Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

PROPIEDADES ESPECTRALES DE OPERADORES NO ACOTADOS EN EL ESPACIO $L^2(\mathbb{R})$

Ronald Oliverio Chubay Gallina

Asesorado por Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera

Guatemala, mayo de 2017

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

PROPIEDADES ESPECTRALES DE OPERADORES NO ACOTADOS EN EL ESPACIO $L^2(\mathbb{R})$

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

RONALD OLIVERIO CHUBAY GALLINA

ASESORADO POR LIC. WILLIAM ROBERTO GUTIÉRREZ HERRERA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, MAYO DE 2017

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera
EXAMINADOR	Lic. Hugo Allan García Monterrosa
EXAMINADOR	Lic. Mariela Lizeth Benavides Lázaro

Ref. D.DTG. 003-2017
Guatemala 25 de mayo de 2017

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **"Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio $L^2(\mathbb{R})$** presentado por el estudiante universitario **Ronald Oliverio Chubay Gallina,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MsC. Edgar Aníbal Cifuentes Anleu
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
-DIRECTOR-
ECFM - USAC

EC/pec

AGRADECIMIENTOS

A Dios y mis padres	Alberta Gallina y Marcelo Chubay por darme la vida.
A mis hermanos	por apoyarme y guiarme en los momentos difíciles.
A mis profesores	por sus sabias enseñanzas y sus intrucciones a lo largo de mi carrera.
A mi asesor	William Gutiérrez por su paciencia y sus enseñanzas en la realización de este documento.
A mis compañeros	por los momentos compartidos dentro y fuera de clases.
Especialmente a mi madre	por estar conmigo en todo momento y por su apoyo para finalizar la carrera.

DEDICATORIA

A mi madre,
quien me introdujo al mundo de los números.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\varnothing$	conjunto vacío
E^c	complemento de E
$\subseteq$	subconjunto (contenido o igual)
$\subsetneq$	estrictamente contenido
$E \sim F$	diferencia entre E y F
χ_E	función característica de E
$\mathscr{S}$	espacio de las funciones de paso
$\tilde{\mathscr{S}}$	espacio de las funciones límite de sucesiones de funciones de paso
$\mathscr{L}$	espacio de funciones integrables
$\mathcal{D}(T)$	dominio del operador T
$\mathcal{R}(T)$	rango del operador T
$\mathcal{N}(T)$	espacio nulo del operador T
R_λ	operador resolvente de T
$\rho(T)$	conjunto resolvente de T
σT	espectro del operador T
l^p	espacio de sucesiones p-sumables
L^p	espacio de funciones p-integrables
L^2	espacio de las funciones de cuadrado integrable
$L^2(\mathbb{R})$	espacio L^2 definido sobre los números reales
$\overline{z}$	conjugado del número complejo z
ψ	vector en $L^2(\mathbb{R})$ (estado)
$\cong$	relación de equivalencia

Símbolo	Significado
$Q(\psi)$	operador posición aplicado a ψ
$D(\psi)$	operador momentum aplicado a ψ
$\mathbf{R}\int_I f$	integral de Riemann de f en I
$\mathbf{L}\int_I f$	integral de Lebesgue de f en I
$\tilde{\mathscr{M}}$	espacio de las funciones medibles
$\mathscr{M}$	conjunto de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$
μ_E	medida de Lebesgue de E
$C[a,b]$	espacio de funciones continuas sobre $[a,b]$
$\delta_{\alpha\beta}$	delta de Kronecker
$\perp$	perpendicular a
$\overline{D}$	clausura del conjunto D
H	espacio de Hilbert
T^*	operador adjunto de Hilbert
$B(x;\delta)$	bola con centro x y radio δ
μ_ψ	esperanza o valor esperado de ψ
var_ψ	varianza de ψ
sd_ψ	desviación estándar de ψ
h	constante de Planck
i	unidad imaginaria

OBJETIVOS

General

Demostrar que los operadores posición y momentum son autoadjuntos y densamente definidos en el espacio de Hilbert separable $L^2(\mathbb{R})$.

Específicos

1. Dar la teoría elemental de operadores no acotados en espacios de Hilbert.
2. Presentar la teoría espectral para operadores unitarios y autoadjuntos.
3. Desarrollar los conceptos básicos de la teoría de integración de Lebesgue.
4. Utilizar la teoría de la medida en el análisis de operadores no acotados.
5. Establecer propiedades de los operadores lineales no acotados y dar resultados sobre su espectro.

INTRODUCCIÓN

Dentro de la teoría de funciones es necesario conocer las condiciones necesarias y suficientes para que una funciones pueda ser integrable, si la función es continua y acotada en su dominio la función siempre se puede integrar en el sentido usual, conocido como la integral de Riemann [12]. Algunas funciones discontinuas pueden ser integrables si extendemos el concepto de integral de Riemann, pero aún existen funciones con infinitas discontinuidades, de las cuales algunas pueden no ser Riemann integrables, por lo que es necesario extender el concepto de integral a un conjunto más amplio.

Este concepto de integral se caracteriza no por los puntos de discontinuidad, sino por los valores de la función en dichos puntos, para nuestro estudio, consideraremos sólo subconjuntos sobre los reales. El concepto de integral de Lebesgue aparece como una extensión de la integral de Riemann para una mayor gama de funciones, se estudiarán las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea Lebesgue integrable.

Aspectos importantes de la teoría de Lebesgue son la introducción de las funciones caracterísitca y los conjuntos de medida cero, que básicamente se refieren a conjuntos para los cuales los intervalos que los contienen se pueden hacer tan pequeños como queramos, de este nuevo concepto aparecen los términos *casi en todas partes* y *para casi todo x*, siendo estos dos conceptos importantes para definir el concepto de función medible, conjunto medible y medida, que conforman la teoría de la medida. Es de resaltar que la teoría de operadores, desarrollada por Von Neumann, se basa en el estudio de él respecto a los operadores en mecánica cuántica, el desarrollo de la caracterización de un espacio de Hilbert separable [26], por consiguiente el espectro de estos operadores dan la guía para la formulación de las propiedades de operadores en espacios abstractos con producto interno.

1. Teoría de operadores lineales

1.1. Espacios de Banach

En esta sección se abordarán los temas generales sobre espacios de Banach, sabiendo que todo espacio de Banach es un espacio vectorial métrico[1] completo, con la métrica inducida por la norma. Esto para estudiar específicamente los espacios de Hilbert que son espacios métricos con producto interno definido, el cual induce una norma para estudiar propiedades importantes de los operadores.

La sección termina con las condiciones suficientes para que una métrica defina una norma y también cuándo una norma define un producto interno.

Empezaremos recordando elementos importantes para el estudio de los operadores en espacios de Banach.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre el campo K, una *norma* es una función de valor real denotada por $\| \cdot \|$ tal que para cada $x \in X$ se cumple:

(N1) $\|x\| \geq 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para cada $\alpha \in K$.

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in X$, esto se conoce como desigualdad del triángulo.

Definición 1.2. Un *espacio normado* X es un espacio vectorial con una norma definida. Decimos que el espacio es de **Banach** si es un espacio normado y es completo (con respecto a la métrica definida por la norma), es decir con la métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Llamada la *métrica inducida por la norma.*

[1] Ver apéndice A.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio vectorial y $x, y \in X$, la función $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica.*

Demostración. Consideremos X un espacio vectorial con una norma definida, vamos a probar que se cumplen los axiomas de la métrica.

(a) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ por (N1).

(b) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = d(y,x)$, esto por (N3).

(c) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$, por (N2).

(d) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$, por (N4) para cada $x, y, z \in X$.

Por lo tanto $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica sobre X. □

Proposición 1.2. *La norma es una función continua.*

Demostración. Sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función sobre V un espacio vectorial, que satisface (N1)-(N4), sean $x, y \in V$ dos elementos cualquiera y $\epsilon > 0$, por la desigualdad del triángulo se tiene que:

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|.$$

De donde claramente $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$, se procede con y de igual forma y se tiene que $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$, de donde

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|,$$

por lo que

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x-y\| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad \|x-y\| < \delta, \;\text{ con }\; \delta = \epsilon.$$ □

Ejemplo 1.1. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual:

$$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Es una norma sobre $\mathbb{R}^2$. Las primeras tres propiedades son fáciles de probar, solo mostraremos que se cumple la desigualdad triangular.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, sabiendo que $0 \leq y^2 + \sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
0 \leq& y^2 + \sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \\
x^2+z^2 \leq& x^2+2y^2+z^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \\
x^2+z^2 \leq& [\sqrt{x^2+y^2}]^2 + 2\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} + [\sqrt{y^2+z^2}]^2 \\
d(x,y)^2 \leq& \left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 = (d(x,z)+d(y,z))^2 .
\end{aligned}$$

Sean X, Y dos espacios métricos y un mapeo $T\colon X \to Y$ entre ellos. En particular si el mapeo es entre espacios vectoriales le llamamos un **operador**, estamos interesados en aquellos operadores que preservan la estructura de espacio vectorial.

Definición 1.3 (Operador lineal)**.** Un operador lineal $T\colon X \to Y$ entre dos espacios vectoriales, es una aplicación que satisface

(a) El dominio $\mathcal{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathcal{R}(T)$ está contenido en un espacio vectorial sobre el mismo campo.

(b) para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y escalares $\alpha \in K$,

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= Tx + Ty \\
\text{y} \qquad T(\alpha x) &= \alpha T x.
\end{aligned}$$

La caracteristica principal de un operador lineal es que preserva la estructura de espacio vectorial (se demostrará más adelante), también es fácil ver que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes a que dados $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in K$ se cumple que $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$, de esto se sigue que $T0 = 0$, en álgebra abstracta esto implica un **homomorfismo** entre espacios vectoriales.

Ejemplo 1.2. Los operadores $I_x\colon X \to X$ (operador identidad) y $0_x\colon X \to X$ (operador cero), son operadores lineales.

Ejemplo 1.3. En espacios de dimensión finita, los operadores lineales vienen dados por matrices, sea T un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces existe un isomorfismo entre el conjunto de aplicaciones lineales y el de las matrices de $(n \times m)$, es fácil ver que las matrices tiene las propiedades de linealidad (digamos $A = (a_{ij})$) y se cumple que para cada par de vectores $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
A(x+y) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k + \sum_{k=1}^{n} a_{mk}y_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}y_k \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} &= Ax + Ay.
\end{aligned}
$$

Y de forma análoga para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $A(\alpha x) = \alpha Ax$, con lo cual las matrices son los operadores lineales en dimensión finita [5].

Teorema 1.1.1. *Sea X, Y dos espacios vectoriales y T un operador lineal, entonces:*

(a) El rango $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio vectorial de Y.

(b) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de X, el espacio nulo se define como $\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$.

(c) Si la dimensión del dominio de T es n, entonces la dimensión del rango es a lo sumo n.

Demostración. Para la parte (a) consideremos el operador $T : X \to Y$ y $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, eso significa que existen $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx_1 = y_1$ y $Tx_2 = y_2$, consideremos $\alpha, \beta \in K$, entonces como T es lineal:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in \mathcal{R}(T).$$

Esto debido a que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$.

Para (b) consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$, entonces:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0.$$

Entonces $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$.

Para (c) tomemos sin pérdida de generalidad $n+1$ elementos distintos en $\mathcal{R}(T)$, digamos $y_1, ..., y_{n+1}$ eso significa que existen $x_1, ..., x_n$ elementos distintos en el dominio para los cuales $y_1 = Tx_1, ..., y_n = Tx_n$ (esto se asegura por la definición de función, si se toman primero los elementos en el dominio, no está asegurado que las imágenes sean distintas). Como la dimensión del dominio es n significa que existen escalares $a_1, ..., a_{n+1}$ (no todos nulos) para los cuales

$$a_1x_1 + ... + a_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

y sabiendo que $T0 = 0$, con T lineal

$$T(a_1x_1 + ... + a_{n+1}x_{n+1}) = a_1Tx_1 + ... + a_{n+1}Tx_{n+1} = a_1y_1 + ... + a_{n+1}y_{n+1} = 0.$$

Con lo cual el conjunto $\{y_1, ..., y_{n+1}\}$ es linealmente dependiente, como se eligió arbitrariamente tenemos que la dimensión de $\mathcal{R}(T) \leq n$. □

Teorema 1.1.2 (Operador inverso)**.** *Sea X, Y dos espacios vectoriales sobre el mismo campo. Sea $T\colon \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$ y rango $\mathcal{R}(T) \subset Y$. Entonces:*

(a) La inversa $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ existe si y sólo si $Tx = 0$ implica que $x = 0$.

(b) Si T^{-1} existe, éste es un operador lineal.

Demostración. Supongamos que $Tx = 0$ implica que $x = 0$. Sea $Tx_1 = Tx_2$. Dado que T es lineal,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

esto es que $x_1 = x_2$, de donde T es inyectiva y por lo tanto biyectiva, por lo que T^* existe. Por el contrario, si T^* existe, se cumple que $Tx_1 = Tx_2$, en el caso en que $x_2 = 0$

$$Tx_1 = T0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Para (b) supongamos que T^* existe y tiene dominio $\mathcal{R}(T)$, por lo tanto todo par de elementos $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ se cumple que existe $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$, tales que $Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2$, es decir que $x_1 = T^{-1}y_1$, $x_2 = T^{-1}y_2$, sean α, β escalares y por ser $\mathcal{R}(T)$ un espacio vectorial

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

De donde concluimos que

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^{-1}x_1 + \beta T^{-1}x_2$$

y con esto T^{-1} es lineal. $\square$

Definición 1.4. La norma de un operador está dada por:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |Tx|,$$

si se cumple que $\|T\| < \infty$, decimos que el operador T es **acotado**.

Ejemplo 1.4 (Operador diferenciación)**.** Sea X el espacio normado de todos los polinomios sobre $I = [0,1]$, con la norma dada por $\|x\| = \max |x(t)|, t \in I$. El operador diferencial T es definido en X por

$$Tx(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

es un operador lineal, pero veremos que no es acotado. Para eso, consideremos $x_n(t) = t^n$, es claro que

$$\max_{t\in I} |x(t)| = 1 = \|x_n\|$$

y que

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1},$$

de donde se tiene que

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx_n(t)\|}{\|x_n(t)\|} = n$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que T no es acotado.

Teorema 1.1.3 (Continuidad y acotación)**.** *Sea $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal, con $\mathcal{D}(T) \subset X$ y X, Y son espacios normados. Entonces:*

(a) T es continuo si y solo si T es acotado.

(b) Si T es continuo en un solo punto, entonces es continuo.

Demostración. Para (a) si $T = 0$ el resultado es trivial, por lo que sea $T \neq 0$, entonces $\|T\| \neq 0$. Supongamos que T es acotado y consideremos algún $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces, dado que T es lineal, se cumple que para cada $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \qquad \text{donde} \qquad \delta = \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

se obtiene

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| < \|T\| \, \delta = \epsilon.$$

Dado que x_0 fue arbitrario, T es continuo. Ahora consideremos T continuo en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon \quad \text{para cada } x \in \mathcal{D}(T) \text{ que satisfaga} \quad \|x - x_0\| \leq \delta,$$

tomando $y \neq 0$ en $\mathcal{D}(T)$ y sea

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y, \quad \text{entonces} \quad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Entonces $\|x - x_0\| = \delta$, usando la definición de continuidad y la linealidad de T, se tiene

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y \right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \, \|Ty\|$$

colocando $c = \frac{\epsilon}{\delta}$, tenemos

$$\frac{\delta}{\|y\|} \, \|Ty\| \leq \epsilon, \quad \text{esto es} \quad \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \frac{\epsilon}{\delta} = c.$$

Para cada y, por el principio del supremo $\|T\| \leq c$, por lo que T es acotado.
Para la parte (b), la continuidad puntual implica la acotación de T por (a), de donde se sigue que T es continuo. □

Corolario 1.1. *Sea T un operador lineal acotado. Entonces:*

(a) $x_n \to x$ (donde $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$) implica que $Tx_n \to Tx$.

(b) El espacio nulo $\mathcal{N}(T)$ es cerrado.

Demostración. Se sigue del teorema 1.1.3 parte (a), que si $n \to \infty$,

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \, \|x_n - x\| \leq \epsilon,$$

siempre que $\|x_n - x\| \leq \frac{\delta}{\|T\|}$.

Para (b), sea (x_n) una sucesión en $\mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \to x$. Entonces por la parte (a) de este corolario $Tx_n \to Tx$, dado que $Tx_n = 0$ para cada n, entonces $Tx = 0$, por lo que $x \in \mathcal{N}(T)$ y entonces $\mathcal{N}(T)$ es cerrado. □

Ejemplo 1.5. 1.1 El espacio l^p es un espacio de Banach complejo y separable, donde $1 \leq p < \infty$ es un número fijo y la norma para $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ está dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Demostración. Sea l^p el espacio de las sucesiones de números complejos (ξ_n) para las cuales $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$ para $1 \leq p < \infty$.
Primero mostraremos que es un espacio de Banach, es claro que la definición 1.1 cumple los axiomas para ser una norma, esto como consecuencia de la desigualdad de Minkowski A.0.4, solo falta ver que el espacio es completo.

Sabiendo que los complejos con la métrica usual forman un espacio de Banach y sea (ξ_n) una sucesión en l^p que es de Cauchy, donde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un N para el cual todo $n, m > N$ satisface que

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p \right)^{1/p} < \epsilon. \tag{1.2}$$

De donde claramente se deduce que para todo $j = 1, 2, 3, ...$ tenemos

$$\left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right| < \epsilon, \qquad n, m > N. \tag{1.3}$$

Esto muestra que para cada j fijo, la sucesión de números complejos $(\xi_j^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy, por lo que converge a ξ_j, por ser $\mathbb{C}$ un espacio de Banach, definimos $x = (\xi_j)$. De 2.6 tenemos que para cada $n, m > N$

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p < \epsilon^p, \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Si $n \to \infty$; entonces para $n, m > N$

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \epsilon^p, \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Ahora para $k \to \infty$ y $m > N$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \epsilon^p.$$

Esto muestra que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in l^p$ y dado que $x_m \in l^p$ se tiene por la desigualdad de Minkowski

$$\|x\| = \|x_m + x - x_m\| \leq \|x_m\| + \|x - x_m\| < \infty.$$

De donde se deduce que $x \in l^p$, por lo que l^p es completo, de donde l^p es un espacio de Banach. Para mostrar que es separable consideremos M el conjunto de todas las sucesiones de la forma

$$y = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, ..., \nu_n, 0, 0, 0, ...),$$

donde n es un entero positivo y los ν_j son racionales,[2] esto significa que M es contable. Sea $x \in l^p$ arbitrario, para cada $\epsilon > 0$ dependiente de n se cumple que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\epsilon^p}{2},$$

y dado que los racionales son densos en $\mathbb{R}$, los racionales complejos son densos en $\mathbb{C}$, por lo que se cumple que son densos en $\mathbb{C}^n$, de donde

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \nu_j| < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

De donde se sigue que

$$d(x,y)^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \nu_j| + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p,$$

de donde se concluye que $d(x,y) < \epsilon$, por lo que M es denso en l^p, es decir que l^p es separable. $\square$

Definición 1.5 (Funcional lineal)**.** Un *funcional lineal* f es un operador lineal con dominio sobre el espacio vectorial X y rango el campo de escalares K, es decir

$$f \colon \mathcal{D}(f) \to K,$$

donde $\mathcal{D}(f) \subset X$. Se dice que f es un *funcional lineal acotado* si el funcional es lineal y es acotado (visto como un operador), es decir que existe un real positivo c

[2] En el campo de los complejos decimos que ν es racional si la parte real e imaginaria ν son números racionales reales.

tal que

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(f) \sim \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq c.$$

Como se puede notar, si consideramos el campo K como un espacio vectorial, tenemos que todo funcional es un operador, por lo que se conservan las propiedades de los operadores.

1.2. Espacios de Hilbert

Ahora veremos conceptos importantes sobre unos espacios de Banach particulares, aquellos en donde se define un producto interno conocidos como espacios de **Hilbert**, para nuestros usos los definiremos sobre los complejos, por lo que utilizaremos $\overline{z}$ como el conjugado complejo del número complejo z.

Definición 1.6. Sea X un espacio vectorial y la función $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to K$ tal que para cada $x, y, z \in X$ y $\alpha \in K$:

(PI1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(PI2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x \rangle$.

(PI3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(PI4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamado un producto interno sobre X.

Un producto interno define una norma en X dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definición 1.7. Sea X un espacio vectorial, decimos que es un *espacio de prehilbert* si tiene un producto interno definido. Además es un *Espacio de Hilbert* si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma dada por el producto interno.

Notemos que de la definición de producto interno, si tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y, z \in X$ se cumple:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

y

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle.$$

Es decir que es lineal en la primera componente, pero satisface (salvo la conjugación) una propiedad similar a la linealiad, esto se conoce como ser *sesquilineal.*

De la desigualdad de Hölder A.0.3, para $p = 2$ se obtiene la desigualdad de **Cauchy-Schwarz**, que dice, dados dos vectores $x, y \in X$ un espacio con producto interno, entonces:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{1.4}$$

y la igualdad se logra cuando alguno de los vectores es cero o cuando son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.6. Sea f un funcional dado por el producto interno de x con un elemento fijo a, entonces f es un funcional lineal acotado.

Para esto, notemos que si $f(x) = \langle x, a\rangle$, entonces $|f(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \, \|a\|$, de donde el resultado se sigue.

Definición 1.8 (Ortogonalidad)**.** Un elemento x de un espacio con producto interno X se dice ortogonal al elemento $y \in X$ si

$$\langle x, y\rangle = 0. \tag{1.5}$$

Utilizamos $x \perp y$ para indicar que x es ortogonal a y. De igual forma para $A, B \subset X$ decimos que $x \perp A$ si x es ortogonal a a para cada $a \in A$ y $A \perp B$ si a es ortogonal a b para cada $a \in A$ y cada $b \in B$.

Definición 1.9 (Conjunto ortonormal)**.** Un *conjunto ortonormal* M en el espacio con producto interno X es un subconjunto $M \subset X$ cuyos elementos a pares son ortogonales. Más generalmente, para un conjunto indexado (x_α) con $\alpha \in I$, es llamado *ortogonal* si $x_\alpha \perp x_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in I$ distintos. La familia es llamada *ortonormal* si todos los x_α tienen norma 1, es decir:

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{si} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Debemos notar que todos los espacios de Hilbert son de Banach y todos los espacios de Banach son espacios métricos, pero los conversos no son necesariamente ciertos, para terminar esta sección dejaremos dos teoremas que nos indican cuando una métrica define una norma y cuando una norma define un producto interno.

Teorema 1.2.1 (Invarianza de traslación)**.** *Una métrica d inducida por una norma satisface:*

(a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$.

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)$.

para todo $x, y, a \in X$ *y* $\alpha \in K$.

Demostración. Para todo $x, y \in X$ un espacio de Banach y cualesquier α, β escalares, se tiene que

$$d(x+\alpha, d+\alpha) = \|x+\alpha-(y+\alpha)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

y también

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\,\|x-y\| = |\alpha|\, d(x,y). \qquad \square$$

Teorema 1.2.2 (Ley del paralelogramo)**.** *Sea X un espacio vectorial normado, entonces la norma proviene de un producto interno si cumple la Ley del Paralelogramo, esto es*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración. La demostración se le deja como ejercicio al lector. $\square$

Ejemplo 1.7. Sean $l^p(\mathbb{C})$ el espacio de sucesiones sobre los complejos $x = (x_n)$, dado por

$$l^p = \{x : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

El espacio de las sucesiones acotadas con la p-norma, donde la norma está dada por

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p. \tag{1.6}$$

Concluiremos que el único candidato a ser espacio de Hilbert es cuando $p = 2$.

Sean x y y dos sucesiones en $l^p(\mathbb{C})$ dadas por

$$x = (1, -1, 0, 0, 0, ...) \quad \text{y} \quad y = (1, 1, 0, 0, 0, ...),$$

por 1.2.2 se debe cumplir que

$$2^2 + 2^2 = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}),$$

de donde $2 = 2^{2/p}$, por lo que el único candidado a ser espacio de Hilbert es cuando $p = 2$.

Al igual que con la norma (como aplicación), el producto interno tiene la propiedad de ser continuo.

Proposición 1.3 (Continuidad del producto interno)**.** *Si en un espacio con producto interno, $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Demostración. Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones convergentes a x y y, respectivamente, esto es que para cada $n > N$ se cumple que $\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2\|x_n\|}$ y $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2\|y\|}$, de donde, por la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4 (Independencia lineal)**.** *Un conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un conjunto ortonormal en un espacio con producto interno, consideremos

$$a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = 0.$$

Multiplicamos e_i a esta ecuación para obtener

$$\langle a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n, e_i\rangle = \langle 0, e_i\rangle.$$

De donde $\langle 0, e_i\rangle = 0$ y por linealidad

$$a_1\langle e_1, e_i\rangle + a_2\langle e_2, e_i\rangle + ... + a_n\langle e_n, e_i\rangle = 0,$$

$$a_i\langle e_i, e_i\rangle = a_i = 0.$$

Para cualquier $i = 1, ..., n$, por lo que el conjunto es linealmente independiente. □

Teorema 1.2.3 (Separabilidad de los espacios de Hilbert)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces:*

(a) Si H es separable, todo conjunto ortonormal en H es contable.

(b) Si H contiene una sucesión ortonormal que es total en H, entonces H es separable.

Demostración. Consultar [16]. □

1.3. Operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert

Un operador no acotado es un operador para el cual no existe constante $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$, recordando que para un operador definido en un espacio de Hilbert se cumple que para cada $x, y \in X$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

En el caso de que T es lineal y acotado en un espacio de Hilbert, T es autoadjunto si

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{1.7}$$

Es decir si $T = T^*$, un resultado importante es mostrar que si un operador no acotado satisface lo anterior, éste no puede estar definido dentro de todo el conjunto X.

Teorema 1.3.1 (Teorema de acotación de Hellinger-Toeplitz)**.** *Si un operador lineal T es definido para todo el espacio de Hilbert complejo H y satisface 1.7 para todo $x, y \in H$, entonces T es acotado.*

Demostración. Por definición H contiene una sucesión (y_n) tal que

$$\|y_n\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|Ty_n\| \to \infty.$$

Consideremos el funcional f_n definido por

$$f_n(x) = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, Ty_n\rangle$$

para cada x, por lo que f está definido para todo H, para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional f_n es acotado, por la desigualdad de Schwarz

$$|f_n(x)| = |\langle x, Ty_n\rangle| \leq \|Ty_n\| \|x\|.$$

Esto significa que para cada $x \in H$ fijo la sucesión $(f_n(x))$ es acotada. Además usando nuevamente la desigualdad de Schwarz y que $\|y_n\| = 1$

$$|f_n(x)| = |\langle Tx, y_n\rangle| \leq \|Tx\|.$$

Del teorema de acotación uniforme concluimos que $(\|f_n\|)$ es acotado, digamos que $\|f_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que para cada $x \in H$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq c \|x\|.$$

En particular, para $x = Ty_n$, tenemos que

$$\|Ty_n\|^2 = \langle Ty_n, Ty_n\rangle = |f_n(Ty_n)| \leq c \|Ty_n\|.$$

De donde se concluye que $\|Ty_n\| \leq k$, lo que contradice que $\|Ty_n\| \to \infty$. □

Definición 1.10. Decimos que T *es extensión de* S ($S \subset T$) si $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ y se cumple que $T|_{\mathcal{D}(S)} = S$.

El teorema anterior nos plantea una idea importante, si el operador no está definido sobre todo H, resulta útil buscar un extensión del operador a todo el conjunto.

Definición 1.11. Sea T un operador en un espacio de Banach y $\mathcal{D}(T)$ el dominio de T, decimos que T es *densamente definido* en H si $\mathcal{D}(T)$ es denso en H.

Definición 1.12 (Operador adjunto de Hilbert)**.** Sea $T\colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces el *operador autoadjunto de Hilbert* $T^*\colon \mathcal{D}(T) \to H$ de T es definido como sigue. El dominio $\mathcal{D}(T)$ de T^* consistente en todos los $y \in H$ tal que $y^* \in H$ cumple

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Para cada $y \in \mathcal{D}(T^*)$ el operador autoadjunto de Hilbert T^* es definido en términos de y^* por

$$y^* = T^*y.$$

Proposición 1.5. *El operador T^* es lineal.*

Demostración. Consideremos $y, z \in H$ tal que existen $y^*, z^* \in \mathcal{D}(T^*)$ asociados, se cumple por definición

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle Tx, z \rangle = \langle x, z^* \rangle,$$

donde $y^* = T^*y$ y $z^* = T^*z$, tomando α, β escalares

$$\langle Tx, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y^* \rangle + \overline{\beta} \langle x, z^* \rangle = \langle x, \alpha y^* \rangle + \langle x, \beta z^* \rangle = \langle x, \alpha y^* + \beta z^* \rangle.$$

Pero de la definición de adjunto

$$\langle Tx, \alpha y + \beta z \rangle = \langle x, (\alpha y + \beta z)^* \rangle.$$

De donde obtenemos la igualdad

$$(\alpha y + \beta z)^* = T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha y^* + \beta z^* = \alpha T^* y + \beta T^* z. \qquad \square$$

Teorema 1.3.2. *Sea $S \colon \mathcal{D}(S) \to H$ y $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal que es densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces:*

(a) Si $S \subset T$, entonces $T^* \subset S^*$.

(b) Si $\mathcal{D}(T^*)$ es denso en H, entonces $T \subset T^{**}$.

Demostración. Para la demostración consultar [16, pág. 531]. $\square$

Teorema 1.3.3 (Inverso del operador adjunto de Hilbert)**.** *Sea $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H. Suponga que T es inyectivo con rango $\mathcal{R}(T)$ denso en H. Entonces T^* es inyectivo y*

$$(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*.$$

Demostración. T^* existe dado que T es densamente definido en H. También T^{-1} existe dado que T es inyectivo. $\left(T^{-1}\right)^*$ existe dado que $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ es denso en H. Solo debemos probar que$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Sea $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Entonces para cada $x \in \mathcal{D}(T^{-1})$ tenemos $T^{-1}x \in \mathcal{D}(T)$ y

$$\langle T^{-1}x, T^*y \rangle = \langle TT^{-1}x, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Por otro lado por la definición de operador adjunto de Hilbert para T^{-1}

$$\langle T^{-1}x, T^*y\rangle = \langle x, (T^{-1})^*T^*y\rangle,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T^{-1})$. Esto muestra que $T^*y \in \mathcal{D}((T^{-1})^*)$. De donde se deduce que

$$\left(T^{-1}\right)^* T^*y = y \qquad y \in \mathcal{D}(T^*). \tag{1.8}$$

Notamos que $T^*y = 0$ implica que $y = 0$. De donde $(T^*)^{-1} \colon \mathcal{R}(T^*) \to \mathcal{D}(T^*)$ existe por el teorema del operador inverso 1.1.2. Más aún, dado que $(T^*)^{-1}T^*$ es el operador identidad sobre $\mathcal{D}(T^*)$, que comparado con la ecuación 1.8, se tiene

$$(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*.$$

Ahora consideremos algún $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y \in \mathcal{D}((T^{-1})^*)$. Entonces $Tx \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$ y

$$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle T^{-1}Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{1.9}$$

Por otro lado, de la definición de operador adjunto de Hilbert de T se tiene

$$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle x, T^*(T^{-1})^*y\rangle,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. De esto y de 2.1 se concluye que $(T^{-1})^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ y

$$T^*(T^{-1})^*y = y, \qquad y \in \mathcal{D}((T^{-1})^*). \tag{1.10}$$

Ahora, por la definición de inversa, $T^*(T^*)^{-1}$ es el operador identidad sobre el dominio $\mathcal{D}((T^*)^{-1}) = \mathcal{R}(T^*)$, y $(T^*)^{-1} \colon \mathcal{R}(T^*) \to \mathcal{D}(T^*)$ es sobreyectivo. En comparación con 1.10 se tiene que $\mathcal{D}((T^*)^{-1}) \supset \mathcal{D}((T^{-1})^*)$, esto es $(T^*)^{-1} \supset (T^{-1})^*$, de donde se concluye $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Definición 1.13 (Operador lineal simétrico)**.** Sea $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert H complejo, entonces T es llamado *operador lineal simétrico* si para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Lema 1.1 (Operador simétrico)**.** *Sea $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente* *definido en un espacio de Hilbert H complejo es simétrico si y sólo si*

$$T \subset T^*.$$

Demostración. Por definición de T^*, la relación

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{1.11}$$

es válida para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ y todo $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Suponga que $T \subset T^*$. Entonces $T^*y = Ty$ para $y \in \mathcal{D}(T)$, entonces la ecuación 1.11 se convierte en

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \tag{1.12}$$

de donde T es simétrico.

Ahora supongamos que T es simétrico, entonces para cada $x, y \in \mathcal{D}(T)$ se cumple la ecuación 1.12. Comparando con la ecuación 1.11 se tiene que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$, esto es $T = T^*|_{\mathcal{D}(T)}$, es decir que T^* es una extensión de T, de donde se sigue el resultado. $\square$

Definición 1.14 (Operador lineal autoadjunto)**.** Sea $T\colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert H complejo. Entonces T se dice *operador lineal autoadjunto* si

$$T = T^*.$$

Claramente de la definición de operador simétrico, si T es autoadjunto entonces es simétrico. También que un operador T sobre un espacio de Hilbert complejo H es simétrico, si para cada $x \in H$ se cumple que $\langle Tx, x\rangle$ es real. Esto es, para cada $x \in H$ distinto de cero

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \overline{\langle T^*x, x\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

De donde $\langle Tx, x\rangle$ es un número real. En dimensión finita los operadores son caracterizados por matrices, en los reales estas matrices se llaman simétricas, mientras que en los complejos se llaman hermíticas.

2. Teoría espectral de operadores lineales

2.1. Resolvente y espectro

En el caso de dimensión finita los operadores lineales están caracterizados por el espacio de las matrices, esto es existe un isomorfismo entre el espacio de operadores lineales y el de las matrices [5]. El estudio de la teoría espectral en dimensión finita se reduce a resolver el polinomio característico y los valores propios, generalizando ese resultado para el caso de dimensión infinita se mostrará que la generalización coincide con la teoría en dimensión finita.

Sea $X \neq \emptyset$ un espacio normado complejo y $T \colon \mathcal{D}(T) \to X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$, la razón de elegir ahora un espacio normado sobre los complejos,es que los complejos forman un campo algebraicamente cerrado (a diferencia de $\mathbb{R}$) [**?**], con lo cual estamos seguros que todo polinomio con coeficientes sobre los complejos tiene una raíz compleja. A cada operador T asociamos

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

donde λ es un número complejo e I el operador identidad sobre $\mathcal{D}(T)$. Si T_λ tiene una inversa, definimos el operador *resolvente* como

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1},$$

también conocido como el resolvente de T. Dentro de las posibilidades para el operador resolvente esta el hecho de que exista, que sea acotado o que esté definido sobre un dominio denso en X. Dado que si un operador T es lineal, también su inversa lo es, de donde podemos notar que el operador resolvente es lineal.

Definición 2.1. Sea $X \neq \emptyset$ un espacio normado complejo y $T \colon \mathcal{D}(T) \to X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Un *valor regular* $\lambda \in \mathbb{C}$ de T es un número tal que:

(R1) $R_\lambda(T)$ existe,

(R2) $R_\lambda(T)$ es acotado,

(R3) $R_\lambda(T)$ está definido sobre un conjunto denso en X.

El conjunto de todos los valres regulares de T es conocido como el *conjunto resolvente* $\rho(T)$ de T y su complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ es llamado el *espectro* de T, donde los $\lambda \in \sigma(T)$ se conocen como los *valores espectrales* de T. Para las tres clasificaciones anteriores, el espectro se particiona en tres conjuntos disjuntos:

(a) El **espectro puntual** o *espectro discreto* $\sigma_p(T)$, es el conjunto para el cual $R_\lambda(T)$ no existe.[1]

(b) El **espectro continuo** $\sigma_c(T)$ es el conjunto para el cual $R_\lambda(T)$ existe y cumple (R3), pero no está acotado.

(c) El **espectro residual** $\sigma_r(T)$ es el conjunto para el cual $R_\lambda(T)$ existe, pero no cumple (R3), sea acotado o no.

De la definición de conjunto resolvente y espectro, el plano complejo se divide en

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

También tenemos varios resultados, si el operador resolvente existe, es decir si $\mathbb{R}_\lambda \colon \mathcal{R}(T_\lambda) \to \mathcal{D}(T_\lambda)$, para $T_\lambda x = 0$ implica que $x = \mathbb{R}_\lambda 0 = 0$ (por ser lineal), esto es $x = 0$, es decir que el kernel de T_λ es $\{0\}$.

También si $T_\lambda x = 0$ para algún $x \neq 0$, entonces $\mathbb{R}_\lambda$ no existe, es decir $\lambda \in \sigma_p(T)$, a este valor le llamamos un **valor propio** de T. El vector x es llamado un **vector propio** de T correspondiente al valor propio λ. El subespacio de $\mathcal{D}(T)$ que contiene al 0 vector y todos los vectores propios se conoce como *espacio propio* de T correspondiente al valor propio λ.

[1] Un $\lambda \in \sigma_p(T)$ es llamado un valor propio de T, pues esta definición es coherente con la definición de valor propio en dimensión finita.

2.2. Propiedades espectrales de un operador lineal autoadjunto

Para el caso de operadores no acotados la teoría espectral es similar que el caso acotado, en particular en esa sección se mostrará que el espectro continuo es real y cerrado.

Teorema 2.2.1 (Independencia lineal). *Vectores propios $x_1, x_2 ..., x_n$ correspondiendo a diferentes valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de un operador lineal T sobre un espacio vectorial X forman un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $\{x_1, ..., x_n\}$ forman un conjunto linealmente dependiente. Sea x_m el primero de los vectores que es una combinación lineal de sus predecesores, digamos

$$x_m = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1}. \tag{2.1}$$

Entonces $\{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$ es un conjunto linealmente independiente. Aplicando el operador $T - \lambda_m I$ a ambos lados,

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m) x_m = & \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (T - \lambda_m I) x_j \\ = & \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m I) x_j. \end{aligned}$$

Dado que x_m es un vector propio asociado al valor propio λ_m, el lazo izquierdo es cero. Dado que el lado derecho forma un conjunto linealmente independiente, tenemos que

$$\alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) = 0, \quad \text{de donde} \quad \alpha_j = 0 \quad (j = 1, 2, ..., m-1),$$

pues $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$. Pero entonces $x_m = 0$, por 2.1. Esto contradice el hecho de que $x_m \neq 0$ dado que x_m es un vector propio, lo que demuestra lo que se quería. □

Teorema 2.2.2 (Valores regulares). *Sea $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal autoadjunto densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces un número λ está en el conjunto resolvente $\rho(T)$ de T si y solo si existe $c > 0$ tal que para cada $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\|T_\lambda x\| \geq c \|x\|, \tag{2.2}$$

donde $T_\lambda = T - \lambda I$.

Demostración. Para (a), sea $\lambda \in \rho(T)$. Entonces por definición, el resolvente $R_\lambda(T-\lambda I)^{-1} = T_\lambda^{-1}$ existe y es acotado, digamos $\|R_\lambda\| = k > 0$. Dado que $R_\lambda T_\lambda x = x$ para $x \in \mathcal{D}(T)$, tenemos

$$\|x\| = \|R_\lambda T_\lambda\| \leq \|R_\lambda\| \, \|T_\lambda\| = k \, \|T_\lambda\| \, .$$

Al dividir entre k se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c \, \|x\|$, con $c = 1/k$.

Para (b), supongamos que se cumple 2.2 para algún $c > 0$ y todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Consideremos el espacio vectorial

$$Y = \{y : y = T_\lambda x, x \in \mathcal{D}(T)\},$$

esto es, el rango de T_λ y mostramos que

(A) $T_\lambda \colon \mathcal{D}(T) \to Y$ es biyectiva.

(B) Y es denso en H.

(C) Y es cerrado.

Pues las tres implican que el resolvente $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ está definido sobre todo H. Que R_λ sea acotado es fácil de ver de 2.2, esto es $\lambda \in \rho(T)$.

Para (A) consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tales que $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$. Dado que T_λ es lineal y de 2.2

$$0 = \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c \, \|x_1 - x_2\| \, .$$

Con $c > 0$, implica que $\|x_1 - x_2\| = 0$, de donde $x_1 = x_2$, esto muestra que el operador $T_\lambda \colon \mathcal{D}(T) \to Y$ es biyectivo.

Para (B) mostraremos que $\overline{T} = H$ mostrando que $x_o \perp Y$ implica que $x_0 = 0$. Sea $x_0 \perp Y$. Entonces para cada $y = T_\lambda x \in Y$,

$$0 = \langle T_\lambda x, x_0 \rangle = \langle Tx, x_0 \rangle - \lambda \langle x, x_0 \rangle.$$

Entonces para cada $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\langle Tx, x_0 \rangle = \langle x, \overline{\lambda} x_0 \rangle.$$

Que por definición de operador adjunto de Hilbert, $x_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ y

$$Tx_0 = \overline{\lambda} x_0.$$

El hecho de que $x_0 \neq 0$ implica que $\overline{\lambda}$ es un valor propio de T, y entonces $\overline{\lambda} = \lambda$ debe ser real. De donde $Tx_0 = \lambda x_0$, esto es $T_\lambda x_0 = 0$. Pero por 2.2 se tiene una contradicción, esto es

$$0 = \|T_\lambda x_0\| \geq c\,\|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| = 0.$$

Se sigue que $\overline{Y}^{\perp} = \{0\}$, esto es $\overline{Y} = H$.

Para (C), probaremos que Y es cerrado. Sea $y_0 \in \overline{Y}$. Entonces existe una sucesión (y_n) en Y tal que $y_n \longrightarrow y_0$. Dado que $y_n \in Y$, tenemos que $y_n = T_\lambda x_n$ para algún $x_n \in \mathcal{D}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T)$. Por 2.2,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\,\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\,\|y_n - y_m\|\,.$$

Dado que (y_n) converge, esto muestra que (x_n) es de Cauchy. Dado que H es completo, (x_n) converge, digamos a x_0. Dado que T es autoadjunto, este es cerrado. [2] De donde se tiene $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ y $T_\lambda x_0 = y_0$. Esto muestra que $y_0 \in Y$. Dado que $y_0 \in \overline{Y}$ fue arbitrario, Y es cerrado.

(B) y (C) muestran que $Y = H$. De esto y de (A) vemos que el resolvente T_λ existe y es definido sobre todo H:

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1}\colon H \longrightarrow \mathcal{D}(T).$$

Dado que T_λ es lineal, R_λ es lineal y por 2.2 es acotada, pues para cada $y \in H$ y el correspondiente $x = R_\lambda y$ tenemos que $y = T_\lambda x$,

$$\|R_\lambda y\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\,\|T_\lambda x\| = \frac{1}{c}\,\|y\|\,,$$

esto es $\|R_\lambda\| \leq 1/c$. Por definición, esto prueba que $\lambda \in \rho(T)$. □

Teorema 2.2.3 (Espectro)**.** *Sea $T\colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal autoadjunto densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H, entonces el espectro $\sigma(T)$*

[2] Para la demostración consultar [16, pág. 536].

es real y cerrado.

Demostración. Primero se probará que es real. Para cada $x \neq 0$ en $\mathcal{D}(T)$ tenemos

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle,$$

y dado que $\langle x, x\rangle$ y $\langle Tx, x\rangle$ son reales

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Donde $\lambda \in C$ y $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, al restar se obtiene

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle = -2i\Im\left(\langle T_\lambda x, x\rangle\right) = (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 2i\beta\left\|x\right\|^2.$$

Donde $\Im\left(\langle T_\lambda x, x\rangle\right)$ denota la parte imaginaria del número $\langle T_\lambda x, x\rangle$ y dado que la parte real e imaginaria de un número complejo no excede el módulo del número. Por la desigualdad Cauchy-Schwarz

$$|\beta|\left\|x\right\|^2 \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \left\|T_\lambda x\right\|\left\|x\right\|.$$

Como $x \neq 0$ obtenemos $|\beta|\left\|x\right\| \leq \left\|T_\lambda x\right\|$. De esto tenemos que si $\lambda \in \mathbb{C}$ eso implica que $\beta \neq 0$, pero por el teorema anterior eso implica que $\lambda \in \rho(T)$, por lo que no puede ser un valor espectral, de donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora se probará que es cerrado. Como el conjunto resolvente está definido sobre los complejos (el cual es un espacio topológico generado por discos abiertos), mostrar que $\sigma(T)$ es cerrado equivale a mostrar que $\rho(T)$ es abierto con la métrica inducida por el producto interno. Para esto consideremos $\lambda_0 \in \rho(T)$, mostraremos que λ suficientemente cercano a λ_0 está en $\rho(T)$.

Sea $T_\lambda = Tx - \lambda x$, entonces

$$\left\|Tx - \lambda_0 x\right\| = \left\|Tx - \lambda x + \lambda x - \lambda_0 x\right\| \leq \left\|Tx - \lambda x\right\| + |\lambda - \lambda_0|\left\|x\right\|.$$

Por el teorema 2.2.2 existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\left\|Tx - \lambda_0\right\| \geq c\left\|x\right\|.$$

De donde se deduce que

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \|Tx - \lambda_0 x\| - |\lambda - \lambda_0| \, \|x\| \geq c \, \|x\| - |\lambda - \lambda_0| \, \|x\| \, .$$

Suponemos que λ es cercano a λ_0, digamos $|\lambda - \lambda_0| \leq c/2$, por lo que para cada $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\|Tx - \lambda x\| \geq c \, \|x\| - \frac{c}{2} \, \|x\| = \frac{c}{2} \, \|x\| \, .$$

Nuevamente por el teorema 2.2.2 la existencia de la constante implica que $\lambda \in \rho(T)$ y que existe una vecindad de λ_0 dada por $|\lambda - \lambda_0| \leq c/2$ totalmente contenida en $\rho(T)$ y por la arbitrariedad de λ_0 se tiene que $\rho(T)$ es abierto. Entonces $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ es cerrado. $\square$

2.3. Operadores unitarios y el teorema espectral

En esta parte se estudiará los operadores unitarios sobre espacios de Hilbert complejos y se darán teoremas importantes (sin demostración), esto para analizar los operadores autoadjuntos desde la perspectiva de los operadores unitarios.

Definición 2.2 (Operador unitario)**.** Sea H un espacio de Hilbert y U un operador lineal $U\colon H \to H$, decimos que U es unitario si

$$UU^* = U^*U = I.$$

Proposición 2.1 (Operadores unitarios)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $U\colon H \to H$ un operador lineal, son equivalentes:*

(a) U es unitario.

(b) El rango de U es un conjunto denso.

(c) U es una isometria.

El hecho que sea una isometria indica que los operadores unitarios preservan el producto escalar, es decir para todo $x, y \in H$ se cumple $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. También el hecho de que el rango sea denso implica que la inversa existe y es fácil ver que $U^{-1} = U^*$. De la definición de operador unitario se tiene que los operadores unitarios son automorfismos[3] entre espacios de Hilbert (por la isometría) y definen topologías

[3] Un automorfismo es un isomorfismo con dominio y rango en el mismo conjunto.

equivalentes, es decir preserva la estructura lineal del espacio vectorial, el producto escalar y la topología del espacio.

Teorema 2.3.1 (Espectro)**.** *Si $U\colon H \to H$ es un operador unitario en un espacio de Hilbert H complejo no vacío, entonces el espectro $\sigma(U)$ es un subconjunto cerrado del círculo unitario, esto es*

$$|\lambda| = 1 \qquad \text{para cada} \qquad \lambda \in \sigma(U).$$

Lema 2.1 (Serie de potencias)**.** *Sea*

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n.$$

Donde (α_n) es una sucesión de números reales, una serie absolutamente convergente para todo λ tal que $|\lambda| \leq k$. Suponga que $S \in B(H, H)$ es autoadjunta sobre un espacio de Hilbert complejo y que tiene norma $\|S\| \leq k$. Entonces

$$h(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n S^n$$

es un operador lineal acotado autoadjunto y

$$\|h(S)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \, k^n.$$

Si un operador lineal conmuta con S, también lo hace con $h(S)$.

Demostración. Consultar [16, pág. 548]. □

Lema 2.2 (Lema de Wecken)**.** *Sea W y A operadores lineales autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo H. Suponga que $WA = AW$ y $W^2 = A^2$. Sea P la proyección de H sobre el espacio nulo $\mathcal{N}(W - A)$. Entonces:*

(a) Si un operador lineal acotado conmuta con $W - A$, también lo hace con P.

(b) $Wx = 0$ implica que $Px = x$.

(c) Tenemos que $W = (2P - I)A$.

Demostración. Consultar [16, pág. 549]. □

Teorema 2.3.2 (Teorema espectral para operadores unitarios)**.** *Sea $U \colon H \to H$ un operador unitario sobre un espacio de Hilbert complejo no vacío H. Entonces existe una familia espectral $\xi = (E_\theta)$ sobre $[-\pi, \pi]$ tal que*

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} dE_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\, dE_\theta. \tag{2.3}$$

Más generalmente, para una función continua f definida en el círculo unitario,

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) dE_\theta, \tag{2.4}$$

donde la integral está definida en el sentido de la convergencia uniforme del operador y para todo $x, y \in H$

$$\langle f(U)x, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) dx_\theta, \qquad w(\theta) = \langle E_\theta x, y\rangle, \tag{2.5}$$

donde la integral es una integral ordinaria de Riemann-Stieltjes.

Demostración. La demostración utiliza los conceptos de familia espectral y proyecciones, por lo que se encuentra fuera del alcance de este texto. Para demostración consultar [16, pág. 551]. □

2.4. Operadores autoadjuntos y el teorema espectral

Diremos que T está asociado al operador

$$U = (T - iI)\,(T + iI)\,,$$

U es llamado la *transformación de Cayley* de T, esta transformación es similar a la transformación inversa de Möbius sobre el plano complejo, en general transforma el semiplano superior en el círculo unitario, es fácil probar que U es un operador unitario.

Lema 2.3 (Transformación de Cayley)**.** *La transformación de Cayley de un operador autoadjunto $T \colon \mathcal{D}(T) \to H$ sobre H un espacio de Hilbert complejo no vacío existe y es un operador unitario.*

Demostración. Dado que T es autoadjunto, $\sigma(T)$ es real, entonces $i, -i \in \rho(T)$. De esto, por definición los operadores $(T+iI)^{-1}$ y $(T-iI)^{-1}$ existen sobre un subconjunto denso en H y son operadores acotados (definición de conjunto resolvente). Del teorema de cerradura T es cerrado, pues $T = T^*$ y estas inversas están definidas sobre todo H, esto es

$$\mathcal{R}(T+iI) = H \qquad \mathcal{R}(T-iI) = H, \tag{2.6}$$

tenemos que I está definido sobre todo H

$$(T+iI)^{-1}(H) = \mathcal{D}(T+iI) = \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T-iI),$$

se sigue

$$(T-iI)\left(\mathcal{D}(T)\right) = H.$$

Esto muestra que U es una biyección de H en sí mismo, hace falta mostrar que U es una isometría. Para esto consideremos $x \in H$, coloquemos $y = (T+iI)^{-1}x$ y usemos $\langle y, Ty\rangle = \langle Ty, y\rangle$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|Ux\|^2 &= \|(T-iI)y\|^2 \\
&= \langle Ty - iy, Ty - iy\rangle \\
&= \langle Ty, Ty\rangle + i\langle Ty, y\rangle - i\langle y, Ty\rangle + \langle iy, iy\rangle \\
&= \langle Ty + iy, Ty + iy\rangle \\
&= \|Ty + iy\|^2 \\
&= \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Lo que prueba que U es una isometría, por lo tanto U es unitario.[4] $\square$

Lema 2.4 (Transformación de Cayley)**.** *Sea T un operador autoadjunto $T\colon \mathcal{D}(T) \to H$ sobre H un espacio de Hilbert complejo y sea*

$$U = (T-iI)(T+iI)^{-1}.$$

Entonces

$$T = i(I+U)(I-U)^{-1}, \tag{2.7}$$

más aún, 1 no es un valor propio de U.

[4] Esto se debe a que x está en el círculo unitario, por lo que su norma es 1.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{D}(T)$ y

$$y = (T + iI)x, \tag{2.8}$$

dado que $(T + iI)^{-1}(T + iI) = I$, tenemos:

$$Uy = (T - iI)x.$$

Sumando y restando

$$(I + U)y = 2Tx \tag{2.9}$$

$$(I - U)y = 2ix \tag{2.10}$$

De 2.8 y 2.6 vemos que $y \in \mathcal{R}(T + iI) = H$ y de 2.10 vemos que $I - U$ mapea H en $\mathcal{D}(T)$. También vemos de 2.10 que si $(I - U)y = 0$, entonces $x = 0$, esto es $y = 0$. Entonces $(I - U)^{-1}$ existe y es definido sobre el rango de $I - U$, que es $\mathcal{D}(T)$ por 2.10. Entonces 2.10 deja

$$y = 2i(I - U)^{-1}x \qquad x \in \mathcal{D}(T).$$

Sustituyendo en 2.9,

$$\begin{aligned} Tx &= \tfrac{1}{2}(I + U)y \\ &= i(I + U)(I - U)^{-1}x, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. De donde

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}.$$

De la existencia de $(I - U)^{-1}$ se deduce que 1 no es valor propio de la transformación de Cayley. $\square$

Teorema 2.4.1 (Teorema espectral para operadores lineales autoadjuntos)**.** *Sea $T\colon \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal autoadjunto, donde $H \neq \{0\}$ es un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{D}(T)$ es denso en H. Sea U la transformación de Cayley y (E_θ) la familia espectral en la representación espectral 2.3, de $-U$. Entonces para todo $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\begin{aligned} \langle Tx, x\rangle = & \int_{-\pi}^{\pi} \tan\tfrac{\theta}{2} dw(\theta), \qquad w(\theta) = \langle E_\theta x, x\rangle, \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dv(\lambda), \qquad v(\lambda) = \langle F_\lambda x, x\rangle, \end{aligned}$$

donde $F_\lambda = E_{2\arctan\lambda}$.

Demostración. La demostración utiliza los conceptos de familia espectral y proyecciones, por lo que se encuentra fuera del alcance de este texto. Para demostración consultar [16, pág. 558]. $\square$

3. Integral de Lebesgue y medida de Lebesgue

Dentro del espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ se tiene que bajo la norma del máximo el espacio es completo, mientras que bajo la norma p con $p=2$, el espacio no lo es, $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Banach (ver ejemplo).

Mediante el teorema de completación de espacios métricos[1] la completación de $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$ es un espacio conocido como el espacio de las funciones de cuadrado integrable, que claramente incluye a las funciones continuas y muchas más, tales que la integral del cuadrado de la función es un número finito, más general si la integral de la p-ésima potencia de la función es un número finito, el espacio se conoce como el espacio de Lebesgue p-integrable.

Pero la integración en algunos casos puede no ser la misma que la integración en el sentido de Riemann,[2] pues hay funciones que no pueden ser integradas, razón por la cual se debe trabajar en una teoría que extienda el concepto de integral. Esta generalización fue introducida en 1904 por el matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941).

Primero veamos que el espacio $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$ no es de Banach, para ello consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{C}[-1,1]$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{para} \quad x \in [-1, \frac{1}{n}] \\ nx, & \text{para} \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{para} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

[1]Este teorema tiene como corolarios el teorema de completación de espacios normados y el teorema de completación de espacios con producto interno, que tienen una formulación similar. Consultar apéndice A.

[2]Consultar apéndice B

Primero veamos que esta sucesión de funciones continuas es de Cauchy, para eso sea $n, m \in \mathbb{Z}^+ (m > n)$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|^2 = \int_{[-1,1]} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{n}{m^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{m}\right).$$

Del hecho que $m > n$, se tiene que $m^2 > n^2$ y esto a $\frac{1}{n} > \frac{n}{m^2}$, de donde

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|^2 < \frac{2}{3}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{m}\right) < \frac{4}{3n}.$$

Por lo que (f_n) es una sucesión de Cauchy y es evidente que $f_n \longrightarrow f$, donde f es la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{para} \quad x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{para} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Es evidente que es una función discontinua, de donde el espacio $\mathcal{C}[-1, 1]$ con le métrica $p = 2$ no es completo, por lo tanto no es de Banach.

Ahora consideremos un ejemplo de una función que no es Riemann-integrable:

Ejemplo 3.2. Considere la sucesión de funciones para cada $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{r_1, r_2, ..., r_n\}, \\ 0, & \text{si } x \in I \setminus \{r_1, r_2, ..., r_n\}, \end{cases}$$

tal que $f_n(x) \to f(x)$, donde $r_1, r_2, ...$ es una enumeración de los números racionales en $[0, 1]$ y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}_I, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\mathbb{I}} \setminus \mathbb{Q}_{\mathbb{I}}. \end{cases}$$

demuestre que $f(x)$ no es Riemann-integrable.[3]

Demostración. Dado que $f(x)$ es acotado en $[0, 1]$, tomando $\{I_1, I_2, ...\}$ una partición de $[0, 1]$, consideremos

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in I_i\} \quad y \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in I_i\},$$
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{r} m_i v(I_i) \quad y \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{r} M_i v(I_i).$$

Para cada partición P.

[3] Aquí Q_I denota los números racionales en el intervalo $I = [0, 1]$, similar para R_I.

Dado que los números racionales son densos sobre R, se cumple que para cada intervalo $I_i \subset I$ siempre hay números racionales e irracionales en I_i, por lo tanto $m_i = 0, M_i = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, de donde claramente

$$L(f,P) = 0 \quad y \quad U(f,P) = \sum v(I_i) = v(I) = 1,$$

para cada partición P del intervalo I. Por lo tanto:

$$\sup L(f,P) < \text{ínf}\, U(f,P). \tag{3.1}$$

De donde $f(x)$ no es Riemann-integrable.[4] □

Ahora demostraremos una propiedad de una función importante, conocida como la **función característica**.

Ejemplo 3.3. Si $\chi_{(c,d)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que

$$\chi_{(c,d)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (c,d), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.2}$$

y $(c,d) \subset [a,b]$, muestre que

$$\int_a^b \chi_{(c,d)} = d - c. \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $P = \{I_1, I_2, ..., I_r\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces para cada $i \in I$, se tiene que

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{si } I_i \subset (c,d) \\ 0, & \text{si } I_i \not\subseteq (c,d) \end{cases} \quad y \quad M_i = \begin{cases} 1, & \text{si } I_i \cap (c,d) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } I_i \cap (c,d) = \emptyset \end{cases}$$

de esto, es claro que

$$\begin{aligned} \sup L(\chi,P) &= \sup \sum_{i=1}^{r} m_i v(I_i) \\ &= \sup \sum_{i=1}^{r} v(I_i \subseteq (c,d)) \\ &= v(c,d) = d - c \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \text{ínf}\, U(\chi,P) &= \text{ínf} \sum_{i=1}^{r} M_i v(I_i) \\ &= \text{ínf} \sum_{i=1}^{r} v(I_i \cap (c,d) \neq \emptyset) \\ &= v(c,d) = d - c. \end{aligned}$$

[4] La condición para ser Riemann-integrable es que $\sup L(f,P) = \text{ínf}\, U(f,P)$ donde el supremo e ínfimo se dan sobre las particiones P del intervalo I.

De donde:

$$\sup L(\chi_{(c,d)}, P) = \text{ínf}\, U(\chi_{(c,d)}, P) = \int_a^b \chi_{(c,d)} = d - c. \qquad \square$$

3.1. Funciones de paso

Ahora consideremos un tipo de funciones que toman un valor constante dentro de un intervalo determinado y otro valor si el intervalo cambia, este tipo de funciones se conocen como funciones de paso.

Definición 3.1. Una **función de paso** g en $\mathbb{R}^n$ es una función de valor real tal que existe un intervalo $[a, b]$, una partición del intervalo $[a, b]$ en intervalos abiertos $I_1, ..., I_r$ y números reales $c_1, ..., c_r$ tales que

$$g(x) = c_i, \quad \text{para}\, x \in I_i \qquad \text{y} \qquad g(x) = 0, \quad \text{para}\, x \notin [a, b].$$

Ahora definimos una función de valor real para las funciones de paso, conocidas como la integral, que podemos denotar con el mismo signo de integral

$$\int g = \sum_{i=1}^{r} c_i v(I_i).$$

Que con la definición de función de paso, concuerda con la integral de Riemann.

Proposición 3.1. *Sea g una función de paso tal que $g(x) \geq 0$ para todo x, entonces $\int g \geq 0$.*

Demostración. Sea g una función de paso, tal que $g(x) \geq 0$, es decir que $g(x) = c_i \geq 0$ para cada c_i, de donde $\int g = \sum_{i=1}^{r} c_i v(I_i) \geq 0$. $\square$

Corolario 3.1. *Si g, h funciones de paso y $g \geq h$, entonces $\int g \geq \int h$.*

Claramente la función característica es un ejemplo de una función de paso, donde definimos la **función característica** del conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ como

$$\chi_{E(x)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Si E es un intervalo I, se tiene

$$\int_I \chi_I = v(I).$$

Proposición 3.2. *Sea $\mathscr{S}$ el conjunto de funciones de paso, entonces $\mathscr{S}$ es un espacio vectorial real y la integral es un funcional lineal.*

Proposición 3.3. *El conjunto $\mathscr{S}$ de funciones de paso es un látice.*[5]

Demostración. Es fácil ver que si $g \in \mathscr{S}$, entonces $|g| \in \mathscr{S}$. Si $g, h \in \mathscr{S}$ se definen:

$$(g \wedge h)(x) = \text{mín}\{g(x), h(x)\} \qquad y \qquad (g \vee h)(x) = \text{máx}\{g(x), h(x)\}. \tag{3.4}$$

Para ver que $g \wedge h, g \vee h \in \mathscr{S}$, notamos que:

$$g \wedge h = \tfrac{1}{2}\left(g + h - |g - h|\right) \qquad y \qquad g \vee h = \tfrac{1}{2}\left(g + h + |g - h|\right). \tag{3.5}$$

De donde $g \wedge h, g \vee h \in \mathscr{S}$. □

Un conjunto que cumple que es un látice y un espacio vectorial se llama un **látice vectorial**.

3.2. Conjuntos de medida cero

Definición 3.2. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto de medida cero** si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección contable de intervalos abiertos $\{I_k\}$ tales que

$$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \leq \epsilon.$$

Si una proposición $P(x)$ se cumple para todo x excepto para un conjunto de medida cero decimos que $P(x)$ se cumple **casi en todas partes (c.t.p.)** o bien que cumple para **casi todo x (c.t.x)**.[6]

Ejemplo 3.4. Un cubo de $(n-1)$ dimensiones en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de medida cero.

Demostración. Consideremos el cubo $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_{n-1}, b_{n-1})$ y los intervalos abiertos $I_k = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_{n-1}, b_{n-1}) \times (0, \frac{a^k}{k!})$, donde a es un número real.

[5]Un **látice** es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualesquiera dos elementos tienen un supremo y un ínfimo.

[6]En literatura en inglés se utilizan las abreviaturas a.e. para casi en todas partes y a.a.x para casi todo x, esto proviene de las abreviaturas **almost everywhere (a.e.)** y **for almost all x (a.a.x)**, respectivamente.

Claramente $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y además (I_k) es un conjunto contable tal que $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

Además para $\epsilon > 0$,

$$\sum_{j=1}^{k} v(I_k) = \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i) \left(\frac{a^k}{k!} \right) = \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i) \sum_{j=1}^{k} \frac{a^k}{k!}$$

Para $\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i) = v(I_{n-1})$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(I_k) = v(I_{n-1}) e^a.$$

Tomando $a \leq \ln \left(\frac{\epsilon}{v(I_{n-1})} \right)$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(I_k) \leq \epsilon. \qquad \square$$

Definición 3.3. Un conjunto E en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto nulo** si existe una sucesión no decreciente (g_k) de funciones de paso tal que $(g_k(x))$ diverge a ∞ para cada $x \in E$, mientras $(\int g_k)$ converge.

Teorema 3.2.1. *Un conjunto E en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo si y sólo si E es un conjunto de medida cero.*

Demostración. Primero supongamos que el conjunto E es de medida cero; esto es, existe una sucesión no decreciente (g_k) de funciones de paso no negativas tal que $(g_k(x))$ diverge a ∞ para cada $x \in E$ y $(\int g_k)$ converge. Sea $\lim \int g_k = c$, tomando $\epsilon > 0$.
Para cada función de paso g_k toma una representación con intervalos básicos $[a_k, b_k]$ y subintervalos abiertos $I_k^i, i = 1, ..., r_k$ en los cuales g_k es constante. Podemos asumir que la representación es elegido tal que cada intervalo I_i^{k+1} que intersecta con $[a_k, b_k]$ es contenida en algún intervalo I_j^k. El conjunto E' de puntos que están sobre la cara de algún $I_i^k, k = 1, 2, ...,$ es un conjunto de medida cero.

Sea $J_1, J_2, ..., J_s$ los intervalos abiertos en $\{I_i^1\}$ en el cual $g_1 > c/\epsilon$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{s_1} \frac{c}{\epsilon} v(J_i) < \int g_1 \leq c \qquad \text{de donde} \qquad \sum_{i=1}^{s_1} v(J_i) < \epsilon.$$

La función tendrá valores mayores a c/ϵ sobre $J_1, ..., J_{s_1}$ y quizás sobre algunos intervalos $J_{s_1+1}, ..., J_{s_2}$ que son disjuntos de los anteriormente elegidos intervalos J. Entonces

$$\sum_{i=1}^{s_2} \frac{c}{\epsilon} v(J_i) < \int g_1 \leq c \qquad \text{de donde} \qquad \sum_{i=1}^{s_2} v(J_i) < \epsilon.$$

Continuando de esta forma obtenemos una colección contable $\{J_i\}$ de intervalos abiertos que cubren a $E \sim E'$. También, si $m \leq s_k$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m} v(J_i) \leq \sum_{i=1}^{s_k} v(J_i) < \frac{\epsilon}{c} \int g_1 \leq c < \epsilon$$

y, entonces

$$\sum v(J_i) \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $E \sim E'$ es un conjunto de medida cero y, entonces E es un conjunto de medida cero.

Ahora supongamos que E es de medida cero. Para cada entero positivo k, sea $\{I_i^k\}$ una cubierta contable de E por intervalos abiertos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i^k) < 1/2^k$. El conjunto $\{I_i^k : k = 1, 2, ...; i = 1, 2, ...\}$ es una colección contable y, por lo tanto puede ser enumerado como $\{I_j : j = 1, 2, ...\}$. Sea ξ_j la función característica de I_j. Definamos $g_m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j$. Entonces, (g_m) es una sucesión no decreciente de funciones de paso no negativas. Además, para $x \in E, (g_m(x))$ diverge a ∞, pero

$$\lim \int g_m = \lim \sum_{j=1}^{m} v(I_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \qquad \square$$

Proposición 3.4. *Si* (h_k) *es una sucesión no creciente de funciones de paso no negativas en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lim \int h_k = 0$*, entonces*

$$\lim h_k(x) = 0 \qquad c.t.x.$$

Demostración. Dado que para cada x, $(h_k(x))$ es una sucesión no creciente de números no negativos, $\lim h_k(x)$ existe. Sea $\lim h_k(x) = h(x)$ y $E = \{x : h(x) \neq 0\}$. Entonces $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$ donde $E_m = \{x : h(x) \geq 1/m\}$. Entonces, si cada E_m es un conjunto nulo, entonces E es un conjunto nulo. Para un entero positivo fijo m,

(mh_k) es una sucesión no creciente de funciones de paso no negativas. También,

$$mh_k(x) \geq mh_k(x) \geq 1 \qquad \text{para todo } x \in E_m \text{ y todo } k.$$

Dado que $\lim \int mh_k = 0$ se elige una subsucesión (mh_{ki}) de (mh_k) tal que $\int mh_{ki} \leq \frac{1}{i^2}$. Sea $g_j = \sum_{i=1}^{j} mh_{ki}$. Entonces (g_j) es una sucesión no decreciente de funciones no negativas de paso tal que $(g_j(x))$ converge a ∞ para cada $x \in E_m$ y $(\int g_j)$ converge. Esto es E_m es un conjunto nulo. $\square$

El converso de la proposición también es cierto.

Proposición 3.5. *Si (h_k) es una sucesión no creciente de funciones de paso no negativas y $\lim h_k(x) = 0$ c.t.x, entonces*

$$\lim \int h_k = 0.$$

Ejemplo 3.5. Un conjunto contable en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de medida cero.

Demostración. Sea $E \in \mathbb{R}^n$ un conjunto contable, sin pérdida de generalidad consideraremos $E = \{r_0, r_1, r_2, ...\}$ una enumeración del conjunto y sea $I_k = B_{\delta_k}(r_k)$,[7] tal que

$$\delta_k = \frac{1}{2}\left(\frac{r^k}{k!}\right)^{1/n} \qquad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \text{ y algún } r > 0.$$

Vemos que $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ y que $v(I_k) = \frac{r^k}{k!}$, de donde para cada $\epsilon > 0$, se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(I_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} = e^r \leq \epsilon \quad \text{siempre que } r \leq \ln \epsilon. \qquad \square$$

Ejemplo 3.6. El conjunto de Cantor es un conjunto de medida cero.

Demostración. Sea C el conjunto de Cantor, obtenido del intervalo cerrado $[0,1]$, removiendo primero el intervalo abierto medio de dividir en tres parte iguales el intervalo $[0,1]$, es decir $I_{1,1} = (1/3, 2/3)$. Ahora, de los dos intervalos cerrados restantes se repite el proceso, obteniendo $I_{2,1} = (1/9, 2/9)$ y $I_{2,2} = (7/9, 8/9)$ y así sucesivamente. En el $n-$ésimo paso, removemos de los restantes 2^{n-1} intervalos los tercio medio intervalo abierto $I_{n,1} = (1/3^n, 2/3^n), ..., I_{n,2^{n-1}} = (3^n - 2/3^n, 3^n - 1/3^n)$,

[7] Esto denota la bola abierta con centro r_k y radio δ_k con la norma infinita, que es una forma más suave de definir que $I_k = \prod_{j=1}^{n}(r_k^{(j)} - \delta_k, r_k^{(j)} + \delta_k)$, donde $r_k = (r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, ..., r^{(n)})$ son las componentes de r_k.

cada uno de longitud $1/3^n$, para $n = 1, 2, \cdots$. El conjunto de Cantor es lo que queda luego de remover todos la colección de intervalos

$$\{I_{n,k}\}_{k=1}^{2^{n-1}}, n = 1, 2, 3, ...$$

Ahora, consideremos $\epsilon > 0$. Claramente, para $N > n(\epsilon)$ y

$$\sum_{k=1}^{N} v(I_k) = \sum_{k=1}^{\mathbb{N}} 2^{n-1}/3^n > 1 - \epsilon.$$

Ahora el complemento de C de $[0, 1]$ contiene la unión contable de intervalos I_n, k correspondiendo a una suma finita, entonces C es cubierto por un conjunto contable cuya suma de volúmenes es menor que ϵ, para cualquier ϵ, entonces C es de medida cero. $\square$

3.3. La integral de Riemann

Sea f una función acotada de valor real en el intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}^n$, $P = \{I_i : i = 1, ..., r\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in \overline{I_i}\} \qquad \text{y} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in \overline{I_i}\}.$$

Definimos las funciones de paso g y G como:[8]

$$g(x) = \begin{cases} m_i, & \text{para } x \in I_i \\ f(x), & \text{para } x \in \partial I_i \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} M_i, & \text{para } x \in I_i \\ f(x), & \text{para } x \in \partial I_i \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Entonces

$$\int g = \sum_{i=1}^{r} m_i v(I_i) = L(f, P) \quad \text{y} \quad \int G = \sum_{i=1}^{r} M_i v(I - i) = U(f, P).$$

Sea P_k una sucesión de particiones, tales que $P_k \subset P_{k+1}$ y $\lim |P_k| = 0$, y

$$\lim L(f, P_k) = \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \lim U(f, P_k) = \overline{\int_a^b} f.$$

[8] ∂I_i denota la frontera del intervalo I_i.

Si g_k y G_k son funciones de paso para cada P_k,[9] entonces las sucesiones (g_k) y (G_k) son nodecrecientes y no crecientes, respectivamente, y

$$\lim g_k = \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f.$$

También, $g_k \leq f(x) \leq G_k$ para todo k y todo $x \in [a,b]$.

Teorema 3.3.1. *Si f es Riemann integrable en $[a,b]$, entonces f es continua casi en todas partes en $[a,b]$.*

Demostración. Sea (P_k) una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $P_k \subset P_{k+1}$, $\lim |P_k| = 0$ y

$$\lim \int g_k = \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \lim \int G_k = \overline{\int_a^b} f.$$

Si $h_k = G_k - g_k$, entonces (h_k) es una sucesión no creciente de funciones de paso no negativas y por ser f Riemann-integrable[10] se cumple:

$$\lim \int h_k = \lim \int G_k - \lim \int g_k = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0,$$

por la proposición 3.4, se cumple que $\lim h_k(x) = 0$ c.t.x, de donde

$$\lim g_k(x) = f(x) = \lim G_k(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b] \sim E_1.$$

Donde E_1 es un conjunto de medida cero. Si E_2 es el conjunto de puntos sobre las caras de los intervalos de alguna partición, entonces E_2 es de medida cero y $E = E_1 \cup E_2$ es de medida cero. Para mostrar que f es continua sobre $[a,b] \sim E$, tomamos $x \in [a,b] \sim E$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un entero positivo k tal que

$$G_k(x) - g_k(x) < \epsilon.$$

Dado que x está en algún intervalo abierto I_i^k de P_k, existe una bola abierta $B(x;\delta)$ tal que

$$B(x;\delta) \subset I_i^k.$$

Para todo $y \in B(x,\delta)$

[9]la existencia de la sucesión g_k y G_k se demuestra en el apéndice B.
[10]Ver apéndice B.

$$g_k(x) = g_k(y) \leq f(y) \leq G_k(y) = G_k(x).$$

En particular,

$$g_k(x) \leq f(x) \leq G_k(x),$$

de donde

$$g_k(x) - G_k(x) \leq f(x) - f(y) \leq G_k(x) - g_k(x)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq G_k(x) - g_k(x) < \epsilon. \qquad \square$$

Teorema 3.3.2. *Si f es acotada y continua casi en todas partes sobre $[a, b]$, entonces f es Riemann integrable sobre $[a, b]$.*

Demostración. Consideremos f acotada y continua en $[a, b] \sim E_1$, donde E_1 es un conjunto de medida cero. Sea (P_k) una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $P_k \subset P_{k+1}$, $\lim |P_k| = 0$ y

$$\lim \int g_k = \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \lim \int G_k = \overline{\int_a^b} f.$$

Si E_2 es el conjunto de puntos sobre las caras de los intervalos en algún P_k, entonces E_2 es de medida cero y $E = E_1 \cup E_2$ es de medida cero. Tomando $x \in [a, b] \sim E$. Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{siempre que} \quad y \in B(x; \delta) \cap [a, b].$$

Dado que $\lim |P_k| = 0$, existe un entero positivo k_0 tal que $|P_k| < \delta$ siempre que $k \geq k_0$. Esto es, para cada $k \geq k_0$, si x está en el intervalo I_i^k en P_k entonces

$$h_k(x) = G_k(x) - g_k(x) = M_i - m_i \leq \epsilon.$$

Esto muestra que $\lim h_k(x) = 0$ c.t.x y por la proposición 3.5 se cumple que

$$\lim \int h_k(x) = 0,$$

de donde

$$\underline{\int_a^b} f = \lim \int g_k(x) = \lim G_k(x) = \overline{\int_a^b} f. \qquad \square$$

Si E es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$, $E \subset [a, b]$ y f es una función acotada de valor real sobre E, entonces se dice que f es Riemann integrable sobre E si $f\chi_E$ es

Riemann integrable sobre $[a,b]$ y definimos

$$\int_E f = \int_a^b f\chi_E.$$

3.4. Extensión de la integral de funciones de paso

Definición 3.4. Sea $\widetilde{\mathscr{S}}$ el conjunto de funciones g definidas en $\mathbb{R}^n$ para las cuales existe una sucesión no decreciente (g_k) de funciones de paso tales que $\lim g_k(x) = g(x)$ c.t.x y la sucesión $(\int g_k)$ es acotada. Para $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$, la integral es definida como:

$$\int g = \lim \int g_k. \tag{3.6}$$

Esta definición se debe a que la sucesión $(\int g_k)$ es una sucesión nodecreciente de números reales que es acotada, por lo tanto es convergente.

Proposición 3.6. *Si (g_k) y (h_k) son sucesiones no decrecientes de funciones de paso tales que* $\lim \int g_k \leq \lim \int h_k$ *c.t.x y $(\int g_k)$ y $(\int h_k)$ son acotadas, entonces:*

$$\lim \int g_k \leq \lim \int h_k.$$

Corolario 3.2. *Si (g_k) y (h_k) son sucesiones no decrecientes de funciones de paso, tales que $(\int g_k)$ y $(\int h_k)$ son acotados y* $\lim g_k = \lim h_k = g(x)$ *c.t.x, entonces*

$$\lim \int g_k = \lim \int h_k = \int g.$$

Con estas herramientas ahora es posible calcular el valor de la integral dada al inicio, pues se demostró anteriormente que no era Riemann-integrable.

Considere la función de Dirichlet g en $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \text{ y } x \text{ es irracional,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\{r_1, r_2, ...\}$ es una enumeración de los racionales entre $[0,1]$ y

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{r_1, r_2, ..., r_k\}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, ..., r_k\}, \end{cases}$$

entonces (g_k) es una sucesión no decreciente de funciones de paso tales que $\lim g_k(x) = g(x)$ para todo x, además $\int g_k = 0$ para cada k, esto implica que $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$, por lo que

$$\int g = \lim \int g_k = 0.$$

Corolario 3.3. *Si $g, h \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y $g(x) \leq h(x)$ c.t.x, entonces*

$$\int g \leq \int h.$$

Proposición 3.7. *Si g y h están en $\widetilde{\mathscr{S}}$ y α es un real no negativo, entonces $g+h$ y αg están en $\widetilde{\mathscr{S}}$ y*

$$\int (g+h) = \int g + \int h \qquad \text{y} \qquad \int \alpha g = \alpha \int g.$$

Demostración. Se le deja como ejercicio al lector. □

Proposición 3.8. *$\widetilde{\mathscr{S}}$ es un látice.*

Demostración. Sean $g, h \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y sea (g_k) y (h_k) sucesiones no decrecientes de funciones de paso tales que $(\int g_k)$ y $(\int h_k)$ son acotadas y (g_k) y (h_k) convergen c.t.p. a g y h, respectivamente.

Para mostrar que $(g \wedge h) \in \widetilde{\mathscr{S}}$ notamos que $(g_k \wedge h_k)$ es una sucesión no decreciente de funciones de paso. Dado que $g_k(x) \wedge h_k(x) \leq g_k(x)$, $\int (g_k(x) \wedge h_k(x)) \leq \int g_k(x)$ y por lo tanto $(\int (g_k \wedge h_k))$ es acotada. Dado que $\lim g_k(x) = g(x)$ y $\lim h_k(x) = h(x)$ c.t.x

$$\lim (g_k(x) \wedge h_k(x) = g(x) \wedge h(x) \text{ c.t.x},$$

de donde $g \wedge h \in \widetilde{\mathscr{S}}$.

Falta mostrar que $g \vee h \in \widetilde{\mathscr{S}}$, usando la desigualdad

$$g_k \vee h_k \leq g_k + h_k + |g_1| + |h_1|,$$

tenemos que $(\int (g_k(x) \vee h_k(x))$ es acotada y entonces $\lim (g_k(x) \vee h_k(x)) = g(x) \vee h(x)$ c.t.x, de donde $g \vee h \in \widetilde{\mathscr{S}}$. □

Proposición 3.9. *Sea (g_k) una sucesión no decreciente de funciones en $\widetilde{\mathscr{S}}$ tal que $(\int g_k)$ es acotada. Entonces $(g_k(x))$ converge c.t.x y si $g_k(x) = \lim g_k(x)$ c.t.x,* *entonces* $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$ *y*

$$\int g = \lim \int g_k.$$

Demostración. Para cada entero positivo k sea $(g_{kj})_{j=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de funciones de paso tales que $(\int g_{jk})_{j=1}^{\infty}$ es acotada y $\lim_{j\to\infty} g_{kj}(x) = g_k(x)$ c.t.x. Si definimos

$$h_m = g_{1m} \vee g_{2m} \vee \cdots \vee g_{mm},$$

entonces (h_m) es una sucesión no decreciente de funciones de paso. Dado que, para todo j, $g_{kj}(x) \leq g_k(x)$ c.t.x,

$$h_m(x) \leq g_1(x) \vee g_2(x) \vee g_3(x) \vee \cdots \vee g_m(x) = g_m(x) \text{ c.t.x,} \tag{3.7}$$

de donde $\int h_m \leq \int g_m$.

Esto muestra que $(\int h_k)$ está acotada y por lo tanto converge. De la definición de conjunto nulo, (h_m) converge casi en todas partes. Si tenemos que h es una función tal que $h(x) = \lim h_m(x)$ c.t.x, entonces $h \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y $\int h = \lim \int h_m$. Para cada k y para $m \geq k$

$$g_{km} \leq h_m(x) \text{ para cada } x$$

y entonces, tomando el límite con respecto a m,

$$g_k(x) \leq h(x) \text{ } c.t.x.$$

Esto muestra que $(g_k(x))$ converge c.t.x. También, si $g(x) = \lim g_k(x)$ c.t.x, tenemos que $g(x) \leq h(x)$ c.t.x. De la ecuación 3.7 tenemos que $h(x) \leq g(x)$ c.t.x. Entonces $g(x) = h(x)$ c.t.x y, por lo tanto $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y $\int g = \int h$.

Dado que $g_k(x) \leq g(x)$ c.t.x, por el corolario 3.3 implica que

$$\int h_k \leq \int g_k \leq g \text{ para todo } x$$

y por lo tanto

$$\int h \leq \lim \int g_k \leq g,$$

entonces

$$\int g = \lim \int g_k. \qquad \square$$

Corolario 3.4. *Sea* (h_k) *una sucesión de funciones no negativas en* $\widetilde{\mathscr{S}}$ *tal que* $(\int \sum_{k=1}^{\infty} h_k)$ *es acotada. Entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ *converge c.t.x y si* $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$

c.t.x entonces $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$ *y*

$$\int g = \sum_{k=1}^{\infty} h_k.$$

Ejemplo 3.7. Si f es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, la clausura del conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ es llamado el **soporte** de f. Muestre que si f es una función continua de soporte compacto, entonces f está en $\widetilde{\mathscr{S}}$.

Demostración. Sea $f\colon R^n \to \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto, entonces por el teorema de Weierstrass, f alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}$. f es Riemann integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y se definen las funciones de paso $h_k(x) = G_k(x) - g_k(x)$, donde g_k y G_k son las funciones de paso que aparecen en la definición de integral de Riemann y esta sucesión es no decreciente con $(\int h_k)$ acotada, por lo tanto $f \in \widetilde{\mathscr{S}}$. □

3.5. La integral de Lebesgue

Definición 3.5. Sea $\mathscr{L}$ el conjunto de funciones de valor real, tal que para cualquier $f \in \mathscr{L}$ existen g y h en $\widetilde{\mathscr{S}}$ tal que

$$f = g - h \quad \text{c.t.p.}$$

El conjunto $\mathscr{L}$ es conocido como el conjunto de las **Funciones Lebesgue integrables.** y la **Integral de Lebesgue** es definida como sigue:

$$\int f = \int g - \int h.$$

Previo a comparar la integral de Lebesgue con la integral de Riemann primero definimos

$$\int_E f = \int f\chi_E.$$

Si $[a, b]$ es un intervalo que contiene a E y $f\chi_E$ es Riemann integrable, decimos sobre $[a, b]$, entonces

$$\mathbf{R}\int_E f = \mathbf{R}\int f\chi_E.$$

Teorema 3.5.1. *Si* f *es una función Riemann integrable sobre* $[a, b]$*, entonces es Lebesgue integrable sobre* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b f = \boldsymbol{R}\int_a^b f.$$

Demostración. En el teorema 3.3.1 se demostró que existe una sucesión (g_k) no decreciente de funciones de paso tal que

$$\lim g_k(x) = f\chi_{[a,b]} \text{ c.t.x} \quad \text{y} \quad \lim \int g(x) = \mathbf{R}\int_a^b f.$$

Esto muestra que $f\chi_{[a,b]} \in \widetilde{\mathscr{S}} \subset \mathscr{L}$ y por lo tanto

$$\lim \int g_k = \int f\chi_{[a,b]} = \int_a^b f.$$

Esto es,

$$\int_a^b f = \mathbf{R}\int_a^b f.$$

□

Teorema 3.5.2. *$\mathscr{L}$ es un espacio vectorial y la integral es un funcional lineal sobre $\mathscr{L}$.*

Demostración. Sean f_1 y f_2 dos funciones en $\mathscr{L}$, entonces existen g_1, g_2, h_1 y h_2 en $\widetilde{\mathscr{S}}$ tales que

$$f_1 = g_1 - h_1 \text{ y } f_2 = g_2 - h_2.$$

Por la proposición 3.7, se cumple que

$$f_1 + f_2 = (g_1 - h_1) + (g_2 - h_2) = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2) \in \mathscr{L}$$

y para $\alpha > 0$

$$\alpha f_1 = \alpha(g_1 - h_1) = \alpha g_1 - \alpha h_1,$$

mientras que para $\alpha < 0$

$$\alpha f_1 = \alpha(g_1 - h_1) = \alpha g_1 - \alpha h_1 = \overline{\alpha} h_1 - \overline{\alpha} g_1 \in \mathscr{L}.$$

donde $\overline{\alpha} > 0$, debido a que $\overline{\alpha} h_1, \overline{\alpha} g_1 \in \widetilde{\mathscr{S}}$. Por lo que $\mathscr{L}$ es un espacio vectorial. Mientras que la integral satisface

$$\int (f_1 + f_2) = \int ((g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)) = \int g_1 - \int h_1 + \int g_2 - \int h_2 = \int f_1 + \int f_2$$

y para $\alpha > 0$

$$\int \alpha f_1 = \int (\alpha g_1 - \alpha h_1) = \alpha \int g_1 - \alpha \int h_1 = \alpha \int f_1,$$

mientras que para $\alpha < 0$

$$\int \alpha f_1 = \int \alpha(g_1 - h_1) = \int (\alpha g_1 - \alpha h_1) = \int \overline{\alpha}(h_1 - g_1) = \overline{\alpha} \int f_1 \in \mathscr{L},$$

donde $\overline{\alpha} > 0$, debido a que $\overline{\alpha} h_1, \overline{\alpha} g_1 \in \widetilde{\mathscr{S}}$. Por lo que la integral es un funcional lineal sobre $\mathscr{L}$. $\square$

Teorema 3.5.3. *$\mathscr{L}$ es un látice.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{L}$, existen $f_1, f_2 \in \widetilde{\mathscr{S}}$ tal que $f = f_1 - f_2$ y $f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2$ están en $\widetilde{\mathscr{S}}$, porque $\widetilde{\mathscr{S}}$ es un látice, de las relaciones

$$f_1 \vee f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|) \quad \text{y}$$

$$f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|),$$

se concluye que

$$|f| = |f_1 - f_2| = f_1 \vee f_2 - f_1 \wedge f_2$$

casi en todas partes, por lo que $|f| \in \mathscr{L}$. Sean $f, g \in \mathscr{L}$, entonces

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{y} \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

están en $\mathscr{L}$, por lo que $\mathscr{L}$ es un látice. $\square$

Teorema 3.5.4. *Si $f \in \mathscr{L}$ y $f \geq 0$ c.t.p., entonces $\int f \geq 0$.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{L}$, entonces existen $g, h \in \widetilde{\mathscr{S}}$ tales que $f = g - h$. Si $f \geq 0$ se cumple $g \geq h$ y por el corolario 3.3 se cumple que $\int g \geq \int h$, de donde $\int f = \int g - \int h \geq 0$. $\square$

3.6. Teoremas de convergencia

Teorema 3.6.1 (Levi)**.** *Sea (f_k) una sucesión de funciones no negativas casi en todas partes en $\mathscr{L}$ tal que la sucesión $\left(\int \sum_{k=1}^{m} f_k\right)$ es acotada. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge c.t.x y si $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ a.a.x, entonces $f \in \mathscr{L}$*

$$\int f = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

Demostración. Suponga que $\int \sum_{k=1}^{m} f_k \leq c$ para todo m. Para cada k, f_k tiene una representación: $f_k = g_k - h_k$ c.t.p. donde g_k y h_k son funciones no negativas en $\widetilde{\mathscr{S}}$ y $\int h_k < 1/2^k$. Dado que (h_k) es una sucesión de funciones no negativas en $\widetilde{\mathscr{S}}$ tal que $\int \sum_{k=1}^{m} \leq 1$ para todo m, el corolario 3.4 implica que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ converge c.t.x y si $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ c.t.x, entonces $h \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y $\int h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$. También, (g_k) es una sucesión de funciones no negativas en $\widetilde{\mathscr{S}}$ tal que para todo m

$$\int \sum_{k=1}^{m} g_k = \int \sum_{k=1}^{m} f_k + \int \sum_{k=1}^{m} h_k \leq c + 1.$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ converge c.t.x y si $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ c.t.x, entonces $g \in \widetilde{\mathscr{S}}$ y $\int g = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k$. De esto $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge c.t.x y si $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ c.t.x, entonces $f = g - h$ casi en todas partes. Por lo tanto, $f \in \mathscr{L}$ y

$$\int f = \int g - \int h = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k - \sum_{k=1}^{\infty} \int h_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k. \qquad \square$$

Corolario 3.5 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea (g_k) una sucesión no decreciente casi en todas partes de funciones en $\mathscr{L}$ tal que $(\int g_k)$ es acotada. Entonces $(g_k(x))$ converge c.t.x y si $g(x) = \lim g_k(x)$ c.t.x, entonces $g \in \mathscr{L}$ y*

$$\int g = \lim \int g_k.$$

Proposición 3.10. *Si $f \in \mathscr{L}$ y $\int |f| = 0$, entonces $f = 0$ casi en todas partes.*

Demostración. Sea $g_k = k\,|f|$ para cada entero positivo k. Entonces (g_k) es una no decreciente sucesión de funciones en $\mathscr{L}$ tal que $(\int g_k)$ es acotado. Por el Teorema de Convergencia Monótona, $(g_k(x))$ converge c.t.x. Pero $(k\,|f(x)|)$ converge solo en aquellos puntos en los cuales $f(x) = 0$. $\square$

3.7. Funciones medibles

Definición 3.6. Una función f de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ se dice que es una **función medible** si, para cada $g \in \mathscr{L}$ tal que $g \geq 0$, $(-g) \vee (f \wedge g)$ es integrable. Denotamos el conjunto de funciones medibles por $\widetilde{\mathscr{M}}$.

Teorema 3.7.1 (Convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Si (f_k) es una sucesión de funciones medibles tal que, para cada k, $|f_k| \leq g$ para alguna función integrable g y*

$f(x) = \lim f_k(x)$ *c.t.x, entonces* f *es integrable y*

$$\int f = \lim \int f_k.$$

Proposición 3.11. *Una función* f *de* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$ *es medible si y solo si existe una sucesión* (f_k) *de funciones integrables tal que* $f(x) = \lim f_k(x)$ *c.t.x.*

Demostración. Una sucesión de funciones integrables converge a una función integrable, por lo tanto es medible. Supongamos ahora que f es medible. Para cada entero positivo k, sea $a_k = (-k, ..., -k)$ y $b_k = (k, ..., k)$ puntos en $\mathbb{R}^n$ y definimos

$$g_k = k\chi_{[a_k,b_k]},$$

entonces g_k es una no negativa función integrable y si

$$f_k = (-g_k) \vee (f \wedge g_k),$$

entonces $f_k \in \mathscr{L}$ y

$$f(x) = \lim f_k(x) \text{ para todo } x. \qquad \square$$

Proposición 3.12. *Si* f *es continua, entonces* f *es medible.*

Demostración. Para cada entero positivo k, sea $a_k = (-k, ..., -k)$ y $B_k = (k, ..., k)$. Dado que $f\chi_{[a_k,b_k]}$ es continuo sobre (a_k, b_k), éste es Riemann integrable sobre $[a_k, b_k]$ y, entonces es Lebesgue integrable sobre $\mathbb{R}^n$. También,

$$f(x) = \lim[f(x)\chi_{[a_k,b_k](x)}] \quad \text{para todo } x$$

y por lo tanto, f es medible. $\square$

La siguiente proposición se refiere a la cerradura del conjunto $\widetilde{\mathscr{M}}$.

Proposición 3.13. *Si* (f_k) *es una sucesión de funciones en* $\widetilde{\mathscr{M}}$ *y* $f(x) = \lim f_k(x)$ *c.t.x, entonces* $f \in \widetilde{\mathscr{M}}$.

Demostración. Tomando $g \in \mathscr{L}$ tal que $g \geq 0$, y sea

$$h_k = (-g) \vee (f_k \wedge g),$$

entonces, $h_k \in \mathscr{L}$, $|h_k| \leq g$ y

$$\lim h_k(x) = (-g(x)) \vee (f(x) \wedge g(x)).$$

Entonces $h_k \in \mathscr{L}$ y, por lo tanto $f \in \widetilde{\mathscr{M}}$. $\square$

Proposición 3.14. *$\widetilde{\mathscr{M}}$ es un espacio vectorial real.*

Demostración. Tomando $f, g \in \widetilde{\mathscr{M}}$ y $\alpha \mathbb{R}$. Por la proposición 3.11, existen sucesiones (f_k) y (g_k) de funciones integrables tales que

$$\lim f_k(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim g_k(x) = g(x) \text{ c.t.x},$$

entonces $(f_k + g_k)$ y αf_k son sucesiones de funciones integrables tales que

$$\lim(f_k(x) + g_k(x)) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad \lim \alpha f_k(x) = \alpha f(x) \text{ c.t.x}$$

y, por lo tanto $f + g \in \widetilde{\mathscr{M}}$ y $\alpha f \in \widetilde{\mathscr{M}}$. $\square$

Teorema 3.7.2. *$\widetilde{\mathscr{M}}$ es un látice.*

Demostración. Sean f, h dos funciones en $\widetilde{\mathscr{M}}$, por lo que se cumple que para cada $g \in \mathscr{L}$ y

$$(-g) \vee ((f) \wedge g) = g_1 \quad \text{y} \quad (-g) \vee ((h) \wedge g) = g_2$$

están en $\mathscr{L}$, por ser $\mathscr{L}$ un látice, las relaciones

$$(-g) \vee ((f \vee h) \wedge g) = (-g) \vee ((f \wedge g) \vee (h \wedge g)) = g_1 \vee g_2,$$

también

$$(-g) \vee ((f \wedge h) \wedge g) = (-g) \vee ((f \wedge g) \wedge (h \wedge g)) = g_1 \wedge g_2$$

muestran que $f \vee h, f \wedge h \in \widetilde{\mathscr{M}}$. $\square$

Ahora consideraremos un resultado importante (sin demostración) para la siguiente proposición, para mostrar que $\widetilde{\mathscr{M}}$ es un álgebra.

Proposición 3.15. *Si (f_k) es una sucesión de funciones en $\widetilde{\mathscr{M}}$ y $g(x) = \inf_k f_k(x)$, $G(x) = \sup_k f_k(x)$, $h(x) = \varliminf f_k(x)$ y $H(x) = \varlimsup f_k(x)$ c.t.x, entonces g, G, h y H están en $\widetilde{\mathscr{M}}$.*

Proposición 3.16. *$\widetilde{\mathscr{M}}$ es un álgebra.*[11]

[11] Un ***álgebra*** es un espacio vectorial para el cual existe una operación binaria cerrada que es bilineal y distributiva con respecto a la suma, a esta operación se le llama producto.

Demostración. Primero se muestra que si $f \in \widetilde{\mathscr{M}}$, entonces $f^2 \in \widetilde{\mathscr{M}}$. Sea $\{r_k : k = 1, 2, ...\}$ es una enumeración de los números racionales en $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\inf_k (f(x) - r_k)^2 = 0$$

esto es,

$$f^2(x) = \sup_k (2r_k f(x) - r_k^2).$$

Dado que, para cada k, $2r_k f - r_k^2 \in \widetilde{\mathscr{M}}$ y por la proposición anterior, $f^2 \in \widetilde{\mathscr{M}}$. Para cualquier $f, g \in \widetilde{\mathscr{M}}$ se cumple que

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

y, por lo tanto, $fg \in \widetilde{\mathscr{M}}$. □

3.8. Funciones de valor complejo

La integral de Lebesgue puede ser definida con funciones de valor real, separando la parte real y la parte imaginaria de una función compleja, para esta sección se utilizará f una función de valor complejo tal que f_1 y f_2 son reales y $f = f_1 + i f_2$. Decimos que f es integrable si f_1 y f_2 son integrables y en ese caso

$$\int f = \int f_1 + i \int f_2,$$

también decimos que f es medible si f_1 y f_2 son medibles. En esta sección denotamos a $\mathscr{L}$ y $\widetilde{\mathscr{M}}$ al conjunto de funciones integrables y medibles, respectivamente, de valor complejo.

Proposición 3.17. *$\mathscr{L}$ es un espacio vectorial complejo y la integral es un funcional lineal sobre $\mathscr{L}$.*

Proposición 3.18. *$\widetilde{\mathscr{M}}$ es un álgebra sobre el campo de los números complejos.*

Proposición 3.19. *Si $f \in \mathscr{L}$, entonces $|f| \in \mathscr{L}$ y*

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| \, .$$

Demostración. Dado que f_1 y f_2 son funciones medibles reales, $|f| = [f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$ es una función medible real. Entonces usando el hecho de que $|f_1|$ y $|f_2|$ son integrables reales y $|f| \leq |f_1| + |f_2|$, vemos que $|f|$ es integrable. Sea

$$\int f = \left| \int f \right| e^{i\varphi}.$$

Si $e^{-i\varphi} f = g_1 + i g_2$, donde g_1 y g_2 son funciones de valor real en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\int g_1 + i \int g_2 = e^{-i\varphi} \int f = \left| \int f \right| \geq 0$$

esto muestra que $\int g_2 = 0$. Dado que $g_1 \leq |f|$,

$$\left| \int f \right| = \int g_1 \leq \int |f|. \qquad \square$$

Proposición 3.20. *Si $f \in \widetilde{\mathscr{M}}$ y $|f| \leq g$, donde g es una función real integrable, entonces $f \in \mathscr{L}$.*

Demostración. Las funciones de valor real f_1 y f_2 son funciones medibles con $|f_1| \leq g$ y $|f_2| \leq g$ y por lo tanto f_1 y f_2 son integrables. $\square$

Teorema 3.8.1 (Convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Si f es una sucesión de funciones medibles complejo valuadas, tales que para cada k, $|f_k| \leq g$ para alguna función integrable de valor real g y si $f(x) = \lim f_k(X)$ c.t.x, entonces f es integrable y*

$$\int f = \lim \int f.$$

Ejemplo 3.8. Si f es una función compleja valuada integrable tal que

$$\int |f| = 0,$$

muestre que $f = 0$ casi en todas partes.

Demostración. Sea f una función integrable de valor complejo, entonces existen dos funciones integrables de valor real f_1 y f_2 tales que

$$f = f_1 + i f_2,$$

y $|f| \leq |f_1| + |f_2|$, de donde $|f|$ es integrable.

Si $\int |f| = 0$ y el hecho de que $|f| = [f_1^2 + f_2^2]^{1/2}$ es una función integrable de valor real, por la proposición 3.10 significa que $f_1^2 + f_2^2 = 0$ casi en todas partes, de donde f_1^2 y f_2^2 son nulos casi en todas partes, de donde obtenemos que $f_1 = f_2 = 0$ casi en todas partes, por definición de f se cumple que $f = f_1 + if_2 = 0$ casi en todas partes. $\square$

3.9. Conjuntos medibles

Definición 3.7. Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es **medible** si χ_E es una función medible; E es **integrable** si χ_E es una función integrable.

Denotaremos por $\mathscr{M}$ el conjunto de los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$.

Notemos que la función característica sobre la unión y la diferencia entre dos conjuntos E y F está dada por

E	F	$\chi_{E\cup F}$	$\chi_{E\sim F}$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Tabla 3.1. Función característica de unión y diferencia

Por lo que se puede definir

$$\chi_{E\cup F} = \chi_E \vee \chi_F \qquad \text{y} \qquad \chi_{E\sim F} = \chi_E - (\chi_E \wedge \chi_F). \tag{3.8}$$

Teorema 3.9.1. *El conjunto de subconjuntos medibles $\mathscr{M}$ de $\mathbb{R}^n$ es un σ-álgebra.*

Demostración. Sean E y F dos subconjuntos medibles, esto significa que χ_E y χ_F son funciones medibles, dado que

$$\chi_{E\cup F} = \chi_E \vee \chi_F \qquad \text{y} \qquad \chi_{E\sim F} = \chi_E - (\chi_E \wedge \chi_F),$$

esto muestra que $\chi_{E\cup F}$ y $\chi_{E\sim F}$ son funciones medibles y por lo tanto $E \cup F$ y $E \sim F \in \mathscr{M}$, esto es, $\mathscr{M}$ es un álgebra de conjuntos.[12] Ahora supongamos que

[12] A es un álgebra de conjuntos sobre X si A es una familia de conjuntos de X para las cuales la unión finita de elementos de A está en A y el complemento de cualquier elemento de A está en A, o equivalentemente que la intersección finita de elementos de A estén en A. Mientras que un σ-álgebrasatisface además que la unión contable de elementos de A está en A.

$E_j \in \mathscr{M}$ para $j = 1, 2, \ldots$. Entonces, si $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$,

$$\chi_E = \lim_{k\to\infty} \vee_{j=1}^{k} \chi_{E_j}.$$

La proposición 3.15 inplica que χ_E es un conjunto medible y, por lo tanto, E es un conjunto medible. Entonces $\mathscr{M}$ es un σ-álgebra. □

Proposición 3.21. *Un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ es medible.*

Demostración. Si X es el conjunto de n-tuplas de números reales y

$$d(x, y) = \max\{\left|x^k - y^k\right| : k = 1, \ldots, n\},$$

entonces (X, d) es un espacio métrico homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. De donde, E es abierto en (X, d) y (X, d) es separable. Note que la bola abierta en (X, d) es un intervalo abierto; esto es,

$$B(x; r) = ((x^1 - r, \ldots, x^n - r), (x^1 + r, \ldots, x^n + r))$$

de donde, el conjunto E es unión e un número contable de intervalos abiertos y por lo tanto es medible.[13] □

Un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ es también medible, por definición de σ-álgebra, pues es el complemento de un conjunto abierto. Se define el conjunto de **conjuntos de Borel** a la más pequeña σ-álgebraque contiene a todos los intervalos abiertos, entonces el conjunto de Borel es medible.

3.10. Medidas

Una medida es una generalización del volumen de un intervalo para un conjunto medible.

Definición 3.8. La **medida** (de Lebesgue) μ es una función no negativa real extendida[14] definida sobre el conjunto $\mathscr{M}$ de conjuntos medibles como sigue: si $E \in \mathscr{M}$, entonces

$$\mu(E) = \begin{cases} \int \chi_E, & \text{si } E \text{ es integrable,} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[13]Debido a que un intervalo abierto es medible y ya me mostro que $\mathscr{M}$ es un σ-álgebra.

[14]Real extendida significa que la función μ tiene dominio en $\mathbb{R}^n$ y rango en la recta real agregando el punto en el infinito, esto es $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

La definición de un conjunto de medida cero tiene sentido y es consistente con esta definición, pues si E es de medida cero $\chi_E = 0$, lo que concuerda con la definición anterior.

Proposición 3.22. *Si E, F son conjuntos medibles, entonces:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Si $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$.

(3) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$.

(4) Si $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

(5) $E \subset F$ *y* $\mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(F \sim E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Se dice que si una función satisface (3) es **aditiva**. Si φ es una función real extendida definida sobre la clase $\mathscr{S}$, se dice que φ es una función **finitamente aditiva** si para una colección $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ disjuntas a pares, de conjuntos en $\mathscr{S}$ cuya unión está en $\mathscr{S}$ satisface

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(E_k).$$

Una función φ real extendida definida sobre la clase $\mathscr{S}$ se dice **contablemente aditiva** si para una sucesión (E_k) de conjuntos disjuntos a pares en $\mathscr{S}$ cuya unión está en $\mathscr{S}$ satisface

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k).$$

Claramente por ser φ una función real extendida, la suma no necesariamente converge en el sentido usual, puede no ser finita.

Teorema 3.10.1. *La medida de Lebesgue μ es contablemente aditiva.*

Proposición 3.23. *Si (E_k) es una sucesión de conjuntos medibles, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Ejemplo 3.9. El conjunto de Cantor es de medida cero (segunda demostración).

Demostración. El conjunto de Cantor se obtiene eliminando de $[0,1]$ la tercera parte del medio, luego la tercera parte del medio de los conjuntos que queden, y así sucesivamente. Si C es el conjunto de Cantor

$$C = [0,1] \sim ((1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup ...)$$

y, por lo tanto

$$\mu(C) = 1 - (1/3 + 2/9 + 4/27 + ...) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0. \qquad \square$$

3.11. La integral de Lebesgue sobre un conjunto medible

Si f es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ y E es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$, entonces f es **integrable sobre** E si $f\chi_E$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y

$$\int_E f = \int f\chi_E.$$

Esto define f sobre el conjunto E, tomando una extensión de f tal que

$$\overline{f}\chi_E = \begin{cases} f\chi_E, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para definir a la función sobre todo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.24. *Si $\{E_1, E_2, ...\}$ es una colección de conjuntos medibles disjuntos y f es integrable sobre $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces f es integrable sobre cada E_k y*

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

Proposición 3.25. *Si $\{E_1, E_2, ...\}$ es una colección de conjuntos medibles disjuntos, f es una función integrable y no negativa casi en todas partes sobre cada E_k, y $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f$ converge, entonces f es integrable sobre $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y*

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

Proposición 3.26. *Si E es de medida cero, entonces cualquier función f es integrable sobre E y $\int_E f = 0$.*

Proposición 3.27. *Una función constante c es integrable sobre cualquier conjunto E de medida finita y*

$$\int_E c = c\mu(E).$$

Proposición 3.28. *Si f es medible y $m \leq f(x) \leq M$ a.a.x en un conjunto E de medida finita, entonces f es integrable sobre E y*

$$m\mu(E) \leq \int_E f \leq M\mu(E).$$

Demostración. Sea f medible sobre E de medida finita, entonces $\int_E f$ existe y además se convervan las desigualdades, por la proposición anterior $\int_E m = m\mu(E)$ y $\int_E M = M\mu(E)$ y el resultado se sigue. □

3.12. El espacio $L^2(I)$

Consideremos los espacios $L^p(I)$, del ejemplo 1.7 se concluye que el único candidato a tener un producto interno es cuando $p = 2$ (se deja como ejercicio la comprobación que si $p = 2$ el espacio tiene un producto interno), con lo cual el espacio $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert, para el cual daremos algunos resultados importantes previo a las aplicaciones del capítulo 4, donde I es un intervalo que puede ser $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty)$ o $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos el espacio $L^2(I)$ como

$$L^2(I) := \left\{ f : \int |f|^2 < \infty \right\},$$

donde la integración es en el sentido de Lebesgue. Utilizaremos el hecho de que los espacios $L^p(I)$ son de Banach, separables y por lo tanto $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert separable, donde el producto interno está dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_I f\overline{g} d\mu,$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Teorema 3.12.1. *El conjunto* $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una familia linealmente independiente en* $L^2(a,b)$.

Demostración. Para mostrar que $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente, mostraremos que cualquier subconjunto finito de $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente.

Para ello es suficiente considerar $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = 0$ (pues cualquier subconjunto puede completarse con ceros, hasta llegar al n deseado), de $\left\|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k\right\| = 0$, se concluye que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k = 0 \quad \text{para casi todo } \xi \in [a,b].$$

Dado que un polinomio de grado menor a n que no es identicamente nulo, tiene a lo sumo n raíces, se sigue que $\alpha_k = 0, k \in \{0,1,2,...n\}$. □

Teorema 3.12.2. *Para la sucesión* $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* $L^2(a,b)$ *se cumple que*

$$\operatorname{span}\{t^n\} = L^2(a,b).$$

Donde $\operatorname{span}\{t^n\}$ *denota el espacio generado por el conjunto* $\{t^n\}$.

Demostración. Esta demostración se encuentra fuera del alcance de este trabajo, consultar [15, pág. 55]. □

Teorema 3.12.3. *Para* $0 \leq n < \infty$*, sea*

$$p_n = \frac{1}{\gamma_n} \frac{d^n[(t-a)(t-b)]^n}{dt^n}, \tag{3.9}$$

donde $\gamma_n \in \mathbb{R}$ *es elegido de tal forma que* $\|p_n\| = 1$. *Entonces* p_n *es un polinomio de grado* n *para* $0 \leq n < \infty$ *y* $\{p_n\}$ *es una base de* $L^2(a,b)$ *obtenida aplicando el proceso de ortonormalización Gram-Schmidt a la familia* $\{t^k\}$.

Demostración. Consultar [15, pág. 56]. □

Ejemplo 3.10. Sea $I = (-1,1)$, entonces 3.9 se vuelve

$$p_n = \frac{1}{\gamma_n} \frac{d^n[(t^2-1)^n]}{dt^n}, \tag{3.10}$$

conocido como los polinomios de *Legendre*.

Teorema 3.12.4. *La sucesión* $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$ *es una familia linealmente independiente en* $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Dado que $\lim_{\xi\to-\infty}\xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = \lim_{\xi\to\infty}\xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = 0$, las funciones continuas $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}$ son acotadas en todo $\mathbb{R}$ por alguna constante $c_n > 0$. Se concluye que

$$\left\|t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (t^{2n}e^{-\frac{1}{2}t^2})e^{-\frac{1}{2}t^2} \le c_{2n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2} = c_{2n}\sqrt{2\pi} < \infty,$$

y por lo tanto $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L^2(\mathbb{R})$ para $0 \le n < \infty$. Como en el teorema 3.12.1, de $\left\|\sum_{k=0}^n \alpha_k t^k e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\| = 0$ deducimos

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = 0 \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

y por lo tanto $\alpha_k = 0$ para $0 \le k \le n$. □

Teorema 3.12.5. *Para la sucesión* $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$ *en* $L^2(\mathbb{R})$ *se cumple que*

$$\operatorname{span}\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\} = L^2(\mathbb{R}).$$

Demostración. Esta demostración se encuentra fuera del alcance de este trabajo, consultar [15, pág. 57]. □

Teorema 3.12.6. *Para* $0 \le n < \infty$, *sea*

$$h_n = e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}.$$

Entonces

$$H_n = e^{x^2}\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = h_n e^{\frac{1}{2}t^2}$$

es un polinomio de grado n *en* t *y la sucesión* $\{h_n/\left\|h_n\right\|\} = \{H_n e^{-\frac{1}{2}t^2}/\left\|h_n\right\|\}$ *es una base de* $L^2(\mathbb{R})$ *obtenida al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la sucesión* $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$.

Los polinomios H_n se conocen como los polinomios de *Hermite.*

Corolario 3.6. *La sucesión* $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$ *es una familia linealmente independiente en* $L^2(0,\infty)$.

3.13. Operador diferenciación en $L^2(I)$

En esta sección se demostrará que el operador diferenciación en $L^2(\mathbb{R})$ es autoadjunto, acotado y densamente definido, para ello necesitamos unos resultados previos. Denotaremos con D al operador diferenciación, dado por

$$Df = if' \tag{3.11}$$

Definimos el conjunto $C^*(I)$ como el conjunto de las funciones que son absolutamente continuas sobre I.

Teorema 3.13.1. *Suponga que $I = (a,b)$ y sea el operador D en $L^2(a,b)$, definido sobre el subespacio cerrado*[15]

$$\mathcal{D}(D) = \{f \in L^2(a,b) : f \in C^*[a,b], f' \in L^2(a,b), f(a) = f(b) = 0\}$$

por

$$Df = if'.$$

Entonces $\overline{\mathcal{D}(D)} = L^2(a,b)$ y D es no acotado y simétrico.

Demostración. Para cada entero $n \geq 0$ la función t^n es absolutamente continua y de hecho un punto de acumulación en $\mathcal{D}(D)$ en $L^2(a,b)$. En efecto, si $\epsilon > 0$ es dado, entonces cortando linealmente la función t^n en vecindades suficientemente pequeñas de a y b se obtiene una función $f \in \mathcal{D}(D)$ tal que $\|t^n - f\| < \epsilon$.

De donde $\overline{\mathcal{D}(D)}$ contiene todas las funciones t^n para $n \geq 0$. Dado que esas funciones cumplen que su espacio generado es $L^2(a,b)$. 3.12.2 y dado que $\overline{\mathcal{D}(D)}$ es un subespacio, se tiene que $\overline{\mathcal{D}(D)} = L^2(a,b)$[16]

Para verificar que D es no acotado, definimos la función $f_n \in \mathcal{D}(D)$ para $n \geq 2/(b-a)$ por

$$f_n(\xi) = \begin{cases} n(\xi - a), & \text{para} \quad \xi \in [a, a + \frac{1}{n}], \\ 2 - n(\xi - a), & \text{para} \quad \xi \in [a + \frac{1}{n}, a + \frac{2}{n}], \\ 0, & \text{para} \quad \xi \in [a + \frac{2}{n}, b]. \end{cases}$$

Tenemos entonces,

[15]Cerrado en el sentido de la topología inducida por la norma, pues $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert.

[16]Esto debido a que si f y g están en $\overline{U}$, donde U es un subconjunto de V espacio vectorial, entonces $f+g, \lambda f \in \overline{U}$ (se le deja como ejercicio al lector).

$$f_n'(\xi) = \begin{cases} n, & \text{para} \quad \xi \in (a, a+\frac{1}{n}), \\ -n, & \text{para} \quad \xi \in (a+\frac{1}{n}, a+\frac{2}{n}), \\ 0, & \text{para} \quad \xi \in (a+\frac{2}{n}, b), \end{cases}$$

$$\|f_n\|^2 = \int_a^b |f_n(\xi) d\xi|^2 \leq 2/n \quad \text{y}$$

$$\|Df\|^2 = \|if_n'\|^2 = \int_a^b |f_n'(\xi)|^2 \, d\xi = \int_a^{a+2/n} n^2 d\xi = 2n,$$

de donde

$$\frac{\|Df_n\|}{\|f_n\|} \geq \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2/n}} = n.$$

Por lo tanto, al considerar n suficientemente grande, la norma del operador es no acotada.

Falta ver que D es simétrico, para eso tenemos que mostrar que para todo $f \in \mathcal{D}(D)$ y todo $g \in \mathcal{D}(D)$ se tiene $\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle$. En efecto, usando integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \langle if', g\rangle - \langle f, ig'\rangle &= i\int_a^b f'(\xi)\overline{g(\xi)} d\xi + i\int_a^b f(\xi)\overline{g'(\xi)} d\xi \\ &= if(\xi)\overline{g(\xi)}\Big|_a^b = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Con lo cual $\langle if', g\rangle = \langle f, ig'\rangle$. □

Teorema 3.13.2. *Sea D el operador diferencial en $L(a,b)$ definido como en el teorema 3.13.1. Entonces el dominio de D^* es el subespacio cerrado*

$$\mathfrak{D}^* = \{f \in L^2(a,b) : f \in C^*[a,b], f' \in L^2(a,b)\},$$

y D^* está definido sobre $\mathcal{D}(D^*) = \mathfrak{D}^*$ por

$$D^* f = if'.$$

Demostración. Notemos que 3.12 se cumple para $f \in \mathcal{D}(D)$ y $g \in \mathfrak{D}^*$. Esto implica que $\mathcal{D}(D^*) \supset \mathfrak{D}^*$ y $D^*g = ig'$ para $g \in \mathfrak{D}^*$. Solo queda mostrar que $\mathcal{D}(D^*) \subset \mathfrak{D}^*$. Supongamos por lo tanto que $g \in \mathcal{D}(D^*)$ es dada. Definamos la función h

absolutamente continua sobre $[a,b]$ por

$$h(\xi) = \int_a^\xi D^* g(\eta) d\eta + \delta,$$

donde $\delta \in \mathbb{C}$ es determinado de tal forma que

$$\int_a^b [g(\xi) + ih(\xi)] d\xi = 0 \tag{3.13}$$

(esto es posible dado que para un intervalo finito $[a,b]$ las funciones $g \in L^2(a,b)$, $D^* g \in L^2(a,b)$, y por lo tanto $g + ih$ es integrable). Aplicando integración por partes obtenemos que para cada función $f \in \mathcal{D}(D)$

$$\begin{aligned} \int_a^b if'(\xi)\overline{g(\xi)} d\xi & = \langle Df, g\rangle = \langle f, D^* g\rangle \\ & = \textstyle\int_a^b f(\xi)\overline{D^* g(\xi)} d\xi = f(\xi)h(\xi)|_a^b - \int_a^b f'(\xi)\overline{h(\xi)} d\xi \\ & = i \textstyle\int_a^b if'(\xi)\overline{h(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

$$\int_a^b f'(\xi)\overline{[g(\xi) + ih(\xi)]} d\xi = 0. \tag{3.14}$$

Tenemos la escogencia libre de $f \in \mathcal{D}(D^*)$. Definimos f sobre $[a,b]$ por

$$f(\xi) = \int_a^\xi [g(\eta) + ih(\eta)] d\eta,$$

hemos obtenido una función absolutamente continua f en $[a,b]$ y que tiene las propiedades

$$f' = g + ih \in L^2(a,b),$$
$$f(a) = f(b) = 0 \quad (\textit{por } 3.13),$$

y por lo tanto $f \in \mathcal{D}(D)$. Usando 3.14 obtenemos

$$\int_a^b |g(\xi) + ih(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

$$f(\xi) = -ih(\xi) = -i\int_a^\xi D^* g(\eta) d\eta - i\delta \text{ para casi todo } \ \xi \in [a,b].$$

Hemos encontrado que g es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $g' = -iD^* g \in$

$L^2(a, b)$. Con lo cual $g \in \mathfrak{D}^*$. $\square$

Terminaremos el capítulo con el teorema que utilizaremos para demostrar que el operador momentum en mecánica cuántica cumple con ser un observable.

Teorema 3.13.3. *Sea el operador diferencial D en $L^2(\mathbb{R})$ definido sobre el subespacio cerrado*

$$\mathcal{D}(D) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \in C^*[a, b] \text{ para cualquier } [a, b] \subset \mathbb{R}, f' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

por

$$Df = if'.$$

Entonces $\overline{\mathcal{D}(D)} = L^2(\mathbb{R})$ y D es no acotado y autoadjunto.

Demostración. La variedad lineal $\mathcal{D}(D)$ ciertamente contiene a las funciones $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}$ para todo $n \geq 0$. Dado que esas funciones satisfacen el teorema 3.12.5, esto es, el espacio generado es todo $L^2(\mathbb{R})$, el dominio es denso y se cumple $\overline{\mathcal{D}(D)} = L^2(\mathbb{R})$.

Que D sea no acotado se sigue de el hecho que D contiene el operador diferencial definido en $L^2(a, b)$ (considerando $L^2(a, b)$ subespacio de $L^2(\mathbb{R})$), entonces utilizamos el teorema 3.13.1 para mostrar que si D es no acotado en un intervalo, no lo es sobre todo $\mathbb{R}$.

Que D sea simétrico se sigue de 3.12, donde a es reemplazado por $-\infty$ y b por ∞. Para verificar que D es autoadjunto solo queda mostrar que $\mathcal{D}(D^*) \subset \mathcal{D}(D)$. Para esto, tomamos algún $g \in \mathcal{D}(D^*)$ y elegimos algún intervalo finito $[a, b]$.

Aplicamos exactamente la misma prueba que la del teorema 3.13.2 para mostrar que g es absolutamente continuo en $[a, b]$ y $g'(\xi) = -iD^*g(\xi)$ casi en todas partes en $[a, b]$. Dado que $[a, b]$ fue elegido arbitrariamente esto implica que $g'(\xi) = -iD^*g(\xi)$ para casi todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $g' = -iD^*g \in L^2(\mathbb{R})$. De donde se obtiene que $g \in \mathcal{D}(D)$. $\square$

4. Aplicaciones de la integral de Lebesgue

En el desarrollo de la mecánica cuántica sobresalieron dos corrientes que eran la teoría de Dirac y la de Von Neumann [17], en la teoría de Dirac se hacía referencia a la existencia de una función llamada *delta de Dirac*, la cual está definida a trozos por

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad x = 0, \\ 0, & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

y tiene la propiedad de que si se integraba en todo el plano real, el valor es 1. Dicha función no estaba bien definida, pero dada las propiedades que cumplía no se cumplían inconsistencias, aunque para Von Neumann esto no era suficiente.

La función delta de Dirac tuvo el rigor matemático cuando se estableció la teoría de distribuciones de Schwarz, teoría que sirvió también para la formulación de la teoría cuántica de campos.

A finales de 1920 Von Neumann desarrolló la noción de espacio de Hilbert separable, junto a las ideas de teoría reticular, anillos de operadores y geometrías continuas. De estas tres teoría los anillos de operadores resultaron ser el marco más importante para la mecánica cuántica, siendo la base para la formulación de la teoría de operadores y el análisis funcional. La estructura de Von Neumann (1931) [26] desde sus inicios ofreció el rigor matemático necesario para considerar a la mecánica cuántica como un sistema axiomático, un resultado que aporta solución uno de los 23 problemas de Hilbert, axiomatizar las áreas de la física.

En este capítulo consideraremos algunas aplicaciones interesantes sobre los operadores lineales autoadjuntos y como se utilizaron en la formulación matemática de la mecánica cuántica.

4.1. El operador de Fourier-Plancherel

Definición 4.1 (Operador de Hilbert-Schmidt). Sea $\{e_n\}$ un conjunto ortonormal completo en un espacio de Hilbert H. Un operador lineal acotado T se llama **operador de Hilbert-Schmidt** si

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

A $\|\cdot\|_{HS}$ se le llama la **norma de Hilbert-Schmidt**.

Definimos el operador de Hilbert-Schmidt A sobre $L^2(\mathbb{R})$, si f es una función en $L(\mathbb{R}^2)$, entonces la función Af es definida por

$$Af(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi,\eta) f(\eta) d\eta \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

El operador Af define un operador lineal acotado. Reemplazamos la función ψ por $e^{-ixy}/\sqrt{2\pi}$. Bajo la integración de Lebesgue

$$Ff(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} f(\eta) d\eta, \tag{4.2}$$

define un número $Ff(\xi)$ si y sólo si se impone que la función $f \in L^2(\mathbb{R})$, con lo cual $Ff(\xi)$ es absolutamente integrable casi en toda partes, esto es

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\eta)|\, d\eta < \infty.$$

Dado que las funciones de Hermite forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, se sustituye f por estas funciones

$$h_n = e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \in L^2(\mathbb{R}),$$

las cuales se mostraron anteriormente cumplen

$$h_n = H_n e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

donde H_n es el polinomio de Hermite de grado n.

Teorema 4.1.1. *Para las funciones de Hermite h_n se cumple que*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta}h_n(\eta)d\eta = (-i)^n h_n(\xi), \text{ para cada } \xi \in \mathbb{R}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta}h_n(\eta)d\eta = i^n h_n(\xi), \text{ para cada } \xi \in \mathbb{R},$$

para $0 \leq n < \infty$.

Demostración. Es suficiente mostrar la primera fórmula y reemplazar i por $-i$ para demostrar la segunda. Sea

$$\begin{aligned}\frac{d^k e^{-y^2}}{dy^k} &= q_k(y)e^{-y^2},\\ \frac{\partial^k e^{-ixy+\frac{1}{2}y^2}}{\partial y^k} &= r_k(x,y)e^{-ixy+\frac{1}{2}y^2},\end{aligned}$$

donde q_k y r_k son polinomios de grado k en x, y. Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^k e^{-i\xi\eta+\frac{1}{2}\eta^2}}{\partial\eta^k}\cdot\frac{d^{n-k-1}e^{-\eta^2}}{d\eta^{n-k-1}}\\ &=\lim_{\eta\to\infty} r_k(\xi,\eta)q_{n-k-1}(\eta)e^{-i\xi\eta-\frac{1}{2}\eta^2} = 0 \quad \text{para cada } \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Lo mismo cuando $\eta \to -\infty$. Mediante integración por partes

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta+\frac{1}{2}\eta^2}\frac{d^n e^{-\eta^2}}{d\eta^n}d\eta &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\frac{\partial^n e^{-i\xi\eta+\frac{1}{2}\eta^2}}{\partial\eta^n}d\eta\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\xi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\frac{\partial^n e^{\frac{1}{2}(\eta-i\xi)^2}}{\partial\eta^n}d\eta, \qquad (4.3)\end{aligned}$$

sea $\zeta = \eta - i\xi$, se tiene que

$$\frac{\partial^n e^{\frac{1}{2}(\eta-i\xi)^2}}{\partial\eta^n} = \frac{d^n e^{\frac{1}{2}\zeta^2}}{d\zeta^n} = \frac{1}{(-i)^n}\frac{\partial^n e^{\frac{1}{2}(\eta-i\xi)^2}}{\partial\xi^n},$$

entonces la 4.3 se convierte en

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\xi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^n e^{\frac{1}{2}(\eta-i\xi)^2-\eta^2}}{\partial\xi^n}d\eta = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\xi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^n e^{-\frac{1}{2}(\eta^2+2i\xi\eta+\xi^2)}}{\partial\xi^n}d\eta,$$

la integración y diferenciación pueden ser intercambiadas, dado que para cada k la

función
$$\frac{\partial^k e^{-\frac{1}{2}(y^2+2ixy+x^2)}}{\partial x^k} = s_k(x,y)e^{-\frac{1}{2}(y^2+2ixy+x^2)}$$
es integrable sobre $\mathbb{R}$ para cada valor fijo de x, esta es la integral de una derivada parcial con respecto a x para todo valor fijo de y, y esta derivada parcial es integral sobre toda banda rectangular $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$, de donde 4.3 es

$$= \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n}\left[e^{-\xi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\eta+i\xi)^2}d\eta\right],$$

de la sustitución $\zeta=\eta+i\xi$, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\eta+i\xi)^2}d\eta = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\zeta)^2}d\zeta = \sqrt{2\pi},$$

con lo cual 4.3 queda

$$(-i)^n e^{\frac{1}{2}\xi^2}\frac{d^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{d\xi^n} = (-i)^n h_n(\xi). \qquad \square$$

Teorema 4.1.2. *Sea L' el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones de Hermite h_n. Para todo $f\in L'$ la función $F_0 f$ definida sobre $\mathbb{R}$ por*
$$F_0 f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} f(\eta)d\eta \tag{4.4}$$
está en $L^2(\mathbb{R})$, y el operador F_0 definido sobre L' es una isometría a L' y por lo tanto biyectiva sobre L'. Su inversa F_0^{-1} está definida sobre L' por

$$F_0^{-1} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta} f(\eta)d\eta. \tag{4.5}$$

Demostración. Cada función $f\in L'$ puede ser escrita como $f=\sum_{n=0}^m \alpha_n h_n$, dado que cada h_n es integrable, entonces f lo es. Usando el teorema 4.1.1

$$\begin{aligned}
F_0 f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta}\sum_{n=0}^m \alpha_n h_n(\eta)d\eta \\
&= \sum_{n=0}^m \alpha_n(-i)^n h_n(\xi) \quad \text{para cada } \ \xi\in\mathbb{R}, \\
F_0 f &= \sum_{n=0}^m (-i)^n\alpha_n h_n \in L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Si dos funciones $f = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n h_n$ y $g = \sum_{n=0}^{m} \beta_n h_n$ en L' (sin pérdida de generalidad suponemos que n está sobre el mismo índice en f y g), entonces

$$\begin{aligned} \langle F_0 f, F_0 g\rangle &= \langle \textstyle\sum_{n=0}^{m}(-i)^n \alpha_n h_n, \sum_{n=0}^{m}(-i)^n \beta_n h_n\rangle \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{m} \alpha_n \overline{\beta_n} \left\|h_n\right\|^2 = \langle f, g\rangle. \end{aligned}$$

En particular obtuvimos $\|F_0 f\| = \|f\|$ para todo $f \in L'$. En esto F_0 es una isometría y entonces es inyectiva. Para mostrar que es sobreyectiva, observamos que

$$F_0\left(\sum_{n=0}^{m} i^n \alpha_n h_n\right) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n h_n = f.$$

Finalmente, de la segunda fórmula en 4.1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta} F_0 f(\eta) d\eta &= \sum_{n=0}^{m} (-i)^n \alpha_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta} n_n(\eta) d\eta \\ &= \sum_{n=0}^{m} \alpha_n h_n(\xi) = f(\xi) \quad \text{para cada } \ \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con lo cual el operador F_0^{-1} está dado por 4.5. □

Teorema 4.1.3. *Sea L' definido anteriormente, entonces existe un único operador unitario F sobre $L^2(\mathbb{R})$ llamado el* ***operador de Fourier-Plancherel****, tal que para cada $f \in L'$ las funciones $Ff \in L'$ y $F^{-1} f \in L'$ están dadas por*

$$Ff = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} f(\eta) d\eta \quad \text{para todo } \ \xi \in \mathbb{R},$$

$$F^{-1} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta} f(\eta) d\eta \quad \text{para todo } \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Del teorema 3.12.5, las funciones normalizadas de Hermite forman una base de $L^2(\mathbb{R})$, por lo que L' es en todas partes denso en $L^2(\mathbb{R})$. Por ser $L^2(\mathbb{R})$ un espacio de Hilbert, para F_0 y F_0^{-1} existen F y F', respectivamente, extensiones que son operadores lineales acotados, determinados únicamente por F_0 y F_0^{-1}, respectivamente. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones en L' que convergen a los vectores $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$, respectivamente, entonces por continuidad de F y F' y por la continuidad del producto interno

$$\begin{aligned}\langle Ff, Fg\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle Ff_n, Fg_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle,\\ FF'f &= \lim_{n\to\infty} FF'f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f,\\ F'Ff &= \lim_{n\to\infty} F'Ff_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f,\\ FF' &= F'F = I.\end{aligned}$$

Hemos encontrados que F es isométrica e invertible y por lo tanto es un automorfismo, de donde

$$\langle Ff, g\rangle = \langle Ff, FF'g\rangle = \langle f, F'g\rangle,$$

de donde $F^* = F^{-1}$, es decir F es unitaria. □

Definición 4.2. Un operador lineal T en un espacio de Hilbert H y un operador T' en un espacio de Hilbert H' se dicen **equivalentes**, si existe $U\colon H \to H'$ un isomorfismo, tal que

$$T = U^{-1}T'U. \tag{4.6}$$

Teorema 4.1.4. *Sean T y T' operadores lineales equivalentes en un espacio de Hilbert H. Un número complejo λ es un valor propio de T si y solo si lo es de T'. Si λ no es valor propio, entonces $(T-\lambda I)^{-1}$ es equivalente con $(T'-\lambda I)^{-1}$. Como consecuencia, $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

Demostración. Supongamos que U es un operador unitario en H y que $T = UT'U^{-1}$ (esto implica que $\mathcal{D}(T) = U\mathcal{D}(T')$). Si $f \in \mathcal{D}(T')$ es un vector propio de T' correspondiente al valor propio λ, entonces

$$0 \neq Uf \in \mathcal{D}(T),$$

$$T(Uf) = U(T'f) = \lambda(Uf),$$

y Uf es un vector propio de T correspondiendo al mismo valor propio. Retrocediendo este razonamiento se obtiene el primer enunciado del teorema. Si λ no es valor propio, entonces

$$(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I) = I_T,$$

$$(T-\lambda I)(T-\lambda I)^{-1} = I_{T'}.$$

Sea $C = U^{-1}(T-\lambda I)^{-1}$ (que implica que $\mathcal{D}(C) = U^{-1}\mathcal{D}((T-\lambda I)^{-1})$). Se obtiene

$$C(T'-\lambda I) = U^{-1}(T-\lambda I)^{-1}UU^{-1}(T-\lambda I)U = I_{U^{-1}TU} = I_{T'},$$

$$(T' - \lambda I)C = U^{-1}(T - \lambda I)UU^{-1}(T - \lambda I)^{-1}U = I_C,$$

y por lo tanto

$$(T' - \lambda I)^{-1} = U^{-1}(T - \lambda I)U.$$

Como consecuencia, el resolvente de $(T' - \lambda I)^{-1}$ es no acotado o no está definido en todas partes en H si y solo si $(T - \lambda I)^{-1}$ lo está. □

4.2. Operadores en mecánica cuántica

Los postulados de la mecánica cuántica establecen que a cada *observable* le corresponde un operador lineal autoadjunto que tiene dominio denso sobre un espacio de Hilbert H separable, razón por la cual hemos citado algunas propiedades importantes para la demostración de que el *operador posición* y *operador momentum* son en efecto, operadores lineales autoadjuntos no acotados en el espacio de Hilbert separable $L^2(\mathbb{R})$.

Se demostró anteriormente que el único cantidado de todos los espacios L^p a ser espacio de Hilbert era cuando $p = 2$, se mostraron las propiedades de separabilidad y completitud de los espacio L^p cuando $1 \leq p < \infty$ y se le deja como ejercicio al lector comprobar que $L^2(\mathbb{R})$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_I f\overline{g}$$

es un espacio de Hilbert.

Definición 4.3. A $L^2(\mathbb{R})$ le llamaremos **espacio de configuración** del sistema cuántico. Un **estado** –del sistema en algún instante– es un elemento $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\| = 1$.

Definición 4.4. Un **observable** de nuestro sistema cuántico en algún instante, es un operador lineal autoadjunto $T \colon \mathcal{D}(T) \to L^2(\mathbb{R})$, en donde $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{R}$ es densamente definido. Su valor medio está dado por

$$\mu_\psi(T) = \langle T\psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} T\psi\overline{\psi}dq,$$

la varianza se obtiene de

$$\mathrm{var}_\psi(T) = \langle (T - \mu_\psi(T)I)^2\psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (T - \mu_\psi(T)I)^2\psi\overline{\psi}dq$$

y la desviación estándar por $\mathrm{sd}_\psi(T) = +\sqrt{\mathrm{var}_\psi(T)}$.

4.2.1. Operador Posición

Consideremos ψ un elemento en el espacio de Hilbert $L^2(-\infty,\infty)$, y sea $J \subset \mathbb{R}$, asociamos a ψ la probabilidad que ψ se encuentre en J, dado por

$$\int_J |\psi(q)|^2 \, dq. \tag{4.7}$$

Esta probabilidad es invariante ante productos de complejos con módulo 1, esto sugiere considerar a los estados como una clase de equivalencia, esto es

$$\psi_1 \sim \psi_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi_1 = \alpha\psi_2, \quad |\alpha| = 1.$$

Por simplicidad se consideran estas clases de equivalencia con ψ, ϕ, etc.

Cada ψ genera un subespacio de dimensión 1 (sobre los complejos), esto es

$$Y = \{\phi : \phi = \beta\psi, \beta \in \mathbb{C}\}$$

de $L^2(-\infty,\infty)$. Entonces podemos llamar estado a este subespacio unidimensional $Y \subset L^2(-\infty,\infty)$ y usar a $\psi \in Y$ de norma 1 y probabilidad dada por 4.7.

Dado que $|\psi|^2$ representa una función de densidad de probabilidad [8], por definición la *media, esperanza* o *valor esperado* está dada por

$$\mu_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} q \, |\psi(q)|^2 \, dq, \tag{4.8}$$

la *varianza* está dada por

$$\mathrm{var}_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} (q - \mu_\psi)^2 \, |\psi(q)|^2 \, dq, \tag{4.9}$$

de donde la desviación estándar es $\mathrm{sd}_\psi = \sqrt{\mathrm{var}_\psi} \geq 0$. Intuitivamente, μ_ψ mide el valor promedio o valor central y var_ψ la dispersión de la distribución.

De donde μ_ψ caracteriza la posición media de una partícula para un estado dado ψ. Ahora notemos que 4.13 se puede escribir en la forma

$$\mu_\psi(Q) = \langle Q\psi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} Q\psi(q)\overline{\psi(q)}dq, \tag{4.10}$$

donde el operador $Q\colon \mathcal{D}(Q) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es definido por

$$Q\psi(q) = q\psi(q) \tag{4.11}$$

(como el producto con la variable independiente q). Dado que $\mu_\psi(Q)$ caracteriza la posición promedio de la partícula, Q es llamado el **operador posición**. Por definición, $\mathcal{D}(Q)$ consiste en todos los $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $Q\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Veremos algunos resultados de definir el operador posición como 4.11, por definición del operador, el dominio está dado por

$$\mathcal{D}(Q) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : q\psi = Q\psi \in L^2(\mathbb{R})\}. \tag{4.12}$$

Esto implica que $\mathcal{D}(Q) \neq L^2(\mathbb{R})$, tomando $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi(q) = \begin{cases} 1/q, & \text{si} \quad t \geq 1, \\ 0, & \text{si} \quad t < 1; \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} q^2 \left|\psi(q)\right|^2 dq = \int_{\mathbb{R}} dt = \int_{\mathbb{R}^+} dt \to \infty.$$

De donde $\psi \notin L^2(\mathbb{R})$. Es fácil ver que $\mathcal{D}(Q)$ contiene a todas las funciones de paso que se anulan fuera de un intervalo compacto. Mostraremos que este conjunto es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 4.1. *El operador posición es no acotado.*

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones

$$\psi_n(q) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n \leq q < n+1, \\ 0, & \quad\ \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que, $\|\psi_n\| = 1$ para cada n y que

$$\|Q\psi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} q^2 \psi_n \overline{\psi_n} dq = \int_n^{n+1} q^2 dq > n^2.$$

De esto $\frac{\|Q\psi\|}{\|\psi\|} > n$, de donde se puede elegir n suficientemente grande. $\square$

Proposición 4.2. *El operador posición es densamente definido.*

Demostración. Sea $\Omega_n = [-n, n]$, de donde $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \mathbb{R}$. Se define $\psi_n = \chi_{\Omega_n}\psi$, y se tiene para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, con n fijo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\psi_n|^2 \, dq &= \textstyle\int_{\Omega_n} |\psi_n|^2 \, dq + \int_{\mathbb{R}\sim\Omega_n} |\psi_n|^2 \, dq \\ &= \textstyle\int_{\Omega_n} |\psi|^2 \, dq \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \, dq < \infty,\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, para $Q\psi_n = q\psi_n$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |q\psi_n|^2 \, dq &= \textstyle\int_{\Omega_n} |q\psi_n|^2 \, dq + \int_{\mathbb{R}\sim\Omega_n} |q\psi_n|^2 \, dq = \int_{\Omega_n} |q|^2 \, |\psi|^2 \, dq \\ &\leq \textstyle\int_{\Omega_n} n^2 \, |\psi|^2 \, dq \leq n^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 \, dq < \infty.\end{aligned}$$

Pues n es fijo, de esto $q\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, por lo que $\psi_n \in \mathcal{D}(Q)$. Por otra parte $|\psi|^2 = |\psi^2|$ y $|\psi_n|^2 = |\psi_n^2|$ se tiene que $\psi^2, \psi_n^2 \in L^1(\mathbb{R})$, además $|\psi_n^2| \leq |\psi^2|$, sea $\varphi(q) = \lim_{n\to\infty} \psi_n^2(q)$, entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|\psi_n^2 - \varphi\right| dq = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n^2 dq = \int_{\mathbb{R}} \varphi dq,$$

se tiene $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^2 dq = \int_{\mathbb{R}} (\chi_{\Omega_n}\psi)^2 dq = \int_{\Omega_n} \psi^2 dq$, de donde tenemos

$$\lim t \to \infty \int_{\mathbb{R}} \psi_n^2 dq = \lim t \to \infty \int_{\Omega_n} \psi_n^2 dq = \int_{\mathbb{R}} \psi^2 dq.$$

De esto $\int_{\mathbb{R}} \psi^2 dq = \int_{\mathbb{R}} \varphi dq$, es decir $\int_{\mathbb{R}} (\psi^2 - \varphi) dq = 0$, de donde $\psi^2 - \varphi = 0$ casi en todas partes sobre $\mathbb{R}$, es decir que $\psi^2 = \varphi$ c.t.p. en $\mathbb{R}$, y se tiene $\lim_{n\to\infty} \psi_n^2 = \psi^2$.

En Ω_n se cumple $\psi_n\psi = \psi_n^2$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned}\|\psi_n - \psi\|^2 &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} |\psi_n - \psi|^2 \, dq = \int_{\mathbb{R}} |\psi_n^2 - 2\psi_n\psi + \psi^2| \, dq \\ &= \textstyle\int_{\Omega_n} |\psi^2 - \psi_n^2| \, dq + \int_{\mathbb{R}\sim\Omega_n} |\psi^2| \, dq,\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} \left|\psi^2 - \psi_n^2\right| dq + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\sim\Omega_n} \left|\psi^2\right| dq = 0$$

y se obtiene $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$, en donde $\psi_n \in \mathcal{D}(Q)$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, es decir que $\overline{\mathcal{D}(Q)} = L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Proposición 4.3. *El operador posición es autoadjunto.*

Demostración. Por la proposición 4.2 el operador Q es densamente definido en $L^2(\mathbb{R})$. Q es simétrico, pues para $q = \overline{q}$, se tiene que para todo $\psi, \phi \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle Q\psi, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} q\psi(q)\overline{\psi(q)}dq = \int_{\mathbb{R}} \psi(q)\overline{q\phi(q)}dq = \langle \psi, T\phi\rangle.$$

Entonces $Q \subset Q^*$, ahora es suficiente mostrar que $\mathcal{D}(Q) \supset \mathcal{D}(Q^*)$. Para esto mostraremos que $\phi \in \mathcal{D}(Q^*)$ implica $\phi \in \mathcal{D}(Q)$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(Q^*)$. Entonces para todo $\psi \in \mathcal{D}(Q)$,

$$\langle Q\psi, \phi\rangle = \langle \psi, \phi^*\rangle, \quad \text{donde } \phi^* = Q^*\phi$$

por la definición, escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} q\psi(q)\overline{\phi(q)} = \int_{\mathbb{R}} \psi(q)\overline{\phi^*(q)}dq.$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(q)[\overline{q\phi(q)} - \overline{\phi^*(q)}]dq = 0. \tag{4.13}$$

En particular, esto se cumple para cada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que es cero fuera de un intervalo acotado arbitrario (a, b). Claramente, cualquier ψ está en $\mathcal{D}(T)$. Eligiendo

$$\psi(q) = \begin{cases} q\phi(q) - \phi^*(q), & \text{si } q \in (a, b) \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de 4.13 se tiene

$$\int_a^b |q\phi(q) - \phi^*(q)|^2 \, dq = 0.$$

Se sigue de la proposición 3.10 que $q\phi(q) - \phi^*(q) = 0$ casi en todas partes sobre (a, b), esto es, $q\phi(q) = \phi^*(q)$ casi en todas partes sobre (a, b). Dado que (a, b) fue arbitrario, esto muestra que $q\phi = \phi^* \in L^2(\mathbb{R})$, esto es $\phi \in \mathcal{D}(T)$. Tenemos que $Q^*\phi = \phi^* = q\phi = Q\phi$. $\square$

Teorema 4.2.1 (Espectro)**.** *Sea Q el operador posición y $\sigma(Q)$ su espectro. Se cumple que:*

(a) Q no tiene valores propios.

(b) $\sigma(Q)$ es todo $\mathbb{R}$.

Demostración. Para (a) tomemos cualquier λ, sea $\psi \in \mathcal{D}(Q)$ tal que $Q\psi = \lambda\psi$. Entonces $(Q_\lambda I)\psi = 0$. De donde, por definición de Q,

$$0 = \|(Q - \lambda I)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |q - \lambda|^2 \, |\psi(q)|^2 \, dq.$$

Dado que $|q - \lambda| > 0$ para todo $\lambda \neq q$, tenemos que $\psi(q) = 0$ para casi todo $q \in \mathbb{R}$, con lo cual $\psi = 0$. Esto muestra que ψ no es un vector propio y por lo tanto λ no es un valor propio de Q. Dado que λ fue arbitrario, Q no tiene valores propios.

Para el inciso (b) tenemos que $\sigma(q) \subset \mathbb{R}$, dado que Q es autoadjunto, su espectro es real. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Denifimos

$$\upsilon_n(q) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \lambda - \frac{1}{n} \leq q \leq \lambda + \frac{1}{n}, \\ 0, & \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

y consideremos $\psi_n = \|\upsilon_n\|^{-1} \upsilon_n$. Entonces $\|\psi_n\| = 1$. Escribimos $Q_\lambda = Q - \lambda I$, tenemos de la definición de Q,

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda \psi_n\|^2 \qquad &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} (q - \lambda)^2 \, |\psi|^2 \, dq \\ &\leq \textstyle\frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(q)|^2 \, dq = \frac{1}{n^2}; \end{aligned}$$

tomando la raíz cuadrada, tenemos

$$\|Q_\lambda \psi_n\| \leq \frac{1}{n}. \tag{4.14}$$

Dado que Q no tiene valores propios, el resolvente $R_\lambda = Q_\lambda^{-1}$ existe, y $Q_\lambda \psi_n \neq 0$ pues $\psi_n \neq 0$, por el teorema de la función inversa. Los vectores

$$\phi_n = \frac{1}{\|Q_\lambda \psi_n\|} Q_\lambda \psi_n$$

están en el rango de Q_λ, que es el dominio de R_λ y tiene norma 1. Aplicando R_λ y usando 4.14, obtenemos

$$\|R_\lambda \phi_n\| = \frac{1}{\|Q_\lambda \psi_n\|} \, \|\psi_n\| \geq n.$$

Esto muestra que el resolvente no es acotado; entonces $\lambda \in \sigma(Q)$. Dado que $\lambda \in \mathbb{R}$ fue arbitrario $\sigma(Q) = \mathbb{R}$. $\square$

4.2.2. Operador momentum

Otro observable importante es el momentum p. El correspondiente **operador momentum** está dado por

$$D\colon \mathcal{D}(D) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \tag{4.15}$$

$$\psi \longmapsto \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi}{dq} \tag{4.16}$$

donde h es la constante de Planck y el dominio $\mathcal{D}(D) \subset L^2(\mathbb{R})$ consiste en todas las funciones $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ que son absolutamente continuas sobre cada intervalo compacto sobre $\mathbb{R}$ y tal que $D\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

El valor esperado está dado por

$$\mu_\psi(D) = \langle D\psi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} D\psi(q)\overline{\psi(q)}dq. \tag{4.17}$$

Teorema 4.2.2. *El operador momentum es autoadjunto, densamente definido y no acotado.*

Demostración. De la definición de operador momentum, éste es el operador diferenciación, definido en el teorema 3.13.3, de donde el resultado se sigue. □

Sean S y T dos operadores lineales autoadjuntos con dominio en el mismo espacio de Hilbert complejo. Entonces el operador

$$C = ST - TS$$

es llamado el **conmutador** de S y T y es definido sobre

$$\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(ST) \cap \mathcal{D}(TS).$$

En el caso particular que los operadores sean el operador momentum y posición, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3. *Sea D y Q el operador momentum y posición, respectivamente, en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces el dominio de $C = DQ - QD$ es densamente definido en $L^2(\mathbb{R})$ y*

$$DQ - QD = \frac{h}{2\pi i}\tilde{I}, \tag{4.18}$$

donde el operador $\tilde{I}$ es el operador identidad en el dominio de C.

Demostración. El dominio de C claramente contiene a las funciones $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} (n \geq 0)$. Dado que esas funciones generan a todo $L^2(\mathbb{R})$ (teorema 3.12.5), se sigue que el dominio es denso. Para cada $\psi \in \mathcal{D}(C)$ se tiene

$$(DQ - QD)\psi = Dq\psi - \frac{h}{2\pi i} Q\psi' = q\frac{h}{2\pi i}\psi' + \frac{h}{2\pi i}\psi - q\frac{h}{2\pi i}\psi' = \frac{h}{2\pi i}\psi. \qquad \square$$

Veremos un teorema sin demostración que resumirá algunas propiedades del operador momentum en el operador posición (anteriormente demostradas).

Teorema 4.2.4. *Sea D el operador diferenciación, E el operador multiplicación y F el operador de Fourier-Plancherel en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$D = FEF^{-1}.$$

Demostración. Consultar [15, pág. 135] $\square$

De donde se siguen los siguientes resultados.

Corolario 4.1. *Los operadores D y Q son equivalentes.*

Corolario 4.2 (Espectro)**.** *Sea D el operador momentum y $\sigma(D)$ su espectro. Entonces:*

(a) D no tiene valores propios.

(b) $\sigma(D)$ es todo $\mathbb{R}$.

Demostración. Por 4.2.4 se sigue que D y Q son operadores equivalentes, de donde 4.1.4 implica que $\sigma(Q) = \sigma(D)$ y por 4.2.1 se siguen ambos resultados. $\square$

Teorema 4.2.5 (Conmutador)**.** *Sean S y T dos operadores lineales autoadjuntos con dominio y rango en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces $C = ST - TS$ satisface*

$$|\mu_\psi C| \leq 2\,\mathrm{sd}_\psi(S)\,\mathrm{sd}_\psi(T) \tag{4.19}$$

para todo ψ en el dominio de C.

Demostración. Escribimos $\mu_1 = \mu_\psi(S)$ y $\mu_2 = \mu_\psi(T)$ y

$$A = S - \mu_1 I, \qquad B = T - \mu_2 I.$$

Mediante cálculo directo verificamos que

$$C = ST - TS = AB - BA.$$

Dado que S y T son autoadjuntos y μ_1, μ_2 son valores esperados y éstos son reales. De donde A y B son autoadjuntos. De la definición de media tenemos

$$\begin{aligned}\mu_\psi(C) &= \langle (AB - BA)\psi, \psi\rangle \\ &= \langle AB\psi, \psi\rangle - \langle BA\psi, \psi\rangle \\ &= \langle B\psi, A\psi\rangle - \langle A\psi, B\psi\rangle.\end{aligned}$$

Los últimos dos productos son iguales en valor absoluto. De la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Schwarz se tiene

$$|\mu_\psi(C)| \leq |\langle B\psi, A\psi\rangle| + |\langle A\psi, B\psi\rangle| \leq 2\left\|B\psi\right\|\left\|A\psi\right\|.$$

Esto prueba 4.19 dado que B es autoadjunto, por la definición de varianza

$$\|B\psi\| = \langle (T - \mu_2 I)^2\psi, \psi\rangle^{1/2} = \sqrt{\mathrm{var}_\psi(T)} = \mathrm{sd}_\psi(T)$$

y similar para $\|A\psi\|$. □

Corolario 4.3 (Principio de incertidumbre de Heisenberg)**.** *Para el operador posición Q y momentum D,*

$$\mathrm{sd}_\psi(D)\,\mathrm{sd}_\psi(Q) \geq \frac{h}{4\pi}. \tag{4.20}$$

Este teorema se interpreta como la imposibilidad de medir simultáneamente la posición y el momentum (que se asocia a la velocidad) de una partícula con una exactitud ilimitada.

A. Espacios Métricos

El concepto de distancia en $\mathbb{R}$ dada por el valor absoluto entre dos números reales ha servido para definir un tipo de distancia entre elementos de cualquier conjunto, a esta generalización del concepto de distancia la llamaremos *métrica* y a un conjunto dotado de una métrica se le conoce como *espacio métrico*, que es un caso particular de un espacio topológico.

Definición A.1 (Métrica, espacio métrico)**.** Una métrica d sobre un conjunto X es una función definida sobre $X \times X$, esto es, $d\colon X \times X \to R$, tal que satisface

(M1) d es finita y no negativa.

(M2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría).

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad del triángulo).

Un par (X, d) se llama un *espacio métrico* si d es una métrica definida sobre X.

Ejemplo A.1. La distancia usual sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = |x - y|$$

es una métrica, más aún, en $\mathbb{R}^n$ la función dada por

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

con $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ es una métrica.

Ejemplo A.2. La métrica Euclidiana dada por $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

satisface (M1)-(M4).

Ejemplo A.3. Sea $C_{[a,b]}$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$

$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

es una métrica.

Definición A.2 (Bola y esfera)**.** Dado un punto $x_0 \in X$ un espacio métrico y un número real $r > 0$

(a) $B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ (Bola abierta).

(b) $B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ (Bola cerrada).

(c) $B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ (Esfera).

a x_0 le llamamos el *centro* y a r el *radio*.

Definición A.3 (Conjunto abierto y cerrado)**.** Un subconjunto M de un espacio métrico X es abierto si contiene una bola con centro en cada uno de sus puntos. M es cerrado si $M^c = X - M$ es abierto.

Definición A.4 (Aplicación continua)**.** Sea (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $T\colon X \to Y$ se dice *continuo en el punto* $x_0 \in X$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(Tx, Tx_0) < \epsilon \quad \text{para cada } x \text{ que cumpla} \quad d_X(x, x_0) < \delta.$$

Se dice que T es continuo si es continuo para cada punto de X.

La propiedad de que un conjunto M sea denso en X es importante, pues significa que cada punto del conjunto X se puede aproximar con elementos del conjunto M, más aún, si es separable significa que se tiene que un conjunto numerable aproxima a los elementos de X.

Definición A.5 (Conjunto denso, conjunto separable)**.** Sea M un subconjunto de X y $\overline{M}$ su clausura,[1] se dice que M es denso en X si

$$\overline{M} = X.$$

Decimos que M es separable si además M es contable.[2]

[1]La clausura de M es el menor conjunto cerrado que contiene a M

[2]Contable significa que es finito o que tiene el mismo cardinal que los naturales.

Que M aproxime a los elementos de X se debe a la definición de la clausura, pues que sea el menor cerrado que contiene a M es equivalente a que contenga todos sus puntos de acumulación, es decir que cualquier sucesión convergente de elementos de M es un elemento de X, como se verá más adelante.

Definición A.6 (Sucesión convergente)**.** Una sucesión (x_n) en un espacio métrico se dice que es *convergente* si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

en este caso x es llamado el *límite* de (x_n) y se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Definición A.7 (Sucesión de Cauchy y completitud)**.** Una sucesión (x_n) en un espacio métrico X se dice que es de *Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \qquad \text{para cada } n, m > N. \tag{A.1}$$

El espacio X se dice *completo* si cada sucesión de Cauchy es convergente, con límite en X.

Teorema A.0.1 (Sucesión convergente)**.** *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.*

Demostración. Si (x_n) converge a $x \in X$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para cada } n > N.$$

Considerando $m > N$ y la desigualdad del triángulo, se obtiene para cada $n, m > N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Con lo que se muestra que (x_n) es de Cauchy. □

Teorema A.0.2 (Aplicación continua)**.** *Una aplicación $T\colon X \to Y$ entre dos espacios métricos*[3] *es continuo en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si*

$$x_n \to x_0 \quad \text{implica que} \quad Tx_n \to Tx_0.$$

[3]De ahora en adelante se utilizará la misma d para ambas métricas, en el entendido que dependiendo de los elementos que se tomen, así se considerará la métrica en X o en Y.

Demostración. Supongamos que T es continuo en x_0, esto significa que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x_n, x_0) < \delta \quad \text{implica que} \quad d(Tx_n, Tx_0) < \epsilon.$$

Consideremos $x_n \to x_0$, entonces existe N para el cual para todo $n > N$ se cumple que

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

De donde para cada $n > N$

$$d(Tx_n, Tx_0) < \epsilon,$$

que significa que $Tx_n \to Tx_0$.

Para el converso, supongamos que $x_n \to x_0$ implica que $Tx_n \to Tx_0$, y supongamos que T no es continua en x_0. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe un $x \neq x_0$ que satisface

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \text{pero} \qquad d(Tx, Tx_0) \geq \epsilon.$$

En particular, para $\delta = 1/n$ existe un x_n que cumple

$$d(x_n, x_0) < 1/n \qquad \text{pero} \qquad d(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon.$$

Lo cual significa que (x_n) converge a x_0, pero (Tx_n) no converge a Tx_0, lo cual es una contradicción. $\square$

Para finalizar dejaremos enunciadas dos desigualdades que se utilizarán en el capítulo 1 para la demostración de que los espacios l^p son de Banach y separables.

Teorema A.0.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $x = (\xi_j)$ y $y = (\eta_j)$ dos sucesiónes de números complejos en l^p y l^q, respectivamente, tales que p y q son exponentes conjuntados, es decir que satisfacen*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

con $1 \leq p, q < \infty$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right) 1/p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right) 1/q. \tag{A.2}$$

Para el caso en el cual $p = q = 2$, la desigualdad la conocemos como **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

Teorema A.0.4 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea* $x = (\xi_j)$ *y* $y = (\eta_j)$ *dos sucesiónes de números complejos en* l^p*, con* $1 \leq p < \infty$*, entonces*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p}. \tag{A.3}$$

Y para finalizar este apéndice enunciaremos (sin demostración)[4] el *teorema de completación de espacios métricos*, un teorema importante que utilizaremos para completar el espacio de las funciones continuas.

Teorema A.0.5 (Completación de espacios métricos)**.** *Para un espacio métrico* $X = (X, d)$ *existe un espacio métrico completo* $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ *que tiene un subespacio* W *que es isométrico con* X *y es denso en* $\hat{X}$*. Este espacio* $\hat{X}$ *es único, salvo isometrías, esto es, si* $\tilde{X}$ *es un espacio métrico completo que tiene un subespacio métrico denso* $\tilde{W}$ *isométrico con* X*, entonces* $\tilde{X}$ *y* $\hat{X}$ *son isométricos.*

[4]Para la demostración consultar [16, pág. 41].

B. Integral de Riemann

Para el desarrollo de la integral de Lebesgue utilizaremos las funciones de paso sobre $\mathbb{R}^n$ y la definición de integral de Riemann, puesto que esta integral puede ser calculada en una función de paso, por ser continua en un intervalo determinado, primero definiremos la integral de Riemann.

Si $a = (a^1, ..., a^n)$ y $b = (b^1, ..., b^n)$ puntos en $\mathbb{R}^n$ tales que $a^i \leq b^i$ para $i = 1, ..., n$, entonces el intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto $\{x : a^i \leq x^i \leq b^i\}$ y el intervalo abierto (a, b) es el conjunto $\{x : a^i < x^i < b^i\}$. Si $I = (a, b)$ o $I = [a, b]$, el **volumen** de I es definido por:

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n}(b^i - a^i). \tag{B.1}$$

Notamos que el conjunto vacío $\emptyset$ es considerado un intervalo abierto y $v(\emptyset) = 0$. Un conjunto de intervalos abiertos $I_1, ..., I_r$ es llamado una **partición** de $[a, b]$ si ellos son disjuntos a pares y $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{I}_i$.[1] Una partición $P' = \{I'_j : j = 1, ..., s\}$ de $[a, b]$ es un **refinamiento** de la partición P, denotado $P \subset P'$, si para cada j existe un i tal que $I'_j \subset I_i$. Si P y P' son dos particiones de $[a, b]$, entonces la partición P'' consistente en los intervalos de la forma $I_i \cap I'_j$ es un refinamiento común de P y P'.

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de valor real que es acotada sobre el intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}^n$ y sea $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Para una partición $P = \{I_1, ..., I_r\}$ de $[a, b]$ definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(x) : x \in \overline{I}_i\} \qquad &\text{y}& \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in \overline{I}_i\} \\ L(f, P) &= \sum_{i=1}^{r} m_i v(I_i) \qquad &\text{y}& \qquad U(f, P) = \sum_{i=1}^{r} M_i v(I_i). \end{aligned}$$

Las sumas $L(f, P)$ y $U(f, P)$ se llaman **suma inferior** y **superior**, respectivamente, para f correspondiente a la partición P. Si P' es un refinamiento de P

[1] Aquí $\overline{A}$ es la clausura de A si A es un intervalo abierto $A = (a, b)$ su clausura es un intervalo cerrado $\overline{A} = [a, b]$.

entonces

$$L(f,P) \leq L(f,P') \qquad \text{y} \qquad U(f,P') \leq U(f,P).$$

Entonces, para dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, usando un refinamiento común de P_1 y P_2, es posible mostrar que

$$mv([a,b]) \leq L(f,P_1) \leq U(f,P_2) \leq Mv([a,b]).$$

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$, definimos la **integral inferior** y **superior** de f como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}\} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Entonces, para cada $P \in \mathcal{P}$ se tiene

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P).$$

La función f se dice que es **Riemann integrable** en $[a,b]$ si la integral inferior y superior son iguales y en este caso la **integral** de f es definida como este valor común

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \tag{B.2}$$

De la definición se sigue que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y α y β son números reales, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

esto es, el conjunto de las funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ forman un espacio vectorial real y la integral es un funcional sobre este espacio.

El tamaño de malla de una partición P, dentoada por $|P|$, es definida como el mayor diámetro de alguno de los intervalos en la partición; esto es, si $P = \{I_1, ..., I_r\}$ entonces

$$|P| = \text{máx}\{d(I_i) : i = 1, ..., r\}.$$

Proposición B.1. *Si f es acotada sobre $[a,b]$, entonces existe una sucesión de* *particiones* (P_k) *sobre* $[a,b]$ *tal que* $P_k \subset P_{k+1}, \operatorname{lím} |P_k| = 0$ *y*

$$\operatorname{lím} L(f,P_k) = \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \operatorname{lím} U(f,P_k) = \overline{\int_a^b} f.$$

Demostración. Existe una partición P_1' y P_1'' tal que

$$\underline{\int_a^b} f - 1 < L(f,P_1') \leq \underline{\int_a^b} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} \leq U(f,P_1'') < \overline{\int_a^b} f + 1.$$

Sea P_1 un refinamiento común de P_1' y P_1'' para el cual $|P| < 1$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f - 1 < L(f,P_1) \leq \underline{\int_a^b} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} \leq U(f,P_1) < \overline{\int_a^b} f + 1.$$

Similarmente existe una partición P_2' y P_2'' tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{1}{2} < L(f,P_2') \leq \underline{\int_a^b} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} \leq U(f,P_2'') < \overline{\int_a^b} f + \frac{1}{2}.$$

Sea P_2 un refinamiento común de P_1, P_2' y P_2'' para el cual $|P_2| < 1/2$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{1}{2} < L(f,P_2) \leq \underline{\int_a^b} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} \leq U(f,P_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{1}{2}.$$

Continuando de esta forma se obtiene la sucesión de particiones que cumple las propiedades deseadas. □

CONCLUSIONES

1. La formulación de Von Neumann para la mecánica cuántica, aparece por vez primera la idea de espacio de Hilbert y muchas teorías nuevas que junto con los resultados de Banach y Lebesgue formularon lo que hoy se conoce como análisis funcional, teoría de operadores y teoría de la integración.

2. La integral desarrollada por Henri Lebesgue en 1904, introduce el concepto de medida, conjuntos de medida cero, también el de propiedades que se cumplen casi en todas partes, de donde surge la teoría de la medida, un área del análisis matemático con aplicaciones en la teoría de probabilidades, las finanzas, la mecánica cuántica, etc.

3. Los operadores posición y momentum son operadores que satisface los axiomas para la mecánica cuántica, es decir, son operadores autoadjuntos densamente definidos en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ separable, por lo que son observables físicos cuyo espectro puntual es vacío y además su espectro continuo es todo $\mathbb{R}$.

RECOMENDACIONES

1. Tener un curso electivo sobre teoría de la medida, pues sus aplicaciones son diversas, desde el campo de la física hasta las finanzas, siendo las medidas elementos importantes en el estudio de las acciones en la bolsa de valores.

2. Estudiar la integral de Lebesgue, partiendo de la noción de conjunto medible, función medible, espacio de medida, medida, etc. Es decir haciendo el desarrollo desde la teoría de conjuntos en vez de la integración de funciones como se plantea en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Arveson, W. (2002) *A short course on spectral theory.* Estados Unidos: Springer.

[2] Brezis, H. (1992) *Analyse functionnelle, théorie et applications.* (Collection Mathématiques Appliquées pour la Maítrise). Masson, Paris.

[3] Brezis, H. (2011) *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* New York, Estados Unidos: Springer.

[4] Courant, R. y Hilbert, D. (1962) *Methods of mathematical physics. (volumen 2).* Nueva York, Estados Unidos: Interscience Publishers.

[5] Curtis, C. W. (1984) *Linear Algebra, An introductory approach.* Estados Unidos: Springer-Verlag.

[6] Escamilla, J. (2008) *Introducción al álgebra abstracta.* Guatemala: CIMACIEN.

[7] Escamilla, J. (2006) *Topología.* 3.ª ed. , Guatemala: CIMACIEN.

[8] Gutiérrez, W. (2014) *Introducción a la teoría de la medida con aplicaciones.* Guatemala: USAC.

[9] Gutiérrez, W. (2014) *Introducción a TEX y LATEX* 2_ϵ *(v4.2).* Guatemala: USAC.

[10] Gutiérrez, W. (2006) *Teoría de la Medida y la Estructura de Von Neumann en Mecánica Cuántica.* (Tesis de Licenciatura). Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala.

[11] Hämmerlin, G. y Hoffman, K. (1991) *Numerical mathematics.* (Undergraduate texts in mathematics) Tr. Larry Schumaker. Estados Unidos: Springer-Verlag.

[12] Haaser, N. y Sullivan, J. (1971) *Real analysis.* Estados Unidos: Dover Publications.

[13] Halmos, P. (1950) *Measure Theory.* (The University Series in Higher Mathematics) Estados Unidos: Van Nostrand Reinhold Company.

[14] Helfer, B. (2013) *Spectral theory and its applications.* (Cambridge studies in advanced mathematics). Estados Unidos: Cambridge University Press.

[15] Helmberg, G. (1969) *Introduction to spectral theory in Hilbert space.* Estados Unidos: Dover Publications.

[16] Kreyszig, E. (1978) *Introductory functional analysis with applications.* Estados Unidos: John Wiley & Sons.

[17] Kronz, F. y Lupher, T. Quantum Theory: von Neumann vs. Dirac, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/qt-nvd/`

[18] Lieb, E. H. y Loss, M. (1997) *Analysis. (second edition)* (Graduate studies in mathematics) Estados Unidos: Board.

[19] Marsden, J. y Hoffman, M. (1999) *Basic complex analysis.* New York, Estados Unidos: W. H. Freeman and Company.

[20] Messiah, Albert. (1961) *Quantum Mechanics, volume* I. Saclay, France: North-Holland publishing company, Amsterdam.

[21] Messiah, Albert. (1961) *Quantum Mechanics, volume* II. Saclay, France: North-Holland publishing company, Amsterdam.

[22] Reed, M. y Simon, B. (1980) *Methods of modern mathematical physics.* Estados Unidos: Academic press.

[23] Rudin, W. (1987) *Real and Complex Analysis. 3.a ed.* (International Series in Pure and Applied Mathematics) Estados Unidos: McGraw-Hill.

[24] Sneddon, I. N. (2006) *Elements of partial differential equations.* Estados Unidos: Dover publications.

[25] Von Neumann, John. (1950) *Functional operators.* Estados Unidos: Princeton university press.

[26] Von Neumann, John. (1955) *Mathematical foundations of quantum mechanics.* Estados Unidos: Princeton university press.