



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

MODELO ESTÁNDAR Y MODELO MATEMÁTICO SOBRE LA OSCILACIÓN DE LOS NEUTRINOS

Jeffrey Paredes Molina

Asesorado por M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

Guatemala, julio de 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**MODELO ESTÁNDAR Y MODELO MATEMÁTICO
SOBRE LA OSCILACIÓN DE LOS NEUTRINOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

JEFFREY PAREDES MOLINA

ASESORADO POR M.SC. EDGAR ANIBAL CIFUENTES ANLÉU

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, JULIO DE 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
EXAMINADOR Lic. Hector Eduardo Perez Figueroa
EXAMINADOR Lic. Osmar Hernández



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



Ref. D..DTG. 001-2016
Guatemala 21 de julio de 2016

El Director de la Escuela de Ciencias Física y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura de Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **Modelo Estándar y Modelo Matemático sobre la Oscilación de los Neutrinos** presentado por el estudiante universitario **Jeffrey Paredes Molina**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MSc. Edgar Aníbal Cifuentes Anleu
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



/pec

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. Electrodinámica Cuántica	1
1.1. Ecuación de Dirac	1
1.1.1. Densidad de probabilidad y densidad de corriente	3
1.2. Forma covariante de la ecuación de Dirac	5
1.2.1. Propiedades de las matrices de Dirac	5
1.3. El spinor adjunto y la corriente covariante	6
1.4. Soluciones a la ecuación de Dirac	7
1.4.1. Partícula en reposo	8
1.4.2. Solución general para partículas libres	9
1.5. Helicidad	13
1.6. Carga conjugada	18
2. Interacción por Intercambio de Partículas	21
2.1. Primer y segundo orden en la teoría de perturbación	21
2.2. Diagramas de feynman	25
2.3. Cálculo de la matriz de elementos	25
2.4. Técnica de la traza	29
2.4.1. La suma de spin y el formalismo de la traza	31

3. Interacción Débil	37
3.1. Paridad	37
3.2. Conservación de la paridad	39
3.3. Estructura de la interacción débil	41
3.4. El propagador del bosón W	43
4. Oscilaciones de neutrinos	47
4.1. Estado propio de sabor y masa del neutrino	47
4.2. Oscilación del neutrino	49
4.3. La matriz PMNS	55
Appendices	58
A. Apéndice	59
B. Apéndice	65
CONCLUSIONES	69
BIBLIOGRAFÍA	71

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Los eigenestados de la helicidad para una partícula.	15
2.1. Las dos posibilidades del proceso $a + b \rightarrow c + d$	22
2.2. Diagrama de Feynman proceso $a + b \rightarrow c + d$	25
2.3. Diagrama de Feynman para el proceso QED $e^- + \tau^- \rightarrow e^- + \tau^-$	26
2.4. Reglas de Feynman para QED	28
2.5. Proceso de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^+$	29
3.1. Diagrama del proceso de scattering electro-quark.	40
3.2. Diagrama del proceso general de combinación lineal de vector y vector axial.	43
3.3. El diagrama de Feynman para la interacción débil y el límite más bajo de energía en el cual una interacción solo ocurre en un punto del espacio-tiempo.	44
4.1. Espectro de energía de la cadena pp precedida por el modelo estándar del Sol [4].	48
4.2. Interacción en términos de los eigenestados de masa.	49
4.3. Rotación de sabor para la familia de neutrinos (1,2).	50
4.4. Violación $\hat{C}\hat{P}$ en el decaimiento del pión.	55
A.1. Proceso visto desde el marco de referencia del centro de masa.	62
B.1. Diagrama de Feynman para el proceso $\bar{\nu}_\mu + d \rightarrow \mu^+ + d$	66

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Comportamiento de escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores, bajo la transformación de la paridad P.	41
3.2. Forma bilinear covariante invariante de Lorentz para el cuatro vector corriente.	42

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
γ	Matrices de Dirac
ψ	Spinor de Dirac
$\bar{\psi}$	Spinor adjunto
j^μ	Corriente covariante
A^μ	Campo electromagnético
\hat{C}	Operador de carga conjugada
\hat{h}	Operador de helicidad
LH	Left-handed
RH	Right-handed
σ_i	Matrices de Pauli
\mathcal{M}	Matriz de elementos
g	Constante de acoplo
q	Cuatro-momentum de la partícula virtual
$\epsilon_\mu^{(\lambda)}$	Estado de polarización
$g_{\mu\nu}$	Tensor metrico
α	Constante de acoplamiento eléctrica
σ	Sección eficaz
\hat{P}	Operador de Paridad
g_w	Constante de acoplamiento débil
G_F	Constante de Fermi
U	Matriz unitaria PMNS
ϕ_i	Fase de una onda plana
$ \psi\rangle$	Vector <i>ket</i>
$\langle\psi $	Funcional <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	<i>Braket</i>

OBJETIVOS

General

Aplicar mecanismos teóricos que logren explicar interacciones entre partículas con spin-medio.

Específicos

1. Establecer las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica.
2. Describir la estructura de la interacción débil, aplicada a interacciones de leptones cargados y neutrinos.
3. Presentar una formulación teórica que explique la oscilación del neutrino.

INTRODUCCIÓN

El modelo estándar explica con precisión muchos fenómenos que suceden en la naturaleza. Hasta la fecha, casi todas las pruebas experimentales de las tres fuerzas descritas por el modelo estándar están de acuerdo con sus predicciones. No obstante, este modelo posee inconsistencias teóricas. Una de ellas predice que ciertas partículas no poseen masa, pero experimentos recientes han encontrado que estas sí la poseen. Ejemplo de esto son los neutrinos.

Este trabajo se compone de cuatro capítulos. En el primero se introduce a la ecuación de Dirac, la cual es una formulación relativista de la mecánica cuántica que describe los fermiones fundamentales del modelo estándar. En el segundo se usan los diagramas de Feynman para estudiar las interacciones entre partículas. El tercer capítulo describe la estructura de la interacción débil. Finalmente, el último capítulo estudia del fenómeno mediante el cual los neutrinos se someten a oscilaciones de sus sabores al propagarse largas distancias.

1. Electrodinámica Cuántica

1.1. Ecuación de Dirac

Se define la partícula libre como aquella que no está sometida a ninguna fuerza. Cuyo hamiltoniano relativista provisto por la mecánica clásica [5] está dado por

$$\left\{ p_0 - \sqrt{m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \right\} \psi = 0 \quad (1.1)$$

los momenta son interpretados como operadores $p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. El término mc^2 corresponde a la energía en reposo de la partícula, la cual no tiene influencia en las ecuaciones de movimiento.

La ecuación 1.1 toma en cuenta la relación entre la energía y momentum requeridos por la relatividad. Sin embargo, esta ecuación es aun insatisfactoria, puesto que no es simétrica entre p_0 y los \mathbf{p}_i

$$\{ p_0^2 - m^2 c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \} \psi = 0 \quad (1.2)$$

La ecuación 1.2 es invariante y puede ser tomada convenientemente como base de una teoría relativista. Como puede notarse, la ecuación 1.2 no es completamente equivalente a la ecuación 1.1. Esto debido a que toda solución de la ecuación 1.1 es solución de la ecuación 1.2, pero lo inverso no es cierto. Solo los valores positivos p_0 para la ecuación 1.2 son también soluciones de la ecuación 1.1 [5].

Por ello se debe buscar una ecuación de onda que sea lineal en p_0 y que sea equivalente a la ecuación 1.2

$$\{ p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta \} \psi = 0 \quad (1.3)$$

Las soluciones de la ecuación 1.3 representan partículas relativistas, que deben cumplir con la relación energía-momentum. Las condiciones que deben ser satisfechas

por α y β se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} & \{p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta\} \cdot \{p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta\} \psi = 0 \\ & \left\{ p_0^2 + \sum_{1,2,3} [\alpha_1^2 p_1^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1^2 p_2^2 + (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1] - \beta^2 \right\} \psi = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

el símbolo $\sum_{1,2,3}$ se refiere a la permutación cíclica de los sufijos 1, 2, 3. Para satisfacer la ecuación 1.2, α y β deben completar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= 1 & ; & & \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 &= 0 \\ \beta^2 &= m^2 c^2 & ; & & \alpha_1 \beta + \beta \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

si se reescribe a β como

$$\beta = \alpha_m m c$$

junto con las relaciones obtenidas de las permutaciones 1, 2, 3 pueden ser resumidas en una.

$$\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a = 2\delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 3 \text{ o } m) \quad (1.5)$$

La relación de anticonmutación no puede ser satisfecha si α_i y β son números normales. En ese caso, los únicos objetos matemático que pueden cumplir la relación de anticonmutación son las matrices.

Estas deben tener propiedades algebraicas similares a las matrices de Pauli. Para ello es necesario un conjunto de cuatro matrices que cumplan con la relación de anticonmutación. No obstante, si se mantiene la representación de 2×2 no puede obtenerse una representación con más de tres matrices que anticonmuten. Así, se debe tener una representación de 4×4 para obtener la representación para las cuatro matrices α_i que cumplan con la relación de anticonmutación.

Es conveniente expresar las matrices en términos de las matrices de Pauli, además de agregar un segundo conjunto de tres matrices cuyo cuadrado sea la matriz unitaria. Este debe ser independiente y anticonmutar con las matrices de Pauli. Se construyen como un producto directo de las matrices de Pauli y la matriz unitaria

[5]

$$\sigma_{i,Dirac} = I \otimes \sigma_{i,Pauli} \quad (1.6)$$

$$\rho_i = \sigma_{i,Pauli} \otimes I \quad (1.7)$$

Se pueden tomar cuatro matrices entre otras posibilidades

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1 \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3 \quad \alpha_m = \rho_3 \quad (1.8)$$

Ya que se pudo obtener una representación para los factores α_i y β , estas tienen ciertas propiedades: dimensión par y traza cero. Así, la función de onda está forzada a tener cuatro grados de libertad [9].

1.1.1. Densidad de probabilidad y densidad de corriente

Se deben definir dos cantidades físicas importantes: la densidad de probabilidad y la densidad de corriente. Reemplazando los operadores de momentum y energía en la ecuación 1.3

$$p \rightarrow -i\nabla \quad ; \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$$

Por lo tanto, la ecuación de Dirac

$$-i\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + m\beta\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.9)$$

el conjugado Hermitiano de la ecuación de Dirac

$$\left[-i\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + m\beta\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]^\dagger$$

Se debe recordar que α y β son matrices y que ψ es un vector columna de 4 componentes

$$i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x^\dagger + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \alpha_y^\dagger + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \alpha_z^\dagger + m\psi^\dagger \beta^\dagger = -i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \quad (1.10)$$

Se multiplica por la izquierda ψ^\dagger a la ecuación 1.9 y por la derecha ψ a la ecuación 1.10. Después se suman las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
i \left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi \right) = & - i \left(\psi^\dagger \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x \psi \right) \\
& - i \left(\psi^\dagger \alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \alpha_y \psi \right) \\
& - i \left(\psi^\dagger \alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \alpha_z \psi \right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

La ecuación 1.11 puede ser simplificada si

$$\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t} \quad \vee \quad \psi^\dagger \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x \psi = \frac{\partial(\psi^\dagger \alpha_x \psi)}{\partial x}$$

Reescribiendo la ecuación 1.11.

$$\nabla \cdot (\psi^\dagger \alpha \psi) + \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = 0 \tag{1.12}$$

si se asume que la partícula no decae o interacciona, la probabilidad total del sistema debe de ser constante. Esta conservación de la probabilidad puede ser expresada en términos de una ecuación de continuidad [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$

al comparar la ecuación 1.12 y la ecuación de continuidad, se identifican la densidad de probabilidad y la probabilidad de corriente para las soluciones de la ecuación de Dirac como

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad \vee \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger \alpha \psi \tag{1.14}$$

al escribir la densidad de probabilidad en términos de las cuatro componentes del spinor de Dirac es

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

la densidad de probabilidad en la ecuación 1.14 tiene valores positivos para todas las soluciones de la ecuación de Dirac.

1.2. Forma covariante de la ecuación de Dirac

La representación de la ecuación de Dirac hasta ahora es en términos de α y β , la cual posee una conexión natural con el spin [9]. Lo siguiente es representar a la ecuación de Dirac de forma tal que sea invariante ante las transformaciones de Lorentz. La forma covariante es alcanzada multiplicando la ecuación de Dirac 1.3 por β

$$i\beta\alpha_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\beta\alpha_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\beta\alpha_z \frac{\partial\psi}{\partial z} + i\beta \frac{\partial\psi}{\partial t} - m\beta^2\psi = 0 \quad (1.15)$$

De donde se definen las cuatro matrices γ de Dirac

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^1 = \beta\alpha_x \quad \gamma^2 = \beta\alpha_y \quad \gamma^3 = \beta\alpha_z$$

usando la propiedad que $\beta^2 = I$, la ecuación 1.15 se escribe como

$$i\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial\psi}{\partial z} - m\psi = 0 \quad (1.16)$$

Por lo tanto, la ecuación de Dirac expresada en su forma covariante es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.17)$$

Las matrices γ de Dirac no son cuatro vectores sino matrices constantes que son invariante ante las transformaciones de Lorentz.

1.2.1. Propiedades de las matrices de Dirac

Las propiedades de las matrices γ pueden ser obtenidas de las propiedades de las matrices α y β [9]

$$(\gamma^k)^2 = \beta\alpha_k\beta\alpha_k = -\alpha_k\beta\beta\alpha_k = -I$$

donde la convención usada será el índice $k = 1, 2$ o 3

$$(\gamma^0)^2 = \beta\beta = I$$

Se multiplica β por la izquierda y por la derecha en la ecuación 1.5, se obtendrá la relación de anticonmutación para la parte espacial

$$\begin{aligned}(\beta\alpha_i)(\alpha_j\beta) + (\beta\alpha_j)(\alpha_i\beta) &= 2\delta_{ij}\beta\beta \\ -\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i &= 2\delta_{ij} \\ \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i &= -2\delta_{ij}\end{aligned}$$

la parte temporal se logra multiplicando a la ecuación 1.5 por β

$$\begin{aligned}\alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \\ \beta(\alpha_i\beta) + (\beta\alpha_i)\beta &= 0 \\ \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, las relaciones de anticonmutación cumplen con ¹

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Las matrices α y β son Hermitianas ². En este sentido, la hermiticidad de las matrices gamma debe ser comprobada de manera similar

$$(\gamma^i)^\dagger = \alpha^\dagger\beta^\dagger = \alpha\beta = -\beta\alpha = -\gamma^i$$

Con esto se demuestra que para los componentes espaciales son antihermitianos

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \vee \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \quad (1.19)$$

Con las ecuaciones 1.18 y 1.19 se ha definido toda el álgebra de las matrices γ , que es suficiente para las soluciones de la ecuación de Dirac.

1.3. El spinor adjunto y la corriente covariante

Como se expuso anteriormente la densidad de probabilidad y la probabilidad de corriente para una función de onda satisfacen la ecuación de Dirac, estas dos probabilidades se pueden escribir de forma compacta. Se define el spinor adjunto como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

¹En un espacio Euclidiano $g_{ij} = \delta_{ij}$

² $A^\dagger = A$

la representación del spinor adjunto es

$$\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

Ahora para poder escribir la forma compacta de las dos probabilidades se debe escribir el adjunto hermítico de la ecuación 1.17 como

$$\bar{\psi} (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) = 0 \quad (1.20)$$

donde la derivada opera sobre la izquierda. Se multiplica $\bar{\psi}$ por la izquierda a la ecuación 1.17 y ψ por la derecha a la ecuación 1.20, se suman y se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\psi} (i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi &= 0 \\ \bar{\psi} (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \psi &= 0 \\ \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \psi) + (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu) \psi &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma compacta es

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.21)$$

esta es la forma invariante de Lorentz de un producto escalar. Siendo esta la cuatro divergencia³ con respecto al cuatro vector de corriente

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

La definición del spinor adjunto permite escribir el cuatro vector corriente j^μ como

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.22)$$

1.4. Soluciones a la ecuación de Dirac

Se debe proponer una solución para la ecuación de Dirac, que sea la forma de la función de onda de las partículas con spin-1/2 [3]. La solución propuesta para una partícula libre es una onda plana

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(E, \mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad (1.23)$$

³ $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$

donde $u(E, \mathbf{p})$ es un cuatro componente del spinor de Dirac y satisface la ecuación de Dirac. El spinor $u(E, \mathbf{p})$ es una función de energía y momentum de la partícula

$$\partial_0\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} = -iE\psi, \quad \partial_1\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = ip_x\psi, \quad \partial_2\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = ip_y\psi, \quad \partial_3\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = ip_z\psi$$

substituyendo en la ecuación de Dirac

$$(\gamma^0 E - \gamma^1 p_x - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z - m) u(E, \mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} = 0$$

Por lo tanto, el spinor $u(E, \mathbf{p})$ satisface

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0 \tag{1.24}$$

Esta es la ecuación de Dirac de la partícula libre.

1.4.1. Partícula en reposo

El término de momentum desaparece en una partícula en reposo, entonces la función de onda

$$\psi = u(E, 0) e^{-iEt}$$

Así, la ecuación de Dirac queda reducida

$$E\gamma^0 u = mu$$

se expande

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

expresa una ecuación de eigenvalores, la cual admite cuatro soluciones ortogonales independientes que son

$$u_1(E, 0) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_2(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

las dos soluciones con eigenvalores de energía positiva son $E = m$

$$u_3(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_4(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

las dos soluciones con eigenvalores de energía negativa son $E = -m$. Estos 4 spinors son estados del operador \hat{S}_z , por lo tanto cada uno representa un estado diferente de spin. Las soluciones a la ecuación de Dirac para una partícula en reposo, incluyen dependencia del tiempo

$$\begin{aligned} \psi_1(E, 0) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} ; & \psi_2(E, 0) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \\ \psi_3(E, 0) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} ; & \psi_4(E, 0) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.4.2. Solución general para partículas libres

La partícula se encuentra en movimiento y se procede a resolver la ecuación de Dirac para una onda plana

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] u = 0 \quad (1.28)$$

desarrollando el segundo término de la ecuación 1.28

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{p}^k = \boldsymbol{\gamma}^1 p_x + \boldsymbol{\gamma}^2 p_y + \boldsymbol{\gamma}^3 p_z &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \\ -p_z & -p_x + ip_y & 0 & 0 \\ -p_x - ip_y & p_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Para facilitar la notación de las matrices γ , se usa la representación de matriz en bloque de 2×2 . Así el spinor se puede escribir en representación de dos vectores columnas de dos componentes, u_A y u_B

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

al trabajar la ecuación 1.28 queda expresado como

$$\begin{pmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (1.30)$$

las ecuaciones para u_A y u_B

$$u_A = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} u_B \quad (1.31)$$

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} u_A \quad (1.32)$$

se sustituye la ecuación 1.32 en la ecuación 1.31

$$u_A = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E^2 - m^2} u_A$$

la representación de $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ es

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2 I$$

Así, la ecuación para u_A

$$u_A = \frac{p^2}{E^2 - m^2} u_A$$

$$E^2 - m^2 = p^2$$

esta satisface la ecuación de Dirac y obedece la relación de energía-momentum de la relatividad especial. Las soluciones propuesta para u_A son:

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

se encuentra, las dos soluciones para las partículas libres u_1 y u_2

$$u_1 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad \vee \quad u_2 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Se debe notar que la elección de las formas de u_A es análoga a la notación que se usa para los spinores de Pauli. Si se eligen dos formas ortogonales para u_A , esta será igualmente válida. Las dos soluciones de la ecuación de Dirac restantes se hallan

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vee \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

la solución para u_3 y u_4 son:

$$u_3 = \frac{N}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vee \quad u_4 = \frac{N}{E-m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Las cuatro soluciones para una partícula libre de la ecuación de Dirac son:

$$u_1 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

$$u_3 = \frac{N}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad u_4 = \frac{N}{E-m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los spinores u_1 y u_2 son soluciones con energía positiva $E = +|\sqrt{p^2 - m^2}|$. Así, u_3 y u_4 son soluciones con energía negativa $E = -|\sqrt{p^2 - m^2}|$. Estos spinores representan estados de antipartículas⁴ [3].

Para evitar posibles confusiones es conveniente trabajar con spinores de anti-

⁴Para interpretación de las antipartículas, existen dos interpretaciones el mar de Dirac y la otra es la interpretación de Feynman-Stückelberg, esta última será la interpretación que se usará de ahora en adelante.

partículas en términos de momentum y energía física, siguiendo la interpretación Feynman-Stückelberg. La energía negativa de los spinores de las partículas u_3 y u_4 puede ser escrita con energía positiva de los spinores de la antipartícula, v_1 y v_2

$$\begin{aligned} v_1(E, \mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} &= u_4(-E, -\mathbf{p})e^{i[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-(-E)t]} \\ v_2(E, \mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} &= u_3(-E, -\mathbf{p})e^{i[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-(-E)t]} \end{aligned}$$

Se propone la solución a la ecuación de Dirac para la antipartícula

$$\psi(\mathbf{x}, t) = v(E, \mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \quad (1.38)$$

substituyendo la ecuación de onda 1.38 en la ecuación 1.17, se obtiene:

$$\begin{aligned} (-\gamma^0 E + \gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z - m) v &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu + m) v &= 0. \end{aligned}$$

esta es la ecuación de Dirac en el espacio de momentum para el espinor v . Se procede como antes escribiendo

$$v = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix}$$

dando un par de ecuaciones

$$v_A = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} v_B \quad y \quad v_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} v_A$$

proporciona las soluciones

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{N}{E + m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_2 &= \frac{N}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v_3 &= \frac{N}{E - m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, & y \quad v_4 &= \frac{N}{E - m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Como anteriormente se ha identificado $E = +|\sqrt{p^2 - m^2}|$ son los spinores v_1 y v_2 , las energías negativas $E = -|\sqrt{p^2 - m^2}|$ son los spinores v_3 y v_4 . Se tiene ocho

soluciones para la ecuación de Dirac. De estas ocho soluciones solamente 4 pueden ser linealmente independientes. Para trabajar se usan las cuatro soluciones con energía positiva de las partículas/antipartículas:

soluciones para partículas

$$\psi_i = u_i e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}$$

$$u_1 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

soluciones para antipartículas

$$\psi_i = v_i e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}$$

$$v_1 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{N}{E+m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Es conveniente normalizar estos spinores, usando la convención $u^\dagger u = 2E$ partículas por unidad de volumen⁵, entonces

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= |N|^2 \left(1 + \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \\ 2E &= \frac{2E}{E+m} |N|^2 \\ |N| &= \sqrt{E+m} \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.5. Helicidad

En general u_1, u_2, v_1 y v_2 no son estados propios del spin, si se define la matriz de spin para las partículas de Dirac como

$$\hat{\mathbf{S}}_z = \frac{1}{2} \Sigma_z \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

si el movimiento de la partícula es en dirección \hat{z} , entonces u_1, u_2, v_1 y v_2 son estados propios de S_z . Sin embargo, el spin no conmuta con el hamiltoniano $[\hat{H}_D, \hat{S}_z] \neq 0$

⁵Existen diferentes convenciones $u^\dagger u = 2E$ (Halzen y Martin), $u^\dagger u = |E|/mc^2$ (Bjorken y Drell), $u^\dagger u = 1$ (Bogoliubov y Shirkov).

por este motivo es imposible construir spinores que al mismo tiempo sean estados propios del spin \hat{S} y del hamiltoniano \hat{H}_D . Se introduce el concepto de helicidad el cual es una proyección del Spin sobre la dirección del movimiento de la partícula. La helicidad \hat{h} de una partícula se define como el componente normalizado de su spin a lo largo de su movimiento [9]

$$\hat{h} = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \quad (1.42)$$

$$\hat{h} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{2p} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

se demuestra que la helicidad conmuta con el hamiltoniano

$$\begin{aligned} [H_D, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] &= [\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] \\ &= [\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] + [\beta m, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}] \\ &= [\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z, \Sigma_x p_x + \Sigma_y p_y + \Sigma_z p_z] = 0 \end{aligned}$$

Los eigenestados simultaneos del hamiltoniano para la partícula libre y el operador de helicidad son soluciones a la ecuación de Dirac, estos deben satisfacer la ecuación para los eigenvalores

$$\hat{h}u = \lambda u$$

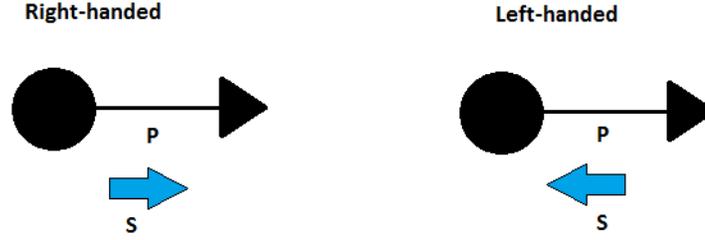
$$\frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

los vectores u_A y u_B son vectores columna de dos componentes

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_A = 2p\lambda u_A \quad (1.44)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_B = 2p\lambda u_B \quad (1.45)$$

Figura 1.1. Los eigenestados de la helicidad para una partícula.



Para obtener los eigenvalores se multiplica la ecuación 1.44 por $\sigma \cdot p$, recordando que $(\sigma \cdot p)^2 = p^2$

$$\begin{aligned}
 (\sigma \cdot p)^2 u_A &= 2\lambda p (\sigma \cdot p) u_A \\
 p^2 u_A &= 4\lambda^2 p^2 u_A \\
 (p^2 - 4\lambda^2 p^2) u_A &= 0 \\
 p^2 - 4\lambda^2 p^2 &= 0 \\
 \lambda &= \pm \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

esto significa que las dos posibles estados de helicidad para un fermion $h = +\frac{1}{2}$, llamado right-handed donde el spin es alineado en la misma dirección del momentum, ó $h = -\frac{1}{2}$ llamado left-handed donde el spin es alineado en la dirección opuesta del momentum.

Con esto surge un problema, la helicidad no es un invariante de Lorentz para una partícula con masa, ya que es posible encontrar un marco inercial en que la dirección de la partícula sea opuesta. La única manera que esto sea un invariante de Lorentz es en una partícula sin masa [3].

Ahora se deben encontrar los eigenestados de la helicidad que también son eigenestados de la ecuación de Dirac.

$$(\sigma \cdot p) u_A = (E + m) u_B$$

sustituyendo en la ecuación 1.44

$$u_B = 2\lambda \left(\frac{p}{E + m} \right) u_A \quad (1.46)$$

Para resolver la ecuación 1.44 se expresa a los estados de helicidad en coordenadas

esféricas:

$$\mathbf{p} = (p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$$

reescribiendo el operador de helicidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2p}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) &= \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} p \cos \theta & p(\sin \theta \cos \phi - i \sin \theta \sin \phi) \\ p(\sin \theta \cos \phi + i \sin \theta \sin \phi) & -p \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

usando la forma de Euler $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$

$$\frac{1}{2p}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

se escribe las componentes de u_A como

$$\begin{aligned} u_A &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 2\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta e^{-i\phi} &= 2\lambda a \\ a \sin \theta e^{i\phi} - b \cos \theta &= 2\lambda b \end{aligned}$$

si se despeja para el radio de $\frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \sin \theta e^{-i\phi} &= 2\lambda - \cos \theta \\ \frac{b}{a} &= \frac{2\lambda - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi} \end{aligned}$$

para encontrar el eigenestado right-handed con eigenvalor $\lambda = 1/2$

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi}$$

usando las siguiente identidades

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{b}{a} &= e^{i\phi} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

se encuentra el eigenestado left-handed con eigenvalor $\lambda = -1/2$

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{-1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi} \\ \frac{b}{a} &= -e^{i\phi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

Se escribe el spinor de la helicidad right-handed y left-handed, denotado por u_{\uparrow} y u_{\downarrow} .

Para los estados RH (right-handed), $a = \cos \frac{\theta}{2}$ y $b = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}$ y los estados LH (left-handed) $a = -\sin \frac{\theta}{2}$ y $b = e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}$

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m}c \\ \frac{p}{E+m}se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \vee \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ \frac{p}{E+m}s \\ -\frac{p}{E+m}ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Los spinores estan normalizados a $2E$ partículas por unidad de volumen, $N = \sqrt{E+m}$. Los terminos $s = \sin \frac{\theta}{2}$ y $c = \cos \frac{\theta}{2}$. Una característica de la antipartícula es $\hat{\mathbf{S}}(v) = -\hat{\mathbf{S}}$, por lo tanto para la helicidad $h = +1/2$ el estado de la antipartícula

$$\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{2p} \right) v_{\uparrow} = -\frac{1}{2} v_{\uparrow}$$

Entonces los spinores normalizados de las antipartículas son

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} s \\ -\frac{p}{E+m} c e^{i\phi} \\ -s \\ c e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \vee \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} c \\ \frac{p}{E+m} s e^{i\phi} \\ c \\ s e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

1.6. Carga conjugada

El efecto de esta conjugación es reemplazar la partícula con su correspondiente antipartícula y vice versa. El operador carga conjugada cambia el signo de todos los números cuánticos internos, los únicos números cuánticos que deja este intactos es la masa, energía, momentum y spin [3].

Se debe encontrar ahora la representación del operador de carga conjugada. La fuerza de Lorentz:

$$F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

reescribiendo los campos con sus potenciales $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$F = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + v \times \nabla \times \mathbf{A}\right)$$

usando la identidad $v \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ F &= q \left[-\nabla(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} (\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \\ F &= -\nabla U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v} \\ -\nabla U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v} &= q \left[-\nabla(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} (\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right] \\ U &= q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.49)$$

El movimiento de la partícula cargada en un campo electromagnético $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ se encuentra con las ecuaciones canónicas $-p = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}$

$$E \rightarrow E - q\phi \quad ; \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (1.50)$$

se escribe en notación de cuatro-vector

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu \quad (1.51)$$

se reemplaza la energía y momentum por los operadores $E = \frac{i\partial}{\partial t}$ y $\mathbf{p} = -i\nabla$

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu \quad (1.52)$$

se sustituye en la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\ \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + im\psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Se busca una manera de cambiar la ecuación de Dirac, tal que las soluciones de energías positivas y negativas sean intercambiables mientras que la forma de la ecuación de Dirac se mantenga. El complejo conjugado de la ecuación 1.53 está dado por

$$(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^* - im\psi^* = 0 \quad (1.54)$$

se multiplica por la izquierda $-i\gamma^2$

$$-i\gamma^2(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^* + im - i\gamma^2\psi^* = 0 \quad (1.55)$$

la matriz $i\gamma^2$ es hermitico y unitario, por consiguiente $UU^* = I$, $(i\gamma^2)^* = i\gamma^2$

$$\begin{aligned} -i\gamma^2(\gamma^\mu)^*i\gamma^2(i\gamma^2)^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi^* + imi\gamma^2\psi^* &= 0 \\ \gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)i\gamma^2\psi^* + imi\gamma^2\psi^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

se define a ψ'

$$\psi' = i\gamma^2\psi^*$$

entonces escribiendo la ecuación 1.56

$$\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi' + im\psi' = 0 \quad (1.57)$$

Por lo tanto, ψ' es una función de onda que describe una partícula con la misma masa que la partícula original pero con carga opuesta; se puede definir a ψ' como la función de onda que describe a la antipartícula. Entonces en la representación de

Dirac-Pauli, del operador carga conjugada \hat{C} .

$$\psi' = \hat{C}\psi = i\gamma^2\psi^* \quad (1.58)$$

Para confirmar el efecto que tiene el operador carga conjugada sobre el spinor de una partícula

$$\begin{aligned} \psi' &= \hat{C}\psi = i\gamma^2\psi^* = i\gamma^2 u_1^* e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \\ i\gamma^2 u_1^* &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}^* \\ \psi' &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Como se observa este es el spinor de la antipartícula v_1 .

2. Interacción por Intercambio de Partículas

En QFT proponen que la interacción entre partículas es mediado por el intercambio de partículas, a causa de esto la fuerza entre partículas es el resultado de la transferencia del momentum de las partículas mediadoras.

El enfoque matemático completo sobre el cálculo se logra usando la teoría cuántica de campos. Sin embargo, se puede tener el mismo resultado usando la teoría de perturbación en mecánica cuántica relativista.

2.1. Primer y segundo orden en la teoría de perturbación

Se considera la interacción $a + b \rightarrow c + d$ que ocurre por el intercambio de una partícula X. Examinando todas las posibilidades para esta interacción, pueden existir dos posibilidades en un diagrama espacio-tiempo para esta interacción como se muestra en la figura 2.1.

Para la primera posibilidad de interacción, se define el estado inicial $|i\rangle = a + b$, el estado intermedio $|j\rangle = c + X + b$, el estado final $|f\rangle = c + d$. Obteniendo así la matriz de transición [1]

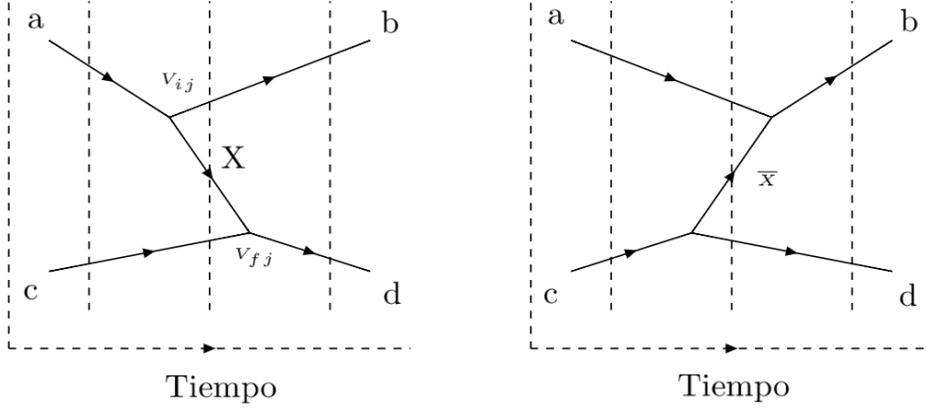
$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle d|V|X+b\rangle \langle X+c|V|a\rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)} \quad (2.1)$$

La normalización de una función de onda por unidad de volumen¹ solamente es valida para el marco de referencia al cual esta pertenece, por lo tanto no es un invariante de Lorentz [9].

La función de onda normalizada por unidad de volumen en la mecánica cuántica

¹Es usual adoptar un esquema donde cada onda plana está normalizada a una partícula en un volumen cúbico de lado a.

Figura 2.1. Las dos posibilidades del proceso $a + b \rightarrow c + d$



no relativista es

$$\int_V \psi^* \psi d^3 \mathbf{x} = 1$$

Se normaliza la función de onda de tal manera que esta sea un invariante de Lorentz, esto se logra normalizando la función a $2E$ partículas por unidad de volumen [9]

$$\int_V \psi'^* \psi' d^3 \mathbf{x} = 2E$$

entonces la representación de ψ' es

$$\begin{aligned} \psi' &= L\psi \\ \int_V L\psi^* L\psi d^3 \mathbf{x} &= 2E \\ L^2 \int_V \psi^* \psi d^3 \mathbf{x} &= 2E \\ \int_V \psi^* \psi d^3 \mathbf{x} &= 1 \\ L^2 &= 2E \\ L &= \sqrt{2E} \end{aligned} \tag{2.2}$$

La función de onda que se usa en la matriz de transición debe de ser un invariante ante las transformaciones de Lorentz, para un proceso general $a + b + \dots \rightarrow 1 + 2 + \dots$ se define

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots | \hat{H}' | \psi'_a \psi'_b \dots \rangle \tag{2.3}$$

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \cdots | \hat{H}' | \psi'_a \psi'_b \cdots \rangle = \sqrt{2E_1 \cdot 2E_2 \cdots 2E_a \cdot 2E_b \cdots} T_{fi} \quad (2.4)$$

La matriz de transición no es un invariante de Lorentz. La matriz de elementos V_{ji} es relacionado a la matriz de transición [9]

$$V_{ij} = M_{ij} \prod_k (2E_k)^{-1/2}$$

el índice corre sobre las energías de las partículas involucradas

$$V_{ij} = \langle c + X | V | a \rangle = \frac{M_{a \rightarrow c+X}}{\sqrt{2E_a 2E_c 2E_X}}$$

La cantidad más simple que sea invariante de Lorentz es un escalar, entonces la matriz elemento es $M_{a \rightarrow c+X} = g_a$

$$V_{ij} = \langle c + X | V | a \rangle = \frac{g_a}{\sqrt{2E_a 2E_c 2E_X}}$$

la constante de acoplamiento g_a es una medición de la fuerza de interacción escalar en el vértice $a \rightarrow c + X$. Similar para el otro vértice

$$V_{fj} = \langle d | V | X + b \rangle = \frac{g_b}{\sqrt{2E_b 2E_d 2E_X}}$$

se sustituye los valores en la ecuación 2.1.

$$\begin{aligned} T_{fi}^{ab} &= \frac{\langle d | V | X + b \rangle \langle X + c | V | a \rangle}{(E_a + E_b - (E_c + E_X + E_b))} \\ &= \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_a 2E_b 2E_c 2E_d}} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

la matriz invariante de Lorentz para el proceso $a + b \rightarrow c + d$.

$$\begin{aligned} M_{fi}^{ab} &= \sqrt{2E_a 2E_b 2E_c 2E_d} T_{fi}^{ab} \\ M_{fi}^{ab} &= \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se debe considerar el otro posible proceso para la interacción $a + b \rightarrow c + d$ representado en la figura 2.1. Repitiendo los pasos realizados para llegar a la ecuación

2.6. La matriz elemento para el segundo diagrama es

$$M_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \cdot \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X} \quad (2.7)$$

En mecánica cuántica la suma sobre todas las amplitudes para un proceso corresponde a la amplitud total [3]

$$\begin{aligned} M_{fi} &= M_{fi}^{ab} + M_{fi}^{ba} \\ M_{fi} &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_b - E_d - E_X} \right) \end{aligned}$$

usando la conservación de la energía

$$\begin{aligned} E_i - E_f &= 0 \\ E_a + E_b - E_c - E_d &= 0 \\ E_b - E_d &= E_c - E_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_c - E_a - E_X} \right) \\ M_{fi} &= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} - \frac{1}{E_a - E_c + E_X} \right) \\ M_{fi} &= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

la partícula X satisface la relación de energía-momentum

$$E_X^2 = \mathbf{p}_X^2 + m_X^2 = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 + m_X^2$$

se sustituye esta expresión para la ecuación 2.8

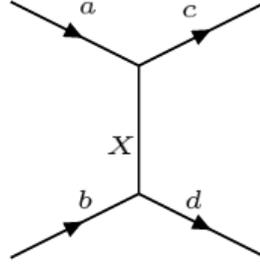
$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 - m_X^2}$$

en el denominador se tiene el cuatro-momentum $p_a - p_c$

$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2}$$

entonces se define el cuatro-momentum de la partícula de intercambio X como $q =$

Figura 2.2. Diagrama de Feynman proceso $a + b \rightarrow c + d$



$p_a - p_c$

$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2} \quad (2.9)$$

Los términos g_a y g_b están asociados con la interacción de los vértices. El término

$$\frac{1}{q^2 - m_X^2} \quad (2.10)$$

es referido como el propagador, el cual es asociado con el intercambio de partículas. La ecuación 2.9 es la amplitud total de transición de un estado inicial a un estado final teniendo una dispersión por un estado intermedio j [1].

2.2. Diagramas de feynman

En QFT, como en la teoría de perturbación el proceso de la figura 2.2 se suma sobre todos los posibles ordenes de tiempo en los cuales pueda ser representado este diagrama de Feynman. La partícula de intercambio el cual aparece en el estado intermedio del diagrama de Feynman es llamado partícula virtual².

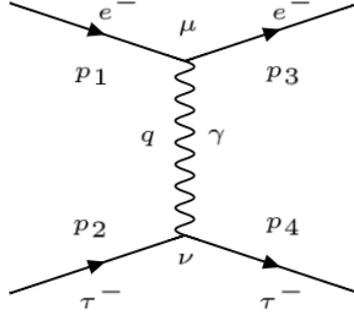
2.3. Cálculo de la matriz de elementos

Para tener una descripción completa de lo que sucede en un proceso físico tal como $e^- + \tau^- \rightarrow e^- + \tau^-$ ver figura 2.3. El campo para un fotón libre A_μ puede ser escrito en términos de una onda plana y un cuatro-vector $\epsilon^{(\lambda)}$ para el estado de polarización λ

$$A_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)} \exp^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} \quad (2.11)$$

²Una partícula virtual es una construcción matemática que representa el efecto de la suma sobre todos los posibles ordenes de tiempo del proceso y la suma sobre todos los posibles estados de polarización de la partícula de intercambio.

Figura 2.3. Diagrama de Feynman para el proceso QED $e^- + \tau^- \rightarrow e^- + \tau^-$



En la ecuación 1.53 se obtuvo la ecuación de Dirac para un electrón ³. La interacción para un fermión cargado es

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + iq\gamma^\mu A_\mu \psi + im\psi = 0 \quad (2.12)$$

ahora bien, si se desarrolla la ecuación

$$\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi + \gamma \cdot \nabla \psi + iq\gamma^0 \phi \psi - iq\gamma^i A_i \psi + im\psi = 0$$

la interacción del Hamiltoniano puede ser obtenida multiplicando por $i\gamma^0$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi + i\gamma^0 \gamma \cdot \nabla \psi - q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi - m\gamma^0 \psi = 0$$

De la mecánica cuántica no relativista, la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Entonces el Hamiltoniano para una partícula de $spin = 1/2$ en un campo electromagnético puede ser identificado [3]

$$\hat{H} = (m\gamma^0 - i\gamma^0 \gamma \cdot \nabla) + q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu$$

donde identificamos al operador de la energía potencial

$$\hat{V}_D = q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \quad (2.13)$$

Ahora ya que se sabe cual es la interacción fundamental de un fermión y un campo

³Debemos recordar que en esta ecuación se hizo la sustitución $q = -e$.

electromagnético. Se escribe la matriz de elemento para el proceso que se ejemplifica. Para la interacción en el vértice $e^- \gamma$, el cual se etiquetara con el índice μ es

$$\begin{aligned}\langle \psi(\mathbf{p}_3) | \hat{V}_D | \psi(\mathbf{p}_1) \rangle &= u_e^\dagger(p_3) \hat{V}_D u_e(p_1) \\ \langle \psi(\mathbf{p}_3) | \hat{V}_D | \psi(\mathbf{p}_1) \rangle &= u_e^\dagger(p_3) q \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu u_e(p_1)\end{aligned}$$

La solución a la ecuación puede ser escrita en términos de la ecuación 2.11

$$\langle \psi(\mathbf{p}_3) | \hat{V}_D | \psi(\mathbf{p}_1) \rangle = u_e^\dagger(p_3) q \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^\lambda(q) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} u_e(p_1)$$

el cuatro-momentum del fotón puede ser escrito como $q = p_1 - p_3$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \psi(\mathbf{p}_3) | \hat{V}_D | \psi(\mathbf{p}_1) \rangle &= u_e^\dagger(p_3) e^{-i(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{x} - E_3 t)} q \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^\lambda(q) e^{-i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} - E_1 t)} u_e(p_1) e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} - E_1 t)} \\ \langle \psi(\mathbf{p}_3) | \hat{V}_D | \psi(\mathbf{p}_1) \rangle &\rightarrow u_e^\dagger(p_3) Q_e e \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} u_e(p_1)\end{aligned}$$

donde la carga $q = Q_e e$. Usando el mismo procedimiento anterior se encuentra la interacción en el vértice $\tau^- \gamma$, el cual se etiquetará con el índice ν .

$$u_\tau^\dagger(p_4) Q_\tau e \gamma^0 \gamma^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda)*} u_\tau(p_2)$$

Para obtener la matriz de elemento, se debe sumar sobre todos los posibles estados de polarización del fotón

$$\mathcal{M} = \sum_\lambda [u_e^\dagger(p_3) Q_e e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)] \epsilon_\mu^{(\lambda)} \frac{1}{q^2} \epsilon_\nu^{(\lambda)*} [u_\tau^\dagger(p_4) Q_\tau e \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)] \quad (2.14)$$

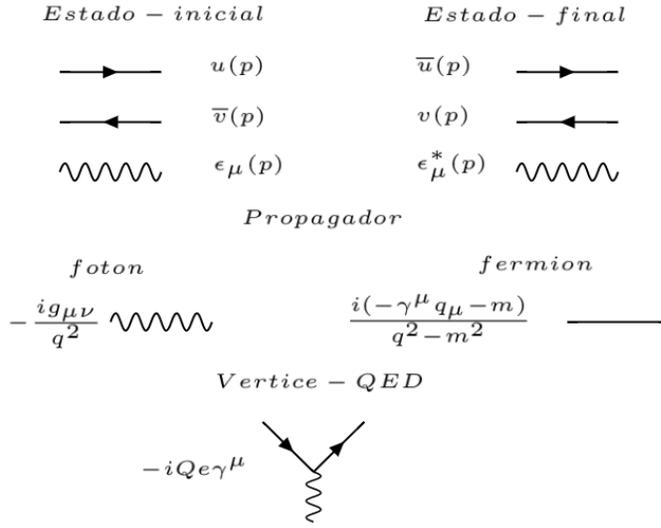
donde la suma sobre los posibles estados de polarización del fotón esta dada por

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu}$$

La matriz de elementos 2.14 se reduce a

$$\mathcal{M} = [u_e^\dagger(p_3) Q_e e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4) Q_\tau e \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)] \quad (2.15)$$

Figura 2.4. Reglas de Feynman para QED



Al simplificar la matriz de elementos con la notación de spinor adjunto queda

$$\mathcal{M} = -Q_e Q_\tau e^2 [\bar{u}_e(p_3) \gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_\tau(p_4) \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)] \quad (2.16)$$

entonces se puede escribir en forma de un producto escalar con cuatro vectores que es la forma manifiesta de un invariante de Lorentz⁴ [9]

$$\mathcal{M} = -Q_e Q_\tau e^2 \frac{\vec{j}_e \cdot \vec{j}_\tau}{q^2} \quad (2.17)$$

La obtención de la matriz de elementos para cualquier proceso se puede escribir inmediatamente siguiendo un conjunto simple de reglas. La matriz de elementos posee tres elementos básicos que se pueden identificar en el diagrama de Feynman. Para cada uno de estos 3 elementos básicos le corresponde una regla de Feynman la cual esta representado en la figura 2.4, el producto de estos tres elementos básicos es equivalente a $-i\mathcal{M}$.

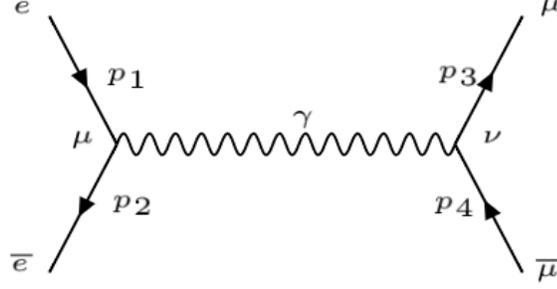
Un ejemplo sería encontrar la matriz de elementos para el proceso de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^+$ que se muestra en la figura 2.5 [9].

Entonces se puede escribir la densidad de corriente del electrón y el muón

$$\bar{v}(p_2)[-ie\gamma^\mu]u(p_1) \quad \vee \quad \bar{u}(p_3)[-ie\gamma^\nu]v(p_4)$$

⁴Se trabaja con una métrica, el cual todo producto interno proporciona un espacio métrico.

Figura 2.5. Proceso de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^+$.



donde los spinores v describen las antipartículas. El propagador del fotón

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Por lo tanto, la multiplicación de los tres elementos básicos debe de ser equivalente a $-i\mathcal{M}$

$$-i\mathcal{M} = [\bar{v}(p_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4)] \quad (2.18)$$

La matriz de elementos debe tomar en cuenta los estados de spin de las partículas involucradas en el proceso. Para el proceso en un estado inicial existen $2N$ posibles configuraciones de helicidad, en la que cada una constituye un proceso físico separado.

Para el proceso particular de aniquilación $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^+$, en el estado inicial existe cuatro posibles configuraciones de helicidad las cuales cada una tienen la misma probabilidad que ocurra. Esto es representado mediante la definición de la matriz de elementos

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} (|\mathcal{M}_{RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LL}|^2)$$

En general la matriz de elementos es

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.19)$$

2.4. Técnica de la traza

La relación de completitud es definida como la suma sobre los dos posibles estados de spin como el tensor formado del producto del spinor con su spinor ad-

junto⁵

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p)$$

la suma puede ser realizada usando los spinores de helicidad o bien los spinores u_1 y u_2 los cuales son soluciones de la ecuación de Dirac, ambos forman un conjunto completo de estados

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = u_1(p) \bar{u}_1(p) + u_2(p) \bar{u}_2(p)$$

se escribe los spinores u_s en términos de vectores columna de dos componentes

$$u_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_s \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la representación de $\sigma \cdot p$ permite la siguiente propiedad $(\sigma \cdot p)^\dagger = \sigma \cdot p$, escribiendo el spinor adjunto

$$\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p) \gamma^0 = \sqrt{E+m} \left(\phi_s^\dagger \quad -\frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_s^\dagger \right)$$

Realizando la suma sobre los spinores:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= E+m \left[\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_1 \end{pmatrix} \left(\phi_1^\dagger \quad -\frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_1^\dagger \right) + \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_2 \end{pmatrix} \left(\phi_2^\dagger \quad -\frac{\sigma \cdot p}{E+m} \phi_2^\dagger \right) \right] \\ \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= E+m \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_1 \phi_1^\dagger & -\frac{\sigma \cdot p}{E+m} [\phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_1 \phi_1^\dagger] \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} [\phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_1 \phi_1^\dagger] & -\frac{(\sigma \cdot p)^2}{(E+m)^2} [\phi_1 \phi_1^\dagger + \phi_1 \phi_1^\dagger] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pero usando $\sum_{s=1}^2 \phi_s \phi_s^\dagger = I$ y $p^2 = (E+m)(E-m)$, entonces :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= E+m \begin{pmatrix} I & -\frac{\sigma \cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} & -\frac{(\sigma \cdot p)^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \\ \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= \begin{pmatrix} E+m & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -(E-m) \end{pmatrix} \\ \sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= E \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ -\sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁵Los estados usados son ortogonales.

La ecuación 2.20 puede ser escrita en terminos de las matrices- γ

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p)\bar{u}_s(p) = \gamma^\mu p_\mu + mI = \not{p} + m \quad (2.21)$$

En la ecuación 2.21 se introduce una nueva notación que es una forma de abreviar el producto invariante, esta notación es llamada “Feynman slash”, este es un vector covariante $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu p^\nu = E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3$

Repitiendo la derivación anterior, se puede demostrar la relación de completitud para los spinores de antipartículas

$$\sum_{r=1}^2 v_r(p)\bar{v}_r(p) = \gamma^\mu p_\mu + mI = \not{p} - m \quad (2.22)$$

2.4.1. La suma de spin y el formalismo de la traza

Los vértices en QED pueden ser escritos en forma $\bar{u}(p')\Gamma(p')$, donde Γ es una matriz de 4×4 compuesta de una o más matrices de Dirac- γ .

Para el vertice de QED $\Gamma = \gamma^\mu$, retomando el ejemplo anterior el proceso $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^+$ la matriz de elemento está dada en la ecuación 2.18

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)] \quad (2.23)$$

Los observable físicos dependen de la matriz de elementos elevada al cuadrado $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$, entonces para calcular esto definimos el adjunto de la matriz de elementos:

$$\mathcal{M}^\dagger = -\frac{e^2}{q^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\nu u(p_1)]^\dagger [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)]^\dagger$$

el orden en el cual las componentes de las corrientes sean escritas no importa, ya que las componentes de las corrientes son simples números

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{v}(p_2)\gamma^\nu u(p_1)]^\dagger \times [\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)] [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu v(p_4)]^\dagger$$

se realiza la suma promedio sobre los spines iniciales y finales

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{s,r} [\bar{v}^r(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)][\bar{v}^r(p_2)\gamma^\nu u^s(p_1)]^\dagger \\
&\quad \times \sum_{s',r'} [\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)][\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\nu v^{r'}(p_4)]^\dagger
\end{aligned} \tag{2.24}$$

donde los indices s, r, s', r' representa las distintas posibilidades de los estados de spin. La matriz de elementos puede ser escrita

$$\sum_{spin} [\bar{\psi}\Gamma_1\phi][\bar{\psi}\Gamma_2\phi]^\dagger \tag{2.25}$$

Para este proceso $\Gamma_1 = \gamma^\mu$ y $\Gamma_2 = \gamma^\nu$. La ecuación 2.25 puede ser reducida escribiendo el complejo hermítico

$$[\bar{\psi}\Gamma\phi]^\dagger = [(\psi^\dagger\gamma^0)(\Gamma\phi)]^\dagger = [(\Gamma\phi)^\dagger(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger] = [\phi^\dagger\Gamma^\dagger\gamma^0\psi] = [\bar{\phi}\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0\psi]$$

Por lo tanto⁶

$$[\bar{\psi}\Gamma\phi]^\dagger = \bar{\phi}\bar{\Gamma}\psi \text{ con } \bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$$

Por las propiedades de las matrices- γ , esto puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
(\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 \\
(\gamma^k)^\dagger &= -\gamma^k \\
\bar{\Gamma} = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 &= \gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - \gamma^0\gamma^k\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 \\
&= \gamma^0 + \gamma^0\gamma^k\gamma^0 = \gamma^0 - \gamma^k\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu \\
\bar{\Gamma} = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 &= \gamma^\mu = \Gamma
\end{aligned}$$

Como se demuestra $\bar{\Gamma} = \Gamma$, esto también se mantiene para QCD y la interacción débil. Por lo tanto, es cierto para todas las interacciones del modelo estándar como

$$[\bar{\psi}\Gamma\phi]^\dagger \equiv \bar{\phi}\Gamma\psi \tag{2.26}$$

⁶Se usaron las siguientes propiedades $(\psi\phi)^\dagger = \phi^\dagger\psi^\dagger$, $(\psi^\dagger)^\dagger = \psi$, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$.

se usa la propiedad de la ecuación 2.26

$$\begin{aligned} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} \sum_{s,r} [\bar{v}^r(p_2) \gamma^\mu u^s(p_1)] [\bar{u}^s(p_1) \gamma^\nu v^r(p_2)] \\ &\times \sum_{s',r'} [\bar{u}^{s'}(p_3) \gamma_\mu v^{r'}(p_4)] [\bar{v}^{r'}(p_4) \gamma_\nu u^{s'}(p_3)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definiendo un tensor $\mathcal{L}_e^{\mu\nu}$, para el estado inicial

$$\mathcal{L}_e^{\mu\nu} = \sum_{s,r} \bar{v}_j^r(p_2) \gamma_{ij}^\mu u_i^s(p_1) \bar{u}_n^s(p_1) \gamma_{nm}^\nu v_m^r(p_2) \quad (2.28)$$

reescribiendo la multiplicación de las matrices

$$\mathcal{L}_e^{\mu\nu} = \sum_r \bar{v}_j^r(p_2) \gamma_{ij}^\mu \left[\sum_s u_i^s(p_1) \bar{u}_n^s(p_1) \right] \gamma_{nm}^\nu v_m^r(p_2)$$

usando la relación de completitud de la ecuación 2.17

$$\mathcal{L}_e^{\mu\nu} = \sum_r \bar{v}_j^r(p_2) \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_1 + m)_{in} \gamma_{nm}^\nu v_m^r(p_2)$$

se realiza el seguimiento de la multiplicación con los índices, donde $\bar{v}_j v_m = v_m \bar{v}_j$ ya que son solamente números

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^{\mu\nu} &= \left[\sum_r v_m^r(p_2) \bar{v}_j^r(p_2) \right] \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_1 + m)_{in} \gamma_{nm}^\nu \\ \mathcal{L}_e^{\mu\nu} &= (\not{p}_2 - m)_{mj} \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_1 + m)_{in} \gamma_{nm}^\nu \end{aligned}$$

donde es una matriz de 4×4

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^{\mu\nu} &= [(\not{p}_2 - m) \gamma^\mu]_{mj} [(\not{p}_1 + m) \gamma^\nu]_{in} \\ \mathcal{L}_e^{\mu\nu} &= [(\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu]_{mm} \\ \mathcal{L}_e^{\mu\nu} &= Tr[(\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por definición

$$Tr(AB) = [AB]_{ii} = \sum A_{ij} B_{ij}$$

Entonces el estado inicial del proceso $e^+ + e^-$

$$\sum_{s,r} [\bar{v}^r(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)][\bar{u}^s(p_1)\gamma^\nu v^r(p_2)] = Tr([\not{p}_2 - m]\gamma^\mu[\not{p}_1 + m]\gamma^\nu)$$

Como se observa, la suma sobre los estados iniciales de spin fue remplazado por la traza de las matrices de 4×4 , las cuales corren sobre las dieciséis posibles combinaciones de los indices μ y ν . Escribiendo la suma sobre los estados finales $\mu^+ + \mu^-$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu\nu}^\mu &= \sum_{s',r'} [\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)][\bar{v}^{r'}(p_4)\gamma_\nu u^{s'}(p_3)] \\ \mathcal{L}_{\mu\nu}^\mu &= Tr([\not{p}_3 + M]\gamma_\mu[\not{p}_4 - M]\gamma_\nu) \end{aligned}$$

expresando la matriz 2.27 en términos de la traza

$$\begin{aligned} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} \mathcal{L}_e^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu}^\mu \\ \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} Tr([\not{p}_2 - m_e]\gamma^\mu[\not{p}_1 + m_e]\gamma^\nu) \times \\ &Tr([\not{p}_3 + M_\mu]\gamma_\mu[\not{p}_4 - M_\mu]\gamma_\nu) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Este tipo de álgebra es facilitada por un número de teoremas. Las tres propiedades generales sobre las trazas son los siguientes: si A y B son dos matrices, y α es un número cualquiera.

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
2. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

El álgebra de las matrices γ es definido por la relación de anticonmutación

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad (2.31)$$

aplicando la traza a la ecuación 2.31

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) + Tr(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu}$$

Cabe recordar que de las propiedades enumeradas anteriormente se puede reducir, por lo tanto

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Las matrices γ tiene ciertas contracciones:

1. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$
2. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$
3. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}$
4. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu$

La traza de un número impar de matrices γ es cero, se demuestra esto insertando la identidad de la siguiente forma $\gamma^5 \gamma^5 = I$

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= Tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^5) \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= -Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\rho) \end{aligned}$$

Se usa la propiedad cíclica de la traza $Tr(ABC) = Tr(BCA) = -Tr(BAC) = -Tr(ABC)$

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= -Tr(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= -Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= 0 \end{aligned}$$

El cálculo de la traza para un número par de matrices γ

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho \end{aligned}$$

se toma la traza de ambos lados y usando las propiedades 1 y 3 de la traza

$$2Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 2g^{\mu\nu} Tr(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - 2g^{\mu\rho} Tr(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + 2g^{\mu\sigma} Tr(\gamma^\nu \gamma^\rho)$$

Usando la ecuación 2.32 para la traza de las dos matrices γ

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \quad (2.33)$$

La matriz γ^5 está compuesta por $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

1. $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$
2. $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$
3. $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es antisimétrico:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es un número par de permutaciones de } 123, \\ +1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es un número impar de permutaciones,} \\ 0 & \text{si cualquiera de los dos índices es el mismo.} \end{cases}$$

El cálculo de la sección eficaz por el método de la traza y los estados propios de la helicidad se incluye en el apéndice A.

3. Interacción Débil

3.1. Paridad

Un ejemplo de una transformación discreta simétrica entre partícula y antipartícula, es la transformación de paridad, el cual corresponde a inversiones espaciales mediante el origen

$$x \rightarrow x' = \hat{P}x = -x$$

al ser una inversión espacial se recobra de nuevo la función de onda original si el operador paridad es aplicado dos veces

$$\hat{P}\hat{P}\psi(x, t) = \hat{P}\psi(-x, t) = \psi(x, t)$$

el operador de paridad se define como:

$$\hat{P}\hat{P} = I \quad \vee \quad \hat{P} = \hat{P}^{-1}$$

Se debe comprobar que el operador paridad sea hermitico:

$$\begin{aligned} (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x (\langle \phi | x \rangle \langle x | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x (\langle \phi | x \rangle \langle -x | \psi \rangle)^\dagger \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x \langle \psi | -x \rangle \langle x | \phi \rangle \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x \langle \psi | -x \rangle \langle x | \hat{P} \hat{P} | \phi \rangle \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x \langle \psi | -x \rangle \langle -x | \hat{P} | \phi \rangle \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \int d^3x' \langle \psi | x' \rangle \langle x' | \hat{P} | \phi \rangle \\ (\langle \phi | \hat{P} | \psi \rangle)^\dagger &= \langle \psi | \hat{P} | \phi \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P} \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}^{-1} \quad (3.1)$$

El operador paridad conmuta con el hamiltoniano. Por lo tanto, si $\psi(\mathbf{x}, t)$ es un eigenestado del hamiltoniano, entonces este también lo es del operador paridad con un eigenvalor λ [5]

$$\hat{P}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

se aplica nuevamente el operador \hat{P}

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{P}|\psi\rangle &= \lambda|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle \\ (I - \lambda^2)|\psi\rangle &= 0 \\ (I - \lambda^2) &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se define a $\hat{P}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ como un estado de paridad par y $\hat{P}|\psi\rangle = -|\psi\rangle$ como un estado de paridad impar.

Si ψ es una solución de la ecuación de Dirac y ψ' es la correspondiente solución diametralmente opuesta obtenida por la acción del operador paridad es

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{P}\psi$$

La forma del operador paridad se deduce considerando una función de onda que satisfaga la ecuación de Dirac para una partícula libre es

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.3)$$

la paridad transforma la función de onda en un nuevo sistema de coordenadas que debe satisfacer la ecuación de Dirac

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\psi' = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t'} \quad (3.4)$$

Escribiendo $\psi = \hat{P}\psi'$, la ecuación 3.3 multiplicando esta por γ^0 y expresando la derivada en términos del sistema primado, esto introduce el signo negativo en las

coordenadas espaciales

$$\begin{aligned}
-i\gamma^0\gamma^1\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial x'} - i\gamma^0\gamma^2\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial y'} - i\gamma^0\gamma^3\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\hat{P}\psi' &= -i\gamma^0\gamma^0\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial t'} \\
i\gamma^1\gamma^0\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial x'} + i\gamma^2\gamma^0\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial y'} + i\gamma^3\gamma^0\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\hat{P}\psi' &= i\gamma^0\gamma^0\hat{P}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Comparado la ecuación 3.4 y la ecuación 3.5, el término $\gamma^0\hat{P}$ debe ser proporcional a la matriz identidad

$$\begin{aligned}
\gamma^0\hat{P} &\propto I \\
(\gamma^0)^2 &= \hat{P}^2 \\
\hat{P} = \gamma^0 &\quad \hat{P} = -\gamma^0
\end{aligned}$$

La paridad intrínseca de una partícula fundamental es definida por la acción del operador paridad $\hat{P} = \gamma^0$ en un spinor para una partícula en reposo¹

$$\hat{P}u_1 = u_1$$

La acción del operador paridad en el spinor de Dirac está dado por

$$\hat{P}u_1(E, \mathbf{p}) = u_1(E, -\mathbf{p})$$

De acuerdo a la teoría cuántica de campos la paridad de los fermiones, que satisfacen la ecuación de Dirac tienen la paridad opuesta a su correspondiente antipartícula [9].

3.2. Conservación de la paridad

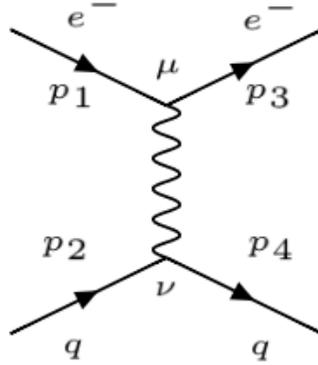
El proceso $e^- + q \rightarrow e^- + q$ que se muestra en la figura 3.1 la matriz de elementos para este proceso es

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{Q_q e^2}{q^2} j_e \cdot j_q \\
j_e^\mu &= \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \quad y \quad j_q^\nu = \bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)
\end{aligned}$$

$\hat{P} = \gamma^0$ se aplica a los spinores

¹Es una convención elegir $\hat{P} = \gamma^0$.

Figura 3.1. Diagrama del proceso de scattering electro-quark.



$$\begin{aligned}
 u &\xrightarrow{\hat{P}} \hat{P}u = \gamma^0 u \\
 \bar{u} = u^\dagger \gamma^0 &\xrightarrow{\hat{P}} (\gamma^0 u)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \\
 \bar{u} &\xrightarrow{\hat{P}} \bar{u} \gamma^0
 \end{aligned}$$

Se transforman los cuatro vectores corrientes

$$\begin{aligned}
 j_e^\mu &= \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \xrightarrow{\hat{P}} \bar{u}(p_3) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 u(p_1) \\
 j_e^0 &= \bar{u}(p_3) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 u(p_1) = \bar{u}(p_3) \gamma^0 u(p_1) \\
 j_e^k &= \bar{u}(p_3) \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 u(p_1) = -\bar{u}(p_3) \gamma^k u(p_1) = -j_e^k
 \end{aligned}$$

Consecuentemente el producto escalar en la matriz de elementos está dado por

$$j_e \cdot j_q = j_e^0 j_q^0 - j_e^k j_q^k \xrightarrow{\hat{P}} j_e^0 j_q^0 - (-j_e^k)(-j_q^k) = j_e \cdot j_q \quad (3.6)$$

La matriz de elementos en QED es invariante bajo la operación del operador paridad.

Existen cantidades físicas que pueden ser clasificadas de acuerdo a su rango y a su transformación bajo el operador de la paridad, estos son listados en la tabla 3.1²

²Para una mayor profundidad sobre estas cantidades físicas que son afectadas por la paridad, mire David Griffiths, Introduction to Elementary Particles, capítulo 4.

Tipo	Paridad	Ejemplo
Escalar	+	Masa, m
Pseudoescalar	-	Helicidad, h
Vector	-	Momentum, p
Pseudovector (Vector Axial)	+	Momentum Angular, L

Tabla 3.1. Comportamiento de escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores, bajo la transformación de la paridad P.

3.3. Estructura de la interacción débil

En 1957 Chien-Shiung Wu y colaboradores, investigaron si la paridad es conservada en la interacción débil, por medio del decaimiento beta del Cobalto-60 polarizado



Wu y sus colaboradores observaron que los electrones preferentemente eran emitidos en dirección opuesta al campo magnético aplicado. Si la paridad fuera conservada entonces se esperaría la misma cantidad de e^- producidos en dirección a lo largo y opuesto al spin. Se concluyó entonces que la paridad es violada en las interacción débil, lo cual conlleva que la forma del vértice de la interacción débil no sea $\bar{u}_e \gamma^\mu u_\nu$ [3].

Solo hay 5 posibles combinaciones de las matrices gamma que sean invariante de Lorentz, estas combinaciones son llamadas bilinear covariante son listadas en la tabla 3.2.

Para poder formar estos invariantes se introduce γ^5 el cual se define³

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La forma general de la interacción entre un fermión y bosón es una combinación

³La cual cumple con las siguientes propiedades $(\gamma^5)^2 = 1$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $\gamma^5\gamma^\nu = \gamma^\nu\gamma^5$.

lineal de la forma bilineal vector y pseudovector

$$j^\mu \propto \bar{u}(p')(g_V \gamma^\mu + g_A \gamma^\mu \gamma^5)u(p) = g_V j_V^\mu + g_A j_A^\mu$$

donde g_V y g_A son las constantes de acoplamiento del vector y el vector axial.

El operador paridad transforma la densidad de corriente de un vector axial, esta

Tipo	Forma	Componente	Spin bosón
Escalar	$\psi\phi$	1	0
Pseudoescalar	$\psi\gamma^5\phi$	1	0
Vector	$\psi\gamma^\mu\phi$	4	1
Pseudovector (Vector Axial)	$\psi\gamma^\mu\gamma^5\phi$	4	1
Tensor	$\psi(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\phi$	6	2

Tabla 3.2. Forma bilineal covariante invariante de Lorentz para el cuatro vector corriente.

dado por

$$\begin{aligned} j_A^\mu &= \bar{u}(p')\gamma^\mu\gamma^5u(p) \xrightarrow{\hat{P}} \bar{u}(p')\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0u(p) \\ j_A^0 &\xrightarrow{\hat{P}} \bar{u}(p')\gamma^0\gamma^0\gamma^5\gamma^0u(p) = \bar{u}(p')\gamma^5\gamma^0u(p) = -j_A^0 \\ j_A^k &\xrightarrow{\hat{P}} \bar{u}(p')\gamma^0\gamma^k\gamma^5\gamma^0u(p) = \bar{u}(p')\gamma^k\gamma^5u(p) = j_A^k \\ j_A^\mu &= -j_A^\mu \end{aligned}$$

El producto escalar entre dos densidades de corriente de dos vectores axiales es

$$j_1 \cdot j_2 = j_A^0 j_A^0 - j_A^k j_A^k \xrightarrow{\hat{P}} (-j_A^0)(-j_A^0) - j_A^k j_A^k = j_1 \cdot j_2$$

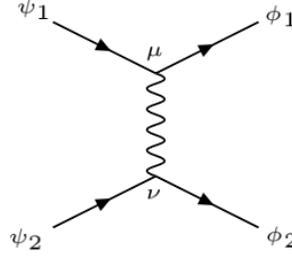
se realiza el producto escalar de la densidad de corriente de un vector y la densidad de corriente de un vector axial

$$j_V \cdot j_A = j_V^0 j_A^0 - j_V^k j_A^k \xrightarrow{\hat{P}} j_V^0 (-j_A^0) - (-j_V^k) j_A^k = -j_V \cdot j_A$$

El producto no se conserva bajo la paridad, esto provee un mecanismo que explica el efecto observado de la violación a la paridad en la interacción débil [9].

Se considera una combinación lineal general de vector y vector axial mostrada

Figura 3.2. Diagrama del proceso general de combinación lineal de vector y vector axial.



en la figura 3.2

$$j_1 = \bar{\phi}_1(g_V\gamma^\mu + g_A\gamma^\mu\gamma^5)\psi_1 = g_Vj_1^V + g_Aj_1^A$$

$$j_2 = \bar{\phi}_2(g_V\gamma^\mu + g_A\gamma^\mu\gamma^5)\psi_2 = g_Vj_2^V + g_Aj_2^A$$

La matriz de elementos es proporcional al producto escalar de los cuatro-vectores

$$\mathcal{M}_{fi} \propto j_1 \cdot j_2 = g_V^2 j_1^V \cdot j_2^V + g_V^2 j_1^A \cdot j_2^A + g_V g_A (j_1^V \cdot j_2^A + j_2^V \cdot j_1^A)$$

Considerando la transformación de este producto escalar bajo la paridad

$$j_1 \cdot j_2 \xrightarrow{\hat{P}} g_V^2 j_1^V \cdot j_2^V + g_V^2 j_1^A \cdot j_2^A - g_V g_A (j_1^V \cdot j_2^A + j_2^V \cdot j_1^A)$$

La intensidad relativa de la parte violación de paridad de la matriz de elementos comparada con la parte de conservación de paridad es proporcional a

$$\frac{g_V g_A}{g_V^2 + g_A^2}$$

La paridad es conservada si la g_A o g_V son cero, es decir que la paridad se conserva si son interacciones puras vectores o vectores axiales [8]

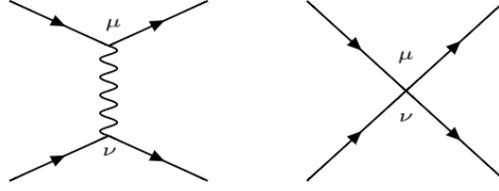
$$\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^5) \tag{3.8}$$

3.4. El propagador del bosón W

El propagador de Feynman, correspondiente a una partícula sin masa de spin-1 [3]

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Figura 3.3. El diagrama de Feynman para la interacción débil y el límite más bajo de energía en el cual una interacción solo ocurre en un punto del espacio-tiempo.



La interacción débil es mediada por una partícula masiva el bosón W^4 , un bosón de spin-1 con masa también puede existir en un estado de polarización longitudinal. La forma del propagador del bosón W [1] es

$$\frac{1}{q^2 - m_W^2}$$

Los cuatro vectores de polarización para un bosón de spin-1, viajando a lo largo del eje z son,

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \quad \epsilon_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \epsilon_L^\mu = \frac{1}{m}(p_z, 0, 0, E)$$

la correspondiente relación de completitud para la suma sobre los estados de polarización de un bosón spin-1,

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{*\lambda} \epsilon_\nu^{*\lambda} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}$$

El propagador asociado con el bosón W es[9]

$$\frac{-i}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right) \quad (3.9)$$

Sin embargo, para el límite de más baja energía, $q^2 \ll m_W^2$ el propagador toma la forma

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2} \quad (3.10)$$

Fermi propuso una teoría en la cual los leptones ligeros $e^- \bar{\nu}_e$ eran emitidos por el

⁴Con una masa aproximada de $m_W \sim 80 GeV$.

neutrón⁵. Fermi describe este proceso [8]

$$\mathcal{M}_{fi} = G_F g_{\mu\nu} [\bar{u}_p \gamma^\mu u_n] [\bar{u}_e \gamma^\nu u_\nu] \quad (3.11)$$

donde G_F es la constante de Fermi describe la fuerza de la interacción débil la cual es menor a la fuerza electromagnética.

Luego del descubrimiento de la violación a la paridad por Wu en 1957, la expresión fue modificada

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F g_{\mu\nu} [\bar{u}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_n] [\bar{u}_e \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_\nu] \quad (3.12)$$

La expresión obtenida por las reglas de Feynman

$$\mathcal{M}_{fi} = - \left[\frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_n \right] \cdot \left[\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} \right] \cdot \left[\frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \frac{1}{2} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_\nu \right]$$

Si se trabaja en el limite de baja energía, $q^2 \ll m_W^2$ esto se reduce a

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{8m_W^2} g_{\mu\nu} [\bar{u}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_n] [\bar{u}_e \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_\nu] \quad (3.13)$$

Relacionando las ecuaciones 3.12 y 3.13 en el limite de baja energía. La constante de Fermi es relacionada a la constante de acoplamiento débil:

$$G_F = \frac{\sqrt{2} g_W^2}{8m_W^2} \quad (3.14)$$

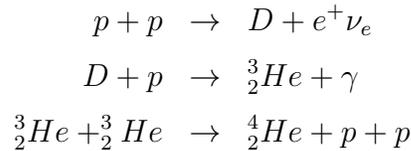
La estructura general que se ha discutido sobre la interacción débil será aplicada a los leptones cargados y neutrinos en el apéndice B.

⁵Decaimiento beta $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$.

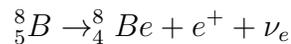
4. Oscilaciones de neutrinos

4.1. Estado propio de sabor y masa del neutrino

La fusión nuclear en el Sol emite aproximadamente $2 \times 10^{38} \nu_e s^{-1}$ (neutrinos electrónicos). En la superficie de la Tierra, el flujo se reduce a $\sim 6 \times 10^{10} cm^{-2} s^{-1}$ en el intervalo de energías $E \leq 0.42 MeV$ y $\sim 5 \times 10^6 cm^{-2} s^{-1}$ en el intervalo de energías $0.8 MeV \leq E \sim 15 MeV$. El proceso primario de conversión en el sol es la cadena pp[4] de reacciones produce el 98 % de toda la energía; el ciclo CNO contribuye solo el 2 %



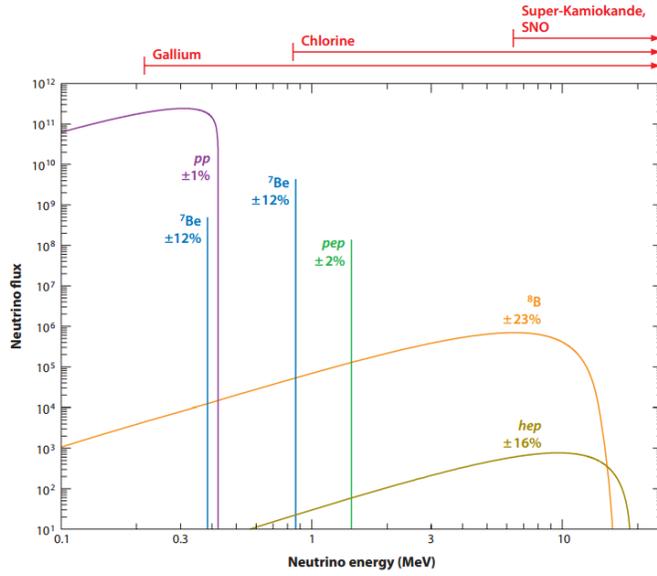
El espectro de energía de la cadena pp es mostrado en la figura 1.58. Los neutrinos producidos en este proceso son de muy baja energía, $E_\nu < 0.5 MeV$. Pero en el Sol se producen neutrinos de alta energía originados del decaimiento β del boro-8



Produciendo neutrinos con energía arriba de los 15MeV. Todos los experimentos detectan una gran discrepancia entre el número de neutrinos que llegan a la Tierra y los modelos teóricos del interior del Sol, conocido como el problema del neutrino solar [4].

La transformación de los sabores del neutrino observado por el experimento SNO es explicado por el fenómeno de oscilación de los neutrinos, es un fenómeno mecánico cuántico que prueba de manera contundente que los neutrinos son partículas masivas. Los autoestados de sabor son superposiciones coherentes de los estados de masa, posibilitando la oscilación entre estados de distinto sabor. El eigenestado

Figura 4.1. Espectro de energía de la cadena pp predecida por el modelo estándar del Sol [4].



de masa, es un estado estacionario del Hamiltoniano y satisface [5]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi$$

$$\psi(x, t) = \phi(x) e^{-iEt}$$

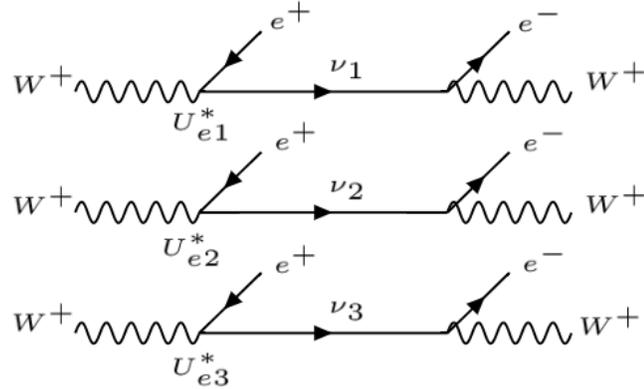
Los estados propios de masa de los neutrinos son ν_1 , ν_2 y ν_3 . Una de las principales distinciones del estado propio de masa y el estado propio de sabor es ilustrada en la figura 4.2. El sistema debe ser tratado como un estado coherente de la combinación lineal de los eigenestados de masa

$$|\psi\rangle = U_{e1}^* |\nu_1\rangle + U_{e2}^* |\nu_2\rangle + U_{e3}^* |\nu_3\rangle \quad (4.1)$$

La base de los sabores pueden ser relacionados a la base de masa por medio de la matriz unitaria

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Figura 4.2. Interacción en términos de los eigenestados de masa.



4.2. Oscilación del neutrino

Las características básicas de la oscilación de los neutrinos pueden estudiarse considerando solamente dos eigenestados de sabor. El caso de 2 sabores contiene la esencia del análisis de datos experimentales¹

$$\begin{aligned} |\nu_1(t)\rangle &= |\nu_1\rangle e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-E_1t} = e^{-ip_1\cdot x} \\ |\nu_2(t)\rangle &= |\nu_2\rangle e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-E_2t} = e^{-ip_2\cdot x} \end{aligned}$$

donde $p \cdot x$ es la fase que es un invariante de Lorentz. Ya que se considera la oscilación entre dos especies de neutrinos. Los estados propios de sabor se obtienen de los estados propios de masa por medio de una transformación unitaria 2×2 que se expresa en terminos de un solo ángulo

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

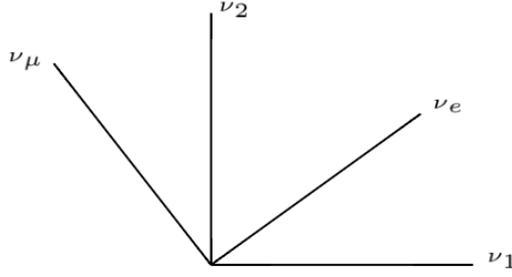
La transformación es equivalente a una rotación en el plano como se ilustra en la figura 4.3. En general, el ángulo puede tener cualquier valor entre 0° y 90° . La máxima diferencia se alcanza en los 45° , que es llamado máxima mezcla [1]

La función de onda en $t = 0$ es la superposición lineal coherente de los estados propios de masa ν_1 y ν_2 , correspondiente al estado ν_e es

$$|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle$$

¹Los estados propios de masa de una partícula libre son soluciones de la ecuación de onda, estas se propagan como una onda plana.

Figura 4.3. Rotación de sabor para la familia de neutrinos (1,2).



La función de onda se transforma de acuerdo a la evolución temporal del estado propio de masa

$$|\psi(x, t)\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle e^{-ip_1 \cdot x} + \sin \theta |\nu_2\rangle e^{-ip_2 \cdot x}$$

Suponga realizar una observación a una distancia z del punto de producción. Una buena aproximación es $v \approx c$; $z = ct = t$

$$\begin{aligned} p_i \cdot x &= E_i t - \mathbf{p}_i z = (E_i - \mathbf{p}_i) z \\ |\psi(z)\rangle &= \cos \theta |\nu_1\rangle e^{-i(E_i - \mathbf{p}_1)z} + \sin \theta |\nu_2\rangle e^{-i(E_i - \mathbf{p}_2)z} \end{aligned}$$

Entonces para la condición $m_i \ll E_i$

$$\begin{aligned} p_i^2 &= E_i^2 - m_i^2 = E_i^2 \left(1 - \frac{m_i^2}{E_i^2}\right) \\ p_i &= E_i \left(1 - \frac{m_i^2}{E_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx E_i - \frac{m_i^2}{2E_i} \end{aligned}$$

Entonces

$$(E_i - \mathbf{p}_i)z = E_i z - \left(E_i - \frac{m_i^2}{2E_i}\right)z = \frac{m_i^2}{2E_i}z$$

El estado del neutrino en este punto del espacio-tiempo

$$|\psi(z)\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle e^{-i\phi_1} + \sin \theta |\nu_2\rangle e^{-i\phi_2} \quad (4.4)$$

donde $\phi_i = \frac{m_i^2}{2E_i}L$ que es la fase de la onda para el estado propio de la masa i a una distancia L del punto de su producción.

La ecuación 4.4 puede ser expresada en terminos de los estados propios de sabor

usando la matriz inversa de la ecuación 4.3 es

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Llevando a

$$\begin{aligned} |\psi(L)\rangle &= \cos \theta (\cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_\mu\rangle) e^{-i\phi_1} + \sin \theta (\sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_\mu\rangle) e^{-i\phi_2} \\ |\psi(L)\rangle &= (e^{-i\phi_1} \cos^2 \theta + e^{-i\phi_2} \sin^2 \theta) |\nu_e\rangle - (e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) \cos \theta \sin \theta |\nu_\mu\rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si los estados propios de masa poseen la misma masa, se mantendrán en fase $\phi_1 = \phi_2$. Sin embargo, si las masas son distintas $\phi_1 \neq \phi_2$, existe un componente que pertenece al estado muonico del neutrino.

La probabilidad que un neutrino con estado de sabor electrónico oscile a un estado de sabor muónico² esta dado por

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= |\langle \nu_\mu | \psi(L) \rangle|^2 \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta (e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2})(e^{i\phi_1} - e^{i\phi_2}) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta (2 - (e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)})) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (2 - 2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \frac{m_2^2 L}{4E_2} - \frac{m_1^2 L}{4E_1} \approx \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{4E}$$

Las oscilaciones ocurren sólo si θ y Δm^2 son ambos distintos de cero. Estos son los parámetros que se busca determinar en los experimentos de oscilaciones de neutrinos. La probabilidad de los neutrinos electrónicos que sobreviven es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{(m_2^2 - m_1^2)}{4E_\nu} \right) \quad (4.8)$$

Para pequeños valores de Δm^2 , la oscilación de los sabores solo se desarrolla a grandes distancias.

²Se usaron las identidades trigonométricas $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

Los tres estados propios de sabor son relacionados a los estados de masa por una matriz unitaria de 3×3 llamada Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata³ [1], describe la amplitud con que un neutrino de tipo i participa en una reacción corriente cargada con un lepton cargado a

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

usando la definición de la matriz unitaria $U^{-1} = U^\dagger = (U^*)^T$ se puede expresar los estados propios de masa en términos de los estados de sabor

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu1}^* & U_{\tau1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu2}^* & U_{\tau2}^* \\ U_{e3}^* & U_{\mu3}^* & U_{\tau3}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

la condición unitaria

$$\begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu1}^* & U_{\tau1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu2}^* & U_{\tau2}^* \\ U_{e3}^* & U_{\mu3}^* & U_{\tau3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

proporciona nueve relaciones entre elementos de la matriz PMNS, por ejemplo

$$U_{e1}U_{e1}^* + U_{e2}U_{e2}^* + U_{e3}U_{e3}^* = 1 \quad (4.11)$$

$$U_{\mu1}U_{\mu1}^* + U_{\mu2}U_{\mu2}^* + U_{\mu3}U_{\mu3}^* = 1 \quad (4.12)$$

$$U_{e1}U_{\mu1}^* + U_{e2}U_{\mu2}^* + U_{e3}U_{\mu3}^* = 0 \quad (4.13)$$

Para calcular la probabilidad de oscilación se usa el mismo procedimiento desarrollado anteriormente. Considerando un estado que es producido en $t = 0$ como $|\nu_e\rangle$, que corresponde a un estado coherente.

$$|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle = U_{e1} |\nu_1\rangle + U_{e2} |\nu_2\rangle + U_{e3} |\nu_3\rangle$$

La ecuación de onda evoluciona en el tiempo como

$$|\psi(t)\rangle = U_{e1} |\nu_1\rangle e^{-ip_1 \cdot x} + U_{e2} |\nu_2\rangle e^{-ip_2 \cdot x} + U_{e3} |\nu_3\rangle e^{-ip_3 \cdot x}$$

³Debe de ser unitaria para conservar la probabilidad.

luego de viajar una distancia L

$$|\psi(L)\rangle = U_{e1} |\nu_1\rangle e^{-i\phi_1} + U_{e2} |\nu_2\rangle e^{-i\phi_2} + U_{e3} |\nu_3\rangle e^{-i\phi_3}$$

donde $\phi_i = (E_i - p_i)L$, se puede aproximar $\phi_i \approx \frac{m_i}{2E_i}L$, como se vio anteriormente [9]. Expresando los estados propios de masa en términos de los estados de sabor.

$$\begin{aligned} |\psi(L)\rangle &= U_{e1}(U_{e1}^* |\nu_e\rangle + U_{\mu 1}^* |\nu_\mu\rangle + U_{\tau 1}^* |\nu_\tau\rangle)e^{-i\phi_1} \\ &+ U_{e2}(U_{e2}^* |\nu_e\rangle + U_{\mu 2}^* |\nu_\mu\rangle + U_{\tau 2}^* |\nu_\tau\rangle)e^{-i\phi_2} \\ &+ U_{e3}(U_{e3}^* |\nu_e\rangle + U_{\mu 3}^* |\nu_\mu\rangle + U_{\tau 3}^* |\nu_\tau\rangle)e^{-i\phi_3} \end{aligned}$$

Se puede reescribir la función de onda:

$$\begin{aligned} |\psi(L)\rangle &= (U_{e1}U_{e1}^* e^{-i\phi_1} + U_{e2}U_{e2}^* e^{-i\phi_2} + U_{e3}U_{e3}^* e^{-i\phi_3}) |\nu_e\rangle \\ &+ (U_{e1}U_{\mu 1}^* e^{-i\phi_1} + U_{e2}U_{\mu 2}^* e^{-i\phi_2} + U_{e3}U_{\mu 3}^* e^{-i\phi_3}) |\nu_\mu\rangle \\ &+ (U_{e1}U_{\tau 1}^* e^{-i\phi_1} + U_{e2}U_{\tau 2}^* e^{-i\phi_2} + U_{e3}U_{\tau 3}^* e^{-i\phi_3}) |\nu_\tau\rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

La probabilidad de oscilación entre sabor puede ser obtenido

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= |\langle \nu_\mu | \psi(L) \rangle|^2 \\ P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= |U_{e1}U_{\mu 1}^* e^{-i\phi_1} + U_{e2}U_{\mu 2}^* e^{-i\phi_2} + U_{e3}U_{\mu 3}^* e^{-i\phi_3}|^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si la fase fuese la misma implicaría que la probabilidad de cambio de sabor es cero. Para que esto no suceda, la masa de los neutrinos debe ser distinta[1]. Usando la identidad de números complejos.

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\mathcal{R}(z_1 z_2^* + z_1 z_3^* + z_2 z_3^*)$$

la probabilidad se puede escribir:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= |U_{e1}U_{\mu 1}^*|^2 + |U_{e2}U_{\mu 2}^*|^2 + |U_{e3}U_{\mu 3}^*|^2 + 2\mathcal{R}(U_{e1}U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}) \\ &+ 2\mathcal{R}(U_{e1}U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} e^{-i(\phi_1 - \phi_3)}) + 2\mathcal{R}(U_{e2}U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} e^{-i(\phi_2 - \phi_3)}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

se simplifica aplicando la identidad anterior al modulo cuadrado de la relación unitaria 4.13

$$|U_{e1}U_{\mu 1}^*|^2 + |U_{e2}U_{\mu 2}^*|^2 + |U_{e3}U_{\mu 3}^*|^2 = -2\mathcal{R}(U_{e1}U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2} + U_{e1}U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} + U_{e2}U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3})$$

Así, la ecuación 4.16 puede ser escrita

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= 2\mathcal{R}[U_{e1}U_{\mu1}^*U_{e2}^*U_{\mu2}(e^{-i(\phi_1-\phi_2)} - 1)] \\
&+ 2\mathcal{R}[U_{e1}U_{\mu1}^*U_{e3}^*U_{\mu3}(e^{-i(\phi_1-\phi_3)} - 1)] \\
&+ 2\mathcal{R}[U_{e2}U_{\mu2}^*U_{e3}^*U_{\mu3}(e^{-i(\phi_2-\phi_3)} - 1)] \quad (4.17)
\end{aligned}$$

La probabilidad de los neutrinos electrónicos sobrevivientes es obtenido mediante el coeficiente de $|\nu_e\rangle$ de la ecuación 4.14

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= |\langle \nu_e | \psi(L) \rangle|^2 \\
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= |U_{e1}U_{e1}^*e^{-i\phi_1} + U_{e2}U_{e2}^*e^{-i\phi_2} + U_{e3}U_{e3}^*e^{-i\phi_3}|^2 \quad (4.18)
\end{aligned}$$

usando la identidad unitaria de la ecuación 4.11 y la identidad de los números complejos, la probabilidad de que el neutrino electrónico sobreviva es

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 + 2|U_{e1}|^2|U_{e2}|^2\mathcal{R}(e^{-i(\phi_1-\phi_2)} - 1) \\
&+ 2|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2\mathcal{R}(e^{-i(\phi_1-\phi_3)} - 1) \\
&+ 2|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2\mathcal{R}(e^{-i(\phi_2-\phi_3)} - 1) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

la probabilidad se puede simplificar usando esta expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(e^{-i(\phi_i-\phi_j)} - 1) &= \cos(\phi_i - \phi_j) - 1 \\
&= -2\sin^2\left(\frac{\phi_i - \phi_j}{2}\right) \\
&= -2\sin^2\left(\frac{(m_i^2 - m_j^2)L}{4E}\right) \\
&= -2\sin^2\Delta_{ij}
\end{aligned}$$

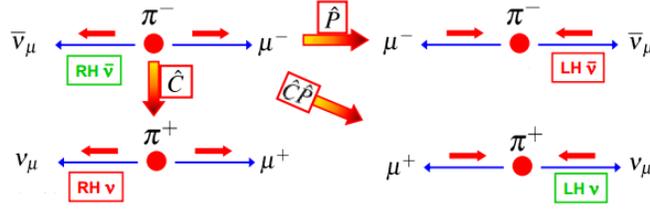
donde Δ_{ij} es una diferencia de fase.

$$\Delta_{ij} = \frac{\phi_i - \phi_j}{2} = \frac{(m_i^2 - m_j^2)L}{4E_\nu}$$

Por lo tanto, la probabilidad que el neutrino electrónico sobreviva.

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - 4|U_{e1}|^2|U_{e2}|^2\sin^2\Delta_{21} \\
&- 4|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2\sin^2\Delta_{31} - 4|U_{e2}|^2|U_{e3}|^2\sin^2\Delta_{32} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Figura 4.4. Violación $\hat{C}\hat{P}$ en el decaimiento del pión.



4.3. La matriz PMNS

La estructura V-A de la interacción débil implica una violación máxima a la paridad y la simetría carga conjugada. Considerando el decaimiento $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. La masa del neutrino es pequeña comparada con las energías involucradas, los neutrinos son emitidos en un estado de helicidad LH y los antineutrinos RH[9]. Como se observa en la figura 4.4 la interacción viola la simetría de paridad y carga conjugada. El efecto combinado de C y P, resulta ser valido, por esta razón es posible que la interacción débil respete la simetría CP.

La inversión del tiempo es una simetría discreta $t \rightarrow -t$. La combinación de las simetrías paridad, carga conjugada e inversión del tiempo (CPT) es invariante de Lorentz. Una consecuencia de la simetría CPT es que las partículas y sus anti-partículas tienen masa idéntica, momento magnético, etc. Si la simetría de CP se mantiene, entonces la simetría de inversión del tiempo se mantiene. Si la simetría CP es violada entonces la simetría inversión del tiempo también es violada.

Si la simetría de la inversión del tiempo es cierta entonces la probabilidad para $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ es igual a $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$. La expresión correspondiente a la probabilidad de oscilación $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= 2\mathcal{R}[U_{\mu 1}U_{e 1}^*U_{\mu 2}^*U_{e 2}(e^{-i(\phi_1-\phi_2)} - 1)] \\
 &+ 2\mathcal{R}[U_{\mu 1}U_{e 1}^*U_{\mu 3}^*U_{e 3}(e^{-i(\phi_1-\phi_3)} - 1)] \\
 &+ 2\mathcal{R}[U_{\mu 2}U_{e 2}^*U_{\mu 3}^*U_{e 3}(e^{-i(\phi_2-\phi_3)} - 1)] \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

La probabilidad de oscilación $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ se muestra en la ecuación 4.17. Si los elementos de la matriz PMNS son complejos entonces la oscilación del neutrino no es invariante ante la simetría de la inversión temporal. El efecto T, CP y CPT sobre

la oscilación del neutrino

$$\begin{aligned} \nu_e \rightarrow \nu_\mu & \xrightarrow{\hat{T}} \nu_\mu \rightarrow \nu_e \\ \nu_e \rightarrow \nu_\mu & \xrightarrow{\hat{C}\hat{P}} \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \\ \nu_e \rightarrow \nu_\mu & \xrightarrow{\hat{C}\hat{P}\hat{T}} \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

si la interacción débil es invariante bajo CPT

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$$

si la matriz PMNS no es real puro

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \neq P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$$

Por lo tanto, CP es violado en la oscilación del neutrino. Si la matriz PMNS es real, se desprecia la violación CP

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = -4U_{e1}U_{\mu1}U_{e2}U_{\mu2} \sin^2 \Delta_{21} - 4U_{e1}U_{\mu1}U_{e3}U_{\mu3} \sin^2 \Delta_{31} - 4U_{e2}U_{\mu2}U_{e3}U_{\mu3} \sin^2 \Delta_{32}$$

donde $\Delta_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}$, usando $\Delta_{31} \approx \Delta_{32}$ [9].

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = -4U_{e1}U_{\mu1}U_{e2}U_{\mu2} \sin^2 \Delta_{21} - 4(U_{e1}U_{\mu1} + U_{e2}U_{\mu2})U_{e3}U_{\mu3} \sin^2 \Delta_{32}$$

Usando la identidad $U_{e1}U_{\mu1}^* + U_{e2}U_{\mu2}^* + U_{e3}U_{\mu3}^* = 0$ se simplifica la probabilidad.

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \approx -4U_{e1}U_{\mu1}U_{e2}U_{\mu2} \sin^2 \Delta_{21} + 4U_{e3}^2 U_{\mu3}^2 \sin^2 \Delta_{32}$$

La matriz PMNS es unitaria, no real, puede ser expresada en terminos de tres ángulos de mezcla $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ y una fase compleja δ

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0s_{13}e^{-i\delta} & \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ y $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Los elementos son obtenidos de la multiplicación

de la matriz.

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La matriz PMNS para el tratamiento de oscilación del neutrino en dos sabores la cual depende del ángulo. Es real y por lo tanto no puede violar la simetría CP. Entonces la violación a CP solo se origina para la matriz PMNS en tres o mas generaciones de sabores de leptones[9].

A. Apéndice

Sección eficaz para el proceso de aniquilación

Para hallar la sección eficaz del proceso de aniquilación, se usa el marco de referencia del centro de masa y la condición que los spinores son ultra-relativistas ($E \gg m$)

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (E, 0, 0, E) \\
 p_2 &= (E, 0, 0, -E) \\
 p_3 &= (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \\
 p_4 &= (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)
 \end{aligned}$$

El estado final $\mu^- + \mu^+$ es producido con ángulos azimutales de $\phi = 0$ y $\phi = \pi$. Usando la condición ultra-relativista el limite de los eigenestados de helicidad

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix}; \quad v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Para el estado inicial el electrón ($\theta = 0, \phi = 0$) y el positrón ($\theta = \pi, \phi = \pi$), el estado final para μ^- ($\theta = \theta, \phi = 0$) y para μ^+ ($\theta = \pi - \theta, \phi = \pi$)¹

$$\begin{aligned}
 u_{\uparrow}(p_1) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{\downarrow}(p_1) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; & v_{\uparrow}(p_2) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & v_{\downarrow}(p_2) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 u_{\uparrow}(p_3) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix}, & u_{\downarrow}(p_3) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix}; & v_{\uparrow}(p_4) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix}, & v_{\downarrow}(p_4) &= \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

¹Se debe recordar estas relaciones trigonométricas $\sin \frac{\pi-\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\pi-\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2}$ y $e^{i\pi} = -1$

La matriz de elemento para el proceso de aniquilación

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2} j_e \cdot j_\mu$$

Es necesario evaluar para todas las posibles combinaciones de helicidad. La componente de la corriente del muón

$$j_{\mu,RL} = \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta) \quad (\text{A.1})$$

$$j_{\mu,RR} = \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LL} = \bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LR} = \bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) = 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \quad (\text{A.2})$$

los componentes de la combinación de helicidad de la corriente del electrón

$$j_{\mu,RL} = \bar{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\nu u_\uparrow(p_1) = 2E(0, -1, -i, 0) \quad (\text{A.3})$$

$$j_{\mu,RR} = \bar{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\nu u_\downarrow(p_1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LL} = \bar{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\nu u_\uparrow(p_1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$j_{\mu,LR} = \bar{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\nu u_\downarrow(p_1) = 2E(0, -1, i, 0) \quad (\text{A.4})$$

usando las corrientes del muón y del electrón, la matriz de elementos correspondiente para las cuatro combinaciones de helicidad

$$|\mathcal{M}_{RL\rightarrow RL}|^2 = |\mathcal{M}_{LR\rightarrow LR}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1 + \cos\theta)^2 \quad (\text{A.5})$$

$$|\mathcal{M}_{RL\rightarrow LR}|^2 = |\mathcal{M}_{LR\rightarrow RL}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1 - \cos\theta)^2 \quad (\text{A.6})$$

La matriz de elementos para la ecuación 2.19

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \times (|\mathcal{M}_{RL\rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR\rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL\rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LR\rightarrow RL}|^2) \\ \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} e^4 [(1 + \cos\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2] \\ \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= e^4 (1 + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La correspondiente sección eficaz diferencial es obtenida sustituyendo la matriz de elementos encontrada, escribiendo en términos de la constante de acoplamiento $\alpha =$

$\frac{e^2}{4\pi}$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} e^4 (1 + \cos^2 \theta) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta)\end{aligned}\tag{A.8}$$

Regresando al proceso estudiado $e^+ + e^- \rightarrow \mu^- + \mu^-$, la matriz de elementos

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{Q_\mu^2 e^4}{4q^4} Tr(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) \times Tr([\not{p}_3 + M_\mu] \gamma_\mu [\not{p}_4 - M_\mu] \gamma_\nu)\tag{A.9}$$

sustituyendo la notación slash $\not{p}_1 = \gamma^\sigma p_{1\sigma}$ y $\not{p}_2 = \gamma^\rho p_{2\rho}$

$$\begin{aligned}Tr(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) &= p_{2\rho} p_{1\sigma} Tr(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu) \\ Tr(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) &= 4p_{2\rho} p_{1\sigma} (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma}) \\ Tr(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) &= 4p_2^\mu p_1^\nu - 4g^{\mu\nu} (p_2 \cdot p_1) + 4p_2^\nu p_1^\mu\end{aligned}$$

operando la segunda traza

$$\begin{aligned}Tr([\not{p}_3 + M_\mu] \gamma_\mu [\not{p}_4 - M_\mu] \gamma_\nu) &= Tr(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu) - Tr(\not{p}_3 \gamma_\mu \gamma_\nu M_\mu) \\ &\quad + Tr(M_\mu \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu) - M_\mu^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) \\ Tr([\not{p}_3 + M_\mu] \gamma_\mu [\not{p}_4 - M_\mu] \gamma_\nu) &= Tr(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu) - M_\mu^2 Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) \\ Tr([\not{p}_3 + M_\mu] \gamma_\mu [\not{p}_4 - M_\mu] \gamma_\nu) &= 4p_{3\mu} p_{4\nu} - 4g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4) + 4p_{3\nu} p_{4\mu} - 4M_\mu^2 g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

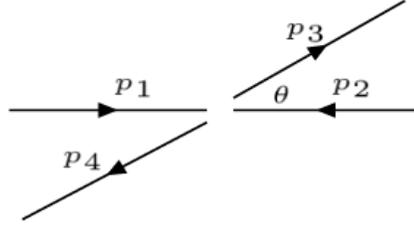
Por tanto, sustituyendo en la matriz de elementos es

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{4Q_\mu^2 e^4}{q^4} [p_2^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu} (p_2 \cdot p_1) + p_2^\nu p_1^\mu] \times [p_{3\mu} p_{4\nu} - g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4) + p_{3\nu} p_{4\mu} - M_\mu^2 g_{\mu\nu}]\tag{A.10}$$

Al realizar la operación se debe tener en cuenta ciertas expresiones que puedan simplificar contrayendo índices, como por ejemplo

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4, \quad p_2^\mu p_1^\nu g_{\mu\nu} = (p_2 \cdot p_1), \quad p_2^\mu p_1^\nu p_{3\mu} p_{4\nu} = (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)$$

Figura A.1. Proceso visto desde el marco de referencia del centro de masa.



Expandiendo la matriz de elementos y usando la contracción de índices

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= 4 \frac{Q_\mu^2 e^4}{q^4} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) - M_\mu^2(p_1 \cdot p_2) \\ &\quad - (p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + 4(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + 4M_\mu^2(p_1 \cdot p_2) \\ &\quad + (p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) - M_\mu^2(p_1 \cdot p_2)] \end{aligned}$$

simplificando

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = 8 \frac{Q_\mu^2 e^4}{q^4} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + M_\mu^2(p_1 \cdot p_2)] \quad (\text{A.11})$$

El cuatro momentum q^2 del fotón virtual en el proceso de aniquilación involucra los dos estados iniciales

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \approx 2(p_1 \cdot p_2)$$

Ya que este es un invariante de Lorentz, el cual nos da el cuadrado de la masa invariante

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = 2 \frac{Q_\mu^2 e^4}{(p_1 \cdot p_2)^2} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + M_\mu^2(p_1 \cdot p_2)] \quad (\text{A.12})$$

El cálculo de la matriz de elementos no se usó la forma explícita de los spinores ni la representación explícita de las matrices γ , solamente es determinada con la relación de completitud para los spinores y las propiedades de las matrices γ .

El cálculo de la sección eficaz se usa el marco de referencia del centro de masa como se muestra en la figura A.1

$$\begin{aligned}
p_1 &= (E, 0, 0, E) \\
p_2 &= (E, 0, 0, -E) \\
p_3 &= (E, \beta E \sin \theta, 0, \beta E \cos \theta) \\
p_4 &= (E, -\beta E \sin \theta, 0, -\beta E \cos \theta)
\end{aligned}$$

las operaciones dentro de la matriz de elementos

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 &= E^2(1 + \beta \cos \theta) \\
p_2 \cdot p_4 = p_1 \cdot p_3 &= E^2(1 - \beta \cos \theta) \\
p_1 \cdot p_2 &= 2E^2
\end{aligned}$$

Se sustituye en la matriz de elementos los productos escalares

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= 2 \frac{Q_\mu^2 e^4}{4E^4} [E^4(1 + \beta \cos \theta)^2 + E^4(1 - \beta \cos \theta)^2 + 2M_\mu^2 E^2] \\
\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= 2 \frac{Q_\mu^2 e^4}{4E^4} [2E^4 + 2\beta^2 \cos^2 \theta + 2M_\mu^2 E^2] \\
\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= Q_\mu^2 e^4 [1 + \beta^2 \cos^2 \theta + \frac{E^2 - \mathbf{p}^2}{E^2}] \\
\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= Q_\mu^2 e^4 [2 + \beta^2 \cos^2 \theta - \beta^2] \tag{A.13}
\end{aligned}$$

La sección eficaz diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\mathbf{p}}{E} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4s} \beta Q_\mu^2 \alpha^2 [2 + \beta^2 \cos^2 \theta - \beta^2] \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Donde $e^2 = 4\pi\alpha$, en el limite relativista donde $\beta \rightarrow 1$, la sección eficaz se reduce a la que se encontró anteriormente con el método de la helicidad.

B. Apéndice

Sección eficaz de la dispersión antineutrino-quark

El antineutrino solo puede interactuar con el quark up y no con el quark down, por la conservación de la carga eléctrica $\bar{\nu}_\mu(0) + d(\frac{2}{3}) \rightarrow \mu^+(1) + d(-\frac{1}{3})$. La correspondiente matriz de elementos para el diagrama de la figura B.1.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi} &= \left[-i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{v}(p_1)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)v(p_3) \right] \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2} \left[-i\frac{g_W}{\sqrt{2}}\bar{u}(p_4)\gamma^\nu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_2) \right] \\ \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_W^2}{2m_W^2}g_{\mu\nu} \left[\bar{v}(p_1)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)v(p_3) \right] \left[\bar{u}(p_4)\gamma^\nu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_2) \right] \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

En el límite ultra relativista, las partículas con helicidad LH y antipartículas con helicidad RH¹ participan en la corriente de carga

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{2m_W^2}g_{\mu\nu} [\bar{v}_\uparrow(p_1)\gamma^\mu v_\uparrow(p_3)] [\bar{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\nu u_\downarrow(p_2)]$$

Los eigenestados de helicidad con los cuales se trabaja en el límite ultra-relativista

$$v_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix}$$

trabajando en el marco de referencia del centro de masa

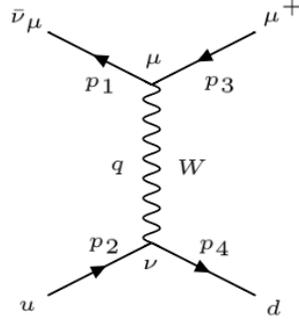
$$(\theta_1, \phi_1) = (0, 0), \quad (\theta_2, \phi_2) = (\pi, \pi), \quad (\theta_3, \phi_3) = (\theta, 0) \text{ y } (\theta_4, \phi_4) = (\pi - \theta, \pi)$$

Los correspondientes eigenestados

$$v_\uparrow(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_\uparrow(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{pmatrix}$$

¹ Los terminos LH y RH significan left hand y right hand respectivamente.

Figura B.1. Diagrama de Feynman para el proceso $\bar{\nu}_\mu + d \rightarrow \mu^+ + d$.



Las cuatro corrientes del lepton y el quark usando los eigenestados correspondientes

$$\begin{aligned}
 j_l^0 &= 2Ec & j_l^1 &= 2Es & j_l^2 &= 2iEs & j_l^3 &= 2Ec \\
 j_q^0 &= 2Ec & j_q^1 &= -2Es & j_q^2 &= -2iEs & j_q^3 &= -2Ec \\
 j_l^\mu &= 2E(c, s, is, c) \\
 j_q^\nu &= 2E(c, -s, -is, -c)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de elementos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_W^2}{2m_W^2} 4E^2 [c^2 + s^2 - s^2 + c^2] \\
 \mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_W^2}{2m_W^2} (2E)^2 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
 \mathcal{M}_{fi} &= \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \frac{g_W^2}{m_W^2} \hat{s}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Donde $\hat{s} = (2E)^2$ es la energí de centro de masa del sistema. La sección eficaz diferencial

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 \hat{s}} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \\
 \frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{1}{8} (1 + \cos \theta)^2 \left[\frac{g_W^2 \hat{s}}{m_W^2} \right]^2 \\
 \frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2 \left[\frac{g_W^2}{m_W^2} \right]^2 \hat{s} \\
 \frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{G_F^2}{16\pi^2} (1 + \cos \theta)^2 \hat{s}
 \end{aligned}$$

La sección eficaz total es obtenida integrando sobre el ángulo sólido

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{\nu}q} &= \int d\Omega \frac{G_F^2}{16\pi^2} (1 + \cos \theta)^2 \hat{s} \\
\sigma_{\bar{\nu}q} &= \frac{G_F^2}{16\pi^2} \hat{s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \\
\sigma_{\bar{\nu}q} &= \frac{G_F^2}{3\pi} \hat{s}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Sección eficaz de la dispersión neutrino-quark

El cálculo de la sección eficaz para la interacción neutrino-quark, el cálculo es similar al anterior, la matriz de elementos para la interacción $\nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{2m_W^2} g_{\mu\nu} \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(p_2) \right] \tag{B.4}$$

los estados de helicidad en la matriz de elementos

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{2m_W^2} g_{\mu\nu} [\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1)] [\bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\nu u_\downarrow(p_2)] \tag{B.5}$$

se usan las mismas condiciones para el ángulo polar y azimutal, el spinor con helicidad LH

$$u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$(\theta_1, \phi_1) = (0, 0), \quad (\theta_2, \phi_2) = (\pi, \pi), \quad (\theta_3, \phi_3) = (\theta, 0) \text{ y } (\theta_4, \phi_4) = (\pi - \theta, \pi)$$

los spinores para la distintas partículas

$$u_\downarrow(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{pmatrix}$$

las corrientes de carga:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{2m_W^2} g_{\mu\nu} [\bar{u}_\downarrow(p_3) \gamma^\mu u_\downarrow(p_1)] [\bar{u}_\downarrow(p_4) \gamma^\nu u_\downarrow(p_2)] = \frac{g_W^2}{2m_W^2} 4E^2 (c^2 + s^2 + s^2 + c^2)$$

Por lo tanto, la matriz de elementos puede ser reducida

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_W^2}{m_W^2} \hat{s} \tag{B.6}$$

La matriz de elementos no posee una dependencia del ángulo polar θ , por lo tanto representa una distribución isotópica de los estados finales. En el límite donde las

masas de las partículas pueden ser despreciadas, la sección eficaz diferencial en el marco de referencia del centro de masa

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2\hat{s}} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \\
\frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \left(\frac{g_W^2}{8\sqrt{2}\pi m_W^2} \right)^2 \hat{s} \\
\frac{d\sigma_{\bar{\nu}q}}{d\Omega} &= \frac{G_F^2}{4\pi^2} \hat{s}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

La sección eficaz total, es obtenida integrando solo el ángulo sólido

$$\sigma_{\nu q} = \frac{G_F^2 \hat{s}}{\pi} \tag{B.8}$$

La sección eficaz es una cantidad invariante de Lorentz, así que esto es valido para cualquier marco de referencia.

Comparando las dos secciones eficaces calculados para cada interacción ecuación B.3 y B.8, se tiene

$$\frac{\sigma_{\bar{\nu}q}}{\sigma_{\nu q}} = \frac{1}{3}$$

El cual indica que la sección eficaz de la interacción del antineutrino es tres veces más pequeño que la sección eficaz de la interacción del neutrino.

CONCLUSIONES

1. La matriz de elementos para cualquier diagrama de Feynman es definida por un conjunto preciso de reglas, llamadas reglas de Feynman, contienen la información física de las interacciones entre partículas.
2. La interacción débil es la única fuerza fundamental descrita por el modelo estándar en la cual se viola la simetría de paridad.
3. La formulación teórica sobre la oscilación del neutrino es descrita por la matriz unitaria PMNS, no real, que describe la amplitud de probabilidad de oscilación entre sabores de neutrinos. La matriz depende de la jerarquía de masa y es parametrizada en términos de tres ángulos de mezcla y una fase compleja que contribuye a la violación de la simetría CP.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Bettini. *Introduction to Elementary Particle Physics*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Palash B. Pal. Saha Institute of Nuclear Physics. Representation-independent manipulations with Dirac matrices and spinors. Consultado en agosto de 2015 en <http://arxiv.org/pdf/physics/0703214.pdf>.
- [3] Davis Griffiths. Wile. *Introduction to Elementary Particles*, 1942.
- [4] Nick Jelley, Arthur B. McDonald, and R.G. Hamish Robertson. The Sudbury Neutrino Observatory. *The Annual Review of Nuclear and Particle Science*. Consultado en julio de 2016 en <http://www.sno.phy.queensu.ca/papers/JelleyMcDonaldRobertsonAnnRev2009.pdf>.
- [5] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4^a ed. Oxford Science Publications, 1967.
- [6] W. Heisenberg. *The physical principles of the quantum theory*. Dover Publications, Inc., Nueva York, 1949.
- [7] D. H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] G. Rajasekaran. Institute of Mathematical Science. Fermi and the Theory of the Weak Interactions. Consultado en diciembre de 2015 en <http://arxiv.org/pdf/1403.3309.pdf>.
- [9] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 1992.
- [10] Samoil Bilenky. *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*. Springer, 2010.
- [11] Serge Lang. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1971.
- [12] Carlo Giunti, Kim Chung W.. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. New York: Oxford University Press, 2007.

