



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

**LA FASE DE BERRY EN EL ÁLGEBRA GLOBAL
CONFORME Y SU ISOMORFISMO CON LA PRECESIÓN
DE THOMAS**

Aída Saraí Figueroa Álvarez

Asesorada por Álvaro Veliz Osorio

Coasesorada por Giovanni Ramírez García

Guatemala, Abril 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**LA FASE DE BERRY EN EL ÁLGEBRA GLOBAL
CONFORME Y SU ISOMORFISMO CON LA
PRECESIÓN DE THOMAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

AÍDA SARAÍ FIGUEROA ÁLVAREZ

ASESORADA POR ÁLVARO VELIZ OSORIO
COASESORADA POR GIOVANNI RAMÍREZ GARCÍA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, ABRIL 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADORA Dra. María Eugenia Cabrera
EXAMINADOR MSc. Ricardo Contreras
EXAMINADOR Dr. Enrique Pazos



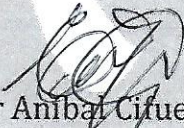
Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



Ref. D.DTG. 001-2018
Guatemala 02 de mayo de 2018

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **LA FASE DE BERRY EN EL ÁLGEBRA GLOBAL CONFORME Y SU ISOMORFISMO CON LA PRECESIÓN DE THOMAS** presentado por la estudiante universitaria **Aída Saraí Figueroa Álvarez**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.


MSc. Edgar Anibal Cifuentes Anie
Director

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



AGRADECIMIENTOS

A mis papás Aida y Javier, por apoyarme siempre.

A mi hermana y hermano, por siempre estar.

A mis amics, por su apoyo y amistad invaluable. Un gusto coincidir en esta vida con ustedes.

A mis profesores de la Licenciatura en Física Aplicada de la Universidad de San Carlos de Guatemala sin ellos alcanzar esta meta no hubiera sido posible. Gracias por compartir conmigo a lo largo de la carrera su conocimientos, y como ya dijo Newton: “Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes”.

A mi asesor Alvaro Véliz por haber aceptado el trabajo a distancia, por ser paciente, creer en mí y sobretodo gracias por compartir su conocimiento conmigo.

A mi asesor Giovanni Ramírez por su paciencia, consejos y tiempo.

DEDICATORIA

A todas esas mujeres
valientes,
las que llenaron
la universidad,
las que estuvieron
antes de mí
a las que están,
a las que vengan,
y sobretodo
a las que faltan.

« De cada cual según sus capacidades, a cada cual según sus necesidades »
— Karl Marx

Die Biene sitzt in der Sonne. Sie summt und singt,
segelt über die Wiese, sucht sich eine Rose und sagt:
„So, so, so ... so sollte doch jeder Tag ein Sonntag sein.“

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
OBJETIVOS	VII
INTRODUCCIÓN	IX
1. El Grupo Conforme	1
2. Teorías Conformes en dos Dimensiones	7
2.1. Álgebra de Witt	8
2.2. Álgebra Global Conforme	9
2.2.1. Grupo $SL(2, \mathbb{R})$	10
2.3. Álgebra de Virasoro	11
3. Operadores Primarios	13
3.1. Campos	13
3.2. Tensor de Momentum-Energía	15
3.3. Cuantización Radial	17
3.4. Funciones de Correlación	23
4. La Fase de Berry	25
4.1. Fase de Berry abeliana y conexión de Berry	25
4.1.1. Calculando la Fase de Berry	26
4.1.2. La Conexión de Berry	27
4.2. Ejemplo: espín en un campo magnético	29
4.3. Partículas que se mueven alrededor de un tubo de flujo	31
4.3.1. Flujo Espectral	32
4.3.2. El Efecto Aharonov-Bohm	34

4.4. Conexión de Berry no Abelianas	35
5. La fase de Berry en el grupo SU(2)	39
6. La fase de Berry en el grupo SL(2, ℝ)	45
6.1. Precesión de Thomas	48
CONCLUSIONES	53
RECOMENDACIONES	55
BIBLIOGRAFÍA	57

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Mapa conforme de un cilindro.	18
3.2. Diagrama de resta de integrales de contorno	20
4.1. Integral de la curvatura de Berry sobre superficies S y S'	31
4.2. Partícula moviéndose alrededor de un solenoide	32
4.3. Flujo espectral de energía para una partícula cerca de un solenoide.	33
6.1. Diagrama de velocidades para deducir Precesión de Thomas	50

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
\cong	es isomorfo a
\rightarrow	se transforma a
\equiv	equivalente a
$g_{\mu\nu}$	métrica
$\eta_{\mu\nu}$	métrica de Minkowski
\square	D'alambertiano
$[A, B]$	conmutador de A y B
c	carga central
ϕ	campo escalar
\mathcal{C}	contorno o trayectoria
\mathcal{S}	superficie limitada por un contorno o trayectoria
$\langle AB \rangle$	correlación entre A y B
\hbar	constante de Planck reducida
H	Hamiltoniano
B	campo magnético
\mathcal{H}	espacio de Hilbert
$ \psi\rangle$	vector <i>ket</i>
$\langle\psi $	funcional <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	<i>braket</i>
\mathcal{A}_i	conexión de Berry
\mathcal{F}_{ij}	curvatura de Berry

OBJETIVOS

General

Demostrar la existencia del isomorfismo de la fase de Berry en el álgebra global conforme con la precesión de Thomas.

Específicos

1. Estudiar las propiedades generales de las teorías conformes de campos.
2. Estudiar teorías conformes en dos dimensiones y sus propiedades.
3. Demostrar que existe un isomorfismo entre el álgebra global conforme y las matrices del grupo $SL(2, \mathbb{R})$.
4. Estudiar la fase de Berry.
5. Estudiar la fase de Berry en la representación de los grupos $SU(2)$ y $SL(2, \mathbb{R})$.
6. Estudiar la precesión de Thomas.
7. Demostrar la equivalencia de la fase de Berry en $SL(2, \mathbb{R})$ con en el álgebra global conforme y con la precesión de Thomas.

INTRODUCCIÓN

A principios de los años 80 del siglo XX, Michael V. Berry estudiaba la evolución de sistemas cuánticos en un espacio de parámetros donde al cambiar los parámetros externos muy lentamente se puede hacer que el sistema regrese al estado original, es decir que cumpla un ciclo, y aunque el sistema es el mismo éste ha adquirido una fase. A esta fase, Berry le llama *fase geométrica* [12] pero también se le conoce como *fase de Berry*. Vale la pena mencionar que también fue descubierta por S. Panchararnam en 1956, mientras estudiaba la luz polarizada que pasa a través de cristales [10, 12] .

La fase de Berry normalmente ocurre en sistemas cuánticos cuyo hamiltoniano depende continuamente de ciertos parámetros externos, por ejemplo del campo eléctrico o magnético. Si estos parámetros están fijos, cualquier vector estado con energía, E , evoluciona en el tiempo de acuerdo a la multiplicación del factor de la fase dinámica, $e^{-iEt/\hbar}$ [12, 6]. Pero cuando estos parámetros varían lentamente, el hamiltoniano se vuelve dependiente del tiempo y da lugar a una fase extra, además de la dinámica, obtenidas por cualquier eigenestado a lo largo de la evolución temporal. Para una trayectoria arbitraria en el espacio de parámetros, esta fase es ambigua; pero para trayectorias cerradas se convierte en una fase de Berry bien definida y observable que se origina de la dependencia de los eigenestados con los parámetros. No se consideró valioso investigar esta fase extra por muchos años, hasta que se descubrió que se puede medir. Resultó ser la manifestación de la mecánica cuántica de muchos fenómenos físicos que involucran sistemas que son cíclicos en el tiempo [12]. El análisis de la fase de Berry ha encontrado aplicaciones en diversos campos como en física de partículas y altas energías, materia condensada, óptica y computación cuántica. Una de las consecuencias más famosas de la fase de Berry es el efecto Aharonov-Bohm [13]. El efecto Aharonov-Bohm es un fenómeno cuántico en el que la presencia de un campo magnético altera la propagación de una carga eléctrica, incluso cuando esta se propaga en zonas donde dicho campo no está presente [6, 12].

El ejemplo típico de un sistema que muestra este fenómeno es el de un espín

con un grado de libertad acoplado a un campo magnético uniforme con norma constante pero de dirección variable; el hamiltoniano es esencialmente la proyección del operador del espín a lo largo del campo magnético, por lo que el espacio de parámetros puede ser identificado con una esfera y la fase de Berry obtenida por un eigenestado del espín a lo largo de una curva cerrada en el espacio de parámetros es proporcional al área encerrada por esta trayectoria en la esfera.

Cuando hay problemas de espines en mecánica cuántica generalmente se trabaja con el grupo $SU(2)$, ya que este grupo de rotaciones tridimensionales está físicamente relacionado con el momento angular y el espín [14]. Por lo mismo, utilizando el ejemplo anterior se puede explicar cómo aparecen las fases de Berry en la representación unitaria de $SU(2)$. Pero el grupo $SU(2)$ no es el único grupo que se utiliza en física cuántica. Hay otros grupos que son importantes, por ejemplo el grupo conforme.

En este trabajo de graduación se estudiará el grupo conforme y teorías conformes en dos dimensiones. Se calculará la fase de Berry en la representación unitaria del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ [9], ya que este grupo es isomorfo al álgebra global conforme. Por lo mismo, la fase de Berry obtenida en estos dos grupo corresponde a una precesión de Thomas [9]. Es decir, al aplicar un campo magnético variable a un espín éste va a precesar y esta precesión corresponde a una fase de Berry en el álgebra global conforme.

1. El Grupo Conforme

Una transformación conforme es una transformación que preserva ángulos entre vectores. Ejemplos de este tipo de transformación son:

- Traslaciones
- Rotaciones
- Boost
- Escala
- Inversiones.

Donde las primeras tres transformaciones forman el *Grupo de Poincaré* [14]. Al agregar la transformación de escala y de inversión en este conjunto de transformaciones se forma el *Grupo Conforme* [4, 2, 11]. Una transformación es conforme si el tensor métrico se transforma de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda(x)g_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es una métrica cualquiera y Λ es un factor positivo, el mapeo (1.1) puede reescribirse de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\rho\sigma}(x),$$

y se define $g'_{\rho\sigma}$ como

$$g'_{\rho\sigma}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g_{\nu\mu}(x). \quad (1.2)$$

Obteniéndose así la condición para que una transformación sea conforme.

Como se va a estudiar el caso para el espacio de Minkowski, se utilizará la métrica de Minkowski [3, 8]. Por lo mismo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

Si el factor de escala Λ de (1.2) es igual a uno, se genera el grupo de Poincaré [4, 14]. Para buscar otras restricciones en las que (1.1) se cumpla, se considera un mapeo de la forma

$$\phi : x^\rho \mapsto x'^\rho.$$

Este mapeo corresponde a una transformación infinitesimal

$$x'^\rho = x^\rho + \varepsilon^\rho(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.3)$$

al aplicar esta transformación infinitesimal a (1.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} &= \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [x^\rho + \varepsilon^\rho(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \frac{\partial}{\partial x^\nu} [x^\sigma + \varepsilon^\sigma(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \\ &= \eta_{\rho\sigma} \left[\delta_\mu^\rho + \frac{\partial \varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \left[\delta_\nu^\sigma + \frac{\partial \varepsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \delta_\mu^\rho \frac{\partial \varepsilon_\rho(x)}{\partial x^\mu} + \delta_\nu^\sigma \frac{\partial \varepsilon_\sigma(x)}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \left[\frac{\partial \varepsilon_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu(x)}{\partial x^\mu} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para que esta transformación infinitesimal sea conforme debe cumplirse que el factor Λ de (1.1) sea igual al que se obtuvo en (1.4), es decir

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \kappa(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

en donde $\kappa(x)$ es una función cualquiera y se usa la notación $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Calculando la traza de (1.5) se obtiene

$$\partial^\mu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \kappa(x),$$

y usando $\partial^\mu \varepsilon_\mu = (\partial \cdot \varepsilon)$ se puede definir la función $\kappa(x)$

$$\kappa(x) = \frac{2}{d} (\partial \cdot \varepsilon). \quad (1.6)$$

Sustituyendo (1.6) en (1.5)

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \varepsilon) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

De esta forma se puede observar que el factor de escala Λ para esta transfor-

mación infinitesimal está dado por

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \varepsilon) + \dots$$

Se aplica ∂^ν a (1.7), obteniendo así

$$\partial_\mu(\partial \cdot \varepsilon) + \square \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\mu(\partial \cdot \varepsilon), \quad (1.8)$$

en donde $\square = \partial^\mu \partial_\mu$. Si esta vez, se aplica ∂^μ a (1.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \square(\partial^\mu \varepsilon_\mu) - \frac{2}{d} \square(\partial \cdot \varepsilon) + \square(\partial \cdot \varepsilon) &= 0 \\ 2\square(\partial \cdot \varepsilon) - \frac{2}{d} \square(\partial \cdot \varepsilon) &= 0 \\ (d-1)\square(\partial \cdot \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Al considerar una dimensión $d \geq 3$ para la expresión (1.9) se observa que la expresión $(\partial \cdot \varepsilon)$ puede ser lineal, es decir

$$(\partial \cdot \varepsilon) = A + B_\mu x^\mu.$$

Con la expresión anterior se puede proponer un Ansatz que da la solución para ε_μ

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad (1.10)$$

donde los coeficientes $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$, son infinitesimales. Los términos de (1.10) pueden ser tratados por separado. Por lo mismo pueden ser analizados individualmente. Si se considera solo a_μ , se tiene que $\varepsilon_\mu = a_\mu$ y si se sustituye esta expresión en la ecuación (1.3) se obtiene

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu.$$

Inmediatamente se puede reconocer que esta expresión corresponde a una traslación infinitesimal [12]. Cuyo generador es el operador del momentum $P_\mu = i\partial_\mu$.

Para el caso del termino lineal se tiene que $\varepsilon_\mu = b_{\mu\nu} x^\nu$ y si se sustituye esta

expresión en (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
b_{\mu\nu}\partial_\mu x^\nu + b_{\nu\mu}\partial_\nu x^\mu &= \frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma}b_{\sigma\rho}\partial_\sigma x^\rho)\eta_{\mu\nu} \\
b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} &= \frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma}b_{\sigma\rho})\eta_{\mu\nu} \\
b_{\mu\nu} &= \frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma}b_{\sigma\rho})\eta_{\mu\nu} - b_{\nu\mu} \\
b_{\mu\nu} &= \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Esta ecuación restringe la parte simétrica de b a ser proporcional a la métrica de Minkowski. Y $m_{\mu\nu}$ corresponde a la parte antisimétrica. Si se toma en cuenta solo la parte antisimétrica de (1.11) se tiene que $\varepsilon_\mu = m_{\mu\nu}x^\nu$ y si se sustituye esta expresión en (1.3) se obtiene: $x^\mu \rightarrow x^\mu + m^{\mu\nu}x_\nu$ esta expresión corresponde a una rotación infinitesimal [12]. Por lo tanto $m_{\mu\nu}$ genera rotaciones y boosts, y cuyo generador es el operador del momentum angular: $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$. Ahora si solo se toma en cuenta la parte simétrica de (1.11) se tiene que $\varepsilon_\mu = \alpha\eta_{\mu\nu}x_\nu$ y si se sustituye esta expresión en (1.3) se obtiene: $x^\mu \rightarrow (1 + \alpha)x^\mu$, la cual corresponde a la transformación de escala y cuyo generador es $D = -ix^\mu\partial_\mu$ [4].

Para el caso del término cuadrático se aplica ∂_ρ en (1.7)

$$\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu\varepsilon_\mu = \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho(\partial \cdot \varepsilon), \tag{1.12}$$

permutando los índices μ, ν, ρ , de la ecuación 1.12

$$\partial_\nu\partial_\rho\varepsilon_\mu + \partial_\mu\partial_\rho\varepsilon_\nu = \frac{2}{d}\eta_{\rho\mu}\partial_\nu(\partial \cdot \varepsilon), \tag{1.13}$$

$$\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon_\rho + \partial_\nu\partial_\mu\varepsilon_\rho = \frac{2}{d}\eta_{\nu\rho}\partial_\mu(\partial \cdot \varepsilon). \tag{1.14}$$

Restando (1.12) de la suma de (1.13) y de (1.14) se obtiene la expresión

$$\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon_\rho = \frac{1}{d}(\eta_{\rho\mu}\partial_\nu + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho)(\partial \cdot \varepsilon). \tag{1.15}$$

Sustituyendo el término cuadrático $\varepsilon_\mu = c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$ en (1.15), se obtiene

$$c_{\rho\mu\nu} = \eta_{\rho\mu}\beta_\nu + \eta_{\mu\nu}\beta_\rho - \eta_{\nu\rho}\beta_\mu, \tag{1.16}$$

donde $\beta_\rho = \frac{1}{d}c_{\nu\rho}^\nu$, teniendo así para el término cuadrático la expresión

$$\varepsilon_\mu = 2(\beta \cdot x)x_\mu - (x \cdot x)\beta_\mu,$$

si se sustituye esta expresión en (1.3) se tiene que

$$x^\rho \rightarrow x^\rho + 2(\beta \cdot x)x^\rho - (x \cdot x)\beta^\rho.$$

A este tipo de transformaciones se les llama *transformación conforme especial* (TCE) y su generador es: $K_\nu = -i(2x_\nu x^\mu)\partial_\mu - (x \cdot x)\partial_\nu$.

Los generadores de Poincaré, el generador de escala y el generador conforme especial son los generadores del grupo conforme:

$$\begin{aligned} \text{Traslación} \quad P_\mu &= i\partial_\mu \\ \text{Rotación} \quad L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ \text{Escala} \quad D &= -ix^\mu\partial_\mu \\ \text{TCE} \quad K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu)\partial_\nu - (x \cdot x)\partial_\mu \end{aligned}$$

y obedecen las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu, \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \\ [K_\lambda, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\lambda\mu}K_\nu - \eta_{\lambda\nu}K_\mu), \\ [L_{\mu\nu}, P_\lambda] &= i(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Los conmutadores 1.17 definen el álgebra conforme [4, 11].

Se pueden escribir de una forma más sencilla, definiéndose así los siguientes generadores:

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu}, \\ J_{-1,0} &= D, \\ J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\ J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde $\mu, \nu = -1, 0, 1, \dots, (d-1)$, al conmutar los generadores 1.18 se obtiene:

$$\begin{aligned}
[J_{-1,0}, J_{-1,\mu}] &= iJ_{0,\mu} \\
[J_{-1,0}, J_{0,\mu}] &= iJ_{-1,\mu} \\
[J_{-1,\mu}, J_{-1,\nu}] &= iJ_{\nu,\sigma} \\
[J_{-1,\mu}, J_{0,\nu}] &= -i(\eta_{\nu,\mu}D) \\
[J_{0,\mu}, J_{0,\nu}] &= iJ_{\nu,\sigma} \\
[J_{\mu\nu}, J_{-1,0}] &= i(\eta_{\nu,\lambda}J_{-1,\mu} - \eta_{\mu,\lambda}J_{-1,\nu}) \\
[J_{\mu,\nu}, J_{0,\lambda}] &= i(\eta_{\nu,\lambda}J_{0,\mu} - \eta_{\mu,\lambda}J_{0,\nu}) \\
[J_{\mu,\nu}, J_{\rho,\sigma}] &= i(\eta_{\nu,\rho}J_{\mu,\sigma} + \eta_{\mu,\sigma}J_{\nu,\rho} - \eta_{\mu,\rho}J_{\nu,\sigma} - \eta_{\nu,\sigma}J_{\mu,\rho}).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Los conmutadores 1.19 satisfacen la siguiente relación de conmutación

$$[J_{m,n}, J_{r,s}] = i(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}), \tag{1.20}$$

donde, para el caso del espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{d-1,1}$ y la métrica $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$ se logra identificar que la ecuación 1.20 corresponde a la relación de conmutación del álgebra de $SO(d, 2)$ [14]. Demostrando así el isomorfismo entre el grupo conforme en d dimensiones y el grupo $SO(d, 2)$. De hecho, el grupo $SO(d, 2)$ es el grupo de isometrías del espacio Anti de Sitter (AdS) en $d + 1$ dimensiones [2, 11].

2. Teorías Conformes en dos Dimensiones

Se trabajará con el grupo conforme en dos dimensiones y se escribirá ε con las siguientes coordenadas

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

y escribiendo (1.7) en términos de las coordenadas, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 2\partial_0\varepsilon_0 & 2\partial_0\varepsilon_1 \\ 2\partial_1\varepsilon_0 & 2\partial_1\varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0\varepsilon_0 + \partial_1\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \partial_0\varepsilon_0 + \partial_1\varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

De las componentes de la diagonal se obtiene que

$$\partial_0\varepsilon_0 = \partial_1\varepsilon_1, \tag{2.1}$$

y de la suma de las componentes fuera de la diagonal se obtiene

$$\partial_1\varepsilon_0 = -\partial_0\varepsilon_1. \tag{2.2}$$

De esta forma se obtienen las condiciones para que una transformación conforme en $d = 2$ dimensiones sea invariante. De las ecuaciones (2.1) y (2.2) se reconocen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas [15]. Por lo mismo se usarán las coordenadas complejas z y \bar{z} , que cumplen las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} z &= x^0 + ix^1, & x^0 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ \bar{z} &= x^0 - ix^1, & x^1 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \\ \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), & \partial_0 &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1), & \partial_1 &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Utilizando estas reglas se puede calcular $\partial_{\bar{z}}\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} \partial_0\varepsilon_0 + i\partial_1\varepsilon_0 &= 0 \\ \partial_0\varepsilon_1 + i\partial_1\varepsilon_1 &= 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Remplazando (2.1) en la segunda parte de (2.3), se puede reescribir este sistema de ecuaciones como:

$$\begin{cases} \partial_0\varepsilon_0 = -i\partial_1\varepsilon_0 \\ \partial_0\varepsilon_1 = -i\partial_0\varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

igualando las ecuaciones del sistema de ecuaciones 2.4 se obtiene que

$$\partial_0\varepsilon_1 = -\partial_1\varepsilon_0.$$

Esta ecuación es la misma que (2.2), demostrando así la equivalencia entre esta ecuación y $\partial_{\bar{z}}\varepsilon = 0$ [4].

2.1. Álgebra de Witt

Se ha estudiado que una transformación conforme infinitesimal para $d = 2$ debe de ser holomorfa en un conjunto abierto. También es concebible que $\varepsilon(z)$ tenga singularidades aisladas afuera de este conjunto abierto [4, 11]. Es decir

$$z \mapsto f(z) = z + \varepsilon(z), \quad (2.5)$$

en donde $\varepsilon(z)$ es una función meromorfa. Se desarrolla una serie de Laurent [15] alrededor de $z = 0$ a la función del mapeo (2.5)

$$f(z) = z + \varepsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n (-z)^{n+1},$$

donde el parámetro infinitesimal ε_n es una constante. Para una n particular, los generadores correspondientes de una *transformación local* son:

$$\begin{aligned} \ell_n &= -z^{n+1}\partial_z \\ \bar{\ell}_n &= -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

y se puede observar que como $n \in \mathbb{Z}$, existen infinitas transformaciones infinitesimales conformes.

Al conmutar estos generadores se obtiene:

$$\begin{aligned} [\ell_m, \ell_n] &= (m - n)\ell_{m+n}, \\ [\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] &= (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \\ [\ell_m, \bar{\ell}_n] &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Estas relaciones de conmutación definen el *Álgebra de Witt*.

2.2. Álgebra Global Conforme

Por el momento solo se ha trabajado a nivel local, es decir no se ha impuesto la condición que las transformaciones conformes deben ser definidas en todos lados y ser invertibles. Se puede describir esto de una forma estricta: para formar un grupo, los mapeos deben ser invertibles y se debe mapear el plano completo en sí mismo. Es decir, que las transformaciones globales conformes están definidas sobre la esfera de Riemann ($S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) y son generadas por el álgebra de Witt solo para $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$ [2]. Se definen usando (2.1):

$$\begin{aligned} \ell_{-1} &= -\partial_z, & \text{genera traslaciones en } \mathbb{C}, \\ \ell_0 &= -z\partial_z, & \text{genera rotaciones y escala en } \mathbb{C} \\ \ell_1 &= -z^2\partial_z, & \text{genera transformaciones conformes especiales en } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Los generadores que preservan la superficie real $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$, son las combinaciones lineales:

$$\ell_n + \bar{\ell}_n \quad \text{y} \quad i(\ell_n - \bar{\ell}_n).$$

En particular, $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ genera dilataciones en la superficie real, y $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ genera rotaciones [4].

Se puede observar que el orden de z define qué tipo de generador es, al igual que para ε en la definición (1.10). Todas las posibles transformaciones que se pueden generar con $\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$ corresponden a una *Transformación de Möbius* de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2.8}$$

y donde $ad - bc = 1$ [2].

2.2.1. Grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$

De acuerdo a la definición de una transformación de Möbius; al ver la forma que presenta (2.8) y la condición $ad - bc = 1$, se puede pensar que existe una correspondencia entre estas y con matrices reales, de 2×2 , con determinante uno, es decir

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A, \quad (2.9)$$

donde la matriz A cumple con las condiciones anteriormente mencionadas y por lo tanto pertenece al grupo lineal especial $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Su álgebra de Lie, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ consiste en matrices de 2×2 , reales, sin traza y es generado por los elementos de las bases:

$$t_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2, \quad t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3. \quad (2.10)$$

Sus brackets de Lie son $[t_\mu, t_\nu] = \epsilon_{\mu\nu}{}^\rho t_\rho$, con $\epsilon_{012} = 1$, y todos los índices se suben o bajan con la métrica de Minkowski en tres dimensiones $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1)$. Cada matriz $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ puede ser escrita como combinación lineal real $X = X^\mu t_\mu$. Además, el álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ admite una forma bilineal invariante no degenerada

$$(X, Y) \equiv 2\text{Tr}(XY) = 2X^\mu Y^\nu \text{Tr}(t_\mu t_\nu) = \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu. \quad (2.11)$$

Esto implica que el conjunto de matrices $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ de la forma fXf^{-1} (que es la representación adjunta), donde $X = X^\mu t_\mu \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ es fija y f va sobre todo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, coinciden con la órbita del vector de momentum-energía en tres dimensiones (X^0, X^1, X^2) bajo transformaciones de Lorentz. Entonces, la órbita adjunta $X = t_0$ es un plano hiperbólico en dos dimensiones

$$\mathbb{H}^2 = \{\sqrt{1 + p^2 + q^2} t_0 + pt_1 + qt_2 | (p, q) \in \mathbb{R}\}. \quad (2.12)$$

En cualquier representación unitaria \mathcal{U} de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, los operadores $\mathbf{u}[t_\mu]$ que representan a los generadores (2.10) son anti-hermíticos. Se acostumbra a definir los operadores:

$$L_0 \equiv -i\mathbf{u}[t_0], \quad L_1 \equiv i\mathbf{u}[t_1] + \mathbf{u}[t_2], \quad L_{-1} \equiv i\mathbf{u}[t_1] - \mathbf{u}[t_2], \quad (2.13)$$

los cuales satisfacen $L_m^\dagger = L_{-m}$ y cuyos conmutadores son $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}$ para $m, n = -1, 0, 1$. Entonces, la representación de mayor peso de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se cons-

truye exigiendo que su espacio de Hilbert, \mathcal{H} admita un estado de mayor peso $|h\rangle$, tal que

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle, \quad L_1 |h\rangle = 0, \quad (2.14)$$

y generando el resto de \mathcal{H} con estados descendentes $(L_{-1})^n |h\rangle$, donde $n \geq 0$, como siempre la terminología está al revés: $|h\rangle$ es actualmente el estado de menor peso en la representación. Asumiendo $\langle h, h \rangle = 1$, la representación es unitaria si y solo si $h \geq 0$ (y trivial si $h = 0$). La representación grupal correspondiente (generalmente proyectiva) \mathcal{U} es conocida como una representación de series discretas de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ [9].

Si se toma $z \in \mathbb{R}$ y se le aplica una transformación de Möbius $T(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ y a $T(z)$ se le vuelve a aplicar otra transformación de Möbius $G(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, se tiene

$$\begin{aligned} G(T(z)) &= \frac{a_2(T(z)) + b_2}{c_2(T(z)) + d_2} \\ &= \frac{a_2 a_1 z + a_2 b_1 + b_2 c_1 z + b_2 d_1}{c_1 z + d_1} \cdot \frac{c_1 z + d_1}{c_2 a_1 z + c_2 b_1 + d_2 c_1 z + d_2 d_1} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_1 d_2)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Y se multiplican las matrices asociadas a estas transformaciones, se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Los coeficientes de la composición (2.15) son los mismos del producto de matrices (2.16). Por lo tanto, la multiplicación de matrices en $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ es isomorfa al álgebra global conforme.

2.3. Álgebra de Virasoro

El álgebra de Virasoro es una extensión central del álgebra de Witt. Una extensión central permite tomar un álgebra y agregarle cualquier generador extra [11]. Matemáticamente se puede expresar como

$$\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}.$$

Y para el caso del álgebra de Virasoro, se tiene que

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + cp(m, n), \quad (2.17)$$

donde c es un número complejo cualquiera y se le conoce como carga central y $p(m, n)$ es una función que será definida más adelante. Nótese que $p(m, n) = -p(n, m)$ debido a la antisimetría de $[\cdot, \cdot]$.

También se redefine $L_n \neq 0$ y $n \neq 0$, tal que para $p(1, -1) = 0$ y para $p(n, 0) = 0$ y así poder encontrar $p(m, n)$ utilizando la identidad de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Como L_n está reemplazando a ℓ_n , y los generadores de ℓ_n son elementos del álgebra de Lie, por lo mismo la identidad de Jacobi se satisface. Usándola junto con L_m, L_n y L_0 se llega a la condición que $p(m, n) = 0$ si $m + n \neq 0$. Y si se sustituye L_n, L_{-1} y L_{1-n} en la identidad de Jacobi se llega a la relación de recurrencia

$$(n - 2)p(n, -n) = (n + 1)p(n - 1, -(n - 1)). \quad (2.18)$$

Si se introduce la notación $p_n = p(n, -n)$ y se utiliza la condición de normalización $p(2, -2) = \frac{1}{2}$ se puede factorizar esta relación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{n+1}{n-2}\right) p_{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n-2}\right) \cdot \left(\frac{n}{n-3}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n-4}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n-5}\right) \cdot \left(\frac{n-3}{n-6}\right) \cdots \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{1}\right) \cdot p_2 \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12}(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \\ &= \frac{1}{12}(n^3 - n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Teniendo así que el álgebra de Virasoro es

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \quad (2.20)$$

Se debe notar que la extensión central no afecta al álgebra global.

3. Operadores Primarios

3.1. Campos

Los dos tipos de campos que son de interés para la teoría conforme de campos en dos dimensiones son:

1. Campos Quirales
2. Campos Primarios.

Como se ha estado trabajando con variables complejas es conveniente realizar un cambio de coordenadas para los campos ϕ , esto significa

$$\phi(x^0, x^1) \mapsto \phi(z, \bar{z}).$$

Se dice que un campo es *quiral* si

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi(z),$$

también se le llama campo *holomorfo* [4]. Un campo que solo depende de \bar{z}

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi(\bar{z}),$$

se le llama campo *anti-quiral* o *anti-holomorfo* [4].

Bajo una escala $z \mapsto \lambda z$, un campo ϕ se transforma de la forma

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \lambda^h \lambda^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \lambda \bar{z}),$$

y tiene una dimensión conforme (h, \bar{h}) , donde \bar{h} no es necesariamente el conjugado de h y λ es una escala [2].

Bajo una transformación conforme

$$z \mapsto f(z),$$

un campo se transformará de la siguiente manera

$$\phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{df}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})). \quad (3.1)$$

Si esta transformación es verdadera para toda el álgebra de Virasoro, el campo es *primario*. Y si la transformación es verdadera solo para el álgebra global, el campo es *cuasi-primario*. Claramente todos los campos primarios son cuasi-primarios [4].

Para una transformación infinitesimal conforme

$$z \mapsto f(z) = z + \varepsilon(z), \quad (3.2)$$

que al sustituirla en (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) &= \left(\frac{\partial}{\partial z} [z + \varepsilon(z)] \right)^h \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\bar{z} + \varepsilon(\bar{z})] \right)^{\bar{h}} \phi[z + \varepsilon(z), \bar{z} + \varepsilon(\bar{z})], \\ &= \left(1 + \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial z} \right)^h \left(1 + \frac{\partial \varepsilon(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(z + \varepsilon(z), \bar{z} + \varepsilon(\bar{z})). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Al realizar una expansión de Taylor en cada factor de (3.3), se tiene

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial z} \right)^h &= 1 + h \partial_z \varepsilon(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \left(1 + \frac{\partial \varepsilon(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} &= 1 + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \varepsilon(\bar{z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\phi(z + \varepsilon(z), \bar{z} + \varepsilon(\bar{z})) = \phi(z, \bar{z}) + \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \bar{z}) + \varepsilon(\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Si se sustituyen los términos que se encontraron con la expansión de Taylor nuevamente en (3.3)

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z, \bar{z}) + (h \partial_z \varepsilon(z) + \varepsilon(z) \partial_z + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \varepsilon(\bar{z}) + \varepsilon(\bar{z}) \partial_{\bar{z}}) \phi(z, \bar{z}),$$

se puede reescribir esta transformación como

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z, \bar{z}) + [h \partial_z \varepsilon(z) + \varepsilon(z) \partial_z] \phi(z, \bar{z}) + \text{parte anti-quirial}. \quad (3.5)$$

Describiendo así cómo un campo primario se transforma bajo una transformación conforme infinitesimal.

3.2. Tensor de Momentum-Energía

No todos los campos son primarios, de hecho probablemente el campo más importante no es primario. A este campo se le conoce como el *Tensor de momentum-energía*. Este tensor presenta una variación respecto a la métrica y expresa como la teoría responde al cambio en el espacio. El tensor de momentum-energía tiene mucha de la información que se necesita para estudiar la teoría conforme de campos. No se necesita conocer la forma explícita del Lagrangiano, solo se necesita conocer las propiedades del tensor de momentum-energía.

Matemáticamente se puede encontrar el tensor de momentum-energía al responder qué pasa bajo la siguiente transformación

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}.$$

Del Teorema de Noether se sabe que para cualquier simetría continua existe una cantidad conservada. Y en teoría de campos esta cantidad es la corriente j_μ . La corriente conservada en teorías con una simetría conforme puede escribirse como

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\varepsilon^\nu, \quad (3.6)$$

en donde ε está asociada a la CFT y $T_{\mu\nu}$ es simétrico. Como la corriente se tiene que conservar se cumple que para toda ε :

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (3.7)$$

Si ε es constante al diferenciar (3.6) se tiene que:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.8)$$

Si ε es una función que genera el álgebra conforme y se diferencia otra vez (3.6):

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial^\mu T_{\mu\nu})\varepsilon^\nu + T_{\mu\nu}(\partial^\mu \varepsilon^\nu) \\ &= T_{\mu\nu}(\partial^\mu \varepsilon^\nu). \end{aligned}$$

Y si se realiza una simetrización del tensor $\partial^\mu \varepsilon^\nu$:

$$= \frac{1}{2} T_{\mu\nu} (\partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu). \quad (3.9)$$

Se puede observar que el último factor de la ecuación 3.9 corresponde a la ecuación para campos conformes (1.7):

$$= \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \left(\frac{2}{d} (\partial \cdot \varepsilon) \eta^{\mu\nu} \right),$$

lo que significa que:

$$T^\mu{}_\mu = 0. \quad (3.10)$$

Esta ecuación indica que en la teoría conforme de campos para cualquier dimensión el tensor de momentum-energía debe tener una traza igual a cero [11].

Para el tensor de momentum-energía en dos dimensiones se realiza un cambio de coordenadas complejas, bajo la cual $T_{\mu\nu}$ se transforma de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} T_{\alpha\beta}, \quad (3.11)$$

y utilizando $x^0 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $x^1 = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ se puede calcular T_{zz} :

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{\partial x^0}{\partial z} \frac{\partial x^0}{\partial z} T_{00} + 2 \frac{\partial x^0}{\partial z} \frac{\partial x^1}{\partial z} T_{10} + \frac{\partial x^1}{\partial z} \frac{\partial x^1}{\partial z} T_{11} \\ &= \frac{1}{4} (T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}). \end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento permutando z y \bar{z} se obtiene:

$$T_{zz} = \frac{1}{4} (T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2} (T_{00} - iT_{10}), \quad (3.12)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4} (T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2} (T_{00} + iT_{10}), \quad (3.13)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4} (T_{00} + T_{11}) = 0. \quad (3.14)$$

Como (3.8) indica que T se conserva, esta se puede escribir en coordenadas complejas de la forma

$$\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10} = 0 = \partial_1 T_{11} + \partial_0 T_{01},$$

por lo mismo

$$\begin{aligned}
\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_z T_{00} + i\partial_z T_{10}) \\
&= \frac{1}{4}((\partial_0 - i\partial_1)T_{00} + i(\partial_0 - i\partial_1)T_{10}) \\
&= \frac{1}{4}((\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10}) + i(\partial_0 T_{10} - \partial_1 T_{00})) \\
&= \frac{1}{4}((\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10}) + i(\partial_0 T_{01} + \partial_1 T_{11})),
\end{aligned}$$

entonces

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (3.15)$$

Haciendo un procedimiento similar también se puede demostrar que $\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0$.

Al escribir el tensor de momentum-energía en forma de componentes:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{zz} = T(z) & 0 \\ 0 & T_{\bar{z}\bar{z}} = T(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

es sencillo reconocer que el tensor de momentum-energía tiene una parte quiral $T(z)$ y una parte anti-quiral $T(\bar{z})$, por lo mismo el grupo conforme está separado por una parte quiral y una anti-quiral.

3.3. Cuantización Radial

Se define una teoría cuántica de campos de dos dimensiones sobre un cilindro. En la cual el tiempo va en la dirección paralela al eje del cilindro y el espacio es compacto y va en dirección concéntrica al cilindro, ver figura 3.1. Y cuyas coordenadas son x^0 para el tiempo y x^1 para el espacio.

Esta teoría se mapeará al plano complejo usando

$$z = e^w = e^{x^0} \cdot e^{ix^1}, \quad (3.16)$$

de tal forma que $t = -\infty$ corresponde al origen y $t = \infty$ se encuentra en la frontera del plano. Esto significa que el tiempo va en dirección radial en el plano complejo. El espacio corresponde a círculos de radio w . Las traslaciones de tiempo $x^0 \mapsto x^0 + a$ se mapean como dilataciones $z \mapsto ze^a$ y las traslaciones de espacio $x^1 \mapsto x^1 + b$ como $z \mapsto ze^{ib}$ [2]. De la mecánica cuántica se sabe que el generador de la traslación de tiempo es el Hamiltoniano [12], que en este caso corresponde al operador de escala

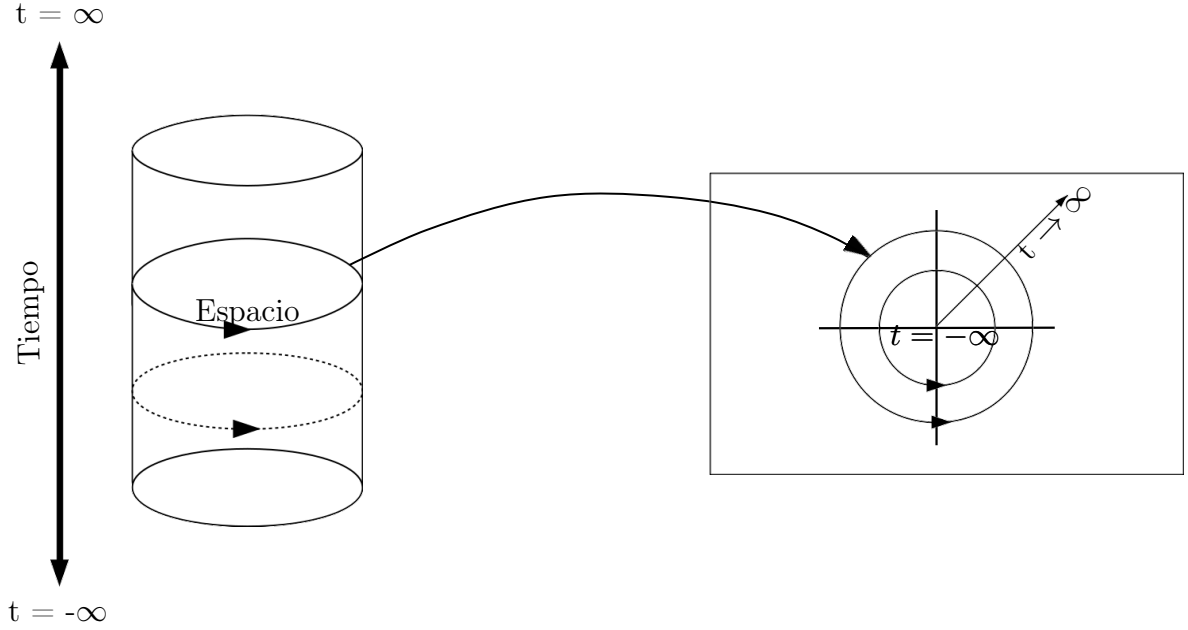


Figura 3.1. Mapa conforme de un cilindro.

o dilatación. De forma, similar el generador de las traslaciones del espacio es el operador del momentum que corresponde a rotaciones [12], teniendo así:

$$H = L_0 + \bar{L}_0, \quad (3.17)$$

$$P = i(L_0 - \bar{L}_0). \quad (3.18)$$

Como la corriente $j_\mu = T_{\mu\nu}\varepsilon^\nu$ asociada a la simetría conforme se preserva, existe una carga conservada:

$$Q = \int dx^1 j_0, \quad (3.19)$$

para $x^0 = \text{constante}$. En teoría de campos, esta carga conservada es el generador de las transformaciones de simetría para un operador A , que puede ser escrito como

$$\delta A = [Q, A],$$

donde el conmutador es evaluado en tiempos iguales. Para el cambio de coordenadas (3.16), se infiere que $x^0 = \text{constante}$, corresponde a un radio fijo en el plano complejo. La integral sobre el espacio $\int dx^1$ de (3.19) se transforma en una integral de contorno sobre el plano complejo, integrando así sobre una trayectoria circular.

La generalización de la carga conservada en (3.19) en coordenadas complejas [15] es

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_C [dz \varepsilon(z) T(z) + d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z})]. \quad (3.20)$$

Esta expresión permite determinar la transformación infinitesimal de un campo $\phi(z, \bar{z})$ generado por una carga conservada Q . Para hacerlo se calcula $\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}}\phi = [Q, \phi]$

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}}\phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz [\varepsilon(z) T(z), \phi(w, \bar{w})]) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_C (d\bar{z} [\bar{\varepsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}), \phi(w, \bar{w})]) \end{aligned} \quad (3.21)$$

De la teoría cuántica de campos se sabe que las funciones de correlación están solamente definidas como un producto de ordenamiento temporal. Considerando el cambio de coordenadas (3.16); en una CFT el ordenamiento temporal se convierte en un ordenamiento radial. Debido a la ambigüedad de que si w está adentro o afuera del contorno \mathcal{C} , se tiene que definir un producto de ordenamiento radial:

$$R(A(z) B(w)) := \begin{cases} A(z) B(w), & \text{para } |z| > |w| \\ B(w) A(z), & \text{para } |w| > |z| \end{cases} \quad (3.22)$$

Entonces la integral para un campo holomorfo de un conmutador $[A, B]$ es

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} dz [A(z), B(w)] &= \oint_{|z| > |w|} dz A(z) B(w) - \oint_{|w| > |z|} dz B(w) A(z) \\ &= \oint_{\mathcal{C}} dz R(A(z) B(w)), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde el contorno de la integral final se toma alrededor del punto w (ver figura 3.2).

Entonces se tiene que para (3.21):

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}}\phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \varepsilon(z) R(T(z) \phi(w)) + \text{parte anti-quiral}. \quad (3.24)$$

No obstante ya se había calculado ésta cantidad para un campo primario (ver (3.5)) y por lo mismo se sabe que la variación para un campo ϕ es

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}}\phi(w, \bar{w}) = h(\partial_w \varepsilon(w)) \phi(w, \bar{w}) + \varepsilon(w)(\partial_w \phi(w, \bar{w})) + \text{parte anti-quiral}. \quad (3.25)$$

Se puede deducir una relación para el ordenamiento radial del tensor de momentum-

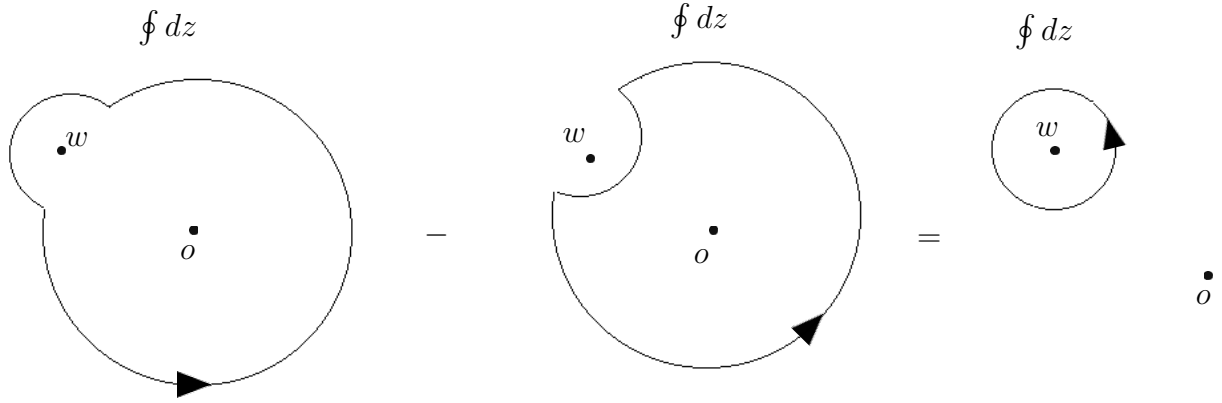


Figura 3.2. Resta de integrales de contornos correspondiente a (3.23).

energía y un campo primario. Usando la fórmula integral de Cauchy para derivadas [15]:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

se obtienen así, las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} h(\partial_w \varepsilon(w)) \phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{h \varepsilon(z)}{(z - w)^2} \phi(w, \bar{w}), \\ \varepsilon(w)(\partial_w \phi(w, \bar{w})) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{\varepsilon(z)}{(z - w)} \partial_w \phi(w, \bar{w}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Obteniendo para un campo bi-holomorfo $\phi(w, \bar{w})$

$$R(T(z) \phi(w, \bar{w})) = \frac{h}{(z - w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z - w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) + \dots, \quad (3.27)$$

y realizando un procedimiento similar para la parte anti-quiral:

$$R(\bar{T}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w})) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{w})^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}} \partial_{\bar{w}} \phi(w, \bar{w}) + \dots, \quad (3.28)$$

donde los términos que se han omitido en ambas ecuaciones son no-singulares. Las expresiones como (3.27) y (3.28) se llaman *expansión del producto del operador* (OPE, por sus siglas en inglés). Un OPE es la idea de que dos operadores locales

insertados en puntos cercanos pueden ser aproximados por una cadena de operadores en uno de esos puntos, es decir define una estructura de un producto algebraico en el espacio de campos cuánticos [11]. Además, con la ayuda de (3.27) y (3.28) se puede tener una definición alternativa de un campo primario: *un campo $\phi(z, \bar{z})$ es primario con dimensiones conformes (h, \bar{h}) si el OPE entre el tensor de momentum-energía y $\phi(z, \bar{z})$ tiene la forma de (3.27) y (3.28)[4].* Para facilitar la notación, se asumirá siempre un ordenamiento radial para productos de campos, es decir se escribirá $A(z)B(w)$ en vez de $R(A(z)B(w))$.

El OPE del tensor de momentum-energía consigo mismo es:

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \quad (3.29)$$

donde c es la carga central y el OPE contiene solo términos no-singulares. Inmediatamente se puede observar que, debido a la contribución del primer término del OPE (3.29), el campo no es primario y por lo tanto tampoco $T(z)$ lo es. La única forma de que T sea primario es si la carga central c es cero.

Para demostrar (3.29) se desarrolla una serie de Laurent [15] en $T(z)$

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad , \quad (3.30)$$

y los modos de Laurent, de este tensor, están dados como

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z). \quad (3.31)$$

Se identifica a estos operadores como los operadores de Virasoro ya que generan transformaciones infinitesimales conformes y por eso mismo deben satisfacer el álgebra de Virasoro:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} [T(z), T(w)] \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} R(T(z)T(w)). \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 3.29 en $R(T(z)T(w))$

$$[L_m, L_n] = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right),$$

ahora se integra el lado derecho de la ecuación usando la fórmula integral de Cauchy

para derivadas

$$\begin{aligned}
&= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \left((m+1)m(m-1)w^{m-2} \frac{c}{2 \cdot 3!} + 2(m+1)w^m T(w) + w^{m+1} \partial_w T(w) \right) \\
&= \oint \frac{dw}{2\pi i} \left((m^3 - m) \frac{c}{12} + 2(m+1)w^{m+n+1} T(w) + w^{m+n+2} \partial_w T(w) \right).
\end{aligned}$$

Se vuelve a integrar usando el Teorema de Cauchy-Goursat para el primer término, se aplica la definición de los modos de Laurent para el segundo término (3.31) y se integra por partes para el tercer término

$$\frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} - (n - m + 2)L_{m+n},$$

teniendo así

$$[L_m, L_n] = \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} + (m - n)L_{m+n}.$$

Así se demuestra que (3.29) es la forma correcta del OPE entre dos tensores de momentum-energía.

Para determinar cómo el tensor de momentum-energía se comporta bajo una transformación infinitesimal conforme, se utiliza (3.24) con el OPE del tensor de momentum-energía

$$\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \varepsilon(w) (T(w)T(z)) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \varepsilon(w) \left(\frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^4} + \frac{\partial_z T(z)}{w-z} \right) \\
&= \frac{c}{12} \partial_z^3 \varepsilon(w) + 2T(z) \partial_z \varepsilon(w) + \varepsilon(w) \partial_z T(z). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que, para transformaciones infinitesimales $f(z) = z + \varepsilon(z)$ el tensor de momentum-energía se transforma como

$$T(z) \mapsto T'(z) = \left(\frac{df}{dz} \right)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f(z), z), \tag{3.33}$$

donde $S(w, z)$ se le conoce como la *derivada Schwarziana*

$$S(w, z) = \frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z w} \right)^2. \tag{3.34}$$

3.4. Funciones de Correlación

Las funciones de correlación de los campos son los objetos naturales a estudiar en la formulación de integrales de camino. Contienen la información física que es de interés (por ejemplo: amplitudes de dispersión) y tienen una expansión simple en términos de diagramas de Feynman. En esta sección se examinarán las consecuencias de la invarianza conforme en funciones de correlación de dos puntos. Considere la función de correlación de dos puntos:

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)e^{-S[\phi]}, \quad (3.35)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son campos cuasi-primarios (no necesariamente distintos). ϕ denota el conjunto de todos los campos funcionalmente independientes en la teoría (a la cual ϕ_1 y ϕ_2 pueden pertenecer), y $S[\phi]$ es la acción, se asume que es una invariante conforme [4].

Para determinar la función de correlación de dos puntos para campos quirales cuasi-primarios se define que

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle = g(z, w). \quad (3.36)$$

La invarianza bajo traslaciones $f(z) = z + a$ generada por L_{-1} requiere que g sea de la forma

$$g(z, w) = g(z - w). \quad (3.37)$$

Esto implica que g depende únicamente de la diferencia entre z y w . La invarianza bajo dilataciones, es decir re-escalas de la forma $f(z) = \lambda z$ generadas por L_0 , implica que

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle \rightarrow \langle \lambda^{h_1}\phi_1(\lambda z)\lambda^{h_2}\phi_2(\lambda w) \rangle = \lambda^{h_1+h_2}g(\lambda(z-w)) \stackrel{!}{=} g(z-w), \quad (3.38)$$

por lo que se puede concluir

$$g(z-w) = \frac{d_{12}}{(z-w)^{h_1+h_2}}, \quad (3.39)$$

en donde d_{12} es una constante. Finalmente la invarianza de la función de correlación de dos puntos bajo L_1 , esencialmente implica la invarianza bajo la transformación

de inversión $f(z) = -\frac{1}{z}$, para la cual se encuentra

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle &\rightarrow \left\langle \frac{1}{z^{2h_1}} \frac{1}{w^{2h_2}} \phi_1\left(-\frac{1}{z}\right) \phi_2\left(-\frac{1}{w}\right) \right\rangle, \\ &= \frac{1}{z^{2h_1} w^{2h_2}} \frac{d_{12}}{\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right)^{h_1+h_2}} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{d_{12}}{(z-w)^{h_1+h_2}}, \end{aligned}$$

lo cual solo puede ser satisfecho si $h_1 = h_2$. Por lo mismo, se llega a la conclusión que para simetrías conformes fijas la función de correlación de dos puntos tiene la forma

$$\langle \phi_i(z)\phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij}\delta_{h_i,h_j}}{(z-w)^{2h_i}}. \quad (3.40)$$

Este mismo procedimiento se puede realizar también para las funciones de tres puntos [11].

4. La Fase de Berry

4.1. Fase de Berry abeliana y conexión de Berry

La fase de Berry es la demostración más simple de cómo la geometría y topología pueden surgir de la mecánica cuántica [13]. Si se toma un sistema cuántico (átomo, electrón, moléculas) en su estado fundamental de energía $|\psi\rangle$, el hamiltoniano de este sistema se puede escribir de la forma general

$$H(x^\alpha; \lambda^i).$$

Este hamiltoniano depende de dos tipos de variables: de sus grados de libertad x^α y de los parámetros λ^i . Estos parámetros λ^i son fijos, delimitan el entorno del sistema y su valor es determinado por aparatos externos al sistema (por ejemplo: fuerzas eléctricas o magnéticas).

Si se alteran lentamente los parámetros λ alrededor de un ciclo, regresarán a sus valores iniciales y el sistema estará en su estado fundamental $|\psi(t)\rangle$. Esto se debe a la existencia del *Teorema Adiabático*[6], el cual establece que si se coloca un sistema en un eigenestado de energía no degenerado y, se varía los parámetros lo suficientemente lento, entonces el sistema se mantendrá en ese eigenestado de energía. Pero la fase del sistema habrá cambiado por γ ,

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\gamma} |\psi\rangle \quad .$$

Esta fase γ tiene dos contribuciones. La primera contribución es simplemente la fase dinámica $e^{-iE_n t/\hbar}$ que es la misma para cualquier eigenestado de energía, incluso si los parámetros no cambian. La segunda contribución es la fase geométrica o fase de Berry.

4.1.1. Calculando la Fase de Berry

La función de onda del sistema evoluciona a través de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(\lambda(t)) |\psi\rangle. \quad (4.1)$$

Para cada elección del parámetro λ , se introduce un estado fundamental con alguna fase fija. A este estado se le llama $|n(\lambda)\rangle$. El teorema adiabático establece que el estado fundamental obedeciendo la ecuación 4.1, puede ser escrito como

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |n(\lambda)\rangle, \quad (4.2)$$

donde $U(t)$ es alguna fase dependiente del tiempo. Si se elige $|n(\lambda(t=0))\rangle = |\psi(t=0)\rangle$ entonces se tiene que $U(t=0) = 1$. Ahora se debe de determinar $U(t)$ luego de que se ha tomado λ alrededor de una trayectoria cerrada y el sistema está donde ha empezado. Si se sustituye la ecuación 4.2 en 4.1 se obtiene por un lado

$$\langle\psi|\dot{\psi}\rangle = \dot{U}U^\dagger + \langle n|\dot{n}\rangle,$$

y por el otro lado, tomando en cuenta que $H(\lambda) |n(\lambda)\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle\psi|\dot{\psi}\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \langle n|U^\dagger H U|n\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle n|H|n\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo mismo se tiene que

$$\langle\psi|\dot{\psi}\rangle = \dot{U}U^\dagger + \langle n|\dot{n}\rangle = 0.$$

Esto da una expresión para la dependencia temporal de la fase U ,

$$\dot{U}U^\dagger = -\langle n|\dot{n}\rangle = -\langle n|\frac{\partial}{\partial \lambda^i}|n\rangle n\dot{\lambda}^i. \quad (4.3)$$

Es útil definir la *conexión de Berry*:

$$\mathcal{A}_i(\lambda) = -i \langle n|\frac{\partial}{\partial \lambda^i}|n\rangle, \quad (4.4)$$

entonces la ecuación 4.3 se lee

$$\dot{U} = -i\mathcal{A}_i\dot{\lambda}^i U.$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente y se obtiene que:

$$U(t) = \exp\left(-i \int \mathcal{A}_i(\lambda)\dot{\lambda}^i dt\right).$$

Como se quiere calcular la fase $U(t)$ luego de haber tomado una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros, se escribe:

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-i \oint_C \mathcal{A}_i(\lambda)d\lambda^i\right), \quad (4.5)$$

esta es la *fase de Berry*. Se tiene que tener en cuenta que no depende del tiempo que toma en cambiar los parámetros; pero si depende de la geometría de la trayectoria tomada a través del espacio de parámetros (de ahí el nombre *fase geométrica* [12]). Es importante recalcar que la fase de Berry está bien definida para trayectorias cerradas, pero no para trayectorias abiertas.

4.1.2. La Conexión de Berry

Con la ecuación (4.4) se ha introducido la idea de la conexión de Berry [1]. Esto es el ejemplo de un objeto matemático que ya se conoce: el potencial gauge en electromagnetismo. En la forma relativista del electromagnetismo, se tiene un potencial gauge $A_\mu(x)$ donde $\mu = 0,1,2,3$ y x son las coordenadas sobre el espacio-tiempo de Minkowski. Existe una redundancia en la descripción del potencial gauge: la física sigue siendo invariante bajo la transformación gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\omega, \quad (4.6)$$

para cualquier función $\omega(x)$. Si se quiere extraer la información física contenida en A_μ , se debe calcular la intensidad del campo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.7)$$

esta contiene al campo eléctrico y magnético y es invariante bajo una transformación gauge.

Ahora se compara la intensidad del campo con la conexión de Berry $\mathcal{A}_i(\lambda)$. La intensidad de campo depende de las coordenadas en el espacio de Minkowski, la conexión de Berry depende de los parámetros λ^i . El número de estos parámetros es arbitrario. Existe una redundancia en la información contenida en la conexión de Berry \mathcal{A}_i . Esto se debe a la elección arbitraria que se hizo al fijar la fase de los estados de referencia $|n(\lambda)\rangle$. Se podría elegir un conjunto diferente de estados de referencia, el cual diferiría por una fase. Además, se podría elegir una fase diferente para cada elección de parámetros λ ,

$$|n'(\lambda)\rangle = e^{i\omega(\lambda)} |n(\lambda)\rangle,$$

para cualquier función $\omega(\lambda)$. Si se calcula la conexión de Berry que surge de esta nueva opción se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_i &= -i \langle n' | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} | n' \rangle \\ &= -i \langle n | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} | n \rangle + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda^i} \langle n | n \rangle \\ &= \mathcal{A}_i + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda^i}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

La ecuación (4.8) tiene la misma forma que la transformación gauge (4.6). Siguiendo la analogía con el electromagnetismo, se puede esperar que la información física en la conexión de Berry pueda ser encontrada en la intensidad de campo invariante de gauge, a la cual matemáticamente se le conoce como la *curvatura* de la conexión

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \lambda^j} - \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial \lambda^i}.$$

Es verdadero que \mathcal{F} contiene alguna información física acerca del sistema cuántico. Pero no es únicamente la cantidad gauge invariante de interés [1]. En este contexto, lo más natural es calcular la fase de Berry (4.5), que también es independiente de la arbitrariedad que surge de la transformación gauge (4.8), esto se debe a que $\oint \partial_i \omega d\lambda^i = 0$. De hecho, es posible escribir la fase Berry en términos de la intensidad de campo utilizando la versión de mayor dimensión del Teorema de Stokes

$$e^{i\gamma} = \exp \left(-i \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_i(\lambda) d\lambda^i \right) = \exp \left(-i \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{ij} dS^{ij} \right), \tag{4.9}$$

donde \mathcal{S} es una superficie de dos dimensiones en el espacio de parámetros limitado por la trayectoria \mathcal{C} .

4.2. Ejemplo: espín en un campo magnético

El ejemplo estándar de la fase de Berry es muy sencillo: es un espín en un espacio de Hilbert que consta de solo dos estados. El espín se coloca en un campo magnético \vec{B} , y su hamiltoniano es

$$H = -\vec{B} \cdot \vec{\sigma} + B \quad ,$$

donde $\vec{\sigma}$ es el triplete de las matrices de Pauli y $B = |\vec{B}|$. El desplazamiento, garantiza que en el estado fundamental la energía sea cero. De hecho, este hamiltoniano tiene dos eigenvalores: 0 y $+2B$. Se denotará el estado fundamental como $|\downarrow\rangle$ y el estado excitado como $|\uparrow\rangle$,

$$H |\downarrow\rangle = 0 \quad \text{y} \quad H |\uparrow\rangle = 2B |\uparrow\rangle .$$

Nótese que estos dos estados son no degenerados siempre que $\vec{B} \neq 0$.

En este ejemplo se tratará el campo magnético como el parámetro del hamiltoniano, es decir: $\lambda^i \equiv \vec{B}$. Esto implica que la conexión de Berry \mathcal{A}_i y las curvaturas \mathcal{F}_{ij} estarán sobre el espacio de campos magnéticos (al contrario del electromagnetismo donde se trabajan los campos magnéticos sobre el espacio real). La forma específica de $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ dependerá de la orientación de \vec{B} . Para proporcionar información más explícita de la forma de estos estados, se escribirá el campo magnético \vec{B} en coordenadas esféricas

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ B \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ B \cos \theta \end{pmatrix} ,$$

con $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, el hamiltoniano entonces se lee

$$H = -B \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & e^{-i\phi} \operatorname{sen} \theta \\ e^{-i\phi} \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} .$$

En estas coordenadas, los dos eigenestados normalizados están dados por

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{sen} \theta/2 \\ -\cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \theta/2 \\ \operatorname{sen} \theta/2 \end{pmatrix} .$$

Estos estados son $|n(\lambda)\rangle$ de la derivación general. Sin embargo, cuando $\theta = \pi$ para \vec{B} la coordenada angular ϕ no está bien determinada. Esto significa que $|\downarrow\rangle$ y $|\uparrow\rangle$ no

tienen fases bien definidas. Este tipo de comportamiento es típico de los sistemas con fases de Berry no triviales.

La fase de Berry que surge de estos estados se puede calcular fácilmente (siempre y cuando $\theta \neq \pi$). Se tiene que

$$\mathcal{A}_\theta = -i \langle \downarrow | \frac{\partial}{\partial \theta} | \downarrow \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_\phi = -i \langle \downarrow | \frac{\partial}{\partial \phi} | \downarrow \rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

La curvatura de Berry resultante en coordenadas polares es

$$\mathcal{F}_{\theta\phi} = \frac{\partial \mathcal{A}_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{A}_\theta}{\partial \phi} = -\sin(\theta).$$

Si se regresa a utilizar coordenadas cartesianas se simplifica, ya que la simetría rotacional se manifiesta más. Entonces la curvatura de Berry en coordenadas cartesianas es

$$\mathcal{F}_{ij}(\vec{B}) = -\epsilon_{ijk} \frac{B^k}{2|\vec{B}|^3}.$$

Este resultado es interesante. ¡Es un monopolo magnético! Por supuesto no es el monopolo magnético real del electromagnetismo: estos están prohibidos por las ecuaciones de Maxwell. Este es un monopolo magnético en el espacio del campo electromagnético ficticio de Berry. Nótese que el monopolo magnético está en el punto $\vec{B} = 0$, donde los dos niveles de energía coinciden. Aquí el campo es singular. Este es el punto en el que ya no se puede confiar más en el calculo de la fase de Berry. Sin embargo es la presencia de este cruce de niveles y las singularidades resultantes las que dominan la física de la fase de Berry [13].

El monopolo magnético tiene carga $g = -1/2$, lo que significa que la integral de la curvatura de Berry sobre cualquier esfera \mathcal{S}^2 que encierra el origen es

$$\int_{\mathcal{S}^2} \mathcal{F}_{ij} dS^{ij} = 4\pi g = -2\pi. \quad (4.10)$$

Usando esto, se puede calcular fácilmente la fase de Berry para cualquier trayectoria \mathcal{C} que se escoja en el espacio del campo magnético \vec{B} ; siempre y cuando la trayectoria \mathcal{C} no pase por el origen. Se supone que la superficie \mathcal{S} , encerrada por \mathcal{C} , describe un ángulo sólido Ω . Entonces utilizando la forma (4.9) de la fase de Berry, se tiene que

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-i \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}_{ij} dS^{ij}\right) = \exp(-i\Omega g) = \exp\left(\frac{i\Omega}{2}\right). \quad (4.11)$$

Sin embargo, existe una ambigüedad en este cálculo: se podría haber elegido formar

\mathcal{S} como se muestra la parte izquierda de la figura 4.1.

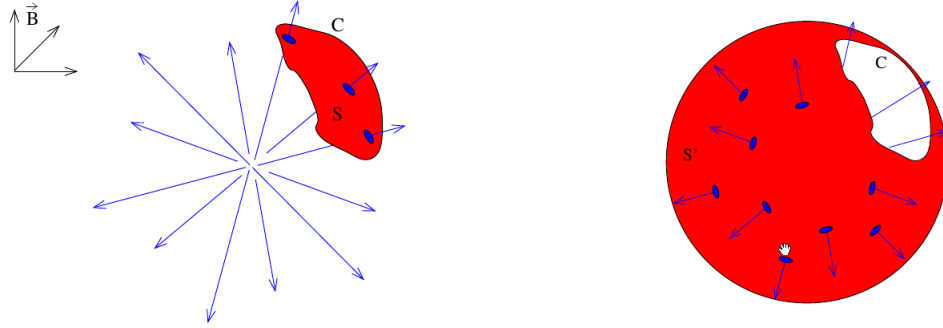


Figura 4.1. Integrando sobre superficies S y S' . Fuente: D. Tong [13].

También se podría elegir la superficie S' para ir alrededor de la parte posterior de la esfera, como se muestra en la parte derecha de la figura 4.1. En este caso, el ángulo sólido formado por S' es $\Omega' = 4\pi - \Omega$. Calculando la fase de Berry utilizando S'

$$e^{i\gamma'} = \exp\left(-i \int_{S'} \mathcal{F}_{ij} dS^{ij}\right) = \exp\left(\frac{-i(4\pi - \Omega)}{2}\right) = e^{i\gamma}, \quad (4.12)$$

donde la diferencia en el signo en la segunda igualdad es gracias a que la orientación de la superficie es opuesta. Así que los dos cálculos coinciden. Sin embargo para que coincidan se requiere que la carga del monopolo en (4.10) sea $2g \in \mathbb{Z}$. En el contexto del electromagnetismo, este fue el argumento original de Dirac para la cuantización de la carga del monopolo. Esta cuantización se extiende a la curvatura general de Berry \mathcal{F}_{ij} con un número arbitrario de parámetros: la integral de la curvatura sobre cualquier superficie cerrada debe estar cuantizada por unidades de 2π ,

$$\int \mathcal{F}_{ij} dS^{ij} = 2\pi C. \quad (4.13)$$

El entero $C \in \mathbb{Z}$ se llama *número de Chern*.

4.3. Partículas que se mueven alrededor de un tubo de flujo

Se sabe del electromagnetismo que el potencial gauge A_μ no tiene significado físico: las cantidades físicas que afectan el movimiento de una partícula son el campo eléctrico y magnético. Esta afirmación es verdadera clásicamente. Pero para

la mecánica cuántica se requiere de cierta precaución. Esto es el tema del efecto Aharonov-Bohm. Como se mostrará, aspectos del efecto Aharonov-Bohm pueden ser vistos como un caso especial de la fase de Berry.

La primera observación del efecto Aharonov-Bohm es que el potencial \vec{A} aparece en el hamiltoniano en vez del campo magnético \vec{B} . Por supuesto, este hamiltoniano es invariante bajo una transformación gauge por lo cual no hay nada malo con esto. Sin embargo, esto abre la posibilidad de que la física de una partícula cuántica pueda ser sensible a \vec{A} de muchas más maneras que una partícula clásica.

4.3.1. Flujo Espectral

Para ver como el potencial gauge \vec{A} puede afectar la física, considere el sistema que se muestra en la figura 4.2.

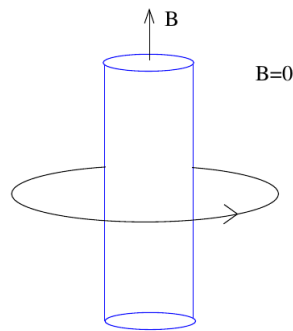


Figura 4.2. Una partícula moviéndose alrededor de un solenoide. Fuente: D. Tong [13].

Se tiene un solenoide de área \vec{A} , que lleva un campo magnético \vec{B} y por lo tanto con un flujo magnético $\Phi = BA$. Afuera del solenoide el campo magnético es cero. Sin embargo, el vector potencial no. Esto se deduce del Teorema de Stokes, el cual establece que la integral de línea afuera del solenoide está dado por

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi.$$

Se resuelve fácilmente en coordenadas cilíndricas, y se obtiene

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r}.$$

Ahora considere una partícula cuántica cargada restringida a estar en un anillo de radio r afuera del solenoide. El único grado de libertad dinámico es la coordenada

angular $\phi \in [0, 2\pi)$. El hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m}(p_\phi + eA_\phi)^2 = \frac{1}{2mr^2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2.$$

Se quiere saber cómo la presencia del solenoide afecta a la partícula. Los eigenestados son simplemente

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{in\phi} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.14)$$

donde el requerimiento que ψ sea valuado únicamente alrededor del círculo significa que se debe tomar $n \in \mathbb{Z}$. Se sustituye (4.14) en la ecuación independiente del tiempo de Schrödinger, $H\psi = E\psi$, y se encuentra que el espectro

$$E = \frac{1}{2mr^2} \left(\hbar n + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n + \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si Φ es un múltiplo entero del cuanto de flujo $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$, entonces el espectro no es afectado por el solenoide. Pero si el flujo del solenoide no es un múltiplo entero de Φ_0 entonces el espectro cambia. La energía de la partícula es sensible al flujo Φ aunque la partícula nunca se acerque a la región con el campo magnético. El espectro resultante se observa en la figura 4.3.

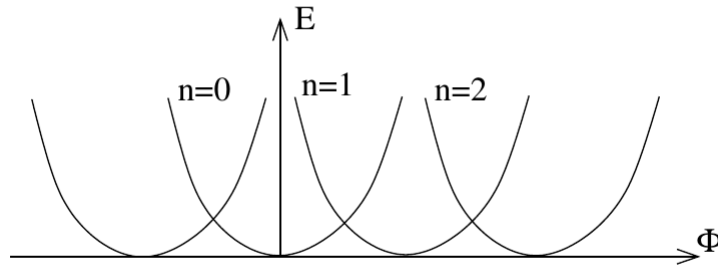


Figura 4.3. Flujo espectral para los estados de energía de una partícula moviéndose alrededor de un solenoide. Fuente: D. Tong [13].

Suponga que se apaga el solenoide y se coloca a la partícula en el estado fundamental $n = 0$. Se incrementa muy lentamente el flujo. Por el teorema adiabático, la partícula se mantiene en el estado $n = 0$. Pero para el momento en el que se ha llegado a $\Phi = \Phi_0$, ya no está en el estado fundamental. Ahora está en el estado que previamente se marcó como $n = 1$. Similarmente, cada estado n se cambia al

siguiente estado $n + 1$. Esto es un ejemplo de un fenómeno llamado *flujo espectral*: bajo un cambio de parámetro (en este caso Φ) el espectro del hamiltoniano cambia o *fluye*. A medida que se cambia el aumento por una unidad Φ_0 , el espectro regresa a sí mismo, pero los estados individuales se van transformado en otro estado.

4.3.2. El Efecto Aharonov-Bohm

La situación descrita en §4.3.1 parece tener relación con la fase de Berry. Se puede preparar una situación similar que demuestre esta relación más claramente. Se considera un sistema como el del solenoide donde el campo magnético se localiza en alguna región del espacio. Otra vez, se considera una partícula la cual se ubica afuera de esta región. Sin embargo esta vez se restringe a la partícula a estar en una caja pequeña. Puede haber algo interesante adentro de la caja, se obtendrá esto incluyendo un potencial $V(\vec{x})$ en el hamiltoniano y para atrapar la partícula, el potencial es infinito afuera de la caja.

El hecho de que la caja es “pequeña” significa que el potencial gauge es aproximadamente constante adentro de la caja. Si se asigna el centro de la caja a la posición $\vec{x} = \vec{X}$, entonces el hamiltoniano de sistema es

$$H = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar\nabla + e\vec{A}(\vec{X}) \right]^2 + V(\vec{x} - \vec{X}). \quad (4.15)$$

Se empezará por colocar el centro de la caja en la posición $\vec{x} = \vec{X}_0$ donde el potencial gauge desaparece: $\vec{A}(\vec{X}) = 0$. El hamiltoniano sería

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla)^2 + V(\vec{X}_0 - \vec{X}).$$

Y se tomará el estado fundamental como

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}_0),$$

el cual está localizado alrededor de $\vec{x} = \vec{X}_0$ como debería de ser. Nótese que se realiza una elección de fase para especificar esta función de onda. Ahora se moverá la caja en alguna trayectoria en el espacio. Al hacerlo, el potencial gauge $\vec{A}(\vec{x} = \vec{X})$ experimentado por la partícula cambia. Se verifica que la ecuación de Schrödinger

para el hamiltoniano (4.15) es resuelta por el estado

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}) = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right) \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \quad .$$

Esta función de onda funciona porque cuando se opera ∇ con el exponencial, baja un factor que cancela el término $e\vec{A}$ en el hamiltoniano. Ahora se calculará la fase de Berry. Se toma la caja en un trayectoria cerrada \mathbf{C} y se trae de nuevo a donde comenzó. La función de onda vuelve a

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}) \rightarrow e^{i\gamma} \psi(\vec{x} - \vec{X}), \quad \text{donde} \quad e^{i\gamma} = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \oint_{\mathbf{C}} \vec{A} \cdot d\vec{x}\right). \quad (4.16)$$

Comparando esto con la expresión general de la fase de Berry, se observa que en este contexto particular la conexión de Berry se identifica con el potencial electromagnético,

$$\vec{A}(\vec{X}) = \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{x} - \vec{X}).$$

En general, si la partícula de carga q circunda una región que contiene un flujo Φ , se escogerá una fase Aharonov-Bohm

$$e^{iq\Phi/\hbar} \quad .$$

Hay un experimento que exhibe la fase de Berry en el efecto Aharonov-Bohm. Es una variante del experimento de la doble rendija. La partícula puede ir a través de una de las dos ranuras. La función de onda se separa, así que la partícula en esencia, viaja a través de ambas ranuras. Ahora, se esconde un solenoide con flujo magnético Φ detrás de la pared. La función de onda de la partícula tiene prohibido entrar a la región del solenoide, por lo mismo la partícula nunca experimenta el campo magnético \vec{B} . Sin embargo, como se ha visto, la presencia del solenoide induce a una fase distinta $e^{i\gamma}$ entre las partículas que tomaron la primera ranura y las que tomaron la segunda ranura. Esta diferencia de fase se manifiesta como el cambio del patrón de interferencia que se ve. Tenga en cuenta que cuando Φ es un múltiplo entero de Φ_0 , el patrón de interferencia no cambia; es solo sensible a la parte fraccional Φ/Φ_0 .

4.4. Conexión de Berry no Abelianas

En la fase de Berry descrita anteriormente se asumió que el estado fundamental era único. En esta sección se describirá una generalización importante a la situación

donde el estado fundamental está degenerado N veces y lo sigue siendo para todos los valores del parámetro λ .

Se debe notar que desde el comienzo hay algo especial sobre esta situación. Si un hamiltoniano tiene N -degeneraciones entonces una perturbación genérica rompería esta degeneración. Pero se quiere cambiar el hamiltoniano sin romper la degeneración, para que esto suceda usualmente tiene que haber alguna simetría protegiendo el estado. Se realizará el mismo procedimiento usado para el caso Abelian. Se coloca el sistema en uno de los N estados fundamentales degenerados, se varían los parámetros en una trayectoria cerrada, y se realiza la pregunta: ¿a qué estado regresa el sistema?

En esta ocasión el teorema adiabático establece que el sistema se aferra al eigenspacio particular de energía mientras los parámetros varían. Pero ahora este eigenspacio tiene N degeneraciones y el teorema adiabático no restringe como se mueve el estado en este subespacio. Esto significa que para el momento en el que los parámetros regresan a sus valores originales, el estado puede estar en cualquier lugar dentro de este eigenspacio N -dimensional. Se quiere saber como se mueven. Esto ya no se da solo por una fase; en lugar se quiere calcular una matriz unitaria $U \subset U(N)$.

Se puede calcular esta matriz por el mismo procedimiento que se utiliza para la fase de Berry Abelian. Para facilitar los cálculos se remueve la fase dinámica e^{iEt} , asumiendo que el estado fundamental de energía es $E = 0$, para todos los valores de λ . La ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger es nuevamente

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(\lambda(t)) |\psi\rangle = 0 \quad . \quad (4.17)$$

En esta ocasión, para cada parámetro λ , se introduce una base N -dimensional de estados fundamentales

$$|n^\alpha(\lambda)\rangle; \quad a = 1, 2, \dots, N.$$

Como en el caso no degenerado, no hay una forma canónica de hacerlo. Se podría elegir cualquier otra opción de base para cada valor de λ . Solo se elige una. Esta base evoluciona a través de la ecuación de Schrödinger de la siguiente forma

$$|\psi(t)\rangle = U_{ab}(t) |n_b[\lambda(t)]\rangle,$$

donde U_{ab} son las componentes de la matriz unitaria dependiente del tiempo $U(t) \subset$

$U(N)$. Sustituyendo este estado en el Ansatz (4.17), se tiene

$$|\dot{\psi}_a\rangle = \dot{U}_{ab} |n_b\rangle + U_{ab} |\dot{n}_b\rangle = 0, \quad (4.18)$$

reordenando estos términos

$$U_{ac}^\dagger \dot{U}_{ab} = -\langle n_a | \dot{n}_b \rangle = -\langle n_a | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} |n_b\rangle \dot{\lambda}^i \quad . \quad (4.19)$$

Otra vez se define una conexión, la *conexión de Berry no Abeliana*

$$(\mathcal{A}_i)_{ba} = -i \langle n_a | \frac{\partial}{\partial \lambda^i} |n_b\rangle \quad . \quad (4.20)$$

Se debe de pensar en \mathcal{A}_i como una matriz $N \times N$, que vive en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(N)$. También debe ser pensada como una conexión gauge $U(N)$ sobre el espacio de parámetros.

La *curvatura de Berry* o *intensidad de campo* en notación matricial está definida por

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \lambda^j} - \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial \lambda^i} - i[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j].$$

Esto también se encuentra en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(N)$. A diferencia del caso Abeliano, la intensidad de campo no es invariante gauge. Se transforma como

$$\mathcal{F}'_{ij} = \Omega \mathcal{F}_{ij} \Omega^\dagger,$$

en donde $\Omega \in U(N)$. Combinaciones invariantes de gauge de la intensidad de campo pueden ser formadas al calcular la traza de la matriz de índices. Por ejemplo, $tr \mathcal{F}_{ij}$, solo expresa sobre la parte $U(1) \subset U(N)$ de la conexión de Berry, o trazas de orden superior como $tr \mathcal{F}_{ij} \mathcal{F}_{kl}$. De todos modos la cantidad invariante de gauge más importante es la matriz unitaria U , y se determina utilizando la ecuación diferencial (4.20).

La solución para (4.20) es más complicada que en el caso Abeliano, debido a ambigüedades de orden en la matriz \mathcal{A}_i en el exponente. La matriz en un punto del espacio de parámetros, $\mathcal{A}_i(\lambda)$, no necesariamente conmuta con la matriz en otro punto $\mathcal{A}_i(\lambda')$. La solución para la matriz unitaria U es

$$U = \mathcal{P} \exp \left(-i \oint \mathcal{A}_i d\lambda^i \right).$$

Aquí $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{u}(N)$ es una matriz de $N \times N$. La notación \mathcal{P} significa *orden de ruta*.

Lo que implica que al exponencial se le aplica una expansión de Taylor y luego se ordenan los productos resultantes, de tal manera que las matrices $\mathcal{A}_i(\lambda)$ que aparecen después en la trayectoria se colocan a la derecha. El resultado es la matriz unitaria $U \subset U(N)$ la cual establece cómo los estados se transforman. Esta matriz unitaria se llama *holonomía de Berry*. La holonomía [6] es un invariante de gauge; es decir no se transforma de la forma

$$\mathcal{A}'_i = \Omega \mathcal{A}_i \Omega^\dagger + i \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda^i} \Omega^\dagger.$$

5. La fase de Berry en el grupo SU(2)

En esta sección se ilustrará la fase de Berry en el grupo SU(2), con el ejemplo de un espín en un campo magnético variable. Se debe considerar una representación unitaria irreducible \mathcal{U} de SU(2) [14]. En términos físicos esto corresponde a un solo (‘irreducible’) espín cuántico (‘unitario’) con un grado de libertad (‘representación de SU(2)’) fijado en un campo magnético \vec{B} ; el hamiltoniano de este sistema es proporcional a la proyección del operador espín \hat{S} a lo largo de \vec{B}

$$H = -\gamma \hat{S} \cdot \vec{B}, \quad (5.1)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es la razón giro magnética y $\hat{S} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ es un conjunto de tres operadores hermíticos que representan generadores de rotaciones en el espacio de Hilbert de la representación. Sus conmutadores son $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{i,j,k}\hat{S}_k$ (se establece $\hbar = 1$) y pueden ser escritos como

$$\hat{S}_j = i\mathfrak{u}[-i\sigma_j/2], \quad (5.2)$$

donde $\{\sigma_j\}$ son las matrices de Pauli y el álgebra de representación \mathfrak{u} está relacionado a \mathcal{U} , por medio de

$$\mathcal{U}[e^{tX}] = e^{t\mathfrak{u}[X]}.$$

Como ya se menciona \mathcal{U} es unitario, $\mathfrak{u}[X]$ es un operador anti-hermítico para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, \mathfrak{g} es una álgebra de Lie.

Se debe enfatizar que \hat{S}_j son operadores, mientras \vec{B} es meramente un conjunto de tres parámetros reales de los cuales depende el hamiltoniano (5.1). Suponga que el campo magnético varía adiabaticamente al cambiar su dirección mientras mantiene una norma constante. En un marco de referencia estándar el campo magnético está alineado con el eje vertical y el hamiltoniano (5.1) es proporcional a \hat{S}_3 , pero bajo una rotación $f \in \text{SU}(2)$ el hamiltoniano se vuelve proporcional a $\mathcal{U}[f]\hat{S}_3\mathcal{U}[f]^{-1}$. Para una familia de rotaciones dependientes del tiempo $f(t)$ cuya proyección en la esfera $\text{SU}(2)/S^1 \cong S^2$ es una trayectoria cerrada, se obtiene una fase de Berry. La fase de

Berry en teoría de grupos puede escribirse como

$$B_\phi[f] = \oint_f i \langle \phi | \mathbf{u}[\Theta] | \phi \rangle \equiv \oint_f A_\phi, \quad (5.3)$$

donde Θ se conoce como la *forma de Maurer-Cartan* [9]

$$\Theta_{f(t)}(\dot{f}(t)) \equiv \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} [f(t)^{-1} \cdot f(\tau)], \quad (5.4)$$

se utiliza $f(t)^\dagger = f(t)^{-1}$. Se debe notar que aquí la derivada solo es sobre $f(\tau)$ y no sobre $f(t)^{-1}$. Y a A_ϕ se le conoce como la conexión de Berry y esta dada por

$$A_\phi = \langle \phi | i\mathbf{u}[\Theta] | \phi \rangle. \quad (5.5)$$

Esta conexión debe entenderse en términos geométricos como una conexión que codifica cómo comparar la fase del estado $|\phi\rangle$ en puntos cercanos del espacio de parámetros. Se tiene que tener en cuenta que dado que el estado no está degenerado, se puede realizar un seguimiento inequívoco del estado $|\phi\rangle$ a medida que se avanza en el espacio de parámetros [1].

Sea $j \geq 0$ el espín de la representación \mathcal{U} ; entonces una base del espacio portador de \mathcal{U} está proporcionada por $(2j + 1)$ estados $|m\rangle$ de tal manera que $\hat{S}_3 |m\rangle = m |m\rangle$ para $m = j, j - 1, \dots, -j$. Considérese en particular el estado de peso más alto $|j\rangle$; su estabilizador es el subgrupo $U(1)$ de $SU(2)$ generado por \hat{S}_3 , pero rotaciones genéricas no actúan trivialmente en él: en términos de las coordenadas polares (θ, φ) en $SU(2)/S^1 \cong S^2$, una rotación f que mapea el polo norte de S^2 en (θ, φ) también mapea $|j\rangle$ en un vector $\mathcal{U}[f] |j\rangle$ que representa un espín apuntando en la dirección (θ, φ) . Esto proporciona una familia de estados $|j; \theta, \varphi\rangle$ obtenidos al aplicar rotaciones específicas a $|j\rangle$. Cada uno de estos vectores es un eigenestado del hamiltoniano (5.1) cuando el campo magnético está en la dirección (θ, φ) . Se quiere encontrar la fase de Berry de estos estados cuando la dirección del campo magnético traza una trayectoria cerrada $(\theta(t), \varphi(t))$ en S^2 .

Para describir los estados $|j; \theta, \varphi\rangle$ se necesita una familia de rotaciones $g_{(\theta, \varphi)} \in SU(2)$, cada una mapeando el polo norte hasta al punto (θ, φ) en S^2 , tal que

$$|j; \theta, \varphi\rangle = \mathcal{U}[g_{(\theta, \varphi)}] |j\rangle. \quad (5.6)$$

Para este, caso la matriz de eigenestados del hamiltoniano será suficiente para eva-

luar la fase de Berry

$$g_{(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

se debe notar que está bien definida en todas partes menos en $\theta = \pi$. Por lo mismo el polo sur es una singularidad. Se puede utilizar la forma de Maurer-Cartan (5.4) en SU(2) a la esfera

$$g_{(\theta,\varphi)}^{-1} dg_{(\theta,\varphi)} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)d\varphi & e^{-i\varphi}(\sin \theta d\varphi + id\theta) \\ e^{i\varphi}(\sin \theta d\varphi - id\theta) & -(1 - \cos \theta)d\varphi \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

que puede ser reescrito como una combinación lineal de matrices

$$g_{(\theta,\varphi)}^{-1} dg_{(\theta,\varphi)} = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3.$$

Para encontrar el coeficiente A_1 , se multiplica la matriz σ_1 por la forma de Maurer-Cartan y se le suma el producto de la forma de Maurer-Cartan por la matriz σ_1 , es decir

$$\begin{aligned} \sigma_1(g_{(\theta,\varphi)}^{-1} dg_{(\theta,\varphi)}) + (g_{(\theta,\varphi)}^{-1} dg_{(\theta,\varphi)})\sigma_1 &= 2A_1\sigma_1^2 + A_2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1) + A_3(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ &= 2A_1\mathbb{I}_2, \end{aligned}$$

al seguir operando, se tiene que

$$\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi d\theta & 0 \\ 0 & \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi d\theta \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma se obtiene que el coeficiente A_1 es

$$A_1 = \frac{i}{2}(\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi d\theta).$$

Para encontrar los coeficientes A_2 y A_3 se repite el mismo procedimiento, solo se cambia la matriz sigma a utilizar. Obteniendo así la siguiente combinación lineal

$$\begin{aligned} g_{(\theta,\varphi)}^{-1} dg_{(\theta,\varphi)} &= \frac{i}{2} [(\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi d\theta)\sigma_1 + (\sin \varphi \sin \theta d\varphi - \cos \varphi d\theta)\sigma_2 \\ &\quad + (1 - \cos \theta)d\varphi\sigma_3]. \end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar la conexión de Berry (5.5) asociada a los estados $\mathcal{U}[g(\theta,\psi)]|j\rangle$ y ponerlo en la esfera

$$(A_j)_{(\theta,\phi)} = \langle j|iu[g_{(\theta,\phi)}^{-1}dg(\theta,\phi)]|j\rangle \quad (5.9)$$

$$= \langle j|iu\left[\frac{i}{2}(1-\cos\theta)d\varphi\sigma_3 + (\dots)\sigma_2 + (\dots)\sigma_1\right]|j\rangle. \quad (5.10)$$

Aquí, los coeficientes multiplicando σ_1 y σ_2 no son importantes. Usando (5.2) se puede reescribir el operador $iu[\dots]$ como una combinación lineal de \hat{S}_j . Como los valores esperados de \hat{S}_1 y \hat{S}_2 desaparecen, solo el término proporcional a σ_3 sobrevive, se encuentra que la conexión de Berry es

$$(A_j)_{(\theta,\varphi)} = -\langle j|\hat{S}_3|j\rangle(1-\cos\theta)d\varphi = -j(1-\cos\theta)d\varphi, \quad (5.11)$$

la cual es continua en todos lados menos en el polo sur. Hasta un factor general, este es el potencial de la forma estándar del volumen de una esfera unitaria. La curvatura de Berry sería

$$\begin{aligned} F_j &= dA_j \\ &= -j\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\cos\theta)d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}(1-\cos\theta)d\varphi \wedge d\varphi\right), \end{aligned}$$

es decir

$$F_j = dA_j = -j \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\varphi. \quad (5.12)$$

Se calculará la fase de Berry de los estados $\mathcal{U}[g(\theta,\varphi)]|j\rangle$

$$B_j[\gamma] = \oint_{\gamma} A_j = \int_{\Sigma} dA_j,$$

aquí Σ es cualquier superficie orientada en S^2 tal que $\partial\Sigma = \gamma$. Integrando

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dA_j &= -j \int_{\Sigma} \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\varphi, \\ &= -j \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi, \\ &= -j(4\pi) = -j \times \text{área de una esfera de radio 1.} \end{aligned}$$

Teniendo así que la fase de Berry para los estados $\mathcal{U}[g(\theta,\varphi)]$ alrededor de una trayec-

toría cerrada en la esfera unitaria es

$$B_j[\gamma] = B_j[\gamma] = \oint_{\gamma} A_j = \int_{\Sigma} dA_j = -j \times \text{área}(\Sigma), \quad (5.13)$$

que corresponde al área de la región encerrada por la trayectoria multiplicado por $-j$ [9].

6. La fase de Berry en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$

En esta sección se ilustrará la fase de Berry en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ con el ejemplo de un espín en un campo magnético variable. Se debe de volver a considerar una representación \mathcal{U} de $SL(2, \mathbb{R})$ con el peso mayor h (2.14). El operador L_0 (2.13) que genera traslaciones en el tiempo en un marco de referencia adecuado es lo que normalmente se conoce como *hamiltoniano*. Pero esta elección de marco de referencia es arbitraria, también se puede mover a un marco diferente por medio de una transformación $f \in SL(2, \mathbb{R})$ y determinar que el hamiltoniano es $\mathcal{U}[f] L_0 \mathcal{U}[f]^{-1}$. Esto define una familia de hamiltonianos etiquetados por f , y se pueden estudiar sus fases de Berry resultantes. Considérese el estado de peso más alto $|h\rangle$; el cual es un eigenvector del hamiltoniano *estándar* L_0 y cuyo estabilizador es el grupo $U(1)$ de rotaciones, pero transformaciones genéricas $SL(2, \mathbb{R})$ actúan de manera no trivial: el conjunto de estados inequivalentes que se pueden alcanzar desde $|h\rangle$ es una variedad $\mathbb{H}^2 \cong SL(2, \mathbb{R})/S^1$ [9]. Donde \mathbb{H} es el plano hiperbólico en dos dimensiones

$$\mathbb{H}^2 \cong \{ \sqrt{1 + p^2 + q^2} t_0 + p t_1 + q t_2 | (p, q) \in \mathbb{R}^2 \}. \quad (6.1)$$

En términos de las coordenadas globales (p, q) en (6.1), cualquier transformación f que mapea la punta del hiperboloide en un punto (p, q) también mapea $|h\rangle$ en un nuevo estado $\mathcal{U}[f] |h\rangle$ que tiene energía definida h con respecto al hamiltoniano *no estándar* $\mathcal{U}[f] L_0 \mathcal{U}[f]^{-1}$. Nuestro objetivo es encontrar la fase de Berry para estos estados, a medida que experimentan una familia de boost que trazan una trayectoria cerrada en el plano hiperbólico (6.1).

Se tiene que describir a la familia de estados $|h; p, q\rangle$ y para esto se necesita una familia de transformaciones $g_{p,q} \in SL(2, \mathbb{R})$. Cada estado mapea la punta de (6.1) en el punto (p, q) , tal que

$$|h; p, q\rangle = \mathcal{U}[g_{p,q}] |h\rangle.$$

Se puede pensar en esta familia como una sección del fibrado $U(1), SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$, asociando un elemento $g_{(p,q)}$ del grupo con un punto (p, q) . En contraste con el caso

SU(2), el fibrado ahora es trivial y existe una sección suave global. Escribiendo $E \equiv \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, se tiene que

$$(6.2) \quad g_{(p,q)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [E + 1]^{1/2} + \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}[E - 1]^{1/2} & -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}[E - 1]^{1/2} \\ -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}[E - 1]^{1/2} & [E + 1]^{1/2} - \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}[E - 1]^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Aquí, la normalización asegura que la acción adjunta de $g_{(p,q)}$ mapea la punta de (6.1) en el punto con coordenadas (p, q) . La sección (6.2) puede ser usada para calcular la forma de Maurer-Cartan (5.4) de $SL(2, \mathbb{R})$ a \mathbb{H}^2 . El resultado es un campo gauge $SL(2, \mathbb{R})$ que puede ser expresado como una combinación lineal

$$g_{(p,q)}^{-1} dg_{(p,q)} = X^\mu t_\mu.$$

Para encontrar las componentes X^μ se realiza la sumatoria, y se sustituye por las matrices de la base de $SL(2, \mathbb{R})$ (2.10)

$$\begin{aligned} g_{(p,q)}^{-1} dg_{(p,q)} &= X^0 t_0 + X^1 t_1 + X^2 t_2 \\ &= \frac{i}{2} \sigma_2 X^0 + \frac{1}{2} \sigma_1 X^1 + \frac{1}{2} \sigma_2 X^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X^2 & X^1 + iX^0 \\ X^1 - iX^0 & -X^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

En (6.3) se puede observar que la forma de Maurer-Cartan es equivalente a una matriz de la forma

$$g_{(p,q)}^{-1} dg_{(p,q)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Restando la matriz (6.4) de (6.3) se tiene que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} X^2 & X^1 + iX^0 \\ X^1 - iX^0 & -X^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$

y se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2} X^2 - a & = 0 \\ \frac{1}{2} (iX^0 + X^1) - b & = 0 \\ \frac{1}{2} (iX^0 - X^1) - c & = 0 \\ \frac{1}{2} X^2 + a & = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

cuyo resultado está dado por

$$X^0 = b - c, \quad X^1 = b + c, \quad X^2 = 2a.$$

Al sustituir las componentes de (6.4) con las componentes de la matriz de $g_{(p,q)}^{-1}dg_{(p,q)}$, es decir $a \rightarrow (g_{(p,q)}^{-1}dg_{(p,q)})_{1,1}$, y posteriormente repitiendo el mismo procedimiento para a y b . Se vuelven a sustituir de acuerdo a las soluciones del sistema de ecuaciones (6.5), donde se obtiene que las componentes X^μ están dadas por

$$X^0 = \frac{E-1}{p^2+q^2}(pdq - qdp), \quad X^1 + iX^2 = idp - dq - \frac{E-1}{E} \frac{ip-q}{p^2+q^2}(pdp + qdq). \quad (6.6)$$

Por tanto se puede evaluar la conexión de Berry [9] asociada con los estados $\mathcal{U}[g_{(p,q)}] |h\rangle$ y devolverlos de nuevo en el plano hiperbólico

$$\begin{aligned} (A_h)_{(p,q)} &= \langle h | i\mathbf{u}[g_{(p,q)}^{-1}dg_{(p,q)}] | h \rangle \\ &= \langle h | i\mathbf{u} \left[\frac{E-1}{p^2+q^2}(pdq - qdp)t_0 + (\dots)t_1 + (\dots)t_2 \right] | h \rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Esta ecuación es la análoga en $SL(2, \mathbb{R})$ de la ecuación (5.9); como en el caso anterior, los coeficientes t_1 y t_2 no son importantes ya que multiplican la combinación lineal de los operadores $L_{\pm 1}$ cuyos valores esperados desaparecen gracias a (2.14). Por lo tanto solo el término proporcional a t_0 sobrevive y se obtiene la conexión de Berry

$$A_h = -\langle h | L_0 | h \rangle \frac{E-1}{p^2+q^2}(pdq - qdp) = -h \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}-1}{p^2+q^2}(pdq - qdp), \quad (6.8)$$

en donde se usó (2.13) y se reescribió E en términos de p, q . Hasta la normalización, esto es el potencial de la forma estándar del volumen invariante de Lorentz en \mathbb{H}^2 .

La curvatura de Berry es

$$F_h = dA_h = -h \frac{dp \wedge dq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \quad (6.9)$$

Resulta que la fase de Berry recogida por los estados $\mathcal{U}[g_{(p,q)}] |h\rangle$ a lo largo de la trayectoria cerrada γ en \mathbb{H}^2 es el área de la región encerrada, multiplicada por $-h$

$$B_h[\gamma] = \oint_\gamma A_h = \int_\Sigma dA_h = h \times \text{área}(\Sigma), \quad (6.10)$$

donde Σ es la superficie orientada con área finita en \mathbb{H}^2 tal que $\partial\Sigma = \gamma$. Todos

estos resultados son directamente análogos al caso $SU(2)$, esencialmente los mismos comentarios aplican. En particular, se puede verificar que la curvatura (6.9), y por lo tanto la fase (6.10) son independientes de la sección (6.2).

Para futuras referencias, se evaluará la fase de Berry asociada con círculos alrededor de la punta de $SL(2, \mathbb{R})/S^1$. Estas fases están mejor descritas con las coordenadas polares (r, ϕ) , tal que $p = r \cos \phi$, $q = r \sin \phi$, en términos de las cuales la curvatura de Berry es

$$F_h = -h \frac{r dr \wedge d\phi}{\sqrt{1+r^2}}. \quad (6.11)$$

El círculo alrededor de la punta, es una curva donde $r(t) = R$ y es constante, mientras que $\phi(t) = \omega t$ para alguna velocidad angular $\omega > 0$. El tiempo que se necesita para realizar una vuelta alrededor de la punta es $T = 2\pi/\omega$ y la fase de Berry 6.10 correspondientes es

$$B_h(R) = -2\pi h(\sqrt{1+R^2} - 1) = -2\pi h(\cosh \lambda - 1) \equiv B_h(\lambda), \quad (6.12)$$

en donde en la segunda igualdad se introduce la rapidez $\lambda \equiv \operatorname{arcsinh}(R)$. Este resultado debería ser familiar de la relatividad especial: cuando h es identificada con el espín de una partícula que sigue una trayectoria circular con una velocidad R , la fase (6.12) refleja la rotación neta experimentada por su marco de referencia inercial luego de una revolución. Este fenómeno es conocido como *precesión de Thomas*.

6.1. Precesión de Thomas

La precesión de Thomas, nombrada así en honor al físico Llewellyn Thomas, es una corrección relativista que se aplica al espín de una partícula elemental o la rotación de un giroscopio macroscópico. Relaciona la velocidad angular del espín de una partícula que sigue una órbita curvilínea con la velocidad angular del movimiento orbital. Matemáticamente, es la composición de dos boosts de Lorentz no colineales, que resulta en una transformación de Lorentz que no es un boost puro sino una composición de un boost y una rotación espacial, conocida como la *rotación de Wigner* [7]. Como consecuencia, un cuerpo moviéndose en una trayectoria curvilínea experimenta una precesión rotacional, que se conoce como *precesión de Thomas*.

En 1962 Uhlenbeck y Goudsmit introducen la idea del espín de un electrón y muestran que, si el electrón tiene un factor $g = 2$, el efecto Zeeman [7] puede ser

explicado, al igual que la existencia de múltiples divisiones en las líneas espectrales. Pero había una dificultad, ya que los intervalos de estructura fina observados solo eran la mitad de los valores teóricamente esperados. Si un factor $g = 1$ era escogido, los intervalos de estructura fina eran dados correctamente, pero el efecto Zeeman era entonces lo normal. La explicación completa del espín, incluyendo correctamente el factor g y la interacción apropiada de la estructura fina, vino solo con la teoría relativista del electrón de Dirac. Pero dentro del contexto de un espín como momentum angular empírico y un factor $g = 2$, Thomas demostró en 1927 que el origen de las discrepancias era un efecto cinemático relativista, cuando está incluido correctamente, da tanto el efecto anómalo Zeeman y las divisiones correctas de la estructura fina. La precesión de Thomas, también da la explicación cualitativa para una interacción espín-órbita en el núcleo atómico y demuestra por qué los dobletes están *invertidos* en el núcleo [7].

Para realizar la derivación [5], se tiene que introducir tres observadores inerciales: Alice, Bob y un gato y denotar sus marcos de referencia como A, B y G respectivamente. Se eligen de forma que A no rote respecto a B, y que B no rote respecto a G (de todas formas es inevitable que G rote con respecto a A). Se permite que Bob sostenga al gato y se mueva a una velocidad constante \vec{v} con respecto a Alice. Desafortunadamente, en algún punto el gato decide huir de Bob con una pequeña velocidad infinitesimal $d\vec{v}'$ con respecto a él. Resulta que Bob se está moviendo con una velocidad $-d\vec{v}'$ con respecto al gato y Alice se está moviendo con una velocidad $-\vec{v}$ con respecto a Bob, ver imagen 6.1.

Se denotará la velocidad del gato en el marco de Alice como $\vec{v} + d\vec{v}$. Como el gato está rotando respecto a Alice, la velocidad de ella \vec{v} en el marco de referencia del gato se tiene que determinar: $\vec{v} \neq -\vec{v} - d\vec{v}$. El ángulo $d\vec{\Omega}$ de la rotación es

$$d\vec{\Omega} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \times \frac{\vec{v} + d\vec{v}}{|\vec{v} + d\vec{v}|} \approx -\frac{1}{v^2} \vec{v} \times (\vec{v} + d\vec{v}). \quad (6.13)$$

Para encontrar la ecuación para la razón de precesión en el marco de referencia de Alice, se usa la ley de composición de velocidad [8], la cual para el caso más simple de movimiento a lo largo del eje x con velocidad V , está dado por

$$u'^x = \frac{u^x - V}{1 - \frac{u^x V}{c^2}}, \quad u'^y = \frac{u^y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^x V}{c^2}}, \quad u'^z = \frac{u^z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^x V}{c^2}},$$

en donde \vec{u} y \vec{u}' son las velocidades de algún objeto observado desde el marco de

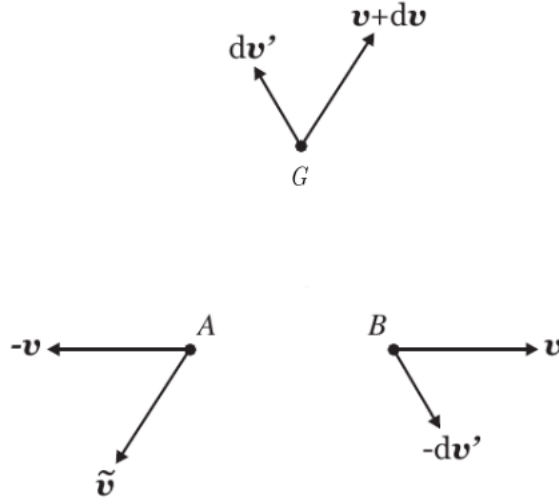


Figura 6.1. Diagrama de las velocidades mutuas entre Alice, Bob y el gato. Fuente: A.Dragan et. al. [5].

referencia en reposo y el marco de referencia en movimiento, respectivamente. Para una velocidad arbitraria \vec{V} del marco de referencia en movimiento, la transformación toma la forma

$$\vec{u}' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}(\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V}) - (\vec{V} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V})}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{c^2}}, \quad (6.14)$$

donde se asume que los marcos primado y no primado no rotan mutuamente. Ahora se seguirán dos pasos simple para expresar \vec{v}' de (6.13) en términos de \vec{v} y $d\vec{v}$. Primero se describe cómo los observadores A y B observan a G, y luego cómo los observadores B y G observan a A. En el primer paso se utiliza (6.14) para describir la transición del marco de referencia de A a B, lo cual involucra las siguientes sustituciones en (6.14): $\vec{V} \rightarrow \vec{v}$, $\vec{u} \rightarrow \vec{v} + d\vec{v}$, y $\vec{u}' \rightarrow d\vec{v}$. Después de dejar solo los términos de primer orden en $d\vec{v}$ se tiene que

$$d\vec{v} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(d\vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{v^2} \vec{v} \right) + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}}{v^2} \vec{v}. \quad (6.15)$$

En un segundo paso, se usa de nuevo (6.14) aplicada a la transición de B a G que involucra la siguiente sustitución en (6.14): $\vec{V} \rightarrow d\vec{v}'$, $u \rightarrow -\vec{v}$ y $\vec{u}' \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}$. E ignorando los términos de orden mayor en $d\vec{v}'$ se tiene que

$$\tilde{\mathbf{v}} \approx -\vec{v} + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{v}'}{c^2} \vec{v} - d\vec{v}'. \quad (6.16)$$

Sustituyendo (6.15) en (6.16), y lo obtenido en (6.13) y dividiendo ambos lados de la ecuación resultante por dt se obtiene

$$\vec{\Omega} = - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{v^2}. \quad (6.17)$$

Y recordando la definición

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.18)$$

Sustituyendo gamma de (6.18) en (6.17) se tiene

$$\vec{\Omega} = -(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{v^2} = -(\cosh \alpha - 1) \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{v^2}, \quad (6.19)$$

donde en la segunda igualdad se introduce la rapidez $\alpha = \tanh \beta$ [8].

Es importante recordar el resultado de §2.2.1: existe un isomorfismo entre el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ y el álgebra global conforme. Entonces la fase de Berry calculada en $SL(2, \mathbb{R})$ (6.10) es la misma fase de Berry para un sistema en el álgebra global conforme. En este sentido las fases de Berry en el álgebra global son precesiones de Thomas, ya que son isomorfas. Físicamente al aplicarle un campo magnético variable a un espín este va a precesar.

CONCLUSIONES

1. El grupo conforme es el grupo de transformaciones que preservan la geometría conforme de un espacio, es decir, las transformaciones preservan ángulos, en este caso del espacio de Minkowski. Las transformaciones conformes están compuestas por el grupo de Poincaré (traslación, rotación y boost), escala y transformaciones conforme especiales. En $d \geq 3$ dimensiones el grupo conforme es isomorfo al grupo $SO(d, 2)$, que es el grupo de isometrías del espacio de Anti de Sitter (AdS) en $d + 1$ dimensiones.
2. La condición para que exista una invarianza bajo transformaciones infinitesimales conformes en dos dimensiones son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas, por lo mismo en teorías conformes en dos dimensiones se trabaja en coordenadas complejas. En contraste con otros tipos de teorías conformes, las teorías de campos en dos dimensiones tienen álgebras de simetría infinitamente dimensionales. El álgebra de Witt es el álgebra de las transformaciones conformes infinitesimales, éstas transformaciones conformes locales solo necesitan ser holomorfas en un conjunto abierto; en general, pueden ser meromorfas. Mientras que las transformaciones conformes globales deben ser holomorfas en toda la esfera de Riemann. El álgebra de Virasoro es una extensión central del álgebra de Witt.
3. El álgebra global conforme es isomorfa al grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Este grupo está conformado por matrices reales de 2×2 , con determinante uno.
4. La fase de Berry es una diferencia de fase que se adquiere en el transcurso de un ciclo, cuando un sistema está sujeto a procesos cíclicos adiabáticos, que resulta de las propiedades geométricas del espacio de parámetros del hamiltoniano. Esta fase es una cantidad característica del sistema que depende únicamente de la trayectoria tomada en el espacio de parámetros. Se obtiene integrando la conexión de Berry a lo largo de la trayectoria cerrada en el espacio de parámetros o usando el Teorema de Stokes, también, se puede integrar la

curvatura de Berry sobre la superficie limitada por la trayectoria tomada en el espacio de parámetros.

5. Se puede investigar aspectos geométricos importantes de la fase de Berry, al estudiarla en representaciones de grupos. Se estudió la representación de la fase de Berry en el grupo $SU(2)$, ya que corresponde al ejemplo estándar de un sistema que manifiesta este fenómeno. Y la representación de la fase de Berry en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ debido a la existencia del isomorfismo de este grupo con el álgebra global conforme.
6. La precesión de Thomas es una corrección relativista aplicada a la precesión experimentada por el momento angular de un objeto, o el espín de una partícula elemental cuando se ha acelerado y su trayectoria no está sujeta a fuerzas gravitacionales. Matemáticamente corresponde a la composición de dos boost no colineales: un boost y una rotación espacial, que es mejor conocido como una rotación de Wigner.
7. La representación de la fase de Berry en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ corresponde a la precesión de Thomas del espín de una partícula que toma una trayectoria circular. Como el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo al álgebra global conforme, entonces la fase de Berry para este grupo también es la misma para el álgebra global conforme. Por lo mismo, la precesión de Thomas es isomorfa a una fase de Berry en el álgebra global conforme.

RECOMENDACIONES

1. Estudiar la fase de Berry en el álgebra de Virasoro y su correspondencia con la precesión de Thomas. Ya que las fases de Berry en el álgebra de Virasoro se pueden evaluar con exactitud, a pesar de vivir en un espacio de parámetros de dimensiones infinitas [11]. Como el álgebra de Virasoro describe simetrías asintóticas de la gravitación en el espacio Anti de Sitter en tres dimensiones (AdS-3), las fases debidas a estas transformaciones de simetría asintóticas que no pertenecen a este subgrupo de isometrías, se pueden ver como nuevas contribuciones gravitacionales a la precesión de Thomas. Y por extensión, a la simetría Bondi-Metzner-Sachs (BMS) en cuatro dimensiones, esto sugiere que se pueden asociar fases de Berry con gravitones blandos, o equivalentemente al vacío gravitacional [11].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Baggio, V. Niarchos y K. Papadodimas. Aspects of Berry Phase in QFT. *JHEP* 04(062), 2017.
- [2] R. Blumenhagen y E. Plauschinn E. Basics in Conformal Field Theory. *Lect. Notes Phys.* **779**: 5 –86, 2009.
- [3] S.M. Carrol. Lecture Notes on General Relativity. *Lect. Notes Phys.* 1997.
- [4] P. Di Francesco, P. Mathieu y D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. 1st ed. Springer. 1997.
- [5] A. Dragan y T. Odrzygóźdź. Half-page derivation of the Thomas precession. *American Journal of Physics*, **81**(8)631–632, 2013.
- [6] D.J Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2da edición, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 2005.
- [7] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3ra edición, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ. 1999.
- [8] C. W. Misner, K.S. Thorne y J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H, Freeman and Company, San Francisco CA. 1973.
- [9] B. J. Oblak. Berry phases on Virasoro orbits. *High Energ. Phys.* , **114** , 2017. [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2017\)114](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2017)114)
- [10] S. Pancharatnam. Generalized Theory of Interference, and Its Applications. Part I. Coherent Pencils., **1956** Proc. Indian Acad. Sci. A. 44: 247262.
- [11] J. D. Qualls, *Lectures on conformal field theory*, [hep-th/1511.04074v2], 2015.
- [12] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2da edición, Addison-Wesley, San Francisco CA. 1994.

- [13] D. Tong, (2016), *The Quantum Hall Effect*. University of Cambridge, 1.5 Berry Phase, 2016.
- [14] W.K. Tung. *Group Theory in Physics an introduction to Simmetry Principles, Group Representations, and special functions in Classical and Quantum Physics*. World Scientific Publishing Co., New Jersey, 1985.
- [15] D.G. Zill y P.D Chanahan. *Introducción al Análisis complejo con aplicaciones*. 2da edición, Tr. Ana E. García Hernández, Cengage Learning, México, 2009.