



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Física

# FUENTE DE ROMPIMIENTO DE SIMETRÍA CP EN EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS: CÁLCULOS FENOMENOLÓGICOS Y MOTIVACIÓN TEÓRICA

**Javier Alejandro Caceres Velásquez**

Asesorado por Dr. Juan Adolfo Ponciano Castellanos

Guatemala, noviembre de 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**FUENTE DE ROMPIMIENTO DE SIMETRÍA CP  
EN EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS:  
CÁLCULOS FENOMENOLÓGICOS Y  
MOTIVACIÓN TEÓRICA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN  
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
POR

**JAVIER ALEJANDRO CACEROS VELÁSQUEZ**  
ASESORADO POR DR. JUAN ADOLFO PONCIANO CASTELLANOS

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



**CONSEJO DIRECTIVO**

DIRECTOR M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu  
SECRETARIO ACADÉMICO Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

EXAMINADOR Lic. Juan Diego Chi-Wen Chang Santizo  
EXAMINADOR Dr. Ángel Giovanni Ramírez García  
EXAMINADOR Ing. Walter Giovanni Álvarez Marroquín

## AGRADECIMIENTOS

**A mi madre** por todos los cuidados, todo el cariño y todos los sacrificios que has hecho por mí, pues estos me han convertido en lo que soy hoy. Te agradezco por haberme dado la vida y por todo lo que cada día me brindas, porque siempre puedo contar contigo, porque sé que estarás conmigo en las buenas y en las malas, porque en cualquier momento puedo recurrir a ti para resolver mis dudas, pedir un consejo o recibir unas palabras de aliento pues tu amor hacia mí es incondicional. Eres una excelente madre y estoy muy agradecido contigo, pues has sido y sigues siendo como un ángel para mí. Te amo mucho mamá.

**A mis amigos** Renato Guerra, Marcelo Guerra, Caleb Castillo, Marisolina Toledo y Carla Batres, por ser mi familia lejos de casa, por las locuras, las salidas y las conversaciones interminables, porque nunca se han echado atrás cuando se trata de ayudarme a salir de los problemas, porque siempre han creído en mí y siempre me han alentado para alcanzar las metas que me propongo. Gracias a todos por ser como mis hermanos y hermanas.

**A mi asesor** el Dr. Juan Ponciano, por la orientación y ayuda que me dio durante la realización de este trabajo de graduación, por brindarme su tiempo y apoyo durante los últimos meses y por ayudarme a sacar el mayor provecho posible de este proyecto del cual, gracias a usted, logré aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.

**A mis catedráticos** especialmente al Ing. Rodolfo Samayoa, al Lic. Héctor Pérez, al Ing. Walter Álvarez, al Dr. Enrique Pazos y al Lic. Edgar Cifuentes por abrir mi mente al conocimiento e inspirarme a ser su colega y repartir conocimiento y sabiduría a las generaciones que están por llegar. También les agradezco porque los conocimientos y ayuda brindados por ustedes fueron de vital importancia para la realización de este trabajo de graduación.

**A mis compañeros** Mariano Cap, Brayan Lemus, Saraí Figueroa y Paola Delcompare por las horas que compartimos quemándonos las pestañas y quebrándonos las cabezas, insistiendo para comprender alguna materia que se nos complicaba, estudiando para el próximo examen o la siguiente exposición. Les agradezco su apoyo y soy consciente que sin su compañía me hubiera sido más difícil concluir este reto. Ustedes son gente valiosa e interesante de la que me llevo gratos recuerdos. Les deseo una vida llena de éxitos, metas cumplidas y retos superados.



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



Ref. D.DTG. 007-2016  
Guatemala 07 de noviembre de 2016

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, autoriza la impresión del trabajo de graduación Titulado: **FUENTE DE ROMPIMIENTO DE SIMETRÍA CP EN EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS: CÁLCULOS FENOMENOLÓGICOS Y MOTIVACIÓN TEÓRICA** presentado por el estudiante universitario: **Javier Alejandro Cacéros Velásquez**.

IMPRIMASE.

MsC. Edgar Aníbal Cifuentes Anleu  
Director  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



# DEDICATORIA

*A mi familia.*

# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	XI
INTRODUCCIÓN	XIII
<b>1. MEZCLA DE LOS NEUTRINOS, MASAS Y VIOLACIÓN CP LEPTÓNICA</b>	<b>1</b>
1.1. En el límite de bajas energías . . . . .	2
1.1.1. Términos de masa leptónicos . . . . .	2
1.1.2. Mezcla leptónica . . . . .	4
1.2. Modelos <i>seesaw</i> para la generación de masa de neutrinos y la incorpo- ración de nuevas fases de violación de simetría CP . . . . .	6
1.2.1. Singlete fermiónico (Tipo I) . . . . .	6
1.2.2. Triplete escalar (Tipo II) . . . . .	8
1.2.3. Triplete fermiónico (Tipo III) . . . . .	8
1.3. Neutrinos Majorana y violación CP . . . . .	10
1.4. Invariantes de la base débil y violación CP a bajas energías . . . . .	11
<b>2. OSCILACIONES DE NEUTRINOS</b>	<b>15</b>
2.1. Oscilaciones de neutrinos en el vacío . . . . .	15
2.1.1. Oscilaciones con dos familias de neutrinos . . . . .	16
2.1.2. Oscilaciones con tres familias de neutrinos . . . . .	18
2.2. Oscilaciones de neutrinos en materia . . . . .	21

<b>3. EFECTOS OBSERVABLES DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS Y POSIBLES FUENTES DE VIOLACIÓN CP EN EL SECTOR LEPTÓNICO</b>	<b>25</b>
3.1. Neutrinos solares, atmosféricos, de reactor y de acelerador . . . . .	26
3.2. Parámetros de neutrinos en la actualidad . . . . .	28
3.3. Violación del sabor leptónico . . . . .	30
3.4. Efectos no unitarios en el sector leptónico . . . . .	32
3.4.1. Oscilaciones no unitarias de neutrinos . . . . .	34
3.4.2. Restricciones no unitarias para decaimientos electrodébiles . . . . .	35
3.4.3. No unitariedad y la violación CP leptónica . . . . .	37
<b>4. VIOLACIÓN CP: MOTIVACIÓN TEÓRICA Y DETERMINACIÓN INDIRECTA DE LA FASE DE VIOLACIÓN DE SIMETRÍA CP DE DIRAC <math>\delta</math> PARA DISTINTAS TEXTURAS DE MEZCLA DE NEUTRINOS A TRAVÉS DE PARÁMETROS DE OSCILACIONES DE NEUTRINOS</b>	<b>39</b>
4.1. Matriz de mezcla tri-bimaximal (TBM) . . . . .	43
4.2. Matriz de mezcla bimaximal (BM) . . . . .	44
4.3. Matriz de mezcla democrática (DEM) . . . . .	48
4.4. Determinando las cotas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac $\delta$ . . . . .	53
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>59</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>61</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>63</b>
<b>APÉNDICE B</b>	<b>71</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>73</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Desfase entre los eigenestados de masa y eigenestados débiles de los neutrinos. . . . .	16
2.2. Desfase entre los eigenestados de masa y eigenestados débiles de tres familias de neutrinos. . . . .	19
3.1. Producción de neutrinos por rayo cósmico . . . . .	27
3.2. Experimento con neutrinos de acelerador . . . . .	28
4.1. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{12}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla TBM. . . . .	45
4.2. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{23}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla TBM. . . . .	46
4.3. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{13}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla TBM. . . . .	47
4.4. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{12}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla BM. . . . .	49
4.5. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{23}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla BM. . . . .	50
4.6. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{13}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla BM. . . . .	51
4.7. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{12}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla democrática. . . . .	54
4.8. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{23}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla democrática. . . . .	55
4.9. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{13}^\ell$ y el parámetro $\delta^\ell$ para la matriz de mezcla democrática. . . . .	56
4.10. Regiones permitidas para el ángulo de mezcla $\theta_{13}^\ell$ y el seno cuadrado de la fase $\delta$ para las tres matrices de mezcla. . . . .	58



# ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Parámetros de neutrinos actualmente . . . . .	29
--	----



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\mathcal{L}$	lagrangiano
$l_{L,R}$	campos leptónicos cargados
$\bar{A}$	complejo conjugado de $A$
$\mathbf{m}_l$	matriz de masa leptónica
$\nu_L$	campos de neutrinos
$A^T$	transpuesto de $A$
$C$	operador de conjugación de carga
$\mathbf{m}_\nu$	matriz de masa de neutrinos
$h.c.$	conjugado hermítico
$\gamma_\mu$	matrices de Dirac
$W^\mu$	campo de hipercarga débil
$\mathbf{W}_{L,R}$	matriz unitaria de transformación para la base débil
$\mathbf{K}_L$	matriz de fases Majorana
$diag(a_1, \dots, a_n)$	matriz digonal con entradas $a_1, \dots, a_n$ empezando desde la esquina superior izquierda
$A^\dagger$	adjunto de $A$
$N_\phi$	número de fases
$arg(A)$	el argumento de $A$
$(A)_{ij}$	elemento $ij$ de la matriz $A$
$A^*$	adjunto hermítico de $A$
$\mathbf{U}$	matriz de mezcla leptónica
$\mathbf{d}_{l,m}$	matriz diagonal de masas de leptones o neutrinos ligeros.
$\mathcal{O}(n)$	grupo de rotaciones en $n$ dimensiones
$\alpha_{1,2}$	fases asociadas con la naturaleza Majorana de los neutrinos
$\mathbf{V}$	matriz de mezcla de leptones cargados
$\theta_{ij}$	ángulos de mezcla leptónica
$\delta$	Fase CP de Dirac

Símbolo	Significado
$\rightarrow$	transformado en
$\gamma_{jk}$	fase de Majorana
$:=$	definido por
$P$	operador de paridad
$Im[A]$	parte imaginaria de A
$\mathcal{J}_{quark,lepton}^{CP}$	invariante CP impar
$\mathbf{m}_{u,d}$	matrices de masa de quarks <i>up</i> y <i>down</i>
$Tr[A]$	traza de A
$m_{e,\mu,\tau}$	masas de leptones cargados
$\Delta m_{ij}^2$	diferencias de masas al cuadrado de los neutrinos
$\mathcal{J}_{e\mu}^{21}$	parte imaginaria de un cuarteto invariante en la diferencia de probabilidad de oscilación de neutrinos
$\mathcal{J}_{Maj}^{CP}$	invariante CP tipo Majorana
$m_i$	masas de neutrinos ligeros
$\mathcal{J}_{Deg}^{CP}$	invariante CP para masa degenerada en los neutrinos
$\mathbf{m}_{e,\mu,\tau}$	matrices de masa para los leptones cargados
$\phi$	doblete de Higgs
$\mathcal{O}$	operador de dimensión 5
$\ell$	doblete leptónico del modelo estándar
$v$	valor esperado en el vacío del campo de Higgs
$SU(n)$	grupos de matrices unitarias especiales de $n$ dimensiones
$\mathbf{Y}^\nu$	matriz de acoplamientos de Yukawa para los neutrinos
$\Delta$	tripleto escalar
$M_\Delta$	masa del tripleto escalar
$\Sigma_i$	tripleto fermiónico
$S_i$	singletes fermiónico
$L_i$	dobletes $SU(2)$
$\ell_i$	leptones cargados
$Q$	carga electromagnética
$T_3$	tercera componente del isoespín débil
$Y$	hipercarga
$(\nu_{\ell_i})_R$	neutrinos derechos
$n_{rel}$	índice de refracción relativo
$N_e$	densidad electrónica

Símbolo	Significado
$A(0)$	probabilidad de refracción frontal
$G_F$	constante de Fermi
$p$	protón
$d$	deuterón
$e^+$	positrón
$\nu_L$	neutrino correspondiente al leptón $L$
$E_\nu$	energía del neutrino
${}^nA$	elemento con símbolo $A$ y número másico $n$
$MeV$	megaelectronvolt
$GeV$	gigaelectronvolt
$\bar{\nu}_L$	antineutrino correspondiente al leptón $L$
$n$	neutrón
$n_R$	número de neutrinos derechos pesados
$\not{\phi}$	notación <i>slash</i> de Feynman
$\mathbf{N}$	matriz no unitaria de $3 \times 3$
$\mathcal{L}_{CC}$	corriente cargada del lagrangiano
$\mathcal{L}_{CN}$	corriente neutra del lagrangiano
$\theta_W$	ángulo de mezcla débil
$Z_\mu$	campo bosónico
$\eta$	matriz hermitiana de parametrización
$\theta_{\alpha\beta}$	fases que violan CP
$A_{e\mu}$	asimetrías de canal dorado
$A_{\mu\tau}^{MS}$	asimetría CP en el modelo estándar unitario
$X, Y$	partículas
$B$	número bariónico
$\bar{X}, \bar{Y}$	antipartículas
$\Gamma(X \rightarrow Y + B)$	probabilidad de que ocurra el proceso $X \rightarrow Y + B$
$q_{L,R}$	bariones izquierdos o derechos
$\bar{q}_{L,R}$	antibariones izquierdos o derechos
$\hat{B}$	operador de número bariónico
$\langle \hat{A} \rangle$	valor esperado de $\hat{A}$
$H$	hamiltoniano
$\eta_B$	asimetría bariónica
$n_B$	densidad de bariones

Símbolo	Significado
$n_{\bar{B}}$	densidad de antibariones
$n_{\gamma}$	densidad de fotones
$T_{ed}$	energía de transición electrodébil
$m_H$	masa del bosón de Higgs
$\mathbf{U}_{TBM}$	matriz de mezcla tribi-máxima para neutrinos
$\mathbf{U}_{\ell}$	matriz de mezcla para leptones cargados
$c_{ij}^{\ell}, s_{ij}^{\ell}$	coseno y seno, respectivamente, de los ángulos de mezcla para leptones cargados $\theta_{ij}^{\ell}$
$\theta_{ij}^{\ell}$	ángulos de mezcla para leptones cargados
$\delta^{\ell}$	fase de la matriz de mezcla para leptones cargados $\mathbf{U}_{\ell}$
$\mathbf{U}_{PMNS}$	matriz de mezcla leptónica Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata
$\theta_{ij}$	ángulos de mezcla para leptones de la matriz $\mathbf{U}_{PMNS}$
$\sigma$	desviación estándar

# OBJETIVOS

## General

Determinar las cotas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac para el sector leptónico por métodos indirectos utilizando distintas texturas para la matriz de mezcla de neutrinos.

## Específicos

1. Conocer la estructura de mezcla en el sector leptónico que da origen a la fase de violación CP motivada por teorías cosmológicas.
2. Realizar el cálculo de las probabilidades de oscilaciones de neutrinos independientemente de la textura de mezcla utilizada.
3. Presentar la motivación teórica y experimental para la existencia de un rompimiento de simetría CP en el sector leptónico.
4. Utilizar herramientas numéricas como los métodos Monte Carlo para acotar el espacio de valores para el parámetro  $\delta$  consistentes con los experimentos de oscilaciones de neutrinos.



# INTRODUCCIÓN

Hoy en día existe en el universo una asimetría bariónica. Este término se refiere a la diferencia que hay entre la cantidad de materia bariónica y la cantidad de materia antibariónica en el universo observable. Todas las estructuras a gran escala del universo, estrellas, galaxias y conjuntos de galaxias, están hechas de materia y no de antimateria. El problema radica en que no existe todavía una teoría concluyente que explique el origen de esta asimetría. No hay razón para pensar que en el origen del universo existió una mayor cantidad de materia bariónica que de materia antibariónica, además de que cualquier asimetría primordial entre materia y antimateria debió haber sido tan fina que debió diluirse durante el periodo inflacionario [99]. Esta asimetría tuvo que haberse generado de forma dinámica luego del período de inflación. Existen varias hipótesis que compiten para explicar este proceso dinámico que generó la diferencia entre la cantidad de materia y antimateria. El marco teórico más aceptado es la de la bariogénesis, que emplea mecánica cuántica y mecánica estadística para describir dicho mecanismo dinámico. Las diferentes teorías de bariogénesis se diferencian en la forma en que describen las interacciones entre partículas elementales [34]. Además la bariogénesis implica una violación de simetría de carga y paridad CP.

La simetría CP es el producto de dos simetrías: la simetría de conjugación de carga C, que convierte una partícula en su antipartícula, y la simetría de paridad P, la cual produce un reflejo especular de un sistema físico. La idea detrás de la simetría CP es que las ecuaciones de física de partículas son las mismas si se aplican a partículas y a antipartículas moviéndose en direcciones opuestas.

Como ya se mencionó, el universo primigenio debió haber contenido la misma cantidad de materia que de antimateria. Sakharov propuso las condiciones que debía cumplir un mecanismo dinámico que generase una asimetría entre la cantidad de materia y antimateria a partir de una condición inicial de equilibrio [127]:

1. Violación del número bariónico B,
2. Violación de la simetría C y violación de la simetría CP,

### 3. Procesos que ocurrieran fuera del equilibrio térmico.

La primera condición de Sakharov es bastante obvia y nos dice que necesitamos que exista un proceso que tenga exceso de número bariónico. Sin embargo, la violación del número bariónico por sí sola no es suficiente para explicar la asimetría entre la cantidad de materia y antimateria en el universo. Si se conserva la simetría C, entonces todo proceso que viole B, tendrá la misma probabilidad de ocurrir que su conjugado en C. Ya que ambos procesos ocurrirían a la misma tasa, B se conservaría sobre largos períodos de tiempo. Así se explica que sea necesaria también la violación de C y que esta sea una de las condiciones de Sakharov.

Esto sigue sin ser suficiente ya que si se considera un proceso que viole B de la forma  $X \rightarrow q_L q_L$  que genere bariones izquierdos, este proceso ocurriría a la misma tasa que el proceso conjugado en CP  $\bar{X} \rightarrow q_R q_R$ , entonces a pesar de que los procesos conjugados en C tengan probabilidades distintas, la suma de los dos procesos conservaría aún el número bariónico (y generaría una asimetría de quiralidad). Por lo tanto, también se requiere que se viole la simetría CP, para que la producción de bariones exceda a la producción de antibariones. Es esta condición con respecto a la cual estaremos desarrollando el presente trabajo de graduación.

Aun con estas tres asimetrías trabajando a favor de la producción de bariones sobre la producción de antibariones, debemos considerar también factores termodinámicos. En equilibrio térmico, la distribución de Boltzmann dicta que debe existir un número igual de materia que de antimateria. Esto quiere decir que el valor esperado para el número bariónico en el equilibrio térmico es igual a cero. En otras palabras, dentro del equilibrio térmico la tasa dada para cualquier proceso que produzca un exceso de bariones es igual a la tasa para el proceso inverso, así que no se genera ninguna asimetría ya que el proceso inverso se encarga de revertir el efecto del proceso que genera dicha asimetría. Es una consecuencia que la asimetría bariónica debe generarse fuera del equilibrio térmico. Estos procesos fuera del equilibrio térmico son muy comunes en el universo temprano, cuando las tasas de las interacciones no pueden equiparar a la tasa de expansión, lo cual abre una ventana para ensayar una explicación a partir de los criterios de Sakharov.

Estas condiciones son necesarias, mas no suficientes para explicar la asimetría bariónica que existe actualmente, ya que no proporciona el mecanismo por el cual se produce dicha asimetría.

El modelo estándar de partículas elementales cumple con estas tres condiciones: las interacciones electrodébiles no perturbativas son responsables de la violación de B, el lagrangiano electrodébil es responsable por el rompimiento de CP y las

transiciones de fase son responsables de la falta de equilibrio térmico que, junto con el lagrangiano electrodébil, propicia la violación de C. Además, cuenta con al menos tres fuentes para violación de simetría CP. La primera, involucra a la matriz de mezcla Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [40] en el sector de los quarks, la cual ya ha sido observada experimentalmente e indica directamente que la simetría CP no es una simetría de la naturaleza, aunque solamente es responsable de una pequeña fracción de la violación de simetría CP requerida para explicar la asimetría entre materia y antimateria. La interacción fuerte también debería violar CP, pero la falta de observación experimental de un momento de dipolo para el neutrón sugiere que cualquier violación de CP en la interacción fuerte seguiría siendo demasiado pequeño para explicar la magnitud de la asimetría bariónica [126]. Finalmente, la tercera fuente yace en la matriz de mezcla Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [31] [41] en el sector leptónico. La precisión actual de los experimentos con neutrinos es muy poca para permitir una observación directa de violación CP en el sector leptónico. Sin embargo, experimentos como  $\text{NO}\nu\text{A}$ , Hyper-Kamiokande y LBNE serían sensibles a un amplio rango de valores para una fase de violación de simetría CP.

Más adelante, en el futuro, también podría construirse una fábrica de neutrinos que fuera sensible a casi cualquier valor para una fase de violación CP. Además, si los neutrinos son partículas de Majorana la matriz PMNS tendría dos fases adicionales de violación de simetría CP [17]. La violación de simetría CP en el sector leptónico genera la asimetría entre materia y antimateria mediante un proceso llamado leptogénesis. Esta podría convertirse en la explicación predilecta para la asimetría bariónica en el universo una vez confirmada la violación de simetría CP en el sector leptónico.

Por otro lado, si la violación de CP en el sector leptónico determinada experimentalmente resulta ser muy pequeña para explicar la asimetría entre la cantidad de materia y antimateria en el universo, nueva física más allá del modelo estándar sería requerida para explicar nuevas fuentes de violación de CP. Una buena noticia es que si se agregan nuevas partículas o interacciones al modelo estándar (como en el caso del mecanismo *seesaw*, el cual incorpora neutrinos superpesados al contenido de partículas del modelo estándar) se abre la posibilidad de nuevas fuentes de violación de simetría CP [114].

El valor actual establecido para la simetría bariónica del universo fue inferido por los datos de WMAP combinados con oscilaciones acústicas de bariones [91]

$$\eta_B \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} = (6.20 \pm 0.15) \times 10^{-10}, \quad (0.1)$$

donde  $n_B$ ,  $n_{\bar{B}}$  y  $n_\gamma$  son las densidades de bariones, antibariones y fotones actualmente, respectivamente. La asimetría bariónica se define de esta forma ya que no es posible medirla directamente, pero sí pueden hacerse estimaciones de las densidades  $n_B$ ,  $n_{\bar{B}}$  a partir de los resultados experimentales y usar la densidad de fotones  $n_\gamma$  determinada a partir del fondo de microondas del universo como peso para establecer la asimetría bariónica. La explicación para un valor tan pequeño pero distinto de cero genera un desafío tanto para la física de partículas como para la cosmología.

Actualmente, los experimentos principales de neutrinos de aceleradores,  $\text{NO}\nu\text{A}$  y T2K, tienen como objetivo principal medir la magnitud de la fase de rompimiento CP en el sector leptónico, la cual debería tener un valor de  $3\pi/2$  para poder dar una explicación definitiva a la asimetría entre materia y antimateria en el universo.

Utilizando estas ideas como motivación, se darán a conocer en el primer capítulo las características de los términos que involucran a los campos de neutrinos en el modelo estándar y la parametrización de la matriz PMNS, la cual contiene explícitamente las posibles fuentes de violación de simetría CP, luego iremos más allá del modelo estándar introduciendo el mecanismo por el cual los neutrinos podrían obtener sus masas, lo cual explica las observaciones experimentales de oscilaciones de neutrinos: el mecanismo *seesaw*, y algunas de sus variantes [108][124].

En el segundo capítulo se realizarán cálculos de probabilidades de neutrinos, analizando los casos de oscilaciones de dos y tres neutrinos en el vacío y en materia independiente de la parametrización que se utilice para la matriz de mezcla de neutrinos.

Continuaremos en el tercer capítulo describiendo un conjunto de resultados experimentales que motivan la existencia de una fase de rompimiento de simetría CP en el sector leptónico y el uso de parámetros de oscilaciones de neutrinos para determinarla.

Finalmente, en el capítulo cuatro se utilizará un método numérico Monte Carlo para determinar las cotas de la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$  para distintas texturas de la matriz de mezcla de neutrinos tomando provecho de la relación entre ésta y la matriz PMNS.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, se determinarán los valores permitidos para la fase de violación de simetría CP contenida dentro de la matriz de mezcla leptónica PMNS con el fin de identificar si existe de hecho alguna cota para

esta fase y analizar si alguna de las texturas de mezcla de neutrinos se ve favorecida de alguna manera por los resultados experimentales.

Con los valores obtenidos para la fase de violación de simetría CP se determinará si existe alguna textura de mezcla preferencial para las oscilaciones de neutrinos y si la magnitud de esta violación CP en el sector leptónico sería suficiente para explicar la asimetría bariónica en el universo o si se necesitarán fuentes adicionales de violación CP fuera del modelo estándar.



# 1. MEZCLA DE LOS NEUTRINOS, MASAS Y VIOLACIÓN CP LEPTÓNICA

Un neutrino es un fermión, una partícula elemental con espín fraccionario, que interactúa con la materia únicamente a través de la interacción débil y la gravedad. El neutrino recibe su nombre debido a su falta de carga eléctrica y a la pequeñez de su masa, la cual es tan pequeña que se pensó podía ser cero. Existen tres sabores de neutrinos: neutrino electrónico, neutrino muónico y neutrino tauónico. Cada neutrino tiene su propia antipartícula llama antineutrino, aunque aún no está claro si los neutrinos podrían ser su propia antipartícula. Los neutrinos son siempre producidos de forma que se conserve el número leptónico  $L$ . El descubrimiento de las oscilaciones implica que los neutrinos tienen una masa distinta de cero, contrario a lo que se establecía en el modelo estándar de partículas elementales.

La estructura de los términos de masa de campos espinoriales puede explicarse de la siguiente forma: partimos de la suposición de que existe un campo escalar  $\phi$  que tiene un valor esperado en el vacío distinto de cero.

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Podemos escribir acoplamientos invariantes de *gauge* que relacionen los campos leptónicos  $l_L$ ,  $l_R$  y nuestro campo escalar  $\phi$ .

$$\Delta\mathcal{L}_l = -\lambda_l \bar{l}_L \phi e_R + h.c., \quad (1.2)$$

el parámetro  $\lambda_l$  es una constante de acoplamiento adimensional. Si reemplazamos  $\phi$  por su valor esperado en el vacío obtenemos

$$\Delta\mathcal{L}_l = -\bar{l}_L \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_l v l_R + h.c. . \quad (1.3)$$

Este es el término de masa de un campo leptónico. La magnitud de la masa está determinada por el valor esperado en el vacío de  $\phi$  y redefinido por la constante

de acoplamiento  $\lambda_l$

$$m_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_l v. \quad (1.4)$$

Cabe resaltar que la teoría parametriza la magnitud de la masa del campo leptónico, pero no explica por qué tiene esa magnitud en específico.

## 1.1. En el límite de bajas energías

Comenzamos estudiando la mezcla de neutrinos y la violación de simetría CP leptónica en una extensión del modelo estándar de partículas con masas de neutrinos generadas con nueva física que rompe (B-L) [97]. Nuestro análisis sigue un camino general sin especificar el mecanismo de rompimiento de (B-L) que da masas a los neutrinos. Más adelante presentaremos nuevas ideas donde el rompimiento de (B-L) ocurre a causa del desacoplamiento de estados pesados.

### 1.1.1. Términos de masa leptónicos

Suponemos que el rompimiento de la simetría *gauge* ya ha tenido lugar y que la masa de los leptones cargados se ha generado por medio de acoplamientos de Yukawa [134] con el doblete de Higgs [125] como se explicó en la introducción del capítulo, mientras que las masas de los neutrinos Majorana [101] provienen de un mecanismo no especificado que rompe la simetría (B-L). Los términos de masa del lagrangiano son

$$\mathcal{L} = -\bar{l}_L \mathbf{m}_l l_R - \frac{1}{2} \nu_L^T C \mathbf{m}_\nu \nu_L + h.c., \quad (1.5)$$

donde  $l_{L,R} := (e, \mu, \tau)_{L,R}^T$  representa los campos leptónicos cargados del modelo estándar,  $\nu_L := (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)_L^T$  son los campos de neutrinos izquierdos, y  $\mathbf{m}_{l,\nu}$  son matrices complejas arbitrarias siempre que  $\mathbf{m}_\nu$  sea simétrica.

Hay evidencia clara en el sector quark que la matriz de mezcla CKM es compleja e incluso si se permite el uso de física más allá del modelo estándar [40]. Por lo tanto, como una analogía, prevemos la existencia de violación de CP leptónica proveniente de masas leptónicas complejas. Las matrices de masa de la ecuación (1.5) están escritas en una base débil, es decir, una base para los campos leptónicos con corrientes diagonales, reales y de sabor,

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma_\mu \nu_L W^\mu + h.c.. \quad (1.6)$$

Las matrices de masa leptónicas  $\mathbf{m}_l$  y  $\mathbf{m}_\nu$  contienen toda la información acerca de las masas y mezclas leptónicas. Sin embargo, existe una redundancia de los parámetros libres en estas matrices, así que no todos éstos tienen significado físico. La redundancia se origina del hecho de que uno de ellos tiene la libertad de hacer una transformación unitaria en la base débil,

$$\nu_L = \mathbf{W}_L \nu'_L, \quad l_L = \mathbf{W}_L l'_L, \quad l_R = \mathbf{W}_R l'_R, \quad (1.7)$$

sobre la cual todas las corrientes *gauge* permanecen siendo reales y diagonales, pero las matrices de masa  $\mathbf{m}_l$  y  $\mathbf{m}_\nu$  se cambian siguiendo la siguiente transformación:

$$\mathbf{m}'_l = \mathbf{W}_L^\dagger \mathbf{m}_l \mathbf{W}_R, \quad \mathbf{m}'_\nu = \mathbf{W}_L^T \mathbf{m}_\nu \mathbf{W}_L. \quad (1.8)$$

También podríamos usar la libertad de hacer una transformación en la base débil para cambiar a una base donde  $\mathbf{m}_l = \mathbf{d}_l$  sea real y diagonal. En esta base, podemos seguir haciendo un cambio de fase

$$l''_{L,R} = \mathbf{K}_L l'_{L,R}, \quad \nu''_L = \mathbf{K}_L \nu'_L, \quad (1.9)$$

con  $\mathbf{K}_L = \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3})$ . Con esta transformación  $\mathbf{d}_l$  permanece invariante, pero  $\mathbf{m}_\nu$  se transforma como

$$(\mathbf{m}''_\nu)_{ij} = e^{i(\phi_i + \phi_j)} (\mathbf{m}'_\nu)_{ij}. \quad (1.10)$$

Como  $\mathbf{m}'_\nu$  es una matriz arbitraria simétrica y compleja, tiene un número de fases igual a  $n(n+1)/2$ , donde  $n$  denota el número de generaciones. Nos queda la libertad de cambiar la fase de la ecuación (1.10) y eliminar  $n$  fases. Finalmente tenemos

$$N_\phi = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (1.11)$$

fases con significado físico [134]. En general, estas fases violan la simetría CP. Cabe notar que las  $N_\phi$  fases aparecen en la base débil, antes de la diagonalización tanto de  $\mathbf{m}_l$  como de  $\mathbf{m}_\nu$  y la generación de la matriz de mezcla leptónica. Notemos también que  $N_\phi$  coincide con el número de fases físicas que aparecen en la mezcla leptónica.

Para tres generaciones,  $N_\phi = 3$ , podría usarse el cambio de fase en la ecuación

(1.10) para lograr, por ejemplo, hacer que todos los elementos de la diagonal de  $\mathbf{m}_\nu$  sean reales. Para este caso, las 3 fases que violan CP, pueden identificarse con  $arg[(\mathbf{m}_\nu)_{12}]$ ,  $arg[(\mathbf{m}_\nu)_{13}]$ ,  $arg[(\mathbf{m}_\nu)_{23}]$ . Es claro que las fases individuales  $arg[(\mathbf{m}_\nu)_{ij}]$  no tienen ningún significado físico, ya que no son invariantes ante el cambio de fase de la ecuación (1.10). Sin embargo, podrían construirse polinomios con  $(\mathbf{m}_\nu)_{ij}$  que son invariantes ante el cambio de fase [58], tales como

$$\begin{aligned} P_1 &= (\mathbf{m}_\nu^*)_{11}(\mathbf{m}_\nu^*)_{22}(\mathbf{m}_\nu^*)_{12}^2, \\ P_2 &= (\mathbf{m}_\nu^*)_{11}(\mathbf{m}_\nu^*)_{33}(\mathbf{m}_\nu^*)_{13}^2, \\ P_3 &= (\mathbf{m}_\nu^*)_{33}(\mathbf{m}_\nu^*)_{12}(\mathbf{m}_\nu^*)_{13}(\mathbf{m}_\nu^*)_{23}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

con la finalidad de determinar las fases con un significado físico.

### 1.1.2. Mezcla leptónica

Las matrices de masa leptónicas de la ecuación (1.5) se diagonalizan con las transformaciones unitarias

$$\mathbf{U}_L^{l\dagger} \mathbf{m}_l \mathbf{U}_L^l = \mathbf{d}_l, \quad \mathbf{U}^{\nu T} \mathbf{m}_\nu \mathbf{U}^\nu = \mathbf{d}_m, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{U}_{L,R}^l$  y  $\mathbf{U}^\nu$  son matrices unitarias;  $\mathbf{d}_l$  y  $\mathbf{d}_m$  son matrices diagonales. En términos de los eigenestados de masa leptónicos, la corriente cargada se convierte en

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma_\mu \mathbf{U} \nu_L W^\mu + h.c., \quad (1.14)$$

donde  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_L^{l\dagger} \mathbf{U}^\nu$  es la matriz de mezcla leptónica Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [31]. La matriz  $\mathbf{U}$  es unitaria, así que tiene  $n^2$  parámetros;  $n(n-1)/2$  de estos parámetros pueden ser usados para definir una rotación  $O(n)$ , mientras  $n$  fases de  $\mathbf{U}$  pueden removerse si se redefinen los  $n$  campos leptónicos cargados. En consecuencia, solo quedan  $n(n-1)/2$  fases que características de violación CP en  $\mathbf{U}$ . Como se mencionó antes, este número coincide con el número de fases físicas  $N_\phi$  en la matriz de masa de neutrinos en una base débil en la cual la matriz de masa de los leptones cargados es diagonal y real.

Para tres generaciones de leptones, la matriz  $\mathbf{U}$  de  $3 \times 3$  se puede parametrizar de la forma [118]

$$\mathbf{U} = \mathbf{VK}, \quad \mathbf{K} = \text{diag}(1, e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}) \quad (1.15)$$

con  $\alpha_{1,2}$  siendo las fases asociadas con la naturaleza Majorana de los neutrinos [32][37][55][136], y la matriz unitaria  $\mathbf{V}$  escrita en términos de tres ángulos de mezcla ( $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ ) y una fase  $\delta$ .

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

donde  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$  y  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  con los ángulos de mezcla elegidos de modo que todos queden dentro del primer cuadrante y  $\delta$  es una fase de violación CP de Dirac [64]. Otra parametrización de la matriz de mezcla  $\mathbf{U}$ , que resulta ser más útil para el análisis del decaimiento beta sin neutrinos ( $0\nu\beta\beta$ ) [54], viene dada por

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{K}', \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} \text{diag}(1, 1, e^{i\delta}). \quad (1.17)$$

Los elementos de la matriz  $\mathbf{U}$  serán denotados como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{e1} & \mathbf{U}_{e2} & \mathbf{U}_{e3} \\ \mathbf{U}_{\mu1} & \mathbf{U}_{\mu2} & \mathbf{U}_{\mu3} \\ \mathbf{U}_{\tau1} & \mathbf{U}_{\tau2} & \mathbf{U}_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Es claro que la fase de un elemento particular de la matriz  $\mathbf{U}$  no tiene ningún significado físico. Esto es debido al hecho que tras un cambio de fase realizado a los campos leptónicos cargados  $l_{Lj} \rightarrow l'_{Lj} = e^{i\phi_j} l_{Lj}$  la matriz  $\mathbf{U}$  se transforma como

$$\mathbf{U}_{jk} \rightarrow \mathbf{U}'_{jk} = e^{i\phi_j} \mathbf{U}_{jk} \quad (1.19)$$

Esto es una analogía exacta a lo que ocurre en el sector de los quarks. La novedad en la mezcla leptónica con neutrinos Majorana es que no se pueden cambiar las fases de Majorana de los neutrinos, ya que esto no dejaría invariante los términos de masa de los neutrinos. Esto es cuando se consideran masas para los neutrinos que satisfacen condiciones de Majorana que no contienen factores de fase. También debe hacerse énfasis que la invariancia ante un cambio de fase es un requerimiento para cualquier cantidad física. En el sector leptónico con neutrinos Majorana, las funciones invariantes ante un cambio de fase más simples de los elementos  $\mathbf{U}_{ij}$  de la matriz PMNS son los bilineales de tipo  $\mathbf{U}_{ij}\mathbf{U}_{ik}^*$  [9][123], con  $j \neq k$  y sin sumar índices repetidos. Luego, se designamos como fases de Majorana las siguientes cantidades:

$$\gamma_{jk} := \arg(\mathbf{U}_{ij}\mathbf{U}_{ik}^*). \quad (1.20)$$

Puede verse fácilmente, de la definición de  $\mathbf{U}$ , que existen 6 fases independientes de Majorana  $\gamma_{jk}$ . Usando unitariedad, puede reconstruirse toda la matriz  $\mathbf{U}$  de estas seis fases de Majorana [41].

## 1.2. Modelos *seesaw* para la generación de masa de neutrinos y la incorporación de nuevas fases de violación de simetría CP

En el modelo estándar de partículas elementales, los quarks y los fermiones cargados obtienen sus masas por medio de acoplamientos de Yukawa con el doblete de Higgs  $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$ , y sus correspondientes términos de masa rompen la simetría de gauge de  $SU(2)_L$  como dobletes [125]. Por otro lado, un término Majorana de masa de neutrino, como el que vemos en la ecuación (1.20), rompe  $SU(2)_L$  como un triplete, y no puede generarse por medio del mismo mecanismo. Es altamente probable que este término de masa se genere por medio de operadores de dimensión más alta, tal como el operador penta-dimensional  $\mathcal{O} = (\ell_\alpha\phi)(\ell_\beta\phi)/M$  [144], donde  $\ell = (\ell_L, \nu_L)$  es el doblete leptónico del modelo estándar.

Una vez que el campo de Higgs fija un valor esperado en el vacío distinto de cero,  $\langle \phi^0 \rangle = v$ , las masas de los neutrinos Majorana, proporcionales a  $v^2/M$  son inducidas, contrario a lo que sucede con las masas de los quarks y los leptones cargados que son proporcionales directamente a  $v$ . Así, si la escala de  $M$  es mucho más pesada que la escala de rompimiento electrodébil  $v$ , los neutrinos podrían obtener masas mucho más pequeñas que las del resto de fermiones del modelo estándar de manera natural.

La aplicación más simple y atractiva del operador  $\mathcal{O}$  en teorías gauge se da a través del llamado mecanismo *seesaw*. En este mecanismo, el operador  $\mathcal{O}$  es inducido por el intercambio de partículas de escala de masa  $M$ . Estos estados pesados están presentes comúnmente en teorías de gran unificación. Los tipos de mecanismo *seesaw* que se describirán a continuación, son los más populares [108][124].

### 1.2.1. Singlete fermiónico (Tipo I)

La masa se genera mediante fermiones pesados, singletes bajo la simetría gauge  $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$  [69][71][107][109][146]

Sumando dos o tres singletes fermiónicos  $\nu_R$  a las partículas ya contenidas

dentro del modelo estándar es una de las formas posibles más simples y naturales de generar masa a los neutrinos. Ya que los estados  $\nu_R$  son singletes electrodébiles, sus masas no están limitadas por la simetría electrodébil y pueden ser inmensamente grandes. En la base diagonal de los acoplamientos de Yukawa, los términos relevantes del lagrangiano del sector de neutrinos son

$$-\mathcal{L}^I = \mathbf{Y}_{\alpha i}^{\nu*} \bar{\ell}_\alpha \tilde{\phi} \nu_{Ri} + \frac{1}{2} \bar{\nu}_{Ri} (\mathbf{m}_R)_{ij} \nu_{Rj}^c + h.c., \quad (1.21)$$

donde  $\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^*$ ,  $\mathbf{Y}^\nu$  es la matriz de acoplamientos de Yukawa para neutrinos de Dirac y  $\mathbf{m}_R$  es la matriz de masa de neutrinos derechos[115]. No se han incluido términos Majorana para neutrinos izquierdos, ya que esto implicaría agrandar el sector escalar. Para 3 generaciones y  $n_R$  estados Majorana pesados, el lagrangiano del modelo *seesaw* tipo I de la ecuación (1.21) contiene  $7n_R - 3$  parámetros libres: en la base de masas de singletes fermiónicos,  $N_i = \mathbf{U}_R^T \nu_{Ri}$ , o, en otras palabras, en la base donde la matriz simétrica  $\mathbf{m}_R$  de  $n_R \times n_R$  es diagonal, con eigenvalores positivos y reales, de la forma

$$\mathbf{U}_R^T \mathbf{m}_R \mathbf{U}_R = \mathbf{d}_M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_{n_R}), \quad (1.22)$$

el término de masa de Majorana en la ecuación (1.22) contiene solo  $n_R$  parámetros libres. En esta base, la matriz de acoplamientos de Yukawa  $\mathbf{Y}^\nu$  es una matriz arbitraria completa de  $3 \times n_R$  con  $6n_R$  parámetros. De estos, 3 fases pueden eliminarse redefiniendo las fases de los campos leptónicos cargados  $l_L$ , y quedan  $3(2n_R - 1)$  parámetros físicos, de los cuales  $3n_R$  son módulos y  $3(n_R - 1)$  son fases.

Después de integrar los campos pesados de Majorana de la ecuación (1.22), la matriz de masas efectiva de los neutrinos ligeros, viene dada por la fórmula estándar del *seesaw*

$$\mathbf{m}_\nu = -v^2 \mathbf{Y}^\nu \mathbf{m}_R^{-1} \mathbf{Y}^{\nu T} \quad (1.23)$$

con la matriz  $\mathbf{m}_\nu$  diagonalizada por la matriz de mezcla leptónica  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{m}_\nu \mathbf{U} = \mathbf{d}_m = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad (1.24)$$

donde las  $m_i$  son las masas de los neutrinos ligeros.

En general, el mecanismo *seesaw* tipo I requiere muchos más parámetros de los que se necesitan a bajas energías. De hecho, la matriz de mezcla de masa de los neutrinos  $\mathbf{m}_\nu$  puede escribirse en términos de nueve parámetros físicos: las masas de

los tres neutrinos ligeros, los tres ángulos de mezcla y las tres fases que parametrizan la matriz de mezcla  $\mathbf{U}$ .

### 1.2.2. Triplete escalar (Tipo II)

La masa es generada por medio del intercambio de tripletes escalares de  $SU(2)$  [48][92][98][110][136].

En este caso, el sector escalar del modelo estándar, se extiende al introducir un triplete escalar  $\Delta$  con hipercarga +1 y masa  $M_\Delta$ . En una representación de  $SU(2)$  [141],

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^0 & -\Delta^+/\sqrt{2} \\ -\Delta^+/\sqrt{2} & \Delta^{++} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Los términos relevantes en el lagrangiano son

$$\mathcal{L}^{II} = (\mathbf{Y}_{\alpha\beta}^\Delta \ell_\alpha^T C \Delta \ell_\beta - \mu M_\Delta \tilde{\phi}^T \Delta \tilde{\phi} + h.c.) + M_\Delta^2 Tr(\Delta^\dagger \Delta), \quad (1.26)$$

donde  $\mathbf{Y}^\Delta$  es una matriz de acoplamiento de  $3 \times 3$ , simétrica y compleja y  $\mu$  es una constante de acoplamiento. Cuando se comparan la ecuación (1.21) con la ecuación (1.26), podemos ver que esta última contiene menos parámetros libres. De hecho, solo se requieren 11 parámetros para determinar por completo el lagrangiano del mecanismo *seesaw* tipo II: 2 parámetros sin sabor  $\mu$  y  $M_\Delta$  y los 9 parámetros con sabor de la matriz de Yukawa  $\mathbf{Y}^\Delta$ . En este sentido, el mecanismo *seesaw* tipo II es más atractivo, ya que la estructura de sabor de la matriz de masas de los neutrinos  $\mathbf{m}_\nu$  viene determinada por la estructura de sabor de  $\mathbf{Y}^\Delta$ . El intercambio de tripletes pesados, conduce a una matriz de masas de los neutrinos dada por

$$\mathbf{m}_\nu = \frac{\mu v^2}{M_\Delta} \mathbf{Y}^\Delta. \quad (1.27)$$

El rompimiento de simetría CP, se encuentra intrínseco en las fases que se encuentran en la matriz  $\mathbf{Y}^\Delta$ .

### 1.2.3. Triplete fermiónico (Tipo III)

En este caso, la generación de masa es mediada por el intercambio de tripletes fermiónicos de  $SU(2)$ ,  $\Sigma_i$  con hipercarga 0 [63],

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \Sigma_i^0 & \sqrt{2}\Sigma_i^+ \\ \sqrt{2}\Sigma_i^- & -\Sigma_i^0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

El lagrangiano del mecanismo *seesaw* de tipo III, es similar al de tipo I, con la diferencia de que el del tipo III tiene contracciones distintas en los índices de  $SU(2)$

$$\mathcal{L} = (\mathbf{Y}^\Sigma)_{\alpha i}^* \ell_\alpha \tilde{\phi} \Sigma_i + \frac{1}{2} (\mathbf{m}_\Sigma)_{ij} Tr(\bar{\Sigma}_i \Sigma_j^c) + h.c.. \quad (1.29)$$

La cuenta de parámetros libres es similar a la que se hizo en el lagrangiano del mecanismo *seesaw* tipo I. Se necesitan 18 parámetros libres para determinar por completo el sector de neutrinos en altas energías en un modelo con 3 tripletes fermiónicos. 11 parámetros son necesarios en un modelo con 2 tripletes fermiónicos. La matriz de masa de los neutrinos ligeros tiene una estructura similar a la de la ecuación (1.23) haciendo los cambios  $\mathbf{Y}^\nu \rightarrow \mathbf{Y}^\Sigma$  y  $\mathbf{m}_R \rightarrow \mathbf{m}_\Sigma$ .

Es importante resaltar que existen otras alternativas de mecanismos *seesaw* además de los expuestos anteriormente [124]. Se puede citar como ejemplo los llamados modelos de *seesaw* doble [111][112], donde, además de los singletes fermiónicos  $\nu_R$ , se agregan uno o más singletes  $S_i$  con número leptónico  $L = 1$  al contenido de partículas del modelo estándar. Los términos relevantes del lagrangiano del mecanismo *seesaw* doble son

$$\mathcal{L}^{SD} = \mathbf{Y}_{\alpha i}^{\nu*} \bar{\ell}_\alpha \tilde{\phi} \nu_{Ri} + \bar{S}_i (\mathbf{m}_{RS})_{ij} \nu_{Rj} + \frac{1}{2} \bar{S}_i^c (\mathbf{m}_S)_{ij} S_j + h.c., \quad (1.30)$$

donde  $\mathbf{m}_{RS}$  es una matriz arbitraria completa y  $\mathbf{m}_S$  es una matriz compleja simétrica. En este caso, la matriz de masa de los neutrinos ligeros viene dada por

$$\mathbf{m}_\nu = -v^2 \mathbf{Y}^\nu (\mathbf{m}_{RS}^T)^{-1} \mathbf{m}_S \mathbf{m}_{RS}^{-1} \mathbf{Y}^{\nu T}. \quad (1.31)$$

El mecanismo *seesaw* inverso es una variante del mecanismo *seesaw* doble con una matriz de masa Majorana.

Enunciamos como último ejemplo la gran variedad de modelos para la generación de masa de los neutrinos con el operador  $\mathcal{O}$  traído de física a escalas de TeV o menor [47]. En estos escenarios, factores de acoplamiento de lazo y de Yukawa garantizan masas muy pequeñas para los neutrinos. Además, operadores con  $\Delta L = 2$  y dimensión mayor a 5 pueden brindar una contribución dominante a las masas Majorana de los neutrinos, si el operador  $\mathcal{O}$  queda prohibido a causa de una nueva simetría o alguna regla de selección [78].

### 1.3. Neutrinos Majorana y violación CP

Para poder estudiar la violación CP como una extensión del modelo estándar con neutrinos izquierdos con masas de Majorana [90], es conveniente considerar el lagrangiano después del rompimiento espontáneo de simetría gauge [125]. La parte del lagrangiano que nos interesa viene dada como

$$\mathcal{L} = -\bar{l}_L \mathbf{m}_l l_R - \frac{1}{2} \nu_L^T C \mathbf{m}_\nu \nu_L + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma_\mu \nu_L W^\mu + h.c.. \quad (1.32)$$

Las propiedades de transformaciones CP de los campos están determinadas por la sección del lagrangiano que sí conserva CP, es decir, las interacciones gauge [132]. Cabe hacer notas que las interacciones gauge en una base débil no distinguen entre las generaciones de fermiones y, como consecuencia, el lagrangiano de la ecuación (1.32) conserva CP solo si existe una transformación CP definida por

$$\begin{aligned} CPl_L(CP)^\dagger &= \mathbf{W}_L \gamma^0 C \bar{l}_L^T, \\ CP\nu_L(CP)^\dagger &= \mathbf{W}_L \gamma^0 C \bar{\nu}_L^T, \\ CPl_R(CP)^\dagger &= \mathbf{W}_R \gamma^0 C \bar{l}_R^T, \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde  $\mathbf{W}_L$  y  $\mathbf{W}_R$  son matrices unitarias que actúan en el espacio de generación.

Las transformaciones de la ecuación (1.33) se conocen como transformación CP generalizada [56].

El hecho de incluir las matrices unitarias  $\mathbf{W}_L$  y  $\mathbf{W}_R$  es obligatorio al momento de definir correctamente la transformación CP, en vista de la simetría de sabor de las interacciones gauge [117]. Los campos leptónicos  $l_L$  y  $\nu_L$  tienen que transformarse de la misma manera debido a la presencia de interacciones de corrientes cargadas izquierdas. Entonces el lagrangiano de la ecuación (1.32) conserva CP únicamente si las matrices de masa leptónica  $\mathbf{m}_\nu$  y  $\mathbf{m}_l$  satisfacen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{W}_L^T \mathbf{m}_\nu \mathbf{W}_L = -\mathbf{m}_\nu^* \mathbf{W}_L^\dagger \mathbf{m}_l \mathbf{W}_R = \mathbf{m}_l^* \quad (1.34)$$

Estas condiciones de CP son independientes de la base débil, en el sentido de que si existen las matrices  $\mathbf{W}_L$  y  $\mathbf{W}_R$  que satisfacen dichas condiciones cuando  $\mathbf{m}_\nu$  y  $\mathbf{m}_l$  sean escritas en una base débil, las partículas también existirán cuando las matrices de masa estén escritas en términos de otra base débil diferente. Se puede aprovechar esta independencia de la base débil para estudiar las restricciones de CP en una base débil apropiada.

Consideremos la base de una matriz de leptones cargados que es diagonal y real. En este punto,  $\mathbf{m}_\nu$  es una matriz arbitraria simétrica y compleja. Siempre que se mantenga a  $\mathbf{m}_l$  diagonal, real y positiva, se puede hacer una transformación de base débil que haga los elementos de  $\mathbf{m}_\nu$  reales. En esta base, la ecuación (1.34) limita a que  $\mathbf{W}_L$  tenga la forma

$$\mathbf{W}_L = \text{diag}(\pm i, \pm i, \pm i). \quad (1.35)$$

Sustituyendo la ecuación (1.35) en la ecuación (1.34), se concluye que la invariancia de CP limita los elementos de  $\mathbf{m}_\nu$  a que sean números reales puros o números imaginarios puros. Nótese, como ejemplo, que la matriz

$$\mathbf{m}_\nu = \begin{pmatrix} |m_{11}| & |m_{12}| & i|m_{13}| \\ |m_{21}| & |m_{22}| & i|m_{23}| \\ i|m_{31}| & i|m_{32}| & |m_{33}| \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

no conduce a una violación de CP, ya que la ecuación (1.34) se puede satisfacer con  $\mathbf{W}_L = \text{diag}(i, i, -i)$ . Este hecho también puede notarse del hecho de que la matriz  $\mathbf{m}_\nu$  tal y como la define la ecuación (1.36) cumple con la condición  $\text{Im}P_i = 0$ , donde  $P_i$  son los invariantes dados en la ecuación (1.12).

#### 1.4. Invariantes de la base débil y violación CP a bajas energías

Hemos mencionado que la existencia de matrices unitarias  $\mathbf{W}_L$  y  $\mathbf{W}_R$  que satisfagan la ecuación (1.34) es necesaria y suficiente para tener invariancia de CP en el límite de bajas energías. Así que ahora abordaremos el problema de encontrar invariantes CP impares en una base débil que nos ayudarían a detectar violación de CP en el sector leptónico. Es evidente que estos invariantes en la base débil deben estar escritos en términos de  $\mathbf{m}_\nu$  y  $\mathbf{m}_l$ . Se sabe bien que, en el sector de los quarks del modelo estándar con tres generaciones, solo existe un invariante de CP impar que determina la violación CP a bajas energías, este es [33][79],

$$\mathcal{J}_{quark}^{CP} = \text{Tr}[\mathbf{m}_u \mathbf{m}_u^\dagger, \mathbf{m}_d \mathbf{m}_d^\dagger]^3, \quad (1.37)$$

donde  $\mathbf{m}_u$  y  $\mathbf{m}_d$  denotan las matrices de masa para los quarks *up* y *down* respectivamente [24].

En el caso de tres neutrinos, de Dirac o Majorana, se puede escribir un invariante CP impar completamente análogo que determine la violación CP de tipo

Dirac en el sector leptónico:

$$\mathcal{J}_{lepton}^{CP} = Tr[(\mathbf{m}_\nu \mathbf{m}_\nu^\dagger)^*, \mathbf{m}_l \mathbf{m}_l^\dagger]^3. \quad (1.38)$$

Este invariante de bajas energías es sensible a fases del tipo Dirac tal como  $\delta$  y desaparece para  $\delta = 0$ . Por otro lado, es independiente de las fases de Majorana  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que aparecen en la matriz de mezcla leptónica  $\mathbf{U}$ . La cantidad  $\mathcal{J}_{lepton}^{CP}$  puede escribirse completamente en términos de cantidades físicas observables,

$$\mathcal{J}_{lepton}^{CP} = -6i(m_\mu^2 - m_e^2)(m_\tau^2 - m_\mu^2)(m_\tau^2 - m_e^2) \times \Delta m_{23}^2 \Delta m_{31}^2 \Delta m_{32}^2 \mathcal{J}_{e\mu}^{21} \quad (1.39)$$

con  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$  son las diferencias de masas cuadradas de los neutrinos ligeros[119]. Y  $\mathcal{J}_{e\mu}^{21}$  es la parte imaginaria de un cuarteto invariante que aparece en la diferencia de probabilidades de oscilación de neutrinos CP conjugados  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) - P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ . Se puede obtener que [87]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{e\mu}^{21} &\equiv Im[\mathbf{U}_{11} \mathbf{U}_{22} \mathbf{U}_{12}^* \mathbf{U}_{21}^*] \\ &= \frac{1}{8} \sin(2\theta_{12}) \sin(2\theta_{13}) \sin(2\theta_{23}) \sin\delta, \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde  $\theta_{ij}$  son los ángulos de mezcla de la parametrización (1.16).

El requerimiento de que  $\mathcal{J}_{lepton}^{CP} \neq 0$  es necesario y suficiente para tener violación CP leptónica de tipo Dirac, sin importar si los neutrinos son de Dirac o de Majorana. Sin embargo, si los neutrinos son de Majorana, también existe la posibilidad de violación CP tipo Majorana. Por lo tanto, vale la pena encontrar invariantes CP impares que nos permitan detectar directamente este tipo de violación CP, incluso en el límite donde ya no exista violación CP de tipo Dirac. Un ejemplo de un invariante de este tipo es [42]

$$\mathcal{J}_{Maj}^{CP} = Im Tr(\mathbf{m}_l \mathbf{m}_l^\dagger \mathbf{m}_\nu^* \mathbf{m}_\nu \mathbf{m}_\nu^* \mathbf{m}_l^T \mathbf{m}_l^* \mathbf{m}_\nu). \quad (1.41)$$

La forma más sencilla de confirmar que  $\mathcal{J}_{Maj}^{CP}$  es sensible a fases de Majorana es evaluándose para el caso particular de 2 neutrinos de Majorana. En este caso, existe una única fase tipo Majorana y no existen fases del tipo Dirac. La matriz de mezcla leptónica puede parametrizarse como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta e^{-i\gamma} \\ \sin\theta e^{-i\gamma} & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

donde  $\gamma$  es la fase de Majorana. Una evaluación completa de  $\mathcal{J}_{Maj}^{CP}$  nos lleva al resultado

$$\mathcal{J}_{Maj}^{CP} = \frac{1}{4} m_1 m_2 \Delta m_{21}^2 (m_\mu^2 - m_e^2)^2 \sin^2 2\theta \sin 2\gamma. \quad (1.43)$$

Vale la pena resaltar algunas características que  $\mathcal{J}_{Maj}^{CP}$  nos da respecto a la violación CP de tipo Majorana. Por ejemplo, nos muestra que una fase  $\gamma = \pi/2$  no implica violación CP; simplemente indica invarianza CP con los dos neutrinos con paridades CP opuestas.

Los invariantes dados en las ecuaciones (1.38) y (1.41) se desvanecen si los neutrinos tienen exactamente la misma masa. En este caso, la parametrización de la matriz de mezcla  $\mathbf{U}$  requiere, generalmente, dos ángulos de mezcla y una fase de violación CP. Esto contrasta con el caso de neutrinos de Dirac, en el cual no existe mezcla o violación CP en el caso que las masas sean idénticas. Entonces, puede verse con facilidad que la violación CP leptónica puede darse incluso cuando tres neutrinos Majorana tienen la misma masa [42]. Es posible construir un invariante en una base débil que determine la fuerza de la violación CP en el caso anterior [43], este sería

$$\mathcal{J}_{Deg}^{CP} = Tr[\mathbf{m}_\nu \mathbf{m}_l \mathbf{m}_l^\dagger \mathbf{m}_\nu^*, \mathbf{m}_l^* \mathbf{m}_l^T]^3. \quad (1.44)$$

Una condición necesaria y suficiente para la invarianza de CP es  $\mathcal{J}_{Deg}^{CP} = 0$ . El invariante CP impar de la ecuación (1.44) puede expresarse en términos de las masas de los leptones y parámetros de mezcla de una base débil en la que  $\mathbf{m}_l \mathbf{m}_l^\dagger = diag(\mathbf{m}_e^2, \mathbf{m}_\mu^2, \mathbf{m}_\tau^2)$ . Parametrizando la matriz de mezcla  $\mathbf{U}$  en la forma de las ecuaciones (1.16) y (1.11), haciendo  $\theta_{13} = \delta = 0$  y  $\alpha_1 = 2\pi$ , para que en el límite de la invarianza CP, se obtengan que uno de los neutrinos Majorana con paridad CP opuesta a los otros dos, se obtiene

$$\mathcal{J}_{Deg}^{CP} = -\frac{3i}{2} m^6 (m_\tau^2 - m_\mu^2)^2 (m_\tau^2 - m_e^2)^2 (m_\mu^2 - m_e^2)^2 \times \cos(2\theta_{12}) \sin^2(2\theta_{12}) \sin^2(\theta_{23}) \sin\alpha_2, \quad (1.45)$$

donde  $m$  es la masa degenerada de los neutrinos. La característica que hace que el invariante en una base débil de la ecuación (1.44) es el hecho de que, generalmente,

no desaparece, incluso en el límite de que todas las masas de los neutrinos Majorana sean idénticas.

## 2. OSCILACIONES DE NEUTRINOS

En el modelo estándar los neutrinos juegan un rol esencial en la teoría electrodébil  $SU(2) \times U(1)$ . Mientras que los neutrinos son dobletes de  $SU(2)$

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{\ell_i} \\ \ell_i \end{pmatrix}, \ell_i = \{e, \mu, \tau\} \quad (2.1)$$

los neutrinos derechos son singletes de  $SU(2)$ . Ya que la carga electromagnética y la hipercarga de  $U(1)$  difieren por el valor de la tercera componente del isoespín débil

$$Q = T_3 + Y \quad (2.2)$$

se puede ver que los neutrinos derechos  $(\nu_{\ell_i})_R$  no tienen números cuánticos de  $SU(2) \times U(1)$ . Esto tiene dos implicaciones experimentales importantes:

1. Los neutrinos vistos experimentalmente son aquellos producidos por interacciones débiles. Estos son neutrinos puramente izquierdos (estos son los neutrinos del modelo estándar).
2. Como no puede probarse la existencia de neutrinos derechos por medio de procesos de interacción débil, la presencia de éstos únicamente puede verse de forma indirecta, dado el hecho de que los neutrinos tienen masa. Sin embargo, debe notarse que el hecho de que los neutrinos tienen masa, no implica que existan neutrinos derechos [83].

### 2.1. Oscilaciones de neutrinos en el vacío

Dado el hecho de que los neutrinos poseen masa distinta de cero, en general, los neutrinos producidos por interacciones débiles no son eigenestados de masa definida (eigenestados de masa). Estos eigenestados débiles de neutrinos izquierdos son superposiciones de eigenestados de masa de neutrinos  $\nu_i$

$$\nu_{\ell_i} = \sum_i \mathbf{U}_{\ell_j i} \nu_i. \quad (2.3)$$

La matriz  $\mathbf{U}_{\ell_j i}$ , en general, es una matriz de  $3 \times 6$ . Sin embargo, si el mecanismo *seesaw* es el responsable de generar la masa de los neutrinos, se espera que las contribuciones de los neutrinos superpesados a la ecuación (2.3) sea despreciable. Entonces, puede aproximarse correctamente la matriz  $\mathbf{U}_{\ell_j i}$  a una matriz unitaria de  $3 \times 3$ . Que será el caso que tendremos en consideración de ahora en adelante.

### 2.1.1. Oscilaciones con dos familias de neutrinos

Comencemos considerando, para fines ilustrativos, el caso en el que solamente existiesen dos familias de neutrinos, en el cual el fenómeno es muy similar a las oscilaciones de kaones neutros [35]. Como veremos más adelante, este es el caso real de lo que sucede con los neutrinos atmosféricos, en el que solo están presentes dos de las tres familias de neutrinos.

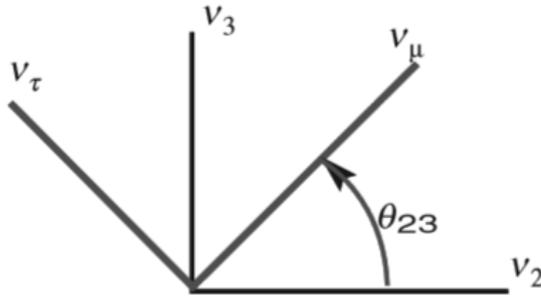
Para este caso, la matriz de mezcla la ecuación (2.3) puede extenderse como

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación puede verse como una rotación en el plano, análogo a lo que sucede en el caso de los quarks

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{23} & \text{sen}\theta_{23} \\ -\text{sen}\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Y puede representarse gráficamente como en la figura 2.1.



**Figura 2.1.** Desfase entre los eigenestados de masa y eigenestados débiles de los neutrinos. Fuente: imagen tomada de [35].

Usando la notación de bra-ket, la ecuación (2.5) puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} |\nu_\mu\rangle &= \cos\theta_{23}|\nu_1\rangle + \text{sen}\theta_{23}|\nu_2\rangle \\ |\nu_\tau\rangle &= -\text{sen}\theta_{23}|\nu_1\rangle + \cos\theta_{23}|\nu_2\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

Los eigenestados de masa  $|\nu_i\rangle$  evolucionan en el tiempo obedeciendo la ecuación de Schrödinger

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t}|\nu_i(0)\rangle; \quad E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}, \quad (2.7)$$

donde se ha tomado en cuenta el carácter relativista de los neutrinos.

Dado que  $m_1 \neq m_2$ , es fácil ver que el eigenestado débil  $\nu_\mu$  producido en  $t = 0$  evoluciona en el tiempo hacia una superposición de los estados  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . Tomando como definición  $|\nu_i\rangle \equiv |\nu_i(0)\rangle$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |\nu_\mu(t)\rangle &= \cos\theta_{23}e^{-iE_1 t}|\nu_1\rangle + \text{sen}\theta_{23}e^{-iE_2 t}|\nu_2\rangle \\ &= (\cos^2\theta_{23}e^{-iE_1 t} + \text{sen}^2\theta_{23}e^{-iE_2 t})|\nu_\mu\rangle + (\cos\theta_{23}\text{sen}\theta_{23}(e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}))|\nu_\tau\rangle \\ &\equiv A_{\mu\mu}(t)|\nu_\mu\rangle + A_{\mu\tau}(t)|\nu_\tau\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando estas ecuaciones, se pueden obtener fácilmente las probabilidades de que en un tiempo  $t$  el estado  $\nu_\mu(t)$  sea un eigenestado débil  $\nu_\mu$  o  $\nu_\tau$

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau; t) &= |A_{\mu\tau}(t)|^2 = \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta_{23}[1 - \cos(E_2 - E_1)t] \\ P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; t) &= |A_{\mu\mu}(t)|^2 = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta_{23}[1 - \cos(E_2 - E_1)t]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ya que las masas de los neutrinos son pequeñas comparados con su momentum, puede escribirse

$$E_i \simeq |p| + \frac{m_i^2}{2|p|}; \quad t \simeq L, \quad (2.10)$$

donde  $L$  es la distancia que han viajado los neutrinos en un tiempo  $t$ . Utilizando esta aproximación ultrarelativista, podemos escribir

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau; L) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} \left[ 1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2|p|} L \right] = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4|p|}, \quad (2.11)$$

donde  $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ . Numéricamente, esto resulta

$$\frac{\Delta m^2 L}{4|p|} \simeq 1.27 \frac{\Delta m^2 L}{|p|} \left[ \frac{(eV^2)(m)}{(MeV)} \right] \quad (2.12)$$

En resumen, para el caso de 2 familias de neutrinos, tenemos que la probabilidad de que un eigenestado débil haya oscilado a un eigenestado débil distinto después de haber viajado una distancia  $L$  es:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau; L) = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left( 1.27 \frac{\Delta m^2 L}{|p|} \right) \quad (2.13)$$

Obviamente, y tal como se definió en la ecuación (2.9), la probabilidad de que dicha oscilación no ocurra es:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; L) = 1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau; L) \quad (2.14)$$

Estas probabilidades dependen de dos factores: 1. el ángulo de mezcla  $\theta_{23}$  y 2. un factor cinético que depende del momentum de los neutrinos y de la diferencia de masas entre ellos.

Obviamente, para que las oscilaciones sean considerables, el factor  $\sin^2 2\theta_{23}$  debe ser por lo menos  $\mathcal{O}(1)$ . Sin embargo, esto no es suficiente. También es importante que el factor cinético  $\Delta m^2 L/|p| \gtrsim \mathcal{O}(1)$ , para que el segundo factor oscilatorio de la ecuación (2.13) sea significativo.

### 2.1.2. Oscilaciones con tres familias de neutrinos

Aunque la derivación de la probabilidad de oscilación para dos sabores de neutrinos contiene la física esencial del proceso, es decir, la relación entre los eigenestados de masa y los eigenestados débiles y que las oscilaciones de originan de un desfase entre éstos, ya es bien conocido que existen en realidad tres neutrinos que participan en interacciones débiles:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . Estos neutrinos son conocidos como *neutrinos activos de sabor*. La derivación de las probabilidades sigue los mismos pasos esenciales, aunque el álgebra requerida sea un poco más laboriosa.

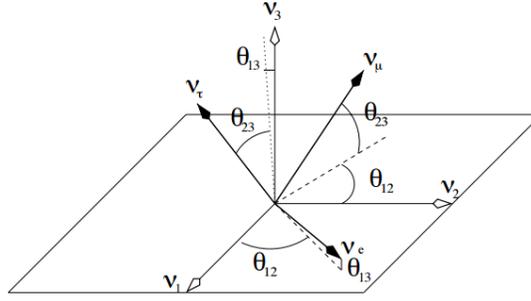
Para este caso, la matriz de mezcla la ecuación (2.3) puede extenderse como

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu 1}^* & U_{\tau 1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu 2}^* & U_{\tau 2}^* \\ U_{e3}^* & U_{\mu 3}^* & U_{\tau 3}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

y parametrizarse como en la ecuación (1.15) y (1.16)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Además, puede representarse gráficamente como en la figura 2.2.



**Figura 2.2.** Desfase entre los eigenestados de masa y eigenestados débiles de tres familias de neutrinos. Fuente: imagen tomada de [143].

Se puede escribir el estado  $|\nu_e\rangle$  como una superposición de los estados  $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$  y  $|\nu_3\rangle$

$$|\nu_e\rangle = U_{e1}^*|\nu_1\rangle + U_{e2}^*|\nu_2\rangle + U_{e3}^*|\nu_3\rangle \quad (2.17)$$

La evolución temporal puede escribirse como

$$|\nu_e(x, t)\rangle = U_{e1}^*|\nu_1\rangle e^{-i(E_1 t - p_1 \cdot x)} + U_{e2}^*|\nu_2\rangle e^{-i(E_2 t - p_2 \cdot x)} + U_{e3}^*|\nu_3\rangle e^{-i(E_3 t - p_3 \cdot x)} \quad (2.18)$$

Ahora, las interacciones débiles de la corriente cargada pueden describirse en términos de los eigenestados débiles de la forma [70]

$$\begin{aligned}
|\nu_e(x, t)\rangle = & U_{e1}^*(U_{e1}|\nu_e\rangle + U_{\mu1}|\nu_\mu\rangle + U_{\tau1}|\nu_\tau\rangle)e^{-i(E_1t-p_1\cdot x)} + \\
& U_{e2}^*(U_{e2}|\nu_e\rangle + U_{\mu2}|\nu_\mu\rangle + U_{\tau2}|\nu_\tau\rangle)e^{-i(E_2t-p_2\cdot x)} + \\
& U_{e3}^*(U_{e3}|\nu_e\rangle + U_{\mu3}|\nu_\mu\rangle + U_{\tau3}|\nu_\tau\rangle)e^{-i(E_3t-p_3\cdot x)}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Puede notarse que los eigenestados débiles en la ecuación anterior, se refieren a el sabor del leptón producido en una interacción débil de corriente cargada con el neutrino respectivo. Refactorizando los términos, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
|\nu_e(x, t)\rangle = & (U_{e1}^*U_{e1}e^{-i(E_1t-p_1\cdot x)} + U_{e2}^*U_{e2}e^{-i(E_2t-p_2\cdot x)} + U_{e3}^*U_{e3}e^{-i(E_3t-p_3\cdot x)})|\nu_e\rangle + \\
& (U_{\mu1}^*U_{\mu1}e^{-i(E_1t-p_1\cdot x)} + U_{\mu2}^*U_{\mu2}e^{-i(E_2t-p_2\cdot x)} + U_{\mu3}^*U_{\mu3}e^{-i(E_3t-p_3\cdot x)})|\nu_\mu\rangle + \\
& (U_{\tau1}^*U_{\tau1}e^{-i(E_1t-p_1\cdot x)} + U_{\tau2}^*U_{\tau2}e^{-i(E_2t-p_2\cdot x)} + U_{\tau3}^*U_{\tau3}e^{-i(E_3t-p_3\cdot x)})|\nu_\tau\rangle
\end{aligned} \tag{2.20}$$

De esta ecuación podemos obtener las probabilidades directamente si escribimos como  $|\nu_e(x, t)\rangle = a_e|\nu_e\rangle + a_\mu|\nu_\mu\rangle + a_\tau|\nu_\tau\rangle$

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) & = |\langle \nu_\mu | \nu_e(x, t) \rangle|^2 = a_\mu a_\mu^* \\
& = |(U_{e1}^*U_{\mu1}e^{-i(E_1t-p_1\cdot x)} + U_{e2}^*U_{\mu2}e^{-i(E_2t-p_2\cdot x)} + U_{e3}^*U_{\mu3}e^{-i(E_3t-p_3\cdot x)})|^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Las probabilidades de oscilación están definidas en términos de los sabores de los leptones cargados producidos en las interacciones débiles y los elementos de la matriz  $\mathbf{U}$  de la ecuación (1.16). Si las fases de las funciones exponenciales en las ecuaciones anteriores fueran las mismas, la condición de unitariedad de la matriz  $\mathbf{U}$  no daría  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 0$ . Por lo tanto, las oscilaciones de neutrinos solo son posibles si estos poseen masa y estas son distintas entre sí.

La ecuación (2.21) puede simplificarse y obtener **[82]**

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = & 2Re[U_{e1}^*U_{\mu1}U_{e2}U_{\mu2}^*(e^{i(\beta_2-\beta_1)} - 1)] + \\
& Re[U_{e1}^*U_{\mu1}U_{e3}U_{\mu3}^*(e^{i(\beta_3-\beta_1)} - 1)] + \\
& Re[U_{e2}^*U_{\mu2}U_{e3}U_{\mu3}^*(e^{i(\beta_3-\beta_2)} - 1)],
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde  $\beta_i = E_i - p_i \cdot x$ .

La probabilidad de que se pueda detectar un neutrino electrónico es su estado original viene dada por

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = & 1 + 2|U_{e1}|^2|U_{e2}|^2 \text{Re}[(e^{i(\beta_2-\beta_1)} - 1)] \\
& + 2|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2 \text{Re}[(e^{i(\beta_3-\beta_1)} - 1)] \\
& + 2|U_{e2}|^2|U_{e3}|^2 \text{Re}[(e^{i(\beta_3-\beta_2)} - 1)]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Esto puede simplificarse aun más si tomamos las mismas consideraciones ultrarelativistas para los neutrinos y notamos que

$$\text{Re}[e^{i(\beta_j-\beta_i)} - 1] = \cos(\beta_j - \beta_i) - 1 = -2\text{sen}^2\left(\frac{\beta_j - \beta_i}{2}\right) = -2\text{sen}^2\left(\frac{m_j^2 - m_i^2}{4p_\nu}\right) L \tag{2.24}$$

Y así podemos reescribir la ecuación (2.23) como

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = & 1 - 2|U_{e1}|^2|U_{e2}|^2 - 2\text{sen}^2\left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4p_\nu}\right) L \\
& - 2|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2 - 2\text{sen}^2\left(\frac{m_3^2 - m_1^2}{4p_\nu}\right) L \\
& - 2|U_{e2}|^2|U_{e3}|^2 - 2\text{sen}^2\left(\frac{m_3^2 - m_2^2}{4p_\nu}\right) L
\end{aligned} \tag{2.25}$$

La probabilidad de que el neutrino electrónico sobreviva depende de las tres diferencias de masas al cuadrado  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ .

## 2.2. Oscilaciones de neutrinos en materia

Cuando los neutrinos se propagan en materia, existe un sutil pero importante efecto que toma lugar que altera la forma en que los neutrinos oscilan entre ellos. El origen de este efecto, el cual se conoce como el efecto MSW en honor a los físicos que lo plantearon por primera vez [106], está relacionado con el hecho de que los neutrinos electrónicos pueden interactuar con la materia a través de interacciones de corrientes cargadas. Mientras que todos los neutrinos interactúan de la misma manera con la materia por medio de las corrientes neutras, el neutrino electrónico experimenta una pequeña diferencia en su índice de refracción gracias a que su eigenestado débil siente interacciones de corrientes cargadas, mientras que los eigenestados débiles del neutrino muónico y del neutrino tauónico no las perciben. Esta diferencia de índices de refracción altera la evolución en el tiempo del sistema de como lo era en el vacío.

Consideremos esta vez únicamente el caso en el que solamente hay dos familias de neutrinos. El índice de refracción relativo  $n_{rel}$  entre  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ , ocasionado por las

interacciones de corriente cargada de  $\nu_e$  puede escribirse como

$$1 - n_{rel} = -\frac{2\pi N_e}{|p|^2} [A(0)|_{\nu_e e} - A(0)|_{\nu_\mu e}], \quad (2.26)$$

donde  $N_e$  es la densidad de electrones y  $A(0)$  es la amplitud de refracción frontal.

La contribución de las interacciones de corrientes neutras se cancela en la ecuación anterior, mientras que la contribución de corrientes cargadas da

$$1 - n_{rel} = \frac{\sqrt{2}G_F N_e}{|p|}. \quad (2.27)$$

Puede utilizarse esta ecuación y el formalismo desarrollado en la sección 2.1.1. para estudiar la evolución de neutrinos en la materia.

Si llamamos a los eigenestados de masa en la materia  $\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$ , se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_M & \text{sen}\theta_M \\ -\text{sen}\theta_M & \cos\theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Con el ángulo de mezcla  $\theta_M$  determinado por [68]

$$\text{sen}2\theta_M = \frac{\frac{\Delta m^2}{4|p|} \text{sen}2\theta_{23}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4|p|} \cos 2\theta_{23} - \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4|p|} \text{sen}2\theta_{23}\right)^2}} \quad (2.29)$$

Vemos que existe una densidad electrónica crítica para la cual el ángulo de mezcla en la materia se vuelve máximo ( $\text{sen}2\theta_M \rightarrow 1$ ), sin importar cual sea el valor del ángulo de mezcla en el vacío.

$$N_e^{crit} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta_{23}}{2\sqrt{2}|p|G_F}. \quad (2.30)$$

La probabilidad de que un  $\nu_e$  se convierta en un  $\nu_\mu$  sigue estando dada por la ecuación (2.13), pero con dos diferencias. Primero, ya que se están considerando oscilaciones en materia  $\text{sin}2\theta_{23} \rightarrow \text{sin}2\theta_M$  y si asumimos que estamos en un medio con  $N_e^{crit}$ , entonces  $\text{sin}2\theta_M \rightarrow 1$ . Segundo, debe hacerse también la sustitución  $\Delta m^2 \rightarrow \Delta m^2 \text{sen}2\theta_{23}$  en el factor cinético de la fórmula de probabilidad.

$$P_{materia}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; L)|_{N_e=N_e^{crit}} = \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4|p|} \text{sen}2\theta_{23} L \right). \quad (2.31)$$

Esta fórmula tiene nos dice que podemos tener una conversión completa de eigenestados débiles  $\nu_e$  en eigenestados débiles  $\nu_\mu$ , si la distancia viaja por el neutrino  $L$  y el momentum  $|p|$  del mismo satisfacen la relación

$$\frac{\Delta m^2}{4|p|} \text{sen} 2\theta_{23} L = \frac{n\pi}{2}; \quad n = 1, 2, \dots . \quad (2.32)$$



### 3. EFECTOS OBSERVABLES DE LAS OSCILACIONES DE NEUTRINOS Y POSIBLES FUENTES DE VIOLACIÓN CP EN EL SECTOR LEPTÓNICO

Las oscilaciones de neutrinos son un efecto mecanocuántico donde un neutrino creado con un sabor específico, puede ser detectado luego teniendo un sabor diferente al original. Como vimos en el capítulo anterior, la probabilidad de medir un sabor de neutrino en particular varía periódicamente conforme el neutrino se mueve en el espacio.

Propuestas por primera vez por Bruno Pontecorvo en 1957, las oscilaciones de neutrinos han sido observadas por una amplia gama de experimentos en diferentes contextos. Las oscilaciones de neutrinos dieron la solución al gran problema de los neutrinos solares.

Las oscilaciones de neutrinos son de gran importancia teórica y experimental, ya que las propiedades específicas del proceso podrían ayudar a entender las características de los neutrinos. Como ya se ha mencionado, en particular, las oscilaciones de neutrinos implican que los neutrinos tienen una masa distinta de cero y el descubrimiento experimental de éstas fue tan importante que se le dio el Premio Nobel de Física en el año 2015 a los observatorios Kamiokande y Sudbury por haber confirmado las oscilaciones de neutrinos.

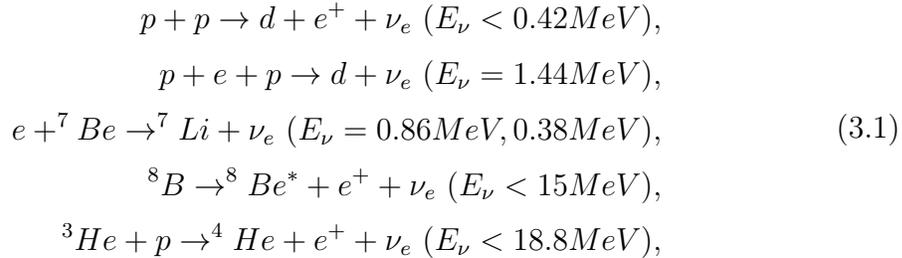
Además la mezcla entre neutrinos parametrizada por la matriz Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata implica que existe un rompimiento de simetría CP en el sector leptónico análogo al que existe en el sector de los quarks.

La parte experimental en el área de oscilaciones de neutrinos es tan importante, que ha sido esta la única forma en que se han podido determinar los parámetros de neutrinos, combinando experimentos con neutrinos solares, atmosféricos, de reactor y de acelerador, que se presentarán en este capítulo. Además es experimentalmente cómo deberá determinarse la magnitud de la violación de simetría CP en el sector

leptónico y si es suficiente para explicar la asimetría bariónica en el universo.

### 3.1. Neutrinos solares, atmosféricos, de reactor y de acelerador

Los neutrinos solares son producidos por cadenas de reacciones nucleares en el núcleo del sol. El flujo de neutrinos solares depende de la temperatura del núcleo solar, su composición química y la sección eficaz de las reacciones nucleares y la opacidad del sol entre otros factores. La mayor parte de neutrinos solares son producidos por la cadena de decaimiento llamada cadena-pp; una fracción más pequeña se cree que es producida por el ciclo carbono, nitrógeno, oxígeno [139]. En la cadena-pp, las siguientes reacciones nucleares producen neutrinos



Aproximadamente el 91 % de los neutrinos solares se producen en la fusión de dos protones [7]. Los neutrinos del proceso que involucra a  ${}^7\text{Be}$  contribuyen con un 10 % del flujo de los neutrinos producidos por la fusión de dos protones. Los neutrinos de alta energía producidos en el decaimiento de  ${}^8\text{B}$  contribuyen solamente con el 0.008 % del flujo total de neutrinos. Por último, la fracción de neutrinos con la que contribuyen los procesos de más alta energía contribuyen solamente en un porcentaje que es aproximadamente tres órdenes de magnitud menor al del  ${}^8\text{B}$ . El espectro de neutrinos solares está calculado con mucha precisión en los modelos solares estándar [25].

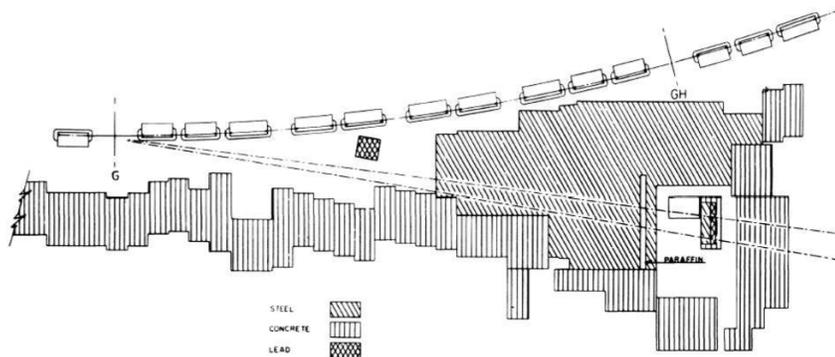
Los neutrinos atmosféricos presentan un rango de energías mucho más amplio que el de los neutrinos solares [128]. Los rayos cósmicos son radiación de partículas de alta energía que llegan a la Tierra provenientes del resto del universo. En el rango de energía de  $\text{GeV}$ , estos rayos cósmicos son mayormente protones, una pequeña fracción son núcleos de helio y una fracción aun más pequeña son núcleos más pesados. Electrones y fotones también forman parte de los rayos cósmicos, aunque estos no contribuyen a la producción de neutrinos.

El rango de energía de estas partículas se eleva hasta energías muy altas y



a las señales de neutrinos y ya que la incerteza asociada con este método de sumatoria es menor al 10%, este contribuye con menos del 1% de la incerteza total en el flujo de  $\bar{\nu}_e$ . Experimentalmente, la tasa observada de producción de positrones en  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$  se ha comparado con la tasa esperada para poner a prueba la precisión de las predicciones hechas para el rango de  $\bar{\nu}_e$  [4].

La idea para producir neutrinos en un acelerador es utilizar un rayo de protones que golpea un blanco nuclear grueso, produciendo partículas inestables talos como mesones  $\pi$  o mesones K. Dichas partículas inestables abandonan el blanco impulsadas hacia el frente con un ligero cambio de orientación producida por el momentum transversal de la partícula secundaria con respecto al del protón y la relación entre el momentum longitudinal de la partícula inestable con respecto al del protón. Los mesones decaen, en muchas formas distintas, a neutrinos de las diferentes familias. Por medio de un escudo, se filtran las demás partículas no deseadas y se permite el paso de neutrinos únicamente. En 1962 se realizó el primer experimento que utilizó neutrinos de acelerador [52] y en la figura 3.2 se muestra la configuración de dicho experimento



**Figura 3.2.** Vista de plante del primer experimento realizado con neutrinos producidos en un acelerador. Fuente: imagen tomada de [52].

### 3.2. Parámetros de neutrinos en la actualidad

La diferencia encontrada entre las predicciones del modelo estándar solar y las observaciones hechas en el experimento Homestake [50] dieron las primeras señales relacionadas con las oscilaciones de neutrinos descritas en el capítulo anterior. Estas observaciones fueron confirmadas por una variedad de experimentos acerca de neutrinos solares como SAGE [3], Gallex [80], GNO [15], Kamiokande [65], Super-Kamiokande [140] y por el observatorio de neutrinos Sudbury [10]. La información

recolectada en estos experimentos llevó a recurrir a una solución que necesitaba un gran ángulo de mezcla para resolver el problema de los neutrinos solares que fue confirmado en 2002 por el reactor de neutrinos KamLAND [57].

Una anomalía similar ha sido observada también para los neutrinos atmosféricos, en donde se toman en cuenta oscilaciones para dos familias de neutrinos como las explicadas en el capítulo 2, en experimentos realizados por IMB [27], Kamio-kande [85], MACRO [16], Soudan-2 [133] y Super-Kamiokande [66], los cuales detectaron una relación entre eventos  $\nu_m$  y  $\nu_e$  menor de la esperada. Los parámetros de los neutrinos atmosféricos también están limitados por los experimentos en aceleradores K2K [13] y MINOS [105]. Ambos experimentos observaron que una fracción de los neutrinos  $\nu_m$  desaparecían en cantidades coherentes con la teoría de la oscilación de neutrinos. En la tabla 1, se presenta un resumen de los resultados de tres análisis globales hechos por González-García, Maltoni y Salvado (GMS) en 2010 [74], Schwetz, Tórtola y Valle (STV) en 2011 [138] y el grupo Bari también en 2011 [61].

**Tabla 3.1.** Valores de los parámetros de los neutrinos con mejor correlación con incertezas de  $1\sigma$  y  $3\sigma$  para oscilaciones de tres sabores de neutrinos. Los parámetros con una sola fila son válidos para orden de masas normal y orden de masas inverso. Los parámetros con dos filas tienen en la primera fila el valor para orden de masas normal y en la segunda fila para orden de masas inverso. Fuente: tomada de [74], [138] y [61]

	GMS	STV	Bari
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} eV^2]$	$7.59 \pm 0.20^{(+0.61)}_{(-0.69)}$	$7.59^{+0.20(+0.60)}_{-0.18(-0.50)}$	$7.58^{+0.22(+0.60)}_{-0.26(-0.59)}$
$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} eV^2]$	$2.46 \pm 0.12(\pm 0.37)$	$2.50^{+0.09(+0.26)}_{-0.16(-0.36)}$	$2.35^{+0.12(+0.32)}_{-0.09(-0.29)}$
	$-2.36 \pm 0.11(\pm 0.37)$	$-[2.40^{+0.08(\pm 0.27)}_{-0.09}]$	$-[2.35^{+0.12(+0.32)}_{-0.09(-0.29)}]$
$\sin^2\theta_{12}$	$0.319 \pm 0.016^{(+0.053)}_{(-0.046)}$	$0.312^{+0.017(+0.048)}_{-0.015(-0.042)}$	$0.312^{+0.017(+0.052)}_{-0.016(-0.047)}$
$\sin^2\theta_{23}$	$0.46^{+0.08(+0.18)}_{-0.05(-0.12)}$	$0.52^{+0.06(+0.12)}_{-0.07(-0.13)}$	$0.42^{+0.08(+0.22)}_{-0.03(-0.08)}$
	$0.46^{+0.08(+0.18)}_{-0.05(-0.12)}$	$0.52 \pm 0.06^{(+0.12)}_{(-0.13)}$	$0.42^{+0.08(+0.22)}_{-0.03(-0.08)}$
$\sin^2\theta_{13}$	$0.0095^{+0.013}_{-0.007} (\leq 0.047)$	$0.013^{+0.007(+0.022)}_{-0.005(-0.012)}$	$0.025 \pm 0.007^{(+0.025)}_{(-0.02)}$
	$0.0095^{+0.013}_{-0.007} (\leq 0.047)$	$0.016^{+0.008(+0.023)}_{-0.006(-0.015)}$	$0.025 \pm 0.007^{(+0.025)}_{(-0.02)}$

Contrario al caso del sector de los quarks, existen dos grandes ángulos de mezcla en el sector leptónico:  $\theta_{12}$  y  $\theta_{23}$ , que son llamados comúnmente ángulo de mezcla solar y ángulo de mezcla atmosférico, respectivamente. Los experimentos actuales indican que, los valores que mejor se ajustan a los modelos son, para  $\theta_{12} \simeq 34^\circ$  y para  $\theta_{23} \simeq 45^\circ$ , mientras que el valor para el ángulo  $\theta_{13}$  ha sido limitado a valores muy pequeños por experimentos con neutrinos en reactores y aceleradores. Como se puede observar en la Tabla 3.1, ya existe evidencia de  $\theta_{13} > 0$  a más de  $3\sigma$ .

Los experimentos con oscilaciones de neutrinos no son sensibles a la escala absoluta de las masas de los neutrinos ya que la frecuencia de oscilación está determinada por la diferencia de masas al cuadrado de los neutrinos  $\Delta m_{ij}^2$  y su energía. Los datos actuales son consistentes con un modelo de tres neutrinos con  $\Delta m_{21}^2 \sim 7.6 \times 10^{-5} eV^2$  y  $|\Delta m_{31}^2| \sim 2.5 \times 10^{-3} eV^2$ , lo cual implica una jerarquía entre estas dos cantidades

$$r \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \simeq \pm 0.03. \quad (3.2)$$

El signo de  $\Delta m_{31}^2$  sigue sin ser determinado, por lo tanto, se podrían tener dos órdenes para las masas de los neutrinos, siendo estos

Orden Normal (ON):  $m_1 < m_2 < m_3$ ,

Orden Inverso (OI):  $m_3 < m_1 < m_2$ .

Para cada caso, las masas de los neutrinos pueden expresarse en términos de la masa más ligera y las diferencias de sus masas al cuadrado  $\Delta m_{ij}^2$ :

$$\begin{aligned} \text{ON: } m_2 &= \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2}, \\ m_3 &= \sqrt{m_1^2 + |\Delta m_{31}^2|}, \\ \text{OI: } m_1 &= \sqrt{m_3^2 + |\Delta m_{31}^2|}, \\ m_2 &= \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{21}^2 + |\Delta m_{31}^2|}. \end{aligned}$$

Dependiendo del valor de la masa del neutrino más ligero, puede clasificarse el espectro de masas de neutrinos como jerárquico (HI):  $m_1 \ll m_2 < m_3$ , jerárquico invertido (IH):  $m_3 \ll m_1 < m_2$  o cuasidegenerado (QD):  $m_1 \simeq m_2 \simeq m_3 \simeq m_0 \gg |\Delta m_{31}^2|$ ,  $m_0 \gtrsim 0.1 eV$ . En los límites HI e IH, las masas de los neutrinos son

$$\begin{aligned} m_2^{HI} &\simeq \sqrt{\Delta m_{21}^2} \simeq 0.009 eV, \\ m_3^{HI} &\simeq m_{1,2}^{IH} \simeq \sqrt{|\Delta m_{31}^2|} \simeq 0.05 eV \end{aligned} \quad (3.3)$$

En cuanto a la violación CP en el sector leptónico, los datos disponibles actualmente no brindan ninguna información sobre las fases de violación CP de Dirac  $\delta$  o de Majorana  $\alpha_{1,2}$ .

### 3.3. Violación del sabor leptónico

En el sector quark, la única fuente de violación de simetrías de sabor y CP es la matriz de mezcla CKM. Un gran número de eventos observables han sido

cruciales para la limitación de la cota en la que se encuentran la fase de violación CP de esta matriz y para poner a prueba del marco de trabajo de la matriz CKM. En general, si existe física más allá del modelo estándar, existen nuevas fuentes de violación de simetrías de sabor y CP. Tomar en cuenta estas nuevas fuentes podría generar desviaciones de las predicciones hechas si solamente se toma en cuenta el modelo estándar. En el sector leptónico, la situación es muy diferente, ya que la única evidencia experimental de violación de sabor viene de las oscilaciones de neutrinos, lo que requiere la existencia de una matriz de mezcla leptónica  $\mathbf{U}$ , análoga a la matriz CKM en el sector quark. Una matriz de este tipo, conduciría a la existencia de procesos leptónicos que violan la simetría de sabor, tal como un decaimiento radiactivo de leptones cargados  $l_i \rightarrow l_j \gamma$  [49]. Además, si hay violación de simetría CP en el sector leptónico, los momentos de dipolo eléctrico de los leptones cargados darían también una contribución ya que como no puede existir un momento de dipolo igual a cero en el caso de los acoplamientos complejos de Yukawa, existe una nueva fase de violación CP dentro de estos acoplamientos [122].

La observación de cualquier proceso leptónico de violación de sabor que no sean las oscilaciones de neutrinos o la medición de los momentos de dipolo eléctrico de los leptones cargados sería una señal clara de nueva física. Sin embargo, ninguno de tales procesos ha sido observado todavía.

Si las pequeñas masas de los neutrinos son el único origen de violación de sabor en el sector leptónico, entonces los *branching ratios* (BR) para los decaimientos radiactivos que violan la simetría de sabor vienen dados por

$$\frac{BR(l_i \rightarrow l_j \gamma)}{BR(l_i \rightarrow l_j \bar{\nu}_j \nu_i)} = \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \sum_{k=2,3} \mathbf{U}_{ik}^* \mathbf{U}_{jk} \frac{\Delta m_{k1}^2}{m_W^2} \right|^2 \lesssim \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \frac{\Delta m_{31}^2}{m_W^2} \right|^2 \sim \mathcal{O}(10^{-53}), \quad (3.4)$$

donde la unitariedad de la matriz  $\mathbf{U}$  y el valor actual de  $|\Delta m_{31}^2|$  han sido utilizados para calcular el orden de la estimación. Este resultado muestra que, si las masas de los neutrinos son agregadas al modelo estándar para explicar la oscilación de neutrinos, las tasas de los procesos leptónicos de violación de sabor siguen siendo demasiado bajas para la precisión de los experimentos [23][45][147].

Esto es debido a que existe un mecanismo de supresión que actúa de manera muy imponente en el sector leptónico y es el mecanismo de Glashow-Iliopoulos-Maiani [72]. Por lo tanto, es de vital importancia para la física estudiar modelos más allá del modelo estándar donde este mecanismo actúe de manera menos poderosa.

Escenarios interesantes en los que la violación de sabor leptónica es más evidentemente observable son aquellos en que las nuevas fuentes de violación de sabor leptónica están relacionadas de alguna forma a aquellas relacionadas con el origen de la masa de los neutrinos y su mezcla. Por ejemplo, si los neutrinos obtienen sus masas por medio de un mecanismo de *seesaw*, entonces los mediadores del mecanismo podrían inducir una violación de sabor leptónica en procesos de uno o tres lazos por su participación directa en el decaimiento. En estos casos, las masas de estos nuevos estados podrían quedar no muy lejos de la escala electrodébil. En el caso del mecanismo *seesaw* tipo I, la dependencia del sabor de las amplitudes de los procesos de un lazo  $l_i \rightarrow l_j \gamma$  está contenida en los coeficientes  $F_{ij} = (\mathbf{Y}^{\nu\dagger} \mathbf{d}_M^{-2} \mathbf{Y}^\nu)_{ij}$ , donde  $\mathbf{Y}^\nu$  es la matriz de Dirac de acoplamientos de Yukawa para los neutrinos y  $\mathbf{d}_M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ ;  $M_i$  son las masas de los neutrinos pesados Majorana. Por otro lado, de la ecuación (1.31) se puede ver que la matriz efectiva de masa de neutrinos es proporcional a  $\mathbf{Y}^\nu \mathbf{d}_M^{-1} \mathbf{Y}^{\nu T}$ . De aquí podemos observar que no existen una dependencia directa en el modelo en la forma de relacionar los parámetros de los neutrinos con la búsqueda de violación de sabor leptónica bajo el punto de vista del mecanismo *seesaw* tipo I. Esto es debido principalmente al hecho de que no se pueden escribir los acoplamientos  $\mathbf{Y}^\nu$  y las masas  $M_i$ , incluso si se conoce la matriz de masa efectiva de los neutrinos.

Bajo el punto de vista del mecanismo *seesaw* tipo II, la situación cambia. Esto es consecuencia de que en este mecanismo, las masas de los neutrinos se generan con el intercambio, a tres lazos, de tripletes escalares. Esto induce  $l_i \rightarrow l_j \gamma$  a un lazo [38], mientras que los decaimientos que violan la simetría de sabor aparecen directamente a tres lazos [26].

### 3.4. Efectos no unitarios en el sector leptónico

La búsqueda de desviaciones de la mezcla unitaria son una prueba sensible de física que va más allá del modelo estándar. En el sector de los quarks, se ha realizado una gran variedad de estudios con el objetivo de encontrar desviaciones a la unitariedad de la matriz de mezcla CKM. De forma similar, en el sector leptónico pueden tener lugar efectos no unitarios cuando se toma en consideración física más allá del modelo estándar. Probablemente el mejor ejemplo que puede darse es el mecanismo *seesaw* tipo I descrito anteriormente, donde la matriz de mezcla debe extenderse a una forma  $(3 + n_R) \times (3 + n_R)$ , donde  $n_R$  es el número de neutrinos derechos pesados con masa típica  $M \gg v$ . En este caso, la matriz de mezcla leptónica

no unitaria se deriva del hecho de que esta matriz está ahora contenida dentro de una matriz más grande que sí es unitaria, ya que la teoría completa debe respetar la conservación de la probabilidad [136]. Después del desacoplamiento de los estos estados, se genera un operador hexadimensional de la forma  $(\bar{\ell}\tilde{\phi})i\cancel{\partial}(\tilde{\phi}^\dagger\ell)7M^2$  [44] el cual induce una contribución a la energía cinética del neutrino, disminuida por  $v^2/M^2$ , debido al rompimiento de simetría electrodébil. Por lo tanto, una redefinición del campo es necesaria para restaurar el término cinético a su forma canónica. Esto introduce mezclas no unitarias a las corrientes cargada y neutra del lagrangiano.

En el mecanismo *seesaw* tipo I convencional, los efectos no unitarios son muy pequeños como para ser observados. Sin embargo, este no será el caso en otros modelos tal como el mecanismo *seesaw* inverso [75][112]., en el cual el efecto de la supresión de masa se ve aliviado sin perjudicar la magnitud de las masas de los neutrinos ligeros. En otras palabras, en este modelo el operador pentadimensional responsable de la supresión de la masa de los neutrinos puede desacoplarse del operador hexadimensional, permitiendo efectos no unitarios más notorios y esto, a su vez, provocaría la aparición de fenomenología nueva. Efectos similares aparecen en modelos con grandes mezclas entre neutrinos pesados y ligeros [120][142], y en escenarios con dimensiones extras donde la mezcla de modos Kaluza-Klein con los neutrinos ligeros puede provocar efectos no unitarios [36]. Otra posible fuente de efectos no unitarios proviene de correcciones de lazos a las autoenergías de los leptones cargados o de los neutrinos [28] las cuales modifican los términos cinéticos correspondientes, induciendo de este modo efectos no unitarios. También pueden hacerse correcciones directas a la matriz de mezcla  $\mathbf{U}$ .

Al estudiar los efectos no unitarios en el sector leptónico, una aproximación independiente del modelo puede adoptarse de tal forma que las fuentes de los efectos no unitarios no sean especificadas, si nos enfocamos en particular en un modelo conocido como el modelo de la mínima violación a la unitariedad, en el cual las fuentes de efectos no unitarios son permitidas únicamente en los términos del lagrangiano correspondientes a los neutrinos y se consideran tres neutrinos ligeros [17]. Bajo esta suposición, la masa y el sabor de los eigenestados de los neutrinos están relacionados por medio de una matriz  $\mathbf{N}$  no unitaria de  $3 \times 3$  tal que  $\nu_\alpha = \mathbf{N}_{\alpha k}\nu_k$ . En la base de masas adecuada, las corrientes cargada y neutra del lagrangiano toman la forma [89]

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^\dagger \bar{l}_\alpha \gamma_\mu P_L \mathbf{N}_{\alpha k})\nu_k + c.h. \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}_{CN} = -\frac{g}{\cos\theta_W} [Z_\mu \bar{\nu}_k P_L (\mathbf{N}^\dagger \mathbf{N})_{kj} \nu_j] + c.h. \quad (3.6)$$

Estas modificaciones dan lugar a nuevos efectos en una amplia gama de fenómenos físicos tal como la oscilación de neutrinos, pruebas de universalidad y decaimientos electrodébiles, que pueden ser usados para poner a prueba la unitariedad en la mezcla leptónica. Con este fin, se han realizados análisis detallados en la literatura buscando cuantificar las desviaciones en la unitariedad de  $\mathbf{N}$ , tomando en consideración una gran cantidad de procesos físicos. A continuación, se revisarán las principales conclusiones de dichos análisis.

### 3.4.1. Oscilaciones no unitarias de neutrinos

En la ausencia de unitariedad, el sabor del neutrino y sus eigenestados de masa, no pueden ser ortogonales al mismo tiempo. Como consecuencia, la probabilidad de oscilación  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  en función de la distancia  $L$  viajada por el neutrino puede escribirse [51]

$$P_{\alpha\beta} = \frac{|\sum_k \mathbf{N}_{\beta k} e^{-iE_k L} \mathbf{N}_{\alpha k}^*|^2}{(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\alpha\alpha}(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\beta\beta}} \quad (3.7)$$

Una consecuencia inmediata de este resultados es que una transición de sabor es posible a una distancia cero ( $L = 0$ ) antes de las oscilaciones [96], con una probabilidad de transición dada por

$$P_{\alpha\beta}(L = 0) = \frac{|(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\beta\alpha}|^2}{(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\alpha\alpha}(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\beta\beta}} \quad (3.8)$$

Este resultado puede ser puesto a prueba en experimentos de oscilaciones de neutrinos con detectores cercanos. Una serie de experimentos distintos han dado las siguientes cotas para  $\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger$  [6][21][53]

$$\begin{aligned} |(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{e\alpha}| &\simeq (1.00 \pm 0.04, < 0.05, < 0.09) \\ |(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\mu\alpha}| &\simeq (1.00 \pm 0.04, < 0.05, < 0.013) \\ |(\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger)_{\tau\alpha}| &\simeq (< 0.09, < 0.013), \end{aligned} \quad (3.9)$$

En el vacío, la probabilidad de la oscilación de desaparición es

$$P_{\alpha\alpha} = \sum_{k=1}^3 |\mathbf{N}_{\alpha k}|^4 + \sum_{k \neq j=1}^3 |\mathbf{N}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{N}_{\alpha j}|^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad (3.10)$$

Por otro lado, las probabilidades de oscilación en la materia se ven modificados con respecto a la unitariedad del caso, ya que el potencial efectivo percibido por los neutrinos no es diagonal [8][60]. Adicional a esto, la contribución de la corriente neutra al potencial de la materia, se suma a la evolución de la ecuación cuando ésta ya no se puede interpretar como una fase global.

Dependiendo de la relación  $L/E$ , la ecuación anterior puede simplificarse y utilizarse para encontrar cotas para los elementos de  $\mathbf{N}$  o para combinaciones de éstos. Los datos combinados de KamLAND [19], CHOOZ [18], SNO [11] y K2K [12] provee los siguientes valores de  $|\mathbf{N}|$

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_{ej}| &\simeq (0.75 - 0.89, 0.45 - 0.66, < 0.34) \\ |\mathbf{N}_{\mu 1}| + |\mathbf{N}_{\mu 2}| &= 0.57 - 0.86 \\ |\mathbf{N}_{\mu 3}| &\simeq 0.57 - 0.86 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por otro lado, experimentos con neutrinos atmosféricos y de acelerador no permiten discriminar entre  $|\mathbf{N}_{\mu 1}|^2$  y  $|\mathbf{N}_{\mu 2}|^2$ . Sin embargo, estas dos cantidad pueden desacoplarse si se toman en cuenta las cotas de la ecuación (3.11), con lo cual se obtiene un resultado de

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_{ej}| &\simeq (0.75 - 0.89, 0.45 - 0.66, < 0.27) \\ |\mathbf{N}_{\mu j}| &\simeq (0.00 - 0.69, 0.22 - 0.81, 0.57 - 0.85) \end{aligned} \quad (3.12)$$

El hecho de que no existan cotas para la tercera fila de elementos de  $\mathbf{N}$  es debido al hecho de que no existe evidencia de oscilaciones de  $\nu_\tau$ .

### 3.4.2. Restricciones no unitarias para decaimientos electro-débiles

Se sabe desde hace tiempo que la no unitariedad de la matriz de mezcla leptónica inducida por la mezcla de neutrinos ligeros puede manifestarse en procesos de tres niveles como lo son los decaimientos  $\pi$ ,  $W$  y  $Z$  [93], en raros decaimientos de leptones cargados de la forma  $l_j \rightarrow l_j \gamma$ ,  $l_j \rightarrow 3l_j$ ,  $l_j \rightarrow l_i l_i l_k$  y conversiones  $\mu - e$  en

los núcleos [86]. Recientemente, se han realizado nuevos estudios sobre este tema, donde las restricciones para los efectos no unitarios en el sector leptónico han sido analizadas, considerando los procesos electrodébiles listados anteriormente en busca de datos experimentales más recientes [1-2].

Considerando únicamente la violación mínima a la unitariedad,  $W \rightarrow l_\alpha \nu_\alpha$  y decaimientos  $Z$  invisibles nos llevan a las condiciones

$$\frac{(\mathbf{NN}^\dagger)_{\alpha\alpha}}{\sqrt{(\mathbf{NN}^\dagger)_{ee}(\mathbf{NN}^\dagger)_{\mu\mu}}} = f_\alpha, \quad (3.13)$$

$$\frac{\sum_{\alpha\beta} |(\mathbf{NN}^\dagger)_{\alpha\beta}|^2}{\sqrt{(\mathbf{NN}^\dagger)_{ee}(\mathbf{NN}^\dagger)_{\mu\mu}}} = 2.984 \pm 0.009, \quad (3.14)$$

respectivamente, con  $f_{e,\mu,\tau} = (1.000 \pm 0.024, 0.986 \pm 0.028, 1.002 \pm 0.032)$ . Por otro lado, del decaimiento de leptones cargados  $l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma$ , se puede escribir

$$\frac{|(\mathbf{NN}^\dagger)_{\alpha\beta}|^2}{\sqrt{(\mathbf{NN}^\dagger)_{\alpha\alpha}(\mathbf{NN}^\dagger)_{\beta\beta}}} = \frac{96\pi}{100\alpha_{em}} \frac{BR(l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma)}{BR(l_\alpha \rightarrow \nu_\alpha l_\beta \bar{\nu} u_\alpha)}. \quad (3.15)$$

La combinación de las restricciones provenientes de los decaimientos electrodébiles llevan a las siguientes cotas para  $|(\mathbf{NN}^\dagger)|$  [17]:

$$|(\mathbf{NN}^\dagger)| \approx \begin{pmatrix} 1.002 \pm 0.005 & < 7.2 \times 10^{-5} & < 8.8 \times 10^{-3} \\ < 7.2 \times 10^{-5} & 1.003 \pm 0.005 & < 10^{-2} \\ < 8.8 \times 10^{-3} & < 10^{-2} & 1.003 \pm 0.005 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Se puede concluir que los datos provenientes de decaimientos débiles son evidencia firme de la unitariedad de la matriz de mezcla leptónica. El mejoramiento de los límites relacionados los poco comunes decaimientos de leptones cargados, proveerá nuevas fronteras para los efectos leptónicos no unitarios. Además, mediciones futuras más precisas llevadas a cabo en oscilaciones de neutrinos jugarán un rol crucial en poner a prueba la unitariedad en la mezcla leptónica. También vale la pena hacer énfasis que las conclusiones anteriores se sacan al considerar la mínima violación a la unitariedad. Si se va más allá de este simple escenario y se consideran casos particulares con efectos no unitarios tomando en cuenta nueva física, otras limitantes podrían aparecer. Tal y como lo sería el caso del mecanismo *seesaw* tipo III, donde deben agregarse tripletes fermiónicos a las partículas contenidas en el

modelos estándar y procesos como  $l_j \rightarrow l_i l_k l_k$  o la conversión  $\mu - e$  en los núcleos se vuelven posibles en procesos de tercer nivel. Por consiguiente, las restricciones impuestas a la falta de unitariedad de la matriz de mezcla leptónica se vuelven más fuertes cuando se comparan con el caso de la mínima violación a la unitariedad. En particular, para el límite actual para la tasa de conversión  $\mu - e$ , se obtiene  $|(\mathbf{NN}^\dagger)_{e\mu}| < 1.7 \times 10^{-7}$ . Además, los límites para  $|(\mathbf{NN}^\dagger)_{e\tau}|$  y  $|(\mathbf{NN}^\dagger)_{\mu\tau}|$  también se ven mejorados a un orden de  $\sim 10^{-3}$  cuando se consideran los límites experimentales para las tasas de  $\tau \rightarrow 3l$  [2]

### 3.4.3. No unitariedad y la violación CP leptónica

En analogía con el sector de los quarks, la observación de violación de simetría CP en el sector leptónico hará que automáticamente surja la pregunta de si el fenómeno puede explicarse dentro de un marco donde la única fuente de violación de CP sea la fase de Dirac  $\delta$ . Este podría no ser el caso si la mezcla leptónica no es unitaria. En el caso discutido anteriormente para una violación mínima de unitariedad, existen tres fases extras que actúan como fuentes de violación CP leptónica en la matriz de mezcla  $\mathbf{N}$ . Actualmente, estas fases no se encuentran ligadas por los datos experimentales de oscilación de neutrinos y de experimentos electrodebiles. Aunque la mínima violación a la unitariedad sea un escenario representativo de falta de unitariedad en el sector leptónica, se ha demostrado que hay lugar para considerar nuevos efectos de la violación CP incluso en un marco tan limitado [14].

Siguiendo el trabajo de [60], se pueden parametrizar desviaciones de la unitariedad escribiendo  $\mathbf{N} = (1 + \eta)\mathbf{U}$ , donde  $\eta$  es una matriz hermitiana que contiene nueve parámetros nuevos: 6 módulos y 3 fases. Los límites en los elementos  $\eta_{\alpha\beta}$  pueden obtenerse de los límites de  $\mathbf{NN}^\dagger$  considerando que  $(\mathbf{NN}^\dagger)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 2\eta_{\alpha\beta}$ . La principal pregunta sería entonces qué tanto se desvían estas posibles desviaciones a la unitariedad de las observaciones de violación CP no estándar en oscilaciones de neutrinos. Para comprender esto, se deben escribir las probabilidades de transición  $P_{\alpha\beta}$  y las asimetrías CP  $A_{\alpha\beta} \equiv (P_{\alpha\beta} - \bar{P}_{\alpha\beta}) / (P_{\alpha\beta} + \bar{P}_{\alpha\beta})$  en el escenario de mínima violación a la unitariedad [77], las cuales recibirán nuevas contribuciones de  $\eta_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} e^{i\theta_{\alpha\beta}}$ , donde  $\theta_{\alpha\beta}$  son las nuevas fases que violan CP.

En el escenario de mínima violación a la unitariedad, las asimetrías de canal dorado  $A_{e\mu}$  no se desvían significativamente del caso unitario estándar debido a los fuertes límites establecidos para  $\eta_{e\mu}$ . Ya que los efectos de la nueva física ya se han restringido a tener poca significancia en este caso, el canal mencionado probable-

mente sea el más apropiado para una determinación adecuada de los parámetros de mezcla leptónica. Por otro lado, las probabilidad de transición y sus correspondientes asimetrías para los restantes canales de oscilación puede ser afectados considerablemente por los efectos ocasionados por nueva física. Por ejemplo, para las oscilaciones  $\mu\tau$

$$A_{\mu\tau} \simeq A_{\mu\tau}^{MS} - 4\eta_{\mu\tau} \cot\Delta_{31} \sin\delta_{\mu\tau} \quad (3.17)$$

donde  $A_{\mu\tau}^{MS}$  es la asimetría CP en el modelo estándar unitario, la cual es generalmente de  $\mathcal{O}(\infty^{-3})$ , mientras que la nueva contribución es proporcional a  $\eta_{\mu\tau}$  y puede ser tan grande como  $\sim 10^{-1}$ . El modelo estándar unitario de la violación de CP leptónica quedaría desestimada en el caso de que una o más asimetrías no sean compatibles con los límites establecidos.

## 4. VIOLACIÓN CP: MOTIVACIÓN TEÓRICA Y DETERMINACIÓN INDIRECTA DE LA FASE DE VIOLACIÓN DE SIMETRÍA CP DE DIRAC $\delta$ PARA DISTINTAS TEXTURAS DE MEZCLA DE NEUTRINOS A TRAVÉS DE PARÁMETROS DE OSCILACIONES DE NEUTRINOS

Si partimos de la hipótesis de que existió un período de inflación en el universo temprano [99], cualquier asimetría primordial en el universo debió haber sido diluida exponencialmente en el período inflacionario. Por lo tanto, más que haber sido un estado inicial del universo, la asimetría observada de materia y antimateria en el universo debió generarse de forma dinámica. En 1967, Sakharov se dio cuenta de la necesidad de un mecanismo dinámico responsable de la generación de la asimetría bariónica en el universo y propuso tres condiciones que serían necesarias para crear dicha asimetría si se tiene un estado inicial que posee un número bariónica igual a cero [131]:

1. Violación del número bariónico,
2. Violación de la simetría C y violación de la simetría CP,
3. Procesos que ocurrieran fuera del equilibrio térmico.

La primera condición de Sakharov nos dice que necesitamos que exista un proceso que tenga la forma

$$X \rightarrow Y + B \tag{4.1}$$

donde  $X$  y  $Y$  tiene número bariónico igual a cero y  $B$  es un exceso de bariones, es decir  $B > 0$ . La existencia de este tipo de procesos es de algún modo obvia si requerimos que exista una asimetría bariónica en el universo.

La violación del número bariónico por sí sola no es suficiente para explicar la asimetría entre la cantidad de materia y antimateria en el universo. Si se conserva la simetría C, entonces todo proceso que viole B, tendrá la misma probabilidad de ocurrir que su conjugado en C

$$\Gamma(X \rightarrow Y + B) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow \bar{Y} + \bar{B}) \quad (4.2)$$

Ya que ambos procesos ocurrirían a la misma tasa, B se conservaría sobre largos períodos de tiempo. Así se explica que sea necesaria también la violación de C y que esta sea una de las condiciones de Sakharov.

Esto sigue sin ser suficiente. Si se considera un proceso que viole B de la forma  $X \rightarrow q_L q_L$  que genere bariones izquierdos. Si se conservara la simetría CP, este proceso ocurriría a la misma tasa que el proceso conjugado en CP  $\bar{X} \rightarrow q_R q_R$ , entonces

$$\Gamma(X \rightarrow q_L q_L) + \Gamma(X \rightarrow q_R q_R) = \Gamma(\bar{X} \rightarrow q_L q_L) + \Gamma(\bar{X} \rightarrow q_R q_R) \quad (4.3)$$

Así, a pesar de que los procesos conjugados en C tengan probabilidades distintas, la suma de los dos procesos conservaría aún el número bariónico (y generaría una asimetría de quiralidad). Por lo tanto, también se requiere que se viole CP, para que la producción de bariones exceda a la producción de antibariones.

Aun con estas tres asimetrías trabajando a favor de la producción de bariones sobre la producción de antibariones, debemos considerar también factores termodinámicos. En equilibrio térmico, la distribución de Boltzmann dicta que debe existir un número igual de materia que de antimateria. Esto puede verse de [145]

$$\begin{aligned} \langle \hat{B} \rangle &= Tr(e^{-\beta H} \hat{B}) \\ &= Tr[(CPT)(CPT)^{-1} e^{-\beta H} \hat{B}] \\ &= Tr[e^{-\beta H} (CPT)^{-1} \hat{B} (CPT)] \\ &= -Tr(e^{-\beta H} \hat{B}) \\ &= -\langle \hat{B} \rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $\langle \hat{B} \rangle$  es el valor esperado para el operador de número bariónico. Esto quiere decir que el valor esperado para el número bariónico en el equilibrio térmico es igual a cero. En otras palabras, dentro del equilibrio térmico la tasa dada para cualquier proceso que produzca un exceso de bariones es igual a la tasa para el proceso inverso, así que no se genera ninguna asimetría ya que el proceso inverso se encarga de revertir el efecto del proceso que genera dicha asimetría. Es una consecuencia que

la asimetría bariónica debe generarse fuera del equilibrio térmico. Por suerte, estos procesos fuera del equilibrio térmico son muy comunes en el universo temprano, cuando las tasas de las interacciones no pueden equiparar a la tasa de expansión.

Estas condiciones son necesarias, mas no suficientes para explicar la asimetría bariónica que existe actualmente, ya que no proporciona el mecanismo por el cual se produce dicha asimetría.

El valor actual establecido para la asimetría bariónica del universo fue inferido por los datos de WMAP combinados con oscilaciones acústicas de bariones [91]

$$\eta_B \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} = (6.20 \pm 0.15) \times 10^{-10}, \quad (4.5)$$

donde  $n_B$ ,  $n_{\bar{B}}$  y  $n_\gamma$  son las densidades de bariones, antibariones y fotones actualmente, respectivamente. La explicación para un valor tan pequeño pero distinto de cero genera un desafío tanto para la física de partículas como para la cosmología. Cabe la pena resaltar que el modelo estándar de partículas cumple con las tres condiciones de Sakharov. Sin embargo, no todas ellas están presentes en la cantidades necesarias. El número bariónico se viola en procesos electrodébiles con *sphalerones* [34] que son rápidos y sin supresiones en el universo temprano. La simetría C se viola en forma máxima en las interacciones débiles y la simetría CP es violada por la fase presente en la matriz CKM. Sin embargo, si la producción de bariones ocurre a la escala de transición electrodébil  $T_{ed} \sim \mathcal{O}(100)$  GeV, la magnitud de la violación CP, parametrizada en el modelo estándar por el invariante  $\mathcal{J}_{quark}^{CP}$  de la ecuación (1.33), parece ser insuficiente para generar el valor requerido de  $\eta_B$ , por lo cual, se requerirían nuevas fuentes de violación de simetría CP (como la fase de violación CP de Dirac  $\delta$ ) [127]. Además la producción de bariones exitosa requiere una fuerte transición de primer orden, la cual podría ocurrir si la masa del bosón de Higgs fuese lo suficientemente ligera,  $m_H \lesssim 70 \text{ GeV}$ , pero este valor se encuentra muy lejos del valor ya establecido para la masa del bosón de Higgs  $m_H = (125.09 \pm 0.21)$  GeV [22]. Por lo tanto, la explicación para la asimetría bariónica observada en el universo debe provenir de una fuente dada por física más allá del modelo estándar (como la oscilación de neutrinos).

Esta búsqueda por determinar la magnitud de la fase de rompimiento de simetría CP en el sector leptónico es una de las preguntas abiertas más importantes en el campo de la física contemporánea, ya que tendría consecuencias desde el campo de física de altas energías hasta la cosmología. Es importante determinar la magnitud de violación CP en el sector leptónico, si es que existe, ya que, aunque se ha com-

probado que este fenómeno existe en el sector de los quarks, no es suficiente para explicar la magnitud de la asimetría bariónica  $\eta_B$  y la violación de simetría CP en el sector leptónico podría dar la contribución que falta para explicar esta asimetría bariónica sin necesidad de agregar nuevas partículas o interacciones a las que ya están contenidas dentro del modelo estándar.

Utilizando estas ideas como motivación, se explorarán tres escenarios: donde la matriz de mezcla de neutrinos  $\mathbf{U}_\nu$  viene dada por la matriz TBM [81], la matriz BM [113] y la matriz democrática [113], y la matriz de mezcla de leptones cargados está parametrizada según [30]

$$\mathbf{U}_\ell = \begin{pmatrix} c_{12}^\ell c_{13}^\ell & s_{12}^\ell c_{13}^\ell & s_{13}^\ell e^{-i\delta^\ell} \\ -s_{12}^\ell c_{23}^\ell - c_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & c_{12}^\ell c_{23}^\ell - s_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & s_{23}^\ell c_{13}^\ell \\ s_{12}^\ell c_{23}^\ell - c_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & -c_{12}^\ell c_{23}^\ell - s_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & c_{23}^\ell c_{13}^\ell \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde  $c_{ij}^\ell$  y  $s_{ij}^\ell$  representan a  $\cos\theta_{ij}^\ell$  y  $\sin\theta_{ij}^\ell$  respectivamente y  $\delta^\ell$  es una fase análoga a  $\delta$ . Nótese que no se incluyen fases de majorana en este escenario. También hay que notar que la parametrización usada para  $\mathbf{U}_\ell$  es la misma que se usa comúnmente para  $\mathbf{U}_{PMNS}$  (ecuación (1.16)) con  $\theta_{ij}$  y  $\delta$  reemplazados por  $\theta_{ij}^\ell$  y  $\delta^\ell$  respectivamente. Usando la definición de la matriz  $\mathbf{U}_{PMNS} \equiv \mathbf{U}_\ell^\dagger \mathbf{U}_\nu$  se obtienen ecuaciones distintas que relacionan los diferentes ángulos de mezcla con la fase de rompimiento CP dependiendo cuál matriz se elija como la matriz de mezcla de neutrinos.

El método Monte Carlo propuesto trabaja generando valores aleatorios para los ángulos de mezcla  $\theta_{12}^\ell$ ,  $\theta_{13}^\ell$ ,  $\theta_{23}^\ell$  y la fase de violación CP de Dirac  $\delta^\ell$ . Luego, valúa este juego de cuatro valores, uno para cada ángulo y la fase, en la primera ecuación obtenida y verifica que el valor obtenido para  $\sin^2\theta_{13}$  coincida con los parámetros experimentales de la tabla 3.1. Si el valor obtenido para  $\sin^2\theta_{13}$  concuerda con los parámetros experimentales, entonces valúa el juego de valores en la siguiente ecuación y compara el valor obtenido para  $\sin^2\theta_{23}$  con el rango dado por la tabla 3.1. Si este coincide, entonces valúa el juego de valores en la ecuación final y compara con el rango dado para  $\sin^2\theta_{12}$ . En caso de que el conjunto de valores no cumpla con la condición a probar, en cualquiera de las tres etapas, la combinación de cuatro valores es desechada y se genera una nueva y se repite el proceso. El código está diseñado para encontrar cuantas coincidencias requiera el usuario. (Ver apéndice A)

A continuación, los resultados que se presentan corresponden a regiones en los espacios de  $\theta_{ij}^\ell$  y  $\delta^\ell$ , utilizando los límites fenomenológicos encontrados en [29], que satisfacen los valores experimentales de la tabla 3.1 para distintos niveles de  $\sigma$ .

#### 4.1. Matriz de mezcla tri-bimaximal (TBM)

La matriz TBM está parametrizada de la siguiente forma

$$\mathbf{U}_{TBM} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

En TBM el eigenestado de masa  $\nu_2$  sufre una trimezcla máxima entre los tres eigenestados de sabor de los neutrinos, mientras que el eigenestado de masa  $\nu_3$  sufre una bimezcla máxima entre los sabores  $\mu$  y  $\tau$ . La evidencia de que  $\nu_3$  sufre una bimezcla máxima viene de los resultados experimentales de experimentos hechos sobre neutrinos atmosféricos [66][133] respaldados por los datos de K2K [12]. También por los resultados de experimentos con neutrinos en reactores como CHOOZ [18] y Palo Verde [39]. Los factores experimentalmente claves son  $|U_{\mu 3}|^2 \simeq 0.50 \pm 0.11$  y  $|U_{e 3}|^2 < 0.04 \pm 0.11$  [62]. Los datos experimentales que soportan que  $\nu_2$  sufre una trimezcla máxima viene dada por la relación entre las interacciones  $CC/CN$  obtenidos en SNO [46][95], ya que esta mide directamente la probabilidad de sobrevivencia del neutrino electrónico dando un valor de  $|U_{e 3}|^2 \simeq 0.35 \pm 0.03$  lo cual es consistente con la matriz de mezcla TBM.

Las ecuaciones que se obtienen sustituyendo  $\mathbf{U}_\nu = \mathbf{U}_{TBM}$  son (ver apéndice B)

$$\text{sen}^2\theta_{13} = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} + C_1 C_2 \cos\delta^\ell, \quad (4.8)$$

$$\text{sen}^2\theta_{12} = \frac{C_3^2 + C_4^2 - 2C_3 C_4 \cos\delta^\ell}{3(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.9)$$

$$\text{sen}^2\theta_{23} = \frac{C_6^2 + C_5^2 - 2C_6 C_5 \cos\delta^\ell}{2(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{sen}\theta_{12}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell + \text{cos}\theta_{23}^\ell), & C_2 &= \text{cos}\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell - \text{cos}\theta_{23}^\ell), \\ C_3 &= \text{sen}\theta_{12}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell - \text{cos}\theta_{23}^\ell) + \text{cos}\theta_{12}^\ell \text{cos}\theta_{13}^\ell, & C_4 &= \text{cos}\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell + \text{cos}\theta_{23}^\ell), \\ C_5 &= \text{cos}\theta_{12}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell + \text{cos}\theta_{23}^\ell), & C_6 &= \text{sen}\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell - \text{cos}\theta_{23}^\ell). \end{aligned} \quad (4.11)$$

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 podemos observar las regiones permitidas para el parámetro  $\delta^\ell$  considerando que la matriz de mezcla de neutrinos está parametrizada

por la matriz TBM. Notamos en primera instancia que no existe ninguna cota para este parámetro cuando se utilizan los resultados de GMS y STV a  $3\sigma$  y  $1\sigma$ , también podemos ver que para las gráficas hechas con resultados a  $3\sigma$  para el parámetro  $\theta_{13}^\ell$  se encuentra que es aceptable que éste tenga un valor igual a cero, aunque esto ya ha sido descartado por los experimentos más recientes. Esto último queda solucionado cuando analizamos los resultados en un rango de  $1\sigma$  ya que se ve claramente que el valor cero para el parámetro  $\theta_{13}^\ell$  queda completamente descartado. Además, al analizar los resultados de Bari [61] a  $1\sigma$  podemos ver que ya encontramos cotas definidas para el parámetro  $\delta^\ell$ . Combinando los resultados de los tres experimentos con intervalos de  $1\sigma$  obtenemos las siguientes cotas para los parámetros utilizados:  $0.0680537 \lesssim \theta_{13}^\ell \lesssim 0.0979140$ ,  $0.0992366 \lesssim \theta_{12}^\ell \lesssim 0.139694$ ,  $1.56430 \lesssim \theta_{23}^\ell \lesssim 1.57049$  y  $0.0000244827 \lesssim \theta_{23}^\ell \lesssim 0.0104060$ ; finalmente,  $1.94333 \lesssim \delta^\ell \lesssim 4.37734$ .

## 4.2. Matriz de mezcla bimaximal (BM)

La parametrización de la matriz BM viene dada como

$$\mathbf{U}_{BM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

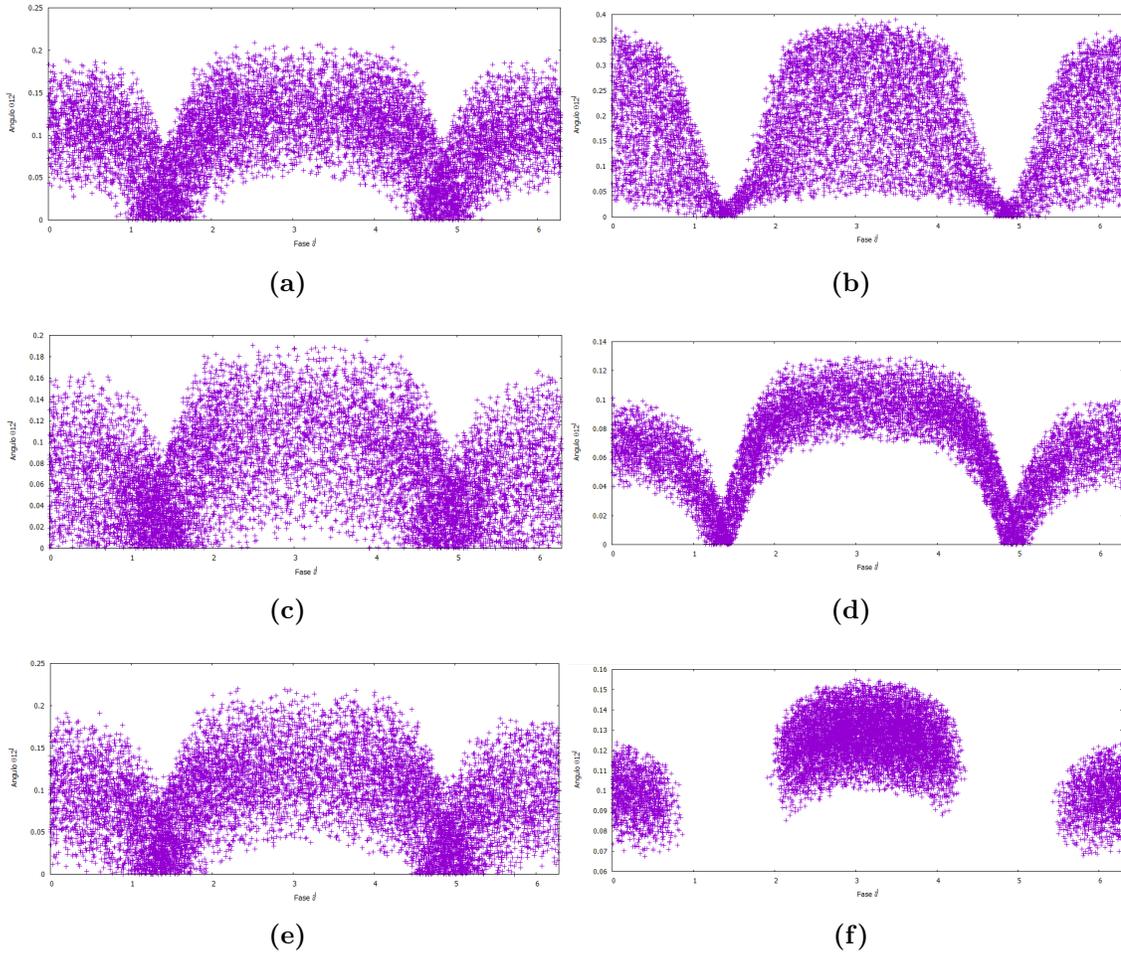
En BM solamente se considera la bimezcla máxima del eigenestado de masa  $\nu_3$  entre los sabores  $\mu$  y  $\tau$ . La evidencia de que  $\nu_3$  sufre una bimezcla máxima viene dada por los mismos resultados experimentales que se mencionaron para TBM [39][66][139][140][141]. Los factores experimentalmente claves son  $|U_{\mu 3}|^2 \simeq 0.50 \pm 0.11$  y  $|U_{e 3}|^2 < 0.04 \pm 0.11$  [62].

Las ecuaciones que se obtienen sustituyendo  $\mathbf{U}_\nu = \mathbf{U}_{BM}$  son (ver apéndice B)

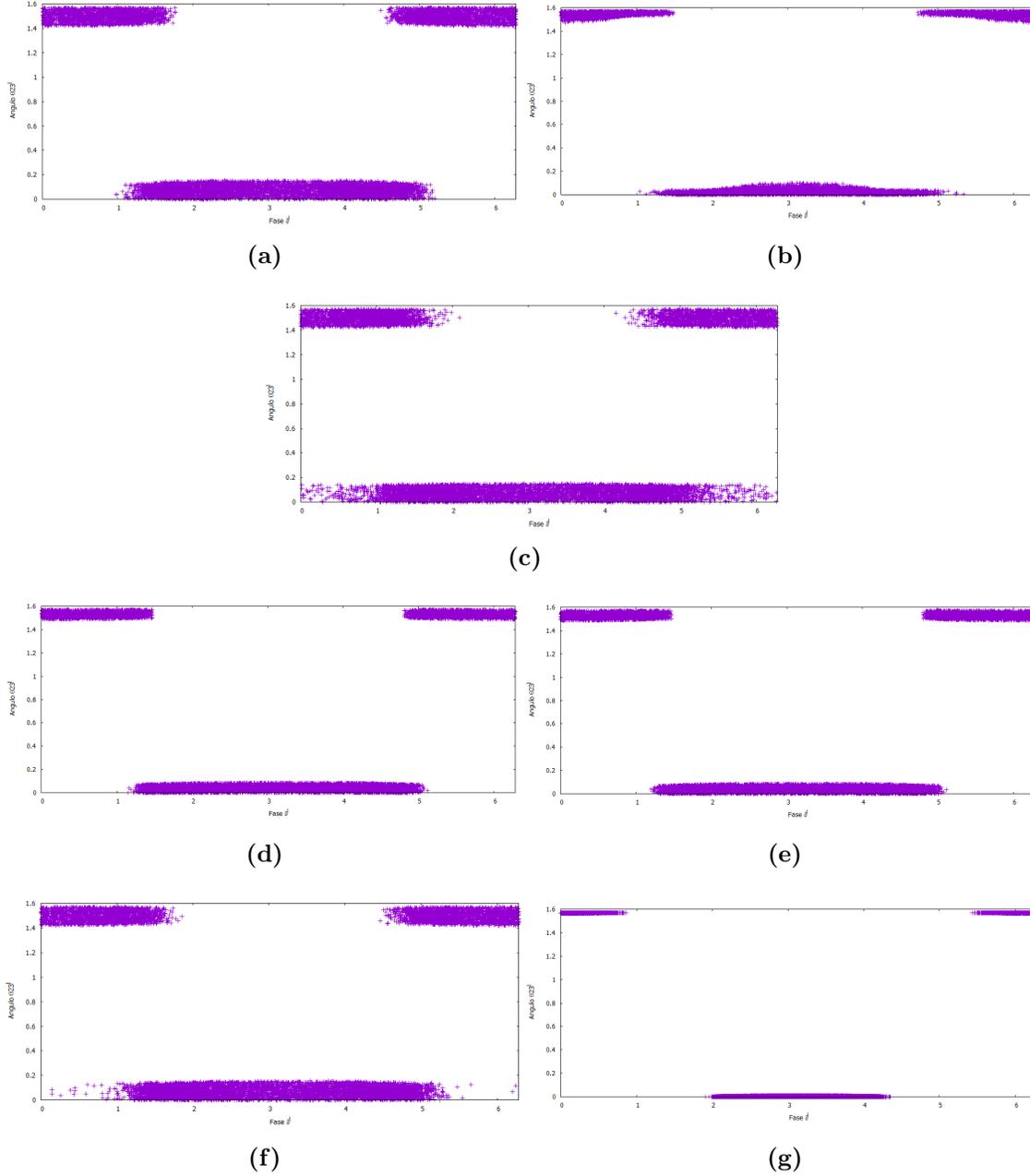
$$\text{sen}^2\theta_{13} = \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} + C_1 C_2 \cos\delta^\ell, \quad (4.13)$$

$$\text{sen}^2\theta_{23} = \frac{C_3^2 + C_4^2 + 2C_3 C_4 \cos\delta^\ell}{2(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.14)$$

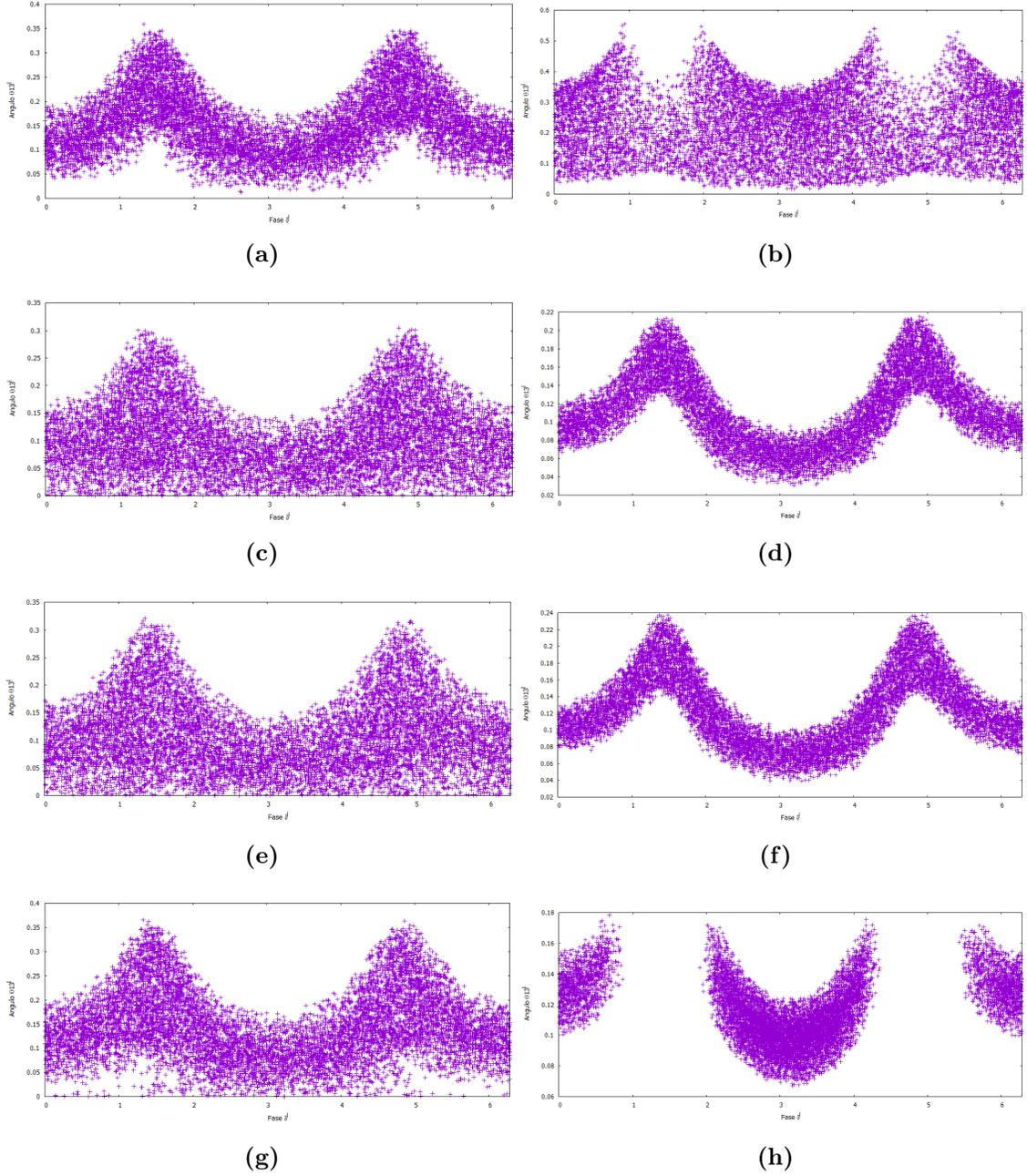
$$\text{sen}^2\theta_{12} = \frac{C_5^2 + C_6^2 + C_7^2 + 2C_5 C_6 + 2C_7(C_5 + C_6)\cos\delta^\ell}{4(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.15)$$



**Figura 4.1.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{12}^{\ell}$  y el parámetro  $\delta^{\ell}$  para la matriz de mezcla TBM. Del lado izquierdo podemos observar los resultados para los resultados experimentales en un rango de  $3\sigma$  y del lado derecho para resultados experimentales a  $1\sigma$ . Las regiones son válidas para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV y las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de Bari. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.2.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{23}^\ell$  y el parámetro  $\delta^\ell$  para la matriz de mezcla TBM. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) (d) y (e) corresponden a los resultados de STV para ambas jerarquías a  $3\sigma$  y para jerarquía ordinaria y jerarquía invertida a  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (f) y (g) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.3.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{13}^\ell$  y el parámetro  $\delta^\ell$  para la matriz de mezcla TBM. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV para jerarquía ordinaria a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de STV para jerarquía invertida a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (g) y (h) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.

con

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cos\theta_{12}^\ell \sin\theta_{13}^\ell (\sin\theta_{23}^\ell - \cos\theta_{23}^\ell), & C_2 &= \sin\theta_{12}^\ell (\sin\theta_{23}^\ell + \cos\theta_{23}^\ell), \\
C_3 &= \sin\theta_{12}^\ell \sin\theta_{13}^\ell (\cos\theta_{23}^\ell - \sin\theta_{23}^\ell), & C_4 &= \cos\theta_{12}^\ell (\sin\theta_{23}^\ell + \cos\theta_{23}^\ell), \\
C_5 &= \sin\theta_{12}^\ell (\cos\theta_{23}^\ell - \sin\theta_{23}^\ell), & C_6 &= \sqrt{2} \cos\theta_{12}^\ell \cos\theta_{13}^\ell \\
C_7 &= \cos\theta_{12}^\ell \cos\theta_{13}^\ell (\cos\theta_{23}^\ell + \sin\theta_{23}^\ell).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

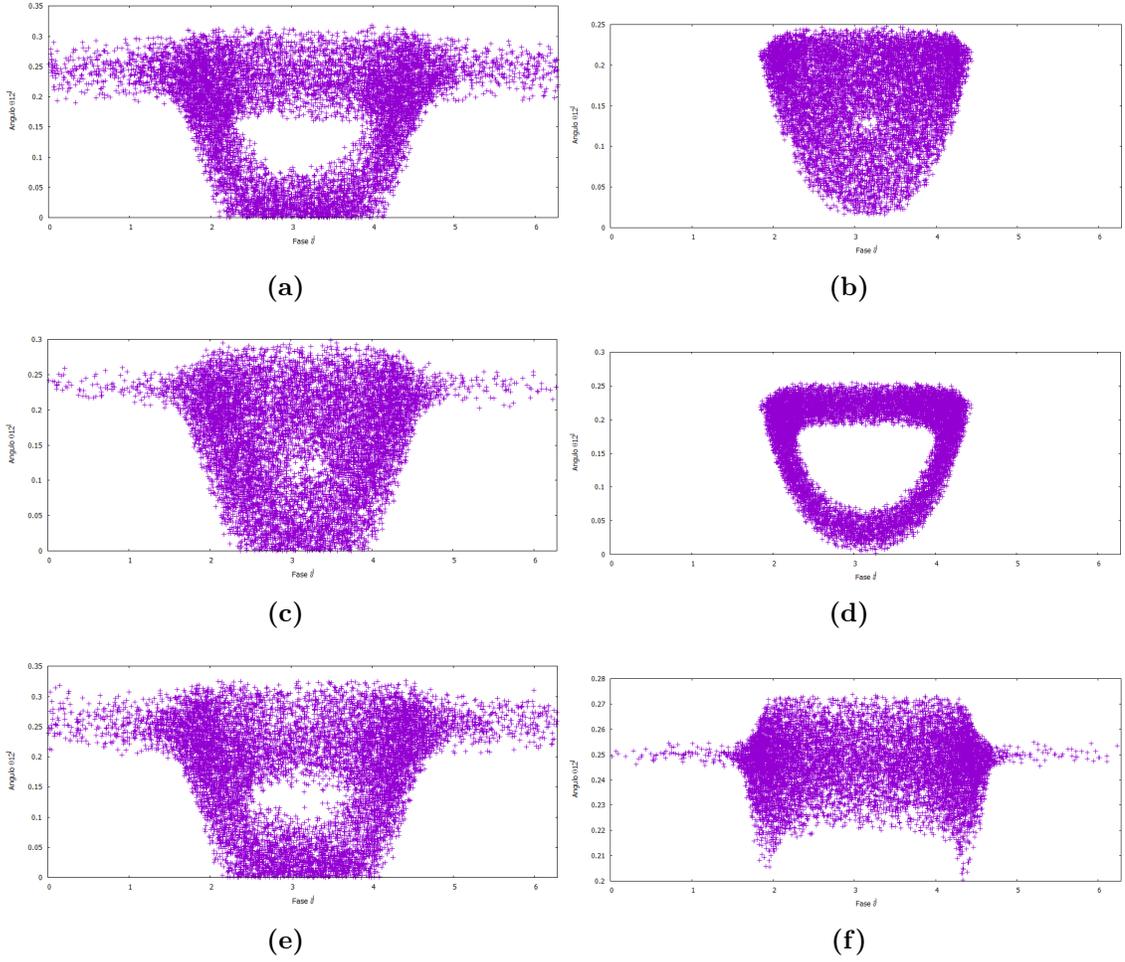
Los resultados obtenidos considerando la mezcla bimaximal son presentados en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6. Puede observarse en las gráficas para valores experimentales de  $3\sigma$  que no existe una cota definida para el valor del parámetro  $\delta^\ell$ , ya que hay valores permitidos para ésta en todo el espectro de 0 a  $2\pi$ . Además, notamos que esta matriz de mezcla de neutrinos permite que el parámetro  $\theta_{13}^\ell$  tenga un valor igual a cero, lo cual contradice los resultados experimentales más actualizados. Sin embargo, considerando los resultados experimentales más precisos a  $1\sigma$  nos damos cuenta que las regiones permitidas limitan el parámetro  $\delta^\ell$  a regiones bien determinadas en las gráficas dadas para los tres ángulos de mezcla, dando estas valores aceptados para  $\delta^\ell$  en el rango  $1.83114 \lesssim \delta^\ell \lesssim 4.43804$  lo cual coincide de forma aceptable con las cotas obtenidas para la mezcla TBM. Además, el análisis más preciso también deja fuera valores de  $\theta_{13}^\ell = 0$  lo cual regresa a la matriz de mezcla bimaximal a ser una opción congruente con los parámetros experimentales actuales, la cota dada para  $\theta_{13}^\ell$  es  $0.0182772 \lesssim \theta_{13}^\ell \lesssim 0.172888$ . Cabe también resaltar que en las gráficas para  $\theta_{23}^\ell$  el valor de este ángulo de mezcla es aceptado en la región  $1.55514 \leq \theta_{23}^\ell \leq 1.57071$  lo cual representa correctamente la mezcla máxima de los eigenestados de masa  $\nu_2$  y  $\nu_3$ . Finalmente, la región permitida para el parámetro  $\theta_{12}^\ell$  es  $0.220914 \lesssim \theta_{12}^\ell \lesssim 0.244457$ .

### 4.3. Matriz de mezcla democrática (DEM)

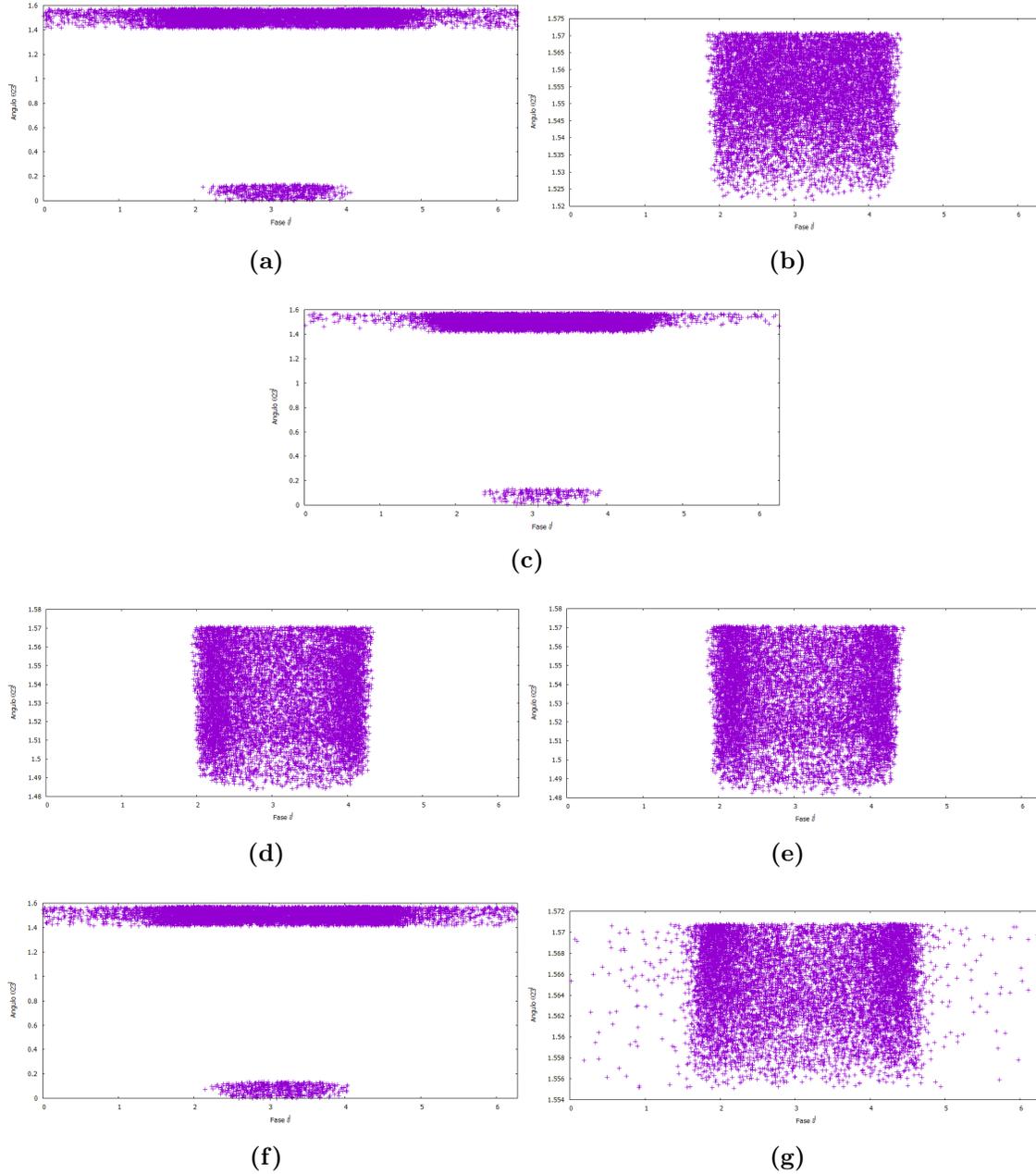
La matriz democrática puede parametrizarse como sigue

$$\mathbf{U}_{DEM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

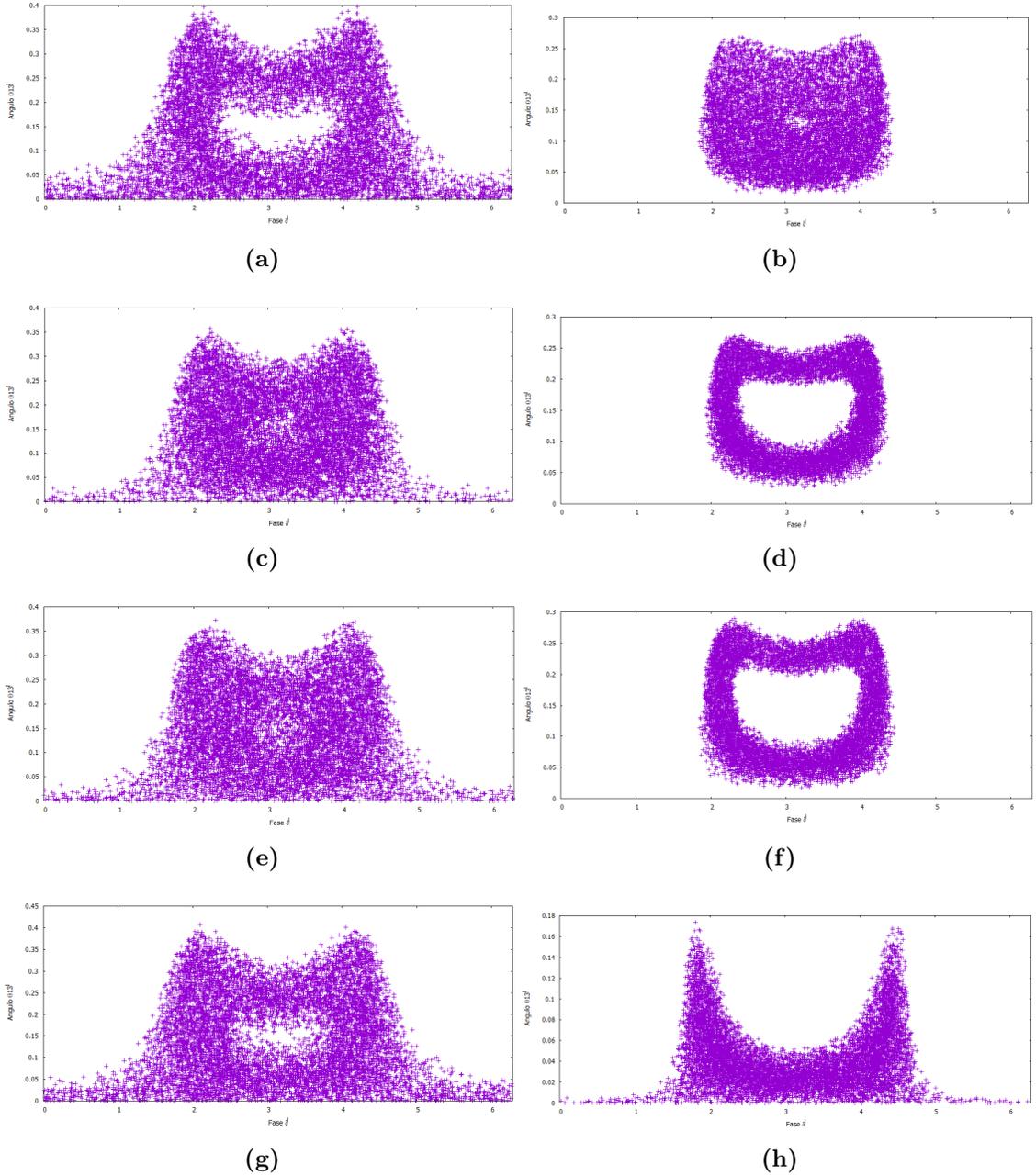
Por su lado, la mezcla democrática de neutrinos contradice que la mezcla entre neutrinos sea máxima. Los parámetros más importantes predichos por la mezcla democrática son el ángulo de mezcla de neutrinos solares  $\theta_{Sol} \approx 33^\circ$  la predicción para las oscilaciones de neutrinos atmosféricos  $\sin^2 2\theta_{atm} \approx 0.95$  y el valor para el invariante de Jarlskog  $\mathcal{J} \approx 0.012$ .



**Figura 4.4.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{12}^{\ell}$  y el parámetro  $\delta^{\ell}$  para la matriz de mezcla BM. Del lado izquierdo podemos observar los resultados para los resultados experimentales en un rango de  $3\sigma$  y del lado derecho para resultados experimentales a  $1\sigma$ . Las regiones son válidas para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV y las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de Bari. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.5.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{23}^\ell$  y el parámetro  $\delta^\ell$  para la matriz de mezcla BM. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) (d) y (e) corresponden a los resultados de STV para ambas jerarquías a  $3\sigma$  y para jerarquía ordinaria y jerarquía invertida a  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (f) y (g) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.6.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{13}^{\ell}$  y el parámetro  $\delta^{\ell}$  para la matriz de mezcla BM. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV para jerarquía ordinaria a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de STV para jerarquía invertida a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (g) y (h) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.

Estos parámetros también quedan dentro de los rangos experimentales presentes [10][12][57][67]. La fortaleza de la mezcla democrática puede encontrarse en el hecho de que no requiere de grandes consideraciones adicionales para la obtención de resultados compatibles con los resultados experimentales. Además explota una debilidad en la mezcla máxima e indica que la mezcla máxima no puede ocurrir en una forma natural a menos de que la tasa  $\Delta m_{sol}^2/\Delta m_{atm}^2$  sea de orden  $\mathcal{O}(10^{-1})$ .

Las ecuaciones que se obtienen sustituyendo  $\mathbf{U}_\nu = \mathbf{U}_{DEM}$  son (ver apéndice B)

$$\text{sen}^2\theta_{13} = \frac{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos\delta^\ell}{3}, \quad (4.18)$$

$$\text{sen}^2\theta_{23} = \frac{C_3^2 + C_4^2 + 2C_3C_4\cos\delta^\ell}{3(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.19)$$

$$\text{sen}^2\theta_{12} = \frac{C_5^2 + C_6^2 + C_7^2 + 2C_5C_7 + 2C_6(C_5 + C_7)\cos\delta^\ell}{36(1 - \text{sen}^2\theta_{13})}, \quad (4.20)$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{sen}\theta_{12}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell + \sqrt{2}\cos\theta_{23}^\ell), & C_2 &= \cos\theta_{12}^\ell\text{sen}\theta_{13}^\ell(\sqrt{2}\text{sen}\theta_{23}^\ell - \cos\theta_{23}^\ell), \\ C_3 &= \cos\theta_{12}^\ell(\text{sen}\theta_{23}^\ell + \sqrt{2}\cos\theta_{23}^\ell), & C_4 &= \text{sen}\theta_{12}^\ell\text{sen}\theta_{13}^\ell(\cos\theta_{23}^\ell - \sqrt{2}\text{sen}\theta_{23}^\ell), \\ C_5 &= \sqrt{3}\text{sen}\theta_{12}^\ell(\sqrt{2}\cos\theta_{23}^\ell - 2\text{sen}\theta_{23}^\ell), & C_6 &= \sqrt{3}\cos\theta_{12}^\ell\text{sen}\theta_{13}^\ell(\sqrt{2}\text{sen}\theta_{23}^\ell + 2\cos\theta_{23}^\ell), \\ C_7 &= 3\sqrt{2}\cos\theta_{12}^\ell\cos\theta_{13}^\ell. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, encontramos las regiones permitidas para el parámetro  $\delta^\ell$  considerando que la matriz de mezcla de neutrinos viene parametrizada por la matriz de mezcla democrática en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9. Nuevamente, los resultados obtenidos con cotas experimentales de  $3\sigma$  no sirven para obtener ninguna conclusión o cota para el parámetro  $\delta^\ell$ . Los verdaderos resultados los obtenemos una vez más al hacer el análisis a  $1\sigma$  ya que es ahí donde obtenemos realmente la cota para el parámetro  $\delta^\ell$ , en especial cuando se analizan los resultados obtenidos para las cotas dadas por STV. El rango permitido para el parámetro  $\delta^\ell$ , considerando los resultados de los tres experimentos, es  $1.78170 \lesssim \delta^\ell \lesssim 4.48826$ . Vemos que esta cota es similar a las obtenidas para la matriz de mezcla TBM y para la matriz de mezcla BM. Las cotas permitidas para los otros tres parámetros son:  $0.0106571 \lesssim \theta_{13}^\ell \lesssim 0.269612$ ,  $0.0159948 \lesssim \theta_{12}^\ell \lesssim 0.248279$ ,  $1.35204 \lesssim \theta_{23}^\ell \lesssim 1.46184$ .

#### 4.4. Determinando las cotas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac $\delta$

Para encontrar una relación entre los parámetros que hemos limitado en las secciones anteriores  $\theta_{13}^\ell$ ,  $\theta_{12}^\ell$ ,  $\theta_{23}^\ell$  y  $\delta^\ell$  con la fase observable de rompimiento de CP de Dirac  $\delta$  usaremos el invariante de Jarlskog, el cual está definido de la forma

$$J_{CP} = \text{Im}[U_{e1}^* U_{\mu 3}^* U_{e3} U_{\mu 1}] = \cos\theta_{12} \text{sen}\theta_{12} \cos\theta_{23} \text{sen}\theta_{23} \cos^2\theta_{13} \text{sen}\theta_{13} \text{sen}\delta \quad (4.22)$$

donde  $U_{ij}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{U}_{PMNS}$ .

Si definimos un invariante equivalente para la matriz  $\mathbf{U}' \equiv \mathbf{U}_\ell^\dagger \mathbf{U}_\nu$

$$J'_{CP} = \text{Im}[U'_{11}{}^* U'_{23}{}^* U'_{13} U'_{21}] \quad (4.23)$$

podemos reescribir el  $\text{sen}^2\delta$  en términos de parámetros que ya conocemos como

$$\text{sen}^2\delta = \frac{(J'_{CP})^2}{\text{sen}^2\theta_{12}(1 - \text{sen}^2\theta_{12})\text{sen}^2\theta_{23}(1 - \text{sen}^2\theta_{23})\text{sen}^2\theta_{13}(1 - \text{sen}^2\theta_{13})^2} \quad (4.24)$$

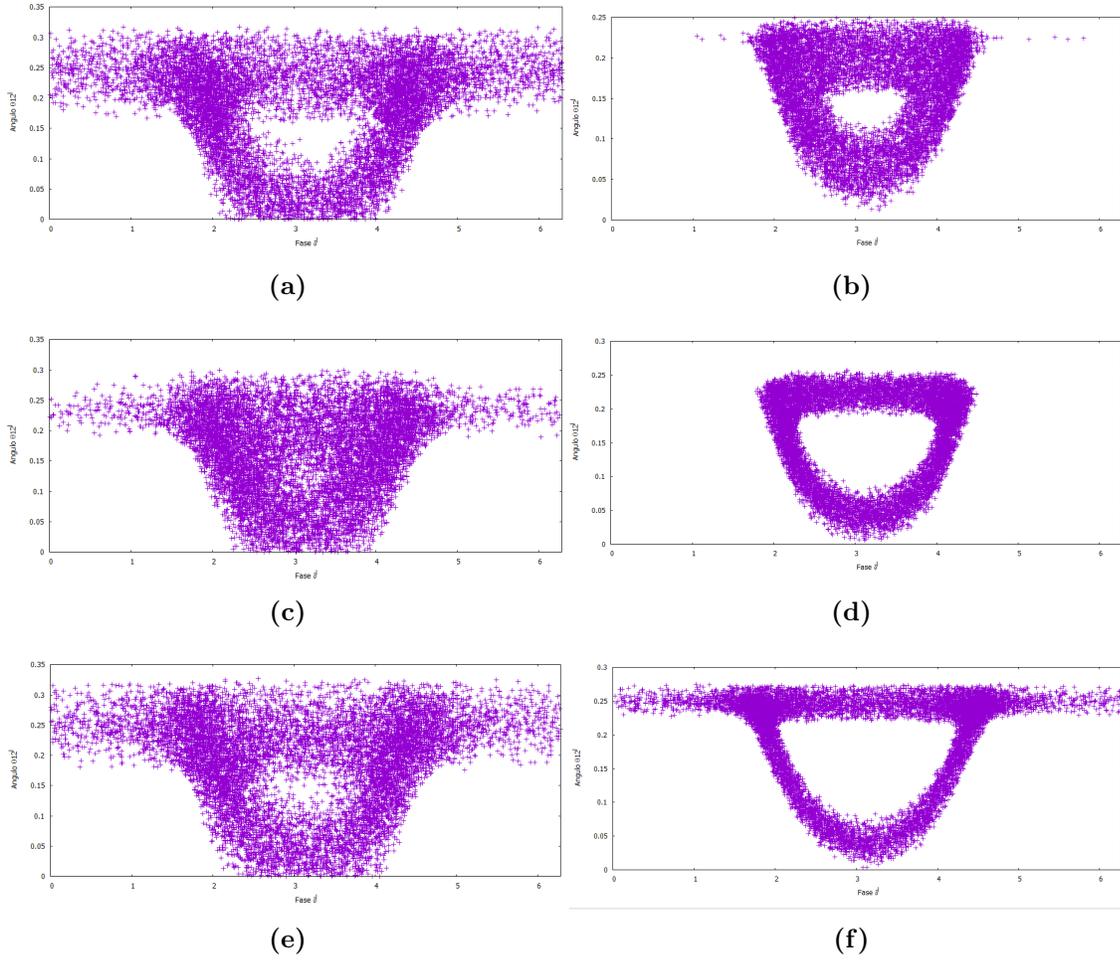
donde  $J'_{CP}$  varía según se considere mezcla TBM, mezcla BM o mezcla democrática.

Para la matriz de mezcla TBM tenemos

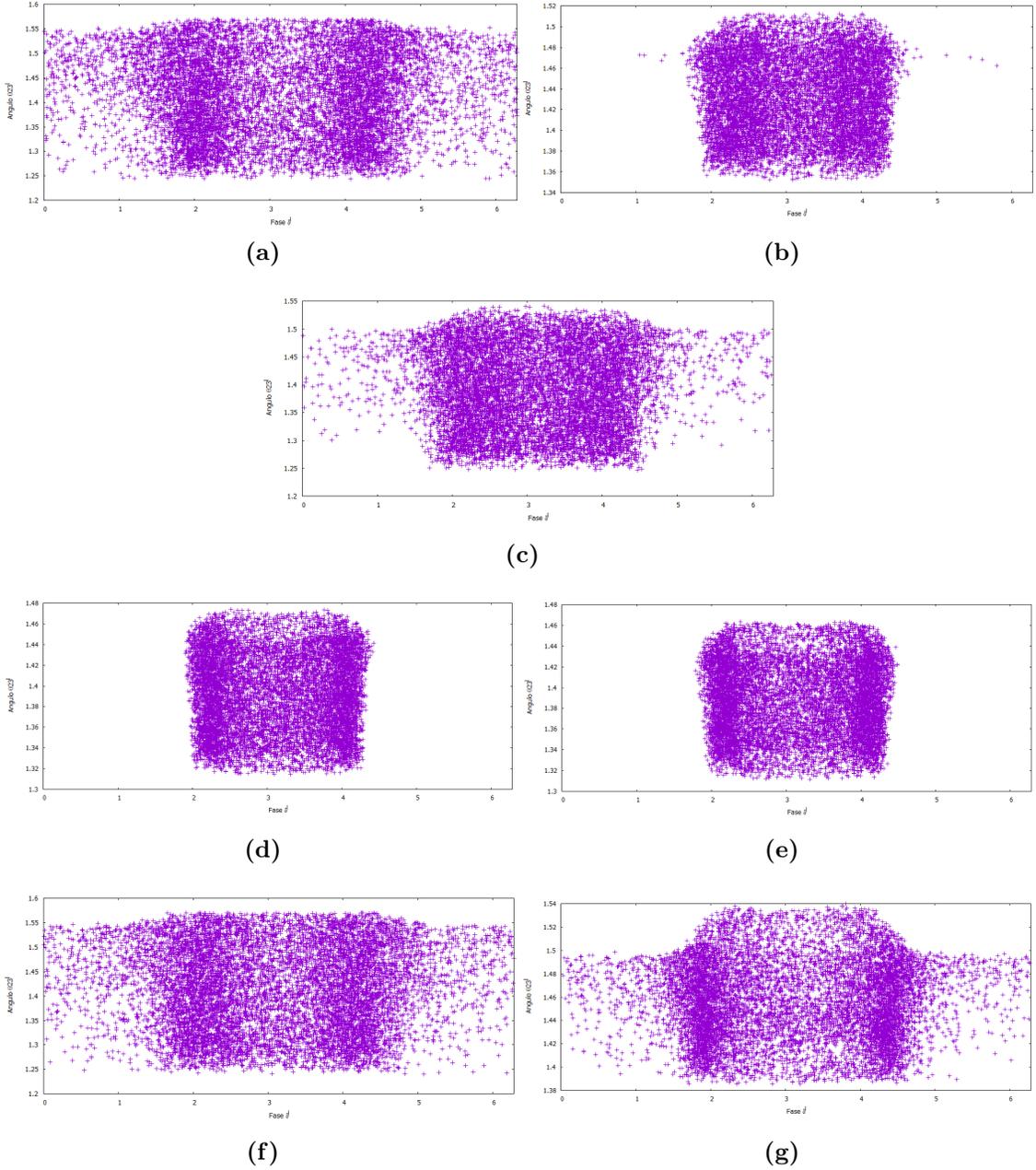
$$J'_{CP} = -\frac{1}{6} \cos\theta_{13}^\ell \cos 2\theta_{13}^\ell \text{sen}\delta^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell (-(\cos\theta_{12}^\ell)^2 \cos\theta_{23}^\ell + \cos\theta_{12}^\ell \cos\theta_{13}^\ell \text{sen}\theta_{12}^\ell + \cos\theta_{23}^\ell (\text{sen}\theta_{12}^\ell)^2 + \cos 2\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{23}^\ell + \cos\delta^\ell \text{sen} 2\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell (\cos\theta_{23}^\ell + \text{sen}\theta_{23}^\ell)). \quad (4.25)$$

Si ahora consideramos la matriz de mezcla BM obtenemos la ecuación

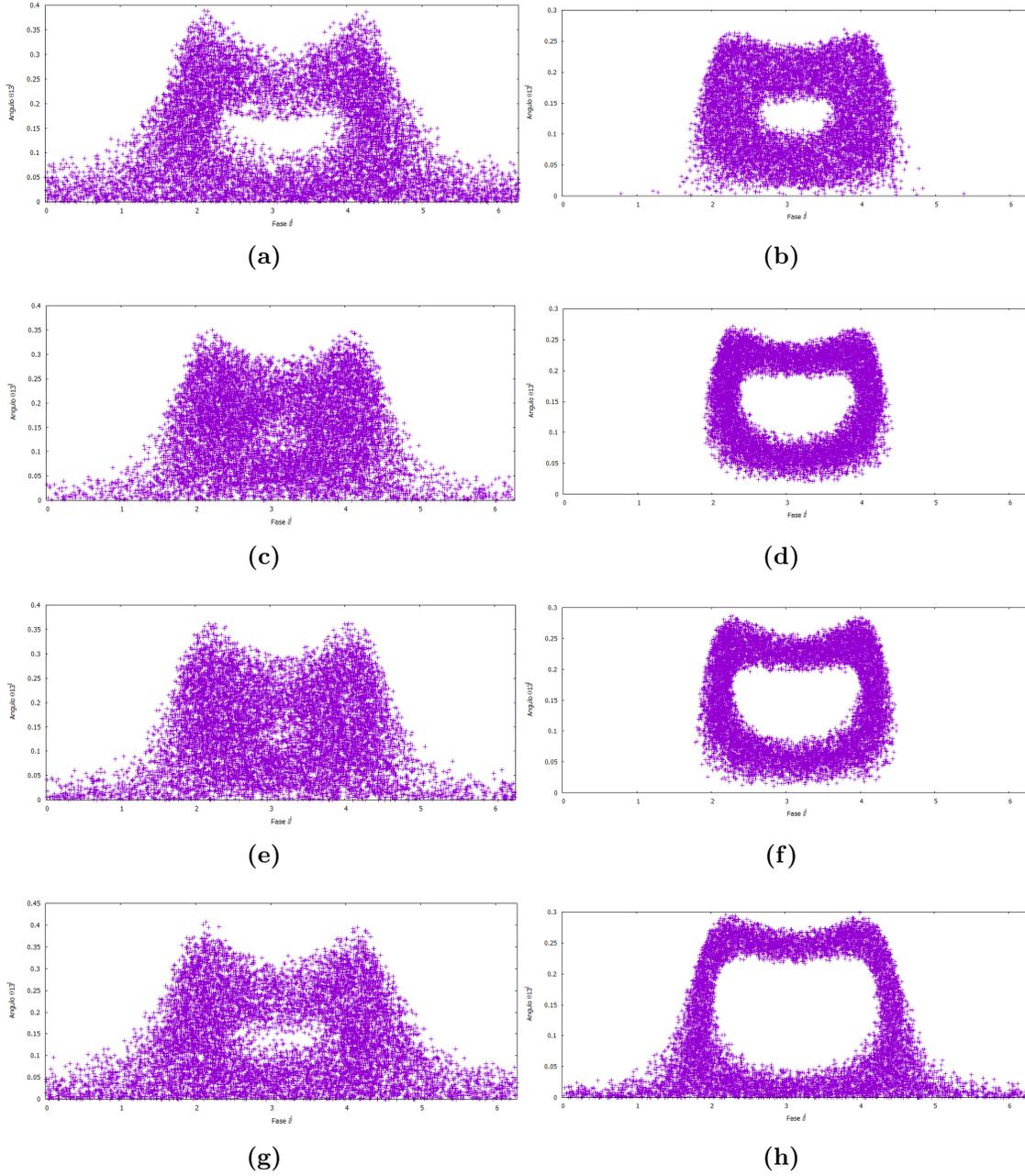
$$J'_{CP} = \frac{1}{8\sqrt{2}} (\cos\theta_{23}^\ell - \text{sen}\theta_{23}^\ell) (\cos\theta_{23}^\ell + \text{sen}\theta_{23}^\ell) (\cos 2\theta_{12}^\ell) \text{sen}\delta^\ell \text{sen} 2\theta_{13}^\ell (-\cos\theta_{23}^\ell + \text{sen}\theta_{23}^\ell) + \cos\theta_{13}^\ell \text{sen} 2\delta^\ell \text{sen} 2\theta_{12}^\ell (\text{sen}\theta_{13}^\ell)^2 (\cos\theta_{23}^\ell + \text{sen}\theta_{23}^\ell). \quad (4.26)$$



**Figura 4.7.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{12}^\ell$  y el parámetro  $\delta^\ell$  para la matriz de mezcla democrática. Del lado izquierdo podemos observar los resultados para los resultados experimentales en un rango de  $3\sigma$  y del lado derecho para resultados experimentales a  $1\sigma$ . Las regiones son válidas para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GSM, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV y las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de Bari. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.8.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{23}^{\ell}$  y el parámetro  $\delta^{\ell}$  para la matriz de mezcla democrática. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) (d) y (e) corresponden a los resultados de STV para ambas jerarquías a  $3\sigma$  y para jerarquía ordinaria y jerarquía invertida a  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (f) y (g) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.9.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{13}^{\ell}$  y el parámetro  $\delta^{\ell}$  para la matriz de mezcla democrática. Las imágenes (a) y (b) corresponden a los resultados de GMS a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida, las imágenes (c) y (d) corresponden a los resultados de STV para jerarquía ordinaria a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, las imágenes (e) y (f) corresponden a los resultados de STV para jerarquía invertida a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente y las imágenes (g) y (h) corresponden a los resultados de Bari a  $3\sigma$  y  $1\sigma$  respectivamente, válidas para para jerarquía de masas ordinaria y jerarquía de masas invertida. Fuente: elaboración propia.

Y para la matriz de mezcla democrática tenemos que

$$J'_{CP} = \frac{1}{24\sqrt{3}}(\cos\theta_{13}^\ell \text{sen}\delta^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell (\cos\delta^\ell \text{sen}2\theta_{12}^\ell \text{sen}\theta_{13}^\ell (3\cos\theta_{23}^\ell + 5\cos3\theta_{23}^\ell - 4\sqrt{2}(\text{sen}\theta_{23}^\ell)^3) - \cos2\theta_{12}^\ell (3\sqrt{2}\cos\theta_{23}^\ell + \sqrt{2}\cos3\theta_{23}^\ell + 3\text{sen}\theta_{23}^\ell - 5\text{sen}3\theta_{23}^\ell))). \quad (4.27)$$

Usando estas ecuaciones y los rangos obtenidos para los parámetros  $\theta_{13}^\ell$ ,  $\theta_{12}^\ell$ ,  $\theta_{23}^\ell$  y  $\delta^\ell$  además de los parámetros experimentales de la tabla 3.1 podemos obtener los siguientes rangos aceptados para el  $\text{sen}^2\delta$ , los cuales pueden apreciarse en la figura 4.10:

para mezcla tribimaxima

$$0 \leq \text{sen}^2\delta \lesssim 0.328087, \quad (4.28)$$

para mezcla bimaxima

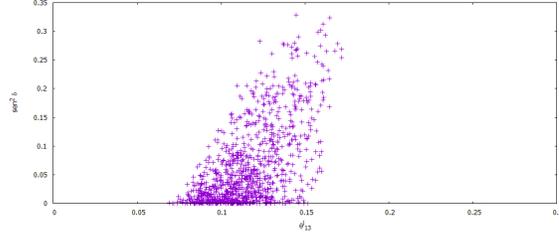
$$0 \leq \text{sen}^2\delta \lesssim 0.412825, \quad (4.29)$$

y para mezcla democrática

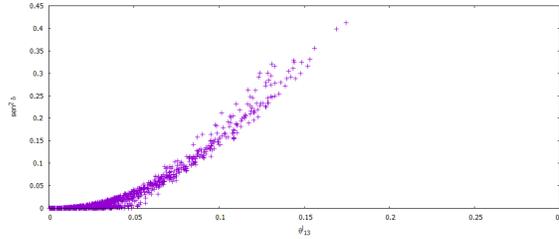
$$0 \leq \text{sen}^2\delta \leq 1. \quad (4.30)$$

Para las matrices de mezcla tribimaxima y bimaxima vemos que sí existen regiones del espectro del  $\text{sen}^2\delta$  que no están permitidos. Esto deja fuera de la zona permitida determinados valores para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$ . En el caso de la matriz de mezcla tribimaxima, la región no permitida para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$  es  $0.609904 < \delta < 2.531689$ , mientras que la región para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac que queda prohibida en el caso de la mezcla bimaxima es  $0.697775 < \delta < 2.443817$ .

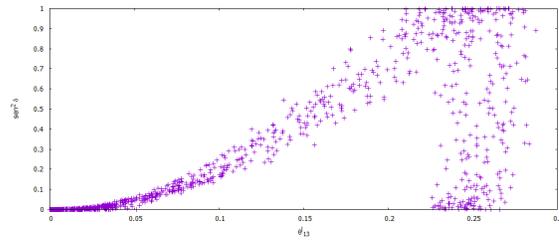
Por otro lado, para la matriz de mezcla democrática, podemos observar que no existe ninguna restricción para el valor del  $\text{sen}^2\delta$ , por lo tanto tampoco se puede descartar ningún valor posible para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$  en este caso.



(a)



(b)



(c)

**Figura 4.10.** Regiones permitidas para el ángulo de mezcla  $\theta_{13}^{\ell}$  y el seno cuadrado de la fase  $\delta$  para las tres matrices de mezcla. La imagen (a) corresponde a los resultados para la matriz de mezcla TBM, La imagen (b) corresponde a los resultados para la matriz de mezcla BM y La imagen (c) corresponde a los resultados para la matriz de mezcla democrática, Fuente: elaboración propia.

Comparando con los resultados de trabajos similares previos [5] en los que no se encontraron restricciones para los valores de  $\delta$ , podemos ver que utilizando diferentes texturas para la matriz de mezcla de neutrinos y una mayor variedad de resultados experimentales sí es posible acotar el valor que puede tomar la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$ .

Si comparamos los resultados obtenidos con este análisis con las cotas que se tienen actualmente para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$  [76] vemos que ninguna de las dos matrices se encuentra claramente favorecida. Esto también puede notarse en el hecho que las cotas que nos dan la matriz de mezcla bimaxima y la matriz de mezcla tribimaxima son muy similares entre sí.

## CONCLUSIONES

1. Se obtuvieron regiones prohibidas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac cuando se analizaron las texturas de mezcla de neutrinos bimaxima y tribimaxima siendo estas  $0.697775 < \delta < 2.443817$  y  $0.609904 < \delta < 2.531689$ , respectivamente. Mientras que para la textura de mezcla democrática no pudo discriminarse ningún valor de la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac. Tampoco hay ninguna matriz que se vea favorecida por los resultados experimentales. Las regiones prohibidas obtenidas mediante este análisis coinciden con las cotas que se tienen actualmente para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac.
2. La estructura de mezcla del sector leptónico incluye explícitamente al menos una fuente de rompimiento de simetría CP. Aunque pareciera ser que la fase de rompimiento de asimetría CP en el sector leptónico no es suficiente para explicar la asimetría bariónica a nivel cosmológico y esto abre la posibilidad de la existencia de fuentes de rompimiento de simetría CP alternativas para explicar por completo el valor de la asimetría entre materia y antimateria en el universo, tales como las posibles fases de Majorana que podrían incluirse dentro de la estructura de mezcla o fuentes fuera del modelo estándar como las del mecanismo de generación de masa de los neutrinos.
3. Las oscilaciones de neutrinos nos permiten relacionar los ángulos de mezcla de éstos con la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac. Los resultados experimentales de estas probabilidades también podrían ser utilizados para la determinación de la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac. Debería también desarrollarse un método conjunto que utilice resultados de probabilidades de oscilaciones de neutrinos y lo hecho en este trabajo para acotar aun más las regiones permitidas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$ .



## RECOMENDACIONES

1. Incorporar al procedimiento las posibles fases de Majorana de la matriz PMNS.
2. Continuar con la actualización de las cotas para la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac  $\delta$  utilizando los valores experimentales para los ángulos de mezcla de neutrinos más actualizados.
3. Reforzar el análisis hecho en este trabajo por medio de un análisis similar aplicado a las predicciones teóricas y resultados experimentales para las probabilidades de oscilaciones de neutrinos.



# APÉNDICE A

## Método de Monte Carlo

### Definición, historia y aplicaciones

Los métodos de Monte Carlo methods son una amplia clase de algoritmos computacionales que se basan en la obtención de una muestra aleatoria para obtener resultados numéricos. La idea principal es utilizar la aleatoriedad para resolver problemas que podrían ser determinísticos en principio. Son comúnmente utilizados en problemas físicos y matemáticos y se ha demostrado su utilidad en problemas que serían difíciles o imposibles de atacar haciendo uso de otros métodos. Los métodos de Monte Carlo son usados principalmente para resolver tres tipos de problemas [94] optimización, integración numérica y generación de curvas para una distribución de probabilidad.

Los métodos de Monte Carlo pueden variar, pero suelen seguir una serie de pasos generales:

1. Definir un dominio de posibles entradas.
2. Generar las entradas aleatoriamente basado en una distribución de probabilidad aleatoria sobre el dominio de interés.
3. Realizar un cálculo determinista de las entradas.
4. Recopilar los resultados.

Existen dos factores importantes a considerar al momento de aplicar el método de Monte Carlo: primero, si las entradas no son generadas de forma aleatoria, las aproximaciones obtenidas serán poco confiables. Segundo, debe haber un enorme número de entradas generadas.

La razón por la que se requieren grandes cantidades de números aleatorios es que, entre mayor sea el número de entradas puestas a prueba, mejor será la

aproximación obtenida. Fue el uso de métodos de Monte Carlo lo que estimuló el desarrollo de generadores de números pseudoaleatorios, los cuales son mucho más rápidos de utilizar que las tablas de muestreo aleatorio que se habían utilizado en muestreos estadísticos anteriormente.

Antes de que se desarrollara el método de Monte Carlo, las simulaciones ponían a prueba un problema determinístico ya resuelto y el muestreo estadístico se utilizaba para aproximar la incertidumbre de la simulación. Las simulaciones de Monte Carlo invirtieron esta aproximación, resolviendo problemas determinísticos utilizando un equivalente estadístico.

Un precursor del método de Monte Carlo fue un experimento propuesto por un matemático llamado Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon y se conoce como el experimento de Buffon [104], en este se propone que se puede estimar el valor de  $\pi$  dejando caer agujas en el suelo decorado con un patrón de franjas paralelas y equidistantes. También es posible que Enrico Fermi haya experimentado por primera vez con el método de Monte Carlo en la década de 1930, pero no publicó nada al respecto.

La versión moderna de del método Monte Carlo de Cadena de Markov fue inventado finales de la década de 1940 por Stanislaw Ulam, mientras que se encontraba trabajando en proyectos de armamento nuclear en el Laboratorio Nacional Los Álamos. Acto seguido del descubrimiento de Ulam, John von Neumann comprendió la importancia del mismo y programó la computadora ENIAC para que llevara a cabo cálculos con Monte Carlo. En 1946, físicos en el Laboratorio Nacional Los Álamos se encontraban estudiando blindajes contra la radiación y la distancia que los neutrones podían atravesar en diversos materiales. Sin importar que ya tenían la mayoría de los datos que necesitaban, los científicos del Laboratorio Los Álamos no podían resolver el problema utilizando los métodos matemáticos determinísticos convencionales. Stanislaw Ulam tuvo la idea de usar experimentos basados en aleatoriedad.

Siendo un proyecto confidencial, el trabajo de Ulam y von Neumann necesitaba un nombre en código. Un colega, Nicholas Metropolis, les sugirió utilizar el nombre de Monte Carlo, el cual hacía referencia al Casino Monte Carlo ubicado en Mónaco, ya que el tío de Ulam tenía la costumbre de pedir dinero prestado a sus familiares para apostar en dicho casino. Usar listas de números verdaderamente aleatorios era muy lento, pero von Neumann desarrolló una manera de calcular números pseudoaleatorios, usando el método de *middle-square* [121]. von Neumann estaba consciente de que este método tiene sus fallas y sufrió de muchas críticas y

justificó su uso basándose en el hecho de que su velocidad para generar números pseudoaleatorios era mucho mayor que la de cualquier otro método a su disposición y también hizo notar que cuando algo salía mal con el método éste no lo hacía tan evidente en el resultado final comparado con otros métodos existentes.

Los métodos Monte Carlo fueron una herramienta central en las simulaciones requeridas para el Proyecto Manhattan, aunque estuvieron muy limitados por las herramientas computacionales de su época. En la década de 1950 fueron utilizados en Los Álamos para una primera aproximación en el desarrollo de la bomba de hidrógeno y se popularizaron en el campo de la física, fisicoquímica e investigación de operaciones. La Corporación Rand y la Fuerza Aérea estadounidense fueron dos de las mayores organizaciones responsables de la fundación y distribución de la información concerniente a los métodos Monte Carlo en esta época y comenzaron a encontrar una amplia gama de aplicaciones en muchos campos diferentes.

La teoría para un método de Monte Carlo más sofisticado no comenzó sino hasta mediados de la década de 1960, con el trabajo de Henry P. McKean Jr. acerca de interpretaciones de Markov sobre un tipo de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas no lineales que tenían lugar en la mecánica de fluidos [102][103]. También se puede hacer referencia a un trabajo de Theodore E. Harris y Herman Kahn publicado en 1951, usando métodos Monte Carlo genéricos para estimar energías de transmisión de distintas partículas [88].

Métodos Monte Carlo cuánticos, y más específicamente métodos Monte Carlo de difusión pueden interpretarse también como una aproximación para las Integrales de Camino de Feynman [20]. El origen de los métodos Monte Carlo cuánticos se atribuye generalmente a Enrico Fermi y Robert Richtmyer quienes desarrollaron en 1948 una interpretación de reacciones de cadenas de neutrones [59], pero el primer algoritmo utilizado para aproximar la energía de estados base de sistemas cuánticos es atribuida a Jack H. Hetherington en 1984 [84].

No existe un consenso sobre cómo deben ser definidos los métodos Monte Carlo. Por ejemplo, Ripley define los modelos probabilísticos como simulaciones estocásticas, con el método Monte Carlo reservado para integración de Monte Carlo y exámenes estadísticos de Monte Carlo [129]. Sawilowsky hace una diferencia entre una simulación, un método de Monte Carlo y una simulación de Monte Carlo: una simulación en una representación ficticia de la realidad, un método Monte Carlo es una técnica que puede utilizarse para resolver un problema matemático o estadístico y una simulación de Monte Carlo utiliza un muestreo repetitivo para determinar las propiedades o comportamiento de algún fenómeno [135].

Los métodos de simulación Monte Carlo no siempre requieren números puramente aleatorios para ser útiles, aunque existen ciertas aplicaciones, como pruebas de primalidad, la aleatoriedad es de vital importancia. Gran cantidad de las técnicas más útiles utilizan secuencias determinísticas pseudoaleatorias, haciendo más fácil poner a prueba y repetir las simulaciones. La única característica necesaria para que la simulación sea adecuada es que la secuencia pseudoaleatoria sea lo suficientemente azarosa en el sentido en que se esté trabajando.

Lo que esto signifique depende de la aplicación que se le esté dando al método, pero usualmente el muestreo debe superar una serie de pruebas estadísticas. Probar que los números están distribuidos uniformemente o que siguen una distribución en específico cuando un gran número de entradas de la secuencia se toman en consideración es una de las pruebas más simples y comunes que se pueden realizar. Poca correlación entre muestras consecutivas también es una característica altamente deseada.

Sawilowsky indica las características de una simulación Monte Carlo de alta calidad [135]:

1. El generador de números pseudoaleatorios debe tener ciertas características, como un largo período de muestras antes de que la secuencia se repita.
2. El generador de números pseudoaleatorios debe producir valores que superen pruebas de aleatoriedad.
3. Que existan suficientes entradas como para asegurar un resultado exacto.
4. Que se utilice la técnica de muestreo correcta.
5. El algoritmo utilizado debe ser válido para el fenómeno que se está modelando.
6. La simulación debe reproducir el fenómeno en cuestión.
7. Los algoritmos de muestreo pseudoaleatorio son usados para transformar números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos en números que están distribuidos de acuerdo a una determinada distribución de probabilidad.

Los métodos Monte Carlo son muy importantes en la física computacional, en fisicoquímica y en campos relacionados a estos y tienen diversas aplicaciones que van desde complicados escenarios en cromodinámica cuántica hasta diseño de aislantes térmicos y formas aerodinámicas como también en la modelación de transporte de radiación en cálculos de dosimetría. En física estadística los modelos moleculares

de Monte Carlo son una alternativa a la dinámica molecular computacional y los métodos Monte Carlo se utilizan para desarrollar teorías estadísticas de campo de partículas simples o de sistemas de polímero [130]. Métodos Monte Carlo cuánticos son usados para resolver el problema de múltiples cuerpos en sistemas cuánticos [116]. En física experimental, son utilizados para diseñar detectores, entender su comportamiento y comparar datos experimentales con predicciones teóricas. También en astrofísica se utilizan en muchas formas distintas e incluso para modelar la evolución de galaxias completas [100] y la transmisión de radiación de microondas sobre una superficie planetaria [73]. Los métodos de Monte Carlo también se utilizan en la construcción de los modelos que forman la base para predecir el clima en la actualidad.

## Método Monte Carlo utilizado para la determinación de la fase de rompimiento de simetría CP de Dirac $\delta$

A continuación se presenta el ejemplo del código desarrollado y utilizado para la adquisición de los resultados expuestos en este trabajo de graduación. Aunque se hizo un código distinto para cada textura de mezcla de neutrinos, se presentará únicamente el ejemplo del código utilizado para la matriz de mezcla tribimaxima.

Primero se importan las librerías que incluyen las funciones matemáticas y el generador de números aleatorios que se utilizarán para ajustar los parámetros necesarios

```
import numpy
import math
```

se declaran la variables necesarias: *Corre* es la variable que activa el programa, *Encuentra* es la cantidad de coincidencias que buscamos obtener y *Encontrado* es el contador del número de coincidencias.

```
Corre = True
Encuentra = 1000
Encontrado = 0
```

se declara la variable correspondiente al archivo donde se imprimirán los parámetros que cumplan con las condiciones dadas

```
file = open("TBM.txt", "w")
```

se inicia el ciclo para determinar los parámetros

while Corre:

el ciclo comienza asignando un valor aleatorio a cada uno de los parámetros que se buscan ajustar

```
thetal12 = 0.5*math.pi*numpy.random.rand()
thetal13 = 0.5*math.pi*numpy.random.rand()
thetal23 = 0.5*math.pi*numpy.random.rand()
deltal = 2*math.pi*numpy.random.rand()
```

luego se declaran las constantes de las ecuaciones que relacionan los parámetros que se van a determinar con los resultados experimentales (ver apéndice B)

```
C1 = math.sin(thetal12) * (math.sin(thetal23)
+ math.cos(thetal23))
C2 = math.cos(thetal12) * math.sin(thetal13)
* (math.sin(thetal23) - math.cos(thetal23))
C3 = math.cos(thetal12) * (math.sin(thetal23)
+ math.cos(thetal23))
C4 = math.sin(thetal12) * (math.sin(thetal23)
- math.cos(thetal23)) + math.cos(thetal12) * math.cos(thetal13)
C5 = math.cos(thetal12) * math.sin(thetal13)
* (math.sin(thetal23) + math.cos(thetal23))
C6 = math.sin(thetal12) * math.sin(thetal13)
* (math.cos(thetal23) - math.sin(thetal23))
```

ahora se ponen a prueba los valores asignados a los parámetros mediante la evaluación de las ecuaciones y las condiciones impuestas por los experimentos. Una vez que los valores cumplen las tres condiciones se evalúa el invariante de Jarlskog y se obtiene el valor de  $\sin^2\delta$ . El conjunto de valores se guardan en el archivo de texto asignado anteriormente. Finalmente, se aumenta el contador *Encontrado* en una unidad cuando el conjunto de valores cumple las tres condiciones

```
sin2theta13 = ((math.pow(C1, 2) + math.pow(C2, 2))/2)
+ C1 * C2 * math.cos(deltal)
if ( sin2theta13 > 0.018 and sin2theta13 < 0.032 ):
    sin2theta23 = (math.pow(C6, 2)+ math.pow(C3, 2)
+ 2 * C6 * C3 * math.cos(deltal))/(2 * (1 - sin2theta13))
    if ( sin2theta23 > 0.39 and sin2theta23 < 0.5 ):
        sin2theta12 = (math.pow(C4, 2)+ math.pow(C5, 2)
```

```

- 2 * C4 * C5 * math.cos(delta))
/(3 * (1-sin2theta13))
if ( sin2theta12 > 0.296 and
sin2theta12 < 0.329):
    JCP = -(1/6) * math.cos(theta13)
    * math.cos(2 * theta23) * math.sin(delta)
    * math.sin(theta13) * (-math.cos(theta12)
    * math.cos(theta12) * math.cos(theta23)
+ math.cos(theta12) * math.cos(theta13)
    * math.sin(theta12) + math.cos(theta23)
    * math.sin(theta12) * math.sin(theta12)
+ math.cos(2 * theta12) * math.sin(theta23)
+ math.cos(delta) * math.sin(2 * theta12)
    * math.sin(theta13) * (math.cos(theta23)
+ math.sin(theta23)))
    sin2delta = (JCP * JCP)/(sin2theta12
    * (1 - sin2theta12) * sin2theta13
    * (1 - sin2theta13) * (1 - sin2theta13)
    * sin2theta23 * (1 - sin2theta23))
    file.write(str(theta12) + " " + str(theta13)
+ " " + str(theta23) + " " + str(delta)
+ " " + str(sin2delta) + "\n")
    print(Encontrado)
    Encontrado = Encontrado + 1

```

el ciclo se detiene cuando el número de *Encontrado* es igual a *Encuentra*

```

if (Encontrado == Encuentra):
    Corre = False

```

se cierra el archivo donde se han guardado los parámetros aceptados

```

file.close()

```



## APÉNDICE B

### Determinación de las ecuaciones que relacionan los ángulos de mezcla de neutrinos con los parámetros de mezcla de los leptones cargados

Utilizando la definición de la matriz de mezcla  $\mathbf{U}_{PMNS}$  siendo esta

$$\mathbf{U}_{PMNS} = \mathbf{U}_\ell^\dagger \mathbf{U}_\nu, \quad (4.31)$$

donde  $\mathbf{U}_\ell$  es la matriz de mezcla de leptones cargados y  $\mathbf{U}_\nu$  es la textura de mezcla de neutrinos y  $\mathbf{U}_{PMNS}$  y  $\mathbf{U}_\ell$  están parametrizadas de la siguiente forma

$$\mathbf{U}_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

donde  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$  y  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  con los ángulos de mezcla elegidos de modo que todos queden dentro del primer cuadrante y  $\delta$  es una fase de violación CP de Dirac.

$$\mathbf{U}_\ell = \begin{pmatrix} c_{12}^\ell c_{13}^\ell & s_{12}^\ell c_{13}^\ell & s_{13}^\ell e^{-i\delta^\ell} \\ -s_{12}^\ell c_{23}^\ell - c_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & c_{12}^\ell c_{23}^\ell - s_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & s_{23}^\ell c_{13}^\ell \\ s_{12}^\ell c_{23}^\ell - c_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & -c_{12}^\ell c_{23}^\ell - s_{12}^\ell s_{23}^\ell s_{13}^\ell e^{i\delta^\ell} & c_{23}^\ell c_{13}^\ell \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

donde  $c_{ij}^\ell$  y  $s_{ij}^\ell$  representan a  $\cos\theta_{ij}^\ell$  y  $\sin\theta_{ij}^\ell$  respectivamente y  $\delta^\ell$  es una fase análoga a  $\delta$ .

Podemos obtener un conjunto de nueve ecuaciones de la siguiente igualdad

$$\mathbf{U}_{PMNS} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_{11} & U'_{12} & U'_{13} \\ U'_{21} & U'_{22} & U'_{23} \\ U'_{31} & U'_{32} & U'_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{U}', \quad (4.34)$$

donde  $\mathbf{U}' = \mathbf{U}'_{\ell} \mathbf{U}'_{\nu}$  y  $U_{ij}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{U}_{PMNS}$  y  $U'_{ij}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{U}'$ . Las 9 ecuaciones se obtienen al igualar los elementos de la matriz  $\mathbf{U}_{PMNS}$  con los de la matriz  $\mathbf{U}'$

$$\begin{aligned}
U_{e1} &= U'_{11}, & U_{e2} &= U'_{12}, \\
U_{e3} &= U'_{13}, & U_{\mu1} &= U'_{21}, \\
U_{\mu2} &= U'_{22}, & U_{\mu3} &= U'_{23}, \\
U_{\tau1} &= U'_{31}, & U_{\tau2} &= U'_{32}, \\
U_{\tau3} &= U'_{33}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Las ecuaciones relevantes utilizadas se obtienen de las relaciones  $U_{e3} = U'_{13}$ ,  $U_{e2} = U'_{12}$  y  $U_{\mu3} = U'_{23}$  para el  $\sin^2\theta_{13}$ ,  $\sin^2\theta_{12}$  y  $\sin^2\theta_{23}$  respectivamente.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet, M.B. Gavela y T. Hambye. Low energy effects of neutrino masses. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/0707.4058v3>.
- [2] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet, M.B. Gavela y T. Hambye.  $\mu \rightarrow e\gamma$  and  $\tau \rightarrow l\gamma$  decays in the fermion triplet seesaw model. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/0803.0481v2>.
- [3] J. N. Abdurashitov, et. al. Measurement of the solar neutrino capture rate by the russian-american gallium solar neutrino experiment during one half of the 22-Year cycle of solar activity. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/astro-ph/0204245v2>.
- [4] B. Achkar, et al. Comparison of anti-neutrino reactor spectrum models with the Bugey-3 measurements. *Phys. Lett.*, **B 374**:243, 1996.
- [5] J. A. Acosta, A. Aranda y J. Virrueta. CP violating phase from charged-lepton mixing. Consultado en septiembre de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1402.0754>.
- [6] P. Adamson, et. al. Measurement of neutrino oscillations with the MINOS detectors in the NuMI beam. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/0806.2237v1>.
- [7] E. G. Adelberger, et. al. Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1004.2318v3>.
- [8] F. del Aguila y M. Zralek. Light neutrino propagation in matter without heavy neutrino decoupling. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0207319v1>.

- [9] J. A. Aguilar-Saavedra. Unitarity triangles and geometrical description of CP violation with Majorana neutrinos. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0007025v2>.
- [10] Q.R. Ahmad, et. al. Measurement of the rate of  $\nu_e + d \rightarrow p + p + e$  interactions produced by 8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/nucl-ex/0106015v2>.
- [11] Q. R. Ahmad, et. al. Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/nucl-ex/0204009v2>.
- [12] M. H. Ahn, et. al. Indications of neutrino oscillation in a 250 km long-baseline experiment. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0212007v2>.
- [13] E. Aliu, et. al. Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator-based experiment. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0411038v3>.
- [14] G. Altarelli y D. Meloni. CP violation in neutrino oscillations and new physics. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/0809.1041v2>.
- [15] M. Altmann, et. al. Complete results for five years of GNO solar neutrino observations. Consultado en julio de 2016 en <https://arxiv.org/abs/hep-ex/0504037>.
- [16] M. Ambrosio, et. al. Atmospheric neutrino oscillations from upward through-going muon multiple scattering in MACRO. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0304037v2>.
- [17] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M.B. Gavela y J. Lopez-Pavon. Unitarity of the leptonic mixing matrix. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0607020v5>.
- [18] M. Apollonio, et. al. Search for neutrino oscillations on a long base-line at the CHOOZ nuclear power station. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0301017v1>.
- [19] T. Araki, et. al. Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: evidence of spectral distortion. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0406035v3>.

- [20] R. Assaraf, M. Caffarel y A. Khelif. Diffusion Monte Carlo Methods with a fixed number of walkers. *Phys. Rev.*, **E 61**:4566–4575, 2000.
- [21] P. Astier, et. al. Final NOMAD results on  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  and  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  oscillations including a new search for  $\nu_\tau$  appearance using hadronic  $\tau$  decays. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0106102v1>.
- [22] Colaboraciones ATLAS y CMS. Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1503.07589v1>.
- [23] J. Äystö, et. al. Physics with low-energy muons at a neutrino factory complex. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0109217v1>.
- [24] K. S. Babu y C. N. Leung. Classification of effective neutrino mass operators. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0106054v1>.
- [25] J. N. Bahcall y S. Basu. How uncertain are solar neutrino predictions?. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/astro-ph/9805135v2>.
- [26] V. D. Barger, H. Baer, W.-Y. Keung, y R. J. N. Phillips. Decays of weak vector bosons and t quarks into doubly charged Higgs scalars. *Phys. Rev.*, **D 26**:218, 1982.
- [27] R. Becker-Szendy, et al. The Electron-neutrino and muon-neutrino content of the atmospheric flux. *Phys. Rev.*, **D 46**:3720, 1992.
- [28] B. Bellazzini, Y. Grossman, I. Nachshon y P. Paradisi. Non-standard neutrino interactions at one loop. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1012.3759v1>.
- [29] G. Bellini, L. Ludhova, G. Ranucci y F.L. Villante. Neutrino oscillations. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1310.7858v1>.
- [30] J. Beringer, et. al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys. Rev.*, **D 86**:010001, 2012.
- [31] J. Bernabeu. On the history of the PMNS Matrix ...with today's perspective. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1312.7451v1>.

- [32] J. Bernabeu y P. Pascual. CP Properties of the leptonic sector for majorana neutrinos. *Nucl. Phys.*, **B 228**:21–30, 1983.
- [33] J. Bernabeu, G. Branco y M. Gronau. CP restrictions on quark mass matrices. *Phys. Lett.*, **B 169**:243–247, 1986.
- [34] W. Bernreuther. CP violation and baryogenesis. Consultado en septiembre de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0205279v1>.
- [35] A. Bettini. *Introduction to Elementary Particles*. Cambridge University Press, Estados Unidos, 2008.
- [36] S. Bhattacharya, P. Dey y B. Mukhopadhyaya. Unitarity violation in sequential neutrino mixing in a model of extra dimensions. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/0907.0099v1>.
- [37] S. M. Bilenky, J. Hosek y S. T. Petcov. Oscillations of Neutrinos with Dirac and Majorana Masses. *Phys. Lett.*, **B 94**:495–498, 1980.
- [38] S. M. Bilenky y S. T. Petcov. Massive neutrinos and neutrino oscillations. *Rev. Mod. Phys.*, **59**:671, 1987.
- [39] F. Boehm, et. al. Final results from the Palo Verde neutrino oscillation experiment. Consultado en agosto de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0107009v1>.
- [40] F. J. Botella, G. C. Branco, M. Nebot y M. N. Rebelo. New physics and evidence for a complex CKM. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0502133v3>.
- [41] G. C. Branco y M. N. Rebelo. Building the full PMNS Matrix from six independent Majorana-type phases. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/0809.2799v1>.
- [42] G. C. Branco, L Lavoura y M. N. Rebelo. Majorana neutrinos and CP violation in the leptonic sector. *Phys. Lett.*, **B 180**:264, 1986.
- [43] G. C. Branco, M. N. Rebelo y J. I. Silvia-Marcos. Degenerate and quasi degenerate Majorana neutrinos. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9810328v1>.

- [44] A. Broncano, M.B. Gavela y E. Jenkins. The effective lagrangian for the seesaw model of neutrino mass and leptogenesis. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0210271v2>.
- [45] G. Cavoto. Recent MEG results. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1012.2110v1>.
- [46] S. Chekanov. Open charm production in DIS at HERA. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0309004v1>.
- [47] M. Chen y J. Huang. TeV scale models of neutrino masses and their phenomenology. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1105.3188v2>.
- [48] T. P. Cheng y L. F. Li. Neutrino masses, mixings, and oscillations in  $SU(2) \times U(1)$  models of electroweak interactions. *Phys. Rev.*, **D 22**:2860, 1980.
- [49] T. P. Cheng y L. F. Li. Nonconservation of Separate  $\mu$ - and e-Lepton Numbers in Gauge Theories with V+A Currents. *Phys. Rev. Lett.*, **38**:381, 1977.
- [50] B. T. Cleveland, et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector. *Astrophys. J.*, **496**:505, 1998.
- [51] M. Czakon, J. Gluza y M Zralek. Nonunitary neutrino mixing matrix and CP violating neutrino oscillations. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0109245v1>.
- [52] G. Danby, et al. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, **9**:36, 1962.
- [53] Y. Declais, et. al. Search for neutrino oscillations at 15-meters, 40-meters, and 95-meters from a nuclear power reactor at Bugey. *Nucl. Phys.*, **B 434**:503, 1995.
- [54] S. Dell’Oro, S. Marcocci, M. Viel y F. Vissani. Neutrinoless double beta decay: 2015 review. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1601.07512v2>.
- [55] M. Doi, T. Kotani, H. Nishiura, K. Okuda y E. Takasugi. CP Violation in Majorana Neutrinos *Phys. Lett.*, **B 102**:323, 1981.
- [56] G. Ecker, W. Grimus y H. Neufeld. A standard form for generalised CP transformations. Consultado en junio de 2016 en <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/20/12/010/pdf>.

- [57] K. Eguchi, et. al. First results from KamLAND: evidence for reactor anti-neutrino disappearance. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0212021v1>.
- [58] Y. Farzan y A. Y. Smirnov. Leptonic CP violation: zero, maximal or between the two extremes. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0610337v3>.
- [59] E. Fermi y R. D. Richtmyer. Note on census-taking in Monte Carlo calculations. 1984.
- [60] E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, J. Lopez-Pavon y O. Yasuda. CP-violation from non-unitary leptonic mixing. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0703098v2>.
- [61] G. L. Fogli, et. al. Evidence of  $\theta_{13} > 0$  from global neutrino data analysis. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1106.6028v2>.
- [62] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo y A. M. Rotunno. Addendum to: solar neutrino oscillation parameters after first KamLAND results. Consultado en agosto de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0212007v2>.
- [63] R. Foot, H. Lew, X. G. He y G. C. Joshi. See-saw neutrino masses induced by a triplet of leptons. *Z. Phys.*, **C 44**:441, 1989.
- [64] H. Fritzsch y Z. Xing. How to describe neutrino mixing and CP violation. *Phys. Lett.*, **B 517**:363–368, 2001.
- [65] S. Fukuda. Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of Super-Kamiokande-I data. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0205075v1>.
- [66] Y. Fukuda, et. al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/9807003v2>.
- [67] Y. Fukuda, et. al. Neutrino-induced upward stopping muons in Super-Kamiokande. *Phys. Lett.*, **B 467**:185, 1999.
- [68] H. Gausterer y C. Lang. Lecture notes in physics. *Springer Verlag*, 512, 1998.
- [69] M. Gell-Mann, P. Ramond y R. Slansky. Complex spinors and unified theories. Consultado en junio de 2016 en <https://arxiv.org/abs/1306.4669>.

- [70] C. Giunti. Neutrino mixing. Consultado en agosto de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0310238v2>.
- [71] S.L. Glashow. *The future of elementary particle physics, in Quarks and leptons, proceedings of the advanced study institute*. Press, Estados Unidos, 1980.
- [72] S. L. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani. Weak interactions with lepton-hadron symmetry. *Phys. Rev.*, **D 2**:1285, 1970.
- [73] L. M. Golden. The effect of surface roughness on the transmission of microwave radiation through a planetary surface. *Icarus*, **38**(3):451-455. 1979
- [74] M. C.Gonzalez-Garcia, M. Maltoni y J. Salvado. Updated global fit to three neutrino mixing: status of the hints of  $\theta_{13} > 0$ . Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1001.4524v4>.
- [75] M. C.Gonzalez-Garcia, J. W. F. Valle. Fast decaying neutrinos and observable flavour violation in a new class of Majorana models. *Phys. Lett.*, **B 216**:360, 1989.
- [76] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, J. Salvado y T. Schwetz. Global fit to three neutrino mixing: critical look at present precision. Consultado en septiembre de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1209.3023v3>.
- [77] S. Goswami y T. Ota. Testing non-unitarity of neutrino mixing matrices at neutrino factories. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/0802.1434v1>.
- [78] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Alemania, 2008.
- [79] M. Gronau, A. Kfir y R. Loewy. Basis-independent tests of CP nonconservation in fermion-mass matrices. *Phys. Rev. Lett.*, **56**:1538, 1986.
- [80] W. Hampel, et al. GALLEX solar neutrino observations: results for GALLEX IV. *Phys. Lett.*, **B 447**:127, 1999.
- [81] P. F. Harrison, D. H. Perkins y W. G. Scott. Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data. Consultado en agosto de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0202074v1>.

- [82] T. Hartman. Neutrino mixing. Consultado en agosto de 2016 en [https://www.princeton.edu/physics/undergraduate-program/junior-matters/JP%20Samples/hartman\\_may2003.pdf](https://www.princeton.edu/physics/undergraduate-program/junior-matters/JP%20Samples/hartman_may2003.pdf).
- [83] W. C. Haxton. Neutrino physics. Consultado en agosto de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9905257v1>.
- [84] J. H. Hetherington. Observations on the statistical iteration of matrices. *Phys. Rev. A.*, **30**. 1984.
- [85] K. S. Hirata, et al. Observation of a small atmospheric muon-neutrino/electron-neutrino ratio in Kamiokande. *Phys. Lett.*, **B 280**:146, 1992.
- [86] A. Ilakovac y A. Pilaftsis. Flavour-violating charged lepton decays in seesaw-type Models. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9403398v3>.
- [87] C. Jarlskog. Commutator of the quark mass matrices in the standard electro-weak model and a measure of maximal CP nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, **55**:1039, 1985.
- [88] H. Kahn y T. E. Harris *Estimation of particle transmission by random sampling*. 27-30. 1966.
- [89] T. Kajita. Atmospheric neutrinos and discovery of neutrino oscillations. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1004.2318v3>.
- [90] B. Kayser. Are neutrinos their own antiparticles?. Consultado en junio de 2016 en <https://arxiv.org/pdf/0903.0899>.
- [91] E. Komatsu, et. al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations cosmological interpretation. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1001.4538v3>.
- [92] W. Konetschny y W. Kummer. Nonconservation of total lepton number with scalar bosons. *Phys. Lett.*, **B 70**:433, 1977.
- [93] J. G. Körner, A. Pilaftsis, K. Schilcher. Leptonic flavor-changing  $Z^0$  decays in  $SU(2) \times U(1)$  theories with right-handed neutrinos. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9301290v1>.

- [94] D. P. Kroese, T. Brereton, T. Taimre y Z. I. Botev *Why the Monte Carlo method is so important today*. WIREs Comput Stat 6: 386–392. 2014.
- [95] A. Lai, et. al. New measurements of the  $\eta$  and  $K_0$  masses. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0204008v1>.
- [96] P. Langacker y D. London. Lepton-number violation and massless nonorthogonal neutrinos. *Phys. Rev.*, **D 38**:907, 1988.
- [97] A. Latosinski, K. A. Meissner y H. Nicolai. B-L symmetry vs. neutrino seesaw. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1205.5887v2>.
- [98] G. Lazarides, Q. Shafi y C. Wetterich. Proton lifetime and fermion masses in an SO(10) model. *Nucl. Phys.*, **B 181**:287, 1981.
- [99] A. Linde. Inflationary cosmology. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/0802.1434v1>.
- [100] H. T. MacGillivray, R. J. Dodd. Monte-Carlo simulations of galaxy systems. *Astrophysics and Space Science (Springer Netherlands)*, **86**(2). 1982
- [101] L. Maiani. Selected topics in majorana neutrino physics. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1406.5503>.
- [102] H. P. McKean *Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations*. 1967.
- [103] H. P. McKean *A class of Markov processes associated with nonlinear equations*. 1966.
- [104] N. Metropolis *The beginning of the Monte Carlo method*. 1987
- [105] D. G. Michael, et. al. Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors in the NuMI neutrino beam. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0607088v2>.
- [106] S. P. Mikheev y A. Y. Smirnov. Resonant amplification of neutrino oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **42**:441, 1985.
- [107] P. Minkowsky.  $\mu \rightarrow e\gamma$  at a rate of one out of  $10^9$  muon decays?. *Phys. Lett.*, **B 67**:421, 1977.

- [108] R. N. Mohapatra, et. al. Theory of neutrinos: a white paper. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0510213v2>.
- [109] R. N. Mohapatra y G. Senjanovic. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, **44**:912, 1980.
- [110] R. N. Mohapatra y G. Senjanovic. Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation. *Phys. Rev.*, **D 23**:165, 1981.
- [111] R. N. Mohapatra. Mechanism for understanding small neutrino mass in superstring theories. *Phys. Rev. Lett.*, **56**:561, 1986.
- [112] R. N. Mohapatra y J. W. F. Valle. Neutrino mass and baryon-number non-conservation in superstring models. *Phys. Rev.*, **D 34**:1642, 1986.
- [113] R. N. Mohapatra y S. Nussinov. Bimaximal neutrino mixing and neutrino mass matrix. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9809415v3>.
- [114] R. N. Mohapatra. Seesaw mechanism and its implications. Consultado en septiembre de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0412379v1>.
- [115] E. Molinaro. Type I seesaw mechanism, lepton flavour violation and Higgs decays. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1303.5856v1>.
- [116] P. del Moral. Mean field simulation for Monte Carlo integration. Chapman & Hall/CRC Press. 626. 2013.
- [117] G. Münster y G. Bergner. Gauge theories of the strong and electroweak interactions . Consultado en junio de 2016 en <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/skripte/muenster/Gauge-theories.pdf>.
- [118] K. Nakamura, et. al. Particle Data Group. *J. Phys. G (37)*, 075021, 2010.
- [119] K. Nakamura y S. T. Petcov. Neutrino mass, mixing and oscillations. Consultado en junio de 2016 en <http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/rpp2011-rev-neutrino-mixing.pdf>.
- [120] E. Nardi, E. Roulet y D. Tommasini. New neutral gauge bosons and new heavy fermions in the light of the new LEP data. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9409310v2>.

- [121] J. von Neumann *Various techniques used in connection with random digits. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, V 12:36–38*, 1951.
- [122] D. Ng y J. N. Ng. A note on Majorana neutrinos, leptonic CKM and electron electric dipole moment. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9510306v1>.
- [123] J. F. Nieves y P. B. Pal. Rephasing-invariant CP violating parameters with Majorana neutrinos. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/0105305v2>.
- [124] H. Nunokawa, S. Parke y J. W. F. Valle. CP violation and neutrino oscillations. Consultado en junio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/0710.0554v2>.
- [125] L. Pedro. Relating spontaneous and explicit symmetry breaking in the presence of the Higgs mechanism. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1605.01512>.
- [126] J. M. Pendlebury, et. al. A revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron. Consultado en septiembre de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1509.04411v3>.
- [127] D. V. Perepelitsa. Sakharov conditions for baryogenesis. Consultado en agosto de 2016 en <http://phys.columbia.edu/~dvp/dvp-sakharov.pdf>.
- [128] J. L Raaf. Solar and atmospheric neutrinos in Super-Kamiokande. Consultado en julio de 2016 en <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/136/2/022013/meta>.
- [129] B. D. Ripley. *Stochastic Simulation*. Wiley & Sons. 1987
- [130] M. N. Rosenbluth y A. W. Rosenbluth. Monte-Carlo calculations of the average extension of macromolecular chains. *J. Chem. Phys.*, **23**:356–359. 1955
- [131] A. D. Sakharov. Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **5**:32, 1967.
- [132] A. Salam y J. C. Ward. On a gauge theory of elementary interactions. Consultado en junio de 2016 en [http://cosmology.princeton.edu/~mcdonald/examples/EP/salam\\_nc\\_19\\_165\\_61.pdf](http://cosmology.princeton.edu/~mcdonald/examples/EP/salam_nc_19_165_61.pdf).

- [133] M. Sanchez, et. al. Observation of atmospheric neutrino oscillations in Soudan 2. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0307069v1>.
- [134] A. Santamaria. Masses, mixings, yukawa couplings and their symmetries. Consultado en junio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9302301>.
- [135] S. S. Sawilowsky. You think you've got trivials?. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. 2003.
- [136] J. Schechter y J. W. F. Valle. Neutrino masses in SU(2) x U(1) theories. *Phys. Rev.*, **D 22**:2227, 1980.
- [137] K. Schreckenbach, et al. Determination of the antineutrino spectrum from  $^{235}\text{U}$  thermal neutron fission products up to 9.5 MeV. *Phys. Lett.*, **B 160**:325, 1985.
- [138] T. Schwetz, M. Tórtola y J. W. F. Valle. Where we are on  $\theta_{13}$ : addendum to Global neutrino data and recent reactor fluxes: status of three-flavour oscillation parameters. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1108.1376v1>.
- [139] A. Serenelli. Alive and well: a short review about standard solar models. Consultado en julio de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1601.07179v1>.
- [140] M. B. Smy, et. al. Precise measurement of the solar neutrino day/night and seasonal variation in Super-Kamiokande-I. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ex/0309011v1>.
- [141] M. von Steinkirch. *Introduction to group theory for physicists*, Estados Unidos, 2011.
- [142] D. Tommasini, G Barenboim, J. Bernabeu y C. Jarlskog. Non-decoupling of heavy neutrinos and lepton flavour violation. Consultado en julio de 2016 en <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9503228v2>.
- [143] T. J. Weiler. Oscillations and mixing among the three neutrino flavors. Consultado en agosto de 2016 en <http://arxiv.org/abs/1308.1715v1>.
- [144] S. Weinberg. Varieties of baryon and lepton nonconservation. *Phys. Rev.*, **D 22**:1694, 1980.

- [145] S. Wolfram. Baryon number generation in the early universe. Consultado en agosto de 2016 en <http://www.stephenwolfram.com/publications/academic/baryon-number-generation-early-universe.pdf>.
- [146] T. Yanagida. In proceedings of the workshop on the baryon number of the universe and unified theories. Tsukuba, Japan, 13-14 Feb 1979.
- [147] K. Yoshimura. PRISM overview. *Nucl. Instrum. Meth.*, **A 503**:254, 2003.