



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

INVARIANTES EN LA TEORÍA DE NUDOS

Billy Othmaro Quevedo Carranza

Asesorado por el Ph.D. Sergio Roberto López Permouth

Guatemala, Marzo de 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

INVARIANTES EN LA TEORÍA DE NUDOS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

BILLY OTHMARO QUEVEDO CARRANZA
ASESORADO POR EL PH.D. SERGIO ROBERTO LÓPEZ PERMOUTH

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, MARZO DE 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera
EXAMINADOR Lic. José Carlos Alberto Bonilla Aldana
EXAMINADOR Lic. Hugo Allan Garcia Monterrosa



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



Ref. D.DTG. 003-2019
Guatemala 25 de marzo de 2019

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **INVARIANTES EN LA TEORÍA DE NUDOS** presentado por el estudiante universitario **Billy Othmaro Quevedo Carranza**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.



MSc. Marcelo Ixquiac
Director

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

AGRADECIMIENTOS A:

Dios	Por darme la vida, por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera.
Mis Padres	Carlos Quevedo y Wilmara Carranza, por ser mi ejemplo a seguir y ser mi soporte en los momentos difíciles.
Mis hermanos	Hugo Quevedo y Wayory Quevedo, por su apoyo incondicional.
Mi asesor	Dr. Sergio López, por su apoyo en la elección y elaboración del presente trabajo.
Mis profesores	Por compartir sus conocimientos y ayudar a acrecentar mis conocimientos de matemática.
Mis amigos	Por compartir conmigo momentos dentro y fuera de clases.
Secretarias	Especialmente a Claudia, por su apoyo en los procesos de graduación.

ESTE TRABAJO SE LO DEDICO A:

Mi hermano

Victor Hugo Quevedo, por ser mi ejemplo a seguir en el ámbito científico y aunque ya no está conmigo, sé que me acompañó durante mi carrera.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE NUDOS	1
1.1. Nudos y enlaces	1
1.1.1. Nudos	1
1.1.2. Enlaces	6
1.2. Notación de Dowker y notación de Conway	9
1.2.1. Notación de Dowker	9
1.2.2. Notación de Conway	13
2. TIPOS DE NUDOS	21
2.1. Nudos tóricos	21
2.2. Nudos satélite	25
2.3. Nudos hiperbólicos	27
2.4. Nudos casi alternantes	32
3. INVARIANTES	35
3.1. Movimientos de Reidemeister	35
3.2. Tricolorabilidad	41
3.3. Número de puente	44
3.4. Número de cruces	46
3.5. Número de enlace	47
3.6. Número de desanudado	49

4. POLINOMIOS	51
4.1. Polinomio de Jones	51
4.2. Polinomios de Nudos Alternantes	56
4.3. El Polinomio de Alexander	64
4.4. Polinomio HOMFLY	76
CONCLUSIONES	81
RECOMENDACIONES	83
BIBLIOGRAFÍA	85

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Nudo trivial	1
1.2. Nudo trébol	2
1.3. Composición de nudos	3
1.4. Ejemplo de como no se realiza la composición de nudos	3
1.5. composición de un nudo con el nudo trivial	4
1.6. Nudo trébol orientado	5
1.7. Composición de dos nudos cuyas orientaciones coinciden	5
1.8. Composición de dos nudos cuyas orientaciones no coinciden	6
1.9. Nudo no anfiquiral	6
1.10. Enlaces de Whitehead	7
1.11. Anillos de Borromeo	7
1.12. Enlace trivial y enlace de Hopf	8
1.13. Tipos de cruces dada una orientación	8
1.14. Enlace con número de enlace 2	8
1.15. Nudo Alternante	9
1.16. Etiquetado de la figura 1.15	10
1.17. Formación de un nudo dada la notación de Dowker	11
1.18. Finalización de la figura 1.17	11
1.19. Ambigüedad en la notación de Dowker	11
1.20. Un nudo y su imagen de espejo con la misma notación de Dowker	12
1.21. Notación de Dowker para un nudo no alternante	12
1.22. Enredos	13
1.23. Enredos en un nudo	13
1.24. Enredos equivalentes	14
1.25. Nudo obtenido del enredo en la figura 1.24	14
1.26. Enredo ∞ y enredo 0	14
1.27. 3-enredo	15
1.28. -3 -enredo	15

1.29. Reflexión del 3-enredo	15
1.30. (3, 2)-enredo	16
1.31. Distintos ejemplos de enredos	16
1.32. Multiplicación de enredos	17
1.33. Suma de enredos	18
1.34. El nudo 8_5 tiene notación de Conway (3, 3, 2).	18
1.35. Nudos mutantes entre sí	19
1.36. Mutantes de Kinoshita-Terasaka	19
2.1. Nudo trébol en un toro	21
2.2. Meridianos y longitudes	22
2.3. Nudo trébol como (3, 2)-nudo tórico	22
2.4. Construcción (5, 3)-nudo tórico, paso 1	23
2.5. Construcción (5, 3)-nudo tórico, paso 2	23
2.6. Construcción (5, 3)-nudo tórico, paso final	23
2.7. El (3, 2)-nudo tórico es un (2, 3)-nudo tórico	24
2.8. Proyección del (4, 3)-nudo tórico	25
2.9. Nudo 2-incrustable	25
2.10. Un nudo K_1 dentro de un toro no anudado	26
2.11. Toro anudado como K_2	26
2.12. El Whitehead doble del nudo trébol	26
2.13. Un segundo Whitehead doble del nudo trébol	27
2.14. Cable de dos hilos del nudo trébol	27
2.15. Nudo satélite como composición de nudos	27
2.16. Nudo cable	28
2.17. Caminos entre puntos en H^3	29
2.18. Tetraedro en H^3	30
2.19. Algunos nudos con sus respectivos volúmenes hiperbólicos	30
2.20. Nudos con el mismo volumen hiperbólico	31
2.21. Mutantes con el mismo volumen hiperbólico	31
2.22. Calculando el volumen hiperbólico de un nudo	31
2.23. Nudo casi alternante	32
2.24. Proyección casi alternante del nudo trivial	33
2.25. Nudo alternante y su proyección casi alternante	33
2.26. Enlace 2-casi alternante	33
2.27. Nudo toroidalmente alternante	34

3.1. Fallo en la definición de isotopía	36
3.2. Representación poligonal del nudo trébol	37
3.3. Ejemplos de proyecciones no regulares	37
3.4. Δ -movimiento	38
3.5. Movimiento de Reidemeister tipo 1 (Ω_1)	40
3.6. Movimiento de Reidemeister tipo 2 (Ω_2)	40
3.7. Movimiento de Reidemeister tipo 3 (Ω_3)	40
3.8. Equivalencia de diagramas	41
3.9. Utilización de los movimientos de Reidemeister	41
3.10. Ejemplo de un arco	42
3.11. Tricolorabilidad en el nudo trébol	43
3.12. Coloración movimiento tipo 1	43
3.13. Coloración movimiento tipo 2	43
3.14. Coloración movimiento tipo 3	44
3.15. Otro ejemplo de tricolorabilidad de un nudo	44
3.16. Paso superior	45
3.17. Paso superior maximal	45
3.18. Nudo con número de puente 2	45
3.19. Nudos distintos con número de puente 2	46
3.20. Un nudo con número de cruce 7	46
3.21. Nudos distintos con el mismo número de cruce	47
3.22. Número de enlace con movimiento de tipo 2	48
3.23. Número de enlace con movimiento de tipo 3	48
3.24. Número de enlace del enlace de Hopf y de Whitehead	49
3.25. Número de desanudado del nudo trébol	49
3.26. Transformación de un nudo a un nudo trivial	50
4.1. Nudo con número de torsión 1	54
4.2. Enlace de Hopf orientado	56
4.3. Etiquetado de las regiones de un cruce	56
4.4. Etiquetado en un nudo	57
4.5. A-división	57
4.6. B-división	57
4.7. Un estado particular del nudo trébol	59
4.8. Estados del nudo trébol	59
4.9. Nudos alternantes no reducidos	60

4.10. A-regiones en gris y las B-regiones en Blanco	61
4.11. Separación de las B-regiones	62
4.12. Un nudo compuesto alternante	64
4.13. Notación del cruce y etiquetado de las regiones	65
4.14. Nudo trébol etiquetado	66
4.15. Indizado de regiones	67
4.16. Etiquetados en las regiones de un cruce	68
4.17. Regiones en el movimiento de tipo 1	71
4.18. Regiones en el movimiento de tipo 2	72
4.19. Regiones en el movimiento tipo 3	73
4.20. Bases del polinomio de Alexander	76
4.21. Bases para el polinomio HOMFLY	77
4.22. Unión dividible	78
4.23. Enlaces iguales vía el polinomio HOMFLY	78

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
S^1	es el círculo unitario
\mathbb{R}^3	es el conjunto de ternas ordenadas de números reales
$K_1 \simeq K_2$	K_1 es equivalente a K_2
$K_1 \# K_2$	composición de los nudos K_1 y K_2
\overline{K}	anverso del nudo K
$K_{m,n}$	nudo tórico de tipo (m, n)
\mathbb{H}^3	espacio hiperbólico tridimensional
∂D	frontera de D
Ω_i	i -ésimo movimiento de Reidemeister
$b(K)$	número de punte del nudo K
$c(K)$	número de cruces del nudo K
$e(K)$	número de enlace del nudo K
$u(K)$	número de desanudado del nudo K
$\langle K \rangle$	soporte polinomial del nudo K
$w(K)$	número de torsión del nudo K
$X(K)$	X -polinomio del nudo K
$V(K)$	polinomio de Jones del nudo K
$a(S)$	cantidad de A-divisiones en el estado S
$b(S)$	cantidad de B-divisiones en el estado S
$ S $	cantidad de enlaces triviales en el estado S
$M_{p,q}(K)$	matriz de Alexander del nudo K
$\Delta_{p,q}(K)$	determinante de la matriz de Alexander del nudo K
$\Delta_K(t)$	polinomio de Alexander del nudo K
$P(K)$	polinomio HOMFLY del nudo K
$K_1 \cup K_2$	unión dividible de los nudos K_1 y K_2

OBJETIVOS

General

Demostrar algunos de los invariantes más importantes para la teoría de nudos.

Específicos

1. Identificar los conceptos fundamentales de la teoría de nudos.
2. Estudiar los tipos de nudos relevantes en la teoría de nudos.
3. Presentar los invariantes topológicos para nudos.
4. Presentar los invariantes algebraicos (polinomios) para nudos.

INTRODUCCIÓN

Las palabras nudos, enlaces y trenzas designan objetos cotidianos que el hombre ha utilizado desde los tiempos más antiguos. Su utilidad práctica no necesita explicación. Es bien conocido que el hombre ha ideado distintas clases de nudos para sus necesidades, a los que han denominado con nombre propio. También son utilizados como adornos ornamentales e incluso como sistema de numeración. En *La crónica de Perú* escrita por Pedro de Cieza, se describe con asombro como los Incas utilizaban largas cuerdas con nudos para llevar sus cuentas y calcular sus transacciones comerciales.

Sin embargo, el significado y estudio de nudos, trenzas y enlaces como objetos matemáticos es relativamente reciente. Probablemente el primer científico que utilizó un concepto directamente relacionado con lo que hoy entendemos por enlace matemático fue Carl Friedrich Gauss al considerar espiras enlazadas y utilizar su número de enlace en la fórmula que describe el campo magnético inducido. No obstante fue hasta el siglo XIX cuando los nudos empezaron a ganar importancia ya que Kelvin propuso que los átomos eran vórtices tubulares de éter anudados. Es por esta teoría que muchos matemáticos y físicos de la época se encargaron del estudio de la clasificación de nudos.

Pese a que la teoría de Kelvin fue refutada, dejó la puerta abierta para lo que hoy conocemos como la teoría de nudos. Uno de los principales representantes de este ramo fue Tait quien realizó algunos descubrimientos empíricos los cuales fueron llamados las conjeturas de Tait, dichas conjeturas resistieron todo intento de demostración hasta que a finales de los 80's fue descubierto el polinomio de Jones, el primer invariante que resultó ser lo suficientemente poderoso para demostrar la mayoría de las conjeturas de Tait fácilmente.

Con el paso de los años se han encontrado nuevas aplicaciones de la teoría de nudos a otras disciplinas, tales como el estudio de la molécula de ADN, mecánica estadística, biología molecular, entre otras.

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE NUDOS

En el presente capítulo se presentan las definiciones y teoremas básicos en el estudio de la teoría de nudos. Se realizan las demostraciones que son cruciales para el contenido a desarrollar más adelante.

1.1. Nudos y enlaces

1.1.1. Nudos

Para el estudio formal de lo que se comprende como un nudo se requiere plantear una definición matemática que concuerde con el modelo físico. Así la definición formal es la siguiente:

Definición 1.1. El subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un **nudo** si existe un homeomorfismo del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^3 cuya imagen es K .

El ejemplo más simple de un nudo es la circunferencia S^1 vista en \mathbb{R}^3 , este nudo es conocido como **no nudo** o **nudo trivial**, figura 1.1. Otro ejemplo de un nudo simple es el **nudo trébol**, figura 1.2.

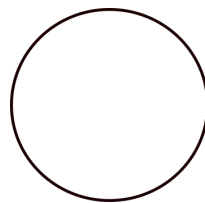


Figura 1.1. Nudo trivial. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

El primer interrogante que surge al hablar sobre el nudo trivial y el nudo trébol es: ¿cómo saber que efectivamente estos dos nudos son distintos? Para resolver a esta pregunta primero se debe definir cuando dos nudos son el mismo nudo.

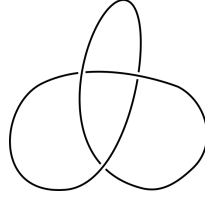


Figura 1.2. Nudo trébol. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Definición 1.2. Sean K_1, K_2 nudos, diremos que son **equivalentes** o el mismo nudo si existe una función continua $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $H(K_0, 0) = K_0$, $H(K_0, 1) = K_1$ y además H es inyectiva en el intervalo $[0, 1]$. A H le llamaremos una **isotopía espacial** de K_1 en K_2 .

Esto quiere decir que dos nudos son equivalentes si podemos transformar uno en el otro de forma continua, es decir, sin necesitar que se corte o rompa el nudo original. Denotaremos como $K_1 \simeq K_2$ al hecho que K_1 sea equivalente a K_2 .

Existen varias formas de poder visualizar a los nudos para su estudio, una de ellas es ver a un nudo como una función parametrizada en \mathbb{R}^3 , es decir, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde $0 < t < 1$ y $f(0) = f(1)$. Esta forma de ver a un nudo es útil si se tiene algún interés en su posición en el espacio¹, pero para la teoría a estudiar más adelante es conveniente olvidarnos de la posición del nudo en el espacio, haciendo uso de la siguiente definición:

Definición 1.3. Un **diagrama de nudo** es la proyección del nudo en \mathbb{R}^2 .

Aunque el nudo original no posea auto-intersecciones al proyectar dicho nudo en el plano si pueden aparecer auto-intersecciones, por ello indicamos cual hebra pasa por arriba y cual por abajo dibujando de forma discontinua la hebra que pasa por abajo y de forma continua la hebra que pasa por arriba.

Definición 1.4. Un **cruce** es el punto donde el diagrama de nudo tiene una auto-intersección.

Por ejemplo el nudo trivial tiene 0 cruces mientras que el nudo trébol posee 3 cruces, ver figuras 1.1 y 1.2.

Definición 1.5. Un nudo es llamado **dócil** si su diagrama posee una cantidad finita de cruces. En caso contrario es llamado **nudo salvaje**.

¹La posición del nudo en el espacio es un tema de interés en la teoría de nudos geométrica.

Para la simplificación de la teoría en ocasiones, es conveniente, trabajar con un tipo particular de nudo y luego generalizarlo. Uno de los tipos más interesantes y útiles de nudos es el nudo alternante.

Definición 1.6. Un nudo es llamado **alternante** si en su diagrama las hebras van alternando entre arriba y abajo al recorrer el nudo en una dirección fija.

Al igual que muchos de los objetos matemáticos los nudos pueden operarse entre ellos para formar un nuevo nudo.

Definición 1.7. Dados dos diagramas de nudos, removemos un pequeño arco de cada diagrama y conectamos los cuatro puntos finales, a pares, con nuevos arcos formando un nuevo nudo, este nuevo nudo es conocido como la **composición** de los nudos iniciales. Si tenemos dos nudos J y K su composición la denotamos como $J\#K$.

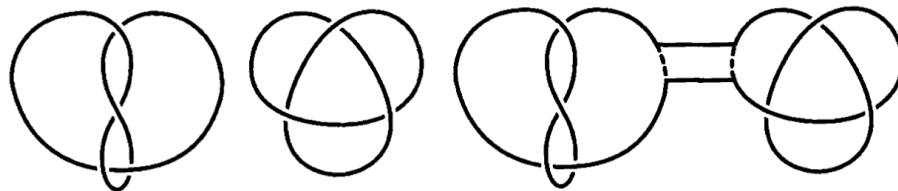


Figura 1.3. Composición de nudos. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Para la formación de un nudo compuesto hay algunas consideraciones a tomar en cuenta: los nudos con los cuales se desea realizar la composición no deben estar superpuestos, los arcos que se eligen para remover no deben afectar los cruces de los nudos originales y los arcos introducidos para formar el nuevo nudo no deben formar nuevos cruces con los nudos originales.

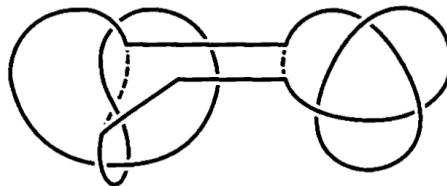


Figura 1.4. Ejemplo de cómo no se realiza la composición de nudos. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Notamos que esta composición falla tanto al quitar un cruce de uno de los nudos originales como en introducir dos nuevos cruces en este mismo nudo.

Definición 1.8. Un nudo es llamado **compuesto** si puede ser expresado como la composición de dos nudos, donde ninguno de los nudos por los cuales está formado son el nudo trivial y los nudos por los cuales está formado son llamados **nudos factor**.

El pedir que ninguno de los nudos factor sea el nudo trivial es porque el nudo trivial bajo la composición de nudos es el análogo al 0 en los reales bajo la suma, es decir, si denotamos al nudo trivial como K y tomamos un nudo cualesquiera J tendríamos $J\#K = K\#J = J$. Entonces esto indicaría que cualquier nudo es un nudo compuesto.

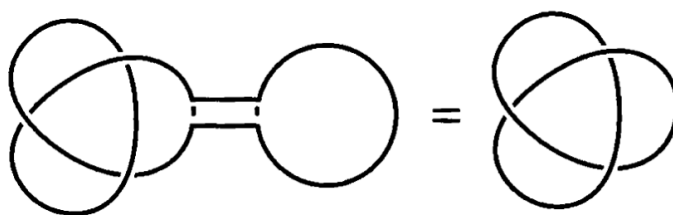


Figura 1.5. Composición con el nudo trivial. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Definición 1.9. Un nudo que no es composición de cualesquiera dos nudos no triviales es llamado **nudo primo**.

Para el trabajo con nudos compuestos es necesario resolver la siguiente pregunta ¿El nudo trivial es compuesto? En la figura 1.1 podríamos pensar que no es un nudo compuesto, pero tal vez existe otra forma de proyectar el nudo trivial que contradiga esto.

Proposición 1.1. *El nudo trivial es un nudo primo.*

Demostración. Supongamos que el nudo trivial es un nudo compuesto, es decir, es la composición de por lo menos dos nudos distintos del nudo trivial. Sabemos que podemos pensar en cualquier nudo como la composición del nudo trivial con el mismo nudo, entonces como estamos suponiendo que el nudo trivial es compuesto tenemos que cualquier nudo puede ser visto como la composición de él mismo con los componentes del nudo trivial y esto implicaría que cualquier nudo es compuesto, lo cual es imposible. \square

Este resultado es análogo a pensar en el 1 en los naturales con el producto, es decir, la única forma de realizar la composición de dos nudos y esta nos regrese el

nudo trivial es que los nudos con los que se realiza la composición son equivalentes al nudo trivial.

Pero a diferencia de los números naturales donde el orden de los factores no altera el producto, en la composición de nudos es posible poder formar distintos nudos compuestos del mismo par de nudos. Esto es posible al elegir distintos arcos que suprimir o darle otra orientación al nudo.

Definición 1.10. Una **orientación** es una elección para viajar a través del diagrama del nudo. Esta dirección es denotada en el diagrama por flechas. A un nudo provisto de una orientación le llamaremos **nudo orientado**.

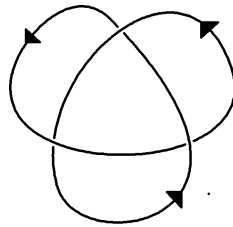


Figura 1.6. Nudo trébol orientado. Fuente: Elaboración propia en Inkscape.

Entonces para cualesquiera par de nudos orientados J y K , existen dos posibilidades de composición: la orientación sobre J coincide con la orientación sobre K en $J\#K$, resultando en una orientación para $J\#K$, figura 1.7; o la orientación sobre J y sobre K no coinciden en $J\#K$, figura 1.8. Todas las composiciones de dos nudos cuya orientación coincide producen el mismo nudo, análogamente para las composiciones cuya orientación no coincide.

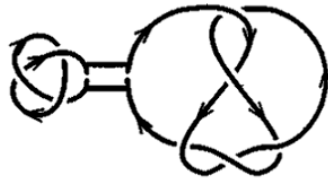


Figura 1.7. Composición de dos nudos cuyas orientaciones coinciden. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Es posible que los nudos compuestos cuyas orientaciones coinciden sean los mismos que los nudos compuestos cuyas orientaciones no coinciden, para ello es necesario el concepto de nudo invertible.

Definición 1.11. Diremos que un nudo orientado es **invertible** si es equivalente a sí mismo pero con la orientación en sentido contrario.

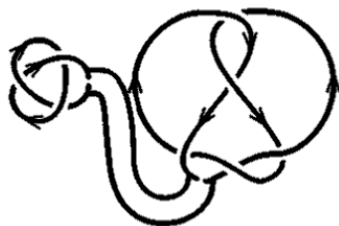


Figura 1.8. Composición de dos nudos cuyas orientaciones no coinciden. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Si realizamos la composición de un nudo orientado invertible con un nudo orientado cualesquiera tendríamos que su composición cuando la orientación concuerda y cuando la orientación no concuerda es la misma.

Definición 1.12. El **anverso** de un nudo K es la imagen de espejo de K y es denotado por \overline{K} .

Un nudo cualesquiera puede o no ser equivalente a su anverso.

Definición 1.13. Un nudo que es equivalente a su anverso es llamado **anfiquiral**².

Un ejemplo de un nudo que no es anfiquiral es el nudo trébol debido a que no es equivalente a su anverso, figura 1.9.

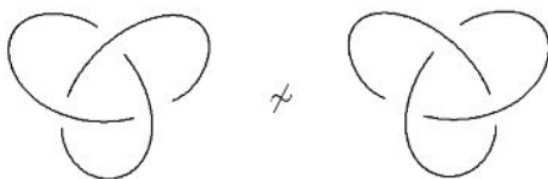


Figura 1.9. Nudo no anfiquiral. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

La prueba de que efectivamente este nudo no es anfiquiral la realizaremos más adelante.

1.1.2. Enlaces

Hasta el momento hemos restringido nuestra atención a los nudos, que puede ser visto como una cuerda anudada, es decir, una cuerda entrelazada consigo misma y unida en sus extremos. Pero no hay razones para decir que se puede trabajar con una sola cuerda.

²El termino anfiquiral es comúnmente usado por matemáticos, pero algunos químicos suelen usar el termino **aquiral** en referencia a lo mismo.

Definición 1.14. Un **enlace** es una colección finita de nudos posiblemente enlazados entre sí. Análogo a lo conocido para nudos decimos que dos enlaces son el mismo o son **equivalentes** si podemos deformar uno en el otro de manera continua.

Algunos ejemplos de enlaces simples conocidos son los llamados **enlaces de Whitehead**, figura 1.10. Estos enlaces están formados por dos bucles anudados.



Figura 1.10. Enlaces de Whitehead. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Definición 1.15. Llamaremos **componente** de un enlace a cada bucle anudado (nudo) del cual esta formado el enlace.

Podríamos considerar un nudo como un enlace de un solo componente. Dado que los enlaces de Whitehead están hechos de dos bucles anudados diremos que es un enlace con dos componentes. Otro ejemplo de enlace simple es el llamado **anillos de Borromeo**.

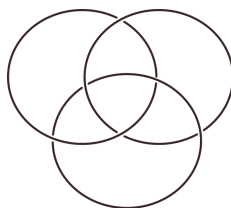


Figura 1.11. Anillos de Borromeo. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Definición 1.16. Un enlace es llamado **separable** si los componentes del enlace pueden ser deformados de modo que se encuentren en diferentes lados del plano en el espacio tridimensional.

Existe una forma rápida de decir que dos enlaces no son el mismo, simplemente verificando el número de componentes que poseen. Pero no siempre trabajaremos con enlaces con diferente número de componentes, estamos interesados en saber cuando dos enlaces de igual número de componentes son distintos.

Un ejemplo inicial está dado por los enlaces más simples de dos componentes, figura 1.12, el primero conocido como **enlace trivial** y el segundo **enlace de Hopf**.

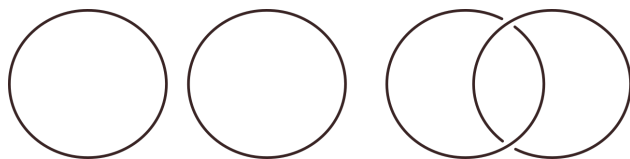


Figura 1.12. Enlace trivial y enlace de Hopf. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Estos enlaces difieren el uno del otro debido a que el primero es dividible mientras que el segundo no.

Sean M y N dos componentes en un enlace y elegimos una orientación en cada uno de ellos. Entonces a cada cruce entre las dos componentes se le puede asignar un $+1$ o un -1 dependiendo del caso (figura 1.13).

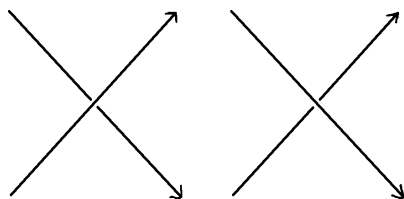


Figura 1.13. Tipos de cruces dada una orientación. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

En la figura 1.13, si tenemos un cruce del primer tipo (izquierda) se le asigna un -1 mientras que para el segundo tipo (derecha) se le asigna un $+1$.

Definición 1.17. Sea L un enlace orientado y sea M el conjunto de todos los cruces en L con su respectivo valor, entonces el **número de enlace** de L es la suma de todos los valores de los cruces en M dividido entre 2.

Por ejemplo el enlace trivial tiene número de enlace 0, el enlace Hopf tiene número de enlace 1 o -1 dependiendo de la orientación. Otro ejemplo es el mostrado en la figura 1.14.

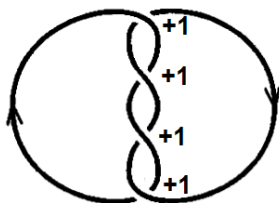


Figura 1.14. Enlace con número de enlace 2. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Definición 1.18. Un enlace es llamado **alternante** si en su diagrama las hebras van alternando entre arriba y abajo al recorrer el nudo en una dirección fija.

Notemos que esta definición es análoga a la de nudo alternante, y así como esta algunas definiciones o teoremas son similares tanto en nudos como en enlaces.

1.2. Notación de Dowker y notación de Conway

1.2.1. Notación de Dowker

La notación de Dowker es una forma simple de poder describir un diagrama de nudo. Iniciaremos dando dicha notación para un nudo alternante. Supongamos que tenemos un diagrama de un nudo, para encontrar su notación de Dowker realizamos el siguiente procedimiento:

1. Elegimos una orientación para el nudo.
2. Nos posicionamos en cualquier cruce y lo etiquetamos con un 1.
3. En el cruce que nos encontramos tomamos la hebra que pasa por debajo y empezamos a recorrer el nudo.
4. Al encontrar un nuevo cruce lo etiquetamos con 2.
5. Siguiendo el mismo camino por el que íbamos, etiquetamos el siguiente cruce con 3.
6. Repetir el procedimiento y parar hasta que cada cruce posea dos etiquetas.

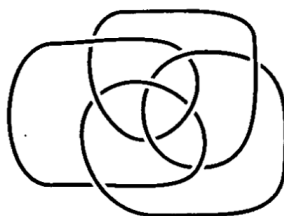


Figura 1.15. Nudo Alternante. Fuente: tomado de [1, Cap. 2].

Notemos que el etiquetado le asigna a cada cruce un número par y uno impar, figura 1.16. Así podemos pensar en este etiquetado como una asignación de parejas de números entre 1 y $2n$ con n el número de cruces. Para el caso de nuestro ejemplo obtenemos la tabla 1.1.

Notemos que los números impares están ordenados de forma ascendente mientras que los pares están desordenados, así pues podríamos simplificar esto y simplemente escribir (14, 12, 10, 2, 18, 16, 8, 6, 4) y de esta forma guardar la información

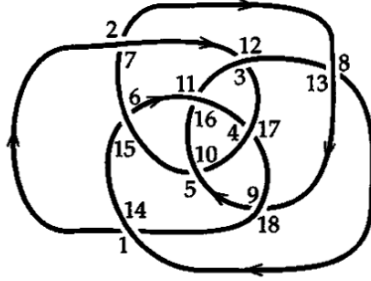


Figura 1.16. Etiquetado de la figura 1.15. Fuente: tomado de [1, Cap. 2].

1	3	5	7	9	11	13	15	17
14	12	10	2	18	16	8	6	4

Tabla 1.1. Correspondencia de números en figura 1.16. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

completa debido a que por el orden de los impares sabemos que 1 esta emparejado con el 14, el 3 con el 12 y así sucesivamente.

Así para un diagrama de nudo podemos obtener una sucesión de enteros pares, donde la cantidad de enteros pares debe coincidir con el numero de cruces del nudo. Para que esta forma de representación funcione se debe comprobar que en efecto a cada cruce le corresponde un número par y uno impar al etiquetarlos, siendo útil la siguiente definición:

Definición 1.19. Diremos que un conjunto formado por pares de números es **dibujable** si para cualesquiera dos ciclos definidos por un intervalo dado deben compartir uno o más segmentos, o intersectarse en un numero par de puntos sin incluir puntos iniciales y finales.

Proposición 1.2. Siguiendo el procedimiento anterior para encontrar la notación de Dowker, a cada cruce le corresponde un número par y uno impar.

Demostración. Consideremos un nudo dibujable en el cual existen i, j etiquetas de un cruce de dicho nudo tales que tanto i como j son impares o pares, entonces tendríamos dos ciclos, digamos $i, i + 1, \dots, j - 1, j$ y $j, j + 1, \dots, 2n - 1, 2n, 1, \dots, i$ que no comparten ningún segmento simplemente se cruzan en un número par de puntos incluidos los puntos iniciales y finales. Entonces tendríamos un conjunto de pares de números no dibujable, contradiciendo nuestra hipótesis. \square

Sabemos que dado un diagrama de nudo podemos encontrar su notación de Dowker, ahora supongamos que queremos obtener el diagrama del nudo dada la notación de Dowker. Veremos este procedimiento utilizando el nudo (8, 10, 12, 2, 14, 14, 6, 4).

Iniciamos dibujando el primer cruce y etiquetándolo con 1 y 8. Extendemos la hebra que pasa por debajo del nudo y dibujamos el siguiente cruce, al cual le corresponde la etiqueta 2 y 7. Debido a que el nudo es alternante sabemos que la hebra que le corresponde al dos es una hebra que pasa por arriba. Seguimos este procedimiento hasta llegar a un número cuya etiqueta ya esta colocada, cuando llegamos a dicho número conectamos el el cruce en el cual nos encontramos con el que sigue (el número que ya estaba etiquetado), como se ve en la figura 1.17.

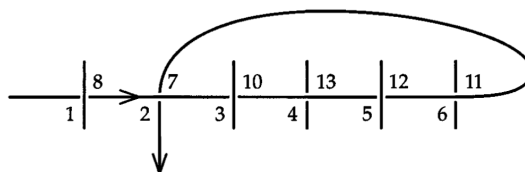


Figura 1.17. Formación de un nudo dada la notación de Dowker. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Continuamos con este procedimiento. Si encontramos una etiqueta no colocada con anterioridad simplemente tendríamos que agregar un nuevo cruce y etiquetarlo como corresponde, obteniendo el nudo como se quiere, figura 1.18.

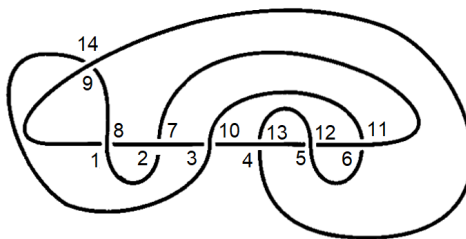


Figura 1.18. Finalización de la figura 1.17. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Notemos que el procedimiento antes descrito es ambiguo, debido a las elecciones que se deben tomar de como formar los arcos en el nudo. Nuestras elecciones nos pueden llevar a nudos distintos, por ejemplo la sucesión (4, 6, 2, 10, 12, 8) puede representar dos nudos distintos como se muestra en la figura 1.19.

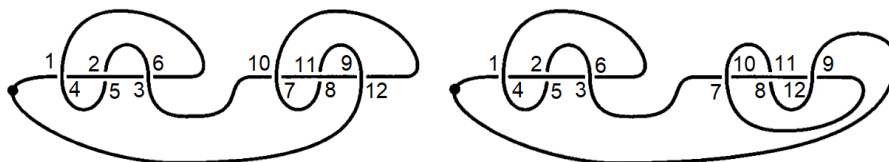


Figura 1.19. Ambigüedad en la notación de Dowker. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Notemos que estos dos nudos son nudos compuestos, y esto se ve reflejado en el hecho que la sucesión $(4, 6, 2, 10, 12, 8)$ es realmente un corrimiento de los números $4, 6, 2$. Es decir, cuando la permutación de los números pares puede ser descompuesta en dos subpermutaciones separadas el resultado es un nudo compuesto (asumiendo que cada factor sea un nudo no trivial). Sin embargo, si nos limitamos a sucesiones de números pares que no puedan ser divididos en subpermutaciones, el resultado será un nudo particular o su imagen de espejo.

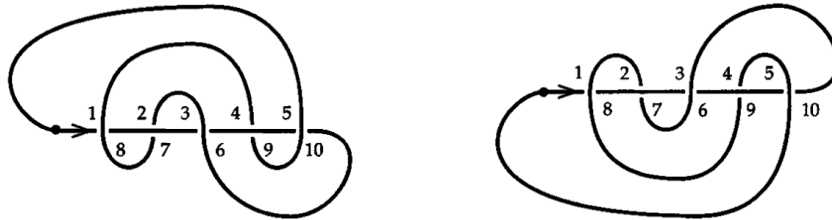


Figura 1.20. Un nudo y su imagen de espejo con la misma notación de Dowker. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

En particular para un nudo anfiquiral la notación de Dowker nos produce un único nudo. Recordemos que el procedimiento explicado con anterioridad esta hecho para nudos alternantes, pero este mismo procedimiento puede ser extendido a nudos que no son alternantes. Añadimos signos $+$ y $-$ en nuestra sucesión de números pares y modificando las reglas como sigue: El etiquetado se hace exactamente de la misma manera, pero si el entero par es asignado a un cruce que pasa por arriba colocaremos el signo $+$ precediendo a la etiqueta, mientras que si el número par es asignado a un cruce que pasa por abajo colocaremos el signo $-$ precediendo a la etiqueta.

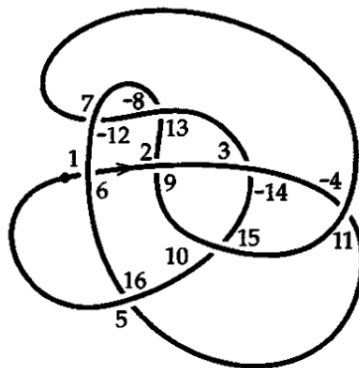


Figura 1.21. Notación de Dowker para un nudo no alternante. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Entonces tendríamos que la notación de Dowker para el nudo de la figura 1.21

es $(+6, -14, +16, -12, +2, -4, -8, 10)$. La notación de Dowker nos permite obtener diagramas de nudos al tener una simple sucesión de números pares. En particular, supongamos que queremos intentar clasificar los nudos de 14 cruces, el número de sucesiones de 14 números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 es $14!$, que es alrededor de 87 billones. Además podemos colocar $+$ o $-$ antes de cada número obteniendo así otro factor de 2^{14} .

1.2.2. Notación de Conway

Esta notación es importante debido a que ha sido utilizada para probar numerosos resultados y además, recientemente, ha sido aplicada en los resultados en ADN concernientes a la teoría de nudos, como se puede observar en [20]. Esta notación es particularmente útil en los cálculos que involucran lo que llamaremos **enredo**.

Definición 1.20. Un **enredo** en el diagrama de un nudo o enlace es una región en el diagrama que se puede rodear por un círculo tal que el nudo o enlace cruza al círculo exactamente 4 veces, los cuatro puntos de intersección son conocidos como los **puntos finales** del enredo.

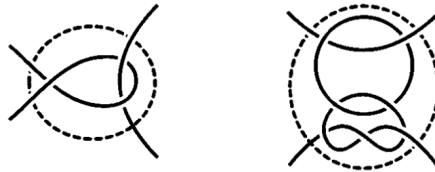


Figura 1.22. Enredos. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Pensaremos en los cuatro puntos donde el enredo cruza al círculo como las cuatro direcciones de una brújula NO , NE , SO , SE . En un nudo o enlace los enredos no necesariamente son únicos, es decir, en un mismo nudo o enlace podemos construir distintos bloques de enredos, figura 1.23.

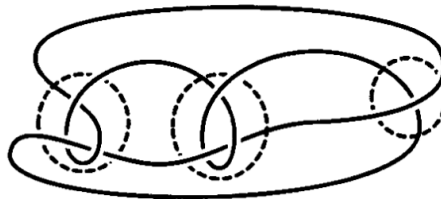


Figura 1.23. Enredos en un nudo. Fuente: tomada de [1, Cap. 2]

Definición 1.21. Diremos que dos enredos son **equivalentes** si podemos transformar uno en el otro de forma continua mientras los cuatro puntos que intersectan al círculo permanecen fijos y además al realizar los movimientos el enredo no sale del círculo, figura 1.24.



Figura 1.24. Enredos equivalentes. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Notemos que dado un enredo podemos formar un nudo simplemente uniendo a pares los puntos finales, por ejemplo tomando el primer enredo de la figura 1.24 podemos obtener el nudo de la figura 1.25.



Figura 1.25. Nudo obtenido del enredo en la figura 1.24. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Entonces podemos decir que dos nudos son equivalentes cuando enredos correspondientes sean equivalentes. Uno de los enredos más simples está formado simplemente por dos cadenas verticales, figura 1.26 (imagen izquierda), conocido como el **enredo** ∞ . Análogamente tenemos un enredo formado por dos cadenas horizontales, figura 1.26 (imagen derecha), conocido como el **enredo** 0.

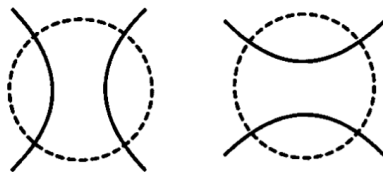


Figura 1.26. Enredo ∞ y enredo 0. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

También podemos formar enredos de la siguiente manera: consideremos dos trozos de cuerda colocados de manera horizontal uno frente a otro, si enrollamos una cantidad n de veces las cuerdas entre ellas mismas formamos un enredo llamado el **n -enredo**, por ejemplo para el caso de $n = 3$ obtenemos la figura 1.27.

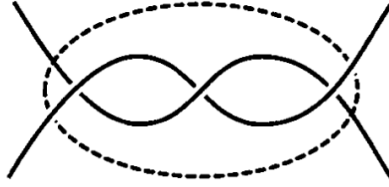


Figura 1.27. 3-enredo. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

De igual manera al realizar el procedimiento anterior, pero si enrollamos las cuerdas en sentido contrario obtenemos un enredo similar conocido como el $-n$ -enredo, nuevamente tomando el caso $n = 3$ obtenemos la figura 1.28.

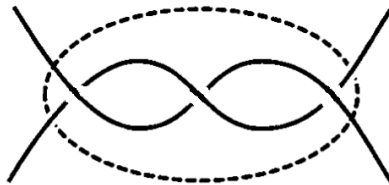


Figura 1.28. -3 -enredo. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Construiremos enredos más complicados a partir del 3-enredo. Primero podemos formar un enredo tal que sea la reflexión del 3-enredo respecto a la diagonal formada a partir de los puntos NO y SE . Notemos que los dos puntos finales del enredo que pertenecen a la diagonal se mantienen fijos cuando realizamos la reflexión, mientras que los puntos finales en el enredo que no pertenecen a la diagonal son intercambiados, figura 1.29.

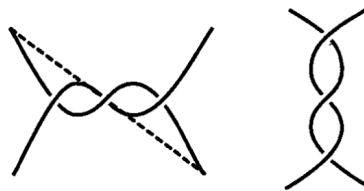


Figura 1.29. Reflexión del 3-enredo. Fuente: tomada de [1, Cap.2].

También podemos considerar la unión o concatenación de dos enredos, por ejemplo tomemos el enredo de la figura 1.29 y juntemos sus puntos finales con los puntos finales del 2-enredo, así formamos el $(3, 2)$ -enredo, figura 1.30.

Dado que podemos realizar distintas operaciones con los enredos, podemos obtener una gran cantidad de enredos distintos, algunos ejemplos se presentan en la figura 1.31.

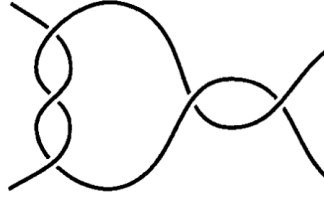


Figura 1.30. (3,2)-enredo. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

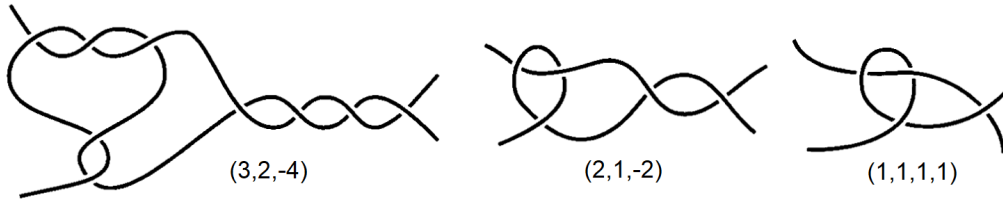


Figura 1.31. Distintos ejemplos de enredos. Fuente: tomada de [1, Cap.2].

Definición 1.22. A cualquier enredo que puede ser construido con el procedimiento anterior es llamado un **enredo racional**.

Notemos que si un enredo racional es representado por un número par de enteros, podemos pensar en construirlo simplemente iniciando con dos cuerdas verticales (el enredo ∞) y luego girar los dos puntos finales inferiores uno alrededor del otro un cierto número de veces, mientras los puntos finales superiores permanecen fijos. También podríamos enrollar los dos puntos finales derechos mientras los izquierdos se mantienen fijos.

Similarmente, si el enredo racional es representado por un número impar de enteros, podemos construirlo iniciando con dos cuerdas horizontales (el enredo 0) y realizar un procedimiento similar al del caso par.

Consideremos un enredo racional dado por (a_1, a_2, \dots, a_n) , donde a_i es un entero para cualquier subíndice i , existe una forma de representar dicho enredo de una forma más simple, siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Tomemos el primer entero a_1 y consideremos la fracción $\frac{1}{a_1}$.
2. A la fracción obtenida en el paso anterior le sumamos el siguiente entero de la sucesión, a_2 , obteniendo $a_2 + \frac{1}{a_1}$.
3. Lo obtenido en el paso anterior lo consideramos el denominador de una nueva fracción cuyo numerador es 1 obteniendo $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}$.
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta no tener números en la sucesión.

Por ejemplo, consideremos el enredo $-2 \ 3 \ 2$ entonces obtenemos $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}}$.

Definición 1.23. La fracción obtenida del procedimiento anterior es conocida como la **fracción continua** asociada a un enredo.

Notemos que al operar la fracción continua de un enredo, este se transforma en un sólo número racional. Es decir, a cada enredo se le puede asignar un número racional que lo represente. Tomemos el enredo usado como ejemplo anteriormente, tenemos lo siguiente:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Así pues tenemos que $\frac{12}{5}$ es el racional asociado al enredo $-2 \ 3 \ 2$.

Proposición 1.3. *Dos enredos racionales son equivalentes si y sólo si sus respectivos números racionales asociados son el mismo.*

Demostración. Consultar [7, Cap. 12]. □

Definición 1.24. Un **enlace racional** es el enlace que resulta de cerrar los puntos finales de un enredo racional.

Por ejemplo el nudo ocho es un nudo racional, el enredo que genera a dicho nudo es el enredo $2 \ 2$. Podemos usar la notación para enredos racionales para denotar al correspondiente nudo o enlace racional. Llamaremos a esta notación la **notación de Conway**.

Podemos usar los enredos racionales para construir enredos más complicados, para ello definiremos una forma de “multiplicar” dos enredos para obtener uno nuevo.

Definición 1.25. Sean K_1 y K_2 dos enredos, consideremos la reflexión del enredo K_1 con respecto a la diagonal que pasa por los puntos NO y SE . Entonces unimos los extremos del enredo resultante con K_2 y obtenemos un nuevo enredo llamado **multiplicación** de K_1 y K_2 .

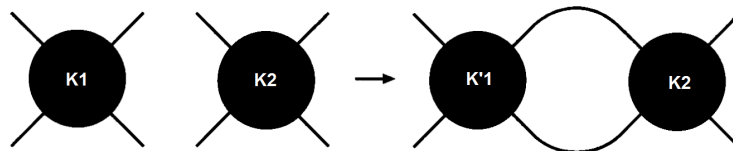


Figura 1.32. Multiplicación de enredos. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Podemos pensar que el enredo racional $3\ 2$ se forma multiplicando los enredos 3 y 2 . Notemos que la multiplicación de enredos racionales nos da un enredo racional, es más si realizamos la multiplicación de cualquier enredo con el enredo 0 el resultado es la reflexión del enredo original respecto a la diagonal que pasa por los puntos NO y SE .

Definición 1.26. Sean K_1 y K_2 dos enredos, la **suma** de estos enredos es la concatenación o unión de los enredos.

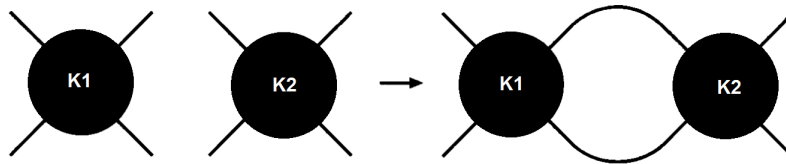


Figura 1.33. Suma de enredos. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Si multiplicamos cada enredo de una sucesión de enredos por el enredo 0 y los sumamos entre sí, denotamos el enredo resultante por la sucesión de números que correspondían a los enredos originales, pero ahora separados por comas. Por ejemplo, en la figura 1.34 se muestra el nudo 8_5 , este enredo es escrito como $3*0 + 3*0 + 2*0$ o simplemente $(3, 3, 2)$.

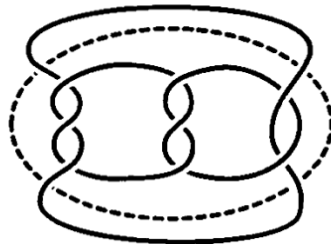


Figura 1.34. El nudo 8_5 tiene notación de Conway $(3, 3, 2)$. Fuente: tomada de [1, Cap.2].

Definición 1.27. Un nudo obtenido de un enredo representado por un número finito de enteros separados por comas es llamado nudo **pretzel**.

Definición 1.28. Diremos que un enredo es **algebraico** si puede ser obtenido mediante operaciones de suma y multiplicación de enredos racionales. Análogamente un enlace es llamado **algebraico**³ si es un enlace formado de enredos algebraicos.

Mientras discutimos acerca de los enredos, vamos a mencionar otra forma de obtener nudos.

³En ocasiones un enlace algebraico también es llamado un **enlace arborescente**.

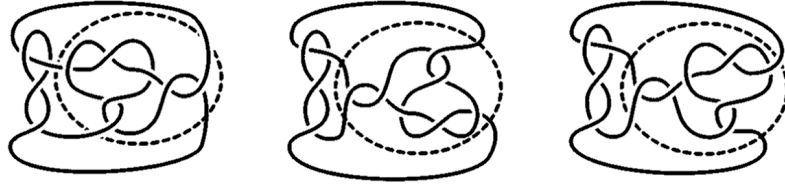


Figura 1.35. Nudos mutantes entre sí. Fuente: tomada de [1, Cap. 2].

Definición 1.29. Sea K un nudo dado tal que esta formado por dos enredos, formamos un nuevo nudo cortando a lo largo de los 4 puntos finales del segundo enredo, rotando el segundo enredo y pegando nuevamente los puntos finales. El nudo resultante es conocido como una **mutación** del nudo original. Figura 1.35.

También ponemos formar nudos mutantes reflejando el enredo en lugar de rotarlo.

Uno de los nudos mutantes más conocidos son los llamados **mutantes de Kinoshita-Terasaka**.

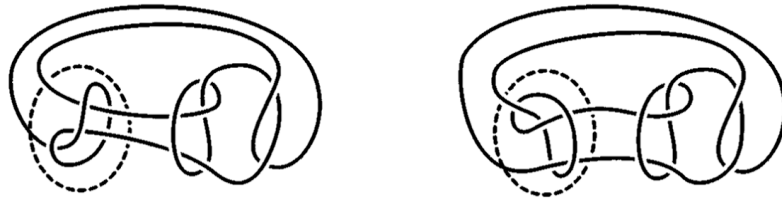


Figura 1.36. Mutantes de Kinoshita-Terasaka. Fuente: tomada de [1, Cap. 2]

2. TIPOS DE NUDOS

En el presente capítulo se estudiarán algunas características de los nudos que permitirán dar una primera clasificación de los nudos dividiéndolos en tres subconjuntos: nudos tóricos, nudos satélite y nudos hiperbólicos.

2.1. Nudos tóricos

Este tipo de nudos no solo son interesantes por sí mismos, sino que también son importantes porque en muchas ocasiones ayudan a intuir propiedades generales de los nudos.

Definición 2.1. Diremos que un nudo es **tórico** si puede ser dibujado sin puntos de intersección en el toro.

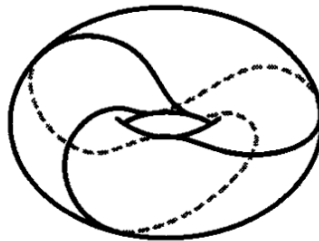


Figura 2.1. Nudo trébol en un toro. Fuente: tomada de [1, Cap.5]

Existen diversas formas de poder construir nudos tóricos, explicaremos algunas de ellas. Para iniciar debemos notar que en el toro existen dos circunferencias estándar.

Definición 2.2. La circunferencia que recorre alrededor del toro de forma corta es conocida como **meridiano** y la que recorre alrededor del toro de forma larga es conocida como **longitud**, ver figura 2.2.

Una forma más formal de poder definir los conceptos anteriores es la siguiente: Recordemos que el conjunto $S^1 \times S^1$ es homeomorfo a la superficie del toro, conside-

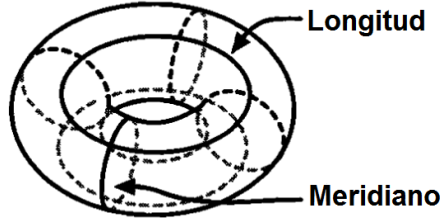


Figura 2.2. Meridianos y longitudes. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

remos f el homeomorfismo entre ambos conjuntos. Entonces tenemos que $f(e^{2\pi it}, 1)$ es un meridiano, mientras que $f(1, e^{2\pi it})$ es una longitud.

Entonces una forma para poder construir nudos tóricos es la siguiente: sean m y n un par de primos relativos. Definimos $K_{m,n}$ como el subconjunto del toro en \mathbb{R}^3 tal que

$$K_{m,n} = f(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int}) \mid t \in I$$

Donde f es el homeomorfismo entre $S^1 \times S^1$ y la superficie del toro, e $I = [0, 1]$. Podemos ver que $g : S^1 \rightarrow K_{m,n}$ definida por

$$g(e^{2\pi it}) = f(e^{2\pi imt}, e^{2\pi int})$$

Es un homeomorfismo del círculo en $K_{m,n}$ con lo cual $K_{m,n}$ es un nudo.

Definición 2.3. El nudo dado con anterioridad es conocido como **el nudo tórico de tipo (m, n)** .

Una forma más intuitiva de ver un nudo tórico de tipo (m, n) es decir que es un nudo tal que da n vueltas alrededor del meridiano del toro y m vueltas alrededor de la longitud del toro.

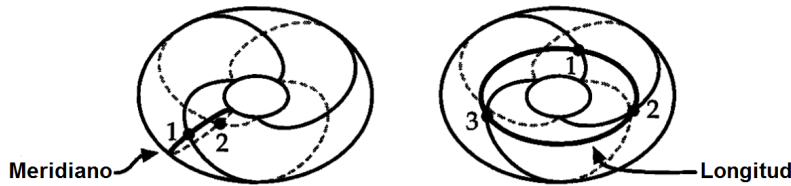


Figura 2.3. Nudo trébol como $(3, 2)$ -nudo tórico. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Para construir nudos de tipo (m, n) seguimos el siguiente procedimiento: supongamos que queremos dibujar el $(5, 3)$ -nudo tórico, debido a que dicho nudo debe dar cinco vueltas meridionales debería cruzar la longitud del toro cinco veces. Entonces marcamos cinco puntos en el ecuador exterior del toro y cinco puntos en el ecuador interior, figura 2.4.

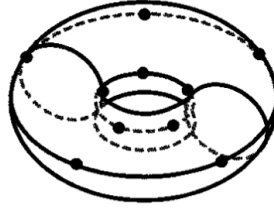


Figura 2.4. Construcción $(5, 3)$ -nudo tórico, paso 1. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Queremos que el nudo de tres vueltas longitudinales, juntamos cada punto marcado en el ecuador exterior del toro con su correspondiente punto en el ecuador interior, utilizando un segmento que recorre el toro a través de la parte inferior, figura 2.5.

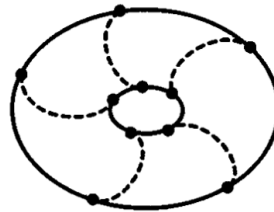


Figura 2.5. Construcción $(5, 3)$ -nudo tórico, paso 2. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Ahora unimos cada punto en el ecuador exterior al punto en el ecuador interior que es el tercer punto a partir de la asignación anterior, recorriendo los puntos a favor de las manecillas del reloj, figura 2.6.

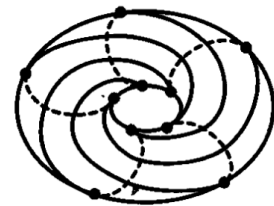


Figura 2.6. Construcción $(5, 3)$ -nudo tórico, paso final. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Un procedimiento análogo se debe seguir para la construcción de un nudo tórico tipo (p, q) . Ahora estudiaremos algunos hechos interesantes sobre los nudos tóricos.

Teorema 2.1.1. *Cualquier (p, q) -nudo tórico es también un (q, p) -nudo tórico.*

Demostración. Consideremos un (p, q) -nudo tórico, removemos un pequeño disco del toro donde dicho nudo yace de tal forma que el disco no se intersekte con el nudo. Deformamos dicho toro con el disco removido en dos bandas que están unidas

una con otra. La banda más corta corresponde al meridiano del toro, mientras que la banda más larga corresponde a la longitud del toro.

Entonces tomamos la banda más larga y la giramos de adentro hacia afuera, luego realizamos el mismo procedimiento con la banda más pequeña. Entonces deformamos nuevamente las bandas para formar un nuevo toro con un disco removido pero con los roles de meridianos y longitudes cambiados, es decir, la banda que originalmente correspondía a la longitud ahora es la banda que corresponde al meridiano y la banda que originalmente correspondía al meridiano ahora es la banda que corresponde a la longitud. Debido a que la longitud y el meridiano intercambiaron papeles ahora tenemos un (q, p) -nudo tórico. \square

Utilizando el $(3, 2)$ -nudo tórico ejemplificaremos la demostración anterior.

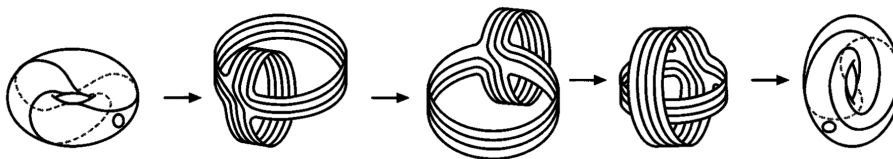


Figura 2.7. El $(3, 2)$ -nudo tórico es un $(2, 3)$ -nudo tórico. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Proposición 2.1. *Todo (p, q) -nudo tórico siempre tiene una proyección con $p(q - 1)$ cruces.*

Demostración. Consideremos un (p, q) -nudo tórico, construiremos una proyección que posea exactamente $p(q - 1)$ cruces. Consideremos un cilindro con q líneas dibujadas a lo largo de él, entonces manteniendo un lado fijo realizamos p giros a favor de las manecillas del reloj obteniendo un el mismo cilindro pero ahora las líneas antes dibujadas se ven como espirales en él. Luego unimos los extremos del cilindro para formar así un toro. Entonces al proyectar dicho nudo en el plano y nos fijamos en alguna de las líneas antes dibujadas tenemos que dicha línea forma un ciclo en el cual pasa exactamente a través de las otras $q - 1$ líneas restantes por cada giro dado, es decir se tienen $p(q - 1)$ cruces. \square

Para ejemplificar el procedimiento anterior consideremos el $(4, 3)$ -nudo tórico, formaremos un nudo con 8 cruces en su proyección, ver figura 2.8.

Uniendo los dos resultados anteriores tenemos que un (p, q) -nudo tórico tiene una proyección con $p(q - 1)$ cruces y una proyección con $q(p - 1)$ cruces.

Definición 2.4. Llamaremos el **número de cruces** de un (p, q) -nudo tórico al mínimo entre $p(q - 1)$ y $q(p - 1)$.

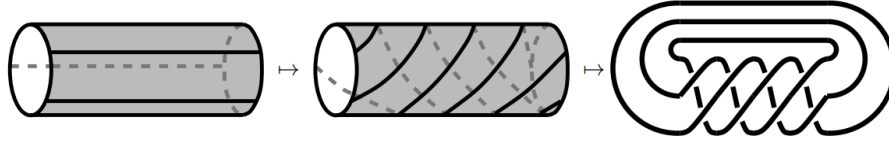


Figura 2.8. Proyección del $(4,3)$ -nudo tórico. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Podemos generalizar la noción de un nudo tórico. Por definición tenemos que un nudo tórico es un nudo no trivial que puede ser colocado en la superficie de un toro incrustado en \mathbb{R}^3 de forma estándar, sin que el nudo posea cruces en dicha superficie. Donde incrustado en \mathbb{R}^3 de forma estándar significa que el toro es no anudado en \mathbb{R}^3 . Ciertamente, algunos nudos no pueden ser tóricos pero tal vez pueden ser colocados en superficies de otros géneros.

Tomemos por ejemplo una superficie de género dos, llamaremos un **nudo 2-incrustable** a un nudo que yace sin intersecciones en una superficie de género dos. Un ejemplo de ello es el nudo 8.

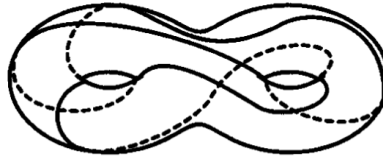


Figura 2.9. Nudo 2-incrustable. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Generalizando esta idea podemos definir un **nudo n -incrustable** como un nudo que yace sin intersecciones en una superficie de género n .

2.2. Nudos satélite

Definición 2.5. Sea K_1 un nudo dentro de un toro solido no anudado, con el toro formamos un segundo nudo K_2 . Entonces el nudo K_1 que estaba dentro del toro original se transforma en un nuevo nudo dentro del toro anudado, a este nuevo nudo lo llamaremos un **nudo satélite**. El nudo K_2 es llamado el **nudo complementario** del nudo satélite. Ver figuras 2.10 y 2.11.

Siempre tomaremos un nudo no trivial como el nudo complementario, ya que de ser el nudo trivial tendríamos que el nudo satélite es el mismo nudo que el original. También vamos a asumir que el nudo K_1 toca a todos los discos meridionales del toro solido y no se puede saltar alguno de ellos. Pensamos en el nudo satélite como un nudo que permanece dentro de un toro solido que tiene un nudo complementario

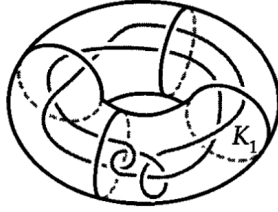


Figura 2.10. Un nudo K_1 dentro de un toro no anudado. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

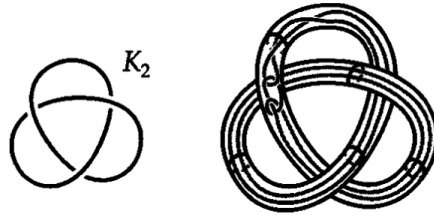


Figura 2.11. Toro anudado como K_2 . Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

como su curva central, tal y como un satélite permanece en una órbita alrededor del planeta.

Si tomamos el nudo original K_1 como un no nudo pero con un giro, entonces el nudo satélite resultante es llamado un **Whitehead doble** del nudo complementario. El nombre hace referencia al hecho que K_1 se asemeja al enlace de Whitehead.

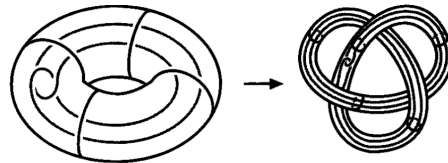


Figura 2.12. El Whitehead doble del nudo trébol. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Un Whitehead doble no es único. Podemos cortar el toro sólido a lo largo de un disco meridional, girar un extremo algún número de veces y entonces pegamos nuevamente los discos para obtener una copia homeomorfa del toro sólido pero ahora dos hilos de K_1 están enrollados entre ellos. Entonces cuando el anudamos el toro sólido como el nudo trébol obtenemos un segundo Whitehead doble del nudo trébol, ver figura 2.13.

Si el nudo original K_1 es nuevamente un no nudo, pero ahora como en la figura 2.14, entonces el nudo satélite resultante es llamado un **cable de dos hilos** del nudo compañero. Es como si tuviéramos un cable que recorre dos veces el nudo complementario. Nuevamente el cable de dos hilos de un nudo acompañante no es único, podríamos realizar un procedimiento como para los Whitehead dobles.

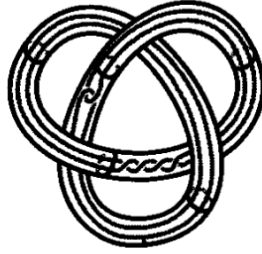


Figura 2.13. Un segundo Whitehead doble del nudo trébol. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

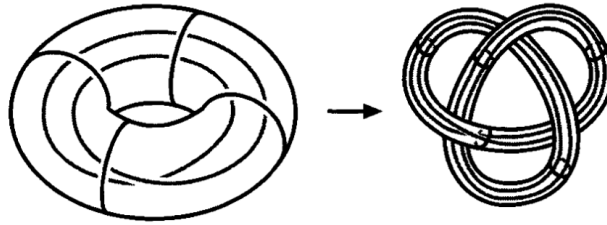


Figura 2.14. Cable de dos hilos del nudo trébol. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

La operación para formar un nudo satélite puede ser vista como una generalización de la idea de composición de nudos. Por ejemplo: Si K_1 sólo posee una hebra que recorre longitudinalmente el toro, entonces el nudo satélite formado al anudar el toro como un nudo K_2 es en efecto la composición de los nudos K_1 y K_2 , $K_1 \# K_2$.

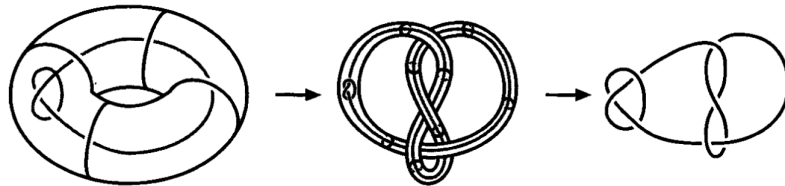


Figura 2.15. Nudo satélite como composición de nudos. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Si el nudo K_1 con el que iniciamos es un nudo tórico, entonces llamaremos al nudo satélite resultante con nudo complementario K_2 un **nudo cable**¹ sobre K_2 , ver figura 2.16. Podemos pensar en este tipo de nudos como tomar un cable o lazo y envolver el nudo K_2 un total de p veces meridionalmente y q veces longitudinalmente.

2.3. Nudos hiperbólicos

Definición 2.6. Un **nudo hiperbólico** es un nudo que tiene un complemento en el cual puede ser dada una métrica de curvatura constante -1 .

¹Los nudos cable son los nudos más frecuentes al trabajar en el área de la geometría algebraica.

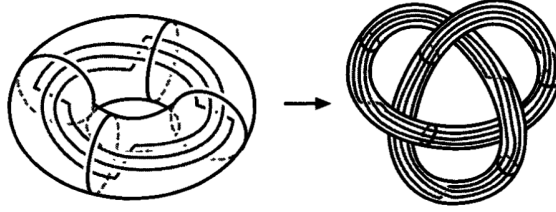


Figura 2.16. Nudo cable. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Así, podemos medir la distancia en el complemento del nudo, que es, \mathbb{R}^3 menos el nudo. Una forma de medir estas distancias es la conocida métrica euclídeana, pero ahora necesitamos medir distancia de una forma diferente, usando una medida de distancia que tiene curvatura -1 .

En dos dimensiones podemos considerar la esfera como un espacio de curvatura positiva, el plano como un espacio de curvatura 0 y la silla de montar como un espacio de curvatura negativa.

Estamos interesados en el espacio tridimensional ya que el complemento del nudo está en el espacio tridimensional. En el espacio tridimensional no podemos dibujar las figuras como se puede hacer en el caso bidimensional, pero la métrica euclídeana para el espacio tridimensional es un ejemplo de una métrica con curvatura cero. Este tipo de métrica es llamada **métrica plana**.

La métrica que queremos para el complemento del nudo no debe ser plana, más bien tiene que tener curvatura -1 . La geometría que resulta de esta métrica es llamada **geometría hiperbólica** y la métrica es llamada **métrica hiperbólica**.

Describiremos el más simple ejemplo de un espacio tridimensional que tiene métrica hiperbólica. Es llamado **espacio tridimensional hiperbólico** y es denotado normalmente como H^3 . El modelo que utilizaremos es conocido como el modelo de Poincaré, los puntos en este modelo son los puntos en el espacio tridimensional que es el interior de la esfera unitaria.

$$H^3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Hora necesitamos describir como medir una distancia entre dos puntos en H^3 . Sean P_1 y P_2 dos puntos en H^3 . Primero, describimos un camino particular en H^3 de P_1 a P_2 . Sea C parte de un círculo en H^3 que tiene sus puntos finales sobre la esfera unitaria, es perpendicular a la esfera unitaria y pasa por los puntos P_1 y P_2 . Asumiendo que P_1 y P_2 no pertenecen al mismo segmento de recta que es un diámetro de la esfera unitaria, siempre hay un único arco de circunferencia que cumple las condiciones anteriores. Si P_1 y P_2 pertenecen al mismo diámetro,

podemos reemplazar el arco de la circunferencia con el segmento de recta que es el diámetro que pasa por P_1 y P_2 .

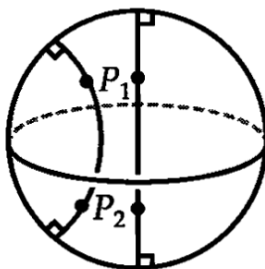


Figura 2.17. Caminos entre puntos en H^3 . Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Resulta que el camino más corto en el espacio tridimensional hiperbólico de P_1 a P_2 es el camino dentro del arco de circunferencia o del diámetro entre los dos puntos. Denotaremos este camino como w . Cualquier arco de circunferencia o diámetro en H^3 que es perpendicular a la esfera unitaria es llamada una **geodésica** en H^3 .

Definición 2.7. Una **geodésica** es una curva que tiene la propiedad que para cualquier par de puntos dentro de ella, el camino más corto entre los dos puntos también pertenece a la curva.

Por ejemplo en el espacio euclideo las líneas rectas juegan el papel de geodésicas ya que es el camino más corto entre dos puntos en el espacio euclideo es una línea recta.

Para medir la distancia entre P_1 y P_2 , integramos la función $\frac{2}{1-r^2}$ a lo largo del camino más corto entre P_1 y P_2 , donde r es la distancia al origen. Así la definición de distancia entre dos puntos es:

$$d(P_1, P_2) = \int_w \frac{2ds}{1-r^2}$$

Existen muchas propiedades interesantes del espacio tridimensional hiperbólico que no estudiaremos, pero trataremos de describir como usar piezas del espacio tridimensional hiperbólico para obtener las llamadas **variedades hiperbólicas**.

Las piezas que utilizaremos para esto son tetraedros, tales que las aristas del tetraedro son geodésicas en el espacio hiperbólico y sus caras son planos geodésicos en el espacio hiperbólico, ver figura 2.18. Notemos que estos planos geodésicos son piezas de esferas que son perpendiculares a la esfera que limita a H^3 o discos con-

tenidos en planos que pasan por el origen en H^3 ; esto haciendo la analogía a lo que sucede con las líneas geodésicas.

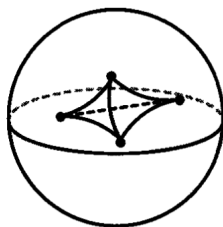


Figura 2.18. Tetraedro en H^3 . Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Es posible pegar pares de caras en un conjunto de tetraedros hasta que cada cara sea pegada con alguna otra cara. Cuando este procedimiento es realizado de manera correcta, el resultado podría ser un complemento de nudo. Si los tetraedros que pagamos son tetraedros hiperbólicos y si los pegamos de tal forma que sus caras no se distorsionen, de modo que el método hiperbólico para medir distancia dentro de los tetraedros individuales coincida, el resultado es el complemento de un nudo hiperbólico.

Podemos usar el método hiperbólico para medir distancia dentro de los tetraedros individuales para obtener un método hiperbólico para medir distancia en el complemento del nudo. Entonces diremos que el nudo es un nudo hiperbólico, estos nudos poseen también **volumen hiperbólico**.

Definición 2.8. El **volumen hiperbólico** es un numero real positivo que puede ser calculado con tantos decimales como sea necesario, se obtiene simplemente sumando los volúmenes de los tetraedros individuales que forman el complemento del nudo.

A pesar de que el complemento del nudo aparente tener volumen infinito, resulta que es finito al utilizar el método hiperbólico para medir volumen.

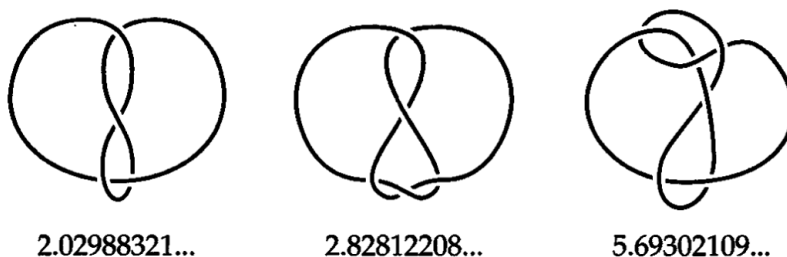


Figura 2.19. Algunos nudos con sus respectivos volúmenes hiperbólicos. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Dos nudos hiperbólicos con distintos volúmenes son nudos distintos, pero si tienen el mismo volumen nos es imposible saber si los nudos son distintos o no. Por ejemplo el nudo 5_2 y un nudo de 12 cruces poseen en mismo volumen, ver figura 2.20.

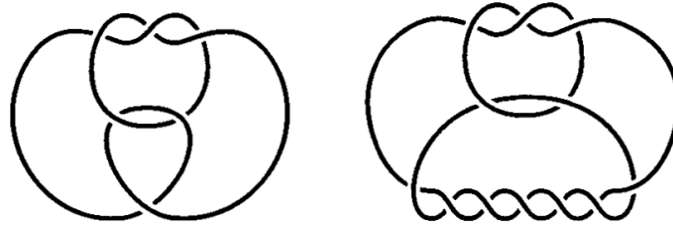


Figura 2.20. Nudos con el mismo volumen hiperbólico. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

De forma más general, si nosotros giramos un enredo en un nudo hiperbólico produciendo un nudo mutante, el mutante también será un nudo hiperbólico y tendrá el mismo volumen, ver figura 2.21.

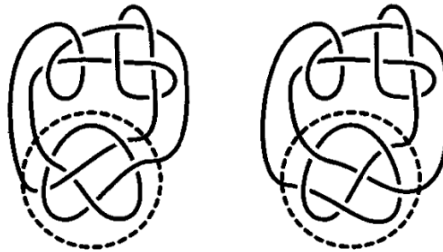


Figura 2.21. Mutantes con el mismo volumen hiperbólico. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

La pregunta más natural en este momento sería: ¿cómo calcular el volumen hiperbólico de un nudo? La respuesta a esta pregunta es el siguiente procedimiento: primero cortamos el complemento del nudo en un número finito de tetraedros, entonces colocamos el tetraedro en el espacio hiperbólico. Para que estos tetraedros hiperbólicos sean pegados correctamente dada la métrica hiperbólica, un conjunto de ecuaciones debe ser satisfecha.

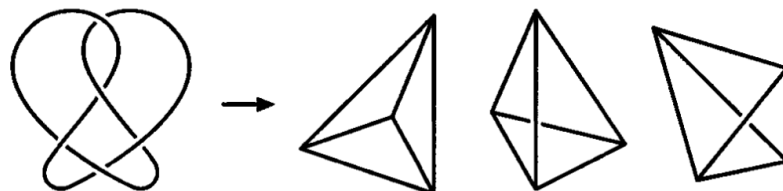


Figura 2.22. Calculando el volumen hiperbólico de un nudo. Fuente: tomada de [1, Cap.5].

Si tenemos n tetraedros, obtenemos n ecuaciones polinomiales en n variables. Estas variables son números complejo. Entonces usamos algún método numérico

para resolver el sistema de ecuaciones. La solución del sistema determina la métrica hiperbólica en cada tetraedro. Podemos entonces calcular el volumen de cada tetraedro y sumarlos para obtener el volumen del complemento del nudo. Los tres tetraedros de la figura 2.22 nos dejan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x-1) \left(\frac{y}{1-y}\right) z^2 &= 1 \\ \left(\frac{x}{1-x}\right) \left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{z-1}{z}\right) &= 1 \\ \left(\frac{y}{y-1}\right) z &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que el volumen es 2.82812208....

Realizar este proceso a mano es difícil y tedioso incluso para los nudos más simples. Afortunadamente, Jeff Weeks realizó un programa de computadora que realiza este procedimiento por nosotros. Utilizando este programa simplemente debemos dibujar el nudo en la pantalla y con el ratón pulsar los cruces para elegir el orden² correcto para obtener el nudo que queremos. Entonces el programa inicia el proceso de cortar el complemento del nudo en tetraedros, generar las ecuaciones que se deben satisfacer, encontrar la solución numérica y finalmente calcular el volumen.

2.4. Nudos casi alternantes

Definición 2.9. Una proyección de un nudo o enlace es llamada **casi alternante** si cambiando uno de sus cruces la proyección sería alternante. Entonces un nudo o enlace que posea una proyección casi alternante y no posea una proyección alternante será conocido como **nudo o enlace casi alternante**.



Figura 2.23. Nudo casi alternante. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Una asombrosa variedad de nudos y enlaces poseen una proyección casi alternante. De hecho, el nudo trivial posee una proyección casi alternante.

²En este caso cuando decimos “orden” nos referimos a qué trozo del nudo pasa por arriba y cual por abajo.

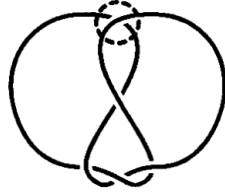


Figura 2.24. Proyección casi alternante del nudo trivial. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Un hecho mas interesante es que cualquier nudo o enlace alternante posee una proyección casi alternante, este hecho puede ser fácilmente explicado a través de movimientos de Reidemeister que discutiremos en el próximo capítulo.

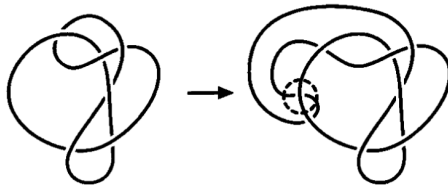


Figura 2.25. Nudo alternante y su proyección casi alternante. Fuente: tomada de [1, Cap.5].

Podemos tomar la idea de enlaces casi alternantes y extenderlo:

Definición 2.10. Un nudo que tiene una proyección donde cambiando m cruces obtenemos una proyección alternante y que no tiene una proyección que produzca una proyección alternante cambiando menos cruces es llamado un **nudo m -casi alternante**.

Bajo esta definición podemos considerar un nudo alternante como un nudo 0-casi alternante y un nudo casi alternante como un nudo 1-casi alternante.



Figura 2.26. Enlace 2-casi alternante. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Entonces podemos dividir a todos los nudos en categorías separadas, dependiendo el valor de m . Este número m mide que tan lejos está un nudo de ser un nudo alternante.

Otra extensión de un nudo o enlace casi alternante, es que en lugar de proyectar el nudo en el plano, proyectamos el nudo sobre un toro.

Sea T un toro no anudado en el espacio. Sea K un nudo que puede ser proyectado sobre el toro tal que la proyección es alternante, cuando es vista desde dentro o fuera del toro. También se requiere que cualquier curva cerrada en el toro que no acote un disco en el toro intersecte a la proyección.

Definición 2.11. Un nudo que cumpla las condiciones anteriores es llamado un **nudo toroidalmente alternante**.

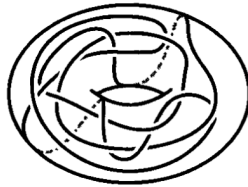


Figura 2.27. Nudo toroidalmente alternante. Fuente: tomada de [1, Cap. 5].

Al tener que los nudos casi alternantes son un concepto relativamente nuevo no hay aún muchos resultados con respecto a esto, pero nos son útiles para trabajar casos particulares y luego buscar generalizaciones.

3. INVARIANTES

En el presente capítulo se estudiarán algunas de las herramientas que son útiles para la clasificación de nudos, el problema central de la teoría de nudos. Se discutirán y demostrarán los teoremas fundamentales, y se realizarán ejemplos claros para mostrar su utilidad.

3.1. Movimientos de Reidemeister

Uno de los grandes problemas en la teoría de nudos es el clasificar los nudos, es decir, saber cuando un nudo es distinto a otro. En el capítulo uno se habló brevemente de la equivalencia de nudos, pero trataremos de manera más formal las definiciones antes dadas.

Definición 3.1. Sean X y Y espacios de Hausdorff. Una función $f: X \rightarrow Y$ es llamada una **incrustación** si $f: X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo respecto a la topología inducida por Y .

Para nuestro caso queremos que $X = S^1$ y $Y = S^3$ o \mathbb{R}^3 . Notemos que esta definición coincide con la definición 1.1 debido a que un nudo es una incrustación de un círculo, S^1 , en \mathbb{R}^3 .

Definición 3.2. Dos incrustaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **isotópicas** si existe una incrustación $F: X \times I \rightarrow Y \times I$ tal que $F(x, t) = (f(x, t), t)$, $x \in X$, $t \in I = [0, 1]$ con $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$. F es llamada **isotopía de conservación de nivel** o simplemente **isotopía**.

Usaremos con frecuencia la notación $f_t(x) = f(x, t)$. Una manera más intuitiva de explicar esta definición en el contexto de la teoría de nudos es considerar dos nudos K_0 y K_1 incrustaciones en \mathbb{R}^3 y considerar la isotopía como una película en la cual la imagen inicial es K_0 y la imagen final es K_1 .

Esta noción de isotopía no es buena en temas relacionados con los nudos, debido a que se permite situaciones como la presentada en la figura 3.1.

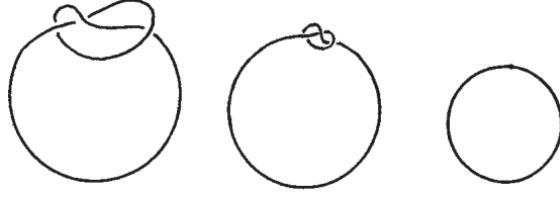


Figura 3.1. Fallo en la definición de isotopía. Fuente: tomada de [7, Cap. 1].

Es decir que la definición anterior nos dice que todos los nudos son círculos siguiendo un procedimiento similar al mostrado en la figura 3.1. Es por ello que se requiere una variación esta definición.

Definición 3.3. Dos incrustaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **isotópicas en el espacio** si existe una isotopía $H: Y \times I \rightarrow Y \times I$, $H(y, t) = (h_t(y), t)$, con $f_1 = h_1 f_0$ y $h_0 = id_Y$. La función H es llamada una **isotopía en el espacio** o **isotopía espacial**.

Una isotopía espacial define una isotopía H que conecta f_0 con f_1 por $H(x, t) = (h_t f_0(x), t)$.

La diferencia entre las dos definiciones anteriores es la siguiente: una isotopía transforma continuamente el conjunto $f_0(X)$ en $f_1(X)$ en Y , pero no toma en cuenta las vecindades de los puntos al realizar la transformación. Por su parte la isotopía espacial requiere que Y se transforme continuamente junto con $f_t(X)$.

Otra forma de entender esto es considerar un homeomorfismo $Q: Y \rightarrow Y$, entonces si consideramos f_0 y f_1 dos incrustaciones que son isotópicas en el espacio tendríamos que la restricción $Q|: (Y - f_0(X)) \rightarrow (Y - f_1(X))$ es un homeomorfismo de los complementos de $f_0(X)$ y $f_1(X)$.

Hasta ahora hemos considerado los nudos como curvas suaves pero no es la única forma de poder representarlos, tenemos por ejemplo la siguiente definición:

Definición 3.4. La **representación poligonal** de un nudo es la unión de los segmentos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]$ de un conjunto ordenado de distintos puntos (p_1, p_2, \dots, p_n) formando el nudo.

Notemos que esta forma de representar los nudos tiene la ventaja que la forma de numerar sus vértices nos da una noción de la orientación del nudo, pero al utilizar este tipo de representación al trabajar en las proyecciones hay que tomar en cuenta ciertas consideraciones para evitar la pérdida de información en el nudo.

Definición 3.5. Una proyección p de un nudo K es llamada **regular** si

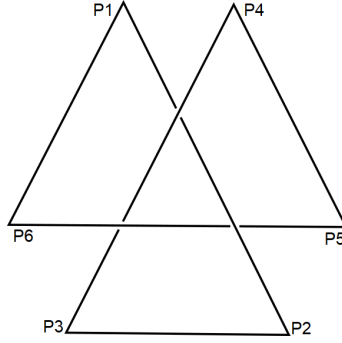


Figura 3.2. Representación poligonal del nudo trébol. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

1. hay una cantidad finita de puntos múltiples (cruces) $\{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, y todos los puntos múltiples son puntos dobles, es decir, $p^{-1}(P_i)$ contiene dos puntos de K ,
2. ningún vértice de K es mapeado en un punto doble.

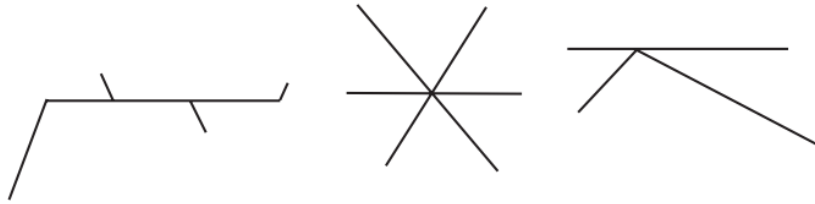


Figura 3.3. Ejemplo de proyecciones no regulares. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

En ocasiones trabajaremos con la forma poligonal de un nudo, para ello utilizaremos el prefijo p.l.¹ El concepto de incrustación es análogo a la definición 3.1 para la categoría p.l. Pero en lugar de trabajar en espacios de Hausdorff cualesquiera tomaremos como espacios poliedros compactos.

Definición 3.6. Sean X, Y poliedros y $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ p.l.-incrustaciones, f_0 y f_1 son **p.l.-isotópicos** si existe una p.l.-incrustación, F , tal que

$$F: X \times I \rightarrow Y \times I, \quad F(x, t) = (f_t(x), t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

f_0 y f_1 son **p.l.-isotópicos en el espacio** si existe una p.l.-isotopía, H , tal que:

$$H: Y \times I \rightarrow Y \times I, \quad H(y, t) = (h_t(y), t),$$

¹p.l. viene del inglés *piecewise linear*

con $f_1 = h_1$ y $h_0 = id_Y$.

Notemos que estas definiciones siguen la misma idea de considerarse como una película en el a través del tiempo, pero la diferencia con la definición anterior es que en este caso en cada paso de la película el nudo se ve en su representación poligonal.

Con los conceptos anteriores podemos obtener una definición más formal de la equivalencia de nudos:

Definición 3.7. Dos nudos (p.l.-nudos) son **equivalentes (p.l.-equivalentes)** si son isotópicos en el espacio (p.l.-isotópicos en el espacio).

En el caso de ser nudos orientados la definición es la análoga, es decir, dos nudos orientados son equivalentes si existe una isotopía espacial que conecta uno con el otro y coincide con sus respectivas orientaciones.

Los conceptos anteriores son poco útiles en al tratar de verificar la equivalencia de nudos, es por ello que Reidemeister propuso la introducción de aspectos de combinatoria en la teoría de nudos, dando inicio a los estudios de isotopías a través de movimientos en el espacio o en un plano.

Definición 3.8. Sea u un segmento de un nudo poligonal K en \mathbb{R}^3 y D un triángulo en \mathbb{R}^3 , $\partial D = u \cup v \cup w$, es decir, los lados de D son u, v, w . Si $D \cap K = u$, entonces $K' = (K - u) \cup v \cup w$ define otro nudo poligonal. Diremos que K' resulta de K por un Δ -**proceso** o un Δ -**movimiento**. Si K es orientado, K' tiene que llevar la orientación inducida por K . El proceso inverso es denotado por Δ^{-1} .

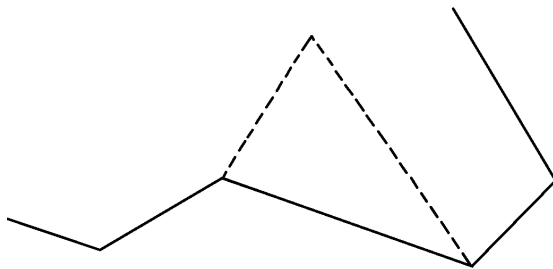


Figura 3.4. Δ -movimiento. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Al trabajar con Δ -movimientos se debe tener cuidado de preservar la regularidad en las proyecciones. Este tipo de movimientos motivan una noción de equivalencia distinta a la anteriormente presentada:

Definición 3.9. Dos nudos son **combinatóricamente equivalentes o isotópicos por movimientos**, si existe una sucesión finita de Δ -movimientos o Δ^{-1} -movimientos que transforma un nudo en el otro.

Ya que tenemos distintas definiciones de equivalencia de nudos, cada una tiene ventajas para distintos tipos de situación, pero se necesita demostrar que estas definiciones son equivalentes. Para esto son necesarios algunos teoremas previos:

Teorema 3.1.1. (*Alexander-Schoenflies*) Sea $i : S^2 \rightarrow S^3$ una incrustación (p.l.-incrustación). Entonces

$$S^3 = B_1 \cup B_2, \quad i(S^2) = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

donde B_i , $i = 1, 2$, es una 3-bola combinatoria (B_i es p.l.-homeomorfa a un 3-tetraedro)

Proposición 3.1. (*Alexander-Tietze*) Cualquier homeomorfismo (p.l.-homeomorfismo) f de una n -bola B que mantiene la frontera fija es isotópico a la identidad por una isotopía espacial (p.l.-isotopía espacial) que mantiene fija la frontera.

La demostración del teorema y la proposición anterior no es el objeto de estudio es por eso que haremos uso de ellos sin demostración pero la demostración se puede ver en [2] y [7, Cap. 1], respectivamente.

Proposición 3.2. Sean K_0, K_1 nudos (p.l.-nudos) en S^3 los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Existe un homeomorfismo que preserva la orientación $f : S^3 \rightarrow S^3$ que transforma K_0 en K_1 , $f(K_0) = K_1$.
2. K_0 y K_1 son equivalentes (isotópicos en el espacio).
3. K_0 y K_1 son combinatoricamente equivalentes (isotópicos por movimientos).

Demostración. Consultar [7, Cap.1]. □

La descripción geométrica en el espacio tridimensional es realmente complicado. Por ello trabajaremos con los diagramas de nudos antes definidos, con la salvedad que lo antes definido como cruce en la definición 1.4 también es conocido como **punto múltiple**.

Definición 3.10. El mínimo número de puntos dobles o cruces en una proyección regular de un nudo es llamado el **orden** del nudo.

El objetivo de trabajar con la proyección de un nudo es facilitar el trabajo, pero para ello debemos definir cuando dos diagramas son equivalentes.

Definición 3.11. Dos diagramas de nudo son llamados **equivalentes**, si están conectados por una sucesión finita de **movimientos de Reidemeister** Ω_i , $i = 1, 2, 3$, o sus inversos Ω_i^{-1} .

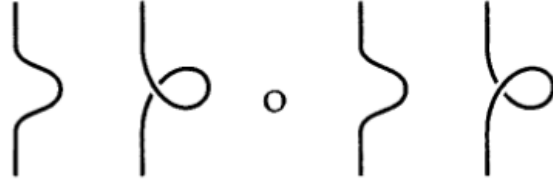


Figura 3.5. Movimiento de Reidemeister tipo 1 (Ω_1). Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

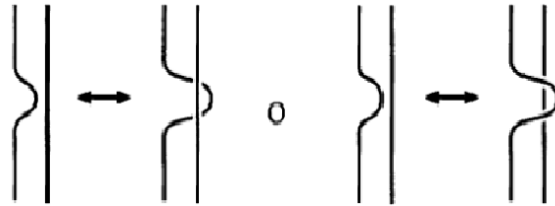


Figura 3.6. Movimiento de Reidemeister tipo 2 (Ω_2). Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

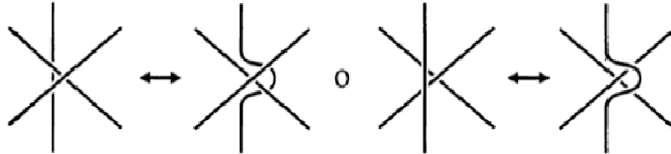


Figura 3.7. Movimiento de Reidemeister tipo 3 (Ω_3). Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Notemos que las operaciones $\Omega_i^{\pm 1}$ efectúan cambios locales en el diagrama, pero falta probar que estas operaciones pueden ser representadas por isotopías espaciales del nudo y viceversa.

Proposición 3.3. *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas son equivalentes.*

Demostración. El primer paso en la demostración sería verificar que cualesquiera dos proyecciones regulares p_1, p_2 del mismo nudo poligonal K están conectados por $\Omega_i^{\pm 1}$ -movimientos. Sean p_1, p_2 representados por puntos en S^2 , y elijamos en S^2 una trayectoria poligonal s de p_1 a p_2 en posición general con respecto a las líneas de proyecciones singulares en S^2 . Cuando se cruza dicha línea el diagrama será cambiado por una operación $\Omega_i^{\pm 1}$, el tipo actual depende del tipo de la singularidad, correspondiente a la línea que se cruza.

Queda mostrar que para una proyección fija nudos equivalentes poseen diagramas equivalentes. De acuerdo a la proposición 3.2 es suficiente probar que un $\Delta^{\pm 1}$ -movimiento induce una $\Omega_i^{\pm 1}$ -operación en la proyección. Esto es verificado en la figura 3.8. \square

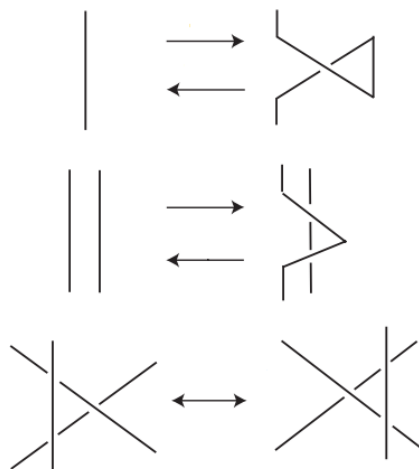


Figura 3.8. Equivalencia de diagramas. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Mostraremos un ejemplo de la utilización de los movimientos de Reidemeister.

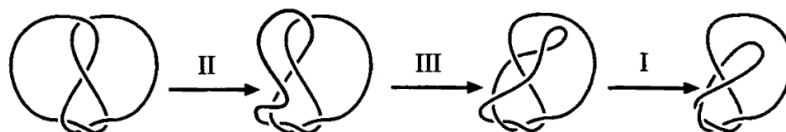


Figura 3.9. Utilización de los movimientos de Reidemeister. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

Notemos que aunque los movimientos de Reidemeister nos ayudan a demostrar cuando dos nudos son equivalentes, pero incluso con movimientos de Reidemeister probar que dos nudos son distintos es complicado, esto se debe a que para poder demostrar que dos nudos no son equivalentes a través de movimientos de Reidemeister es necesario probar toda posible combinación de movimientos en el nudos que tiende a ser un trabajo interminable. Por ello estudiaremos algunos otros invariantes que nos facilitaran el trabajo.

3.2. Tricolorabilidad

Este invariante en la teoría de nudos es muy importante porque nos ayuda a demostrar un hecho fundamental: existe por lo menos un nudo distinto del nudo

trivial. No podemos estar seguros de este hecho a través de los movimientos de Reidemeister, ya que para esto deberíamos tomar, por ejemplo, la proyección del nudo trébol y tratar de asegurar que no existe una combinación de movimientos de Reidemeister que nos convierta el nudo trébol en un nudo trivial.

Definición 3.12. Llamaremos un **arco** en una proyección de un nudo o enlace a un trozo de la proyección que va de una hebra que pasa por abajo a otra y que entre ellos solo hay una hebra que pase por arriba.

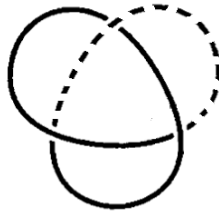


Figura 3.10. Ejemplo de un arco. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

La figura anterior nos muestra un arco, pintado con rojo, de la proyección del nudo trébol. Este concepto es fundamental para la definición de tricolorabilidad.

Definición 3.13. Diremos que un nudo es **tricolorable** si se pueden colorear² los arcos de su diagrama utilizando tres colores y con las siguientes condiciones:

1. Los tres arcos que inciden en cada cruce son de tres colores distintos o todos del mismo color.
2. Se deben utilizar por lo menos dos colores.

Notemos que la condición 2 es necesaria ya que sin ella podríamos colorear todos los arcos de un mismo color y por lo tanto todos los nudos serían tricolorables.

Bajo estas condiciones claramente el nudo trivial es no tricolorable, ya que al poseer un solo arco tenemos que no cumple la condición 2. Por otro lado el nudo trébol si es tricolorable como se muestra en la figura 3.11:

En el nudo de la figura 3.11 tomamos distintos tipos de líneas para realizar la coloración, se hizo uso de los tres colores y además en cada uno de sus puntos de cruce se tienen los tres colores, con lo cual el nudo trébol es tricolorable.

Teorema 3.2.1. *La tricolorabilidad es un invariante en los nudos.*

²Al decir colorear se refiere a tener alguna forma para distinguir los arcos, no necesariamente utilizar distintos colores.



Figura 3.11. Tricolorabilidad en el nudo trébol. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Demostración. Para demostrar que la tricolorabilidad es un invariante basta con demostrar que se mantiene invariante bajo los movimientos de Reidemeister.

1. Para el movimiento de tipo 1 tenemos que en ambos casos se mantiene la no tricolorabilidad, ver figura 3.12.



Figura 3.12. Coloración movimiento tipo 1. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

2. Para el movimiento de tipo 2 tenemos que se preserva la tricolorabilidad. Puede causar confusión la figura a la derecha de la flecha pero resulta que si

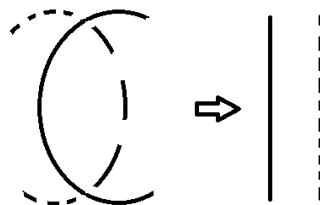


Figura 3.13. Coloración movimiento tipo 2. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

es tricolorable ya que utiliza por lo menos 2 colores y ya que no tiene cruces por vacuidad cumple también la condición uno. También hay que considerar el caso en el que ambos nudos están coloreados de un solo color, en cuyo caso tendríamos que ninguno es tricolorable.

3. Debido a la naturaleza del movimiento tipo 3 se tienen distintos casos como se muestra en la figura 3.14. De los casos mostrados en la figura hay que agregar el caso trivial que es usar un solo color.

Ya que sabemos que los nudos se preservan a través de movimientos de Reidemeister y que esto preserva la tricolorabilidad tenemos que la tricolorabilidad es un invariante. □

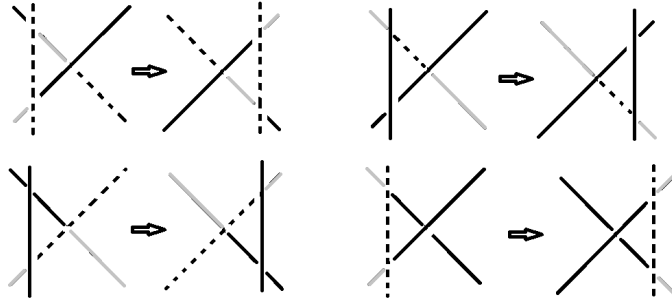


Figura 3.14. Coloración movimiento tipo 3. Fuente: elaboración propia Inkscape.

Ahora que ya probamos que la tricolorabilidad es un invariante en los nudos podemos afirmar que existe por lo menos un nudo distinto del nudo trivial ya que como vimos anteriormente el nudo trivial es no tricolorable mientras que el nudo trébol no lo es.

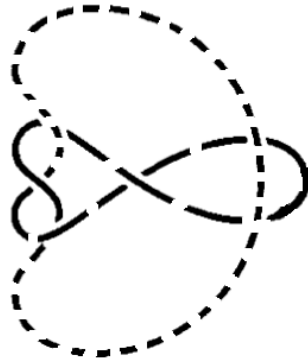


Figura 3.15. Otro ejemplo de tricolorabilidad de un nudo. Fuente: tomada de [3, Cap. 4].

Este invariante es muy débil ya que solo nos permite distinguir entre dos tipos de nudos: los que son tricolorables y los que no lo son; por ejemplo tenemos que el nudo trébol y el nudo en la figura 3.15 son tricolorables, pero no son el mismo nudo. Además el probar que un nudo no es tricolorable implica mucho tiempo pues debe probar toda combinación de colores.

3.3. Número de puente

Iniciamos definiendo los conceptos fundamentales para la utilización de este invariante.

Definición 3.14. Dada una proyección de un nudo, definimos un **paso superior** como un subarco del nudo que pasa por lo menos por un cruce pero nunca pasa por un cruce por abajo.

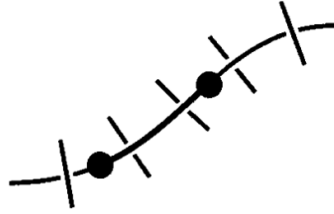


Figura 3.16. Paso superior. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

En la figura 3.17 se muestra un paso superior, notamos que los puntos en la figura nos indican el comienzo y el fin del paso superior.

Definición 3.15. Un paso superior **maximal** es un paso superior que no puede prolongarse más.

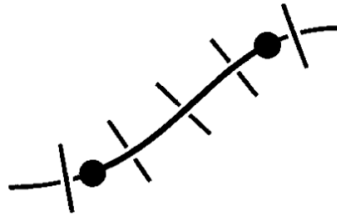


Figura 3.17. Paso superior maximal. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Notemos que en la figura 3.16 el paso superior se puede seguir prolongando dando como resultado la figura 3.17, mientras que dicha figura ya no se puede seguir prolongando ya que sus puntos límite están próximos a un cruce que pasa por abajo, lo cual hace que sea un paso superior maximal.

Definición 3.16. El número de puente de una proyección es el menor número de pasos superiores maximales de todas las proyecciones de un nudo, si el nudo que estamos considerando es K entonces denotamos el número de puente como $b(K)$.

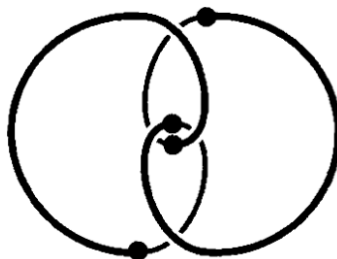


Figura 3.18. Nudo con número de puente 2. Fuente: tomada de [1, Cap. 3].

Teorema 3.3.1. *El número de puente es un invariante de los nudos.*

Demostración. Supongamos que P_1 es una proyección del nudo K_1 cuyo número de puente es $b(P_1)$. Sea K_2 un nudo equivalente a K_1 cuya proyección es P_2 y su número de puente es $b(P_2)$. Debido a que K_2 y K_1 son equivalentes podemos decir que P_2 es una proyección de K_1 . Por definición de número de puente tenemos que $b(P_1) \leq b(P_2)$ esto debido a que es el menor número de pasos superiores maximales de todas las proyecciones, análogamente obtenemos $b(P_2) \leq b(P_1)$. Con lo cual tenemos que $b(P_2) = b(P_1)$. Así pues tenemos que $b(P_1)$ es el número de puente de todas las proyecciones de nudos equivalentes a K_1 . Por lo tanto es un invariante. \square

Para este invariante se tiene la convención que el nudo trivial posee número de puente 1, es decir toda proyección que tenga número de puente 1 es equivalente al nudo trivial.

Este invariante aun no es suficiente para distinguir a todos los posibles nudos ya que tanto el nudo trébol como el nudo 8 poseen número de puente 2.

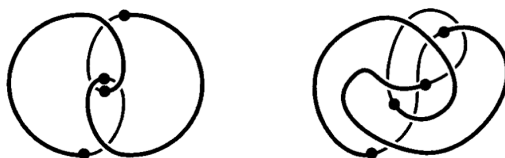


Figura 3.19. Nudos distintos con número de puente 2. Fuente: tomada de [1, Cap.3].

3.4. Número de cruces

Definición 3.17. El número de cruces de un nudo K , denotado por $c(K)$, es el menor número de cruces que ocurren en cualquier proyección del nudo.



Figura 3.20. Un nudo con número de cruce 7. Fuente: tomada de [1, Cap. 3].

Para encontrar el número de cruce de un nudo K debemos seguir el siguiente proceso: primero, encontramos una proyección del nudo K con algún número de

cruce n . Luego sabemos que el número de cruce es n o menor a n . Si todos los nudos con menor número de cruce menor que n son conocidos, y si K no aparece en la lista de estos nudos, entonces K debería tener número de cruce n . Notemos que dependeremos de demostrar que dicho nudo no es uno con menor número de cruce, para ello utilizamos invariantes.

En general, es muy difícil determinar el número de cruces de un nudo. Si tenemos un nudo con una proyección con 15 cruces, ¿Cómo puedo probar que no puede ser dibujado con menos cruces? Esta pregunta es respondida utilizando polinomios, un invariante estudiado posteriormente.

Teorema 3.4.1. *El número de cruce es un invariante en los nudos.*

Demostración. Sea K un nudo con proyección P cuyo número de cruce es $c(P)$, consideremos un nudo K_0 que sea equivalente a K . La proyección de K_0 es P_0 y su número de cruce es $c(P_0)$. Dado que K y K_0 son equivalentes tenemos que P y P_0 son equivalentes. Por definición de número de cruce tendríamos que $c(P) \leq c(P_0)$ y análogamente tendríamos que $c(P_0) \leq c(P)$, con lo cual concluimos que $c(P_0) = c(P)$, entonces a nudos equivalentes les corresponden números de cruces iguales y por lo tanto es un invariante. \square

Nuevamente este invariante no nos es muy útil primero por el hecho que calcularlo no es fácil y segundo existen nudos distintos que poseen el mismo número de cruce, como se muestra en la figura 3.21.



Figura 3.21. Nudos distintos con el mismo número de cruce. Fuente: tomada de [11, Cap. 1].

3.5. Número de enlace

Anteriormente hablamos un poco sobre este invariante, definición 1.17, pero sólo fue mencionado el concepto de número de enlace, no se demostró que es un invariante.

Teorema 3.5.1. *El número de enlace es un invariante en los nudos.*

Demostración. Verificaremos que el número de enlace es un invariante mediante los movimientos de Reidemeister:

1. Para el movimiento de tipo 1, el cruce que se introduce o se remueve es un componente simple, así este cruce contribuye en 0 al número de enlace, que es la misma contribución que aporta una sola hebra.
2. Para el movimiento de tipo 2, existen dos posibilidades dependiendo de la aplicación del movimiento, pero en ambos casos se mantiene el número de enlace:

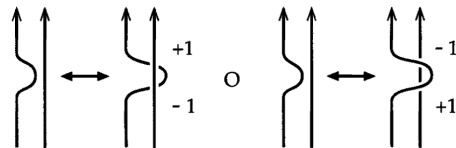


Figura 3.22. Número de enlace con movimiento de tipo 2. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

3. Para el movimiento de tipo 3, una vez elegida una orientación también tenemos dos posibilidades dependiendo de la aplicación del movimiento, pero en ambos casos se mantiene el número de enlace:

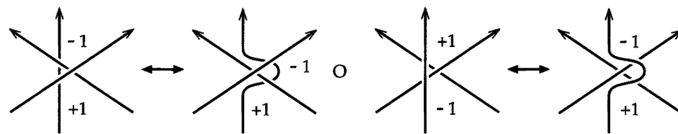


Figura 3.23. Número de enlace con movimiento de tipo 3. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Ya que los tres movimientos de Reidemeister preservan el número de enlace podemos decir que el número de enlace es un invariante para los nudos. \square

Entonces a través del número de enlace se pueden distinguir enlaces (nudos) entre sí. Por ejemplo si tomamos el enlace de Hopf, figura 1.12, y el enlace de Whitehead, figura 1.10.

Se puede observar que en la figura 3.24, el enlace de Whitehead tiene número de enlace 0, mientras que el enlace de Hopf tiene número de enlace 1 y por lo tanto estos enlaces son distintos.

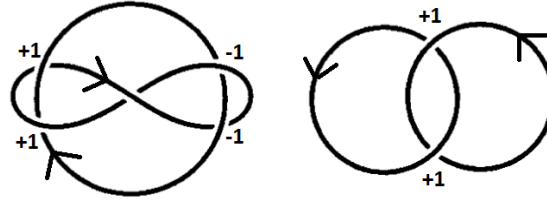


Figura 3.24. Número de enlace del enlace de Hopf y de Whitehead. Fuente: tomada de [1, Cap. 1].

3.6. Número de desanudado

Definición 3.18. Diremos que un nudo K tiene **número de desanudado** n si existe una proyección del nudo tal que cambiando de orden n cruces en la proyección el nudo se convierte en un nudo trivial y no existe una proyección del nudo que con menos cambios se convierta en un nudo trivial. Denotamos el número de desanudado como $u(K)$.

En otras palabras podemos definir el número de desanudado como el menor número necesario de cambios en los cruces para que el nudo se convierta en un nudo trivial. En este sentido cambiar el cruce significa cambiar una hebra que pasa por arriba por una que pase por abajo y viceversa.

Tomemos por ejemplo el nudo trébol, realizaremos los cambios necesarios para volver el nudo trébol en un nudo trivial:

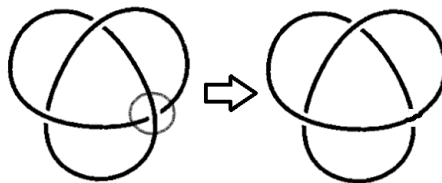


Figura 3.25. Número de desanudado del nudo trébol. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Con esto podremos decir que el nudo trébol tiene número de desanudado 1. Por definición tenemos que el nudo trivial tiene número de desanudado 0, teniendo así distinción entre ellos.

Para realizar los cambios de cruce en el nudo seguimos el siguiente procedimiento: fijamos un punto en el nudo y avanzamos a través del nudo en un sentido que escojamos, cuando nos encontremos en un cruce tenemos tres opciones:

1. Si no hemos pasado por ese cruce anteriormente y el camino que estamos recorriendo es la hebra que pasa por arriba, dejamos el cruce como está.

2. Si no hemos pasado por ese cruce anteriormente y el camino que estamos recorriendo es la hebra que pasa por abajo, cambiamos el cruce.
3. Si ya habíamos pasado por ese cruce lo dejamos como está.

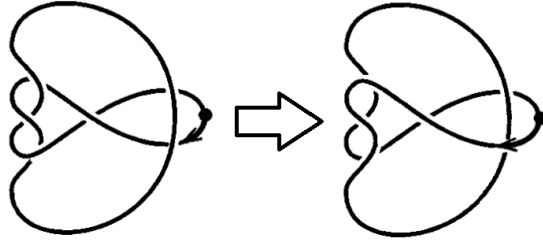


Figura 3.26. Transformación de un nudo a un nudo trivial. Fuente: tomada de [1, Cap. 3].

Debido a que estamos trabajando con nudo que poseen una cantidad finita de cruces tenemos que el número de desanudado será finito y además esta acotado por la cantidad de cruces que posee el nudo.

Teorema 3.6.1. *El número de desanudado de un nudo es un invariante.*

Demostración. Sea K un nudo con proyección P cuyo número de desanudado es $u(K)$, consideremos un nudo K_0 que sea equivalente a K . La proyección de K_0 es P_0 y su número de desanudado es $u(K_0)$. Dado que K y K_0 son equivalentes tenemos que P y P_0 son equivalentes. Por definición de número de desanudado tendríamos que $u(K) \leq u(K_0)$ y análogamente tendríamos que $u(K_0) \leq u(K)$, con lo cual concluimos que $u(K_0) = u(K)$, entonces a nudos equivalentes les corresponden números de cruces iguales y por lo tanto es un invariante. \square

Este invariante es interesante debido al hecho que existen problemas abiertos respecto a él, por ejemplo, aun no hay una demostración de que dados dos nudos K_1 y K_2 la composición de ellos cumpla $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$. Notemos que $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$, ya que al realizar la composición no se le añaden cruces a los nudos involucrados, la desigualdad contraria es la que no ha podido ser demostrada aun.

4. POLINOMIOS

En este capítulo estudiaremos uno de las más interesantes formas de representar a un nudo. A cada nudo se le puede asociar un polinomio. Este polinomio puede ser encontrado a partir de la proyección del nudo, pero cumplen la propiedad que para proyecciones diferentes del mismo nudo le podemos asociar un mismo polinomio, así los polinomios son un invariante en los nudos.

4.1. Polinomio de Jones

Existen varios tipos de polinomios para los nudos, iniciaremos nuestro estudio con el polinomio de Jones, este polinomio fue descubierto por Vaughan Jones en 1984.

Para definir el **polinomio de Jones**, primero desarrollaremos el **soporte polinomial** de un nudo, que son las reglas a seguir para formar nuestro polinomio dada una proyección de nudo o enlace. En nuestro desarrollo del soporte polinomial, tomaremos el enfoque que un matemático debería tomar si estuviera tratando de descubrir un polinomio que fuera un invariante para los nudos. Aunque inicialmente no parezca así, al final obtendremos un polinomio de Laurent¹ en una sola variable A .

Vamos a suponer que estamos tratando de crear este polinomio invariante para nudos y enlaces, y que tenemos algunos requisitos para el polinomio. Primero, nos gustaria que el polinomio del nudo trivial sea 1. Si usamos la notación $\langle K \rangle$ para denotar el soporte polinomial del nudo K entonces nuestra primer regla seria:

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

Segundo, queremos un método para obtener el soporte polinomial de un enlace en términos de soportes polinomiales de enlaces más simples. Usamos la siguiente

¹El polinomio de Laurent en una variable lo consideraremos un polinomio que puede poseer exponentes tanto negativos como positivos en su variable.

relación: dado un cruce en la proyección del enlace, lo dividimos vertical y horizontalmente, con el fin de obtener dos nuevas proyecciones del enlace, cada una de estas proyecciones con menos cruces que el enlace original. Hacemos el soporte polinomial de nuestra proyección del enlace una combinación lineal de los soportes polinomiales de nuestras dos proyecciones nuevas, donde aun no hemos decidido los coeficientes y por eso los llamamos A y B . Obtenemos la siguiente regla:

$$\langle \times \rangle = A \langle \supset \subset \rangle + B \langle \succ \prec \rangle$$

$$\langle \times \rangle = A \langle \succ \prec \rangle + B \langle \supset \subset \rangle$$

Notemos que ambas ecuaciones son similares, cambia el tipo de cruce que se tiene en la original. Finalmente, nos gustaría una regla para añadir un componente trivial a un enlace. Así tendríamos la siguiente regla:

$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$$

Cada vez que añadimos un componente trivial extra que es no está enredado con el enlace original L , simplemente multiplicaremos el soporte polinomial del enlace por una constante C . Así como A y B , consideramos a C una variable en el polinomio.

El criterio más importante para nuestro polinomio es que debe ser un invariante para nudos y enlaces. Es decir, el calculo del polinomio no puede depender de la proyección con la que iniciamos. En otras palabras, el polinomio no debe cambiar por movimientos de Reidemeister.

Iniciaremos con el movimiento de Reidemeister tipo 2, queremos que $\langle \tilde{x} \rangle = \langle \supset \subset \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x} \rangle &= A \langle \tilde{x} \rangle + B \langle \tilde{x} \rangle \\ &= A(A \langle \tilde{x} \rangle + B \langle \tilde{x} \rangle) + B(A \langle \supset \supset \rangle + B \langle \tilde{x} \rangle) \\ &= A(A \langle \succ \prec \rangle + BC \langle \succ \prec \rangle) + B(A \langle \supset \subset \rangle + B \langle \succ \prec \rangle) \\ &= (A^2 + ABC + B^2) \langle \succ \prec \rangle + AB \langle \supset \subset \rangle \end{aligned}$$

En el procedimiento anterior encontramos el polinomio asociado a la parte izquierda del movimiento tipo 2. Para que dicho polinomio corresponda a la parte derecha del movimiento tipo 2 tenemos que $AB = 1$ y $A^2 + ABC + B^2 = 0$, entonces tendríamos que $B = A^{-1}$. Con esto tendríamos que la otra ecuación queda de la siguiente forma: $A^2 + C + A^{-2} = 0$ y así $C = -A^2 - A^{-2}$. Así, las reglas antes descritas se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{Regla 1} \quad \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\
\text{Regla 2.1} \quad \langle \times \rangle &= A \langle \curvearrowright \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowleft \rangle \\
\text{Regla 2.2} \quad \langle \times \rangle &= A \langle \curvearrowleft \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowright \rangle \\
\text{Regla 3} \quad \langle L \cup \bigcirc \rangle &= (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle
\end{aligned}$$

Notemos que el polinomio tiene una sola variable A .

Ahora, vamos a comprobar que el movimiento de Reidemeister tipo 3 permanece invariante en las reglas antes definidas. Haremos uso de que dicho polinomio deja invariante al tipo dos para comprobar el tipo 3:

$$\begin{aligned}
\langle \times \rangle &= A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle \\
&= A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle = \langle \times \rangle
\end{aligned}$$

Antes de ver lo que pasa con el movimiento de Reidemeister tipo 1, calcularemos algunos polinomios para enlaces sencillos. Iniciaremos con el enlace trivial:

$$\langle \bigcirc \cup \bigcirc \rangle = -(A^{-2} + A^2) \langle \bigcirc \rangle = -(A^{-2} + A^2)$$

Ahora calcularemos el polinomio de un enlace simple no trivial, el enlace de Hopf:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{H} \rangle &= A \langle \mathfrak{H} \rangle + A^{-1} \langle \mathfrak{H} \rangle \\
&= A(A \langle \mathfrak{H} \rangle + A^{-1} \langle \mathfrak{H} \rangle) + A^{-1}(A \langle \mathfrak{H} \rangle + A^{-1} \langle \mathfrak{H} \rangle) \\
&= A(A(-(A^2 + A^{-2})) + A^{-1}) + A^{-1}(A + A^{-1}(-(A^2 + A^{-2}))) \\
&= -A^4 - A^{-4}
\end{aligned}$$

Dados estos ejemplos veamos que pasa cuando tratamos de encontrar el polinomio del movimiento de Reidemeister tipo 1:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle &= A \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle \\
&= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle \\
&= -A^3 \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle &= A \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle \\
&= A \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle \\
&= -A^{-3} \langle \overline{\mathfrak{H}} \rangle
\end{aligned}$$

Vemos que con las reglas antes dadas el movimiento Reidemeister de tipo 1 no deja a nuestro polinomio invariante. Para arreglar este hecho vamos a darle una

orientación a nuestra proyección del nudo o enlace, y a cada cruce le daremos un número +1 o -1 siguiendo el mismo concepto que el utilizado para encontrar el número de enlace del nudo.

Definición 4.1. El **número de torsión** del nudo se define como la suma de todos los +1 o -1 correspondientes a la proyección del nudo. Denotamos este número como $w(K)$ donde K es el nudo.

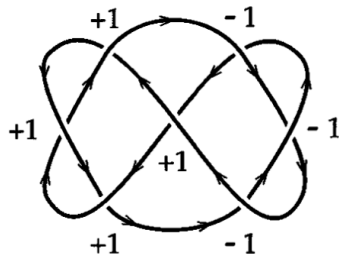


Figura 4.1. Nudo con número de torsión 1. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Notemos que el concepto de número de torsión puede ser visto como dos veces el número de enlace del nudo. También tenemos que notar que el movimiento de Reidemeister tipo 1 siempre cambia el número de torsión en ± 1 .

Vamos a definir un nuevo polinomio llamado el **X-polinomio**. Este polinomio sera para enlaces orientados. Sea L un enlace orientado, el X-polinomio de L , $X(L)$, está definido como:

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle >$$

Donde $w(L)$ es el número de torsión de L y $\langle L \rangle$ es el soporte polinomial de L . A partir de que $w(L)$ y $\langle L \rangle$ no se ven afectados por movimientos de Reidemeister tipo 2 y 3, $X(L)$ tampoco se ve afectado por estos movimientos². Vamos a comprobar que para movimientos de tipo 1 también permanece invariante:

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+1)} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+1)} (-A^3 \langle L \rangle) \\ &= (-A^3)^{-w(L)} (-A^{-3}) (-A^3 \langle L \rangle) \\ &= (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle \\ &= X(L) \end{aligned}$$

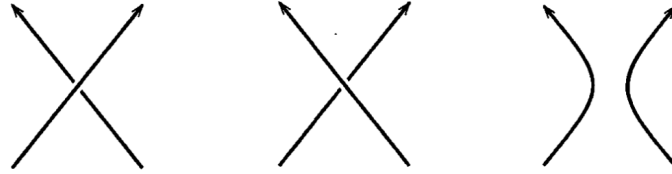
²El hecho que $w(L)$ no se ve afectado por movimientos de tipo 2 y 3 se puede ver en las figuras 3.22 y 3.23.

Donde L es el enlace original y L' es el enlace con el efecto del movimiento de tipo 1 y análogamente se puede demostrar la otra versión del movimiento tipo 1. Así, $X(L)$ es invariante respecto al movimiento de tipo 1.

Con esto concluimos que el X-polinomio es invariante, es decir, no depende de la proyección del nudo que tomemos.

El polinomio de Jones original se obtiene del X-polinomio reemplazando cada A en el polinomio por $t^{-\frac{1}{4}}$. Es decir el polinomio de Jones resultante es un polinomio en la variable t y potencias que no necesariamente son enteros. Denotamos este polinomio como $V(L)$.

Calcularemos el polinomio de Jones, sin desarrollarlo completamente, de las proyecciones orientadas en la siguiente figura, para encontrar una relación entre ellos que será de utilidad más adelante:



Llamaremos a estas proyecciones L_+ , L_- y L_0 respectivamente. Entonces los polinomios serían:

$$\begin{aligned} V(L_+) &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L_+)} \langle L_+ \rangle \\ &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-1} (t^{-\frac{1}{4}} \langle \text{D}\text{C} \rangle + t^{\frac{1}{4}} \langle \text{A} \rangle) \\ &= -t^{\frac{1}{2}} \langle \text{D}\text{C} \rangle - t \langle \text{A} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(L_-) &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L_-)} \langle L_- \rangle \\ &= (-t^{-\frac{3}{4}})^1 (t^{-\frac{1}{4}} \langle \text{A} \rangle + t^{\frac{1}{4}} \langle \text{D}\text{C} \rangle) \\ &= -t^{-\frac{1}{2}} \langle \text{D}\text{C} \rangle - t^{-1} \langle \text{A} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(L_0) &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L_0)} \langle L_0 \rangle \\ &= \langle \text{D}\text{C} \rangle \end{aligned}$$

Dadas las 3 ecuaciones encontradas anteriormente podemos notar que $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(L_0) = 0$. Esta relación fue obtenida por Vaughan Jones y será utilizada más adelante.

Como ejemplo encontraremos el polinomio de Jones del enlace de la figura 4.2. Por simplicidad llamaremos a este enlace H . Anteriormente habíamos calculado su soporte polinomial y es claro que su número de torsión es 2, con esto tenemos:

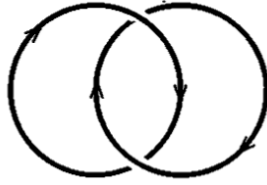


Figura 4.2. Enlace de Hopf orientado. Fuente: tomada de [1, Cap.6].

$$\begin{aligned}
 V(H) &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(H)} \langle H \rangle \\
 &= (-t^{-\frac{3}{4}})^{-2} (-t^{-3} - t^3) \\
 &= (-t^{\frac{3}{2}}) (-t^{-3} - t^3) \\
 &= t^{-\frac{9}{2}} + t^{\frac{9}{2}}
 \end{aligned}$$

4.2. Polinomios de Nudos Alternantes

Nos gustaría tener una segunda forma de pensar en el soporte polinomial de un nudo. Para ello nos enfocaremos en las reglas 2.1 y 2.2.

Se debe notar que dada una proyección en el plano, cada cruce en la proyección divide al plano en 4 regiones. Etiquetaremos dos de ellas como A y las otras dos como B siguiendo la siguiente regla: rotamos la hebra que pasa por arriba en contra de las manecillas del reloj hasta que intersecte con la otra hebra, cubriendo así dos regiones que son las que etiquetaremos como A y las otras dos les llamaremos B , como se muestra en la siguiente figura.

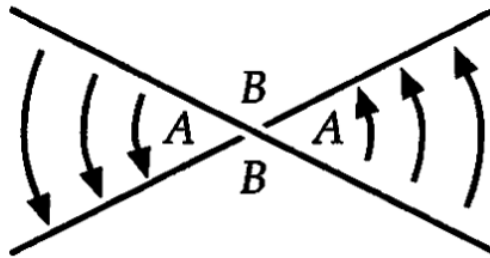


Figura 4.3. Etiquetado de las regiones de un cruce. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

En la figura 4.4 tenemos un etiquetado con un nudo completo, para este caso hay que etiquetar cada uno de los puntos de cruce.

En las reglas 2.1 y 2.2 del soporte polinomial en el caso anterior, dividíamos un cruce de dos maneras distintas. Cuando las regiones del cruce están etiquetadas, la primer división abre un camino entre las dos regiones etiquetadas como A y la segunda división abre un camino entre las dos regiones etiquetadas como B .

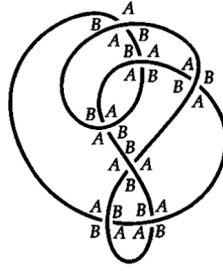


Figura 4.4. Etiquetado en un nudo. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Llamaremos a estas divisiones **A-división** y **B-división**, respectivamente.

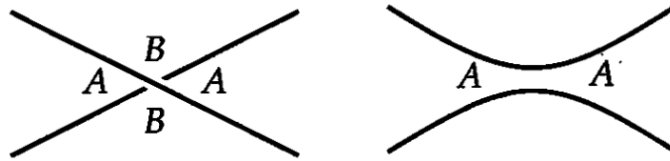


Figura 4.5. A-división. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

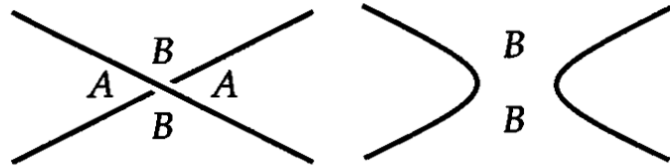


Figura 4.6. B-división. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Supongamos que L es un enlace con una proyección con n cruces. Las reglas 2.1 y 2.2 nos permiten determinar el soporte polinomial de L usando el soporte polinomial de L_1 y L_2 , cada uno de estos con un menor número de cruces que L . Los enlaces L_1 y L_2 se obtienen dividiendo un cruce particular de la proyección de L como una A-división y después como una B-división.

Luego podemos usar nuevamente las reglas 2.1 y 2.2 para determinar el soporte polinomial de L_1 y L_2 en términos de soportes polinomiales de pares de enlaces con menor número de cruce que los anteriores. Así el soporte polinomial de L depende ahora de 4 enlaces con un menor número de cruces. Continuando con un procedimiento similar tendríamos que el soporte polinomial de L depende de los soportes polinomiales de 2^n enlaces que no poseen cruces.

Definición 4.2. Un **estado** es una elección de como dividir todos los cruces en una proyección L .

El soporte polinomial de L entonces depende de todos los soportes polinomiales de todos los posibles estados de la proyección L . Dado un estado particular de L ,

¿cuál es el soporte polinomial para el correspondiente enlace L' , donde L' es un enlace final del soporte polinomial de L ? Debido a que el enlace L' no posee cruces, podemos decir que L' es un conjunto de nudos triviales sin traslaparse en el plano. Necesitamos encontrar la forma del soporte polinomial de esto, para ello tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *El soporte polinomial de un conjunto de n nudos triviales es $(-A^2 - A^{-2})^{n-1}$.*

Demostración. Procederemos por inducción: Consideremos $n = 1$, para este caso tendríamos que el soporte polinomial de un nudo trivial es $(-A^2 - A^{-2})^0 = 1$ y esto es cierto ya que es exactamente la regla 1 del soporte polinomial.

Supongamos que el soporte polinomial de un conjunto de k nudos triviales es $(-A^2 - A^{-2})^{k-1}$. Probaremos que es para $k + 1$ también se cumple: Al tener un conjunto con $k + 1$ enlaces triviales, podemos agrupar los primeros k y dejar al último solo. Por la regla 3 tendríamos que esto equivale a tener el factor $(-A^2 - A^{-2})$ por el soporte polinomial de los k nudos triviales, pero por hipótesis de inducción tenemos que dicho soporte polinomial es $(-A^2 - A^{-2})^{k-1}$ por lo tanto el soporte polinomial para un conjunto de $k + 1$ nudos triviales es $(-A^2 - A^{-2})(-A^2 - A^{-2})^{k-1} = (-A^2 - A^{-2})^k$ con lo cual queda demostrado el enunciado. \square

Así si $|S|$ es el número de enlaces triviales en L' , entonces por la proposición anterior sabemos que el soporte polinomial de L' es simplemente $(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$.

Ahora surge la siguiente pregunta: ¿cuál es el coeficiente que multiplica a esta expresión en el soporte polinomial? Debemos notar que cada vez que dividimos un cruce, cada uno de los polinomios resultantes son multiplicados por A o A^{-1} dependiendo si fue una A-división o una B-división. Así el polinomio de L' esta siendo multiplicado por $A^{a(S)}A^{-b(S)}$, donde $a(S)$ es el número de A-divisiones en S y $b(S)$ es el número de B-divisiones en S . Así, la contribución total al soporte polinomial por un estado S es $A^{a(S)}A^{-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$.

Tomemos por ejemplo un estado particular del nudo trébol para ver esto, ver figura 4.7.

Podemos observar que en este estado solo se forma un nudo trivial y posee una A-división y dos B-divisiones por lo que el aporte de este estado al soporte polinomial del nudo trébol sería: $AA^{-2}(-A^2 - A^{-2})^{1-1} = A^{-1}$.

Entonces el soporte polinomial de la proyección de un enlace L sería la suma

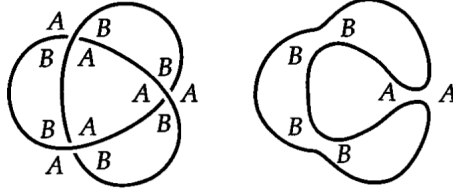


Figura 4.7. Un estado particular del nudo trébol. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

de todas las contribuciones de todos los posibles estados del enlace.

$$\langle L \rangle = \sum_S A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$$

Este punto de vista del soporte polinomial tiene algunas ventajas. En particular, si queremos calcular el soporte polinomial de una proyección dada de un enlace L , podemos simplemente listar todos los enlaces obtenidos al dividir todos los cruces de L en cualquier posible combinación y entonces calcular la contribución de cada termino. Veamos por ejemplo el soporte polinomial del nudo trébol: dado que el nudo trébol posee tres cruces la cantidad de estados es $2^3 = 8$ y tenemos:



Figura 4.8. Estados del nudo trébol. Fuente: tomada de [1, Cap. 3].

Calculando el polinomio:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + A(-A^2 - A^{-2}) + A(-A^2 - A^{-2}) + A(-A^2 - A^{-2}) \\ &\quad + A^{-1} + A^{-1} + A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) \\ &= A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + 3A(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) \\ &= A^7 - A^3 - A^{-5} \end{aligned}$$

Ahora iniciaremos el trabajo con nudo o enlaces alternantes.

Definición 4.3. Llamaremos a una proyección alternante **reducida** si no existen cruces innecesarios en la proyección.

En la figura 4.9 podemos observar nudos alternantes no reducidos, y podemos notar que es fácil reducir estos nudos utilizando movimientos de Reidemeister. Pero no es fácil comprobar cuando un nudo ya está reducido, como ejemplo de nudos alternantes reducidos tenemos al nudo trébol.

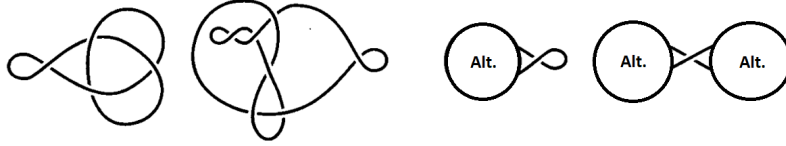


Figura 4.9. Nudos alternantes no reducidos. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

El tratar de encontrar un polinomio para enlaces alternantes dio lugar a las siguientes conjeturas:

1. Dos proyecciones alternantes reducidas de un mismo nudo tienen el mismo número de cruces.
2. Una proyección reducida de un nudo alternante tiene el menor número de cruces de todas las proyecciones del nudo.

Ambas conjeturas fueron demostradas en 1986 utilizando polinomios. Juntas, estas conjeturas implican que podemos determinar el número de cruces de cualquier nudo alternante. Simplemente tomamos una proyección alternante y la reducimos. A partir de que todas las proyecciones alternantes para un nudo tienen el mismo número de cruces, y el menor número de cruces ocurre en una proyección alternante reducida. El menor número de cruces es el número de cruces de esa proyección.

Nos centraremos en comprobar la primera conjetura. Iniciaremos con la siguiente definición.

Definición 4.4. Llamaremos el **lapso** de un polinomio a la diferencia entre la potencia más grande en el polinomio y la potencia más baja en el polinomio.

Tomemos por ejemplo el polinomio $A^3 - 2A^2 + 1 - A^{-1} - 7A^{-2}$, el lapso de este polinomio es $3 - (-2) = 5$.

Veremos el lapso del soporte polinomial de un nudo utilizando las reglas antes vistas. A pesar de que el soporte polinomial no es un invariante para nudos, el lapso del soporte polinomial sí es un invariante, es decir, dado un nudo K si calculamos el soporte polinomial de cualquier proyección del nudo y calculamos su lapso, tendríamos siempre el mismo lapso.

Proposición 4.2. *El lapso del soporte polinomial de un nudo es un invariante.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos diferentes proyecciones, P_1 y P_2 , para un mismo nudo. Ya sabemos que los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3 dejan invariante al soporte polinomial del nudo y por lo tanto el lapso de dicho

soporte queda invariante, vamos a probar que el movimiento de tipo 1 también deja invariante al lapso del soporte polinomial. Sabemos que el movimiento de tipo 1 multiplica al soporte polinomial por A^3 o A^{-3} . Si multiplicamos por A^3 , esta multiplicación aumenta en 3 el mayor exponente del polinomio, pero también aumenta en 3 al menor exponente lo cual permite que el lapso del soporte polinomial no cambie. De manera análoga funciona si multiplicamos por A^{-3} . Así el lapso se mantiene constante por los movimientos de Reidemeister y por lo tanto es un invariante. \square

Ahora probaremos una serie de enunciados clave para la demostración de la conjetura.

Proposición 4.3. *Sea K un nudo y S un estado del soporte polinomial de K . Entonces el mayor exponente de dicho soporte polinomial es $a(S) - b(S) + 2|S| - 2$.*

Demostración. Sabemos que para cada estado S en una proyección, su soporte polinomial está dado por $A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$. Ya que $|S| \geq 1$, tenemos que el mayor exponente de $(-A^2 - A^{-2})^{|S|-1}$ se da cuando tomamos al exponente positivo de A y con esto concluimos que el mayor exponente para dicho soporte polinomial es $a(S) - b(S) + 2|S| - 2$. \square

Notemos que si consideramos todos los posibles estados en un nudo, el mayor exponente del soporte polinomial del nudo se da en el estado donde $|S|$ y $a(S)$ son lo más grande posible y $b(S)$ es lo más pequeño posible. En otras palabras, necesitamos el estado con la mayor cantidad de círculos disjuntos en su proyección y si el nudo posee n cruces necesitamos que $a(S) = n$ y $b(S) = 0$.

Veamos que sucede con $|S|$ en una proyección alternante. Al realizar el etiquetado con A y B en las regiones del nudo podemos notar que los vértices en una región específica del nudo poseen todos la misma etiqueta, es decir, todos son A o todos son B . Esto facilita el uso de las etiquetas ya que podemos pintar las A-regiones, regiones con todos sus vértices etiquetados con A, de gris y dejar en blanco todas las B-regiones como se ve en la figura.

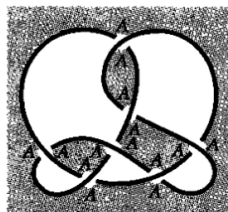


Figura 4.10. A-regiones en gris y B-regiones en blanco. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Además recordemos que necesitamos realizar la mayor cantidad de A-divisiones por lo que veamos que pasa con el nudo alternante. Al realizar las A-divisiones lo que hacemos es que las etiquetas A tengan vía libre entre sí. Con esto tenemos que al hacer todas las posibles A-divisiones de todos los posibles cruces lo que hacemos es separar todas las B-regiones, es decir, las B-regiones se convierten en la cantidad de discos disjuntos que posee el nudo.

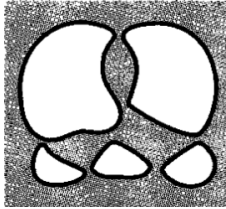


Figura 4.11. Separación de las B-regiones. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Ahora queremos saber si este procedimiento nos da el número máximo de círculos disjuntos de todos los posibles estados, para ello tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.4. *Sea K un nudo y S_1, S_2 estados del soporte polinomial de K tales que S_1 difiere de S_2 cambiando una A-división por una B-división. Entonces la potencia más grande del soporte polinomial de S_1 es más grande o igual que la potencia más grande del soporte polinomial de S_2 .*

Demostración. Por la proposición 4.3 tenemos que la potencia más grande para el soporte polinomial de S_1 está dado por $a(S_1) - b(S_1) + 2|S_1| - 2$, análogamente para S_2 tenemos $a(S_2) - b(S_2) + 2|S_2| - 2$. Ya que S_1 y S_2 difieren únicamente cambiando una A-división por una B-división, tenemos que la potencia más grande para S_2 puede ser escrita como $(a(s_1) - 1) - (b(S_1) + 1) + 2|S_2| - 2$. Y nuevamente dado que el cambio entre estados es solo una división tenemos que $|S_2| = |S_1| \pm 1$ ya que no sabemos si agrega o quita regiones. Así, la potencia más grande de S_2 queda como $a(S_1) - b(S_1) - 2 + 2(|S_1| \pm 1) - 2$ que puede ser reescrita como $(a(S_1) - b(S_1) + 2|S_1| - 2) \pm 2 - 2$ y esta cantidad es menor o igual que el mayor exponente de S_1 . \square

De forma análoga podemos probar que el menor exponente en el soporte polinomial de un nudo se da cuando se realizan todas las B-divisiones posibles.

Lema 4.1. *Si K tiene una proyección alternante reducida de n cruces, entonces el lapso de $\langle K \rangle$ es $4n$.*

Demostración. Sabemos que el lapso del soporte polinomial de K no depende de la proyección que tomemos, entonces tomemos la proyección alternante reducida del

nudo K . Sea W la cantidad de B-regiones de K y D la cantidad de A-regiones de K . Entonces por las proposiciones 4.3 y 4.4 tenemos que el mayor exponente del soporte polinomial de K esta dado por $a(S_A) - b(S_A) + 2|S_A| - 2$, donde S_A es el estado que posee todas las A-divisiones, sustituyendo los valores tenemos que el mayor exponente está dado por $n + 2W - 2$. Análogamente obtenemos que el menor exponente está dado por $-n - 2D + 2$. Dado que el lapso es la diferencia entre ellos tenemos que el lapso es $2n + 2(W + D) - 4$, pero $W + D$ es el número total de regiones en el nudo y este total es la cantidad de puntos cruce más dos, entonces el lapso es $2n + 2(n + 2) - 4 = 4n$. \square

Ahora demostraremos la conjetura.

Teorema 4.2.1. *Dos proyecciones alternantes reducidas del mismo nudo tienen el mismo número de cruces.*

Demostración. Si la primer proyección tiene n cruces, entonces por el lema 4.1 el lapso de su soporte polinomial es $4n$. Pero sabemos que el lapso del soporte polinomial es un invariante de los nudos, es decir no cambia cuando cambiamos las proyecciones. Así el lapso del soporte polinomial correspondiente a la segunda proyección es también $4n$. Esto junto con el lema 4.1 implican que el número de cruces en la segunda proyección es también n . Por lo tanto ambas proyecciones tienen el mismo número de cruces. \square

La conjetura 2 es difícil de comprobar, pero veremos una versión reducida de esta conjetura:

Teorema 4.2.2. *La proyección alternante reducida posee el menor número de cruces de todas las proyecciones alternantes de un mismo nudo.*

Demostración. Para cualquier proyección no reducida de un nudo, podemos volverla una proyección reducida a través de movimientos de Reidemeister, quitando así todos los cruces que sean innecesarios. Y por el teorema 4.2.1 todas las proyecciones alternantes reducidas poseen el mismo número de cruce para un mismo nudo. Así, las proyecciones alternantes no reducidas poseen un número de cruce mayor que la proyección reducida. \square

Ahora veremos algunos otros resultados interesantes.

Teorema 4.2.3. *Sean K_1 y K_2 dos nudos. Si $K_1 \# K_2$ es un nudo alternante, entonces K_1 y K_2 son nudos alternantes.*

Demostración. Recordamos que al realizar la composición de los nudos no estamos agregando cruces en las proyecciones así pues si la proyección de la composición es alternante podemos encerrar en un círculo una de sus componentes y supongamos que este nudo es no alternante, pero si fuera no alternante implicaría que la proyección de la composición no puede ser alternante ya que poseería por lo menos un par de puntos cruces no consecutivos en los cuales no se cumple la alternancia de los cruces, así el nudo debe ser un nudo alternante. Análogamente para el otro nudo, así si la composición de dos nudos es alternante los nudos componentes deben ser alternantes. \square

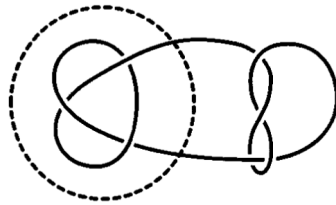


Figura 4.12. Un nudo compuesto alternante. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Corolario 4.1. $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ para $K_1 \# K_2$ nudo alternante.

Demostración. Elegimos una proyección alternante reducida para $K_1 \# K_2$. Por el teorema 4.2.3 tenemos que K_1 es un nudo alternante reducido, por la conjetura dos tenemos que el número de cruces de K_1 es el que aparece en esta proyección reducida. El mismo procedimiento puede ser aplicado para K_2 . Así, dado que $K_1 \# K_2$ es alternante, el menor número de cruces ocurre en esta proyección. Por lo tanto $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$. \square

Recordemos que anteriormente mencionamos que $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ para cualesquiera nudos K_1 y K_2 es un problema abierto, pero acabamos de comprobar que para los nudos alternantes esta conjetura es cierta.

Además, existen otros nudos llamados **nudos adecuados** que contienen a todos los nudos alternantes, para los cuales los argumentos que funcionan en nudos alternantes pueden ser extendidos a los nudos adecuados. Pero esto no es suficiente para decir que se cumplen en cualquier nudo.

4.3. El Polinomio de Alexander

Iniciaremos describiendo el procedimiento para poder calcular el **polinomio de Alexander** de un nudo para posteriormente demostrar que es un invariante en

la teoría de nudos. Este tipo de polinomio es para diagramas orientados D de un nudo K .

Sea v la cantidad de puntos cruce en el diagrama del nudo. Digamos que estos puntos cruces son c_1, c_2, \dots, c_v . Sabemos que al tener un diagrama con v cruces, la cantidad de regiones en las que divide el diagrama del nudo al plano es de $v + 2$. Etiquetaremos estas regiones como $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{v+1}$.

Denotamos los cruces que pasan por abajo por dos puntos antes de iniciar el cruce y consideramos un cruce arbitrario c_i para denotar las regiones en el plano.

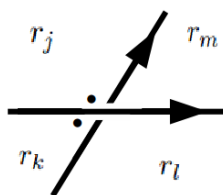


Figura 4.13. Notación del cruce y etiquetado de las regiones. Fuente: tomada de [2, Cap. 3].

Notemos que las regiones están etiquetadas iniciando desde donde están los puntos y luego seguimos el orden en contra de las agujas del reloj. Ahora definimos la siguiente ecuación lineal:

$$c_i(r) = tr_j - tr_k + r_l - r_m = 0$$

tomando una suma alternante de los símbolos que representan las cuatro regiones y multiplicando a las regiones que tienen punto por t .

Definiendo esta ecuación para cada cruce en el diagrama obtenemos un sistema de v ecuaciones con $v + 2$ variables, el cual puede ser representado por una matriz, M , de $v \times (v + 2)$, donde cada entrada es $\pm t$, ± 1 o 0 . En la matriz descrita, cada fila representa un punto cruce del diagrama y cada columna representa una región.

El siguiente paso en el proceso es elegir dos regiones vecinas r_p y r_q , y borrar sus respectivas columnas v_p y v_q de la matriz. Cualquiera dos regiones vecinas que elijamos no afectan el resultado. Este resultado será probado más adelante.

Borrando las columnas obtenemos una matriz cuadrada de $v \times v$, $M_{p,q}$. Dicha matriz es llamada la **matriz de Alexander** del nudo K . Ahora sea $\Delta_{p,q}(t)$ el determinante de la matriz, este determinante es un polinomio en términos de t con coeficientes enteros. Dependiendo de la elección de p y q este determinante puede variar en un factor $\pm t^k$

El hecho de que el polinomio puede diferir en un factor $\pm t^k$ cuando cambiamos

el diagrama del nudo sugiere que necesitamos cambiar la forma del polinomio para que no pase esto. Una posible forma es decir $\Delta_K(t) = \pm t^n \Delta_{p,q}(t)$ de manera que el término de menor grado en $\Delta_K(t)$ es una constante positiva. Esta forma es nuestro invariante conocido como el **polinomio de Alexander**.

Antes de pasar a la demostración veremos un ejemplo del cálculo del polinomio de Alexander. Consideremos el diagrama del nudo trébol, nombramos las regiones de la siguiente manera:

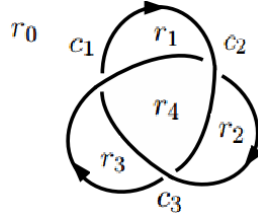


Figura 4.14. Nudo trébol etiquetado. Fuente: tomada de [2, Cap. 3].

Realizando el análisis en cada cruce obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$c_1(r) = tr_0 - tr_3 + r_4 - r_1 = 0$$

$$c_2(r) = tr_0 - tr_1 + r_4 - r_2 = 0$$

$$c_3(r) = tr_0 - tr_2 + r_4 - r_3 = 0$$

Así obtenemos la matriz que representa este sistema de ecuaciones.

$$M = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & -t & 1 \\ t & -t & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -t & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminamos las columnas correspondientes a las regiones r_3 y r_4 , y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$\begin{aligned} \Delta_{3,4}(t) &= \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ t & -t & -1 \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} \\ &= t \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 0 & -t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & -1 \\ t & -t \end{vmatrix} \\ &= t^3 - t^2 + t \\ &= t(1 - t + t^2) \end{aligned}$$

Entonces quitamos el factor t del polinomio para obtener lo que deseamos.

$$\Delta_K(t) = 1 - t + t^2$$

Eligiendo las regiones r_0 y r_1 en lugar de r_3 y r_4 tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1}(t) &= \begin{vmatrix} 0 & -t & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -t & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= t \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -t & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -t & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - t + t^2 \end{aligned}$$

Llegando al mismo resultado. Ahora nos dedicaremos a probar que dicho procedimiento es invariante para nudos equivalentes. Le daremos un índice a cada región en el diagrama, este procedimiento asigna un entero a cada región llamado el **índice** de la región. Estos enteros están determinados asignando cualquier entero p a una región elegida y luego determinar los índices de las regiones restantes estableciendo el índice $p + 1$ si cruzamos a la región de derecha a izquierda y $p - 1$ si cruzamos a la región de izquierda a derecha.

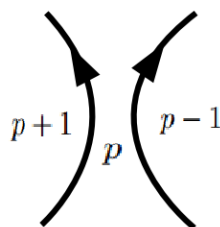


Figura 4.15. Indizado de regiones. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Claramente, ya que todas las regiones pueden ser alcanzados por arcos que pasan por arriba en el diagrama, este proceso determina los índices de todas las regiones del diagrama.

Consideremos ahora los puntos cruces del diagrama. Claramente, cada punto tendrá dos regiones con el mismo índice, digamos p , un índice $p + 1$ y otro índice $p - 1$.

En el proceso para encontrar el polinomio de Alexander tenemos que borrar dos columnas de la matriz correspondiente a dos regiones adyacentes en el diagrama. Tomando el proceso de indizado antes descrito, cualesquiera dos regiones adyacentes tendrían índices que difieren en 1.

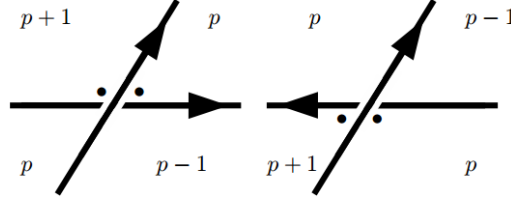


Figura 4.16. Etiquetados en las regiones de un cruce. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Proposición 4.5. Si reducimos M a una matriz cuadrada $M_{p,q}$ borrando dos de sus columnas con índices p y $p+1$ entonces el determinante de las dos matrices podría diferir solo por un factor $\pm t^k$ para cualesquiera dos columnas.

Demostración. Sea R_p la suma de todas las columnas de índice p . Ya que cada fila de la matriz tiene un t , un $-t$, un 1 y un -1 , tenemos que:

$$\sum_p R_p = 0$$

donde 0 representa la columna cuyas entradas son 0 . Ahora multiplicamos cada columna de índice p por un factor t^{-p} . Ya que la fila de la matriz corresponde a un punto cruce y cada punto cruce tiene sus regiones determinadas tenemos:

$$c_L(r) = t \cdot t^{-p} \cdot r_j - t \cdot t^{-(p+1)} \cdot r_k + t^{-p} \cdot r_l - t^{-(p-1)} \cdot r_m$$

en el caso del primer tipo de cruce en la figura 4.16 y

$$c_R(r) = t \cdot t^{-(p+1)} \cdot r_j - t \cdot t^{-p} \cdot r_k + t - (p-1) \cdot r_l - t^{-p} \cdot r_m$$

para el segundo tipo de cruce en la figura 4.16. Claramente en ambos casos la suma de los coeficientes es cero y así la suma de las columnas en la matriz también serían el vector 0 como anteriormente habíamos visto.

$$\sum_p t^{-p} R_p = 0$$

y si restamos las dos sumatorias obtendríamos

$$\sum_p (t^{-p} - 1) R_p = 0$$

Ya que $t^0 = 1$, los términos en R_0 en la suma se cancelan unos con otros. Así, a

partir de la suma anterior, podemos ver que si r_j es una región de índice p con su correspondiente columna v_j entonces $(t^{-p}-1)v_j$ se puede expresar como combinación lineal de las otras columnas en la con índice distinto de 0. También, los coeficientes de las columnas en la combinación lineal son de la forma $-(t^{-q}-1)$ para cada columna de índice q .

Ahora consideremos las matrices $M_{0,j}$ y $M_{0,k}$ donde las columnas v_j y v_k tienen índices p y q respectivamente. Por el resultado anterior y por propiedades de los determinantes, podemos ver que:

$$(t^{-q}-1)\Delta_{0,j}(t) = \pm(t^{-p}-1)\Delta_{0,k}(t)$$

Entonces, ya que los índices de las regiones son determinadas añadiendo una constante, si v_l y v_m son dos columnas más de M de índice r y s respectivamente entonces obtenemos las relaciones:

$$(t^{r-q}-1)\Delta_{l,j}(t) = \pm(t^{r-p}-1)\Delta_{l,k}(t)$$

$$(t^{q-s}-1)\Delta_{k,l}(t) = \pm(t^{q-r}-1)\Delta_{k,m}(t)$$

las cuales combinamos para obtener:

$$\Delta_{l,j}(t) = \pm \frac{(t^{q-r}-1)(t^{r-p}-1)}{t^{q-s}-1} \Delta_{k,m}(t)$$

finalmente, hacemos $p = r + 1$ y $s = q + 1$ y obtenemos:

$$\Delta_{l,j} = \pm t^{q-r} \Delta_{k,m}$$

Así, al remover cualesquiera dos columnas de la matriz con índices consecutivos, el determinante de la matriz resultante difiere únicamente en un factor $\pm t^{q-r}$. \square

Se tiene que tener en cuenta que eliminar algunas columnas daría como resultado el determinante 0, por ejemplo con el nudo trébol como se vio anteriormente, la columna correspondiente a r_0 y la correspondiente a r_4 son linealmente dependientes por ello alguna de ellas debe ser eliminadas en el procedimiento.

Diferentes diagramas para el mismo nudo pueden dar matrices distintas, así necesitamos definir una noción de equivalencia de matrices y así decir que para un mismo nudo sus matrices pertenecen a una misma clase de equivalencia.

Definición 4.5. Dos matrices M_1 y M_2 son ϵ -**equivalentes** si es posible transformar una en la otra por una sucesión de las siguientes operaciones:

1. Multiplicando una fila o columna por -1 .
2. Intercambiando dos filas o columnas.
3. Sumando una fila o columna a otra.
4. Añadiendo o removiendo los bordes de la matriz donde el elemento de la esquina es 1 y todos los demas 0.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}$$

5. Multiplicando o dividiendo una columna por t .

Por propiedades de los determinantes, es fácil verificar que las operaciones en matrices antes descritas solo cambian la matriz a lo sumo en un factor de $\pm t^k$. Así cualesquiera dos matrices ϵ -equivalentes tienen determinantes que difieren a lo sumo por un factor $\pm t^k$.

Proposición 4.6. *La matriz N obtenida cambiando los signos de todas las entradas negativas de M es ϵ -equivalente a M .*

Demostración. Dado que a medida que se avanza por los cruces del nudo, los índices de las regiones van alternando entre par e impar se tiene que en las entradas de las regiones impares en un mismo cruce son ambas positivas o negativas, y las correspondientes regiones pares son de signo opuesto. Entonces si multiplicamos cada columna impar por -1 cada fila tendría solo entradas negativas o solo entradas positivas. Finalmente podemos multiplicar todas las filas negativas por -1 para obtener una matriz con solo entradas positivas. Así, las matrices son ϵ -equivalentes. \square

Sabemos que si dos diagramas de nudos son equivalentes, uno puede ser transformado en el otro vía los movimientos de Reidemeister. Usaremos este hecho para probar que nudos equivalentes tienen matrices de Alexander ϵ -equivalentes.

Teorema 4.3.1. *Si dos diagramas D_1 y D_2 representan al mismo nudo entonces sus matrices cuadradas M_1 y M_2 son ϵ -equivalentes.*

Demostración. Probaremos esto viendo los efectos que tienen los movimientos de Reidemeister en la matriz del diagrama.

1. Para el movimiento tipo 1 tenemos que antes de realizar el movimiento, el nudo posee dos regiones y después de realizarlo se añade una nueva región y un punto cruce en el diagrama. Llamaremos a la matriz de Alexander del nudo

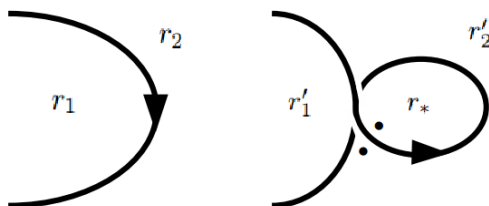


Figura 4.17. Regiones en el movimiento de tipo 1. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

antes de realizar la transformación M . El movimiento de tipo 1 tiene el efecto que añade una nueva fila y una nueva columna en la matriz M . Esta nueva matriz sería de esta forma:

$$\begin{pmatrix} -t & -1 & t+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & M & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

donde las primeras tres columnas representan a r_* , r'_1 y r'_2 respectivamente. Ya que las regiones r'_1 y r'_2 son adyacentes, podemos eliminar sus respectivas columnas sin afectar a la matriz. Esto nos deja con la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicando la fila 1 por -1 y dividiéndola entre t obtenemos una matriz ϵ -equivalente a la anterior de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_{1,2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Finalmente al suprimir la fila 1 y columna 1 obtenemos $M_{1,2}$, que es una matriz de Alexander del nudo original. Y Así la matriz de Alexander es ϵ -equivalente si aplicamos el movimiento de tipo 1.

2. Para el movimiento de tipo 2, iniciamos con tres regiones en el diagrama y la transformación crea otras dos regiones y dos puntos de cruce. La matriz

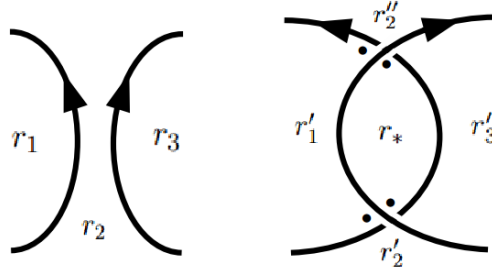


Figura 4.18. Regiones en el movimiento de tipo 2. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

después de la transformación quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & -t & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & | & | & & & & \\ \vdots & u & v & w & & & & M_{1,2} \\ 0 & | & | & | & & & & \end{pmatrix}$$

Donde las primeras cinco columnas representan a r_* , r'_1 , r'_2 , r''_2 y r'_3 respectivamente, y u es la columna de r_1 en la matriz original y las entradas de r_2 están divididas entre v y w (ya que la región r_2 se dividió en r'_2 y r''_2 al realizar el movimiento). Ya que r'_1 y r''_2 son adyacentes, eliminaremos sus respectivas columnas de la matriz. Quedando la matriz de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & & & M_{1,2} \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix}$$

Ahora dividimos la primer columna entre t y sumamos la primer fila con la

segunda para cancelar algunos términos, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos la columna r_* a r'_3 y multiplicamos la primer columna por -1 para obtener:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & | & & & & \\ \vdots & v & & M_{1,2} & & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix}$$

Finalmente eliminamos el borde para obtener:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & & & & \\ v & & M_{1,2} & & \\ | & & & & \end{pmatrix}$$

Podemos cancelar las entradas de v aplicando los movimientos de la ϵ equivalencia. Primero multiplicamos la fila 1 de la matriz por una potencia apropiada de t , sumando la fila 1 a otra fila de tal forma que los términos en la columna 1 se cancelen y entonces dividir la fila 1 por la misma potencia de t para tener 1 en la primer entrada y así eliminar el borde obteniendo $M_{1,2}$ que es una matriz de Alexander valida para el diagrama original. Y así la matriz de Alexander es ϵ -equivalente si aplicamos el movimiento de tipo 2.

3. En el caso del movimiento tipo 3, el número de regiones no cambia pero las entradas al rededor de los puntos cruces si difieren: Antes de la transformación,

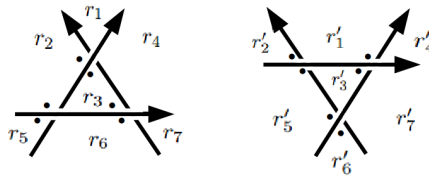


Figura 4.19. Regiones en el movimiento tipo 3. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

la matriz que obtenemos es:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 & 0 & -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u & v & \vdots & w & x & y & z & & X & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

Donde las primeras 7 columnas son de $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ y r_7 respectivamente, y X es el resto de la matriz. Después de realizar el movimiento obtenemos la siguiente matriz:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & t & -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 0 & -t & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & t & 1 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u & v & \vdots & w & x & y & z & & X & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

Donde las primeras 7 columnas son de $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, r'_5, r'_6$ y r'_7 respectivamente, y X es el resto de la matriz. Por la proposición 4.6 se tiene que las siguientes matrices son equivalentes a M y M' respectivamente:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u' & v' & \vdots & w' & x' & y' & z' & & X' & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \\ u & v & \vdots & w & x & y & z & & X & \\ | & | & 0 & | & | & | & | & & & \end{pmatrix}$$

Comprobaremos que estas dos matrices son ϵ -equivalentes. Para simplificar los cálculos realizaremos los movimientos unicamente en las primeras tres filas y siete columnas, pero tenemos que tener en cuenta que dada la naturaleza del resto de la matriz debemos evitar cambiar las entradas de $w' - z'$, entonces solo es permitido sumar la columna 3 a alguna otra columna. Entonces usando los movimientos descritos en la definición 4.5 tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & -t & 0 & -t^2 & -t & 0 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & -t^2 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & t & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & t & t & 1 \\ t & 0 & t & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así N es ϵ -equivalente a N' y con esto M es ϵ -equivalente a M' , lo cual

demuestra que el movimiento de tipo 3 deja matrices ϵ -equivalentes.

Entonces dos diagramas de un mismo nudo poseen matrices de Alexander ϵ -equivalentes. \square

Con esto queda demostrado que el polinomio de Alexander es un invariante para los nudos ya que el termino que difiere en el determinante de la matriz de Alexander se omite para obtener el polinomio de Alexander.

El polinomio de Alexander también puede ser calculado vía algunas reglas como con el polinomio de Jones, las reglas a seguir para el polinomio de Alexander son las siguientes:

1. $\Delta(\bigcirc) = 1$
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) = 0$

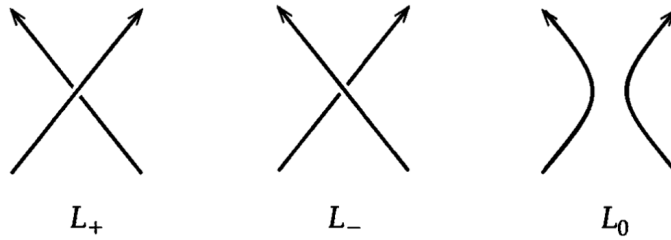


Figura 4.20. Bases del polinomio de Alexander. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Donde L_+ , L_- y L_0 se muestran en la figura 4.20. Esta forma de calcular el polinomio de Alexander nos será de utilidad para encontrar relaciones con otros polinomios.

4.4. Polinomio HOMFLY

El **polinomio HOMFLY** es una generalización de los polinomios de Jones y de Alexander, el cual es un polinomio de Laurent en dos variables, usualmente estas variables son m y l .

Las reglas para el cálculo de este polinomio son las siguientes:

1. $P(\bigcirc) = 1$
2. $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$

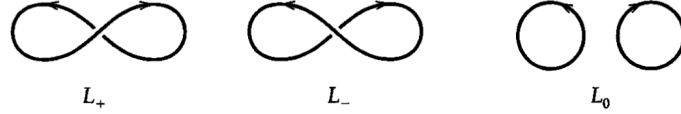


Figura 4.21. Bases para el polinomio HOMFLY. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Nuevamente queremos que el polinomio para el nudo trivial sea 1 y además pedimos que cumpla una condición muy parecida a las obtenidas en el polinomio de Alexander y el polinomio de Jones, pero ahora L_+ , L_- y L_0 están dados por:

Notemos que L_+ y L_- son no nudos entonces $P(L_+) = P(L_-) = 1$ y por la relación que nos proporciona la segunda regla tendríamos que $mP(L_0) = -(l + l^{-1})$. Así, obtendríamos que $P(L_0) = -m^{-1}(l + l^{-1})$.

Este polinomio tiene muchas propiedades interesantes. Iniciaremos con la siguiente propiedad:

Proposición 4.7. Sean L_1 y L_2 enlaces cualesquiera, entonces se cumple que $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$.

Demostración. Se demostrara por inducción sobre el número de cruces de L_2 , $c(L_2)$. Para $c(L_2) = 0$ tenemos que L_2 es un nudo trivial y así $L_1 \# L_2 = L_1$, con esto $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2) \Rightarrow P(L_1) = P(L_1)$ lo cual comprueba el caso base. Ahora asumimos que para $c(L_2) < n$ se cumple que $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$. Sea $c(L_2) = n$, elegimos un cruce el cual al cambiarlo de orden, la hebra que pasa por arriba ahora pasa por abajo y viceversa, disminuye el número de cruce en el diagrama minimal. Asumamos que este cruce es positivo, visto desde el número de enlace, con esto tenemos que $L_2^+ = L_2$ y consideramos los enlaces L_2^- y L_2^0 , en el cruce que estamos considerando. Tenemos $c(L_2^-), c(L_2^0) \leq n-1$, y por hipótesis de inducción tendríamos $P(L_1 \# L_2^-) = P(L_1)P(L_2^-)$ y $P(L_1 \# L_2^0) = P(L_1)P(L_2^0)$. Por la regla 2 tenemos $lP(L_1 \# L_2^+) + l^{-1}(L_1 \# L_2^-) + mP(L_1 \# L_2^0) =$ y con esto:

$$\begin{aligned}
 lP(L_1 \# L_2) &= lP(L_1 \# L_2^+) \\
 &= -l^{-1}P(L_1 \# L_2^-) - mP(L_1 \# L_2^0) \\
 &= -lP(L_1)P(L_2^-) - mP(L_1)P(L_2^0) \\
 &= P(L_1)(-lP(L_2^-) - mP(L_2^0)) \\
 &= lP(L_1)P(L_2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(L_1 \# L_2) = P(L_2)P(L_1)$. Análogamente si el cruce es negativo, solo cambia el hecho que $P(L_2^-) = P(L_2)$. \square

Para la próxima propiedad se requiere de la siguiente definición:

Definición 4.6. Sean L_1 y L_2 dos enlaces, la **unión dividible** de estos enlaces, denotada por $L_1 \cup L_2$, es un enlace simple que se obtiene colocando a L_1 cerca de L_2 sin traslaparse o entrelazarse de ninguna forma.

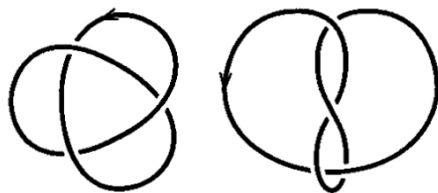


Figura 4.22. Unión dividible. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

Proposición 4.8. Sean L_1 y L_2 dos enlaces cualesquiera, entonces se cumple que $P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$.

Demostración. Tenemos $L_+ = L_- = L_1 \# L_2$ y $L_0 = L_1 \cup L_2$, aplicando la regla dos tenemos:

$$lP(L_1 \# L_2) + l^{-1}P(L_1 \# L_2) + mP(L_1 \cup L_2) = 0$$

Por la proposición 4.7 y despejando $P(L_1 \cup L_2)$ tenemos:

$$P(L_1 \cup L_2) = \frac{-lP(L_1)P(L_2) - l^{-1}P(L_1)P(L_2)}{m}$$

Así

$$P(L_1 \cup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2).$$

□

La propiedad que nos proporciona la proposición 4.7 nos dice que los polinomios de los nudos se comportan exactamente como lo hacen los enteros. Además nos dice que el polinomio HOMFLY no es un invariante completo, ya que es incapaz de distinguir algunos enlaces, en particular no distingue el orden de las sumas conexas, es decir, no distingue entre $L_1 \# L_2$ y $L_2 \# L_1$ aunque estos nudos no sean equivalentes.

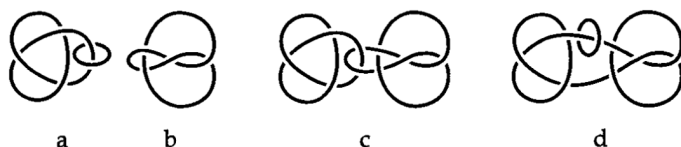


Figura 4.23. Enlaces iguales vía el polinomio HOMFLY. Fuente: tomada de [1, Cap. 6].

En la figura siguiente (a) y (b) representan dos enlaces L_1 y L_2 , respectivamente, (c) y (d) representan dos formas de sumas conexas distintas pero el polinomio HOMFLY no distingue.

Ahora veremos que el polinomio HOMFLY se relaciona con el polinomio de Jones y de Alexander. Iniciaremos con el polinomio de Jones, si reemplazamos l por it^{-1} y m por $i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$ en el polinomio HOMFLY, donde i es la unidad imaginaria. Veremos esto a través de la regla 2 del polinomio HOMFLY:

$$(it^{-1})P(L_+) + (it^{-1})^{-1}P(L_-) + i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})P(L_0) = 0.$$

Con esto

$$it^{-1}P(L_+) - itP(L_-) + i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})P(L_0) = 0.$$

Entonces

$$t^{-1}P(L_+) - tP(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})P(L_0) = 0.$$

Que es la relación encontrada para el polinomio de Jones. De manera similar podemos ver que la regla 2 del polinomio de Alexander puede transformarse en la regla 2 del polinomio HOMFLY.

Dado que ya demostramos que tanto el polinomio de Alexander como el polinomio de Jones son invariantes para la teoría de nudos, tenemos que el polinomio HOMFLY debe ser un invariante también.

CONCLUSIONES

1. El comprender el concepto matemático de nudo, nos ayuda a comprender mejor nuestra realidad y explicar cómo es que está conformado lo que nos rodea. Además al ser un área relativamente nueva hay muchas preguntas aún sin resolver.
2. La clasificación de nudos es un problema de gran importancia, hasta la fecha no se ha logrado clasificar todos los nudos de 14 o más cruces, esto debido a que los invariantes existentes no son lo suficientemente fuertes.
3. Los invariantes antes estudiados no son completos ya que cada uno de ellos posee excepciones en las cuales aunque los nudos sean distintos al calcular los invariantes estos son los mismos, por ello en la clasificación se opta por utilizar más de un invariante para ser más precisos.
4. El cálculo en general de los invariantes es complicado de realizar a mano, es por ello que se opta por el uso de software especializado en el cálculo de los mismos.
5. Los polinomios son los invariantes más fuertes que existen en la teoría de nudo, su cálculo depende de algunas otras áreas de la matemática principalmente del manejo de matrices.

RECOMENDACIONES

1. Si se desea estudiar más respecto de la teoría de nudos, se debe poseer una fuerte base en topología y álgebra moderna.
2. El interesado en darle continuación al presente trabajo debe hacer un estudio de las aplicaciones que esta teoría tiene en otras áreas de la ciencia.
3. Estudiar a profundidad las propiedades que los determinantes de matrices poseen ya que es de utilidad en el cálculo del polinomio de Alexander.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Adams, C. (1994). *The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. Estados Unidos: W.H. Freeman and Company.
- [2] Alexander, J. (1928). *Topological Invariants of Knots and Links*. Estados Unidos: trans. Amer. Math.
- [3] Almeida, M. (2012). *Knot Theory*. Estados Unidos.
- [4] Ardanza-trevijano, S., Arsuaga, J., Crespo, J., Extremiana, J., Hernández, L., Rivas, M., Roca, J., & Vázquez, M. (2006). *Invariantes Topológicos en el ADN, los Fullerenos y la Teoría de Elección Social*. España.
- [5] Ardila, P. (2010). Introducción a los Invariantes de Nudos. *Revista Tecno Lógicas*, 115-127.
- [6] Azcurra, P. (2008). *Nudos virtuales e invariantes*. Argentina.
- [7] Burde, G., & Zieschang, H. (2003). *Knots*. Alemania: Walter de Gruyter.
- [8] Cabrera, H., & Gómez, J. (2007). Nudos en Biología. *Miscelánea Matemática*, 53-66.
- [9] Cisneros, J. (2011). *Introducción a la Teoría de Nudos*. México.
- [10] Crowell, R., & Fox, R. (1963). *Introduction to Knot Theory*. Estados Unidos: Springer-Verlag.
- [11] Elhamdadi, M., & Nelson, S. (2015). *Quandles an Introduction to the Algebra of Knots*. Estados Unidos: American Mathematical Society (AMS).
- [12] Kosniowski, C. (1986). *Topología Algebraica*. España: Reverté S.A.
- [13] Lackenby, M. (s.f.). *Elementary Knot Theory*. Inglaterra.

- [14] Long, E. (2015). *Topological Invariants of Knots: three Routes to the Alexander Polynomial*. Inglaterra.
- [15] Lozano, M. (s.f.). *La teoría de nudos en el siglo XX*. España.
- [16] Murasugi, K. (1996). *Knot Theory and its Applications*. Estados Unidos.
- [17] Raymond, W. (1991). *An Introduction to Knot Theory*. Inglaterra: Springer.
- [18] Roberts, J. (2015). *Knots Knots*. Estados Unidos.
- [19] Silver, D. (2006). Orígenes de la teoría de nudos. *Investigación y Ciencia*, 78-85.
- [20] Tompkins, J. (2005). *Modeling DNA with Knot Theory: An Introduction*. Estados Unidos.
- [21] Vendramin, L. (2014). *Teoría combinatoria de nudos*. Argentina.
- [22] Wang, L. (s.f.). *Introducción a la teoría de nudos*. España.