiente del término lineal entre dos y se elevan al cuadrado sumándolo en los dos miembros de la igualdad, se factoriza el trinomio cuadrado perfecto del primer miembro y se reducen las

cantidades del segundo, se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros de la igualdad, y se despeja la variable.

Ejemplo:

$$15x = 25x^2 + 2 \rightarrow 25x^2 - 15x + 2 = 0 \rightarrow 25x^2 - 15x = -2$$

$$\rightarrow \frac{25x^2}{25} - \frac{15x}{25} = -\frac{2}{25} \rightarrow x^2 - \frac{3x}{5} = -\frac{2}{25}$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{3x}{5} + \frac{9}{25} = -\frac{2}{25} + \frac{9}{25} \rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25} \rightarrow x - \frac{2}{5} = \pm \sqrt{\frac{7}{25}} \quad x = \left(\frac{3+\sqrt{7}}{5}, \frac{3-\sqrt{7}}{5}\right)$$

Ejercicios

1.	$3x^2 - 5x + 2 = 0$
2.	$4x^2 + 3x - 22 = 0$
3.	$x^2 + 11x = -24$
4.	$x^2 = 16x - 63$
5.	$12x - 4 - 9x^2 = 0$

Deducción de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado

Sea la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ procediendo con el método de complementación del cuadrado tenemos:

$$ax^2 + bx = -c \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac+b^2}{4a^2}x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Método de la fórmula general

Ejemplos::

$$1. \quad 3x^2 - 7 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \\ c = +2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{+7 \pm \sqrt{49-24}}{6}$$

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = +2 \\ \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2. (x+4)^3 - (x-3)^3 = 343 \rightarrow x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 = 343$$

$$21x^2 + 21x + 91 = 343 \rightarrow 21x^2 + 21x - 252 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = 21 \\ c = -252 \end{cases}$$

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(21)(-252)}}{2(21)} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 21168}}{42} = \frac{-21 \pm \sqrt{21609}}{42}$$

$$x = \frac{-21 \pm 147}{42} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{-21 + 147}{42} = \frac{126}{42} = +3 \\ \frac{-21 - 147}{42} = \frac{-168}{42} = -4 \end{cases}$$

$$3. \frac{3x-1}{x} - \frac{2x}{2x-1} - \frac{7}{6} = 0 \rightarrow \frac{6(3x-1)(2x-1) - 2x(6x) - 7x(2x-1)}{6x(2x-1)}$$

$$\frac{36x^2 - 12x - 18x + 6 - 12x^2 - 14x^2 + 7x}{6x(2x-1)} = 0 \rightarrow 10x^2 - 23x + 6 = 0$$

$$10x^2 - 23x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -23 \\ c = +6 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4(10)(6)}}{2(10)}$$

$$x = \frac{+23 \pm \sqrt{529 - 240}}{20} = \frac{23 \pm \sqrt{289}}{20} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{23+17}{20} = \frac{40}{20} = 2 \\ \frac{23-17}{20} = \frac{6}{20} = +\frac{3}{10} \end{cases}$$

Ejercicios

1.	$x(x+3) = 5x+3$
2.	$9x+1 = 3(x^2-5) - (x-3)(x+2)$
3.	$25(x+2)^2 = (x-7)^2 - 81$
4.	$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{10}$
5.	$\frac{8x}{3x+5} + \frac{5x-1}{x+1} = 3$

Ecuaciones con radicales que se resuelven por ecuaciones de segundo grado

Por el hecho de elevar dos miembros de la ecuación al cuadrado, puede darle soluciones que no satisfacen la ecuación dada, llamada soluciones extrañas o inadmisibles, por lo tanto, al resolver la ecuación es necesario hacer la comprobación de resultados, para saber cuáles son las raíces de la ecuación.

Ejemplo:

$$\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-5} = (\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{3x-5})^2$$

$$4x - 3 - (2)(\sqrt{4x-3})(\sqrt{x-2}) + x - 2 = 3x - 5$$

$$2\sqrt{4x^2 - 11x + 6} = 3x - 5 - x + 2 - 4x + 3$$

$$2\sqrt{4x^2 - 11x + 6} = -2x$$

$$(\sqrt{4x^2 - 11x + 6})^2 = x^2$$

$$4x^2 - 11x + 6 - x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\frac{(3x-9)(3x-2)}{3} = (x-3)(3x-2) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ 3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Comprobación

$$\sqrt{4(3)-3} - \sqrt{3-2} = \sqrt{x(3)-5}$$

$$\sqrt{12-3} - \sqrt{1} = \sqrt{9-5}$$

$$\sqrt{9} - 1 = \sqrt{4}$$

$$3 - 1 = 2$$

$$2 = 2 \text{ Si cumple}$$

Ejercicios

1.	$x + \sqrt{4x+1} = 5$
2.	$2x - \sqrt{x-1} = 3x - 7$
3.	$\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} = 4$
4.	$2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 1$
5.	$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3$

5. Función lineal

Una función lineal, es la función cuya representación gráfica es una recta. La recta puede representarse en el plano cartesiano por una de las siguientes formas:

Pendiente de una recta es la inclinación que la recta guarda con el eje de las abscisas, y su valor es igual al valor de la tangente del ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas, por ser una tangente la pendiente carece de dimensional, es únicamente número. Formula de la pendiente de una recta.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Matriz, es un conjunto de valores ordenados en filas y columnas, y cuyo resultado al operarla, da como resultado un número, que recibe el nombre de determinante.

Por dos puntos

Dos puntos definen una recta y solamente una, sean los puntos A (-5, -7) y B (4,8). Una recta debe tener la misma pendiente en todos sus puntos, por consiguiente, podemos igualar dos de sus pendientes tomadas de dos de sus puntos.

Por un punto y la pendiente de la recta

La pendiente de la recta y un punto de la misma, definen a la recta.

Sea la pendiente $m = \frac{+3}{+4}$ y el punto (-5, -6), pertenecen a la recta.

Como el punto pertenece a la recta, debe cumplir con la pendiente de la recta.

$$m = \frac{3}{4}; P(-5; -6) \rightarrow y - (-6) = \frac{3}{4}[x - (-5)] \rightarrow y + 6 = \frac{3}{4}(x + 5)$$

$$\rightarrow 4y + 24 = 3x + 15 - 3x + 4y + 9 = 0 \rightarrow 3x - 4y - 9 = 0$$

Por medio de una matriz, cuyo determinante es la ecuación de la recta

La matriz cuadrada formada por las variables de la ecuación, y las coordenadas de dos puntos pertenecientes a la recta, y como tercer valor para completar la matriz, se usa la unidad.

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = \text{Es la matriz que da origen a la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados}$$

Sean los puntos $(-3, 4)$ y $(5, -7)$ de la recta cuya ecuación queremos encontrar

$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ = Es la matriz que representa la recta buscada, cuya ecuación general es la siguiente

$$\left. \begin{array}{l} +x[(+4 * +1) - (-7 * +1)] = +x(+4 + 7) = +11x \\ -y[(-3 * +1) - (+5 * +1)] = -y(-3 - 5) = +8x \\ +1[(-3 * -7) - (+5 * +4)] = +1(+21 - 20) = +1 \end{array} \right\} \rightarrow 11x + 8y + 1 = 0$$

Por medio de la ecuación general de la recta

Una ecuación de dos variables, determina a una recta, $Ax + By + C = 0$

En la cual la pendiente está representada por la ecuación $m = \frac{-A}{B}$; $y \frac{-C}{B}$ representa la distancia vertical que separa el punto origen $(0, 0)$ del punto por el cual la recta cruza al eje de las ordenadas.

Sean A $(5, 7)$ y B $(8, 12)$ dos puntos de una recta, encontremos su ecuación en forma general.

Como ambos puntos pertenecen a la recta, tendrán la misma pendiente, luego podemos escribir.

$$\frac{y-7}{x-5} = \frac{y-12}{x-8} \rightarrow (xy - 7x - 8y + 56) = (xy - 12x - 5y + 60) \rightarrow$$

$$-7x + 12x - 8y + 5y + 56 - 60 = 0$$

$$5x - 3y - 4 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{-5}{-3} = +\frac{5}{3} \text{ que es la pendiente de la recta} \\ b = \frac{-(-4)}{-3} = -\frac{4}{3} \text{ la distancia del origen al intercepto con } yy^1 \end{array} \right\}$$

Por medio de una ecuación simplificada

Si en una recta señalamos su pendiente y la distancia del origen al punto donde la recta cruza al eje de las coordenadas, la recta queda determinada de la siguiente manera $y = mx + b$ que es la forma llamada simplificada.

Sean A $(+3, +4)$; B $(+5, +7)$, como los dos puntos pertenecen a la recta deben tener la misma pendiente, por lo tanto:

$$m = \frac{(+7) - (+4)}{(+5) - (+3)} = +\frac{3}{2} \rightarrow y - 4 = \frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + 4 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{8}{2}$$

$y = +\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ La forma simplificada puede conseguirse a partir de la forma general con solo despojar la variable dependiente “y”

Por medio de la forma simétrica

Hemos visto que a distancia que va del origen al intercepto de la recta con el eje de las ordenadas se define por la letra “b”, o sea que el punto (0,b), define el lugar exacto de la intercepción con el eje de la ordenadas; luego existe también una distancia definida del origen al intercepto con el eje de la abscisas que se representa por la letra “a”, o sea que el punto (a,0), definen el lugar exacto de la intercepción de la recta con el eje de las abscisas.

La forma llamada simétrica aprovecha estas distancias para representar a la recta.

Sea la ecuación de la recta en forma general $Ax + By + C = 0$, se procede a trasladar el valor absoluto de la ecuación al otro lado de la igualdad, quedando así: $Ax + By = -C$ luego dividimos toda la ecuación por el valor del término absoluto, de manera que la ecuación queda igualada a + 1,

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = \frac{-C}{-C} \rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = +1$$

Seguidamente se simplifican las fracciones, $a = \frac{-C}{A}$; $y b = \frac{-C}{B}$; y la ecuación toma su forma llamada simétrica de:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Sea la recta $5x + 8y - 40 = 0$ expresada en su forma general, y la queremos expresar en su forma simétrica, despejamos el término absoluto quedando $5x+8y=40$, luego dividimos toda la ecuación entre el término absoluto $\frac{5x}{40} + \frac{8y}{40} = \frac{40}{40}$ simplificando todos los cocientes tenemos:

$$\frac{x}{\frac{40}{5}} + \frac{y}{\frac{40}{8}} = 1 \rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{5} = +1$$

Que es su forma simplificada.

Punto de intersección entre rectas

Cuando dos rectas se cortan comparten uno de sus puntos, a este punto se le llama punto de intersección y puede ser localizado por diferentes métodos, un método gráfico y cuatro métodos analíticos, nuestro estudio consistirá en aprender a utilizar con seguridad cualquiera de los cuatro métodos analíticos, para la solución de las distintas ecuaciones simultaneas de primer grado con dos variables.

Método de reducción, también conocido como de suma y resta

Consiste en igualar los coeficientes de una de las variables por medio de productos adecuados, procurando a través de estos productos que los coeficientes iguales quedan con signo diferentes, para que al sumarlos se anulen, con lo que nos queda una ecuación de primer grado con una sola variable.

Ejemplo:

Encuentre la solución del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14x + 8y = 26 \\ 20x - 8y = 76 \end{cases} \rightarrow 34x = 102 \rightarrow x = +3$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 35x + 20y = 65 \\ -35x + 14y = -133 \end{cases} \rightarrow +34y = -68 \rightarrow -2$$

El punto de intersección de las rectas es $P(+3, -2)$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$	5.	$\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y - 3x = 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$		

Método de igualación

Consiste en despejar una de las variables, cualquiera de la dos en ambas ecuaciones y luego igualar las ecuaciones de primer grado con una variable resultantes y resolverlas, con lo que obtenemos el valor de una de las variables, sustituyendo ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas obtendremos el valor de la otra variable.

Ejemplo.

Encuentra la solución del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -24 \\ 8x - 3y = +19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-24-2x}{5} \\ y = \frac{+19-8x}{-3} \end{cases} \rightarrow \left\{ \frac{-24-2x}{+5} = \frac{+19-8x}{-3} \right\} \rightarrow +72 + 6x = +85 - 40x$$

$$6x + 40x = +85 - 72 \rightarrow x = \frac{23}{46} = +\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{-24-2\left(\frac{1}{2}\right)}{5} \rightarrow y = \frac{-24-1}{5} \rightarrow y = -\frac{25}{5}$$

La solución de la ecuación es el punto definido por las coordenadas $\left(+\frac{1}{2}; -5\right)$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ -3x + 4y = -24 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 4y + 3x = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 15x + 11y = 32 \\ 7y - 9x = 8 \end{cases}$

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones y hacer la sustitución de su valor en la otra ecuación, luego resolver la ecuación de primer grado con una variable que nos quedó y volver a sustituir el valor de la variable encontrando en la ecuación despejada, con lo que obtenemos el valor de la otra variable.

Ejemplo.

Revuelve el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, utilizando el método de sustitución:

$$\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ 8x - 15y = -1 \end{cases} \rightarrow x = \frac{8-9y}{10} \rightarrow 8\left(\frac{8-9y}{10} - 15y = -1\right) \rightarrow \frac{64-72y-150y}{10} = -10$$

$$-222 = -10 - 64 \rightarrow y = \frac{-74}{-222} \rightarrow y = +\frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{8-9\left(\frac{1}{3}\right)}{10} \rightarrow x = \frac{8-3}{10} \rightarrow x = +\frac{5}{10}$$

$$\rightarrow x = +\frac{1}{2}$$

El punto solución de la ecuación está señalado por el punto cuyas coordenadas son $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 9x - 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

Método de determinantes

Recibe este nombre porque las ecuaciones se escriben en forma de tres matrices, formadas:

La primera llamada matriz principal, por los coeficientes de la dos ecuaciones debidamente ordenadas en su forma canónica (su forma más simple y ordenada de formar que las variables iguales queden en columna).

La segunda llamada matriz de la primera variable, por los valores absolutos de ambas ecuaciones, es decir, por los valores que carecen de variables, ocupando el lugar de los coeficientes de la primera variable y la segunda columna se queda igual a la primera sin sufrir ningún cambio.

La tercera estará formada por los coeficientes de la primera variable sin alterar posición o signo, y la segunda columna la ocuparan los valores absolutos de las ecuaciones en vez del valor de los coeficientes de la segunda variable.

Ejemplo.

Resolver por el método de determinantes el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos variables.

$$\begin{cases} 3(2x + y) - 2(y - x) = -4(y + 7) \\ 3(2y + 3x) - 20 = -53 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y - 2y + 2x = -4y - 28 \\ 6y + 9x - 20 = -53 \end{cases} \begin{cases} 8x + 5y = -28 \\ 9x + 6y = -33 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [8 \ 5] \\ [9 \ 6] \\ [-28 \ 5] \\ [-33 \ 6] \\ [8 \ -28] \\ [9 \ -33] \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = [(8 * 6) - (9 * 5)] = 48 - 45 = +3 \\ \Delta x = [(-28 * 6) - (-33 * 5)] = -168 + 165 = -3 \\ \Delta y = [(8 * -33) - (9 * -28)] = -264 + 252 = -12 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \rightarrow \frac{-3}{+3} = -1; y = \frac{\Delta y}{\Delta} \rightarrow \frac{-12}{+3} = -4; \text{ Solución en el punto } (-1, -4)$$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ x - 3 = 3y - 7 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3(x + 2) = 2y \\ 2(y + 5) = 7x \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x - 1 = 2(y + 5) \\ x + 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 30 - (8 - x) = 2y + 30 \\ 5x - 29 = x - (5 - 4y) \end{cases}$

Resolución de sistemas de ecuaciones fraccionarias simultáneas de primer grado con dos variables

Algoritmo:

“No debe haber denominadores en una ecuación”

En vista de esta ley lo primero que debemos hacer es reducir la ecuación a un mínimo común denominador, para poder eliminarlo por cancelación. Luego se procede de la manera normal por cualquier de los métodos aprendidos, hasta conocer las coordenadas del punto de intersección de las rectas.

Ejemplos:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos variables:

$$\text{a) } x - \frac{3x+4}{7} = \frac{y+2}{3}; 2y - \frac{5x+4}{11} = \frac{x+24}{2}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{3x+4}{7} = \frac{y+2}{3} \rightarrow \frac{21x-9x-12}{21} = \frac{7y+14}{21} \rightarrow 12x - 7y = +26 \\ 2y - \frac{5x+4}{11} = \frac{x+24}{2} \rightarrow \frac{44y-10x-8}{22} = \frac{11x+264}{22} \rightarrow -21x + 44y = 272 \end{array} \right\}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -21 & 44 \end{bmatrix} = (12 * 44) - (-21 * -7) = +528 - 147 = +381$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 26 & -7 \\ 272 & 44 \end{bmatrix} = (26 * 44) - (272 * -7) = 1144 + 1904 = +3048 \rightarrow x = \frac{3048}{381} = +8$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -21 & 272 \end{bmatrix} = (12 * 272) - (-21 * 26) = 3264 + 546 = +3810 \rightarrow y = \frac{3810}{381} = +10$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = -\frac{2}{7} \rightarrow \frac{7x+7y=-2x+2y}{7(x-y)} \rightarrow 9x + 5y = 0 \\ \frac{8x+y-1}{x-y-2} = 2 \rightarrow \frac{8x+y-1=2x-2y-4}{x-y-2} = 6x + 3y = -3 \end{array} \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (9 * 3) - (6 * 5) = 27 - 30 = -3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (0 * 3) - (-3 * 5) = 0 + 15 = +15 \rightarrow x = \frac{+15}{-3} = -5$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = (9 * -3) - (6 * 0) = -27 + 0 = -27 \rightarrow y = \frac{-27}{-3} = +9$$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} - y = 9 \\ \frac{y}{3} = \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \frac{5x}{12} - y = 9 \\ x - \frac{3y}{4} = 15 \end{cases}$	5.	$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ 2x = \frac{5}{2}y \end{cases}$
3.	$\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ 3y - \frac{x}{14} = 26 \end{cases}$		

Resolución de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos variables y con incógnitas en los denominadores

Algoritmo

Se quitan los denominadores a través del mínimo común denominador, luego por medio del método de reducción se eliminan una de las incógnitas que se halle sola, luego por cancelación se eliminan la variable doble y se halla el resultado, sustituyendo en una de las ecuaciones primarias se halla el valor de la otra incógnita.

Ejemplos:

Resuelve las siguientes ecuaciones simultáneas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{x} + \frac{9}{y} = +2 \rightarrow \frac{10y+9x=2xy}{xy} \rightarrow 10y + 9x = 2xy \rightarrow 120y + 108x = 24xy \\ \frac{7}{x} - \frac{6}{y} = \frac{11}{2} \rightarrow \frac{14y-12x=11xy}{2xy} \rightarrow 14y - 12x = 11xy \rightarrow 126y - 108x = 99xy \\ 246y = 123xy \rightarrow 2 = x \rightarrow \frac{10}{2} + \frac{9}{y} = +2 \rightarrow \frac{10y+18=4y}{2y} \rightarrow 6y = -18 \rightarrow y = -3 \end{array} \right\}$$

la solución de la ecuación es el punto cuyas coordenadas son P(+2, -3)

Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{7}{3y} = 11 \rightarrow \frac{6y + 7x = 33y}{3xy} \rightarrow 6y + 7x = 33xy \rightarrow 60y + 70x = 330xy \\ \frac{3}{4x} + \frac{5}{2y} = 9 \rightarrow \frac{3y + 10x = 36xy}{4xy} \rightarrow 3y - 10x = 36xy \rightarrow 21y - 70x = -252xy \end{array} \right\}$$

$$39y = +78xy \rightarrow 39 = +78x \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} + \frac{7}{3y} = 11 \rightarrow 12y + 7 = 33y$$

$$12y - 33y = -7 \rightarrow -21y = -7 \rightarrow y = \frac{-7}{-21} \rightarrow y = +\frac{1}{3} \quad P\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{3}\right)$$

Ejercicios

1.	$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$	4.	$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{23}{12} \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 27 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 22 \end{cases}$	5.	$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{8}{y} = -23 \\ \frac{4}{x} + \frac{11}{y} = 50 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} \frac{2}{5x} - \frac{1}{3y} = -\frac{11}{45} \\ \frac{1}{10x} - \frac{3}{5y} = \frac{4}{5} \end{cases}$		

Ecuaciones simultáneas con tres incógnitas

Para poder resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con tres variables necesitamos tener tres ecuaciones, diferentes uno por cada una de las variables.

Método de eliminación

Este método se parece mucho al que estudiamos con el nombre de método de reducción en las ecuaciones simultáneas de dos variables.

Algoritmo del método

Se toman dos ecuaciones de las tres y se eliminan por suma y resta una de las variables, luego se toma la tercera ecuación con cualquier de las ecuaciones anteriores y por el mismo método se eliminan las misma variable, que se eliminó con las anteriores, con esto me quedan dos ecuaciones con dos incógnitas, que las puedo resolver por cualquiera de los métodos estudiados.

Con el valor obtenido de las dos variables anteriores, lo sustituyo en cualquiera de las ecuaciones originales y obtengo el valor de la tercera variable.

Ejemplos.

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \text{con 1 y 3} \begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow 4x + 2y = 8$$

Con la ecuaciones 2 y 3 $\rightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 7z = -9 \\ 21x - 14y + 7z = 14 \end{cases} \rightarrow 23x - 9y = 5$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \rightarrow 36x + 18y = 72 \\ 23x - 9y = 5 \rightarrow 46x - 18y = 10 \end{cases} \rightarrow 82x = 82 \rightarrow x = +1$$

$$4(+1) + 2y = 8 \rightarrow +2y = 8 \rightarrow 2y = +4 \rightarrow y = +2$$

$$+1 + 4(+2) - z = 6 \rightarrow +1 + 8 - z = +6 \rightarrow -z = +6 - 1 - 8 \rightarrow -z = -3 \rightarrow z = -3$$

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} z - 4 + \frac{6x - 19}{5} = -y \\ 10 - \frac{x - 2z}{8} = 2y - 1 \\ 4z + 3y = 3x - y \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5z - 20 + 6x - 19 = -5y \\ 80 - x + 2z = 16 - 8 \\ 4z + 3y = 3x - y \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} +6x + 5y + 5z = +39 \\ -x - 16y + 2z = -88 \\ -3x + 4y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

$$1 \ y \ 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 5y + 5z = 39 \\ -6x - 96y + 12z = -528 \end{array} \right\} \rightarrow -91y - 17z = -489$$

$$2 \ y \ 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} +3x + 48y - 6z = +264 \\ -3x + 4y + 4z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 52y - 2z = 264$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -91y + 17z = -489 \\ +52y - 2z = 264 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -182y + 34z = -978 \\ 884y - 34z = 4488 \end{array} \right\} \rightarrow 702y = 3510 \rightarrow y = \frac{3510}{702} = +5$$

$$52(5) - 2z = 264 \rightarrow 260 - 2z = 264 \rightarrow -2z = 264 - 260 \rightarrow -2z = +4 \rightarrow z = \frac{4}{-2} = -2$$

$$4(-2) + 3(+5) = 3x - 5 \rightarrow -8 + 15 = 3x - 5 \rightarrow -3x = -5 - 15 + 8 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{-3} = +4$$

Ejercicios

1.	$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ z + y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{array} \right\}$	4.	$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 1 \\ 6x - 2y - z = -14 \\ 3x + y - z = 1 \end{array} \right\}$
2.	$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = -12 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{array} \right\}$	5.	$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{array} \right\}$
3.	$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{array} \right\}$		

Método de gauss o de matriz aumentada

Es una matriz se puede sumar una fila con otra fila, multiplicar una fila por un número cualquiera y sumarla con otra fila, sin que cambie el valor del determinante.

Si una matriz tiene dos filas iguales el determinante de la matriz es cero y la ecuación aumentada que está representando es indefinida en sus valores

Una matriz se llama aumentada cuando, a la matriz cuadrada formada por los coeficientes de las variables, se le agrega una columna formada por los valores absolutos de las ecuaciones.

Algoritmo del método: el método consiste en crear una matriz triangular escalonada, para establecer el valor de las variables, quedando estos valores de la siguiente manera, la tercera fila nos proporciona el valor de la z, la segunda fila el valor de la y, la primera fila el valor de la x.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & x \\ 0 & 1 & c & y \\ 0 & 0 & d & z \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

Resolver la ecuación siguiente: $\begin{cases} 4x - 3y + 4z = 15 \\ 2x - 5y - 6z = -35 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Como el coeficiente de a x en la primera ecuación no es +1, cambiamos el orden de las ecuaciones y ponemos la tercera ecuación de primera y la primera de tercera quedando nuestro sistema de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} x + y - z = 1 \\ 2x - 5y - 6z = -35 \\ 4x - 3y + 4z = 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -6 & -35 \\ 4 & -3 & 4 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -37 \\ 0 & -7 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la primera fila por (-2) y la sumamos con la segunda fila, y luego multiplicamos la primera fila por (-4) y la sumamos con la tercera fila, con lo que queda la matriz anterior. Luego dividimos la segunda fila entre (-7) para construir un +1 y nos queda la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{37}{7} \\ 0 & -7 & 8 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{37}{7} \\ 0 & 0 & 12 & 48 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la segunda fila por (+7) y la sumamos con la tercera fila con lo que obtenemos la matriz triangular escalonada que estábamos buscando.

Con la tercera fila tenemos $12z = 48 \rightarrow z = \frac{48}{12} = +4$

Con el valor de z=4 y la segunda tenemos $y + \frac{4(4)}{7} = \frac{37}{7} \rightarrow y = \frac{37-16}{7} = \frac{21}{7} = 3$

Con los valores encontrados, sustituimos en la primera fila para encontrar el valor de x. $x + y - z = 1 \rightarrow x = 1 + 4 - 3 \rightarrow x = +2$

La solución de la ecuación es el punto tridimensional P (+2, +3, +4)

Resolver la ecuación $\begin{cases} 4x - 7y + 3z = -1 \\ 3x + 5y - 4z = 5 \\ 2x + 6y - 8z = -10 \end{cases}$

Como se puede apreciar, la ecuación no tiene unos por lo que debemos construirlos a través de la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 6 & -8 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 6 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Cambiamos el orden de la filas, la segunda pasa a ser la primera, la tercera pasa a ser la segunda y la primera para a ser la tercera. Luego le cambiamos el signo a la segunda fila y la sumamos con la primera fila con lo que formamos el uno que deseábamos.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 15 \\ 2 & 6 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 15 \\ 0 & 8 & -16 & -40 \\ 0 & -3 & -13 & -61 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -13 & -61 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -19 & -76 \end{bmatrix}$$

Luego multiplicamos la primera fila por (-2) y la sumamos con la segunda fila y luego multiplicamos la primera fila por (-4) y la sumamos con la tercera fila, para encontrar el uno que se necesita en la segunda fila y segunda columna, dividimos toda la segunda fila entre (-8) con lo que nos queda una matriz lista para formar la matriz escalonada que estábamos buscando.

Para encontrarla multiplicamos la segunda fila por (+3) y la sumamos con la tercera fila, con lo que completamos nuestro trabajo.

La tercera fila nos proporciona el valor de $-19z = -76 \rightarrow z = \frac{-76}{-19} = +4$

La segunda fila proporciona el valor de $y - 2z = -5 \rightarrow y = -5 \rightarrow y = 5 + 8 = 3$

La primera $x - y + 4z = 15 \rightarrow x = 15 + 3 - 16 = +2$

La respuesta a la ecuación es el punto tridimensional P (+2; +3; +4)

Ejercicios

1.	$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \\ 2x + 2y - z = 7 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 2y - z + 2x = 2 \\ 6x + 3z + 2y = 12 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 3z = -6 \end{cases}$	5.	$\begin{cases} x + 4y + 5z = 11 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x + y - 3z = -26 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + 6y + 8z = 5 \\ 4x + 9y + 4z = 4 \end{cases}$		

7. Trigonometría

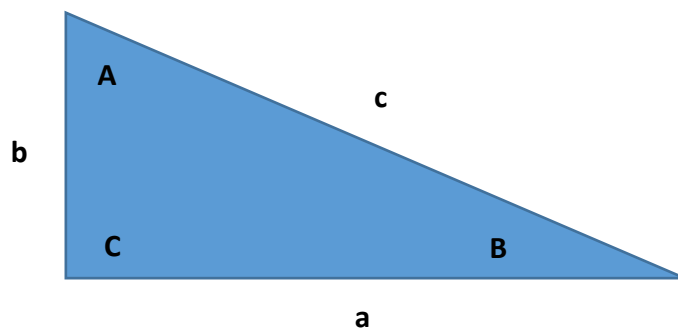
La palabra trigonometría proviene de tres palabras griegas que significaban: Tres, ángulos, y media.

Lo que claramente nos indica que se trata de un estudio dirigido a los triángulos, sus ángulos y la relación que estos guardan con sus lados.

Triángulo rectángulo

Es un triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, de 90° sexagesimales, es el ángulo C. este triángulo tiene propiedad de que es el único triángulo en el cual sus lados tienen nombres. Los lados perpendiculares entre si, se llaman catetos, y el lado largo recibe el nombre de hipotenusa.

Además, el triángulo cumple con el teorema de Pitágoras. La suma de los cuadros de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, siendo c la hipotenusa del triángulo y los catetos los lados a, b.



También este triángulo tiene la siguiente propiedad, sus ángulos agudos son complementario, es decir, que suman 90° $A+B = 90^\circ$

Además los triángulos con los mismos ángulos, son triángulos semejantes, y por consiguiente sus lados homólogos guardan una proporción constante.

8. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas con tres, el seno, el coseno y la tangente.

La función seno de un ángulo, es la razón geométrica existente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$\textit{seno de } A = \frac{a}{c}; \textit{seno de } B = \frac{b}{c}$$

La función coseno de un ángulo es la razón geométrica existente entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

$$\textit{coseno } A = \frac{b}{c}; \textit{coseno de } B = \frac{a}{c}$$

La función tangente de un ángulo es la razón geométrica existente entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al ángulo.

$$\textit{tangente } A = \frac{a}{b}; \textit{tangente } B = \frac{b}{a}$$

Existen las reciprocas de estas funciones que son las siguientes:

La reciproca del seno es la cosecante porque $(\textit{seno de } A) * (\textit{cosecante } A) = +1$

La reciproca del coseno es la secante porque $(\textit{coseno de } A) * (\textit{secante de } A) = +1$

La reciproca de la tangente es la cotangente porque: $(\textit{tangente de } A) * (\textit{cotangente de } A) = +1$

Funciones trigonométricas	Cofunciones trigonométricas
$\textit{seno de } A = \frac{a}{c}; \textit{seno de } B = \frac{b}{c}$	$\textit{cosecante de } A = \frac{c}{a}; \textit{cosecante de } B = \frac{c}{b}$
$\textit{coseno } A = \frac{b}{c}; \textit{coseno de } B = \frac{a}{c}$	$\textit{secante de } A = \frac{c}{b}; \textit{secante de } B = \frac{c}{a}$
$\textit{tangente } A = \frac{a}{b}; \textit{tangente } B = \frac{b}{a}$	$\textit{cotangente } A = \frac{b}{a}; \textit{cotangente } B = \frac{a}{b}$

Ejemplos: conocida una función encontrar las otras funciones, y las Cofunciones

$$\textit{seno de } A = \frac{3}{5} \rightarrow \textit{seno } A \frac{a}{c} \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \rightarrow b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \rightarrow b = 4$$

$$\textit{coseno } A = \frac{4}{5}; \textit{tangente } A = \frac{3}{4}; \textit{cosecante } A = \frac{5}{3}; \textit{cotangente } A = \frac{4}{3}; \textit{secante } A = \frac{5}{4}$$

$$\textit{Coseno de } B = \frac{5}{13} \rightarrow \textit{Coseno } B \frac{b}{c} \rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \rightarrow a = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} \rightarrow a = 12$$

$$\textit{Secante } B = \frac{13}{5}; \textit{tangente } B = \frac{5}{12}; \textit{Cotangente } B = \frac{12}{5}; \textit{Seno } B = \frac{12}{13}; \textit{cosecante } B = \frac{13}{12}$$

$$\text{Tangente de } M = \frac{8}{15} \rightarrow \text{Tangente } M = \frac{m}{n} \rightarrow p = \sqrt{m^2 - n^2} \rightarrow p = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} \rightarrow p = 17$$

$$\text{Cotangente } M = \frac{15}{8}; \text{ Seno } M = \frac{8}{17}; \text{ cosecante } M = \frac{17}{8}; \text{ Coseno } M = \frac{15}{17}; \text{ secante } M = \frac{17}{15}$$

Ejercicios

1.	$\text{seno } A = \frac{20}{29}$	4.	$\text{Cotangente } A = \frac{42}{40}$
2.	$\text{Coseno } A = \frac{16}{20}$	5.	$\text{Secante } A = \frac{27}{7}$
3.	$\text{Tangente } A = \frac{10}{24}$	6.	$\text{Cosecante } A = \frac{41}{9}$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo, consiste en hacer uso de los datos conocidos, para encontrar los elementos desconocidos del triángulo.

Normalmente los elementos que se consideran importantes de un triángulo son los tres lados y los tres ángulos.

Primer caso: conocidos los dos catetos. Encontrar la hipotenusa, los dos ángulos agudos, y la superficie.

Datos: $a = 18$; $b = 25$

Incógnitas: $C = \text{¿.¿}$; $A = \text{¿.¿}$; $B = \text{¿.¿}$; $S = \text{¿.¿}$

Formulas: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan A = \frac{a}{b}$; $\tan B = \frac{b}{a}$; $S = \frac{ab}{2}$

Operaciones:

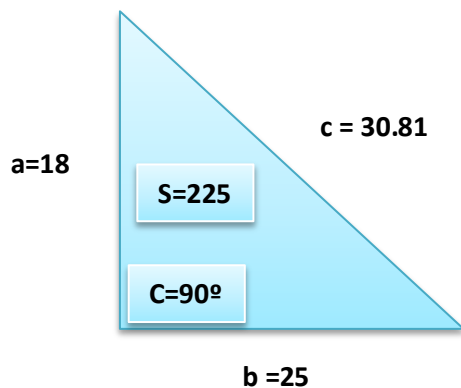
$$c = \sqrt{18^2 + 25^2} = \sqrt{324 + 625} = \sqrt{949} = 30.81$$

$$\tan A = \frac{18}{25} = 0.72 \rightarrow A = 35.754 \rightarrow 35^\circ 45' 14''$$

$$\tan B = \frac{25}{18} = 1.389 \rightarrow B = 54.246 \rightarrow 54^\circ 14' 46''$$

$$S = \frac{18 * 25}{2} = \frac{450}{2} = 225$$

/



Segundo caso: conocidos la hipotenusa y un cateto. Encontrar el otro cateto los dos ángulos agudos y la superficie.

Datos: $c = 38$; $a = 14$

Incógnitas: $b = \text{¿?}$; $A = \text{¿?}$; $B = \text{¿?}$; $S = \text{¿?}$

Formulas: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\text{sen } A = \frac{a}{c}$; $\text{cos } B = \frac{a}{c}$; $S = \frac{ab}{2}$

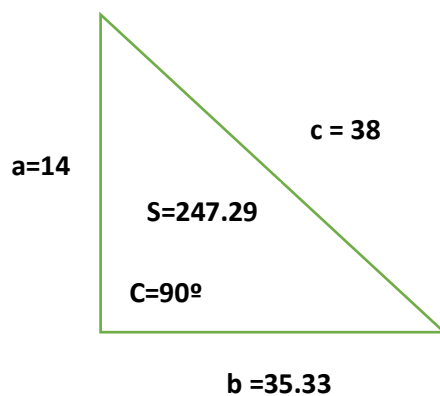
Operaciones:

$$b = \sqrt{38^2 - 14^2} = \sqrt{1444 - 196} = \sqrt{1248} = 35.33$$

$$\text{sen } A = \frac{14}{38} = 0.368 \rightarrow A = 21.618 \rightarrow 21^\circ 37' 06''$$

$$\text{cos } B = \frac{14}{38} = 0.368 \rightarrow B = 68.382 \rightarrow 68^\circ 22' 54''$$

$$S = \frac{14 * 35.33}{2} = \frac{494.62}{2} = 247.31$$



Tercer caso: conocidos la hipotenusa y uno de los ángulos agudos. Encontrar el otro ángulo agudo, los dos catetos y la superficie.

Datos: $c = 35$; $A = 53^\circ$

Incógnitas: $a = \text{¿?}$; $b = \text{¿?}$; $B = \text{¿?}$; $S = \text{¿?}$

Formulas: $B = 90^\circ - A$; $a = c \operatorname{sen} A$; $b = c \cos A$; $S = \frac{c^2 \operatorname{sen} 2A}{2}$

Operaciones:

$$B = 90 - 53 = 37^\circ$$

$$a = 35 \operatorname{sen} 53 = 27.952$$

$$b = 35 \cos 53 = 21.064$$

$$S = \frac{35^2 \operatorname{sen} 106}{4} = \frac{1177.546}{4} = 294.386$$

Cuarto caso: conocidos un cateto y uno de los ángulos agudos. Encontrar el otro ángulo agudo, la hipotenusa, el otro cateto y la superficie.

Primer subcaso 4

Datos: $a = 18$; $A = 48^\circ$

Incógnitas: $B = \text{¿?}$; $c = \text{¿?}$; $b = \text{¿?}$; $S = \text{¿?}$

Formulas: $B = 90^\circ - A$; $c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$; $b = \frac{a}{\tan A}$; $S = \frac{a^2}{2 \tan A}$

Operaciones:

$$B = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

$$c = \frac{18}{\operatorname{sen} 48} = \frac{18}{0.743} = 24.22$$

$$b = \frac{18}{\tan 48} = \frac{18}{1.111} = 16.20$$

$$S = \frac{18^2}{2 \tan 48} = \frac{324}{2.221} = 145.88$$

Segundo subcaso 4

Datos: $A = 59^\circ$; $b = 16$

Incógnitas: $B = \text{¿.¿?}$; $c = \text{¿.¿?}$; $a = \text{¿.¿?}$; $S = \text{¿.¿?}$

Formulas: $B = 90^\circ - A$; $c = \frac{b}{\cos A}$; $a = b \tan A$; $S = \frac{b^2 \tan A}{2}$

Operaciones:

$$B = 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$$

$$c = \frac{16}{\cos 59} = \frac{16}{0.515} = 31.07$$

$$a = 16 \tan 59^\circ = 16 * 1.664 = 26.63$$

$$S = \frac{16^2 \tan 59^\circ}{2} = \frac{256 * 1.664}{2} = \left(\frac{46.06}{2}\right) = 213.20$$

Resolución de triángulos oblicuángulos

Se llama triángulo oblicuángulo a cualquier triángulo, sea este acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

Ley de senos

En todo triángulo el cociente de dividir uno de sus lados entre el seno del ángulo opuesto a este, es una constante.

Ley de coseno

En todo triángulo uno cualquiera de sus lados es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos, menos dos veces el producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre estos dos lados.

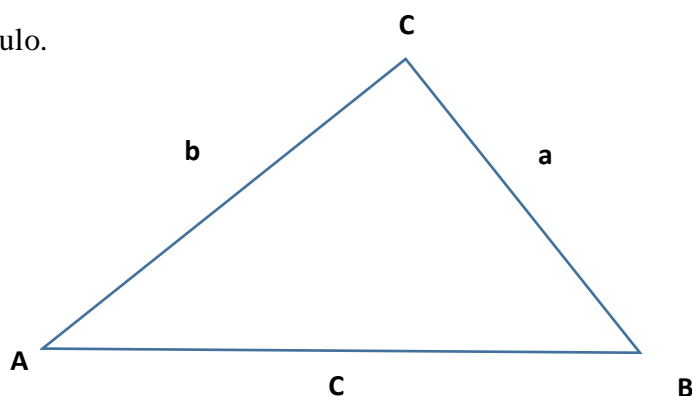
Esta ley tiene otra versión que es: en un triángulo cualquiera el coseno de uno de sus ángulos es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo menos el cuadrado del lado opuesto al ángulo, todo dividido entre dos veces el producto de los dos lados que forman el ángulo.

Ley de tangentes

El cociente de dividir la tangente de la semisuma de dos de los ángulos de un triángulo entre la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos es igual al cociente de dividir la suma de los lados opuestos entre la diferencia de estos mismos lados.

Fórmulas de las leyes:

Sea el siguiente triángulo.



$$\text{ley de senos} = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$$\text{ley de coseno} \left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \text{ coseno } A} \\ b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \text{ coseno } B} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \text{ coseno } C} \end{array} \right.$$

$$\text{ley de coseno} \left\{ \begin{array}{l} \text{Coseno } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \text{Coseno } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \text{Coseno } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{array} \right.$$

$$\text{ley de tangentes} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b} \\ \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+c}{a-c} \\ \frac{\tan \frac{1}{2}(B+C)}{\tan \frac{1}{2}(B-C)} = \frac{b+c}{b-c} \end{array} \right.$$

Resolución de triángulos oblicuángulos

Primer caso: conocidos los tres lados.

En este caso hay que tener en cuenta que para que haya un triángulo, se deben cumplir las siguientes condiciones:

La suma de dos de sus lados debe ser mayor que el tercer lado.

La diferencia entre cualquiera de sus lados deben ser menor que el tercer lado.

Sean $a=15\text{cm}$; $b=18\text{cm}$; $c=30\text{cm}$.

Encontrar el valor de sus ángulos y el valor del área del triángulo.

$$\text{Fórmulas} \left\{ \begin{array}{l} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{array} \right. ; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos A = \frac{18^2 + 30^2 - 15^2}{2 * 18 * 30} = \frac{324 + 900 - 225}{1080} = \frac{999}{1080} = 0.925 \rightarrow A = 22.33^\circ \\ \cos B = \frac{15^2 + 30^2 - 18^2}{2 * 15 * 30} = \frac{225 + 900 - 324}{900} = \frac{801}{900} = 0.890 \rightarrow B = 27.13^\circ \\ \cos C = \frac{15^2 + 18^2 - 30^2}{2 * 15 * 18} = \frac{225 + 324 - 900}{540} = \frac{-351}{540} = -0.650 \rightarrow C = 130.54^\circ \end{array} \right.$$

$$p = \frac{15 + 18 + 30}{2} = \frac{63}{2} = 31.5\text{cm}$$

$$S = \sqrt{31.5 * (31.5 - 15) * (31.5 - 18) * (31.5 - 30)} = \sqrt{31.5 * 16.5 * 13.5 * 1.5}$$

$$S = \sqrt{10524.9375}\text{cm}^2 = 102.591\text{ cm}$$

Bibliografía

Baldor, A. (2007) Algebra. Producciones cultura. México.

Editorial Educativa (s.f.) Matemáticas Tercero Básico. Guatemala

Aragón, M., Barahona, J., Camargo, L., Contreras, M., García, G., Leguizamón, C., Samper, C.,

Serrano, C., Zúñiga, S., y Zurita, N. (2015) Alfa por Competencias, Matemática para el

Ciclo básico del nivel medio 3. Guatemala.